RELACIÓN DE PROBLEMAS 2

1. Sea X un espacio topológico Hausdorff, esto es para todo par de puntos distintos de X existen entornos disjuntos de dichos puntos. Un tal espacio es llamado una *variedad topológica* de dimensión n, si todo punto $x \in X$ posee un entorno abierto U que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ (dotado de la topología Euclídea). Aunque no es posible probarlo en el contexto de este curso, si X es una variedad topológica n-dimensional, ningún abierto de X puede ser homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^m$ con $m \neq n$.

(1) Probar que una variedad topológica es localmente conexa por arcos.
(2) Probar que todo recubridor de una variedad topológica de dimensión n es también una variedad topológica de dimensión n.
(3) Probar que toda variedad topológica tiene recubridor universal.
(4) Dar algunos ejemplos de variedades topológicas.

2. Sea $\{a, b\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y R la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$qRq' \quad \text{si} \quad q' - q = ma + nb, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

Sea $T_{a,b} = \mathbb{R}^2/R$ el espacio topológico cociente.

(1) Probar que $(\mathbb{R}^2, p)$ es un recubridor de $T_{a,b}$ siendo $p : \mathbb{R}^2 \to T_{a,b}$ la proyección.
(2) Si $\{\hat{a}, \hat{b}\}$ es otra base de $\mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es el isomorfismo del cambio de base, probar que T induce un homeomorfismo $\hat{T} : T_{a,b} \to T_{\hat{a},\hat{b}}$.
(3) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ la aplicación

$$F((x, y)) = (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}).$$

Probar que F induce un homeomorfismo de T_{e_1,e_2} sobre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, siendo $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

A cualesquiera de estos espacios topológicos homeomorfos entre si y homeomorfos a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ le llamamos toro de dimensión dos.

3. Sea T el toro T_{e_1,e_2} (ver ejercicio 2), n un entero positivo y A la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $F : T \to T$ dada por $F([(x, y)]) = [(x, y)A]$, donde $[(x, y)]$ representa clase de equivalencia en T.

(1) Probar que F está bien definida.
(2) Probar que (T, F) es un recubridor regular de n hojas de T.
(3) Calcular el grupo de automorfismos de (T, F).

4. Clasificar, salvo isomorfismos, los recubridores del toro T (Usar que $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$).

5. Clasificar, salvo isomorfismos, los recubridores de un cilindro: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

6. Clasificar, salvo isomorfismos, los recubridores de los espacios lente L_p^{2n+1}, $p = 4, 5, 6$.

7. Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, y consideremos los homeomorfismos $\Phi_{(n,m)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dados por

$$\Phi_{(n,m)}(x, y) = (x, y)A^n + (n, (-1)^n m).$$

(1) Probar que $\{\Phi_{(n,m)} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo del grupo de los homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ que actua propia y discontinuamente sobre $\mathbb{R}^2$. Al espacio cociente por dicha acción le llamamos la *botella de Klein* y la representamos por B. Por tanto, si $p : \mathbb{R}^2 \to B$ es la proyección, entonces $(\mathbb{R}^2, p)$ es el recubridor universal de B y el anterior grupo es el grupo de automorfismos de $(\mathbb{R}^2, p)$.

(2) Calcular el grupo fundamental de la botella de Klein.

(3) Si T es el toro T_{2e_1,e_2} (ver ejercicio 2), sea $\Phi : T \to T$ dada por

$$\Phi([(x, y)]) = [(x + 1, -y)].$$

Probar que Ψ es un homeomorfismo bien definido de T sobre T y que $G = \{Id, \Phi\}$ actua propia y discontinuamente sobre T.

(4) Probar que T/G es homeomorfo a la botella de Klein B, y por tanto el toro T es un recubridor de dos hojas de la botella de Klein B.