GEOMETRIA DE CURVAS Y SUPERFICIES

FRANCISCO URBANO

31 de mayo de 2010

Capítulo 1

CURVAS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO.

1.1. Curvas diferenciables. Parametrizaciones.

Una *curva diferenciable* es una aplicación diferenciable $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, siendo I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Diremos que la curva α es *plana* cuando exista un plano Π de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Img}\,(\alpha) \subset \Pi$. A $\mathrm{Img}\,(\alpha)$ le llamaremos la *traza* de α.

Las componentes de α serán representadas por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

y a t le llamaremos el parámetro de la curva. A $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ le llamamos el *vector tangente o velocidad* de α en t. La recta tangente a α en t es la recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\alpha(t)$ en la dirección de $\alpha'(t)$, esto es

$$\{\alpha(t) + \lambda\alpha'(t) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo 1.1.1 *Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = p + tq$, con $p, q \in \mathbb{R}^3$ y $q \neq 0$. Entonces α es una curva diferenciable cuya traza es la recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por p en la dirección de q.*

Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la aplicación $\alpha(t) = c + r(\cos(t/r), \sin(t/r))$, con $c \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}^+$. Entonces α es una curva diferenciable plana cuya traza es la circunferencia de centro c y radio r.

Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha(t) = \left(a\cos\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

con $a, b \neq 0$. A la curva α le llamamos hélice circular.

Si $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una curva diferenciable y $h : J \to I$ un difeomorfismo (J ha de ser otro intervalo), a la curva $\beta : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t))$$

le llamamos una *reparametrización* de α. Observemos que las trazas de α y β coinciden y que

$$\beta'(t) = h'(t)\alpha'(h(t)).$$

La reparametrización se llama directa si $h'(t) > 0$ para todo t e inversa si $h'(t) < 0$ para todo t (Al ser h un difeomorfismo y J conexo sólo estas dos posibilidades pueden darse).

1.2. Longitud de una curva. Parámetro arco.

Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva y $[a, b] \subset I$. Queremos definir la longitud de α en el intervalo $[a, b]$ y para ello vamos a medir longitud de poligonales uniendo los puntos extremos de la curva que se apoyen en la misma. Las longitudes de estas poligonales convergerán a un número cuando los trozos de la poligonal tiendan a infinito. Sea $P = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Entonces, si

$$L_a^b(\alpha, P) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|, \quad |P| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|,$$

se tiene que

Proposición 1.2.1 $\lim_{|P| \to 0} L_a^b(\alpha, P) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt$.

Definición 1.2.1 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva y $[a, b] \subset I$. Se define la longitud de α entre a y b y se representa por $L_a^b(\alpha)$ como*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

Estudiemos algunas propiedades de la longitud.

1. La longitud es invariante por movimientos rígidos, esto es si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva, $[a,b] \subset I$ y $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido, entonces
$$L_a^b(M \circ \alpha) = L_a^b(\alpha).$$
2. La longitud es invariante por reparametrizaciones, esto es si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva, $[a,b] \subset I$ y $h : J \to I$ un difeomorfismo con $h([c,d]) = [a,b]$ entonces
$$L_c^d(\alpha \circ h) = L_a^b(\alpha).$$
3. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva y $[a,b] \subset I$, probar que
$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \leq L_a^b(\alpha).$$

Si α es una curva que cumple $|\alpha'(t)| = 1$, $\forall t$, entonces la longitud de α entre a y b cumple
$$L_a^b(\alpha) = b - a.$$
Es razonable decir que esta curva está *parametrizada por el arco*. Usaremos la abreviatura p.p.a. Dos cuestiones nos planteamos al respecto. Puede toda curva ser reparametrizada por el arco? Cuantas reparametrizaciones por el arco hay de una curva dada?

Es claro que si una curva tiene puntos donde el vector tangente se anula no puede ser reparametrizada por el arco. Así necesitamos imponer a una tal curva que su vector tangente no se anule en ningún punto.

Definición 1.2.2 *Una curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ se llama regular si $\alpha'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.*

Proposición 1.2.2 *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces existe una reparametrización por el arco directa de α. En concreto, si $h : J \to I$ es el difeomorfismo dado por*
$$h^{-1}(t) = \int_a^t |\alpha'(r)| dr, \quad t \in I$$
con $a \in I$, entonces $\beta = \alpha \circ h$ está parametrizada por el arco.

Si α es una curva p.p.a., entonces las reparametrizaciones por el arco de α vienen definidas por la familia 1-paramétrica de difeomorfismos $h(t) = t + a$, $h(t) = -t + a$ con $a \in \mathbb{R}$.

1.3. Curvatura de curvas en el plano.

Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva plana. Queremos medir lo que la traza de la misma se çurva.$^{\text{en}}$ el plano. Una buena medida de ello, puede ser la relación entre la longitud de la imagen esférica de la curva, esto es la imagen en la circunferencia unidad de $\alpha'/|\alpha'|$, y la longitud de α. Para ello necesitamos que la curva α sea regular. Pero esta medida debe de hacerse en cada punto.

Proposición 1.3.1 *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva regular. Entonces para cada $t_0 \in I$*

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{L_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}(\frac{\alpha'}{|\alpha'|})}{L_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}(\alpha)} = \frac{|\langle \alpha''(t_0), J\alpha'(t_0)\rangle|}{|\alpha'(t_0)|^3}.$$

Por tanto es razonable decir que la curvatura de α en t_0 es $\frac{|\langle \alpha''(t_0), J\alpha'(t_0)\rangle|}{|\alpha'(t_0)|^3}$. Como dicho múmero es el valor absoluto de otro, parece razonable hacer una definición de curvatura mas general que admita la posibilidad de ser negativa.

Definición 1.3.1 *Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva regular. La curvatura de α en t, que se notará $K_\alpha(t)$, es definida por*

$$K_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t)\rangle}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Es un ejercicio fácil probar que una recta (o cualquier parametrización de una recta) tiene curvatura nula, y que una circunferencia de radio r tiene curvatura constante $\pm 1/r$ dependiendo de que la parametrización la recorra en sentido contrario o favorable a las agujas del reloj.

Estudiemos algunas propiedades de la curvatura.

Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva regular.

1. Si $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un movimiento rígido y $\beta = M \circ \alpha$, entonces $K_\beta = \pm K_\alpha$, dependiendo de que M sea un movimiento rígido directo o inverso.

2. Si $h : J \to I$ es un difeomorfismo y $\beta = \alpha \circ h$, entonces

$$K_\beta(t) = \pm K_\alpha(h(t)), \quad \forall t \in J,$$

dependiendo de que β sea una reparametrización directa o inversa de α.

3. Si K_α es constante, entonces la traza de α es un segmento de recta o un arco de circunferencia, dependiendo de que dicha constante sea nula o no nula.

En la interpretación del signo de la curvatura, juega un papel importante la función distancia (con signo) a una recta. Si R es la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por un punto p con dirección v ($|v| = 1$), dicha función viene dada por

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle x - p, Jv \rangle$$

Observemos que f se anula en los puntos de la recta, es positiva en el semiplano determinado por R hacia el que apunta Jv y es negativa en el otro.

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ es una curva regular p.p.a., consideramos la restricción a los puntos de la curva, de la función distancia a la recta tangente en $t_0 \in I$, esto es

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), J\alpha'(t_0) \rangle.$$

Entonces es claro que $f(t_0) = 0$, $f'(t_0) = 0$ y $f''(t_0) = K_\alpha(t_0)$. Como consecuencia obtenemos que

> Si $K_\alpha(t_0) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$ está contenido en el semiplano determinado por la recta tangente a α en t_0 hacia el que apunta $J\alpha'(t_0)$.
>
> Si $K_\alpha(t_0) < 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$ está contenido en el semiplano determinado por la recta tangente a α en t_0 hacia el que apunta $-J\alpha'(t_0)$.

Estudiemos con mayor profundidad el caso $K_\alpha(t_0) > 0$ (análogo sería el caso $K_\alpha(t_0) < 0$). Definimos entonces, para cada número real no nulo λ, la función $f_\lambda : I \to \mathbb{R}$ por

$$f_\lambda(t) = |\alpha(t) - a_\lambda|^2,$$

con $a_\lambda = \alpha(t_0) + \lambda J\alpha'(t_0)$. Entonces $f_\lambda(t_0) = \lambda^2$, $f'_\lambda(t_0) = 0$ y $f''_\lambda(t_0) = 2(1 - \lambda K_\alpha(t_0)$. De aquí se concluye que

> Si $\lambda < 1/K_\alpha(t_0)$, existe $\delta > 0$ tal que $\alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$ está fuera de la circunferencia de centro a_λ y radio $|\lambda|$.
>
> Si $\lambda > 1/K_\alpha(t_0)$, existe $\delta > 0$ tal que $\alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$ está dentro de la circunferencia de centro a_λ y radio λ.

Por tanto el valor $\lambda = 1/K_\alpha(t_0)$ es crítico y se le llama *radio de curvatura* de α en t_0. A $\alpha(t_0)+(1/K_\alpha(t_0))J\alpha'(t_0)$ se le llama centro de curvatura de α en t_0 y a la correspondiente circunferencia le llamaremos *circunferencia osculatriz* de α en t_0. Si $K_\alpha(t) > 0$ para todo $t \in I$, a la curva formada por todos los centros de curvatura $\beta(t) = \alpha(t) + (1/K_\alpha(t))J\alpha'(t)$ le llamamos *evoluta* de α.

Proposición 1.3.2 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. con curvatura positiva y no decreciente. Si $a \in I$, probar que*

$$|\alpha(t) - \beta(a)| \leq \frac{1}{K_\alpha(a)},$$

para cada $t \geq a$, donde β es la evoluta de α. Esto significa que $\alpha([a, \infty) \cap I)$ está contenido en el disco **osculatriz** *de α en a.*

Para probar la proposición conviene ver que la longitud de la evoluta cumple

$$L_a^t(\beta) = \frac{1}{K_\alpha(a)} - \frac{1}{K_\alpha(t)}, \quad t \geq a.$$

1.4. Diedro de Frenet. Teorema fundamental de curvas en el plano.

Vamos a introducir una nomenclatura que será de utilidad también en el estudio de curvas espaciales.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. Representaremos por $T(t) = \alpha'(t)$ y por $N(t) = J\alpha'(t)$ al que se llamará vector normal a α en t. Entonces es un ejercicio fácil comprobar que $\{T(t), N(t)\}$ es para cada t una base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{R}^2$ cumpliendo

$$T'(t) = K(t)N(t), \quad N'(t) = -K(t)T(t).$$

A $\{T(t), N(t)\}$ le llamamos el *diedro de Frenet* de α y a las anteriores ecuaciones las *ecuaciones de Frenet* de α.

