APLICACIONES CONTINUAS

FRANCISCO URBANO

1. Aplicaciones Continuas

La Proposición 1 del tema Espacios Topológicos sugiere la siguiente

Definición 1. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación y $x \in X$. Diremos que f es continua en x si para todo abierto $O' \in \mathcal{T}'$ con $f(x) \in O'$ existe un abierto $O \in \mathcal{T}$ con $x \in O$ y cumpliendo $f(O) \subset O'$.

Diremos que f es continua si lo es en todo punto $x \in X$.

Es un ejercicio sencillo probar el siguiente resultado.

Proposición 1. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación y $x \in X$. Entonces son equivalentes las siguientes propiedades:*

(1) f es continua en x.
(2) Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ respectivamente, entonces para todo abierto $B' \in \mathcal{B}'$ con $f(x) \in B'$ existe un abierto $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$ y cumpliendo $f(B) \subset B'$.
(3) Para todo entorno $V' \in \mathcal{U}^{f(x)}$ existe un entorno $V \in \mathcal{U}^x$ cumpliendo $f(V) \subset V'$.
(4) Si $\mathcal{B}^x$ y $\mathcal{B}^{f(x)}$ son bases de entornos de x y $f(x)$ respectivamente, entonces para todo $W' \in \mathcal{B}^{f(x)}$ existe $W \in \mathcal{B}^x$ cumpliendo $f(W) \subset W'$.

En el siguiente resultado se caracteriza globalmente la continuidad. El resultado es útil y se usará bastante a lo largo del curso.

Proposición 2. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación. Entonces son equivalentes las siguientes propiedades:*

(1) f es continua.
(2) Para todo abierto $O' \in \mathcal{T}'$ se cumple que $f^{-1}(O') \in \mathcal{T}$.
(3) Para todo cerrado F' de X' se cumple que $f^{-1}(F')$ es cerrado en X.
(4) Para todo subconjunto A de X se cumple que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

A continuación se exponen algunas ejemplos sencillos de funciones continuas.

- La aplicación identidad $Id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ es continua.
- La aplicación constante $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$, $f(x) = x_0'$ para todo $x \in X$, es continua.
- Si $f : (X_1, \mathcal{T}_1) \to (X_2, \mathcal{T}_2)$ y $g : (X_2, \mathcal{T}_2) \to (X_3, \mathcal{T}_3)$ son aplicaciones continuas, entonces la composición $g \circ f : (X_1, \mathcal{T}_1) \to (X_3, \mathcal{T}_3)$ es continua.
- Cualquier aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}_T)$ es continua.

- Cualquier aplicación $f : (X, \mathcal{T}_D) \to (X', \mathcal{T}')$ es continua.
- Si $n < m$ entonces las aplicaciones

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,$$

definidas por $f((x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_n, a_{n+1}, \ldots, a_m)$ y $g((x_1, \ldots, x_m)) = (x_1, \ldots, x_n)$ son continuas para cualquier $(a_{n+1}, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^{m-n}$.
- Si (X, d) es un espacio métrico y x_0 un punto suyo, entonces la función $f : (X, \mathcal{T}(d)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ definida por $f(x) = d(x, x_0)$ es continua.

A continuación se exponen algunas propiedades sencillas de las aplicaciones continuas.

Proposición 3. *(1) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $A \subset X$, entoces la inclusión $i : (A, \mathcal{T}_A) \to (X, \mathcal{T})$ es continua.*
(2) Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es una aplicación continua y $A \subset X$, entonces la restricción de f a A, $f_{|A} : (A, \mathcal{T}_A) \to (X', \mathcal{T}')$, es continua.
(3) Si $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es una aplicación continua y $B \subset X'$ con Imagen $(f) \subset B$, entonces $f : (X, \mathcal{T}) \to (B, \mathcal{T}'_B)$ es continua.
(4) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{O_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{T}$ un recubrimiento de X, esto es $\cup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = X$. Si $f_\lambda : (O_\lambda, \mathcal{T}_{O_\lambda}) \to (X', \mathcal{T}')$ son funciones continuas con $f_\lambda = f_\mu$ sobre $O_\lambda \cap O_\mu$, entonces la aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ definida por

$$f_{|O_\lambda} = f_\lambda,$$

es continua.
(5) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{F_i \,|\, 1 \leq i \leq n\}$ un recubrimiento finito de X por cerrados de $(X, \mathcal{T})$. Si $f_i : (F_i, \mathcal{T}_{F_i}) \to (X', \mathcal{T}')$ son funciones continuas con $f_i = f_j$ sobre $F_i \cap F_j$, entonces la aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ definida por

$$f_{|F_i} = f_i,$$

es continua.

