# ESPACIOS CONEXOS Y COMPACTOS

FRANCISCO URBANO

## 1. Espacios conexos

El problema que trataremos en esta sección es cuando un espacio topológico puede descomponerse "topológicamente" como unión, no trivial, de dos subconjuntos complementarios. Cuando tal descomposición no sea posible, al espacio le llamaremos conexo. En caso de admitir una descomposición de ese tipo, al espacio le llamaremos disconexo. A continuación concretamos que es una tal descomposición topológica.

**Definición 1.** Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama disconexo si existe una partición de dicho espacio, esto es existen subconjuntos $A, B \neq \emptyset$ de $X$ con $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$, tales que $\bar{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Las ultimas condiciones indican que la partición de $X$ es topológica, en el sentido que ni $A$ ni $B$ están "próximos" a $B$ y $A$ respectivamente.

**Definición 2.** Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama conexo si para cualesquiera subconjuntos $A, B \neq \emptyset$ de $X$ con $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$, se cumple que $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ o $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$.

Es claro que $(X, \mathcal{T}_T)$ es conexo y que $(X, \mathcal{T}_D)$ es disconexo, siempre que $X$ tenga al menos dos puntos. En el siguiente resultado se caracteriza de diversas formas a los espacios conexos.

**Proposición 1.** *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

*(1) $(X, \mathcal{T})$ es conexo.*
*(2) Si $O_1, O_2$ son abiertos no vacios de $(X, \mathcal{T})$ con $O_1 \cup O_2 = X$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, entonces $\{O_1, O_2\} = \{X, \emptyset\}$.*
*(3) Si $A$ es un subconjunto de $X$ que es simultaneamente abierto y cerrado, entonces $A \in \{X, \emptyset\}$.*
*(4) Toda aplicación continua $f : (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, T_u)$ es constante.*
*(5) Toda aplicación continua $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, T_D)$ es constante, siendo $Y$ cualquier conjunto.*

Aun siendo un espacio conexo, a veces conviene conocer que subespacios topológicos suyos son conexos, ya que esta propiedad no se hereda en los subespacios. Es pues conveniente dar la siguiente natural definición.

**Definición 3.** Un subconjunto $A$ de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se llama conexo si el espacio $(A, \mathcal{T}_A)$ es conexo.

Ahora pondremos de manifiesto que la conexión es una propiedad topológica. Pero realmente la conexión se mantine por transformaciones mas débiles que los homeomorfismos.

**Proposición 2.** *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación continua. Si $(X, \mathcal{T})$ es conexo, entonces $f(X)$ es un subconjunto conexo de $X'$. En particular, la conexión es una propiedad topológica, esto es todo espacio homeomorfo a uno conexo es también conexo.*

Como consecuencia de esta Proposición, si un espacio $(X, \mathcal{T})$ es conexo y $R$ es una relación de equivalencia en $X$, entonces $(X/R, \mathcal{T}/R)$ también es conexo.

Vamos a dar ahora un resultado, que junto a su corolario nos dará condiciones suficientes para que un espacio sea conexo. El resultado será útil en muchas situaciones.

**Proposición 3.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de subconjuntos de $X$ cumpliendo*

*(1) $X = \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$,*
*(2) $A_\lambda$ es un subconjunto conexo de $X$ para todo $\lambda \in \Lambda$,*
*(3) $\overline{A_\lambda} \cap \overline{A_\mu} \neq \emptyset$ para todo $\lambda, \mu \in \Lambda$.*

*Entonces $(X, \mathcal{T})$ es conexo.*

**Corolario 1.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.*

*(1) Si $X$ es la unión de subconjuntos conexos de $X$ con intersección no vacia, entonces $(X, \mathcal{T})$ es conexo.*
*(2) Si para cada par de puntos distintos de $X$ existe un subconjunto conexo de $X$ que los contiene, entonces $(X, \mathcal{T})$ es conexo.*
*(3) Si existe una familia numerable $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos conexos de $X$ con $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset, \forall k \in \mathbb{N}$ y $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = X$, entonces $(X, \mathcal{T})$ es conexo.*

**Proposición 4.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio tolológico y $D$ un subconjunto denso de $X$, esto es $\overline{D} = X$. Si $D$ es un subconjunto conexo de $X$, entonces $(X, \mathcal{T})$ es conexo.*

**Corolario 2.** *Sean $A, B$ subconjuntos de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ con $A \subset B \subset \overline{A}$. Si $A$ es un subconjunto conexo de $X$, entonces $B$ también es un subconjunto conexo de $X$.*

No es difícil probar que $[0, 1]$ es un subconjunto conexo de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$, usando un argumento standar. Por la Proposición 2, cualquier intervalo cerrado y acotado también es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Por tanto, como

$$\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n],$$

se sigue, del Corolario 1, que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es conexo. De nuevo, la Proposición 2 me dice que cualquier intervalo abierto de $\mathbb{R}$ es un subconjunto conexo de $R$.