Teorema 1.4.1 *(***Teorema fundamental de curvas planas***). Sea $K_0 : I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un intervalo abierto I. Entonces existe una curva plana $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ p.p.a. tal que $K_\alpha = K_0$. Además si $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ es otra curva plana p.p.a. con $K_\beta = K_0$, entonces existe un movimiento rígido directo $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\beta = M \circ \alpha$.*

Como consecuencia de este resultado de existencia y unicidad, puede probarse que

> *Si $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2$ son curvas planas parametrizadas p.p.a. tal que $K_\beta = -K_\alpha$, entonces existe un movimiento rígido inverso $M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\beta = M \circ \alpha$.*

También, haciendo uso del anterior teorema es fácil realizar los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1.4.1 *Sea $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. ($a > 0$) cumpliendo que $K_\alpha(-t) = -K_\alpha(t)$ para cada $t \in (-a, a)$. Probar que la traza de α es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$.*

Ejercicio 1.4.2 *Sea $\alpha : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ una curva p.p.a. ($a > 0$) cumpliendo que $K_\alpha(-t) = K_\alpha(t)$ para cada $t \in (-a, a)$. Probar que la traza de α es simétrica respecto de la recta normal de alpha en $t = 0$.*

1.5. Curvatura y torsión de curvas en el espacio. Triedro de Frenet. Teorema fundamental de curvas en el espacio.

Usando el último epígrafe, vamos a hacer una construcción similar para curvas en $\mathbb{R}^3$ p.p.a.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. Representamos $T(t) = \alpha'(t)$, que es un vector unitario de $\mathbb{R}^3$. Definimos la *curvatura* de α en t por

$$K_\alpha(t) := |T'(t)|.$$

En este caso, $K_\alpha \geq 0$. Supongamos ahora que $K_\alpha(t) > 0$ para cada $t \in I$. Entonces la función K_α es diferenciable y podemos considerar

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} = \frac{1}{K_\alpha(t)} T'(t),$$

al que llamaremos el vector *normal* a α en t. Observemos que $T(t)$ y $N(t)$ no solo son linealmente independientes sino ortonormales, de donde si $B(t) := T(t) \times N(t)$ se sigue que

$$\{T(t), N(t), B(t)\}$$

constituyen, para cada $t \in I$, una base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$. A $B(t)$ se le llama el vector *binormal* a α en t y a la anterior base el *triedro de Frenet* de α en t.

Es ahora fácil calcular las derivadas de las funciones $N(t)$ y $B(t)$ y obtener que

$$\begin{aligned} T'(t) &= K_\alpha(t)N(t) \\ N'(t) &= -K_\alpha(t)T(t) - \tau_\alpha(t)B(t) \\ B'(t) &= \tau_\alpha(t)N(t). \end{aligned}$$

para una cierta función diferenciable $\tau_\alpha : I \to \mathbb{R}$ a la que se le llama la *torsión* de α. Las ecuaciones anteriores se llaman las *ecuaciones de Frenet* de α. Conviene recordar que esta construcción es válida para curvas p.p.a. con curvatura estrictamente positiva.

Observemos que la curvatura de una curva plana considerada como curva espacial no es mas que el valor absoluto de la curvatura como curva plana. Por tanto la curvatura de una recta p.p.a. es cero y la de una circunferencia p.p.a. es el inverso del radio. Es un ejercicio fácil probar que la curvatura y la torsión de la hélice circular p.p.a. dada en la sección 1.1 vienen dadas por

$$K = \frac{|a|}{a^2+b^2}, \quad \tau = -\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Estudiemos algunas propiedades de la curvatura y la torsión.

Sea $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con curvatura estrictamente positiva.

1. Si $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un movimiento rígido y $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ es la curva $\beta = M \circ \alpha$, probar que

$$K_\beta = K_\alpha, \quad \tau_\beta = \tau_\alpha, \quad \text{si } M \text{ es directo}, y$$

$$K_\beta = K_\alpha, \quad \tau_\beta = -\tau_\alpha, \quad \text{si } M \text{ es inverso.}$$

2. La torsión $\tau_\alpha(t) = 0$ para todo $t \in I$ si y sólo si la traza de α está contenida en un plano de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 1.5.1 (**Teorema fundamental de curvas espaciales**). *Sean $K_0, \tau_0 : I \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables definidas en un intervalo abierto I con K_0 estrictamente positiva. Entonces existe una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$*

p.p.a. tal que $K_\alpha = K_0$ y $\tau_\alpha = \tau_0$. Además si $\beta : I \to \mathbb{R}^3$ es otra curva p.p.a. con $K_\beta = K_0$ y $\tau_\beta = \tau_0$, entonces existe un movimiento rígido directo $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = M \circ \alpha$.

Al igual que en el caso de curvas planas, como consecuencia de este teorema pueden probarse los siguientes resultados.

1. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con curvatura estrictamente positiva. Probar que la traza de α está contenida en una hélice circular o en una circunferencia si y sólo si la curvatura y la torsión son constantes.

2. Sean $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^3$ curvas p.p.a. con $K_\alpha = K_\beta > 0$ y $\tau_\alpha = -\tau_\beta$. Entonces existe un movimiento rígido inverso $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = M \circ \alpha$.

Una hélice circular (ver 1.1) tiene la propiedad de que sus rectas normales son perpendiculares al vector $(0, 0, 1)$. En general se define una *hélice* como una curva p.p.a. de $\mathbb{R}^3$ con curvatura estrictamente positiva cuyas rectas normales son perpendiculares a una dirección dada de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 1.5.2 *(Teorema de Lancret).*
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con curvatura estrictamente positiva. Entonces α es una hélice si y sólo si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\tau_\alpha = aK_\alpha$.

Como la curvatura y la torsión determinan a las curvas p.p.a. salvo movimientos rígidos directos, es razonable que si una curva está sometida a una ligadura (como por ejemplo tener su traza en una esfera) su curvatura y torsión estén relacionadas. Conviene destacar el siguiente resultado.

Ejercicio 1.5.1 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva p.p.a. con curvatura K_α estrictamente positiva cumpliendo que $K'_\alpha(t) \neq 0$ y $\tau_\alpha(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Entonces la traza de α está contenida en una esfera de radio r si y sólo si*

$$\frac{1}{(K_\alpha)^2} + \frac{(K'_\alpha)^2}{(K_\alpha)^4(\tau_\alpha)^2} = r^2.$$

La curvatura y la torsión de curvas en $\mathbb{R}^3$ han sido definidas para curvas p.p.a. En el caso de curvas no p.p.a. conviene definir estos invariantes y dar expresiones explícitas de ambas.

Definición 1.5.1 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular y $\beta = \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización por el arco directa de α, esto es $h' > 0$.*

Se define la curvatura de α, y se nota K_α, como

$$K_\alpha(t) := K_\beta(h^{-1}(t)), \quad \forall t \in I.$$

Si $K_\alpha > 0$, se define la torsión de α, y se nota τ_α, como

$$\tau_\alpha(t) := \tau_\beta(h^{-1}(t)), \quad \forall t \in I.$$

Haciendo un tedioso, pero fácil cálculo, se demuestra el siguiente resultado.

Proposición 1.5.1 *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. Entonces*

$$K_\alpha = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}.$$

Si además $K_\alpha > 0$, entonces

$$\tau_\alpha = -\frac{\det\{\alpha', \alpha'', \alpha'''\}}{|\alpha' \times \alpha''|^2} = -\frac{< \alpha' \times \alpha'', \alpha''' >}{|\alpha' \times \alpha''|^2}.$$

Capítulo 2

SUPERFICIES EN EL ESPACIO.

2.1. Superficies regulares en el espacio.

Definición 2.1.1 *Una superficie es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ en el que cualquier punto suyo p tiene asociado un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno abierto V de p en $\mathbb{R}^3$ y una aplicación diferenciable $X : U \to \mathbb{R}^3$ cumpliendo*

1. $X(U) = V \cap S$.
2. $X : U \to V \cap S$ *es un homeomorfismo.*
3. *La diferencial de X en cualquier punto $q \in U$, $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, es un monomorfismo.*

Generalmente los parámetros de $\mathbb{R}^2$ los notaremos $\{u, v\}$ y los de $\mathbb{R}^3$ por $\{x, y, z\}$. Así, se escribirá

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

La condición de ser dX_q un monomorfismo, equivale a que la matriz que la representa tiene rango 2, esto es los vectores

$$X_u(q) = \frac{\partial X}{\partial u}(q) = (x_u(q), y_u(q), z_u(q)) \quad y \quad X_v(q) = \frac{\partial X}{\partial v}(q) = (x_v(q), y_v(q), z_v(q))$$

son linealmente independientes para todo $q \in U$.

A la aplicación X se le llama *parametrización* de la superficie y a $\{u, v\}$ *coordenadas locales* de S. A las curvas $u \mapsto X(u, v_0)$ y $v \mapsto X(u_0, v)$ se les llama *curvas coordenadas* de la parametrización.

Sea Π el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $ax + by + cz = d$. Como (a, b, c) es un vector no nulo, supongamos que $c \neq 0$. Sea $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación

$$X(u, v) = (u, v, -(a/c)u - (b/c)v + (d/a)).$$

Es fácil comprobar que X es una parametrización de Π alrededor de cualquier punto $p \in \Pi$. Por tanto el plano Π es una superficie.

Es también un ejercicio sencillo comprobar que si S es una superficie y $O \subset S$ un abierto suyo, entonces O también es una superficie.

También es fácil comprobar que si $\Phi : O_1 \to O_2$ es un difeomorfismo entre dos abiertos de $\mathbb{R}^3$ y S una superficie contenida en O_1, entonces $\hat{S} = \Phi(S)$ es también una superficie de $\mathbb{R}^3$.

2.2. Ejemplos: Grafos, superficies implícitas, superficies de revolución, superficies regladas.

El ejemplo del plano dado en 2.1 sugiere la siguiente construcción de ejemplos.

Sea O un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : O \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos

$$G_f = \{(x, y, f(x, y))/(x, y) \in O\}.$$

Se define entonces $X : U = O \to \mathbb{R}^3$ por

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Es fácil comprobar que X es una parametrización de G_f alrededor de cualquier punto $p \in G_f$. Por tanto G_f es una superficie a la que llamamos *grafo* de f.

Otra forma general de construir superficies es de forma implícita. Esto es, si O es un abierto de $\mathbb{R}^3$, $F : O \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $a \in \mathbb{R}$, ¿cuando

$$S = \{(x, y, z) \in O \,/\, F(x, y, z) = a\}$$

es una superficie de $\mathbb{R}^3$?

La cuestión es razonable, pues estamos imponiendo una ligadura entre las coordenadas de los puntos de O. Como es natural no siempre la respuesta es afirmativa, y el siguiente resultado, que básicamente es el teorema de la función implícita, nos da una respuesta.

