ESPACIOS RECUBRIDORES

FRANCISCO URBANO

1. Introducción y ejemplos

Definición 1. Un espacio topológico X es *localmente arco-conexo* si todo punto posee una base de entornos arco-conexos, esto es si para todo punto $x \in X$ y todo entorno U de x existe un entorno arco-conexo V de x con $V \subset U$.

Es un ejercicio fácil probar que: *X es localmente arco-conexo si y sólo si las componentes arco-conexas de los abiertos de X son abiertos de X.*

Para evitar tener ejemplos triviales y conseguir teoremas de clasificación, a lo largo del tema y sin que se imponga como hipótesis,

TODOS LOS ESPACIOS TOPOLOGICOS SERAN ARCO-CONEXOS Y LOCALMENTE ARCO-CONEXOS.

Definición 2. Sea X un espacio topológico. Un *recubridor* de X es un par (Y, p), donde Y es un espacio topológico y $p : Y \to X$ es una aplicación continua cumpliendo la siguiente propiedad: para todo punto $x \in X$ existe un entorno abierto y arco-conexo U de x tal que cada componente arco-conexa de $p^{-1}(U)$ se aplica homeomorficamente sobre U por la aplicación p. A p, que trivialmente es sobre, se le llama la aplicación recubridora. Por abuso de lenguaje, a Y se le llamará recubridor de X.

Ahora vamos a dar ejemplos de espacios recubridores.

- Sean X e Y espacios topológicos y $p : Y \to X$ un homeomorfismo. Entonces (Y, p) es un recubridor de X.
- Sea $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ la proyección de la esfera sobre el espacio proyectivo real. Entonces $(\mathbb{S}^n, p)$ es un recubridor de $\mathbb{RP}^n$.
- Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ la exponencial compleja, $p(t) = e^{it}$. Entonces $(\mathbb{R}, p)$ es un recubridor de $\mathbb{S}^1$.
- Sea $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ la aplicación $p(z) = z^n$, donde z es un complejo de módulo 1. Entonces $(\mathbb{S}^1, p)$ es un recubridor de $\mathbb{S}^1$.
- Sean (Y_i, p_i) recubridores de X_i con $i = 1, 2$. Entonces $(Y_1 \times Y_2, p_1 \times p_2)$ es un recubridor de $X_1 \times X_2$.
- Sea X la unión de dos circunferencias de radio 1 de $\mathbb{R}^2$ centradas en $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ (Tienen en común el punto $(0, 0)$). Sea $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \text{ o } y \text{ son enteros}\}$ y $p : Y \to X$ la aplicación dada por

$$p(x,y) = \begin{cases} (-1,0) + (\cos 2\pi y, \sin 2\pi y) & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z} \\ (1,0) + (-\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) & \text{si} \quad y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Entonces (Y, p) es un recubridor de X.

Proposición 1. *Sea (Y, p) un recubridor de X. Entonces:*

(1) p es una aplicación abierta.
(2) p es un homeomorfismo local, esto es una aplicación continua tal que para todo $y \in Y$ existen abiertos V y W en Y y X respectivamente con $y \in V$ y $p : V \to W$ es un homeomorfismo.

Es fácil probar que no todo homeomorfismo local es una aplicación recubridora, como lo prueba el siguiente ejemplo. Consideremos $p : (0, 4\pi) \to \mathbb{S}^1$ la aplicación $p(t) = e^{it}$. Entonces es facil probar que p es un homeomorfismo local, pero en cambio no es una aplicación recubridora, pues el punto $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$ no posee un entorno fundamental.

2. Grupo fundamental y elevación de aplicaciones al recubridor

Lema 1. *Sea (Y, p) un recubridor de X, $x_0 \in X$ y $y_0 \in p^{-1}(x_0)$.*

(1) Si $f : [0, 1] \to X$ es un arco continuo con $f(0) = x_0$, entonces existe un único arco continuo $g : [0, 1] \to Y$ cumpliendo $g(0) = y_0$ y $p \circ g = f$. A g le llamamos una elevación de f al recubridor.
(2) Si $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ es una aplicación continua con $H(0, 0) = x_0$, entonces existe una única aplicación continua $G : [0, 1] \times [0, 1] \to Y$ cumpliendo $G(0, 0) = y_0$ y $p \circ G = H$. A G le llamamos una elevación de H al recubridor.

