Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Doctorado Interinstitucional en Educación-DIE

Énfasis Educación Matemática

DIFICULTADES, CONFLICTOS Y OBSTÁCULOS EN LAS PRÁCTICAS EDUCATIVAS UNIVERSITARIAS DE INICIACIÓN AL CALCULO DIFERENCIAL —PEUC— EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA.

GLORIA INÉS NEIRA SANABRIA
GRUPO DE INVESTIGACIÓN GIIPLYM

DIRECTOR: RODOLFO VERGEL CAUSADO

CO-DIRECTOR: CARLOS EDUARDO VASCO URIBE

BOGOTÁ, 2017-12-18

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

DIFICULTADES, CONFLICTOS Y OBSTÁCULOS EN LAS PRÁCTICAS EDUCATIVAS UNIVERSITARIAS DE INICIACIÓN AL CALCULO DIFERENCIAL —PEUC— EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA.

Gloria Inés Neira Sanabria

FICHA GENERAL DEL PROYECTO

Título: *Dificultades, conflictos y obstáculos en las prácticas educativas universitarias de iniciación al cálculo diferencial —PEUC— en estudiantes de ingeniería.*	
Investigador Doctorando: *Gloria Inés Neira Sanabria*	**Código** *20071603003*
Correo electrónico: gneira@udistrital.edu.co- nicolauval@yahoo.es	**Teléfono:** *2401010*
Dirección de correspondencia: *Av Calle 64 C # 68 B 98 Bloque 18 En 2 Ap 502 - Bogotá*	
Director de la tesis: *Rodolfo Vergel Causado* **Codirector:** *Carlos Eduardo Vasco Uribe*	
Correo electrónico: rodolfovergel@gmail.com carlosevasco@gmail.com	**Teléfono:** 3108146632 3115726393
Línea de Investigación: *Didáctica de las Matemáticas*	
Programa académico: *Doctorado Interinstitucional en Educación-DIE*	
SNIES:	**Dirección:** Av. Cra. 30 N° 64-81 (Sede postgrados)
Facultad: *Ciencias y Educación*	
Universidad: *Universidad Distrital Francisco José de Caldas*	
Lugar de Ejecución del Proyecto: *Bogotá*	
Nombre del contacto: Dr. Álvaro García Martínez. *Director del DIE*	**Correo Electrónico:** die@udistrital.edu.co redevac@udistrital.edu.co
Teléfono: 3238400 Ext. 6340 ó 6365	**Ciudad:** *Bogotá*
Departamento: *D. C.*	**Duración del Proyecto (en meses):** 36
Descriptores / Palabras claves: *Obstáculos, cálculo diferencial, prácticas educativas universitarias, aprendizaje, conflictos semióticos, dificultades, trabajo inicial cálculo.*	
Observaciones (Otros datos que considere importantes): Las actividades de recolección de información se realizaron en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital F.J.C. de Bogotá.	

RESUMEN EJECUTIVO

Sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral en la literatura se mencionan problemas como incomprensión de conceptos, inadecuado manejo de razonamientos, repitencia y deserción escolar, entre otros. Mediante mi propio trabajo pedagógico realizado en los últimos 25 años con estudiantes de grado 11 y de primeros semestres de Matemáticas y de Ingeniería de diversas universidades, oficiales y privadas, diurnas y nocturnas, he logrado evidenciar algunos de los problemas que estos estudiantes viven con el Cálculo: mortalidad académica, repitencia, fracasos en pruebas de suficiencia, habilitaciones, validaciones, incomprensión (Neira, 2000). A muchos estudiantes esta dificultad en el cálculo les impide graduarse de bachilleres o de profesionales, a otros les implica abandonar la Universidad o retrasar varios años su grado profesional.

Esta investigación indaga, en el trabajo inicial del Cálculo Diferencial e Integral en una universidad colombiana, las causas de los problemas detectados, ya que el lenguaje, los razonamientos, la lógica, el tratamiento de los signos usados en el cálculo y otros factores que se analizaron en el curso de la presente investigación, plantean una "ruptura" con lo que se hace usualmente en cursos anteriores de matemáticas.

Se pretende, entonces, identificar, describir, caracterizar y explicar las dificultades, los conflictos y obstáculos que se pueden inferir a partir del estudio de algunas prácticas educativas universitarias del trabajo inicial en el cálculo diferencial en estudiantes de primer semestre de Ingeniería, cómo emergen, y qué posibles relaciones causales podrían establecerse para su explicación, configurando inicialmente un marco de comprensión para la conceptualización de algunos constructos teóricos relacionados con la noción de obstáculo. Se acudió fundamentalmente a las teorías de Brousseau, Sierpinska, Artigue, Díaz-Godino, Radford y D'Amore, como también a los estudios de Anna Sfard sobre reificación, y de David Tall sobre imagen conceptual ("concept image") y procepto ("procept").

La investigación es de enfoque cualitativo, de tipo descriptivo-interpretativo; el tipo de estudio es exploratorio, con el método de estudio de caso, en el que se utilizó la observación no participante y la entrevista estructurada basada en tareas. Su realización desde la indagación bibliográfica inicial hasta la escritura del informe final se llevó a cabo en un periodo de 7 años en total.

A partir de esta investigación se aportó a la caracterización y explicación de la estructura y funcionamiento de los obstáculos en el sistema didáctico; al mejoramiento y eficacia de la metodología de investigación en la didáctica del cálculo; y en el futuro se espera que aporte a la formación de maestros y al desarrollo de algunos lineamientos para elaborar propuestas didácticas que ayuden a superar los obstáculos detectados y caracterizados en las prácticas educativas.

INTRODUCCIÓN

La investigación acerca de las dificultades, conflictos y obstáculos que encuentran los estudiantes de primeros semestres de ingeniería al abordar el estudio del cálculo diferencial, evidenciada por los múltiples tropiezos, repitencias, deserciones y traumas presentes en diferentes vidas de múltiples estudiantes, es la semilla que ha generado este camino investigativo iniciado hace ya siete años y que ha requerido la observación y el seguimiento de diferentes cursos de cálculo diferencial, entrevistas y reflexiones.

En el primer capítulo se encuentra la descripción del proyecto de investigación y la justificación que desde diferentes dimensiones ha consolidado esta investigación, así como también el planteamiento del problema, la pregunta de investigación y los objetivos generales y específicos que han dirigido la indagación.

En el segundo capítulo presento los antecedentes teóricos, los antecedentes desde investigaciones doctorales, y desde otros reportes de investigación, y un estado del arte que parte desde el origen y planteamiento de los obstáculos epistemológicos iniciado por Bachelard en la epistemología, pasa por su incorporación a la educación matemática elaborada en sus orígenes por Guy Brousseau con su arqueología de los obstáculos epistemológicos, y aborda los trabajos de Sierpinska que la continuaron. En esta misma vía presento otras tendencias asociadas y relacionadas unas más cercanas y otras más lejanamente con esta noción, como concepciones, errores, conflictos, obstáculos didácticos, semióticos, misconcepciones, principalmente, con el fin de elaborar un amplio y completo panorama desde distintos enfoques y perspectivas y con diferentes nominaciones que han pretendido describir en todo caso esa perplejidad o confusión que se evidencia en los errores y en las dificultades y cuya etiología puede proponerse desde los obstáculos o los conflictos.

