TOPOLOLOGÍA I. RELACIÓN DE PROBLEMAS 1

1. En $\mathbb{N}$ consideramos la familia de subconjuntos

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{O \subset \mathbb{N} \text{ tales que si } n \in \mathbb{N} \text{ y } p \text{ divide a } n \Rightarrow p \in O\}.$$

Probar que $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{N}$.

Si para cada $n \in \mathbb{N}$, O_n es el conjunto de los divisores de $\mathbb{N}$, probar que $\mathcal{B} = \{O_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $\mathcal{T}$.

2. Estudiar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos, cerrados o ninguna de las dos cosas:

(1) $\{(x, y) \mid xy = 0\}$.
(2) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$.
(3) $(0, 1) \times (0, 1) \cup \{(0, 0)\}$.
(4) $\{(x, y) \mid |x| = 1\}$.

3. Sea $A \subset \mathbb{R}$ definido por $A = [0, 1) \cup (1, 3) \cup \{5\}$ y dotado de la topología inducida de la usual de $\mathbb{R}$.

(1) Razonar si los conjuntos $\{5\}$ y $(1, 3)$ son abiertos o cerrados en A.
(2) Calcular la adherencia de $[0, 1)$ en dicha topología.
(3) Comprobar si $[0, 1/2]$ es entorno de 0 en la topología anterior.

4. En $\mathbb{R}$ consideramos

$$\mathcal{T} = \{O \cup O' \mid O \in \mathcal{T}_u \text{ y } O' \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}\},$$

donde $\mathcal{T}_u$ es la topología usual de $\mathbb{R}$. Probar que $\mathcal{T}$ es una topología sobre $\mathbb{R}$.

Calcular el interior, la adherencia y la frontera de $[0, 1]$ y $[0, \sqrt{2})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

5. Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{T}(d)$ la topología asociada. Probar que si $A \subset X$ entonces

(1) $x \in \bar{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\} \subset A$ tal que $\{x_n\} \to x$.
(2) $d(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in \bar{A}$.
(3) Dado $x \in X$ y $\epsilon > 0$, probar que $\overline{B(x, \epsilon)} \subset \{y \in X \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$, y que la igualdad en general no es cierta.