Como consecuencia del Lema 1, se pueden probar facilmente los siguientes resultados:

Corolario 1. *Si (Y, p) un recubridor de X, entonces los cardinales de los conjuntos $p^{-1}(x)$ con $x \in X$ son iguales. A este número (posiblemente infinito) le llamamos el numero de hojas del recubridor.*

Corolario 2. *Sea (Y, p) un recubridor de X, $x \in X$ e $y \in p^{-1}(x)$. Entonces $p_* : \Pi(Y, y) \to \Pi(X, x)$ es un monomorfismo.*

Del Corolario 2 se sigue que para todo $y \in p^{-1}(x)$, $p_*(\Pi(Y, y))$ es un subgrupo de $\Pi(X, x)$ isomorfo a $\Pi(Y, y)$. Además, si $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ y $\gamma : [0, 1] \to Y$ es un arco uniendo y_1 con y_2, entonces puede probarse que

$$[p \circ \gamma]^{-1} * p_*(\Pi(Y, y_1)) * [p \circ \gamma] = p_*(\Pi(Y, y_2)),$$

esto es que $p_*(\Pi(Y, y_1))$ y $p_*(\Pi(Y, y_2))$ son subgrupos conjugados de $\Pi(X, x)$.

También se tiene que si H es un subgrupo de $\Pi(X, x)$ conjugado de $p_*(\Pi(Y, y))$ con $y \in p^{-1}(x)$, esto es si

$$H = [f]^{-1} * p_*(\Pi(Y, y)) * [f],$$

con $[f] \in \Pi(X, x)$, entonces $H = p_*(\Pi(Y, z))$ donde $z = g(1)$ siendo g el levantamiento de f al recubridor con $g(0) = y$. Por tanto, estos argumentos prueban que:

Proposición 2. *Si (Y, p) es un recubridor de X y $x \in X$, entonces la familia de subgrupos*
$$\{p_*(\Pi(Y, y)) \,|\, y \in p^{-1}(x)\}$$
forma exactamente una clase de conjugación de subgrupos de $\Pi(X, x)$.

En el Lema 1 se han levantado al recubridor aplicaciones continuas definidas en $[0, 1]$ y en $[0, 1] \times [0, 1]$. Ahora vamos a abordar si es posible levantar al recubridor aplicaciones continuas definidas en un espacio topológico arbitrario. Por razones obvias, a este espacio topológico le seguimos pidiendo la conexión por arcos tanto global como local.

Sea pues (Y, p) un recubridor de X, Z un espacio topológico y $\Phi : Z \to X$ una aplicación continua. Si $z_0 \in Z$, $x_0 = \Phi(z_0)$ e $y_0 \in p^{-1}(x_0)$, entonces ¿existe una aplicación continua $\Psi : Z \to Y$ cumpliendo $\Psi(z_0) = y_0$ y $p \circ \Psi = \Phi$? En caso de que exista ¿es única?.

Vamos a obtener una condición necasaria para la existencia. Si tal aplicación Ψ existe, pasando a grupos fundamentales tenemos que
$$\Phi_*(\Pi(Z, z_0)) = p_*(\Psi_*(\Pi(Z, z_0))) \subset p_*(\Pi(Y, y_0)).$$
Lo sorprendente de esta condición es que también es suficiente.

Theorem 1. *Sea (Y, p) un recubridor de X, Z un espacio topológico y $\Phi : Z \to X$ una aplicación continua. Si $z_0 \in Z$, $x_0 = \Phi(z_0)$ e $y_0 \in p^{-1}(x_0)$, entonces existe una aplicación continua $\Psi : Z \to Y$ con $\Psi(z_0) = y_0$ y $p \circ \Psi = \Phi$ si y sólo si $\Phi_*(\Pi(Z, z_0)) \subset p * (\Pi(Y, y_0))$. Además tal elevación Ψ es única.*

Observemos que como $\Pi([0, 1]) = \Pi([0, 1] \times [0, 1]) = 0$, estos espacios cumplen la condición del teorema 1. Además el teorema 1 pone de manifiesto como una propiedad de la topología, la existencia de una aplicación continua, se reduce a un problema algebráico.

Una aplicación interesante del teorema 1 es que los recubridores de un grupo topológico son también grupos topológicos, convirtiendo a la aplicación recubridora en un homomorfismo de grupos.