Se encuentra también una sección que aborda la transición o ruptura del Álgebra al Cálculo, a partir de una reflexión epistemológica y didáctica acerca del paso del Álgebra al Cálculo, que es pertinente en tanto la investigación se sitúa en el estudio del cálculo diferencial que curricularmente está dispuesto sobre unos requisitos algebraicos y cognitivamente requiere de ciertas competencias y habilidades necesarias pero no suficientes, que de paso dan lugar a ciertos obstáculos y conflictos en el nuevo registro semiótico.

La siguiente sección trabaja acerca de las dificultades detectadas al pasar del algebra al cálculo en educación matemática; dificultades detectadas tanto en la literatura especializada como documentadas en las investigaciones realizadas. Se disponen también algunas consideraciones sobre las prácticas educativas universitarias vinculadas con el cálculo diferencial, PEUC, categoría fundamental en la investigación. Finalmente se presentan aspectos históricos de algunas nociones fundamentales del Cálculo Diferencial y se listan las principales investigaciones del EOS, principalmente en cabeza de Godino y Font del 2006 en adelante, con el fin actualizar la literatura rastreada en la investigación.

Por otra parte, en el tercer capítulo se encuentra el marco teórico, el cual está conformado por 6 secciones que soportan las distintas categorías utilizadas en la investigación. Inicialmente se encuentra una primera aproximación a la conceptualización de obstáculo, conflicto y dificultad con el fin de precisar el sentido y significado de estas nociones al interior de la presente investigación. Se presentan también algunos elementos de la teoría de registros semióticos de Raymond Duval que amplían y precisan las categorías descriptivas del EOS, en particular respecto a la categoría Lenguajes. Y tres secciones dedicadas al EOS en cuanto Marco Teórico para la Educación Matemática, las categorías descriptivas del análisis didáctico del EOS y el Análisis de Facetas de Idoneidad Didáctica de Godino, Font y colaboradores.

El cuarto capítulo presenta el diseño metodológico general. Se presentan los datos, los matrices documentales correspondientes a los episodios de clase observados. Fundamentalmente consta de lo que hemos denominado Matriz Documental en la que aparecen los diferentes episodios de clase observados, dispuestos cada uno en un cuadro a 4 columnas, cada una de las cuales contiene una numeración, unas observaciones, el relato del guion, y la descripción de unas actividades o prácticas no verbales observadas. Se han dejado en esta sección solamente las correspondientes a los episodios 4 y 12, llamados *"episodios fundamentales"*; el primero sobre límites y el segundo sobre derivadas. Los demás, por su extensión, se han dejado como parte del archivo de anexos. También se presenta en este capítulo la Matriz Categorial Descriptiva de los dos episodios fundamentales. Esta matriz descriptiva contiene el análisis de las matemáticas implicadas en los dos episodios en cuanto a las prácticas matemáticas con problemas, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos tal como lo presenta el EOS.

El quinto capítulo está dedicado al análisis general de los datos. Se presenta la Matriz Categorial Descriptiva de Practicas Matemáticas, Configuración de Objetos y de Oposiciones, denominada así pues contiene las categorías de análisis que atraviesan los episodios y que están en estrecha relación con las categorías de análisis en lenguajes, conceptos y procedimientos y las cinco dualidades del decágono del EOS. En esta matriz hemos incluido proposiciones y argumentos en la categoría de lenguajes que hemos ampliado y refinado pues el análisis mismo así lo requiere. En una columna contiene Prácticas matemáticas y configuración de objetos y en una segunda columna, las oposiciones del decágono del EOS que refinan las categorías iniciales. Se han dispuesto unas herramientas de análisis por niveles, tanto para el episodio 4 como para el episodio 12. Se presenta además una descripción de la práctica docente observada y unos resultados obtenidos a partir de estos análisis.

El sexto capítulo presenta unas conclusiones, relata tanto las limitaciones encontradas como enuncia algunas recomendaciones para futuras investigaciones relacionadas. También contiene algunos posibles impactos en la comunidad académica e investigativa. Finalmente se encuentran las referencias bibliográficas. Los anexos que están en un archivo digital aparte están constituidos por una transcripción de intervenciones en un congreso del EOS, unas fotos de exámenes parciales, 14 episodios complementarios con sus respectivas matrices documentales, categoriales y de facetas, entrevistas y talleres.

CAPÍTULO I: DESCRIPCIÓN, JUSTIFICACIÓN, PROBLEMA Y OBJETIVOS

1.1 Acercamiento al problema de investigación

El escenario usual del trabajo inicial del Cálculo Diferencial, como se verá en el estado el arte y evidenciado en la práctica de los maestros día a día, muestra repitencia, deserción escolar, incomprensión de conceptos, inadecuado manejo de razonamientos, escasa competencia algebraica en la resolución de los nuevos problemas; cursos desarrollados mecánicamente, trabajo puramente algorítmico y algebraico, sin alcanzar comprensión de los razonamientos y conceptos del cálculo.

Cuando los estudiantes empiezan su formación en matemáticas en la universidad en carreras como Ingeniería, tienen que tomar un curso de Cálculo Diferencial o Cálculo I que se les vuelve un verdadero dolor de cabeza a una gran cantidad de ellos por las veces que deben volver a cursar y repetir la materia, pues pierden una y otra vez los exámenes parciales, el curso, convirtiéndose el cálculo en un obstáculo en la consecución de su título profesional.

¿Por qué repiten una y otra vez el curso de cálculo diferencial? ¿Por qué a pesar de que algunos estudiantes afirman que estudian "harto" pierden los parciales? ¿Por qué cometen casi siempre los mismos errores?, ¿Por qué les cuesta trabajo entender los conceptos? ¿Por qué los errores de tipo algebraico continúan haciéndoles perder los puntos de las pruebas? Y una pregunta más profunda aún: ¿Por qué no entienden el cálculo?

Asombrosamente encontramos que esta situación no sucede solamente en un curso, ni solamente en una Universidad, sino en la gran mayoría de universidades de Bogotá, de Colombia, de nuestro continente y también de otros continentes, en países como Francia, España, E.U, Italia,… (Artigué 1995), es decir, estamos frente a una problemática universal. La situación es tan sentida y tan generalizada que se han incorporado innovaciones con el uso de las llamadas TICS, softwares de visualización, programas especiales, desarrollos de situaciones puntuales con el uso del computador o de la calculadora, que permiten sí un apoyo visual y un poco más de sentido y significado, pero siguen presentándose las incomprensiones y repitencia señaladas.

Entonces es naturalmente válido preguntarse ¿qué es lo que pasa con el cálculo que universalmente se ha vuelto un problema para los estudiantes? un problema, pues a pesar de que estudian y estudian no logran pasar la materia, mucho menos alcanzar una comprensión adecuada del cálculo.

