RELACIÓN DE PROBLEMAS 1

1. Sean $f, g : [0,1] \to X$ arcos con el mismo punto inicial x y mismo punto final y. Probar que $f \simeq g$ si y sólo si $f * g^{-1}$ es homotópico al lazo constante en x.

2. Sea X un espacio topológico y x un punto suyo.

(1) Si $\gamma : [0,1] \to X$ es un lazo alrededor de x, probar que el isomorfismo $F_\gamma : \Pi(X,x) \to \Pi(X,x)$ es la identidad si y sólo si $[\gamma]$ pertenece al centro de $\Pi(X,x)$.

(2) Si $\gamma, \beta : [0,1] \to X$ son arcos con punto inicial x y punto final y, obtener una condición necesaria y suficiente para que los isomorfismos $F_\gamma, F_\beta : \Pi(X,x) \to \Pi(X,y)$ sean iguales.

3. Calcular el grupo fundamental de la cinta de Möbius.

4. Calcular el grupo fundamental de $\mathbb{R}^n - \{x_1, \ldots x_m\}$, con $n \geq 2$.

5. Calcular el grupo fundamental de la botella de Klein.

6. Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^3$ formado por una esfera de dimensión dos junto con el segmento de recta que une los polos norte y sur de dicha esfera. Calcular el grupo fundamental de X.

7. Sea X el espacio cociente de una corona circular de $\mathbb{R}^2$ (centrada en el origen) en la que tanto en la circunferencia exterior como en la interior se identifican puntos antípodas. Calcular el grupo fundamental de X.

8. Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por una esfera unidad centrada en el origen junto con el disco unidad en el plano $z = 0$. Calcular el grupo fundamerntal de X.

9. Sea X el espacio cociente del disco unidad centrado en el origen de $\mathbb{R}^2$ en el que identificamos puntos en el borde que forman un angulo de 120º. Calcular el grupo fundamental de X.

10. Sea X el espacio cociente de un triangulo ABC (junto con su interior) de $\mathbb{R}^2$ en el que identificamos $\overrightarrow{AB}$ con $\overrightarrow{BC}$ y con $\overrightarrow{CA}$. Calcular el grupo fundamental de X.