ESPACIOS TOPOLÓGICOS

FRANCISCO URBANO

1. Introducción

Cronología de los Orígenes de la Topología

• 1679 Leibniz (1646-1716) crea la expresión *Analysis situs*.

• 1736 Euler (1707-1783) resuelve el problema de los puentes de Konigsberg.

• 1750 Euler descubre el teorema sobre los poliedros y dá una tentativa de demostración.

• 1794 Legendre (1752-1833) demuestra el teorema de Euler en un caso particular.

• 1799 Gauss (1777-1855) demuestra el teorema fundamental del Algebra usando un argumento de naturaleza topológica.

• 1813 Lhuilier (1750-1840) decubre poliedros en los que la relación de Euler no es válida. Noción de género de un poliedro.

• 1836 Listing (1808-1882) crea el término *topología*.

• 1847 Von Staudt (1798-1868) descubre la hipótesis bajo la cual el enunciado de Euler es válido; surge así el concepto de superficie poliédrica simplemente conexa.

• 1850 Schläfli (1814-1895) extiende el teorema de Euler a espacios de n-dimensiones.

• 1858 Listing y Möbius (1790-1868) descubren la cinta de Möbius.

• 1871 Betti (1823-1892) define el orden de conexión de variedades de dimensión n.

• 1874 Schläfli y Klein (1849-1925) establecen la noción de no-orientabilidad del plano proyectivo.

• 1877 Cantor establece una correspondencia biunivoca entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

• 1882 Klein construye la botella de Klein, primera superficie compacta no orientable, depués del plano proyectivo.

• 1887 Jordan (1838-1922) publica su teorema sobre las curvas cerradas.

• 1893 Poincaré (1854-1912).

De una carta de Leibniz a Huygens el 8 de Septiembre de 1679:

> Después de todos los progresos que he hecho en estas materias, no estoy en absoluto contento del álgebra, porque no proporciona ni los caminos más cortos, ni las más bellas construcciones de la geometría. Es por lo que creo que nos

> falta otro tipo de análisis propiamente geométrico o lineal que exprese directamente la localización, así como el álgebra expresa la magnitud.

Henri Poincaré, de forma intuitiva y notable, dió una definición, en absoluto técnica, *de lo que es la topología*:

> Comúnmente los geómetras distinguen dos clases de geomatrías, la primera de las cuales califican de métrica y la segunda de proyectiva; la geomatría métrica está fundada en la noción de distancia; en ella dos figuras se consideran equivalentes cuando son *iguales* en el sentido que los matemáticos dan a esta palabra; la geometría proyectiva está fundada en la noción de linea recta. Para que, en ella, dos figuras sean consideradas equivalentes, basta que una sea la perspectiva de la otra. A veces este segundo cuerpo de doctrina se ha denominado geometría cualitativa; lo es, en efecto, si se la opone a la primera: es claro que la medida, la cantidad, desempeñan en ella un papel menos importante. Sin embargo, no es enteramente así. El hecho de que una línea sea recta no es puramente cualitativo; no se podría asegurar que una línea es recta sin realizar mediciones, o sin deslizar sobre esta línea un instrumento llamado regla, que es una especie de instrumento de medida.
>
> Pero hay una tercera geometría, en la cual la cantidad está suprimida por completo, y que es puramente cualitativa: *el Analysis situs o la topología*. En esta disciplina, dos figuras son equivalentes, siempre que podamos pasar de una a otra por medio de una deformación continua, cualesquiera sea la ley de esta deformación, a condición de que respete la continuidad. Así, un circulo es equivalente a una elipse o también a una curva cerrada cualquiera, pero no es equivalente a un segmento de recta, porque tal segmento no es cerrado; una esfera es equivalente a una superficie convexa cualquiera pero no es equivalente a un toro, porque en un toro hay una abertura que la esfera no posee. Supongamos un modelo cualquiera y la copia de este modelo realizada por un dibujante poco diestro; las proporciones están alteradas, las rectas, trazadas por una mano temblorosa, han sufrido desviaciones y presentan curvaturas. Desde el punto de vista de la geometría métrica, y aun desde el de la geometría proyectiva, las dos figuras no son equivalentes; por el contrario, lo son, desde el punto de vista de la topología.
>
> Lo que despierta en nosotros el interés por la topología es que en ella interviene verdaderamente la intuición geométrica. Cuando en un teorema de geometría métrica