Unas respuestas ligeras a los interrogantes planteados arriba que surgen en charlas informales con otros profesores de matemáticas y con estudiantes mismos, son, por ejemplo, que los profesores no saben enseñar cálculo; que no se les entiende; que los estudiantes no estudian lo suficiente, que las matemáticas no son para todo el mundo; que las matemáticas son difíciles; que los estudiantes no tienen las bases necesarias para el curso, y otras respuestas, que en general, culpan de la situación o al maestro, o al estudiante, o a la matemática misma, todas ellas ajenas a la aproximación que queremos darle en esta investigación.

Ninguna de estas respuestas centra la atención en el punto donde se ha querido ubicar el interés de esta investigación, que es no solamente identificar las dificultades que encuentran los estudiantes cuando inician esa formación en matemáticas y caracterizarlas como conflictos, obstáculos y de qué tipo, sino también encontrar una explicación acerca de cómo ellas se generan, es decir cómo emergen en la interacción entre estudiantes y profesores en las prácticas usuales que se dan en general en esos cursos.

1.2 Justificación

La investigación acerca de las dificultades, conflictos y obstáculos que encuentran los estudiantes de primeros semestres de ingeniería al abordar el estudio del Cálculo Diferencial, evidenciada por los múltiples tropiezos, repitencia, deserciones, traumas presentes en diferentes vidas de múltiples estudiantes, es la semilla que ha generado este camino iniciado hace siete años y que ha requerido el seguimiento de diferentes cursos de Cálculo Diferencial a lo largo de toda la investigación.

Desde las investigaciones de Artigue y Sierpinska, planteamos que el lenguaje, los razonamientos, la lógica, la alternancia de cuantificadores, el tratamiento de los signos usados en cálculo, plantean una “ruptura” con lo que se hace en álgebra, y se propone una investigación en la Transición del Álgebra al Cálculo (TAC) como una manera de impactar significativamente en el aprendizaje del Cálculo. Cada concepto del cálculo que se desea enseñar suele apoyarse en nociones más elementales y se resiste al aprendizaje si no se antecede por un sólido entendimiento y articulación de las nociones y los conceptos previos, lo cual es necesario, pero no suficiente.

La evidencia de los problemas detectados es tan fuerte que ha desencadenado en diferentes partes del mundo reformas e innovaciones curriculares, uso de las TIC y softwares especializados, llegando incluso a cuestionar si se debe enseñar Cálculo en la educación media, y si la respuesta es afirmativa: ¿De qué manera? ¿Con qué grado de rigor? ¿De manera intuitiva o formal?

Del fenómeno didáctico de *algebrización* del Cálculo Diferencial escolar, ya detectado por Artigue (Contreras, 2000), que se manifiesta en un enfoque algebraico y reduccionista del cálculo, emerge un interés urgente y fundamental por la actividad matemática que se realiza en las aulas de clase, por las prácticas educativas, por la dimensión de significación y sentido de estas prácticas, que toca también las dimensiones didáctica y matemática.

Además de esos fenómenos de algebrización, también es consciente la comunidad académica investigativa de algunos errores, dificultades, u obstáculos presentes en el estudio del Cálculo Diferencial, y la literatura reporta numerosas investigaciones tanto internacionales como locales que dan cuenta de ellos; sabemos pues que existen y reaparecen, pero lo que no sabemos es cómo se producen, cómo emergen y cómo se mantienen. Es decir, de cierta manera sabemos qué errores cometen nuestros estudiantes en general, con qué tropiezan, qué conflictos surgen, pero lo que no sabemos es cómo ni por qué se generan. Mientras no sepamos mucho más sobre ello, no lograremos superar esos obstáculos ni resolver esos conflictos.

Por ejemplo, basta echar una mirada a algunos "*handbooks"* de investigación, desde el *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, editado por Grouws en 1992, hasta los más recientes; a las memorias de las reuniones anuales del PME[1] o de recientes eventos de Educación Matemática como el ICME o Ciaem[2] a los reportes de investigación presentados en las últimas Relme,[3] para darse cuenta de lo actual y presente de las investigaciones didácticas en el campo del Cálculo Diferencial e Integral.

En esa misma línea cito algunos trabajos relevantes encontrados en las memorias del PME y en las revistas *RELIME*, *Educación Matemática* y *Educational Studies in Mathematics*. Por ejemplo, el trabajo sobre la enseñanza del límite de Blázquez y Ortega (2001); el de Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial de Moreno y Cuevas (2004) y el trabajo acerca de la propiedad de completitud del conjunto de los números reales en la transición del cálculo al análisis de Berge (2008), entre otros. Este panorama inicial se refinará en el estado del arte, capitulo II, sección 2.2.

Por tanto, la investigación en el paso, transición o ruptura del álgebra escolar al cálculo diferencial, y las dificultades, conflictos u obstáculos epistemológicos, semióticos, didácticos o culturales que se dan en esa transición, constituyen dos puntos cruciales en las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral en la educación media y en la educación superior. A tal periodo de transición la hemos denominado "trabajo inicial en el Cálculo Diferencial", y a las prácticas universitarias que se repiten en él, PEUC.

Llamare "TAC" a la transición del algebra al cálculo. Si es mejor llamar a la TAC así, como transición o si es mejor decir solo "paso" o más bien "ruptura" constituye un desarrollo y un resultado de esta investigación. Al igual que si basta hablar de dificultades o hay que distinguirlas como conflictos u obstáculos epistemológicos, semióticos, didácticos, culturales.

Este trabajo pretende indagar precisamente cuáles son algunas de las causas generadoras de tales errores, obstáculos, conflictos, dificultades, y creemos que la explicación puede estar en las prácticas de clase, en la interacción poca o nula que se de en esas prácticas, en la gestión de los conflictos presentados. Conjeturamos que esas mismas prácticas son cuanto generadoras de obstáculos y que en la emergencia de las dificultades reportadas actúan también manteniendo en el sistema didáctico los mismos obstáculos que causan las dificultades y conflictos que a su vez causan incomprensiones y repitencia.

Los intentos de identificar, describir, comprender y explicar los obstáculos que pueden inferirse a partir de las prácticas educativas universitarias de iniciación del trabajo del Cálculo Diferencial en esa transición del Álgebra al Cálculo, constituye una exploración novedosa, dado que se instaura en analizar el paso a unas prácticas, a una semiótica, a una semántica propia del cálculo para

[1] Psychology of Mathematics Education.
[2] Comité Interamericano de Educación Matemática.
[3] Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

explicar, describir y comprender si las causas de tantos problemas con la comprensión del cálculo no están solamente al interior de cualquiera de las prácticas llamadas "*cálculo*" en la universidad, sino en la iniciación del trabajo en él, más específicamente en ese paso, transición o ruptura del álgebra al cálculo. En adelante las Prácticas Educativas Universitarias se identificarán con la sigla PEU, y las Prácticas Educativas Universitarias vinculadas a la iniciación del Cálculo Diferencial, con la sigla PEUC. El adjetivo "escolar" en esta investigación, está relacionado con la institucionalidad, es decir se toma "escuela" en un sentido amplio como aquella institución que rige lo académico en cualquier nivel de escolaridad; no significa ni educación básica, ni media, de hecho, la mirada se dirige a las prácticas en la universidad. También escolar califica al Cálculo para distinguirlo del disciplinar, de las matemáticas llamadas puras, es decir, aquel ordenamiento curricular consensuado por las instituciones de educación superior, o por las escuelas y facultades de ingeniería.