Proposición 2.2.1 *Sea O un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $F : O \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $a \in \mathbb{R}$ es un número real tal que para todo $p \in F^{-1}(a)$ la diferencial de F en p, $dF_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, es no nula (a un tal a le llamamos valor regular de F) y $F^{-1}(a) \neq \emptyset$, entonces*

$$S = F^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in O \,/\, F(x, y, z) = a\}$$

es una superficie de $\mathbb{R}^3$.

Conviene comentar que si $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$ es el gradiente de la función F, el que a sea un valor regular de F significa que $(\nabla F)_p \neq 0$ para todo $p \in S$.

Observemos que si $f : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces el grafo G_f es la superficie implícita dada por

$$G_f = \{(x, y, z) \in O \times \mathbb{R} \,/\, F(x, y, z) = 0\}$$

donde $F(x, y, z) = f(x, y) - z$.

De entre muchos ejemplos interesantes de superficies que pueden ser definidas de forma implícita, destacamos los dos siguientes.

Ejemplo 2.2.1 *Sea $c \in \mathbb{R}^3$, r un número real positivo y*

$$S^2(c, r) = \{p \in \mathbb{R}^3 \,/\, |p - c|^2 = r^2\}$$

la esfera de centro c y radio r. Si $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es la función diferenciable dada por

$$F(x, y, z) = (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2, \quad c = (c_1, c_2, c_3),$$

entonces es fácil comprobar que r^2 es un valor regular de F y por tanto $S^2(c, r)$ es una superficie regular.

Ejemplo 2.2.2 *Sean a y r numeros reales positivos con $a > r$, y*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2\}.$$

Si $F : \mathbb{R}^3 - \{\text{eje } z\} \to \mathbb{R}$ es la función diferenciable definida por

$$F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2,$$

entonces es fácil ver que r^2 es un valor regular de F y por tanto S es una superficie a la que se llama **toro de revolución**.

El nombre de toro de revolución viene de que dicha superficie se obtiene al girar alrededor del eje z la circunferencia en el plano $x = 0$ centrada en $(a, 0)$ y de radio r.

Este ejemplo sugiere que también podremos construir superficies rotando alrededor del eje z ciertas curvas en el plano $x = 0$. El problema es que condiciones hemos de imponer a dichas curvas para que al rotarlas se obtengan superficies de $\mathbb{R}^3$.

Sea pues $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva en el plano $x = 0$ dada por $\alpha(t) = (0, f(t), g(t))$. Supongamos que:

1. α es regular.

2. $f(t) > 0$ para todo $t \in I$.

3. α es inyectiva o $I = \mathbb{R}$, α es periódica de periodo mínimo T y α es inyectiva en $[0, T[$.

Entonces el conjunto S obtenido al rotar α alrededor del eje z dado por

$$S = \{(f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t)) \,/\, t \in I, \theta \in \mathbb{R}\},$$

es una superficie de $\mathbb{R}^3$ a la que llamamos *superficie de revolución*. Es claro que si $X : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación dada por

$$X(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),$$

entonces $X_{|(0,2\pi)}$ y $X_{|(-\pi,\pi)}$ son dos parametrizaciones de S cuyas imágenes cubren todos los puntos de S. Las condiciones 1. y 2. anteriores nos aseguran que la diferencial de X es inyectiva en todos los puntos de $I \times \mathbb{R}$. La condición 3. nos asegura que las parametrizaciones son homeomorfismos sobre la imagen. Es claro que esta definición se podría hacer rotando alrededor de una recta de $\mathbb{R}^3$ una curva contenida en un plano que contenga a la recta cumpliendo las tres condiciones anteriores. No obstante, ambos ejemplos se diferenciarían en un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$.

Como ejemplo, consideremos la catenaria $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (0, \cosh t, t)$. Es claro que α cumple las propiedades anteriores y por tanto

$$S = \{(\cosh t\cos\theta, \cosh t\sin\theta, t) \,/\, t, \theta \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$$

es una superficie de $\mathbb{R}^3$ a la que se llama *catenoide*.

2.3. Funciones y aplicaciones diferenciables.

El principal objetivo de esta sección es definir el concepto de diferenciabilidad para funciones definidas en superficies, extendiendo así el cálculo diferencial a objetos mas generales que abiertos de un plano. Para ello necesitamos probar una propiedad de las superficies que dice que el cambio de parámetros en una superficie es un difeomorfismo. Comenzamos probando el siguiente resultado.

Lema 2.3.1 *Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}$ una parametrización de una superficie S y $p_0 \in U$. Entonces existe un entorno abierto W de p_0 con $W \subset U$ y una proyección $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sobre alguno de los planos $x = 0$, $y = 0$ o $z = 0$ tal que $(\pi \circ X)(W)$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $\pi \circ X : W \to (\pi \circ X)(W)$ es un difeomorfismo.*

Usando este Lema, puede probarse el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1 *En una superficie S los cambios de parámetros son difeomorfismos, esto es si $X_i : U_i \to S$ $i = 1, 2$ son parametrizaciones de S tal que $O = X_1(U_1) \cap X_2(U_2)$ es no vacío, entonces la aplicación*

$$X_2^{-1} \circ X_1 : X_1^{-1}(O) \subset \mathbb{R}^2 \to X_2^{-1}(O) \subset \mathbb{R}^2$$

es un difeomorfismo.

Definición 2.3.1 *Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función definida sobre una superficie S. Diremos que f es diferenciable si para toda parametrización $X : U \to S$ de S, la función $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable.*

Puesto que el número de parametrizaciones de una superficie es infinito, para que esta definición sea manejable desde un punto de vista práctico necesitamos probar el siguiente resultado que es una consecuencia fácil del teorema anterior.

Proposición 2.3.1 *Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función definida sobre una superficie S. Entonces f es diferenciable si y sólo si para todo $p \in S$ existe una parametrización $X_p : U_p \to S$ de S con $p \in X_p(U_p)$ y tal que $f \circ X_p : U_p \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable.*

Ahora, haciendo uso de la definición anterior, definimos aplicaciones diferenciables en un contexto mas general.

Definición 2.3.2 *Sea S una superficie.*

1. *Diremos que una función $F : S \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable si $F_i : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable para todo $i = 1, \ldots, n$, siendo $F = (F_1, \ldots, F_n)$.*

2. *Si O es un abierto de $\mathbb{R}^n$, una aplicación $F : O \to S$ se dirá diferenciable si $i \circ F : O \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable, donde $i : S \to \mathbb{R}^3$ es la inclusión.*

3. *Si $\hat{S}$ es otra superficie, una aplicación $F : S \to \hat{S}$ se dirá diferenciable si $\hat{i} \circ F : S \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable, donde $\hat{i} : \hat{S} \to \mathbb{R}^3$ es la inclusión.*

En el siguiente resultado se exponen propiedades de las funciones diferenciables, algunas de las cuales son de gran utilidad desde un punto de vista practico.

Proposición 2.3.2

1. *Cualquier aplicación diferenciable es continua.*

2. *Sea O un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f : O \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es diferenciable en el sentido de la geometría si y sólo si lo es en el sentido del cálculo.*

3. *La restricción de cualquier aplicación diferenciable definida en una superficie a un abierto suyo es diferenciable.*

4. *Sea S una superficie, $F, G : S \to \mathbb{R}^n$ aplicaciones diferenciables y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces las aplicaciones $F + G, \lambda F : S \to \mathbb{R}^n$ y $< F, G >: S \to \mathbb{R}$ son también diferenciables. Si $n = 1$ y $G(p) \neq 0$ para cada $p \in S$, $F/G : S \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Si $n = 3$, $F \times G : S \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable.*

5. *Sea O un abierto de $\mathbb{R}^3$ y S una superficie con $S \subset O$. Si $F : O \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable entonces $f = F/S : S \to \mathbb{R}^n$ también es diferenciable. En particular, la inclusión $i : S \to \mathbb{R}^3$, la identidad $I : S \to S$ y las aplicaciones constantes definidas en S son diferenciables.*

6. *Si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es una parametrización de una superficie S, entonces las aplicaciones $X : U \to S$ y $X^{-1} : X(U) \to U$ son aplicaciones diferenciables.*

7. *Si $F : S_1 \to S_2$ y $G : S_2 \to S_3$ son aplicaciones diferenciables, donde S_1, S_2 y S_3 son superficies o abiertos de un espacio euclídeo, entonces $G \circ F : S_1 \to S_3$ es diferenciable.*

8. *Si P es el plano que pasa por el punto p_0 con vector normal a y S una superficie, entonces la función $h : S \to \mathbb{R}$ definida por*

$$h(p) = < p - p_0, a >,$$

es diferenciable. Cuando $|a| = 1$, h es la función altura (con signo) al plano P.

9. *Si p_0 es un punto de $\mathbb{R}^3$ y S una superficie, la función $d : S \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d(p) = |p - p_0|^2,$$

es diferenciable.

Las demostraciones de estas propiedades son sencillas y se deducen de las definiciones previas y de propiedades similares para funciones entre abiertos del espacio euclídeo. La única dificultad está en la demostración de la propiedad 7. cuando S_2 es una superficie, en la que se usa el Lema 2.3.1. Las funciones definidas en 8. y 9. serán muy usadas a lo largo del curso.

Definición 2.3.3 *Un difeomorfismo Φ entre dos superficies S y $\hat{S}$ es una aplicación diferenciable biyectiva $\Phi : S \to \hat{S}$ tal que $\Phi^{-1} : \hat{S} \to S$ es también diferenciable. Diremos que las superficies S y $\hat{S}$ son difeomorfas.*

Proposición 2.3.3 1. *Si $X : U \to S$ es una parametrización de una superficie S, entonces $X : U \to X(U)$ es un difeomorfismo.*

2. *Si $F : S_1 \to S_2$ y $G : S_2 \to S_3$ son difeomorfismos entre superficies, entonces $G \circ F : S_1 \to S_3$ es un difeomorfismo.*

3. *Si S es una superficie contenida en un abierto O de $\mathbb{R}^3$ y $\Phi : O \to \hat{O}$ es un difeomorfismo de O sobre otro abierto $\hat{O}$ de $\mathbb{R}^3$, entonces $\Phi_{|S} : S \to \hat{S}$ es un difeomorfismo, donde $\hat{S} = \Phi(S)$.*

2.4. Plano tangente. Primera forma fundamental.

Al igual que definimos el vector tangente a una curva, vamos ahora a definir el concepto de vector tangente a una superficie en un punto suyo.

Esto nos permitirá hablar de diferencial de una aplicación diferenciable y de poder estudiar la geometría de una superficie haciendo uso de este cálculo diferencial.