apelamos a esta intuición, es porque resulta imposible estudiar las propiedades métricas de una figura haciendo abstracción de sus propiedades cualitativas, es decir, de aquellas que son el objeto propio de la topología. Se ha dicho a menudo que la geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas. Esto no es una humorada, sino una verdad que merece se reflexione sobre ella. ¿Pero qué es una figura mal hecha? Es aquella que puede ejecutar el dibujante poco diestro del que hablábamos antes. Él altera las proporciones más o menos groseramente, sus líneas rectas tienen zigzags inquientantes, sus circulos presentan protuberancias faltas de gracia. Todo esto no importa: no perturbará en lo más mínimo al geómetra, ni le impedirá razonar bien.

Pero lo que no debe ocurrir, es que el artista inexperto represente una curva cerrada por medio de una curva abierta, tres líneas que se cortan en un punto por medio de tres líneas que no tengan ningún punto en común, una superficie con abertura por medio de una superficie sin abertura. En tal caso no se podría utilizar más su figura, y el razonamiento se haría imposible. La intuición no habría sido obstaculizada por los defectos de dibujo que sólo interesarían a la geometría métrica o proyectiva; ambas se harán imposibles ya que estos defectos tienen que ver con la topología.

Esta observación bien simple nos muestra el verdadero papel de la intuición geométrica; es para favorecer tal intuición que el geómetra tiene necesidad de dibujar figuras o, por lo menos, representárselas mentalmente. Ahora bien, si desprecia las propiedades métricas o proyectivas de estas figuras, si sólo se atiene a sus propiedades puramente cualitativas, solamente entonces la intuición geométrica interviene verdaderamente. No es que quiera decir con esto que la geometría métrica reposa sobre la lógica pura; pero éstas son intuiciones de otra naturaleza, análogas a las que juegan un papel esencial en aritmética y álgebra.

2. Espacios Topológicos

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación y $t_0 \in \mathbb{R}$ un número real. La aplicación f es continua en t_0 si $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $t \in \mathbb{R}$ y $|t - t_0| < \delta$ entonces $|f(t) - f(t_0)| < \epsilon$.

El primer objetivo en este epígrafe es generalizar este concepto de continuidad a aplicaciones entre conjuntos que posean una cierta estructura que me permita medir distancia entre puntos, tal y como pasa en $\mathbb{R}$.

Este paso importante fue dado por Frechet en 1906 cuando definio el concepto de espacio métrico.

Definición 1. Un espacio métrico es un par (X, d) donde X es un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una aplicación cumpliendo:

(1) $d(x, y) \geq 0$,
(2) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
(3) $d(x, y) = d(y, x)$,
(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

donde x, y, z son puntos arbitrarios de X.

A d se le llama una distancia en X.

Ejemplo 1. *Sea* $(\mathbb{R}^n, d)$ *donde*

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. *Entonces* $(\mathbb{R}^n, d)$ *es un espacio métrico y a* d *se le llama la distancia Euclídea en* $\mathbb{R}^n$. *Conviene observar que en el caso* $n = 1$, $d(x.y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2. *Sea* $X = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ es continua}\}$. *Entonces* d *y* d' *definidas por*

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt, \quad d'(f, g) = \sup\{|f(t) - g(t)| \,|\, t \in [0, 1]\}$$

son distancias en X.

Ejemplo 3. *Sea* X *un conjunto y* d *definida por*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & si\, x = y \\ 1 & si\, x \neq y. \end{cases}$$

Entonces d *es una distancia en* X *llamada la distancia discreta.*

Haciendo uso del concepto de espacio métrico, Frechet definió la continuidad de aplicaciones entre espacios métricos de la siguiente manera.