Emerge entonces una mirada diferente que pretende aportar otros elementos constitutivos a la hora de describir, analizar y comprender los problemas de aprehensión de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial escolar, dado que toma su lugar principal en el paso, en el camino, en el puente que del álgebra lleva al Cálculo, para luego sí posicionarse al interior de éste, con toda su problemática y teniendo en cuenta los diversos actores que participan en él. Esta investigación pretende aportar a la problemática que a diario viven maestros y estudiantes con el cálculo, lo cual, hace a esta investigación necesaria y pertinente en el ámbito del aprendizaje y de la enseñanza del Cálculo Diferencial.

En síntesis, se plantea un abordaje descriptivo-analítico de las dificultades que encuentran los estudiantes de una universidad colombiana al iniciar el estudio del Cálculo Diferencial en la universidad. También se propone decidir cómo se describe mejor esa práctica escolar y sus dificultades: si como barreras, rupturas, refundiciones, revoluciones, cambios, conflictos u obstáculos, o como un problema de semiosis de un cierto pensamiento variacional con la mediación de uno o más registros que ya tienen unas restricciones y limitaciones nada fáciles de superar, para lo cual, en esta investigación, se intenta construir un marco explicativo inicial que permita hacer interpretaciones y tomar decisiones para caracterizar esas dificultades y rastrear los obstáculos subyacentes en las PEUC.

1.3 El problema de investigación

En esta investigación se pretende describir y caracterizar las dificultades que encuentran los estudiantes al iniciar el estudio del Cálculo diferencial en una universidad colombiana, explicar algunas de las causas de su emergencia y del modo en que se mantienen.

Para ello es necesario identificar y describir las prácticas desde las aulas de clase en las que maestros y estudiantes viven ese proceso de enseñanza y aprendizaje, es decir, observar para entender y poder describir las prácticas educativas universitarias (PEU), en particular las vinculadas con la iniciación del cálculo diferencial (PEUC): cómo son las interacciones usuales entre docentes y estudiantes y entre estudiantes; cuáles son las dificultades emergentes de dicha interacción y qué conflictos surgen, para identificar, describir, clasificar y explicar los obstáculos que pueden inferirse a partir de la observación de las prácticas educativas universitarias de iniciación del trabajo del cálculo diferencial (PEUC) en estudiantes de Ingeniería.

De esta manera se documentó cómo el tipo de matemáticas enseñadas y la gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje, en particular la inadecuada gestión de los conflictos, generan las dificultades observadas, y de igual manera las mantienen. En todo caso, es en la interacción dada en las practicas o en la ausencia de ella que esperamos encontrar una explicación para la emergencia de tales dificultades, conflictos u obstáculos.

Esta categoría de lo emergente es fundamental en la investigación, pues le da una dimensión propia, al hacer referencia a aquello que surge producto de unas ciertas prácticas, unas ciertas interacciones y unos ciertos tratamientos, de unos ciertos lenguajes y unas ciertas maneras de decir, de explicar, de ejemplificar, de resolver. Está estrechamente relacionado con la interacción, puesto que los conflictos de significados son generados en las prácticas planteadas: lenguajes, argumentos, procedimientos, gestión de las preguntas realizadas, todo ello genera precisamente el tipo de errores detectados. Se trata entonces de sacar a la luz las ambigüedades en los discursos, y explicarlas como unas metáforas o causas generadoras de conflictos para responder a la pregunta ¿Cuáles son los dificultades o conflictos que están emergiendo en las PEUC y que obstáculos podríamos inferir para explicar por qué están emergiendo?

Se asume como supuesto inicial que hay un paso o transición, y tal vez no una ruptura, que sería un término que instauraría una postura radical de entrada, para que la investigación misma arroje más claridad acerca de ese camino, de ese tránsito. Voy a decir TAC, ni curricular, ni cognitiva, sino entendiendo que curricularmente se pone primero álgebra y después cálculo, que el álgebra se considera pre-requisito para el Cálculo, que para compartir las prácticas del Cálculo se requiere en gran medida manejar las del álgebra. Para algunos estudiantes esa transición se da de una vez, otros se devuelven, otros permanecen un poco ambiguos por un tiempo y otros tal vez nunca la logren, pero cualquiera de las situaciones confirma que está bien llamado también *transición*. Esa transición puede ser cognitiva, lingüística, curricular, semiótica, o de otro tipo.

1.4 Pregunta de investigación y objetivos

¿Qué dificultades y conflictos podemos observar y qué obstáculos podemos inferir a partir de la observación de las prácticas educativas universitarias (PEU) vinculadas con la iniciación del cálculo diferencial (PEUC), en los estudiantes de ingeniería? ¿Cómo emergen, cómo y por qué se generan y cómo se pueden explicar?

OBJETIVO GENERAL: Identificar, describir, clasificar y caracterizar las dificultades y los conflictos observados e inferir qué tipos de obstáculos podrían producirlas, a partir del estudio de las prácticas educativas universitarias (PEU) de los estudiantes de Ingeniería de una universidad colombiana en el trabajo inicial del cálculo diferencial (PEUC) y explicar cómo emergen, se generan y se explican.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1. Configurar un marco de comprensión para la conceptualización del paso o transición del algebra al cálculo (TAC) y de algunos constructos teóricos relacionados con la noción de obstáculo.
2. Describir las prácticas educativas universitarias (PEU) vinculadas a la iniciación del cálculo diferencial (PEUC) en un grupo de estudiantes de primer semestre de Ingeniería junto con su profesora.
3. Identificar las dificultades y conflictos que emergen en las interacciones observadas durante las PEUC, e inferir posibles obstáculos que se pueden inferir, haciendo una descripción, clasificación y caracterización de ellos.
4. Proponer una explicación a partir de las prácticas para la ocurrencia y generación de tales dificultades y conflictos y posibles obstáculos.
5. Identificar algunos indicadores de idoneidad didáctica de la manera de conducir las PEUC por parte de la profesora del curso observado, según las facetas del EOS.

CAPÍTULO II: ANTECEDENTES Y ESTADO DEL ARTE

2.1 Antecedentes

Se presentan en este apartado algunos antecedentes teóricos de los obstáculos, conflictos y dificultades, y de nociones fundamentales en el aprendizaje del Cálculo Diferencial desde investigaciones doctorales y desde reportes de investigación.

Desde la epistemología, Bachelard aporta el concepto de obstáculo en la construcción del conocimiento científico. Brousseau mediante cuidadosas y profundas reflexiones incorpora el concepto a la educación matemática y Sierpinska (1994) propone cinco grupos de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite: el llamado horror al infinito, que reagrupa los obstáculos asociados al rechazo al estatus de operación matemática para el paso al límite; los obstáculos relativos al concepto de función; los obstáculos geométricos; los obstáculos lógicos, ligados a la eliminación de los cuantificadores o de su orden; y el obstáculo simbólico relacionado con la reticencia a introducir un símbolo específico para la operación del paso al límite. Esta parte de los antecedentes se ha dispuesto también como parte importante del estado del arte y su desarrollo se encuentra en el apartado 2.2.1.