Definición 2.4.1 *Sea S una superficie y $p \in S$ un punto suyo. Un vector v de $\mathbb{R}^3$ diremos que es un vector tangente a S en el punto p si existe una curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S \subset \mathbb{R}^3$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.*

Es decir los vectores tangentes a una superficie son los vectores tangentes a curvas de $\mathbb{R}^3$ que *estén contenidas en la superficie.* El que en la definición anterior la curva este definida en un intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ y pase en el instante 0 por el punto p es anecdótico, pues salvo traslaciones del parámetro y reducción del intervalo de definición de la misma, todas las curvas contenidas en S y que pasen por p son de esa forma.

Sea $p \in S$ y T_pS el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$T_pS = \{v \in \mathbb{R}^3 \,/\, \text{v es un vector tangente a S en p}\}.$$

Lema 2.4.1 *Sea $p \in S$ un punto de una superficie S y $X : U \to S$ una parametrización de S con $p \in X(S)$. Entonces*

$$(dX)_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2) = T_pS.$$

En particular T_pS es un plano vectorial de R^3 al que llamamos el plano tangente a S en p.

Conviene notar que si $S_1 \subset S$ es un abierto de S y $p \in S_1$, entonces $T_pS_1 = T_pS$.

Lema 2.4.2 *Sea $F : O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto O de $\mathbb{R}^3$ y $a \in \mathbb{R}$ un valor regular de F con $F^{-1}(a) \neq \emptyset$. Si p es un punto de la superficie $S = F^{-1}(a)$, se tiene que*

$$T_pS = \ker dF_p = < (\nabla F)_p >^{\perp},$$

donde $< (\nabla F)_p >^{\perp}$ es el complemento ortogonal del vector no nulo $(\nabla F)_p$.

Como caso particular, ya que el grafo de una función $f : O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en un abierto O de $\mathbb{R}^2$ es dado por $G_f = F^{-1}(0)$ con $F : O \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, se tiene que

$$T_{\{(x,y,f(x,y))\}}G_f = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f_x v_1 + f_y v_2 = v_3\}.$$

Usando el Lema 2.4.2, es fácil ver que si p es un punto de la esfera $S^2(c,r)$, entonces

$$\begin{aligned} T_pS^2(c,r) &= \{v = (v_1, v_2, v_3) \,/\, (x - c_1)v_1 + (y - c_2)v_2 + (z - c_3)v_3 = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^3 \,/ < v, p - c >= 0\}. \end{aligned}$$

2.5. Diferencial de una aplicación diferenciable.

Sea S una superficie y $f : S \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. Dado un punto $p \in S$, se define la *diferencial de f en p* y se representa por df_p como la aplicación

$$df_p : T_pS \to \mathbb{R}^n$$

definida por

$$df_p(v) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(f \circ \alpha)(t) = (f \circ \alpha)'(0),$$

siendo $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

Si $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ es una parametrización de S y $X(q) = p$, entonces es fácil comprobar que

$$df_p = d(f \circ X)_q \circ ((dX)_q)^{-1}.$$

Observemos que $dX_q : \mathbb{R}^2 \to T_pS$ es un isomorfismo. La anterior expresión muestra que df_p está bien definida, esto es no depende de la curva α escogida, y que es una *aplicación lineal*.

Algunas observaciones sencillas respecto a la anterior definición son:

1. Si O es un abierto de $\mathbb{R}^3$ con $S \subset O$ y $f = F_{|S}$ donde $F : O \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable, entonces $df_p = (dF_p)_{|T_pS}$.

2. Sea $f : S \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. Si f es constante, entonces $df_p = 0$ para todo $p \in S$. Si $df_p = 0$ para todo $p \in S$ y S es conexa, entonces f es constante.

3. Si $S_1 \subset S$ es un abierto de S, $f : S \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable y $p \in S_1$, entonces $df_p = d(f_{|S_1})_p$.

4. Si $i : S \to \mathbb{R}^3$ es la inclusión, entonces di_p es la inclusión de T_pS en $\mathbb{R}^3$.

Sea ahora $f : O \subset \mathbb{R}^n \to S$ una aplicación diferenciable de un abierto O de $\mathbb{R}^n$ en una superficie S. Entonces considerando $f : O \to \mathbb{R}^3$, es fácil comprobar que para cada $p \in O$, $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ cumple $df_p(\mathbb{R}^n) \subset T_{f(p)}S$ y en adelante consideraremos siempre la restricción

$$df_p : \mathbb{R}^n \to T_{f(p)}S.$$

Finalmente, si $f : S \to \hat{S}$ es una aplicación diferenciable entre superficies, la imagen de la diferencial de f en p, considerada como aplicación de S en $\mathbb{R}^3$, está contenida en el plano $T_{f(p)}\hat{S}$. Por tanto, dado un punto $p \in S$ consideraremos la diferencial de f en p como la aplicación lineal

$$df_p : T_pS \to T_{f(p)}\hat{S}.$$

Una vez definida la diferencial de una aplicación diferenciable en los tres casos, vamos a extender la regla de la cadena a esta nueva situación.

Teorema 2.5.1 Regla de la cadena *Sean $f : S_1 \to S_2$ y $g : S_2 \to S_3$ aplicaciones diferenciables siendo S_i superficies o abiertos de un espacio euclídeo. Entonces para cada $p \in S_1$ se tiene que*

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p : T_pS_1 \to T_{(g\circ f)(p)}S_3.$$

Si $\Phi : S \to \hat{S}$ es un difeomorfismo, entonces usando la regla de la cadena, es fácil comprobar que para cada punto $p \in S$, $df_p : T_pS \to T_{f(p)}\hat{S}$ es un isomorfismo lineal y que

$$(d\Phi^{-1})_{\Phi(p)} = (d\Phi_p)^{-1}.$$

El siguiente resultado, que es la versión para superficies del teorema de la función inversa, es fácil de probar.

Teorema 2.5.2 Teorema de la función inversa *Sea $f : S \to \hat{S}$ una aplicación diferenciable entre superficies y p un punto de S. Si $df_p : T_pS \to T_{f(p)}\hat{S}$ es un isomorfismo lineal, entonces existen entornos abiertos V y W de p y $f(p)$ respectivamente, tal que $F(V) = W$ y $f : V \to W$ es un difeomorfismo.*

Como consecuencia, es razonable decir que una aplicación diferenciable $f : S \to \hat{S}$ entre superficies es un *difeomorfismo local* si para todo $p \in S$ existen entornos abiertos V y W de p y $f(p)$ respectivamente tal que $f(V) = W$ y $f : V \to W$ es un difeomorfismo.

En el siguiente resultado se estudian algunas propiedades de los difeomorfismos locales.

Proposición 2.5.1 *Sea $f : S \to \hat{S}$ una aplicación diferenciable entre superficies. Entonces*

1. *f es un difeomorfismo local si y sólo si $df_p : T_pS \to T_{f(p)}\hat{S}$ es un isomorfismo lineal para todo $p \in S$.*
2. *Si f es un difeomorfismo local, entonces f es una aplicación abierta.*
3. *Si S es un subconjunto de $\hat{S}$, entonces S es un abierto de $\hat{S}$.*

2.6. Orientabilidad.

Capítulo 3

APLICACIÓN DE GAUSS. CURVATURAS.

3.1. La aplicación de Gauss y la segunda forma fundamental.

Sea S una superficie y N un campo normal unitario sobre S (o sobre un abierto V de S si S no es orientable). Entonces, N define una aplicación diferenciable

$$N : S \to \mathbb{S}^2(1)$$

a la que llamamos *aplicación de Gauss de S*. Siguiendo la misma idea que se usó para la definición de curvatura de una curva plana, variando la aplicación de Gauss debemos de encontrar información sobre la forma de la superficie. Por tanto consideramos la diferencial de la aplicación de Gauss en un punto $p \in S$, $dN_p : T_pS \to T_{N(p)}\mathbb{S}^2(1)$. Pero el plano tangente a $\mathbb{S}^2(1)$ en $N(p)$ es el complemento ortogonal del vector $N(p)$ y por tanto $T_{N(p)}\mathbb{S}^2(1) = T_pS$. Finalmente

$$dN_p : T_pS \to T_pS$$

es una aplicación lineal de un plano vectorial en si mismo. Dicha aplicación lineal tiene sólo dos invariantes, que son su determinante y su traza. Por tanto es razonable considerar las funciones

$$K(p) = \det (dN)_p, \quad H(p) = -\frac{1}{2}\text{Traza}\,(dN)_p.$$

Es claro que la curvatura de Gauss K no depende de la aplicación de Gauss escogida y que está bien definida sobre toda la superficie incluso cuando la superficie no es orientable. Por contra, la curvatura media cambia de signo cuando cambiamos la aplicación de Gauss por su opuesta, y por tanto H^2 si es independiente de la aplicación de Gauss escogida y está definida sobre toda la superficie incluso si la superficie no es orientable.

Ahora, usando el producto escalar $\langle , \rangle$ de $\mathbb{R}^3$, podemos definir una forma bilineal $\sigma_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\sigma_p(v, w) = -\langle (dN)_p(v), w\rangle, \quad v, w \in T_pS,$$

a la que llamaremos la *segunda forma fundamental de la superficie en el punto* p. Es claro que

$$K(p) = \det \sigma_p, \quad H(p) = \frac{1}{2}\mathrm{Traza}\, \sigma_p.$$

Proposición 3.1.1 *La segunda forma fundamental es simétrica, o equivalentemente la diferencial de la aplicación de Gauss es un endomorfismo autoadjunto, esto es*

$$\sigma_p(v, w) = \sigma_p(w, v), \quad p \in S, \quad v, w \in T_pS.$$

La simetría de la segunda forma fundamental nos asegura que es diagonalizable, esto es en cada punto p de la superficie, $-(dN)_p$ tiene dos valores propios reales $k_1(p), k_2(p)$, a los que llamaremos las curvaturas principales de S en p. Es claro que las relaciones entre estas curvaturas y las definidas anteriormente son

$$K = k_1k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad k_i^2 - 2Hk_i + K = 0, \quad i = 1, 2.$$

Como la anterior ecuación de segundo grado tiene solución, el discriminante de la misma ha de ser mayor o igual a cero, esto es

$$K(p) \leq H^2(p),$$

y la igualdad se da si y sólo si $k_1(p) = k_2(p)$.

