TOPOLOLOGÍA I. RELACIÓN DE PROBLEMAS 3

1. Probar que la función característica $\chi_A : ([0,1], \mathcal{T}_u) \to (\{0,1\}, \mathcal{T}_u)$ del subconjunto $A = [0,1/2]$ es sobre, abierta y cerrada, pero no continua.

2. Probar que toda aplicación biyectiva $f : (X, \mathcal{T}_{CF}) \to (X, \mathcal{T}_{CF})$ es un homeomorfismo.

3. Probar que la esfera $(\mathbb{S}^2, \mathcal{T}_u)$ es homeomorfa al elipsoide

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}, \quad a,b,c > 0,$$

dotado de la topología usual.

4. Probar que la bola $B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ dotada de la topología usual es homeomorfa al espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$.

5. Probar que $(\mathbb{S}^2 - \{(0,\ldots,\pm 1)\}, \mathcal{T}_u)$ es homeomorfo al cilindro $(\mathbb{S}^1 \times (-1,1), \mathcal{T}_u)$.

6. Dados los conjuntos $X = \{1,2,3,4,5\}$ y $X' = \{a,b\}$ y las topologías sobre ellos $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}\}$ y $\mathcal{T}' = \{\emptyset, X', \{a\}\}$, encontrar todas las funciones continuas $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$.

7. Si $n \in \mathbb{Z}$, se define sobre $\mathbb{R}$ la familia $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_u \cup \{n\}$, donde $\mathcal{B}$ es una base de la topología usual de $\mathbb{R}$.

(1) Probar que $\mathcal{B}_n$ es base de una topología $\mathcal{T}_n$ sobre $\mathbb{R}$.
(2) Probar que $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son topologías diferentes y en cambio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ son espacios homeomorfos.

8. Probar los siguientes resultados:

(1) Toda aplicación $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es cerrada.
(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ no son homeomorfos.
(3) Toda aplicación sobre $f : (X, \mathcal{T}_{CF}) \to (Y, \mathcal{T}_u)$ es abierta y cerrada.

9. Probar que los siguientes espacios topológicos, dotados de la topología usual, son homeomorfos:

(1) $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
(2) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a < \sqrt{x^2+y^2} < b\}$.
(3) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
(4) $\mathbb{S}^1 \times (0,\infty)$.
(5) $\mathbb{S}^1 \times (a,b)$.
(6) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$.
(7) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 + 1,\ a < z < b\}$.

10. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama localmente compacto si todo punto $x \in X$ posee una base de entornos consistente de subconjuntos compactos, esto es existe una base de entornos $\mathcal{B}^x$ de x tal que W es un subconjunto compacto de X para todo $W \in \mathcal{B}^x$.

(1) Probar que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es un espacio localmente compacto.
(2) Probar que $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_u)$ no es localmente compacto.
(3) Probar que si $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es una aplicación continua, abierta y sobre y $(X, \mathcal{T})$ es localmente compacto, entonces $(X', \mathcal{T}')$ también ers localmente compacto.
(4) Probar que la recto de Sorgrenfrey no es localmente compacta.

11. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff. Probar que si A, B son dos subconjuntos compactos de X con $A \cap B = \emptyset$, entonces existen abiertos O, O' tal que $O \cap O' = \emptyset$, $A \subset O$, $B \subset O'$.

12. Probar que no existe una biyección continua de $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$ sobre cualquier subespacio topológico de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$.