2. Aplicaciones abiertas y cerradas

En esta sección vamos a estudiar un tipo de aplicaciones, que aunque menos relevantes que las continuas, jugarán un papel importante en la asignatura.

Definición 2. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación.
(1) Diremos que f es abierta si para todo abierto $O \in \mathcal{T}$, su imagen $f(O)$ es abierto en X'.
(2) Diremos que f es cerrada si para todo cerrado F de X, su imagen $f(F)$ es cerrado en X'.

Como la imagen por una aplicación no tiene por qué mantener complementarios, estos dos conceptos no son equivalentes, a diferencia de lo que ocurre con las aplicaciones continuas.

El siguiente resultado resulta de utilidad.

Proposición 4. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación. Entonces son equivalentes las propiedades*

(1) *f es abierta.*
(2) *Si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{T}$, entonces $f(B) \in \mathcal{T}'$ para todo $B \in \mathcal{B}$.*
(3) *$f(A^o) \subset (f(A))^o$, para todo $A \subset X$.*

Además, f es cerrada si y sólo si $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$ para todo $A \subset X$.

Es un ejercicio simple comprobar estas propiedades: Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, $A \subset X$ e $i : A \to X$ es la inclusión, entonces

- $i : (A, \mathcal{T}_A) \to (X, \mathcal{T})$ es abierta si y sólo si $A \in \mathcal{T}$.
- $i : (A, \mathcal{T}_A) \to (X, \mathcal{T})$ es cerrada si y sólo si A es cerrado.

Terminamos esta sección con el siguiente resultado.

Proposición 5. *Sean las aplicaciones $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ y $g : (X', \mathcal{T}') \to (X'', \mathcal{T}'')$. Entonces*

(1) *Si f y g son abiertas (cerradas), entonces $g \circ f$ es abierta (cerrada).*
(2) *Si $g \circ f$ es abierta (cerrada) y f es sobre y continua, entonces g es abierta (cerrada).*
(3) *Si $g \circ f$ es abierta (cerrada) y g es inyectiva y continua, entonces f es abierta (cerrada).*

3. Homeomorfismos

El concepto de homeomorfismo en topología es equivalente al de isomorfismo en álgebra. Espacios entre los que existe un homeomorfismo, que serán llamados homeomorfos, son considerados "iguales" desde el punto de vista topológico.

Definición 3. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación. f se dice homeomorfismo si f es biyectiva y tanto f como la aplicación inversa $f^{-1} : (X', \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ son continuas. En este caso diremos que los espacios $(X, \mathcal{T})$ y $(X'\mathcal{T}')$ son homeomorfos.

Es claro, usando resultados de las secciones anteriores, el siguiente resultado.

Proposición 6. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ una aplicación biyectiva. Entonces son equivalentes:*

(1) *f es un homeomorfismo.*
(2) *f es continua y abierta.*
(3) *f es continua y cerrada.*
(4) *$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$, para cualquier $A \subset X$.*

En el siguiente resultado se relacionan los conceptos topológicos dados en el Tema I entre espacios homeomorfos.

Proposición 7. *Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (X'\mathcal{T}')$ un homeomorfismo. Entonces*

(1) *$\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ si y sólo si $f(\mathcal{B}) = \{f(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ es base de $\mathcal{T}'$.*
(2) *$\mathcal{U}^{f(x)} = \{f(V) \mid V \in \mathcal{U}^x\}$, para todo $x \in X$.*

(3) $\mathcal{B}^x$ *es una base de entornos de* x *si y sólo si* $\{f(W) \mid W \in \mathcal{B}^x\}$ *es una base de entornos de* $f(x)$*, para todo* $x \in X$.

Finalmente la siguiente propiedad será usada en el curso:

Proposición 8. *Si* $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *es un homeomorfismo y* $A \subset X$*, entonces* $f_{|A} : (A, \mathcal{T}_A) \to (f(A), \mathcal{T}'_{f(A)})$ *también es un homeomorfismo.*

Por último vamos a dar algunos ejemplos de homeomorfismos de interes.