A continuación, como antecedentes, se citan trabajos específicos vinculados de manera cercana con la presente investigación.

Investigaciones Doctorales: Se relacionan solo algunas de la gran cantidad de tesis doctorales cuyos estudios tienen que ver con la investigación propuesta en este proyecto:

- *"Epistemological Obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level. A case from The National University of Lesotho",* de Eunice Kolitsu Moru (2006); en la que explora, a través de la teoría APOS de Dubinski, algunos obstáculos epistemológicos que se presentan en estudiantes de college cuando se acercan a la noción de límite. Se plantea dos preguntas de investigación: ¿Qué obstáculos epistemológicos se encuentran en los estudiantes de pregrado al interiorizar acciones en procesos en la comprensión del concepto de límite? Y, ¿Qué obstáculos epistemológicos se encuentran en los estudiantes de pregrado al encapsular procesos en objetos en la comprensión del concepto de límite? En su investigación, el lenguaje y el simbolismo están tomados como obstáculos epistemológicos. Este trabajo se conforma en un antecedente importante para la presente investigación por la cercanía del objeto de estudio, por la población indagada y por la actualidad que representa.

- *"Estudio micro-genético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso"* de César Delgado.[4] Es un estudio de caso con relación a la secuenciación y control de obstáculos y dificultades conceptuales, con el fin de desarrollar los esquemas conceptuales de los alumnos que dan cuenta de las definiciones matemáticas de límite y continuidad. El marco teórico, ontogenético-sociocultural y didáctico,

[4] Universidad Autónoma de Barcelona, 1998, dirigida por Carmen Azcárate.

define el campo conceptual para examinar los procesos y evolución de las nociones de los estudiantes en relación con sus condiciones cognitivas iniciales y potenciales, su acción sobre los medios y la interacción social en el aula. En uno de los capítulos se presenta un análisis epistemológico e histórico de los conceptos de continuo, continuidad y límite. Se convierte en antecedente dada la población de estudio y las temáticas cercanas entre las dos investigaciones.

- *"Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización de los números reales y de la completitud en la enseñanza universitaria"* de Analía Bergé, [5] Estudia la evolución de la conceptualización de los números reales por parte de los estudiantes de nivel universitario, y se centra en la propiedad de completitud del conjunto de los números Reales. Antecedente actual e importante por el sustrato teórico que trata y porque indaga estudiantes universitarios, población y muestra análoga a la de la presente investigación.

- *Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito "Teachers' convictions on mathematical infinity" de* Silvia Sbaragli, [6] en la que presenta una investigación acerca del sentido del infinito y su historia, e indaga acerca de si las concepciones de los maestros sobre el infinito son causa de obstáculos didácticos o epistemológicos en los alumnos. Las palabras clave de esta tesis doctoral tienen mucha cercanía con algunas presentes en la investigación acerca de los obstáculos, y por otro lado acerca del infinito, que es un elemento crucial en la iniciación del cálculo diferencial, todo lo cual la posiciona como antecedente importante.

Desde la perspectiva de tesis doctorales se pueden evidenciar tendencias centradas en indagar acerca de constructos fundamentales del cálculo, como límite, continuidad, números reales, infinito. Si bien la tesis de Moru (2006) se basa más en la Teoría APOS de Dubinski y la de Delgado (1998) más en las teorías de Piaget, ambas están interesadas en analizar de alguna manera esquemas conceptuales de los alumnos cuando se enfrentan a nociones como la de límite en ambientes universitarios. Bergé (2004) ve en la propiedad de completitud de los números reales un foco de problemas fundamental para dar cuenta de la conceptualización en los estudiantes universitarios de los números reales. Por otra parte, Sbaragli (2004) al indagar sobre las concepciones del infinito en maestros de primaria, abre un amplio espectro de investigaciones que pueden extrapolarse a maestros de secundaria y de universidad, manteniendo la pregunta acerca del impacto de tales creencias en potenciales obstáculos en los estudiantes.

Reportes de investigaciones

Tal como se citó en la descripción del proyecto de investigación los problemas de comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo que encuentran los estudiantes de educación media y de primeros semestres de universidad se han evidenciado por numerosas investigaciones en diferentes partes del mundo, (Moru, 2006, cita a: Tall & Schwarzenberger, 1978, en el Reino Unido; a Davis

---

[5] Dirigida por Michelle Artigue. Universidad de Buenos Aires, 2004.

[6] Universidad de Bologna, 2004, dirigida por Bruno D'Amore.

& Vinner, 1986, en E.U.; a Sierpinska, 1987, en Polonia y a Kannemeyer, 2003, en Sudáfrica). Estas investigaciones han identificado, clasificado y analizado los problemas detectados en dicha comprensión. Pero a pesar de todos los esfuerzos hechos, la comprensión del cálculo todavía al día de hoy es un problema insistente en la educación matemática (Moru, 2008, cita algunos trabajos: Sierpinska, 1987; Cornu, 1991; Monaghan, 1991; Williams, 1991; Cottrill et al., 1996; Tall, 1996; Kannemeyer, 2003).

Se citan en seguida algunos reportes de investigaciones específicos que tienen que ver con este proyecto, en cuanto a enseñanza y aprendizaje del cálculo, en cuanto a obstáculos y conflictos y en cuanto al estudio de temas relativos al límite, al infinito, al continuo:

"La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión", de Angel Contreras de la Fuente y otros (2000). Este estudio, siguiendo el Enfoque Onto-Semiótico de la cognición y la instrucción, analiza el problema desde la perspectiva de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión de A. Sierpinska, haciendo converger dos vertientes en esta mirada.

"*Lo veo, pero no lo creo*": *Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual,* al igual que: *Otros hallazgos sobre los obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor*. Ambos escritos de Gianfranco Arrigo y Bruno D'Amore, publicados en italiano en 1999 y 2004. Estudian los obstáculos epistemológicos y didácticos encontrados en estudiantes italianos y suizos (de edad comprendida entre 17 y 19 años) en el estudio del teorema de Cantor que afirma el hecho que la infinidad de los números reales comprendidos entre 0 y 1 es mayor a la infinidad del conjunto de los números racionales. El enfoque está centrado en los obstáculos didácticos, creados casi siempre por los mismos profesores en los niveles escolares precedentes, cuando presentan modelos intuitivos que crean falsas concepciones, a veces insuperables.