Definición 2. Sea $f : (X, d) \to (X', d')$ una aplicación y x_0 un punto de X. La aplicación f es continua en x_0 si $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $d(x, x_0) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

Si (X, d) es un espacio métrico, $x \in X$ y $\epsilon > 0$, se define la bola de centro x y radio ϵ y se representa por $B(x, \epsilon)$ por

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X \,|\, d(y, x) < \epsilon\}.$$

Observemos que la definición 2 equivale a la siguiente

Definición 3. Sea $f : (X, d) \to (X', d')$ una aplicación y x_0 un punto de X. La aplicación f es continua en x_0 si $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0, \delta)) \subset B'(f(x_0), \epsilon)$.

Haciendo uso del concepto de bola, vamos a definir el concepto de subconjunto abierto de un espacio métrico.

Definición 4. Si (X, d) es un espacio métrico, un subconjunto $O \subset X$ se llama abierto si $\forall\, x \in O$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset O$.

Es un ejercicio muy sencillo probar que las bolas de un espacio métrico son abiertos de dicho espacio, sin mas que usar la desigualdad triangular (4ª propiedad en la definición 1).

Ahora el concepto de abierto nos permite caracterizar la continuidad sin alusión directa a las distancias.

Proposición 1. *Sea $f : (X,d) \to (X',d')$ una aplicación y x_0 un punto de X. La aplicación f es continua en x_0 si y sólo si para todo abierto O' de X' con $f(x_0) \in O'$ existe un abierto O de X con $x_0 \in O$ tal que $f(O) \subset O'$.*

Usando la Proposición 1, parece que sería posible definir continuidad de aplicaciones entre espacios dotados no de una distancia, sino de una estructura consistente en un conjunto de abiertos. Esta idea la desarrollo Hausdorff dando lugar a la definición de espacio topológico. Es razonable que dicho conjunto de abiertos debería de cumplir una serie de propiedades.

Proposición 2. *Sea (X,d) un espacio métrico y $\mathcal{T}(d) = \{O \subset X \mid O \text{ es abierto}\}$. Entonces $\mathcal{T}(d)$ cumple las siguientes propiedades:*

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}(d)$.
(2) Si $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}(d)$, entonces $\cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}(d)$.
(3) Si $\{O_i \mid i = 1,\dots,n\} \subset \mathcal{T}(d)$, entonces $\cap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}(d)$.

Ejemplo 4. *(1) Los abiertos del espacio métrico $\mathbb{R}$ con la distancia Euclídea son las uniones numerables de intervalos abiertos.*
(2) Los abiertos del espacio métrico discreto son los subconjuntos de dicho espacio.
(3) Consideramos en $\mathbb{R}^2$ la distancia Euclídea d y la distancia d' dada por

$$d'(x,y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}, \quad \forall\, x = (x_1,x_2),\, y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces, aunque las bolas de ambas distancias son diferentes, es fácil comprobar que $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(d')$.

El ejemplo 4,(3) pone de manifiesto que la continuidad de funciones entre espacios métricos en realidad depende de la familia $\mathcal{T}(d)$ asociada a la distancia d. Esta consideración sugiere la siguientes definiciones.

Definición 5. Un espacio topológico es un par $(X,\mathcal{T})$ donde X es un conjunto y $\mathcal{T}$ es una familia de subconjuntos de X cumpliendo las siguientes propiedades:

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
(2) Si $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}$, entonces $\cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{T}$.
(3) Si $\{O_i \mid i = 1,\dots,n\} \subset \mathcal{T}$, entonces $\cap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$.

A $\mathcal{T}$ le llamaremos una topología en X y a los elementos de $\mathcal{T}$ les llamaremos abiertos del espacio.

Definición 6. Sea $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ una aplicación entre espacios topológicos y $x_0 \in X$. Diremos que f es continua en x_0 si para todo abierto $O' \in \mathcal{T}'$ con $f(x_0) \in O'$ existe un abierto $O \in \mathcal{T}$ con $x_0 \in O$ y $f(O) \subset O'$.

Ejemplo 5. *(1) Si (X,d) es un espacio métrico, entonces $(X,\mathcal{T}(d))$ es un espacio topológico.*

(2) Si X es cualquier conjunto, $\mathcal{T}_T = \{\emptyset, X\}$ es una topología en X llamada trivial.