Ejemplo 3.1.1 *1. Probar que las curvaturas principales, la curvatura de Gauss y la curvatura media de cualquier plano de* $\mathbb{R}^3$ *son cero.*

2. *Sea* $\mathbb{S}^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 \,|\, |p - c| = r\}$ *la esfera de centro* c *y radio* r*. Probar que las curvaturas principales, la curvatura de Gauss y la curvatura media de* $\mathbb{S}^2$ *son constantes y vienen dadas por*

$$k_1^2 = k_2^2 = \frac{1}{r^2}, \quad K = \frac{1}{r^2}, \quad H^2 = \frac{1}{r^2}.$$

3. *Sea* $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = r^2\}$ *el cilindro circular recto. Probar que las curvaturas principales, la curvatura de Gauss y la curvatura media de* C *son constantes y vienen dadas por*

$$k_1 = 0, \quad k_2^2 = \frac{1}{r^2}, \quad K = 0, \quad H^2 = \frac{1}{4r^2}.$$

Ejercicio 3.1.1 1. *Probar que la curvatura de Gauss, la curvatura media y las curvaturas principales de la catenoide* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$ *vienen dadas por*

$$K(x, y, z) = -\frac{1}{\cosh^4 z}, \quad H = 0, \quad k_1(x, y, z) = -k_2(x, y, z) = \frac{1}{\cosh^2 z}.$$

2. *Probar que la curvatura de Gauss y la curvatura media del paraboloide* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 2z\}$ *vienen dadas por*

$$K(x, y, z) = \frac{1}{(1 + 2z)^2}, \quad H^2(x, y, z) = \frac{(1 + z)^2}{(1 + 2z)^3}.$$

Ejercicio 3.1.2 *Probar que una superficie conexa con curvaturas de Gauss y media cero es un abierto de un plano.*

Ejercicio 3.1.3 *Sea* $A \in O(3)$*,* $a \in \mathbb{R}^3$ *y* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *el movimiento rígido correspondiente, esto es* $\phi(p) = Ap + a$*. Si* S *es una superficie de* $\mathbb{R}^3$ *y* $\hat{S} = \phi(S)$ *la superficie imagen, probar que las curvaturas de Gauss y media de dichas superficies están relacionadas por*

$$\hat{K} \circ \phi = K, \quad \hat{H} \circ \phi = H.$$

3.2. Secciones normales. Interpretación de las curvaturas.

Sea p un punto de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ y v un vector unitario de T_pS. Si $a = v \wedge N(p)$, siendo N una aplicación de Gauss de S, representamos por P_v al plano afín que pasa por p y tiene a a como vector perpendicular, esto es

$$P_v = \{q \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle q - p, a\rangle = 0\}.$$

Lema 3.2.1 *En las condiciones anteriores, existe un abierto V de S conteniendo a p y una curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$ tal que*

$$V \cap P_v = \mathit{Imagen}\,(\alpha)$$

A dicha curva le llamaremos una *sección normal de S en p*.

Parametrizando dicha curva por el arco, representaremos por k_v a su curvatura como curva plana en el instante 0. La orientación que tomamos en el plano P_v es $\{v, N(p)\}$. Entonces derivando en $t = 0$ la identidad $\langle \alpha'(t), N(\alpha(t))\rangle = 0$, se obtiene

$$0 = \langle \alpha''(0), N(p)\rangle + \langle \alpha'(0), (dN)_p(\alpha'(0)\rangle = k_v - \sigma_p(v, v).$$

Por tanto $\sigma_p(v, v) = k_v$ nos da una interpretación geométrica de la segunda forma fundamental. Si $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de T_pS con $(dN)_p(e_i) = -k_i(p)e_i$, entonces

$$k_v = \langle v, e_1\rangle^2 k_1(p) + \langle v, e_2\rangle^2 k_2(p),$$

que se conoce por *fórmula de Euler*. Es claro que si $k_1(p) \leq k_2(p)$, entonces $k_1(p) \leq k_v \leq k_2(p)$, y así las curvaturas principales son el máximo y el mínimo de las curvaturas de las secciones normales a S en p.

La fórmula de Euler y el significado geométrico de la segunda forma fundamental sugieren la siguiente definición:

Definición 3.2.1 *Sea p un punto de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ y K la curvatura de Gauss. El punto p se dice*

1. *Elíptico si $K(p) > 0$,*
2. *Hiperbólico si $K(p) < 0$,*

3. *Parabólico si* $K(p) = 0$,

4. *plano si* $k_1(p) = k_2(p) = 0$,

5. *umbilical si* $k_1(p) = k_2(p)$.

Teorema 3.2.1 *Sea S una superficie conexa de $\mathbb{R}^3$ con todos sus puntos umbilicales. Entonces S es un abierto de un plano o de una esfera de $\mathbb{R}^3$.*

A continuación vamos a definir el hessiano de una función diferenciable definida sobre una superficie en un punto crítico. Este concepto es una extensión a superficies del correspondiente para funciones diferenciables en el plano, y nos permitirá estudiar los extremos locales de dicha función.

Proposición 3.2.1 *Sea S una superficie de $\mathbb{R}^3$ y $f : S \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si p_0 es un punto crítico de la función f, definimos el hessiano de f en p_0 y lo representamos por $(d^2f)_{p_0}$ como la aplicación*

$$(d^2f)_{p_0} : T_{p_0}S \to \mathbb{R}$$
$$(d^2f)_{p_0}(v) = \frac{d^2}{dt^2}_{|t=0} f(\alpha(t)),$$

siendo $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ una curva con $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces,

1. *$(d^2f)_{p_0}(v)$ está bien definido, esto es no depende de la curva α.*

2. *$(d^2f)_{p_0}$ es una forma cuadrática, esto es $(d^2f)_{p_0}(\lambda v) = \lambda^2(d^2f)_{p_0}(v)$, para todo real λ.*

3. *Si p_0 es un máximo (respectivamente mínimo) local de f, entonces $(d^2f)_{p_0}$ es semidefinida negativa (respectivamente positiva).*

4. *Si $(d^2f)_{p_0}(v)$ es definida negativa (respectivamente positiva), entonces p_0 es un máximo (respectivamente mínimo) local de f.*

Vamos a estudiar el hessiano de dos funciones concretas. En primer lugar, consideramos un punto p_0 de una superficie S y el plano tangente afín en p_0, cuya ecuación es $\langle x - p_0, N(p_0)\rangle = 0$, siendo N una aplicación de Gauss de la superficie. Definimos la función altura a dicho plano

$$f : S \to \mathbb{R}$$
$$f(p) = \langle p - p_0, N(p_0)\rangle.$$

Entonces se cumple que $f(p_0) = 0$, p_0 es un punto crítico de f y que $(d^2f)_{p_0}(v) = \sigma_{p_0}(v, v)$. De aquí es fácil deducir

Proposición 3.2.2 *Sea p_0 un punto de una superficie S.*

1. *Si p_0 es elíptico, esto es $K(p_0) > 0$, existe un entorno de p_0 en S que esta en uno de los semiespacios en los que el plano tangente afín a S en p_0 divide a $\mathbb{R}^3$. Además el único punto de contacto entre dicho plano y el entorno es p_0.*

2. *Si p_0 es hiperbólico, esto es $K(p_0) < 0$, en cualquier entorno de p_0 en S hay puntos en ambos semiespacios.*

En segundo lugar consideramos el cuadrado de la función distancia a un punto de $\mathbb{R}^3$. Si $x \in \mathbb{R}^3$ y S es una superficie de $\mathbb{R}^3$, sea $f : S \to \mathbb{R}$ la función

$$f(p) = \langle p - x, p - x \rangle.$$

Si p_0 es un punto crítico de f, es fácil comprobar que $p_0 - x = \lambda N(p_0)$ para un cierto número real no nulo λ, donde N es una aplicación de Gauss de la superficie. Además

$$(d^2 f)_{p_0}(v) = 2(|v|^2 + \lambda \sigma_{p_0}(v, v)), \quad \forall v \in T_{p_0} S.$$

De aquí, teniendo en cuenta que toda función continua sobre una superficie compacta tiene un máximo, es fácil deducir el siguiente resultado.

Proposición 3.2.3

1. *Toda superficie compacta de $\mathbb{R}^3$ tiene un punto elíptico.*

2. *No hay superficies compactas de $\mathbb{R}^3$ con curvatura de Gauss $K \leq 0$.*

3. *No hay superficies compactas de $\mathbb{R}^3$ con curvatura media $H = 0$.*

A continuación vamos a obtener unas fórmulas útiles que expresan las curvaturas de una superficie en términos de una parametrización.

Proposición 3.2.4 *Sea $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie S, y $E, F, G, e, f, g : U \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por*

$$E = \langle X_u, X_u \rangle,\ F = \langle X_u, X_v \rangle,\ G = \langle X_v, X_v \rangle$$
$$e = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{uu} \rangle}{|X_u \wedge X_v|},\ f = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{uv}}{|X_u \wedge X_v|}\rangle,\ g = \frac{\langle X_u \wedge X_v, X_{vv}}{|X_u \wedge X_v|}\rangle.$$

Entonces las curvatura de Gauss y media de S en $X(U)$ vienen dadas por

$$K \circ X = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H \circ X = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}.$$

H es la curvatura media respecto del normal $N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} \circ X^{-1}$.

Como las funciones E, F, G, e, f, g son diferenciables, obtenemos que K y H son también *funciones diferenciables.* Como las curvaturas principales vienen dadas por $k_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$, se tiene que $k_i, i = 1, 2$ son funciones *continuas y diferenciables fuera de los puntos umbilicales.*

Ejercicio 3.2.1 *Sea $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \sin z = y \cos z\}$ el helicoide. Probar que $X : \mathbb{R}^2 \to H$ dada por $X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ es una parametrización sobre todo H y que*

$$K(X(u, v)) = -(\frac{1}{1 + v^2})^2, \quad H(X(u, v)) = 0.$$

Ejercicio 3.2.2 *Sea*

$$X : I \times (0, 2\pi) \to S$$
$$X(u, v) = (y(u) \cos v, y(u) \sin v, z(u))$$

la parametrización de la superficie de revolución S obtenida al girar la curva regular $\alpha : I \to \{x = 0\}$, $\alpha(t) = (0, y(t), z(t)), y(t) > 0$ alrededor del eje Oz. Probar que sus curvaturas vienen dadas por

$$K(X(u, v)) = \frac{z'(u)(y'(u)z''(u) - y''(u)z'(u))}{y(u)(y'(u)^2 + z'(u)^2)^2}$$
$$H(X(u, v)) = \frac{y(u)(y'(u)z''(u) - y''(u)z'(u)) + z'(u)(y'(u)^2 + z'(u)^2)}{y(u)(y'(u)^2 + z'(u)^2)^{3/2}}$$

Usando el ejercicio anterior probar que *las superficies de revolución llanas, esto es con $K = 0$, son abiertos de planos, cilindros o conos.* Probar también que *las superficies de revolución con curvatura media cero son abiertos de planos o de catenoides.*

Sea $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la *homotecia* $\phi(x) = \lambda x$, con λ un número real positivo. Es claro que ϕ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ con inversa la homotecia de razón

$1/\lambda$ y que para todo $x \in \mathbb{R}^3$, la aplicación lineal $d\phi_x$ mantiene los ángulos de los vectores.