Ejemplo 1. *Si* $[a, b]$ *y* $[c, d]$ *son intervalos cerrados y acotados de* $\mathbb{R}$ *dotados de la topología inducida de la usual de* $\mathbb{R}$*, entonces* $f : [a, b] \to [c, d]$ *definida por*

$$f(t) = \frac{t-a}{b-a}(d-c) + c, \quad t \in \mathbb{R},$$

es un homeomorfismo. Además dicho homeomorfismo también prueba que los intervalos abiertos (a, b) *y* (c, d) *son homeomorfos.*

Ejemplo 2. *Dado* $a \in \mathbb{R}$*, los intervalos* $(0, 1)$*,* (a, ∞) *y* $(-\infty, a)$ *dotados de la topología inducida de la usual de* $\mathbb{R}$ *son homeomorfos mediante los homeomorfismos* $f : (0, 1) \to (a, \infty)$ *y* $g : (0, 1) \to (-\infty, a)$ *definidos por*

$$f(t) = \frac{t}{1-t} + a, \quad g(t) = \frac{t}{t-1} + a, \quad \forall t \in (0, 1).$$

Por tanto, como la exponencial define un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ *sobre* $(0, \infty)$*, todos los intervalos abiertos de* $\mathbb{R}$ *son homeomorfos entre si.*

Ejemplo 3. La proyección estereográfica. *Sea* $\mathbb{S}^n$ *la* n*-esfera unidad en* $\mathbb{R}^{n+1}$ *centrada en el origen y dotada de la topología inducida de la usual de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *y* $\mathbb{R}^n$ *visto como el hiperplano vectorial de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *dado por*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid x_{n+1} = 0\}.$$

Entonces la aplicación $PE : \mathbb{S}^n - \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$ *definida por*

$$PE(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right)$$

es un homeomorfismo, al que se llama la proyección estereográfica.

4. Espacios producto. Topología producto

En esta sección vamos a multiplicar espacios topológicos y producir por tanto nuevos ejemplos. Aunque podríamos estudiar el producto de un número finito de espacios, estudiaremos solo el producto de dos para facilitar un poco el contenido del epígrafe.

Definición 4. Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. En $X_1 \times X_2$ consideramos la familia de subconjuntos

$$\mathcal{B} = \{O_1 \times O_2 \mid O_1 \in \mathcal{T}_1 \quad \text{y} \quad O_2 \in \mathcal{T}_2\}.$$

Entonces $\mathcal{B}$ es base de una topología en $X_1 \times X_2$ a la que llamamos la topología producto de $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ y representamos por $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$. Al espacio topológico $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ le llamamos el producto topológico de $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$.

En el siguiente resultado se exponen algunas propiedades sencillas de la topología producto que serán de utilidad.

Proposición 9. *Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. Entonces:*

(1) *Si $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$ son bases de las topologías $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2$, entonces*

$$\{B_1 \times B_2 \mid B_i \in \mathcal{B}_i,\, i = 1, 2\}$$

es una base de la topología producto $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$.

(2) *Si $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, entonces*

$$\{V_1 \times V_2 \mid V_i \in \mathcal{U}^{x_i},\, i = 1, 2\}$$

es una base de entornos del punto (x_1, x_2) en el espacio producto.

(3) *Si $\mathcal{B}^{x_i}$, $i = 1, 2$ son bases de entornos de x_i en X_i, $i = 1, 2$, entonces*

$$\{W_1 \times W_2 \mid W_i \in \mathcal{B}^{x_i},\, i = 1, 2\}$$

es una base de entornos del punto (x_1, x_2) en el espacio producto.

Las operaciones interior, adherencia y frontera de un subonjunto de un espacio producto tienen un comportamiento regular cuando el subconjunto es producto de subconjuntos.

Proposición 10. *Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos y $A_1 \subset X_1$ y $A_2 \subset X_2$ subconjuntos. Entonces*

(1) $(A_1 \times A_2)^o = A_1^o \times A_2^o$.
(2) $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$.
(3) $Fr(A_1 \times A_2) = (Fr(A_1) \times \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \times Fr(A_2))$.
(4) $(\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)_{A_1 \times A_2} = (\mathcal{T}_1)_{A_1} \times (\mathcal{T}_2)_{A_2}$.