Pero como $(a, b) \subset [a, b) \subset \overline{(a, b)} = [a, b]$, del Corolario 2 se sigue que $[a, b)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Por tanto todos los intervalos de

$R$ son conexos. Además es fácil probar que un subconjunto conexo de $R$ es un intervalo, por lo que finalmente obtenemos que los subconjuntos conexos de $R$ son los intervalos.

Como otra aplicación del Corolario 2, y puesto que el subconjunto $A$ de $\mathbb{R}^2$,

$$A = \{(t, \sin(1/t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

es conexo, al ser homeomorfo a $R$, se prueba que $A \cup B$ también es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$, siendo $B$ cualquier subconjunto de $\{0\} \times [-1, 1]$.

En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ existen subconjuntos con complemento numerasble que no son conexos. En cambio, el resultado es radicalmente diferente para $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.

**Theorem 1.** *Si $A$ es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, entonce $\mathbb{R} - A$ es un subconjunto conexo de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$.*

Como una aplicación del Corolario 1, se prueba otra propiedad interesante de la conexión.

**Proposición 5.** *Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2$, espacios topológicos. Entonces $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ es conexo si y sólo si $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2$, son conexos.*

**Theorem 2** ( Teorema del valor intermedio)**.** *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ una apliación continua definida en un espacio conexo $(X, \mathcal{T})$. Si $f(x) = a$ y $f(y) = b$ con $a < b$, entonces para todo $c \in [a, b]$ existe un punto $z$ en $X$ tal que $f(z) = c$.*

**Ejemplo 1.**
*(1) Probar que $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ con su topología usual es un espacio conexo.*
*(2) Probar que la esfera $\mathbb{S}^n$ y el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$, con sus topologías usuales, son espacios conexos.*
*(3) El cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, el toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ y la cinta de Moebius son espacios topológicos conexos.*

Como consecuencia de estas propiedades, se prueba el siguiente resultado:

**Theorem 3** (Teorema de Borsuk-Ulam)**.** *Sea $f : (\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ una aplicación continua. Entonces existe un punto $p_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(p_0) = f(-p_0)$.*

## 2. Componentes conexas

Si un espacio topológico es disconexo, dicho espacio se pone como unión disjunta de subconjuntos conexos. El número de tales "trozos" será indicativo de lo disconexo que el espacio es.

**Definición 4.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Definimos en $X$ la relación $x \sim y$ si existe un sunconjunto conexo $A$ de $X$ tal que $x, y \in A$. Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia en $X$ y por tanto define una partición de $X$ en subconjuntos disjuntos. A dichos subconjuntos le llamaremos las componentes conexas de $(X, \mathcal{T})$.

Así, si $C \subset X$ es una componente conexa y $x, y \in C$, se tiene que $x \sim y$. Además si $C$ y $C'$ son componentes conexas diferentes, $x \in C$ y $x' \in C'$, se tiene que $x$ no está relacionado con $y$.

Si $x$ es un punto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, llamaremos la componente conexa de $x$ a la componente conexa de $X$ que contiene a $x$. Se representará por $C_x$. Es claro que si $x \neq y$ son puntos de $X$, entonces $C_x = C_y$ o $C_x \cap C_y = \emptyset$. Estudiemos a continuación propiedades de las componentes.

**Proposición 6.** *Seas $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces*

(1) *Las componente conexas de $(X, \mathcal{T})$ son subconjuntos conexos maximales de $X$, esto es si $C$ es una componente conexa de $X$, entonces $C$ es un subconjunto conexo de $X$ y si $A$ es un subconjunto conexo de $X$ con $C \subset A$ entonces $A = C$.*
(2) *Las componentes conexas de $X$ son subconjuntos cerrados de $(X, \mathcal{T})$. Por tanto, si el número de componentes conexas es finito, las componentes son también abiertas.*
(3) *Si $C$ es un subconjunto no vacio, conexo, abierto y cerrado de $X$, entonces $C$ es una componente conexa de $X$.*
(4) *Si $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una partición de $X$ por subconjuntos abiertos, conexos y no vacios, entonces $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ son las componentes de $X$.*

**Ejemplo 2.** (1) *La componentes conexas de un espacio con la topología discreta son sus puntos.*
(2) *Las componentes conexas de $(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_u)$ son sus puntos. En este caso la topología no es la discreta y en particular las componentes conexas no son abiertas.*
(3) *Sea*

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 1 = z^2\},$$

*dotado de la topologia inducida de la usual de $\mathbb{R}^3$. Entonces $X$ tiene dos componentes conexas, que vienen dadas por*

$$C^+ = \{(x, y, z) \in X \mid z \geq 1\}, \quad C^- = \{(x, y, z) \in X \mid z \leq -1\}.$$