La investigación hecha en la Escuela Colombiana de Ingeniería por Guiomar Lleras et al. (2005), en la que utilizan la Teoría APOS de Dubinski respecto al cálculo universitario: *Desarrollo de la abstracción reflexiva en estudiantes de cálculo diferencial de la Escuela Colombiana de Ingeniería mediante la teoría APOE*[7] (APOS en Ingles). Esta teoría afirma que las construcciones son *acciones*, *procesos* y *objetos*, que se organizan en *esquemas, y* tratan de responder a la pregunta: ¿El desarrollo de la abstracción reflexiva mediante la teoría APOE, influye favorablemente en el aprendizaje de algunos conceptos del Cálculo Diferencial (función, límite y continuidad), en los estudiantes de la Escuela Colombiana de Ingeniería? Antecedente importante dada la cercanía con la población y muestra de la que recogen los datos experimentales, en tanto son una comunidad de estudiantes de ingeniería, análogamente a lo que sucederá en esta investigación.

---

[7] APOS es una abreviatura para: Action Process Object Schema, en español APOE: acción, proceso, objeto, esquema.

Reportes como los citados ponen de manifiesto el creciente y mantenido interés por la indagación respecto al aprendizaje (y enseñanza) de nociones fundamentales del cálculo, transitando por perspectivas cognitivas clásicas, como los actos de comprensión, los obstáculos epistemológicos, las creencias o concepciones, a otras posturas como el enfoque ontosemiótico con su concepción de desajustes entre significados personales e institucionales. Es notable también la dirección de las investigaciones hacia distintos niveles de escolaridad, secundaria, universitaria, y la ampliación de las perspectivas de los obstáculos al hablar de obstáculos y conflictos semióticos, culturales, didácticos, entre otros. Se configura así un amplio campo de investigaciones en el que la presente investigación tiene lugar.

Por último, sin pretender ser exhaustiva, cito la Critica de Berkeley al Cálculo de Newton y Leibniz (Neira, 1998), por cuanto esa investigación desarrolla un estudio histórico y epistemológico del nacimiento del “nuevo cálculo” que aporta al presente proyecto, precisamente en esa dimensión histórico-epistemológica de conceptos emergentes como límite, vecindades, aproximaciones, diferenciales. Muestra en el camino de formalización los obstáculos y dificultades que incluso grandes pensadores como Newton y Leibniz tuvieron para fundamentar los procesos de paso al límite, uno con las cantidades evanescentes y otro con las diferencias finitas, ambos mostraban que el paso al límite era un punto crucial en la comprensión, construcción y fundamentación del cálculo.

Antecedentes desde la comprensión del cálculo diferencial

También a manera de antecedentes se citan aquí distintas maneras de nominar al obstáculo epistemológico en educación matemática con nombres tales como errores, obstáculos o dificultades en el aprendizaje del cálculo que se reportan bajo distintas denominaciones, por ejemplo:

- Herscovics (1989, citado en Moru, 2006) afirma que Bachelard definió la noción de obstáculo epistemológico en el contexto del desarrollo del pensamiento científico en general, y no en términos de las experiencias de aprendizaje individual. De la misma manera como Cornu diferenciaba los obstáculos de la manera como ellos son adquiridos, Herscovics distingue los obstáculos por referencia al contexto. El prefiere usar el término “obstáculo cognitivo” cuando se refiere al contexto educativo, y el término “obstáculo epistemológico” cuando se refiere al pasado o a la historia de la ciencia.

- Tall (1989) también utiliza el término “obstáculo cognitivo” en vez de “obstáculo epistemológico” Igual que Herscovics, él afirma que éste último término pertenece a la historia de la ciencia, y enfatiza que éstos son causa del estancamiento del conocimiento por parte de los estudiantes. Esta distinción está relacionada con la polaridad epistémico/cognitivo e institucional/personal del EOS.

- Los obstáculos epistemológicos relativos al concepto de límite, ya sea en el contexto de una función o de una sucesión, han sido experimentados en la educación matemática moderna (Moru, 2006 cita a Taback, 1975, Tall & Schwarzenberger, 1978; Tall &Vinner, 1981;

Orton, 1983a, 1983b; Davis & Vinner, 1986; Sierspinska, 1987; Cornu, 1991; Monaghan , 1991; William, 1991; Cottrill *et al*., 1996; Tall, 1996; White & Mitchelmore, 1996; Billings & Klanderman; 2000; Aspinwall & Miller, 2001; Juter, 2003a, 2003b, 2004, 2005).

- La noción de obstáculo epistemológico implícito bajo diferentes nombres, formas y contextos puede ser encontrada y rastreada en muchos filósofos y pensadores antes y después de Bachelard: Bacon (the idols of the den: los idolos de la caverna). Husserl, Durkheim, Granet, Halbwachs, Scheeler, Schütz, Garfinkel, Cicourel, Znaniecki, Khun, Popper, Lakatos.

Desde las primeras investigaciones realizadas en torno a los conceptos del cálculo, ha emergido un consenso respecto a que la enseñanza y el aprendizaje de esta parte de las matemáticas es un proceso complejo que genera múltiples dificultades tanto a alumnos como a profesores, y tanto en el nivel de secundaria como en el superior.

La raíz del problema, según algunos investigadores, como Moreno, (2005), reside fundamentalmente en la problemática noción de infinito, y por lo tanto en todos los procesos en los que interviene el paso al límite. Desde el punto de vista práctico, para salvar esta dificultad conceptual, se suele centrar la enseñanza en procurar que los alumnos adquieran ciertos automatismos de cálculo que les permite tener éxito en las tareas que han de realizar, y luego se evalúan las capacidades adquiridas de esta forma. Pero a medida que se van complicando los conceptos y se necesita una mayor comprensión conceptual, el fracaso, los errores, las concepciones erróneas y las dificultades se van acentuando.

Tal como se ha venido subrayando, las investigaciones desarrolladas en este ámbito han experimentado en los últimos años una evolución significativa en sus enfoques y propósitos, transitando de los estudios centrados en caracterizar las dificultades y obstáculos existentes en la comprensión del límite (Cornu, 1991; Tall, 1992; Moru, 2006) a las investigaciones preocupadas por analizar las razones que subyacen a tales dificultades (Espinoza y Azcárate, 2000; Mamona-Downs, 2000, citados en Moru, 2006). Incluso, otros autores teniendo en cuenta las dificultades que plantea la definición formal de límite de una función han optado por dar una nueva definición de límite como "aproximación óptima", o por evitarla como el caso del Análisis no estándar de Abraham Robinson.

En el caso del límite concretamente, por ejemplo, Artigue enfatiza la dificultad proveniente de la necesidad de disociar el objeto límite del proceso que permite construirlo, asociándolo con el obstáculo señalado por Sierpinska en relación con la consideración del infinito. La formalización de la noción de límite es otra dificultad que consiste en mostrar que en la definición formal de límite se concibe un solo proceso, en tanto los estudiantes parecen ver dos, uno que se efectúa sobre la variable independiente y otro sobre los valores de la función.