Si S es una superficie de $\mathbb{R}^3$, entonces $\hat{S} = \phi(S)$ es también una superficie de $\mathbb{R}^3$ difeomorfa a S mediante ϕ. Usando argumentos sencillos se puede comprobar que las curvaturas de ambas superficies están relacionadas por

$$\hat{H} \circ \phi = \frac{1}{\mu} H, \quad \hat{K} \circ \phi = \frac{1}{\mu^2} K.$$

Sea ahora $\psi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3 - \{0\}$ la *inversión* con centro el origen $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$. Es claro que $\psi \circ \psi = Id$ y por tanto ψ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ con inverso él mismo. Además, es fácil comprobar que para cada $x \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, la diferencial de ψ viene dada por

$$d\psi_x(v) = \frac{v}{|x|^2} - \frac{2\langle v, x\rangle}{|x|^4} x,$$

y por tanto también mantiene ángulos. A dicho tipo de aplicaciones se les llama *conformes*.

Si S es una superficie de $\mathbb{R}^3$, entonces $\hat{S} = \psi(S)$ es también una superficie de $\mathbb{R}^3$ difeomorfa a S mediante ψ. Usando argumentos sencillos se puede comprobar que las curvaturas de ambas superficies están relacionadas por

$$\begin{aligned} \hat{K}(\psi(p)) &= |p|^4 K(p) + 4|p|^2 \langle N(p), p\rangle H(p) + 4\langle N(p), p\rangle^2, \\ \hat{H}(\psi(p)) &= |p|^2 H(p) + 2\langle N(p), p\rangle, \end{aligned}$$

siendo N una aplicación de Gauss en S, y $\hat{H}$ la curvatura media en $\hat{S}$ respecto al normal $\hat{N}(\psi(p)) = N(p) - \frac{2\langle N(p),p\rangle}{|p|^2} p$. De las expresiones anteriores se sigue que

$$(\hat{H}^2 - \hat{K})(\psi(p)) = |p|^4 (H^2 - K)(p),$$

y por tanto *las inversiones transforman puntos umbilicales en puntos umbilicales.*

Teorema 3.2.2 *(Teorema de Hilbert).*

Sea S una superficie orientada y $k_1 \leq k_2$ las correspondientes curvaturas principales. Si en un punto $p_0 \in S$ se cumplen las siguientes propiedades

1. *k_1 tiene un mínimo local en p_0,*

2. *k_2 tiene un máximo local en p_0,*

3. La curvatura de Gauss K es positiva en p_0,

entonces p_0 es un punto umbilical.

Como aplicaciones sencillas de este teorema de Hilbert podemos demostrar dos resultados clásicos.

Teorema 3.2.3 *(Teorema de Jellet-Liebmann)*
Una superficie compacta y conexa de $\mathbb{R}^3$ con curvatura media constante y curvatura de Gauss positiva es una esfera.

Teorema 3.2.4 *(Teorema de Hilbert-Liebmann)*
Una superficie compacta y conexa de $\mathbb{R}^3$ con curvatura de Gauss constante es una esfera.

Capítulo 4

GEOMETRIA INTRINSECA

4.1. Isometrías

Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$, esto es $\phi(x) = Ax + a$, donde A es una matriz ortogonal y a un vector de $\mathbb{R}^3$. Si S es una superficie de $\mathbb{R}^3$, entonces $\hat{S} = \phi(S)$ es también una superficie de $\mathbb{R}^3$, y

$$f = \phi_{|S} : S \to \hat{S}$$

tiene las siguientes propiedades:

- f es un difeomorfismo,
- la diferencial de f en cualquier punto de S es una isometría vectorial, esto es
$$\langle (df)_p(v), (df)_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle, \quad p \in S, \quad v, w \in T_pS,$$
- f conserva las segundas formas fundamentales, esto es
$$\hat{\sigma}_{f(p)}((df)_p(v), (df)_p(w)) = \sigma_p(v, w), \quad p \in S, \quad v, w \in T_pS.$$

Definición 4.1.1 *Una aplicación diferenciable $f : S \to \hat{S}$ entre dos superficies S y $\hat{S}$ se llama* **isometría local** *si su diferencial en cada punto de S es una isometría vectorial, esto es*

$$\langle (df)_p(v), (df)_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle, \quad p \in S, \quad v, w \in T_pS.$$

Si además f es un difeomorfismo, diremos que f es una **isometría**.

Algunas consecuencias sencillas de la definición son:

- Como una isometría vectorial entre dos planos vectoriales es un isomorfismo, se tiene que *toda isometría local es un difeomorfismo local.*

- La composición de isometrías locales es una isometría local. Además la inversa de una isometría es una isometría, y así el conjunto de isometrías de una superficie en sí misma forman un grupo para la composición, que se llama el *grupo de isometrías* de la superficie.

Ejemplo 4.1.1 *Sea P el plano $z = 0$ y C el cilindro de ecuación $x^2+y^2 = 1$. Entonces la aplicación $f : P \to C$ dada por*

$$f(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$$

es una isometría local.

El siguiente resultado caracteriza a las isometrías locales y da una interpretación geométrica de las mismas.

Proposición 4.1.1 *Sea $f : S \to \hat{S}$ una aplicación diferenciable entre dos superficies S y $\hat{S}$. Entonces f es una isometría local si y sólo si f conserva la longitud de las curvas, esto es para toda curva $\alpha : [a, b] \to S$ en S se tiene que $L_a^b(\alpha) = L_a^b(f \circ \alpha)$.*

Si $f : S \to \hat{S}$ es una isometría y $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización, entonces $f \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \hat{S}$ es una parametrización en $\hat{S}$ y además

$$E = \hat{E}, \quad F = \hat{F}, \quad G = \hat{G},$$

siendo estas las funciones definidas para las correspondientes parametrizaciones en la Proposición 3.2.4.

El recíproco de esta propiedad nos proporciona un método para construir isometrías.

Proposición 4.1.2 *Sean S y $\hat{S}$ superficies y $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ y $\hat{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \hat{S}$ parametrizaciones definidas en el mismo abierto U. Si*

$$E = \hat{E}, \quad F = \hat{F}, \quad G = \hat{G}, \quad \text{(ver Proposición 3.2.4)}$$

entonces $f = \hat{X} \circ X^{-1}$ es una isometría de la superficie $X(U)$ sobre la superficie $\hat{X}(U)$.

Como ilustración de este resultado, vamos a dar dos ejemplos típicos de superficies isométricas.

- Sea $X : \mathbb{R}^2 \to H$ la parametrización del helicoide $H = \{(x, y, z) \,|\, x \sin z = y \cos z\}$ dada por

  $$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$$

  y $\hat{X} : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to C$ la parametrización de la catenoide $C = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$ dada por

  $$\hat{X}(u, v) = (\sqrt{1 + v^2} \cos u, \sqrt{1 + v^2} \sin u, \arg\sinh v).$$

  Entonces de la última proposición se sigue que $\hat{X} \circ X^{-1} : X((0, 2\pi) \times \mathbb{R}) \to \hat{X}((0, 2\pi) \times \mathbb{R})$ es una isometría.

- Sea $X : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \to \Pi$ la parametrización del plano $\Pi = \{z = 0\}$ dada por

  $$X(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, 0)$$

  y $\hat{X} : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \to C$ la parametrización del cono $C = \{(x, y, z) \,|\, z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ dada por

  $$\hat{X}(\rho, \theta) = \rho(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}\theta), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\theta), \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

  Probar que $\hat{X} \circ X^{-1} : X(\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)) \to \hat{X}(\mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi))$ es una isometría.

4.2. El Teorema egregium de Gauss

En esta sección se va a demostrar que la curvatura de Gauss es invariante frente a las isometrías locales. Comenzamos definiendo los símbolos de Christoffel.

Sea S una superficie y $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización asociada a la cual consideramos la referencia $\{X_u, X_v, N \circ X = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}\}$. Como se hizo en las ecuaciones de Frenet para curvas, vamos a estudiar la variación de esta referencia respecto de los parámetros u y v. Siguiendo la notación de la Proposición 3.2.4., se tiene que

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + e\,(N \circ X), \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + f\,(N \circ X), \\ X_{vu} &= \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + f\,(N \circ X), \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + g\,(N \circ X), \\ (N \circ X)_u &= a_{11} X_u + a_{12} X_v, \\ (N \circ X)_v &= a_{21} X_u + a_{22} X_v, \end{aligned}$$

para ciertas funciones Γ_{ij}^k, llamadas los *símbolos de Christoffel* de la parametrización, y a_{ij}. Como $X_{uv} = X_{vu}$, se tiene que los símbolos Γ_{ij}^k son simétricos en i, j. De la primera ecuación y multiplicando escalarmente por X_u y X_v es fácil ver que

$$\begin{aligned} E\,\Gamma_{11}^1 + F\,\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} E_u, \\ F\,\Gamma_{11}^1 + G\,\Gamma_{11}^2 &= F_u - \frac{1}{2} E_v, \end{aligned}$$

de donde

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u/2 - FF_u + FE_v/2}{EG - F^2}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{EF_v - EE_v/2 - FE_u/2}{EG - F^2}.$$

Esta formula y las correspondientes para los demás Γ_{ij}^k prueban que *los símbolos de Christoffel dependen de E, F, G y de sus primeras derivadas.*

Ahora usando que $X_{uuv} = X_{uvu}$ y las expresiones anteriores de los símbolos de Christoffel se tiene que

$$\begin{aligned} &\Gamma_{11}^1 X_{uv} + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e(N \circ X)_v + (\Gamma_{11}^1)_v X_u + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + e_v(N \circ X) = \\ &\quad \Gamma_{12}^1 X_{uu} + \Gamma_{12}^2 X_{vu} + f(N \circ X)_u + (\Gamma_{12}^1)_u X_u + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + e_u(N \circ X). \end{aligned}$$

Pero usando las expresiones de los símbolos de Christoffel de nuevo, la anterior igualdad se convierte en una combinación lineal de la base $\{X_u, X_v, N \circ X\}$. Igualando a cero el coeficiente de X_v se obtiene que

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_2 2 + (\Gamma_{11}^2)_v = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + f a_{21} + (\Gamma_{12}^2)_u.$$

Calculando las funciones a_{ij} y la expresión de la curvatura de Gauss dada en la Proposición 3.2.4, obtenemos finalmente que la curvatura de Gauss K viene dada por

$$K \circ X = -\frac{1}{E}\{(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2\}.$$

Por tanto la curvatura de Gauss en la parametrización X depende de $\{E, F, G\}$ y de sus primeras y segundas derivadas. De aquí es fácil probar el siguiente resultado.