Proposición 3. *Sea G un grupo topológico con elemento neutro e, $(\tilde{G}, p)$ un recubridor suyo y $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$. Entonces $\tilde{G}$ admite una estructura de grupo topológico con elemento neutro $\tilde{e}$ que convierte a p en un homomorfismo de grupos.*

3. Isomorfismos de recubridores. Grupo de transformaciones de un recubridor

Definición 3. Sean (Y_1, p_1) e (Y_2, p_2) dos recubridores de X. Un *homomorfismo* de (Y_1, p_1) en (Y_2, p_2) es una aplicación continua $\Phi : Y_1 \to Y_2$ tal que $p_2 \circ \Phi = p_1$. Si además Φ es un homeomorfismo, diremos que Φ es un *isomorfismo* de (Y_1, p_1) sobre (Y_2, p_2). En tal caso decimos que los recubridores son isomorfos.

Son claras las siguientes propiedades:

- La composición de homomorfismos es un homomorfismo.
- Si (Y, p) es un recubridor de X, entonces la identidad $Id : Y \to Y$ es un isomorfismo de recubridores.

- El inverso de un isomorfismo es un isomorfismo.

Si (Y, p) es un recubridor de X, entonces un isomorfismo de (Y, p) sobre (Y, p) es llamado una *transformación recubridora* o un *automorfismo* del recubridor. Si representamos por $A(Y, p)$ al conjunto de transformaciones recubridoras, es claro que $A(Y, p)$ es un grupo respecto de la composición, el cual es un subgrupo del grupo de homeomorfismos de Y.

Si Φ es un homomorfismo del recubridor (Y_1, p_1) en (Y_2, p_2), entonces Φ es un levantamiento al recubridor Y_2 de la aplicación recubridora p_1 (ver definición). Por tanto usando la unicidad del teorema 1 se tiene que

Corolario 3. *(1) Si (Y_i, p_i), $i = 1, 2$ son recubridores de X y Φ, Ψ son homomorfismos de (Y_1, p_1) en (Y_2, p_2) con $\Phi(y) = \Psi(y)$ para algún $y \in Y_1$, entonces $\Phi = \Psi$.*

(2) Si (Y, p) es un recubridor de X y $\Phi \in A(Y, p)$ con $\Phi(y) = y$ para algún $y \in Y$, entonces $\Phi = Id$. Por tanto cualquier transformación recubridora de (Y, p) diferente de la identidad actua sobre Y sin puntos fijos.

Usando ahora la existencia de levantamientos al recubridor del teorema 1 se tiene que

Corolario 4. *Sea X un espacio topológico, (Y_i, p_i), $i = 1, 2$ recubridores de X, $x \in X$ e $y_i \in p_i^{-1}(x)$.*

(1) Existe un homomorfismo Φ de (Y_1, p_1) a (Y_2, p_2) con $\Phi(y_1) = y_2$ si y sólo si $(p_1)_*(\Pi(Y_1, y_1)) \subset (p_2)_*(\Pi(Y_2, y_2))$.

(2) Existe un isomomorfismo Φ de (Y_1, p_1) sobre (Y_2, p_2) con $\Phi(y_1) = y_2$ si y sólo si $(p_1)_*(\Pi(Y_1, y_1)) = (p_2)_*(\Pi(Y_2, y_2))$.

Como consecuencia de la proposición 2 y corolario 4,(2) se obtiene que

Theorem 2. *Sea X un espacio topológico, x un punto suyo e (Y_i, p_i), $i = 1, 2$ recubridores de X. Entonces (Y_1, p_1) e (Y_2, p_2) son isomorfos si y sólo si la clases de conjugación asociadas a los recubridores son iguales en el grupo $\Pi(X, x)$, esto es*

$$\{(p_1)_*(\Pi(Y_1, y)) \mid y \in p_1^{-1}(x)\} = \{(p_2)_*(\Pi(Y_2, y)) \mid y \in p_2^{-1}(x)\}.$$

Conviene observar que en el anterior teorema el resultado es independiente del punto x de X escogido.