Antes de presentar una aproximación histórica, es importante resaltar que acerca de la investigación de los obstáculos epistemológicos en el aprendizaje y la enseñanza del cálculo, para citar tan solo un ejemplo, en la tabla de contenido del Acta Latinoamericana de Matemática educativa, Vol. 28, de 2015, publicada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame, México, se encontraron 29 artículos acerca de investigaciones sobre el cálculo universitario, la educación en Ingeniería, el concepto de limite, el pensamiento variacional, las funciones, lo cual resalta la enorme producción investigativa en esta área de la educación matemática y en el 13 – ICME (International Congress on Mathematical Education) realizado en Hamburgo en el 2016 hubo un Topic Study Group, TSG dedicado al cálculo diferencial e integral en el que se abordaron temáticas de enseñanza, aprendizaje, dificultades, practicas, entre otras. Igualmente, en el CIBEM (Congreso Iberoamericano de Educación Matemática) realizado en julio de 2017 en Madrid.

2.2 Estado Del Arte

Este estado de arte se ha concebido como una sección del trabajo que intenta abordar la mayoría de categorías y elementos que toca la investigación, desde las concepciones de dificultades, conflictos y obstáculos hasta un seguimiento de las investigaciones de los marcos conceptuales que se han utilizado, de ahí su extensión, y, se ha decidido dejar en el marco teórico solamente aquello que guiará el análisis de los datos.

Contiene una revisión bibliográfica y de antecedentes investigativos acerca de elementos fundamentales en mi trabajo de tesis que trata acerca de los obstáculos epistemológicos, culturales, didácticos, semióticos,… que encuentran los estudiantes de primer semestre al acceder al cálculo diferencial. Presenta una revisión detallada de la noción de obstáculo epistemológico desde la tradición filosófica o epistemológica de Gastón Bachelard, da cuenta de su incursión en el campo de la educación matemática por G. Brousseau, como también de la ampliación y recapitulación por parte de Anna Sierpinska.

Después se plantean otras miradas y visiones actuales de nociones relacionadas con el concepto de obstáculo, tales como concepciones, errores, dificultades, misconcepciones, conflictos semióticos, y connotaciones particulares de esos constructos como culturales, didácticos, lingüísticos y simbólicos, entre otros.

Análogamente se presentan algunas reflexiones acerca de la transición o ruptura del algebra al cálculo, se describen algunas dificultades detectadas en esa transición y se profundiza en algunas tensiones disciplinares y de aprehensión cognitiva en el álgebra escolar y el cálculo diferencial. A manera de complemento y profundización respecto a los conceptos de obstáculo y ruptura epistemológica, se analizan los conceptos de revolución científica y otros relacionados tomados de la historia y la epistemología de la ciencia.

Teniendo en cuenta que en el análisis de los datos se hizo necesario utilizar elementos importantes del Análisis Didáctico planteado por el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática: EOS y cuya descripción se encuentra en el Marco Teórico, capítulo III, nos pareció importante revisar otros enfoques de Análisis Didáctico cuyas corrientes se esbozan en esta parte del Estado de Arte, con el fin de mostrar que existen otros acercamientos al análisis didáctico. Se cita a Carmen

Azcarate para fijarse cómo se analizan los datos en otras investigaciones, en las que se utiliza el análisis didáctico al estilo de Luis Rico, Pedro Gómez y Evelio Bedoya, inspirado en la fenomenología de lo didáctico de Hans Freudenthal

También en este estado de arte se hizo necesario incorporar una revisión histórica y epistémica acerca de algunas nociones relevantes del cálculo diferencial e integral, y las configuraciones sobre la derivada y el límite que otras investigaciones ya han logrado aportar en la educación matemática. Finalmente a través de una revisión detallada de las publicaciones del EOS de Godino, Batanero, Font y otros, del 2006 en adelante, se encontró una amplia gama de trabajos que han contribuido a fortalecer teóricamente el Enfoque Ontosemiotico y otras que han enriquecido la puesta en práctica de dichas teorías, pertinente su presentación en este estado de arte por cuanto actualiza y robustece este marco teórico y metodológico, algunos de cuyos elementos fueron fundamentales para el análisis de los datos.

2.2.1 Aproximación histórica desde la tradición filosófica

Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, que aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra. Jamás es inmediata y plena. Las revelaciones de lo real son siempre recurrentes. Lo real no será jamás "lo que podría creerse", sino siempre lo que debería haberse pensado. El pensamiento empírico es claro, inmediato, cuando ha sido bien montado el aparejo de las razones. Al volver sobre un pasado de errores, se encuentra la verdad en un verdadero estado de arrepentimiento intelectual. En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos, o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza la espiritualización. (Bachelard, 1938/2004, p. 15)

El término *obstáculo epistemológico* fue construido por el físico y filósofo francés Gastón Bachelard**,** quien postuló que la naturaleza no nos es dada y nuestras mentes nunca son vírgenes frente a la realidad, pues sea lo que sea que veamos, digamos u observemos está direccionado por lo que ya conocemos, pensamos, creemos o queremos ver (Bachelard, 1938/2004, p. 15).

Algunos de estos pensamientos, creencias y conocimientos pueden funcionar como un obstáculo a nuestra comprensión de los fenómenos. Nuestras generalizaciones pueden estar sesgadas por nuestra tendencia a generalizar el conocimiento en unas pocas leyes o principios de explicaciones que funcionan adecuadamente, como *todos los cuerpos caen,* o *la luz se propaga en línea recta*, o sobre metáforas adecuadas como *el aire es una esponja.*

Según Bachelard frente a lo real el alma no puede mostrarse ingenua; lo que cree saberse obstaculiza lo que debiera saberse y no es posible hacer tabla rasa de los conocimientos anteriores. “Cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu jamás es joven. Hasta es muy viejo, pues tiene la edad de sus prejuicios. Tener acceso a la ciencia es rejuvenecer espiritualmente, es aceptar una mutación brusca que ha de contradecir a un pasado” (Bachelard, 1938/2004, p. 16).

Para Bachelard, el obstáculo es un tipo de conocimiento ya disponible, a menudo instalado desde hace mucho tiempo en nuestra mente y que ya no percibimos como tal. Lejos de ser una dificultad mental, resulta de una facilidad intelectual que nos otorgamos, muy a menudo sin ser ya conscientes de ello. Y aunque la dificultad sea dolorosa, el obstáculo está confortablemente asentado, de tal forma que se vuelve a él constantemente.

Enunció algunos obstáculos en su obra: la experiencia básica o conocimientos previos, el conocimiento general, el obstáculo verbal, el conocimiento unitario y pragmático, el obstáculo sustancialista y el animista. Diremos algo en relación a algunos de ellos. (Bachelard, 1938/2004).

-La experiencia básica o conocimientos previos**:** La observación básica se nos aparece pintoresca, concreta, natural y fácil, no habría más que hacer sino describirla y maravillarse y así se cree comprenderla; afirma que entre la observación y la experimentación no hay continuidad sino ruptura. La observación particular se coloca por delante y por encima de la crítica, y carga de subjetividad las observaciones y se pueden tener concepciones erróneas, ya que las cosas se ven tal como nosotros queremos verlas y no como realmente son. Considera al pensamiento científico trabado desde su nacimiento por dos obstáculos en cierto sentido opuestos, lo particular y lo general. Describamos este último:

-El conocimiento general**:** Al explicar mediante el uso de generalizaciones un concepto, se cae, en la mayoría de las veces, en equivocaciones, porque los conceptos se vuelven vagos, e indefinidos, ya que se dan definiciones demasiado amplias para describir un hecho o fenómeno y se dejan de lado aspectos esenciales, es decir, los detalles, que son los que realmente permiten exponer con claridad y exactitud los caracteres que permiten distinguirlos y conceptuarlos correctamente.