(3) Sea $X = \{a,b\}$ y $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}\}$. Entonces $\mathcal{T}$ es una topología en X llamada de Sierpinski.

(4) Sea X cualquier conjunto y $\mathcal{T}_{CF} = \{O \subset X \,|\, X - O \,\text{es finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Entonces $\mathcal{T}_{CF}$ es una topología en X llamada cofinita.

Una cuestión razonable es: Dado un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$, ¿ existe una distancia d en X tal que $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}$?. La respuesta es no, como lo prueba la topología de Sierpinski.

3. Base de una topología

Como puede comprobarse analizando la topología usual de $\mathbb{R}^2$ (esto es la topología asociada a la distancia Euclídea de $\mathbb{R}^2$), los abiertos de una topología son en general numerosos y dificiles de describir. A veces es fácil describir una subfamilia de los mismos y generar el resto a partir de esta subfamilia. Por ejemplo en $\mathbb{R}$ con su topología usual (ver Ejemplo 4(1)). Esta observación sugiere la siguiente definición:

Definición 7. Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Un base de la topología $\mathcal{T}$ es una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tal que para todo abierto $O \in \mathcal{T}$ existe $\{B_i \,|\, i \in I\} \subset \mathcal{B}$ tal que
$$O = \cup_{i\in I} B_i.$$
Es decir la topología se genera de la base haciendo todas las posibles uniones de elementos de la misma.

Proposición 3. *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$ si y sólo si para todo abierto $O \in \mathcal{T}$ y todo punto $x \in O$ existe un $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subset O$.*

Usando esta proposición, es claro que el conjunto de bolas de un espacio métrico (X,d) es una base de la topología $\mathcal{T}(d)$.

Tambien es claro que la topologia discreta en X tiene por base a $\mathcal{B} = \{\{x\} \,|\, x \in X\}$.

En el siguiente resultado se estudian propiedades que tiene cualquier base de una topología.

Proposición 4. *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$. Entonces*

(1) $X = \cup_{B\in\mathcal{B}} B$.

(2) Para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que
$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Lo interesante de estas propiedades es que son suficientes para que una familia de subconjuntos cumpliendolas genere una topología.

Proposición 5. *Sea X un conjunto y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X cumpliendo*

(1) $X = \cup_{B \in \mathcal{B}} B$.
(2) Para todos $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *y* $x \in B_1 \cap B_2$ *existe* $B_3 \in \mathcal{B}$ *tal que*

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2.$$

Entonces existe una única topología $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ *en* X *que posee a* $\mathcal{B}$ *como base. A dicha topología le llamaremos generada por* $\mathcal{B}$ *y viene dada por*

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{\textit{uniones de elementos de}\, \mathcal{B}\}.$$

Para ilustrar la Proposición 5, vamos a introducir un nuevo espacio topológico llamado el semiplano de Moore.

Ejemplo 6. *Sea* $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$. *Definimos la siguiente familia de subconjuntos de* X*:*

$$\mathcal{B} = \{B((x,y),\epsilon) \,|\, (x,y) \in X,\, 0 < \epsilon < y\}$$
$$\cup\{B((x,y),y) \cup \{(x,0)\} \,|\, (x,y) \in X,\, y > 0\},$$

donde $B((x,y),\epsilon)$ *es la bola Euclídea de centro* (x,y) *y radio* ϵ*. Entonces* $\mathcal{B}$ *es base de topología y a* $(X, \mathcal{T}(\mathcal{B}))$ *se le llama el semiplano de Moore.*

4. Cerrados

Definición 8. Un subconjnto C de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es cerrado si $X - C \in \mathcal{T}$. Esto es los subonjuntos cerrados de un espacio topológico son los complemetarios de los abiertos.

Es muy sencillo probar el siguiente resultado qur describe las propiedades de los subconjuntos cerrados de un espacio.

Proposición 6. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico y* $\mathcal{C}(\mathcal{T})$ *la familia de sus subconjuntos cerrados. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$.
(2) Si $\{C_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{C}(\mathcal{T})$*, entonces* $\cap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$.
(3) Si$\{C_i \,|\, i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{C}(\mathcal{T})$*, entonces* $\cup_{i=1}^n C_i \in \mathcal{C}(\mathcal{T})$.