Teorema 4.2.1 *(Teorema Egregium de Gauss) Sea $f : S \to \hat{S}$ una isometría local entre dos superficies S y $\hat{S}$, y K y $\hat{K}$ las curvaturas de Gauss de S y $\hat{S}$ respectivamente. Entonces $\hat{K} \circ f = K$, esto es las isometrías locales preservan la curvatura de Gauss.*

4.3. Movimientos rígidos e isometrías

Al comienzo de este capítulo, se probó que la restricción a una superficie de un movimiento rígido es una isometría de dicha superficie sobre la superficie imagen que además conserva la segunda forma fundamental. En esta sección, entre otras cosas, vamos a probar un recíproco. Sin embargo cuando consideramos un problema similar para abiertos de $\mathbb{R}^3$, la situación es bastante diferente, como lo prueba el siguiente resultado.

Proposición 4.3.1 *Sea $F : O \to \hat{O}$ un difeomorfismo entre dos abiertos conexos de $\mathbb{R}^3$. Si la diferencial de F en cada punto de O es una isometría de $\mathbb{R}^3$, entonces F es la restricción a O de un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$.*

Para demostrar el resultado anteriormente comentado necesitamos probar el siguiente resultado técnico:

Lema 4.3.1 *Sea S una superficie de $\mathbb{R}^3$ y $p \in S$ un punto suyo. Entonces existe una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S$ con $p \in V$ y un $\delta > 0$ tal que la aplicación*

$$F : U \times (-\delta, \delta) \to N_\delta(V) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x, V) < \delta\}$$

dada por $F(u, v, t) = X(u, v) + tN(X(u, v))$ es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^3$, siendo N una aplicación de Gauss en V y d la distancia en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4.3.1 *(Teorema fundamental de la teoría de superficies) Sean S y $\hat{S}$ superficies orientables, con S conexa, y σ y $\hat{\sigma}$ las segundas formas fundamentales correspondientes. Si $f : S \to \hat{S}$ es una isometría local que preserva las segundas formas fundamentales, esto es*

$$\hat{\sigma}_{f(p)}((df)_p(v), (df)_p(w)) = \sigma_p(v, w), \quad p \in S, \quad v, w \in T_pS,$$

entonces f es la restricción a la superficie de un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$.

Una consecuencia de este resultado, junto con la sencillez de las segundas formas fundamentales de los planos y las esferas, es:

- Si $f : O \to \hat{\Pi}$ es una isometría local de un abierto O de un plano Π en un plano $\hat{\Pi}$, entonces f es la restricción a O de un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$.
- Si $f : O \to \hat{\mathbb{S}}^2$ es una isometría local de un abierto O de una esfera $\mathbb{S}^2$ en una esfera del mismo radio $\hat{\mathbb{S}}^2$, entonces f es la restricción a O de un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$.

El teorema egregium de Gauss, junto con el teorema de Hilbert-Liebmann, el teorema fundamental de superficies y las consecuencias anteriores, permiten probar el conocido teorema de rigidez de la esfera.

Teorema 4.3.2 *(Rigidez de las esferas) Sea $\mathbb{S}^2(r)$ una esfera de radio r y S una superficie conexa. Entonces cada isometría local $f : \mathbb{S}^2(r) \to S$ es la restricción de un movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$, y por tanto S es otra esfera de radio r.*

4.4. Geodésicas

Definición 4.4.1 *Una curva diferenciable $\gamma : [a, b] \to S$ es llamada una* **geodésica** *si su aceleración $\gamma''(s)$ es perpendicular a la superficie, esto es*

$$\gamma''(s) \perp T_{\gamma(s)}S, \quad \forall s \in [a, b].$$

Como $\frac{d}{ds}\langle \gamma'(s), \gamma'(s)\rangle = 2\langle \gamma''(s), \gamma'(s)\rangle = 0$, se tiene que *una geodésica está parametrizada proporcionalmente al arco*, esto es $|\gamma'(s)|$ es constante. Por tanto las únicas reparametrizaciones de una geodésica que siguen siendo geodésicas son las del tipo $h(s) = as + b$, con $a \neq 0$. Esto pone de manifiesto que la propiedad de ser una curva geodésica no es geométrica, en el sentido de depender sólo de su traza, sino que es física, pues depende de la parametrización.

Ejercicio 4.4.1
- *En $\mathbb{R}^2$, la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(s) = p + sv$ es la geodésica que pasa en $s = 0$ por p con velocidad v, esto es $\gamma'(0) = v$.*
- *En $\mathbb{S}^2(1)$, la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2(1)$ dada por*

$$\gamma(s) = \cos(|v|s)p + \sin(|v|s)\frac{v}{|v|},$$

  es la geodésica que pasa en $s = 0$ por $p \in \mathbb{S}^2(1)$ con velocidad $v \in T_p\mathbb{S}^2(1)$, esto es $\gamma'(0) = v$.
- *En el cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$, la curva $\gamma : \mathbb{R} \to C$ dada por*

$$\gamma(s) = (x\cos(as) - y\sin(as), y\cos(as) + x\sin(as), bs + z)$$

  es la geodésica que pasa en $s = 0$ por $(x, y, z) \in C$ con velocidad $v = (-ay, ax, b) \in T_pC$, esto es $\gamma'(0) = v$.

Ahora vamos a caracterizar a las geodésicas como puntos críticos del funcional longitud, para lo que necesitaremos algunas definiciones previas.

Definición 4.4.2 *Sea $\gamma : [a, b] \to S$ una curva diferenciable sobre una superficie S. Una* **variación** *de γ es una aplicación diferenciable $F : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to S$ tal que $F_0(s) = F(s, 0) = \gamma(s)$ para cada $s \in [a, b]$. Cuando todas las curvas $\{F_t : [a, b] \to S \,|\, t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ de la variación tienen los mismos puntos finales que $F_0 = \gamma$, esto es $F(a, t) = \gamma(a)$ y $F(b, t) = \gamma(b)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, diremos que la variación F es* **propia**.

El campo diferenciable $V : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$V(s) = \frac{\partial F}{\partial t}(s, 0),$$

es llamado el **campo variacional** *de F. Es claro que V es un campo tangente a la superficie, en el sentido que $V(s) \in T_{\gamma(s)}S$. Cuando la variación es propia, se cumple que $V(a) = V(b) = 0$.*

En el siguiente resultado se prueba que los campos variacionales pueden ser integrados.

Proposición 4.4.1 *Sea $\gamma : [a, b] \to S$ una curva diferenciable sobre una superficie S y $V : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable con $V(s) \in T_{\gamma(s)}S$ para todo $s \in S$. Entonces existe una variación $F : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to S$ de γ cuyo campo variacional es V. Además, si $V(a) = V(b) = 0$, la variación puede ser escogida propia.*

Dada una variación F de una curva γ que esté parametrizada por el arco ($|\gamma'(s)| = 1$), se define la *función longitud de la variación*

$$L_F : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R},$$

por

$$L_F(t) = \text{longitud}\,(F_t) = \int_a^b |\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)|ds.$$

Es claro que para la definición anterior no es necesario que la curva esté parametrizada por el arco, pero si para el argumento que sigue.

Como $\frac{\partial F}{\partial s}(s,0) = \gamma'(s) \neq 0$ y $[a,b]$ es compacto, existe δ con $0 < \delta < \epsilon$ tal que $\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) \neq 0$ para todo $(s,t) \in [a,b] \times (-\delta, \delta)$, y así la función $|\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)|$ es diferenciable en dicho rectángulo y

$$L_F'(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}|\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)|ds.$$

De aquí no es difícil probar el siguiente resultado.

Teorema 4.4.1 *(Primera fórmula de la variación de la longitud) Sea $\gamma : [a,b] \to S$ una curva parametrizada por el arco y $F : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to S$ una variación de γ. Entonces*

$$L_F'(0) = \langle V(b), \gamma'(b)\rangle - \langle V(a), \gamma'(a)\rangle - \int_a^b \langle V(s), \alpha''(s)\rangle ds,$$

siendo V el campo variacional de F.

Corolario 4.4.1 *Sea $\gamma : [a,b] \to S$ una curva parametrizada por el arco. Entonces γ es una geodésica si y sólo si γ es un punto crítico del funcional longitud, esto es $L_F'(0) = 0$ para toda variación propia de γ.*

Este corolario permite demostrar que el concepto de geodésica es un concepto intrínseco en el sentido que las isometrías locales transforman geodésicas en geodésicas.

Teorema 4.4.2 *Sea $f : S \to \hat{S}$ una isometría local entre dos superficies y $\gamma : [a,b] \to S$ una curva diferenciable en S. Entonces γ es una geodésica de S si y sólo si $f \circ \gamma$ es una geodésica de $\hat{S}$.*

Ejercicio 4.4.2 *Probar que todo meridiano (convenientemente parametrizado) de una superficie de revolución es una geodésica. Por meridiano se entiende la imagen de la curva generatriz por un giro alrededor del eje de rotación. Probar también que un paralelo (la circunferencia obtenida al girar un punto de la curva generatriz) es una geodésica si sólo si dicho punto es crítico para la distancia de los puntos de la curva generatriz al eje de giro.*

Ejercicio 4.4.3 *Probar que si todas las geodésicas de una superficie conexa son curvas planas, entonces la superficie es totalmente umbilical, esto es, es un abierto de un plano o de una esfera.*

Teorema 4.4.3 *(Existencia y unicidad de las geodésicas) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie, $p \in S$ un punto suyo y $v \in T_pS$ un vector tangente. Entonces existe un número $0 < \epsilon(p, v) \leq \infty$ y una única geodésica*

$$\gamma(p, v, -) : (-\epsilon(p, v), \epsilon(p, v)) \to S$$

tal que $\gamma(p, v, 0) = p$ y $\gamma'(p, v, 0) = v$, la cual es maximal en dichas condiciones.

Lema 4.4.1 *(Lema de homogeneidad) En las condiciones del teorema anterior tenemos que para cualquier $\lambda > 0$,*

$$\epsilon(p, \lambda v) = \frac{1}{\lambda}\epsilon(p, v)$$

y

$$\gamma(p, \lambda v, s) = \gamma(p, v, \lambda s), \quad \forall\, s \in (-\frac{1}{\lambda}\epsilon(p, v), \frac{1}{\lambda}\epsilon(p, v)).$$

4.5. La aplicación exponencial

Comenzamos poniendo de manifiesto la dependencia diferenciable de las geodésicas de las condiciones iniciales, aunque solo damos una versión parcial.