Ejemplo 1. *Sea X un espacio simplemente conexo e (Y, p) un recubridor suyo. Entonces $p : Y \to X$ es un homeomorfismo. Por tanto dicho espacio sólo admite, salvo isomorfismos, al par (X, Id) como recubridor.*

Ejemplo 2. *Sea $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad. Como su grupo fundamental es isomorfo a $\mathbb{Z}$ (en particular abeliano), sus clases de conjugación son los subgrupos suyos, esto es los subgrupos que se corresponden con $m\mathbb{Z}$ con $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$. Por tanto usando los resultados anteriores, es fácil probar que, salvo isomorfismos, los recubridores de $\mathbb{S}^1$ son:*

$$p_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1,\ p(t) = e^{it};\ \textit{para } m \textit{ entero positivo}, p_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\ p_m(z) = z^m.$$

Ejemplo 3. *Sea* $\mathbb{RP}^n$ *el espacio proyectivo, cuyo grupo fundamental es isomorfo a* $\mathbb{Z}_2$*. Como es abeliano, sus clases de conjugación son sus subgrupos, esto es* $\{0, \mathbb{Z}_2\}$*. Por tanto, los resultados anteriores prueban que los recubridores de* $\mathbb{RP}^n$ *son* $(\mathbb{RP}^n, Id)$ *y* $(\mathbb{S}^n, p)$*.*

La pregunta natural que surge es: Dado $x \in X$ y una clase de conjugación de subgrupos de $\Pi(X, x)$, ¿ existe un recubridor de X que tiene a dicha clase como clase de conjugación asociada ?. La respuesta la daremos mas adelante y no siempre es positiva. Lo será, si X admite un recubridor especial al que llamaremos universal y que vamos a tratar de definir ahora. Para ello estudiemos el siguiente resultado.

Proposición 4. *Sean* (Y_i, p_i), $i = 1, 2$ *recubridores de* X *y* $\Phi : Y_1 \to Y_2$ *un homomorfismo de recubridores. Entonces* (Y_1, Φ) *es un recubridor de* Y_2*.*

Definición 4. Un recubridor $(\tilde{X}, p)$ de un espacio X es llamado *universal* si $\tilde{X}$ es simplemente conexo.

Observemos que si (Y, q) es otro recubridor universal de X, se tiene que las clases de conjugación asociadas a ambos recubridores son iguales (son las clases de conjugación trivial) y por el teorema 2 dichos recubridores son isomorfos. Por tanto, salvo isomorfismos de recubridores, el recubridor universal, de existir, es único.

Además, si X tiene un recubridor universal $(\tilde{X}, p)$ e (Y, q) es un recubridor de X, entonces del corolario 4,(1) se sigue que existe un homomorfismo de recubridores $\Phi : \tilde{X} \to Y$, y por tanto, la proposición 4 nos asegura que $(\tilde{X}, \Phi)$ es un recubridor de Y. Así el recubridor universal de X, de existir, recubre a todos los recubridores de X. De ahí el nombre de universal.

Para profundizar en el estudio del grupo de transformaciones de un recubridor, vamos a probar que la fibra de cada punto es un espacio homogeneo.

Sea (Y, p) un recubridor de X y x un punto de X. Definimos

$$\begin{aligned} p^{-1}(x) \times \Pi(X, x) &\to p^{-1}(x) \\ (y, \alpha) &\mapsto y \cdot \alpha, \end{aligned}$$

donde $y \cdot \alpha$ se define como sigue: si $\alpha = [f]$ con f un lazo en X alrededor de x y $\tilde{f}$ es el levantamiento de f a Y con $\tilde{f}(0) = y$, entonces $y \cdot \alpha = \tilde{f}(1)$. La definición es correcta pues si g es otro lazo en X con $g \simeq f$, entonces levantando a Y la correspondiente homotopía, se tiene que $\tilde{g}(1) = \tilde{f}(1)$.

Veamos que la aplicación anterior define una acción a la derecha de $\Pi(X, x)$ sobre $p^{-1}(x)$. En efecto es muy fácil probar que

$$y \cdot 1 = y, \quad (y \cdot \alpha) \cdot \beta = y \cdot (\alpha * \beta),$$

siendo 1 el neutro de $\Pi(X, x)$. Además, dicha acción es *transitiva*, en el sentido de que si y_1, y_2 son puntos de $p^{-1}(x)$, entonces tomando un arco f en Y que los una y siendo $\alpha = [p \circ f]$, se tiene que $y_1 \cdot \alpha = y_2$.