Ejemplo 7. *(1) Si* (X, d) *es un espacio métrico, entonces un subconjunto* C *de* X *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$ *si y sólo si para todo punto* $x \notin C$ *existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $B(x, \epsilon) \cap C = \emptyset$.
(2) Si $(X, \mathcal{T}_T)$ *es el espacio trivial, entonces* $\mathcal{C}(\mathcal{T}_T) = \{X, \emptyset\}$.
(3) Si $(X, \mathcal{T}_D)$ *es el espacio discreto, entonces* $\mathcal{C}(\mathcal{T}_D) = \mathcal{T}_D$.
(4) Si $\mathcal{T}_{CF}$ *es la topología cofinita en* X*, entonces*

$$\mathcal{C}(\mathcal{T}_{CF}) = \{\textit{subconjuntos finitos de}\, X\} \cup \{X\}.$$

En estas condiciones, es un ejercicio muy fácil probr el siguiente resultado:

Proposición 7. *Sea* X *un conjunto y* $\mathcal{C}$ *una familia de subconjuntos de* X *cumpliendo las siguientes propiedades:*

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{C}$.
(2) Si $\{C_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{C}$*, entonces* $\cap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \in \mathcal{C}$.
(3) Si$\{C_i \,|\, i = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{C}$*, entonces* $\cup_{i=1}^n C_i \in \mathcal{C}$.

Entonces existe una única topología $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ en X que tiene por cerrados a los subconjuntos de $\mathcal{C}$. Dicha topología es definida por

$$\mathcal{T}(\mathcal{C}) = \{X - C \mid C \in \mathcal{C}\}.$$

5. Entornos

Hasta ahora hemos hablado de topología considerando los subconjuntos abiertos del espacio (o los cerrados). En este epígrafe vamos a estudiar la información que la topología tiene alrededor de un punto del espacio. Aunque las topologías mas naturales dan la misma información alrededor de cualquier punto (por ejemplo la topología usual de $\mathbb{R}^n$), no siempre es así y a veces el comportamiento de la topología altededor de puntos distintos es muy diferente. Para esto es importante el siguiente concepto.

Definición 9. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$ un punto de X. Un entorno de x es un subconjunto V de X cumpliendo la siguiente propiedad

$$\text{existe un abierto} \quad O \in \mathcal{T} \quad \text{tal que} \quad x \in O \subset V.$$

Es claro que cualquier abierto que contenga a x es un entorno suyo.

Si representamos por $\mathcal{U}^x$ al conjunto de los entornos de x, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(1) Para todo $V \in \mathcal{U}^x$, se tiene que $x \in V$.
(2) Si $V \in \mathcal{U}^x$ y $V \subset W$, entonces $W \in \mathcal{U}^x$.
(3) Si $V, W \in \mathcal{U}^x$, entonces $V \cap W \in \mathcal{U}^x$.
(4) Si $V \in \mathcal{U}^x$ existe $W \in \mathcal{U}^x$ tal que $V \in \mathcal{U}^y$ para todo $y \in W$.

A la familia $\mathcal{U}^x$ le llamamos el sistema de entornos de x.

En estas condiciones los abiertos y cerrados de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se caracterizan en términos de entornos de la siguiente manera:

$O \subset X$ es abierto si y sólo si para todo $x \in O$ existe $V \in \mathcal{U}^x$ tal que $V \subset O$.

$C \subset X$ es cerrado si y sólo si para todo $x \notin C$ existe $V \in \mathcal{U}^x$ tal que $V \cap C = \emptyset$.

De manera similar al caso de base de topología, tambien para los entornos podemos decir que no es necesario describir todos los entornos de un punto, sino que haciendo uso de la propiedad (2) de los entornos vamos a dar la siguiente definición.