**Proposición 7.** *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación continua. Si $C$ es una componente conexa de $X$, entonces $f(C) \subset C'$ siendo $C'$ una componente conexa de $X'$. Como consecuencia, si $f$ es un homeomorfismo, la imagen de una componente conexa de $X$ es una componente conexa de $X'$, y así el número de componentes conexas de un espacio es un invariante topológico.*

**Ejemplo 3.** *Probar que $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$ no son homeomorfos cuando:*

(1) $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ *y* $(X', \mathcal{T}') = (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$, $n \geq 2$.
(2) $(X, \mathcal{T}) = ([a, b], \mathcal{T}_u)$ *y* $(X', \mathcal{T}') = (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$.
(3) $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$ *y* $(X', \mathcal{T}') = (\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u)$, $n \geq 2$.

**Proposición 8.** *Sean $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2$, espacios topológicos y $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Entonces*

$$C_{(x_1, x_2)} = C_{x_1} \times C_{x_2},$$

*donde $C_a$ representa la componente conexa de $a$.*

## 3. Espacios conexos por arcos

**Definición 5.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un arco o camino (continuo) en $X$ es una aplicación continua $f : ([0,1], \mathcal{T}_u) \to (X, \mathcal{T})$. Al punto $x = f(0)$ se le llama el origen del arco, y al punto $y = f(1)$ el extremo del arco. Se dirá que $F$ une o conecta $x$ con $y$.

Conviene observar que el considerar los arcos definidos en $[0,1]$ no es restrictivo, pues todos los intervalos cerrados y acotados son homeomorfos entre si.

Es claro que el arco constante $f(t) = x, \forall t \in [0,1]$, conecta $x$ con $x$. También, si $f$ conecta $x$ con $y$, entonces $g(t) = f(1-t)$ conecta $y$ con $x$. Además, si $f$ conecta $x$ con $y$ y $g$ conecta $y$ con $z$, entonces

$$(f_* g)(t) = f(2t) \quad 0 \le t \le 1/2, g(2t-1) \quad 1/2 \le t \le 1$$

es un arco que conecta $x$ con $z$. Por tanto la relación en $X$ dada por $xRy$ si existe un arco $f$ que conecta $x$ con $y$ es una relación de equivalencia.

**Definición 6.** A los subconjuntos de $X$ de la partición asiociada a la relación de equivalencia $R$ le llamamos las componentes arco-conexas de $(X, \mathcal{T})$. $(X, \mathcal{T})$ se dice conexo por arcos si solo posee una componente arco conexa, esto es si dados dos puntos arbitrarios de $X$ existe un arco que los conecta.

**Definición 7.** Un subconjunto $A$ de un espacio topoógico $(X, \mathcal{T})$ se llama conexo por arcos, si el subespacio $(A, \mathcal{T}_A)$ es conexo por arcos.

Puesto que la imagen de un arco de $(X, \mathcal{T})$ es un subconjunto conexo de $X$, es fácil probar el siguiente resultado:

**Proposición 9.** *Todo espacio topológico conexo por arcos es conexo.*

El recíproco del anterior resultado es falso como lo prueba el siguiente ejemplo. Consideremos

$$X = \{(x, \sin 1/x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1]\} \cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$$

dotado de la topología inducida de la usual de $\mathbb{R}^2$. Como se probó en la sección 1, este espacio es conexo. Pero no es dificil probar que no es conexo por arcos, ya que no existe un arco en $X$ conectando el punto $(0,0)$ con un punto de la forma $(x, \sin 1/x)$ con $x \in (0,1]$. El punto $(0,0)$ de este espacio tiene la propiedad de que no posee ningún entorno conexo por arcos.

**Proposición 10.** *Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, se cumple que $X$ es conexo por arcos si y sólo si $X$ es conexo y todo punto posee un entorno conexo por arcos.*

Como consecuencia se prueba el siguiente

**Corolario 3.** *Todo subconjunto abierto y conexo del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ es conexo por arcos.*

## 4. Espacios Compactos

Los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ (o más generalmente los subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$) juegan un importante papel en el cálculo. El objetivo de esta sección es estudiar espacios topológicos que posean propiedades similares a los anteriores subconjuntos de $\mathbb{R}$. A estos espacios los llamaremos compactos, y el problema estriba en que el concepto de acotado no es topológico. Esto lo soluciona el clásico teorema de Heine-Borel.