Por tanto hemos visto que $p^{-1}(x)$ es un $\Pi(X, x)$-*espacio homogéneo por la derecha*. Ahora, para identificar a este espacio homogéneo, basta con calcular el subgrupo estabilizador en algun punto $y \in p^{-1}(x)$, que es definido por

$$H_y = \{\alpha \in \Pi(X,x) \,|\, y \cdot \alpha = y\}.$$

Es sencillo comprobar que

$$H_y = p_*(\Pi(Y,y)),$$

y así, como espacios homogéneos, podemos identificar:

$$p^{-1}(x) \equiv \Pi(X,x)/p_*(\Pi(Y,y)),$$

donde y es cualquier punto de $p^{-1}(x)$. Como consecuencia de esta identificación, tenemos

Corolario 5. *Si (Y,p) es un recubridor de X, entonces el número de hojas del recubridor es el índice del subgrupo $p_*(\Pi(Y,y))$ en $\Pi(X,x)$, done $x \in X$ e $y \in p^{-1}(x)$.*

Ahora vamos a relacionar el grupo de transformaciones recubridoras con el grupo de automorfismos del espacio homogéneo $p^{-1}(x)$.

Un *automorfismo* del espacio homogéneo $p^{-1}(x)$ es una biyección $\varphi : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$ tal que

$$\varphi(y \cdot \alpha) = \varphi(y) \cdot \alpha, \quad \forall y \in p^{-1}(x), \quad \forall \alpha \in \Pi(X,x).$$

Al grupo (respecto a la composición) de los automorfismos de $p^{-1}(x)$ lo representamos por $Aut(p^{-1}(x))$.

Sea ahora $\Phi \in Aut(Y,p)$. Entonces Φ es una biyección de $p^{-1}(x)$ y se prueba facilmente que

$$\Phi(y \cdot \alpha) = \Phi(y) \cdot \alpha,$$

esto es, $\Phi_{|p^{-1}(x)}$ es un automorfismo de $p^{-1}(x)$. Como esta aplicación respeta la composición, se tiene bien definido un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} F : Aut(Y,p) &\to Aut(p^{-1}(x)) \\ \Phi &\mapsto \Phi_{|p^{-1}(x)}. \end{aligned}$$

Theorem 3. *El homomorfismo anterior F es un isomorfismo.*

Ahora usamos un resultado algebraico, que dice:

Theorem 4. *Sea E un espacio homogéneo sobre G (esto es G actua transitivamente por la derecha sobre E) y H el subgrupo estabilizador correspondiente a un punto $y \in E$. Entonces existe un isomorfismo*

$$Aut(E) \equiv N(H)/H,$$

donde $N(H) = \{g \in G \,|\, gHg^{-1} = H\}$ es el normalizador de H, esto es el mayor subgrupo de G en el que H es un subgrupo normal.

Del teorema 3 y 4, obtenemos la siguiente identificación algebraica del grupo de transformaciones de un recubridor:

Corolario 6. *Si (Y, p) es un recubridor de X, entonces el grupo de transformaciones del recubridor es isomorfo al grupo cociente $N(p_*(\Pi(Y,y)))/p_*(\Pi(Y,y))$, siendo y cualquier punto en $p^{-1}(x)$ y x cualquier punto de X,*

$$Aut(Y,p) \equiv N(p_*(\Pi(Y,y)))/p_*(\Pi(Y,y)).$$

Definición 5. Un recubridor (Y, p) de X es llamado *regular* si $p_*(\Pi(Y,y))$ es un subgrupo normal de $\Pi(X,x)$, siendo $y \in p^{-1}(x)$. La definición no depende ni de x ni de y. Observemos que en tal caso $N(p_*(\Pi(Y,y))) = \Pi(X,x)$ y que si $\Pi(X,x)$ es abeliano entonces todos sus recubridores son regulares.

Corolario 7. *Sea (Y, p) un recubridor de X y x un punto de X.*

(1) Si (Y, p) es regular, entonces

$$Aut(Y,p) \equiv \Pi(X,x)/p_*(\Pi(Y,y)), \quad y \in p^{-1}(x).$$

(2) Si (Y, p) es el recubridor universal, entonces

$$Aut(Y,p) \equiv \Pi(X,x),$$

y por tanto el número de hojas del recubridor es el orden del grupo $\Pi(X,x)$.

El símbolo $\equiv$ significa isomorfismo de grupos.