Definición 10. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$. Una base de entornos del punto x es una familia $\mathcal{B}^x \subset \mathcal{U}^x$ con la propiedad

$$\text{para todo} \quad V \in \mathcal{U}^x \quad \text{existe} \quad W \in \mathcal{B}^x \quad \text{tal que} \quad W \subset V.$$

Es claro que los entornos se construyen a partir de una base de la siguiente manera

$$\mathcal{U}^x = \{V \subset X \mid W \subset V \quad \text{parea algún} \quad W \in \mathcal{B}^x\}.$$

A los elementos de $\mathcal{B}^x$ se les llama entornos básicos de x.

Un primer ejemplo de base de entornos es:

$$\mathcal{B}^x = \mathcal{U}^x \cap \mathcal{T},$$

esto es el conjunto de entornos abiertos de x.

Si $\mathcal{B}^x$ es una base de entornos de x, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(1) Para todo $W \in \mathcal{B}^x$, se tiene que $x \in W$.
(2) Si $W_1, W_2 \in \mathcal{B}^x$, entonces existe $W_3 \in \mathcal{B}^x$ tal que $W_3 \subset W_1 \cap W_2$.
(3) Si $W \in \mathcal{B}^x$ existe $W_0 \in \mathcal{B}^x$ tal que para todo $y \in W_0$ existe $W' \in \mathcal{B}^y$ con $W' \subset W$.

En estas condiciones los abiertos y cerrados de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se caracterizan en términos de entornos básicos de la siguiente manera:

$O \subset X$ es abierto si y sólo si para todo $x \in O$ existe $W \in \mathcal{B}^x$ tal que $W \subset O$.

$C \subset X$ es cerrado si y sólo si para todo $x \notin C$ existe $W \in \mathcal{B}^x$ tal que $W \cap C = \emptyset$.

6. Posición de un punto respecto a un subconjunto

Definición 11. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, x un punto suyo y $A \subset X$ un subconjunto.

(1) x es un punto interior a A si existe $V \in \mathcal{U}^x$ tal que $V \subset A$.
(2) x es un punto adherente a A si para todo $V \in \mathcal{U}^x$ se cumple que $V \cap A \neq \emptyset$.
(3) x es un punto frontera de A si para todo $V \in \mathcal{U}^x$ se cumple que $V \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap (X - A) \neq \emptyset$.

Representaremos por

(1) $A^o = \{x \in X \,|\, x \text{ es interior a } A\}$,
(2) $\bar{A} = \{x \in X \,|\, x \text{ is adherente a } A\}$,
(3) $Fr(A) = \{x \in X \,|\, x \text{ es frontera de } A\}$,

y lo llamaremos el interior, la adherencia y la frontera de A respectivamente.

De la definición anterior es un ejercicio simple comprobar que

$$Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{X - A}, \quad X - A^o = \overline{X - A}, \quad X - \bar{A} = (X - A)^o.$$

En los siguientes resultados se exponen propiedades de los anteriores subconjuntos.

Proposición 8. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces dados subconjuntos $A, B \subset X$ se cumple:*

(1) $A^o \subset A$.
(2) Si $A \subset B$, entonces $A^o \subset B^o$.
(3) $(A^o)^o = A^o$.
(4) $A^o \cap B^o = (A \cap B)^o$.
(5) $A^o \cup B^o \subset (A \cup B)^o$.

(6) $A^o = \cup\{O \subset X \,|\, O \in \mathcal{T} \, y \, O \subset A\}$.

(7) $A \in \mathcal{T}$ *si y sólo si* $A = A^o$.

Conviene resaltar que (6) nos asegura que A^o *es el mayor abierto contenido en* A.

Proposición 9. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico. Entonces dados subconjuntos* $A, B \subset X$ *se cumple:*

(1) $A \subset \bar{A}$.

(2) Si $A \subset B$, *entonces* $\bar{A} \subset \bar{B}$.

(3) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

(4) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{(A \cup B)}$.

(5) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

(6) $\bar{A} = \cap\{F \subset X \,|\, F \text{ es cerrado y } A \subset F\}$.

(7) A *es cerrado si y sólo si* $A = \bar{A}$.

Conviene resaltar que (6) nos asegura que $\bar{A}$ *es el menor cerrado que contiene a* A.

