TOPOLOLOGÍA I. RELACIÓN DE PROBLEMAS 3

1. Estudiar la conexión de los siguientes espacios dotados de la topología inducida de la Euclídea del correspondiente espacio Euclídeo en donde estan definidos:

(1) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2\}$.
(2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1\}$.
(3) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z\}$.
(4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$.

2. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y A,B subconjuntos conexos de $(X,\mathcal{T})$ tal que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Probar que $A \cup B$ es un subconjunto conexo de $(X,\mathcal{T})$.

3. Probar que el complementario de un subespacio afín de $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T}_u)$ con $n \geq 3$ es conexo si y sólo si la dimensión del subespacio es menor o igual que $n-2$.

4. Sean A y B subconjuntos propios de espacios conexos $(X,\mathcal{T})$ y $(X',\mathcal{T}')$ respectivamente. Probar que $X \times X' - A \times B$ es un subconjunto conexo de $(X \times X', \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$.

5. Sea $X = \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\}$. Probar que si $f : (\mathbb{R},\mathcal{T}_u) \to (X,\mathcal{T}_u)$ es una aplicación continua y sobre, entonces $f^{-1}(0,0)$ debe contener al menos tres puntos diferentes.

6. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{A_i,\, i=1,\ldots,n\}$ subconjuntos compactos de X. Probar que $\cup_{i=1}^n A_i$ es un subconjunto compacto de X.

7. Sea $\mathcal{T}$ la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por:

$$\mathcal{T} = \{(a,b) \mid a<b\} \cup \{(a,b) \cap \mathbb{Q} \mid a,b \in \mathbb{Q},\, a<b\} \cup \{\emptyset,\mathbb{R}\}.$$

(1) Probar que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}$.
(2) Probar que $[0,1]$ no es un subconjunto compacto de $(\mathbb{R},\mathcal{T})$.

8. Sea $f : (X,\mathcal{T}) \to (X'\mathcal{T}')$ una aplicación entre espacios topológicos compactos y Hausdorff. Probar que f es continua si y sólo si la grafica de f:

$$Grf(f) = \{(x,f(x)) \mid x \in X\},$$

es un subconjunto cerrado de $(X \times X', \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$.

9. Sea $\mathcal{T}$ la familia de subconjuntos de $(0,1)$ dada por:

$$\mathcal{T} = \{(0,1-1/n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset,(0,1)\}.$$

(1) Probar que $\mathcal{T}$ es una topología en $(0,1)$.

(2) Probar que $A \subset (0,1)$ es un subconjunto compacto de $((0,1), \mathcal{T})$ si y sólo si $\sup A < 1$.

10. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama localmente compacto si todo punto $x \in X$ posee una base de entornos consistente de subconjuntos compactos, esto es existe una base de entornos $\mathcal{B}^x$ de x tal que W es un subconjunto compacto de X para todo $W \in \mathcal{B}^x$.

(1) Probar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es un espacio localmente compacto.
(2) Probar que $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_u)$ no es localmente compacto.
(3) Probar que si $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es una aplicación continua, abierta y sobre y $(X, \mathcal{T})$ es localmente compacto, entonces $(X', \mathcal{T}')$ también ers localmente compacto.
(4) Probar que la recto de Sorgrenfrey no es localmente compacta.

11. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff. Probar que si A, B son dos subconjuntos compactos de X con $A \cap B = \emptyset$, entonces existen abiertos O, O' tal que $O \cap O' = \emptyset$, $A \subset O$, $B \subset O'$.

12. Probar que no existe una biyección continua de $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$ sobre cualquier subespacio topológico de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.