Ejemplo 4. *Sea $(\mathbb{R}, p)$ el recubridor de $\mathbb{S}^1$ con $p(t) = e^{it}$. Probar que el grupo de transformaciones de (Y, p) es dado por*

$$Aut(\mathbb{R},p) = \{\Phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \Phi_n(t) = t + 2\pi n\}.$$

Ejemplo 5. *Sea $(\mathbb{S}^n, p)$ el recubridor de dos hojas de $\mathbb{RP}^n$. Probar que el grupo de transformaciones de $(\mathbb{S}^n, p)$ es dado por*

$$Aut(\mathbb{RP}^n,p) = \{Id, A \mid A(p) = -p\}.$$

Ejemplo 6. *Sea $(\mathbb{S}^1, p_n)$ el recubridor de n-hojas de $\mathbb{S}^1$ con $p_n(z) = z^n$. Probar que el grupo de transformaciones de $(\mathbb{S}^1, p_n)$ es dado por*

$$Aut(\mathbb{S}^1,p_n) = \{\Phi_k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \mid \Phi_k(z) = e^{\frac{2\pi k}{n} i} z,\, k = 0, 1, \cdots, n-1\}.$$

Theorem 5. *No existe una aplicación continua $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ que respete antipodas, esto es que cumpla $F(-x) = -F(x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^2$.*

A este resultado se le llama Teorema de Borsuk-Ulam. Es fácil comprobar que la versión del teorema de Borsuk-Ulam dada en teorema 3 del tema "Grupo fundamental" es una consecuencia del teorema 5.

4. Recubridores regulares y espacios cocientes

Si (Y, p) es un recubridor de X, podemos definir una relación de equivalencia en Y por: $y_1 R y_2$ si y sólo si $p(y_1) = p(y_2)$, esto es $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ para algún $x \in X$. Es claro que p induce una aplicacíon $\hat{p} : Y/R \to X$ por $\hat{p}([y]) = p(y)$, siendo $[y]$ la clase de equivalencia de y. Como p es sobre, continua y abierta, entonces p es una identificación, y el primer teorema de homeomorfía nos dice que $\hat{p}$ es un homeomorfismo. Por tanto *el espacio base de todo recubridor es un cociente del recubridor*. Pero esta relación de equivalencia se define en función del recubridor. Si queremos definir una relación de equivalencia en un espacio para que él sea un recubridor del cociente, hemos de analizar en profundidad la relación anterior.

Sabemos que $Aut(Y, p)$ actua sobre la fibra de todo punto de x, pero no tiene que actuar transitivamente, esto es dados $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ no tiene por qué existir $\Phi \in Aut(Y, p)$ con $\Phi(y_1) = (y_2)$. Así, la relación anterior no es la inducida por $Aut(Y, p)$. En el siguiente resultado vemos cuando esas dos relaciones coinciden.

Lema 2. *Sea (Y, p) un recubridor de X. Entonces $Aut(Y, p)$ actua transitivamente sobre $p^{-1}(x)$ con $x \in X$ si y sólo si (Y, p) es un recubridor regular de X.*

Como consecuencia, se tiene que si (Y, p) es un recubridor regular de X, entonces X es homeomorfo a $Y/Aut(Y, p)$, siendo dicha relación la siguiente: $y_1 R y_2$ si y sólo si existe $\Phi \in Aut(Y, p)$ con $\Phi(y_1) = y_2$.

Como $Aut(Y, p)$ es un subgrupo de $Homeo(Y)$, la pregunta es: Sea Y un espacio topológico y G un subgrupo del grupo $Homeo(Y)$, ¿ bajo que condiciones de G, (Y, π) es un recubridor de Y/G, siendo π la proyección, y $G = Aut(Y, \pi)$?

Es claro que hay condiciones necesarias para ello. Como $Aut(Y, p)$ actua sin puntos fijos sobre Y, G debe actuar sin puntos fijos sobre Y. Vamos a refinar esta condición necesaria a una que involucre topología. Si $y \in Y$ y W es la componente aarco-conexa de $p^{-1}(U)$ que contiene a y, siendo U un entorno elemental de $x = p(y)$, entonces todo $\Phi \in Aut(Y, p)$ con $\Phi \neq Id$ cumple que $\Phi(U) \cap U = \emptyset$. Popr tanto esta es una condición necesaria más fuerte que actuar sin puntos fijos.

Definición 6. Sea Y un espacio topológico y G un subgrupo del grupo de $Homeo(Y)$. Diremos que G actua propia y discontinuamente sobre Y si para todo punto $y \in Y$ existe un entorno V de y tal que $\Phi(V) \cap V = \emptyset$ para todo $\Phi \in G$ con $\Phi \neq Id$. Es claro que en tal caso, G actua sobre Y sin puntos fijos.