Ejemplo 8. *Si consideramos el espacio topológico* $\mathbb{R}$ *con su topología usual y los subconjuntos* $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$, *entonces se tiene que*

$$A^o \cup B^o = (0, 1) \cup (1, 2) \quad y \quad (A \cup B)^o = (1, 2),$$

lo que prueba que la igualdad en Proposición 8,(5) no tiene que darse.

Analogamente, si $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$, *entonces se tiene que*

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\} \quad y \quad \overline{A \cap B} = \emptyset,$$

lo que prueba que la igualdad en Proposición 9,(5) no tiene que darse.

Proposición 10. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico y* A *un subconjunto de* X. *Entonces:*

(1) $\bar{A} = A^o \cup Fr(A)$ *(unión disjunta)* .

(2) $X = A^o \cup Fr(A) \cup (X - A)^o$.

Definición 12. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y A un subconjunto suyo. Un punto de acumulación de A es un punto $x \in X$ tal que para todo entorno $V \in \mathcal{U}^x$ de x se cumple que

$$(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Al conjunto de puntos de acumulación de A lo representaremos por A'.

Si decimos que un punto $x \in A$ es aislado si existe un entorno suyo $V \in \mathcal{U}^x$ cumpliendo $V \cap A = \{x\}$, entonces es fácil comprobar que

$$\bar{A} = A \cup A', \quad \bar{A} = \{\text{puntos aislados de } A\} \cup A',$$

donde la segunda unión es disjunta.

7. Topología inducida. Subespacios topológicos.

Muchos espacios topológicos interesantes aparecen como subespacios de otros. Un caso particularmente importante son los subespacios de $\mathbb{R}^n$ con su topología ususal. En esta sección estudiaremos como una topología induce en los subconjuntos del espacio estructura de espacio topológico y relacionaremos ambas topologías.

Proposición 11. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto. Entonces*
$$\mathcal{T}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{T}\}$$
es una topología en A llamada la topología inducida por $\mathcal{T}$ en A. Al par $(A, \mathcal{T}_A)$ se le llama subespacio topológico de $(X, \mathcal{T})$.

Conviene poner de manifiesto que

(1) Si $O \in \mathcal{T}$ y $O \subset A$, entonces $O \in \mathcal{T}_A$.
(2) Si $A \in \mathcal{T}$, entonces $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_A = \{O \in \mathcal{T} \mid O \subset A\}$.

Proposición 12. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $(A, \mathcal{T}_A)$ un subespacio suyo. Entonces:*

(1) Los cerrados de $(A, \mathcal{T}_A)$ vienen dados por
$$\{F \cap A \mid F \text{ es cerrado de } X\}.$$
(2) Si $\mathcal{B}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$, entonces
$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$$
es una base de la topología $\mathcal{T}_A$.
(3) Si $a \in A$ y $\mathcal{U}^a$ es el sistema de entornos de a en $(X, \mathcal{T})$, entonces
$$\mathcal{U}^a_A = \{V \cap A \mid V \in \mathcal{U}^a\}$$
es el sistema de entornos de a en $(A, \mathcal{T}_A)$.
(4) Si $a \in A$ y $\mathcal{B}^a$ es una base de entornos de a en $(X, \mathcal{T})$, entonces
$$\mathcal{B}^a_A = \{W \cap A \mid W \in \mathcal{B}^a\}$$
es una base de entornos de a en $(A, \mathcal{T}_A)$.

Proposición 13. *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $(A, \mathcal{T}_A)$ un subespacio suyo y $B \subset A$. Entonces:*

(1) $(\bar{B})_A = \bar{B} \cap A$.
(2) $B^o \cap A \subset (B^o)_A$.
(3) $(Fr(B))_A \subset Fr(B) \cap A$.

En (2) y (3) de la Proposición 13 no tiene por qué darse la igualdad, como lo prueba el siguiente ejemplo:

Sea $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \text{topología usual})$ y $B = A = [0, 1]$. Entonces
$$B^o \cap A = (0, 1), \quad (B^o)_A = [0, 1], \quad (Fr(B))_A = \emptyset, \quad Fr(B) \cap A = \{0, 1\}.$$