En particular $A_1 \times A_2$ es cerrado si y sólo si A_1 y A_2 son cerrados.

Vamos a estudiar las aplicaciones proyección de un espacio producto sobre sus factores. Esto permitirá tener un buen control sobre cierto tipo de aplicaciones tomando valores o definidas sobre un producto.

Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. Definimos $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1, 2$ por

$$p_1(x_1, x_2) = x_1, \quad p_2(x_1, x_2) = x_2, \quad \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2.$$

Proposición 11. *Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos. Entonces*

(1) *p_i, $i = 1, 2$ son aplicaciones sobres, continuas y abiertas.*
(2) *Una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ es continua si y sólo si $p_i \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2$ son continuas.*

En general las aplicaciones p_i no son cerradas, como lo prueba el siguiente ejemplo. Sea $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la primera proyección. Considerando en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}$ las topologías usuales, se tiene que $F = \{(x, 1/x) \mid x \in \mathbb{R},\, x \neq 0\}$ es un cerrado de $\mathbb{R}^2$, pero $p_1(F) = \mathbb{R} - \{0\}$ no es cerrado.

Como una aplicación de la última proposición vamos a estudiar la aplicación evaluación y el producto de aplicaciones.

Corolario 1. *Sean* $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2$, *y* $(X, \mathcal{T})$ *espacios topológicos y* $f_i : X \to X_i$, $i = 1, 2$ *aplicaciones. Se define la evaluación de* f_1 *y* f_2, *y se representa por* (f_1, f_2), *como la aplicación* $(f_1, f_2) : X \to X_1 \times X_2$ *dada por*

$$(f_1, f_2)(x) = (f_1(x), f_2(x)), \quad \forall x \in X.$$

Entonces $(f_1, f_2) : (X, \mathcal{T}) \to (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ *es continua si y sólo si* $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2$ *son continuas.*

Corolario 2. *Sean* $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $(X'_i, \mathcal{T}'_i)$, $i = 1, 2$ *espacios topológicos y* $f_i : X_i \to X'_i$, $i = 1, 2$, *aplicaciones. Se define la aplicación producto de* f_1 *y* f_2, *y se representa por* $f_1 \times f_2$, *como la aplicación* $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to X'_1 \times X'_2$ *dada por*

$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)), \quad \forall (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2.$$

(1) $f_1 \times f_2 : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \to (X'_1 \times X'_2, \mathcal{T}'_1 \times \mathcal{T}'_2)$ *es continua (abierta) si y sólo si* $f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X'_i, \mathcal{T}'_i)$, $i = 1, 2$, *son continuas (abiertas).*
(2) $f_1 \times f_2 : (X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \to (X'_1 \times X'_2, \mathcal{T}'_1 \times \mathcal{T}'_2)$ *es un homeomorfismo si y sólo si* $f_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (X'_i, \mathcal{T}'_i)$, $i = 1, 2$, *son homeomorfismos.*

Proposición 12. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico. Entonces* $(X, \mathcal{T})$ *es Hausdorff si y sólo si la diagonal*

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$$

es un subconjunto cerrado de $(X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T})$.

Corolario 3. *Sean* $f, g : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ *aplicaciones continuas. Si* $(X', \mathcal{T}')$ *es un espacio Hausdorff, entonces el subconjunto* $A \subset X$ *definido por*

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

es cerrado en $(X, \mathcal{T})$.

5. Espacios cocientes. Topología cociente

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y R una relación de equivalencia en X. Representemos por X/R al espacio cociente y por $\Pi : X \to X/R$ a la proyección: $\Pi(x) = [x]$, siendo $[x]$ la clase de equivalencia de x. Consideremos

$$\mathcal{T}/R = \{O \subset X/R \mid \Pi^{-1}(O) \in \mathcal{T}\}.$$

Entonces $\mathcal{T}/R$ es una topología en X/R a la que llamaremos topología cociente de $\mathcal{T}$ por R. Al espacio $(X/R, \mathcal{T}/R)$ le llamaremos el espacio cociente de $(X, \mathcal{T})$ por R.

Algunas propiedades sencillas, pero importantes, del espacio cociente se recogen en el siguiente resultado.