Proposición 5. *Sea Y un espacio topológico (con las típicas propiedades) y G un subgrupo del grupo $Homeo(Y)$ que actua propia y discontinuamente sobre Y. Si $p : Y \to Y/G$ es la proyección de Y sobre su cociente, entonces (Y, p) es un recubridor regular de Y/G y $Aut(Y, p) = G$.*

Ilustramos este resultado con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7 (Espacios lente)**.** *Sea*

$$S^{2n+1} = \{(z_1, \cdots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \cdots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$$

la esfera de dimensión impar y $p \geq 2$ un entero. Entonces para todo $k \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ definimos $\Phi_k : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}$ como la aplicación dada por

$$\Phi_k(z_1, \cdots, z_{n+1}) = e^{\frac{2\pi i k}{p}}(z_1, \cdots, z_{n+1}).$$

Entonces $G = \{\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_{p-1}\}$ *es un grupo de homeomorfismos de* $\mathbb{S}^{2n+1}$ *que actua propia y discontinuamente sobres* $\mathbb{S}^{2n+1}$. *Al espacio cociente le llamamos espacio y lente y lo representamos por* $L_p^{2n+1} = \mathbb{S}^{2n+1}/G$.

Como consecuencia de la teoría desarrollada, $\mathbb{S}^{2n+1}$ *es el recubridor universal de* L_p^{2n+1}, $G = Aut(\mathbb{S}^{2n+1})$ *y* $\Pi(L_p^{2n+1}) = \mathbb{Z}_p$.

5. Existencia de espacios recubridores

De la proposición 2 y del teorema 2 se sigue que cada recubridor (Y, p) de un espacio X, salvo isomorfismos, está determinado por la clase de conjugación de subgrupos de $\Pi(X, x)$: $\{p_*(\Pi(Y, y)) \mid y \in p^{-1}(x)\}$. Por tanto es natural la siguiente cuestión: Dado X y una clase de conjugación de subgrupos de $\Pi(X, x)$, ¿ existe un espacio recubridor de X cuya clase de conjugación asociada sea la dada? La respuesta no siempre es positiva. Empezamos probando un resultado parcial.

Proposición 6. *Sea X un espacio topológico que admita el recubridor universal, esto es que la clase de conjugación trivial se realiza como la clase de conjugación de un recubridor. Entonces para toda clase de conjugación de subgrupos de* $\Pi(X, x)$, *existe un recubridor de X cuya clase de conjugación es la dada.*

Por tanto el problema a abordar ahora es ¿cuando un espacio X admite el recubridor universal? En primer lugar vamos a obtener alguna condición necesaria. Si (Y, p) es el recubridor universal de X, sea $x \in X$ y U un entorno elemental de x. Dado $y \in p^{-1}(x)$, sea W la componente por arcos de $p^{-1}(U)$ que contiene a y. Si $j : W \to Y$ y $i : U \to X$ son las inclusiones, entonces $p \circ j = i \circ p_{|W}$. Y por tanto tenemos el correspondiente diagrama conmutativo de grupos y homomorfismos $p_* \circ j_* = i_* \circ (p_{|W})_*$. Como $(p_{|W})_*$ es un isomorfismo, ya que $p_{|W}$ es un homomorfismo, y $\Pi(Y, y) = 0$, se tiene que

$$i_* : \Pi(U, x) \to \Pi(X, x)$$

es el homomorfismo trivial: $i_* = 0$.

Definición 7. Un espacio X es llamado *semilocalmente simplemente conexo* si todo punto suyo x posee un entorno abierto y arco-conexo U tal que el homomorfismo inducido por la inclusión: $\Pi(U, x) \to \Pi(X, x)$ es trivial. Esto significa que todo lazo alrededor de x en U es homotópico en X al lazo constante. Es claro que si U es simplemente conexo, también cumple la condición anterior.

Ejemplo 8. *Para cada entero positivo n, sea*

$$C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2\}$$

y $X = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$ *dotado de la topología inducida de* $\mathbb{R}^2$. *Entonces el punto* $(0, 0)$ *no tiene la propiedad anterior y por tanto X no es semilocalmente simplemente conexo.*

Theorem 6. *Sea X un espacio semilocalmente simplemente conexo (y con las propiedades típicas). Entonces X tiene recubridor universal, y por tanto, para* *cada clase de conjugación de subgrupos de* $\Pi(X, x)$*, existe un recubridor de* X *que tiene a dicha clase de conjugación como la clase de conjugación asociada.*