Teorema 4.5.1 *Dado un punto $p \in S$ de una superficie S, existen números $\epsilon, \delta > 0$, tal que si $B_0(\delta) \subset T_pS$ es la bola de centro 0 y radio δ, la aplicación $F : (-\epsilon, \epsilon) \times B_0(\delta) \to S$ dada por*

$$F(v, s) = \gamma(p, v, s)$$

es diferenciable, siendo $\gamma(p, v, -)$ la geodésica dada en el teorema anterior.

Del Lema de homogeneidad, es fácil comprobar que si v es un vector tangente a S en un punto p con módulo suficientemente pequeño, entonces $\epsilon(p, v) > 1$, y tiene sentido definir $exp_p(v) := \gamma(p, v, 1)$. A esta aplicación exp_p la llamaremos la aplicación exponencial en el punto p, y en el siguiente resultado, se recoge su definición y propiedades.

Usando el lema de homogeneidad y la dependencia diferenciable de las geodésicas de las condiciones iniciales, se prueba el siguiente resultado.

Teorema 4.5.2 *Dado un punto p de una superficie S, existe un número $\epsilon > 0$, tal que si $B_0(\epsilon) \subset T_pS$ es la bola de centro 0 y radio ϵ, entonces $exp_p : B_0(\epsilon) \to S$ está definida y es diferenciable en $B_0(\epsilon)$, siendo*

$$exp_p(v) = \gamma(p, v, 1).$$

Además, $exp_p(0) = p$ y $d(exp_p)_0 : T_0(B_0(\epsilon)) = T_pS \to T_pS$ es la aplicación identidad. Por tanto existe un entorno U de 0 en $B_0(\epsilon)$ tal que $exp_p : U \to V = exp_p(U)$ es un difeomorfismo. Al abierto V le llamaremos un entorno normal de p.

Si $\delta > 0$ es tal que $B_0(\delta) \subset U$, entonces a $exp_p(B_0(\delta))$ lo representaremos por $B_p(\delta)$ y le llamaremos *bola geodésica de centro p y radio δ*. Observemos que $exp_p : B_0(\delta) \to B_p(\delta)$ es un difeomorfismo. Para $0 < t < \delta$, si $\mathbb{S}^1_0(t)$ es el circulo de centro 0 y radio t en T_pS, entonces $exp_p(\mathbb{S}^1_0(t))$ es llamado el *circulo geodésico de centro p y radio t*. Además, si $v \in B_0(\delta)$, entonces $exp_p(sv) = \gamma(p, sv, 1) = \gamma(p, v, s)$, con $0 \leq s \leq 1$ es una geodésica en $B_p(\delta)$ que une p con $exp_p(v)$, a la que llamamos la *geodésica radial* uniendo p y $exp_p(v)$.

Ejercicio 4.5.1

- *En $\mathbb{R}^2$ la aplicación exponencial en un punto p es dada por*

$$\begin{aligned} exp_p : \mathbb{R}^2 = T_p\mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ exp_p(v) &= p + v. \end{aligned}$$

  Por tanto exp_p es un difeomorfismo de $T_p\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$.

- *En $\mathbb{S}^2(1)$ la aplicación exponencial en un punto p es dada por*

$$\begin{aligned} exp_p : T_p\mathbb{S}^2(1) &\to \mathbb{S}^2(1) \\ exp_p(v) &= \cos(|v|)p + \sin(|v|)\frac{v}{|v|}. \end{aligned}$$

Además, exp_p es un difeomorfismo de $B_0(\pi)$ sobre $\mathbb{S}^2(1) - \{-p\}$, y por tanto $B_p(\pi) = \mathbb{S}^2(1) - \{-p\}$.

- *En el cilindro $C = \{(x, y, z) \,|\, x^2+y^2 = 1\}$ el plano tangente en un punto $p = (x, y, z)$ es dado por $T_pC = \{(-ay, ax, b) \,|\, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Entonces la exponencial en p es dada por*

$$\begin{aligned} exp_p &: T_pC \to C \\ exp_p(v) &= (x\cos(a) - y\sin(a), y\cos(a) + x\sin(a), b + z), \quad v = (-ay, ax, b). \end{aligned}$$

Además, exp_p es un difeomorfismo sobre

$$U = \{(-ay, ax, b) \in T_pC \mid -\pi < a < \pi\}.$$

Por tanto el correspondiente entorno normal V es dado por $V = C - \{(-y, x, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

En el siguiente resultado, conocido como Lema de Gauss, se estudia la diferencial de la aplicación de Gauss en un vector arbitrario v de $B_0(\epsilon)$.

Lema 4.5.1 *(Lema de Gauss) Sea $p \in S$ y $exp_p : B_0(\epsilon) \subset T_pS \to S$ la aplicación exponencial en p. Entonces dado $v \in B_0(\epsilon)$,*

$$(dexp_p)_v : T_v(B_0(\epsilon) = T_pS \to T_{exp_p(v)}S$$

cumple las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} |(dexp_p)_v(v)|^2 = |v|^2, \\ < (dexp_p)_v(v), (dexp_p)_v(w) >= 0, \quad \forall w \in T_pS \quad con \quad < v, w >= 0. \end{cases}$$

La interpretación geométrica del lema de Gauss es que las geodésicas radiales que salen de un punto p de S cortan ortogonalmente a los circulos geodésicos centrados en p.

La existencia de entornos normales junto con el lema de Gauss nos permite demostrar algunos resultados interesantes. El primero nos prueba que las geodésicas localmente minimizan la longitud.

Proposición 4.5.1 *Sea $B_p(\delta)$ una bola geodésica de radio δ centrada en un punto p de una superficie de $\mathbb{R}^3$. Si $\alpha : [a, b] \to B_p(\delta)$ es una curva diferenciable a trozos con $\alpha(0) = p$, entonces $L_a^b(\alpha) \geq L_a^b(\gamma)$, donde γ es la única geodésica radial definida en $[a, b]$ uniendo p y $\alpha(b)$. Además, si la igualdad se da, entonces α y γ tienen la misma traza.*

En el segundo se construyen parametrizaciones con buenas propiedades en toda superficie.

Proposición 4.5.2 *Sea $B_p(\delta)$ una bola geodésica de radio δ centrada en un punto p de una superficie de $\mathbb{R}^3$ y $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de T_pS. Entonces*

$$X : (0,\delta) \times (0, 2\pi) \to S$$
$$X(\rho, \theta) = exp_p(\rho \cos\theta e_1 + \rho \sin\theta e_2)$$

es una parametrización de S cumpliendo

1. $E =< X_\rho, X_\rho >= 1$, $F =< X_\rho, X_\theta >= 0$.
2. $(\sqrt{G})_{\rho\rho} + (K \circ X)\sqrt{G} = 0$, *siendo* $G =< X_\theta, X_\theta >$.
3. $\lim\{\sqrt{G}(\rho,\theta) \mid \rho \to 0\} = 0$ *y* $\lim\{(\sqrt{G})_\rho(\rho,\theta) \mid \rho \to 0\} = 1$.

Cuando la curvatura de la superficie es *constante*, las propiedades 2 y 3 de la última proposición permiten calcular explícitamente G, probándose que

$$G(\rho,\theta) = \begin{cases} \rho^2, & \text{si} \quad K = 0, \\ \frac{1}{K}\sin^2(\sqrt{K}\rho), & \text{si} \quad K > 0 \\ \frac{1}{-K}\sinh^2(\sqrt{-K}\rho), & \text{si} \quad K < 0 \end{cases}$$

Este control de la primera forma fundamental cuando la curvatura de la superficie es constante, tiene como consecuencia el siguiente resultado.

Teorema 4.5.3 *(Teorema de Minding) Sean S y $\hat{S}$ dos superficies con la misma curvatura de Gauss constante, p y $\hat{p}$ puntos en S y $\hat{S}$ respectivamente. Entonces existen entornos abiertos de p y $\hat{p}$ en S y $\hat{S}$ respectivamente que son isométricos. Concretamente, si $f : T_pS \to T_{\hat{p}}\hat{S}$ es una isometría vectorial, y $\delta > 0$ es tal que $B_p(\delta)$ y $B_{\hat{p}}(\delta)$ son bolas geodésicas en S y $\hat{S}$ respectivamente, entonces*

$$\phi = \exp_{\hat{p}} \circ f \circ (exp_p)^{-1} : B_p(\delta) \to B_{\hat{p}}(\delta)$$

es una isometría.

Los dos siguientes resultados, *que no se demostrarán*, son consecuencia de la existencia alrededor de cada punto de una superficie de ciertos entornos, llamados totalmente normales, que son entornos normales de todos sus puntos.

Teorema 4.5.4 *Sea S una superficie* **cerrada** *de $\mathbb{R}^3$. Entonces para cada $p \in S$ y cada $v \in T_pS$, la geodésica $\gamma(p, v, s)$ está definida para todo $s \in \mathbb{R}$, esto es $\epsilon(p, v) = \infty$. Como consecuencia para todo $p \in S$ la aplicación exponencial exp_p está definida en todo T_pS.*

Teorema 4.5.5 *(Hopf-Rinow) Sea S una superficie* **cerrada** *de $\mathbb{R}^3$ y p, q dos puntos de S. Entonces existe una geodésica $\alpha : [a, b] \to S$ tal que $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$ y $L_a^b(\alpha) = d(p, q)$.*

Para ilustrar la potencia del cálculo de variaciones de geodésicas, vamos a probar el teorema de Bonnet, para lo que necesitaremos la fórmula de la segunda variación de la longitud.

Lema 4.5.2 *Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ una geodésica p.p.a. de una superficie cerrada S y orientada por la aplicación de Gauss N. Si $B(s) = \alpha'(s) \wedge N(\alpha(s))$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es cualquier aplicación diferenciable, la longitud L_F de la variación $F : [a, b] \times \mathbb{R} \to S$ dada por*

$$F(s, t) = exp_{\alpha(s)}(tf(s)B(s)) = \gamma(\alpha(s), tf(s)B(s), 1) = \gamma(\alpha(s), f(s)B(s), t)$$

cumple

$$L_F''(0) = \int_a^b \{f'(s)^2 - K(\alpha(s))f(s)^2\}ds.$$

Conviene observar que la diferenciabilidad de F depende de la dependencia diferenciable de las geodésicas de las condiciones iniciales.

Teorema 4.5.6 *(Teorema de Bonnet) Sea S una superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$ cuya curvatura de Gauss cumple $K(p) \geq \lambda > 0$ para todo $p \in S$. Entonces S es compacta y su diámetro (como subconjunto de $\mathbb{R}^3$) cumple*

$$\textit{diámetro}\,(S) \leq \pi/\lambda.$$

El paraboloide elíptico prueba que la hipótesis sobre la curvatura no puede debilitarse a $K > 0$. Además, las esferas de curvatura λ prueban que la cota del diámetro es la mejor posible.