Proposición 13. *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico y* R *una relación de equivalencia en* X. *Entonces*

(1) $F \subset X/R$ *es cerrado en* $(X/R, \mathcal{T}/R)$ *si y sólo si* $\Pi^{-1}(F)$ *es cerrado de* $(X, \mathcal{T})$.
(2) $\Pi : (X, \mathcal{T}) \to (X/R, \mathcal{T}/R)$ *es sobre y continua.*
(3) *Si* $\mathcal{T}'$ *es cualquier topología en* X/R *que hace continua a* Π, *entonces* $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}/R$.

(4) *Si* $(X',\mathcal{T}')$ *es un espacio topológico y* $f : X/R \to X'$ *una aplicación, entonces* $f : (X/R, \mathcal{T}/R) \to (X', \mathcal{T}')$ *es continua si y sólo si* $f \circ \Pi : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *es continua.*

En la demostración de la anterior proposición se ha usado solamente que Π es sobre. Por tanto la construcción anterior se puede generalizar de la siguiente manera.

Proposición 14. *Sea* $f : (X,\mathcal{T}) \to X'$ *una aplicación sobre. Entonces*

$$\mathcal{T}(f) = \{O \subset X' \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{T}\}$$

es una topología en X'*. Ademas,*

(1) $F \subset X'$ *es cerrado en* $(X',\mathcal{T}(f))$ *si y sólo si* $f^{-1}(F)$ *es cerrado de* $(X,\mathcal{T})$*.*
(2) $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}(f))$ *es sobre y continua.*
(3) *Si* $\mathcal{T}'$ *es cualquier topología en* X' *que hace continua a* f*, entonces* $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(f)$*.*
(4) *Si* $(\hat{X},\hat{\mathcal{T}})$ *es un espacio topológico y* $g : X' \to \hat{X}$ *una aplicación, entonces* $g : (X',\mathcal{T}(f)) \to (\hat{X},\hat{\mathcal{T}})$ *es continua si y sólo si* $g \circ f : (X,\mathcal{T}) \to (\hat{X},\hat{\mathcal{T}})$ *es continua.*

Definición 5. Una aplicación $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ se llama identificación si es sobre y $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(f)$.

En el siguiente resultado se dan condiciones suficientes para que una aplicación sea identificación.

Proposición 15. *Sea* $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *una aplicación. Si* f *cumple una de las tres siguientes propiedades:*

- f *es sobre, continua y abierta,*
- f *es sobre continua y cerrada,*
- f *es continua y existe una aplicación continua* $g : (X',\mathcal{T}')$ *tal que* $f \circ g = I_{X'}$*,*

entonces f *es una identificación.*

Las dos últimas proposiciones nos dicen que las identificaciones son aplicaciones situadas entre las continuas y sobres y entre las continuas, sobres y abiertas (las continuas, sobres y cerradas).

Vamos ahora a probar un resultado importante, que podría considerarse, por similutud al caso del álgebra, como el primer teorema de homeomorfía.

Teorema. *Sea* $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *una aplicación. Se define la relación* R_f *en* X *por* xR_fy *si* $f(x) = f(y)$*. Entonces:*
R_f *es una relación de equivalencia en* X *y la aplicación* $\hat{f} : X/R_f \to X'$ *dada por*

$$\hat{f}([x]) = f(x), \quad \forall [x] \in X/R,$$

está bien definida y es inyectiva. Además, $\hat{f} : (X/R,\mathcal{T}/R) \to (X',\mathcal{T}')$ *es un homeomorfismo si y sólo si* $f : (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *es una identificacón.*

Este resultado es muy útil a la hora de identificar topologicamente espacios cocientes. En efecto, si R es una relación de equivalencia en $(X, \mathcal{T})$, se trata de encontrar una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ tal que $R_f = R$ y f cumpla una de las tres condiciones del resultado anterior. En tal caso $(X', \mathcal{T}')$ es una copia homeomorfica de nuestro espacio cociente $(X/R, \mathcal{T}/R)$. Ilustremos este razonamiento con algunos ejemplos.

Ejemplo 4. *Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ y R la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ definida por tRs si $s = t + n$, con $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ es la aplicación definida por*

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

es fácil comprobar que $R = R_f$ y que $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$ es sobre continua y abierta. Por tanto $(\mathbb{R}/R, \mathcal{T}_u/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u)$.