**Theorem 4.** *Un subconjunto $A$ de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es cerrado y acotado si y sólo si para todo recubrimiento de $A$ por abiertos podemos extraer un subrecubrimiento finito, esto es para toda familia $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de abiertos de $\mathbb{R}$ cumpliendo $A \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ existe una subfamilia finita $\{O_{\lambda_1}, \ldots, O_{\lambda_n}\}$ tal que $A \subset \cup_{i=1}^n O_{\lambda_i}$.*

**Definición 8.** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A$ un subconjunto de $X$. Diremos que $A$ es compacto si para todo recubrimiento de $A$ por abiertos de $X$ podemos extraer un subrecubrimiento finito, esto es para toda familia $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}$ de abiertos de $X$ cumpliendo $A \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ existe una subfamilia finita $\{O_{\lambda_1}, \ldots, O_{\lambda_n}\}$ tal que $A \subset \cup_{i=1}^n O_{\lambda_i}$.

Cuando $A = X$ diremos que el espacio $(X, \mathcal{T})$ es compacto, y en este caso la compacidad de $X$ significa que para toda familia $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}$ de abiertos de $X$ cumpliendo $X = \cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ existe una subfamilia finita $\{O_{\lambda_1}, \ldots, O_{\lambda_n}\}$ tal que $X = \cup_{i=1}^n O_{\lambda_i}$. Es claro que $A$ es un subconjunto compacto de $X$ si y s̀olo si el espacio $(A, \mathcal{T}_A)$ es compacto.

**Proposición 11.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$. Entonces son equivalentes las siguientes propiedades:*

*(1) $(X, \mathcal{T})$ es compacto.*
*(2) Para toda familia $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de cerrados de $X$ cumpliendo $\emptyset = \cap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ existe una subfamilia finita $\{F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_n}\}$ tal que $\emptyset = \cap_{i=1}^n F_{\lambda_i}$.*
*(3) Todo recubrimiento de $X$ por abiertos de la base $\mathcal{B}$ admite un subrecubrimiento finito.*

A continuación vamos a estudiar algunas propiedades interesantes de los espacios compactos.

**Proposición 12.** *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación continua. Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto entonces $f(X)$ es un subconjunto compacto de $X'$. En particular, la compacidad es una propiedad topológica, esto es todo espacio homeomorfo a un espacio compacto también es compacto.*

Conviene notar que si un espacio $(X, \mathcal{T})$ es compacto y $R$ es una relación de equivalencia en $X$, entonces el espacio cociente $(X/R, \mathcal{T}/R)$ también es compacto.

El siguiente resultado es importante y en él se estudian propiedades interesantes de los subconjuntos compactos.

**Proposición 13.** *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topoloógico y $A$ un subconjunto de $X$. Entonces:*

(1) *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es compacto y* $A$ *es cerrado, entonces* $A$ *es compacto.*
(2) *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es Hausdorff y* $A$ *es compacto, entonces* $A$ *es cerrado.*

Otra consecuencia interesante es la siguiente.

**Corolario 4.** *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topoloógico y* $A, B$ *subconjuntos de* $X$*. Entonces:*

(1) *Si* $A$ *es compacto y* $B$ *cerrado, entonces* $A \cap B$ *es compacto.*
(2) *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es Hausdorff y* $A, B$ *son compactos, entonces* $A \cap B$ *es compacto.*

Como consecuencia de las proposiciones 12 y 13 se tiene el siguiente:

**Corolario 5.** *Sea* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *una aplicación continua. Si* $X$ *es compacto y* $X'$ *es Hausdorff, entonces* $f$ *es una aplicación cerrada.*

También de la proposición 13 se sigue

**Corolario 6.** *Sea* $(X, d)$ *un espacio métrico. Si* $A$ *es un subconjunto compacto de* $(X, \mathcal{T}(d))$*, entonces* $A$ *es cerrado y acotado.*

**Theorem 5** (Número de Lebesgue)**.** *Sea* $(X, d)$ *un espacio métrico compacto y* $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}(d)$ *un recubrimiento abierto de* $X$*. Entonves existe un número real* $\delta > 0$ *tal que si* $A$ *es un subconjunto de* $X$ *con diámetro menor que* $\delta$*, entonces existe un abierto* $O_{\lambda_0}$ *del recubrimiento tal que* $A \subset O_{\lambda_0}$*. A* $\delta$ *se le llama el número de Lebesgue del recubrimiento.*

Para finalizar estudiemos un resultado clásico que estudia el comportamiento de la compacidad frente al producto de espacios.

**Theorem 6.** *Sean* $(X, \mathcal{T})$ *y* $(X', \mathcal{T}')$ *espacios topológicos. Entonces el espacio producto* $(X \times X', \mathcal{T} \times \mathcal{T}')$ *es compacto si y sólo si* $(X, \mathcal{T})$ *y* $(X', \mathcal{T}')$ *son compactos.*

**Corolario 7.** *Sea* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ *el espacio Euclídeo. Entonces un subconjunto* $A$ *de* $\mathbb{R}^n$ *es compacto si y sólo si es un subconjunto cerrado y acotado.*