Ejemplo 5. *Sea $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ y R la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$ definida por $(t_1, t_2)R(s_1, s_2)$ si $s_1 = t_1 + n$ y $s_2 = t_2$, con $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ es la aplicación definida por*

$$f(t_1, t_2) = ((\cos 2\pi t_1, \sin 2\pi t_1), t_2), \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2,$$

es fácil comprobar que $R = R_f$ y que $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_u)$ es sobre continua y abierta. Por tanto $(\mathbb{R}^2/R, \mathcal{T}_u/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_u)$.

Ejemplo 6. *Sea $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$ y R la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$ definida por $(t_1, t_2)R(s_1, s_2)$ si $s_1 = t_1 + n$ y $s_2 = t_2 + m$, con $n, m \in \mathbb{Z}$. Entonces, si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es la aplicación definida por*

$$f(t_1, t_2) = ((\cos 2\pi t_1, \sin 2\pi t_1), (\cos 2\pi t_2, \sin 2\pi t_2)), \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2,$$

es fácil comprobar que $R = R_f$ y que $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_u)$ es sobre continua y abierta. Por tanto $(\mathbb{R}^2/R, \mathcal{T}_u/R)$ es homeomorfo a $(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}_u)$.

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y consideremos el conjunto de los homeomorfismos de X, esto es

$$Home(X, \mathcal{T}) = \{\Phi : X \to X \mid \Phi \text{ es un homeomorfismo}\}.$$

Entonces $Home(X, \mathcal{T})$ es un grupo respecto a la composición de homeomorfismos, con la identidad como elemento neutro. Supongamos ahora que G es un subgrupo de $Homeo(X, \mathcal{T})$. Entonces G define una relación de equivalencia R_G en X definida por xR_Gy si existe $\Phi \in G$ tal que $y = \Phi(x)$. El hecho de ser G un subgrupo nos asegura que R_G es de equivalencia. Representaremos al espacio cociente por $(X/G, \mathcal{T}/G)$.

Proposición 16. *La proyección $\Pi : (X, \mathcal{T}) \to (X/G, \mathcal{T}/G)$ es abierta. Si el grupo G tiene orden finito, la proyección Π también es cerrada.*

En los ejemplos 4, 5 y 6, las relaciones de equivalencia son asociadas a grupos de homeomorfismos, los cuales vienen respectivamente dados por

- $G = \{\Phi_n \in Home(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \mid \Phi_n(t) = t + n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
- $G = \{\Phi_n \in Home(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u) \mid \Phi_n(t_1, t_2) = (t_1 + n, t_2),\ n \in \mathbb{Z}\}$
- $G = \{\Phi_{nm} \in Home(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u) \mid \Phi_{nm}(t_1, t_2) = (t_1 + n, t_2 + m),\ n, m \in \mathbb{Z}\}$

Ejemplo 7. *Sea* $(\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u)$ *la esfera unidad en* $\mathbb{R}^{n+1}$ *dotada de su topología usual. Sea* $G = \{Id, A\}$ *donde* Id *es la identidad en la esfera y* A *es la aplicación antípoda* $A(x) = -x$*. Entonces* G *es un subgrupo del grupo de los homeomorfismos de* $(\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u)$*. Al espacio cociente* $(\mathbb{S}^n/G, \mathcal{T}_u/G)$ *le llamaremos el espacio proyectivo real de dimensión* n *y lo representaremos por* $(\mathbb{RP}^n, \mathcal{T}_u)$*. Observemos, que debido a la última Proposición, la proyección*

$$\Pi : (\mathbb{S}^n, \mathcal{T}_u) \to (\mathbb{RP}^n, \mathcal{T}_u)$$

es sobre, continua, abierta y cerrada.

Ejemplo 8. *Sea* $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}), \mathcal{T}_u)$ *y definamos la relación:*

$$xRy \quad si \quad y = \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}.$$

Si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $\lambda \neq 0$*, representamos por* Φ_λ *el homeomorfismo de* $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}), \mathcal{T}_u)$ *dado por*

$$\Phi_\lambda(x) = \lambda x, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\},$$

entonces $G = \{\Phi_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0\}$ *es un subgupo del grupo de los homeomorfismos y* $R = R_G$*. Además se tiene que* $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/R, \mathcal{T}_u/R)$ *es homeomorfo a* $(\mathbb{RP}^n, \mathcal{T}_u)$