Al generalizar, el niño sale del paso con una explicación sencilla que la aplica a toda una definición, de una forma resumida y concreta. Se dejan detalles de lado que son los que realmente le dan sentido a la definición y, sobre todo, le dan validez científica. Esboza el ya conocido ejemplo de “Todos los cuerpos caen”, y afirma que esas leyes generales bloquean el pensamiento pues contestan sin que se les pregunte. (Bachelard, 1938/2004, p. 73). Para el espíritu pre-científico, el verbo caer es suficientemente descriptivo, pues da la esencia del fenómeno de la caída y concluye, respecto a estos dos primeros obstáculos, que el espíritu científico puede extraviarse al seguir dos tendencias contrarias: la atracción de lo singular y la atracción de lo universal.

El conocimiento pragmático y utilitario: Para Bachelard, “la utilidad ofrece una especie de inducción muy particular que podría llamarse inducción utilitaria. Ella conduce a generalizaciones exageradas" (Bachelard, 1938/2004, p. 109). Esto obviamente lleva a concepciones erradas y reduce notablemente el significado del concepto. Todo pragmatismo, por el mero hecho de ser un pensamiento mutilado, lleva fatalmente a la exageración. El hombre no sabe limitar lo útil y ello, por su valorización se capitaliza sin cesar. El filósofo asocia este obstáculo a las visiones de mundo que se tienen y se comparten.

El utilitarismo plantea una serie de problemas a la hora de definir un término, pues existe la tendencia de reducirlo y sintetizarlo de tal manera que se pretende explicar o definir un concepto solamente mediante la idea de utilidad o beneficio. Al preguntar a un niño acerca de lo que es la electricidad, las nubes, el brazo, el aire, él se limita únicamente a mencionar los beneficios que tiene la electricidad. Todos los conceptos anteriores son manejados por los niños tomando como referencia la utilidad que tienen, y es lo que usan como principio para brindar las explicaciones sobre los diferentes términos, es decir, la utilidad es la razón que sirve de base para construir las definiciones.

-El obstáculo animista**:** Los niños tienen la tendencia de explicar ciertos fenómenos o definir ciertos conceptos haciendo analogías con la naturaleza animada: "los fenómenos biológicos son los que sirven de medios de explicación de los fenómenos físicos. Esta característica de valorizar el carácter biológico en la descripción de hechos, fenómenos u objetos, representan claramente el carácter del obstáculo animista" (Bachelard, (1938/2004, p. 186).

Algunas definiciones que ejemplifican esta tendencia son las siguientes: Vapor: Es un humo fantasma que traspasa las cosas, que se mueve pero que no se puede agarrar. En este caso, no definen el término, sino que utilizan una analogía imaginaria con un ser que es capaz de actuar por sí mismo, como si fuera un organismo vivo. Otros ejemplos son: Tornado: Es un remolino de viento muy bravo que se lleva las cosas que encuentra en el camino. Calor: Es lo que me hace sudar. La característica importante aquí es que las definiciones que dan acerca de los distintos conceptos están cargadas de propiedades vitales, estados anímicos y/o sensaciones.

-El obstáculo verbal: Se presenta cuando mediante una sola palabra o una sola imagen se quiere explicar un concepto, y se caracterizan así algunos hábitos puramente verbales como obstáculos del pensamiento científico. El considerar el aire como algodón, como lana, como esponja es muy apropiada para explicar el enrarecimiento y la compresión del aire.

"El peligro de las metáforas inmediatas en la formación del espíritu científico, es que ellas no son nunca imágenes pasajeras; ellas se dirigen siempre a un pensamiento autónomo: tienden a completarse, a terminar en el reino de la imagen" (Bachelard, 1938/2004, p. 97) … en ese orden de ideas los obstáculos más poderosos corresponden a las intuiciones de la filosofía realista. Esos obstáculos fuertemente materializados ponen en juego, no propiedades generales, sino cualidades sustanciales. Es en ellos, en una experiencia más sorda, más subjetiva, más íntima, donde reside la verdadera inercia espiritual. Es en ellos donde encontraremos las verdaderas palabras obstáculos.

Se cree que "al asociar a una palabra concreta una palabra abstracta" se hace avanzar el pensamiento, cuando en realidad lo que se ha presentado es un movimiento puro y simplemente lingüístico.

-Obstáculo Sustancialista**:** Se considera que es uno de los más difíciles de superar pues está apoyado en una filosofía fácil, cual es la monótona explicación de las propiedades por la sustancia. Ejemplifica con la adherencia de los cuerpos livianos a un cuerpo electrizado, imagen aislada e incompleta que no representa sino un momento del fenómeno total y del que el espíritu pre científico hará un medio absoluto de explicación y por tanto inmediato, fenómeno que será tomado como el signo de una propiedad sustancial: La mente se tornará poco a apoco impermeable a los desmentidos de la experiencia y "jamás se dudará de la cualidad glutinosa del fluido eléctrico" (Bachelard, 1938/2004, p. 122).

Estrictamente hablando es posible afirmar que Bachelard mismo nunca dio una definición rigurosa de obstáculo epistemológico, aunque sí dio muchos ejemplos tomados de la química y de la física del siglo XVIII y la física contemporánea y sugirió el uso de esta idea como psicoanálisis del pensamiento científico. Los obstáculos pueden ser encontrados en las tendencias humanas a las generalizaciones precipitadas o a las explicaciones de las cosas con metáforas familiares, o leyes universales tales como "todos los cuerpos caen" o aún, buscando una sustancia responsable para un fenómeno. Los obstáculos aparecen así en el proceso del cambio del pensamiento común al científico, en el proceso del cambio de una clase de racionalidad a otra clase de racionalidad.

Bachelard (1938/2004, p. 297) también se refirió al papel de la educación y de la escuela en esa búsqueda del espíritu científico al promulgar una cultura científica moderna. Visualizó la escuela continua a lo largo de la vida, la que funda y alimenta la ciencia, pero no aquella detenida en un periodo escolar sino aquella que incorpora la sociedad y por tanto la cultura y no al contrario. Enfatizó que en la ciencia sólo puede amarse aquello que se destruye, y sólo puede venerarse al maestro contradiciéndolo, es decir, formula una invitación abierta, crítica, franca a la indagación, a la conciencia, a la pregunta.

Bachelard construyó esta epistemología en 1938 y fue solo en el año 1976 cuando Brousseau la incorporó a la investigación en educación matemática en el marco de su teoría de las situaciones didácticas, en el marco de la Ingeniería Didáctica y de todo ese fenómeno didáctico que se dio en Francia en la década de los 70. Se describe brevemente el tránsito de esta noción hacia el campo específico de la investigación en educación matemática, que se tardó alrededor de 38 años.

2.2.2 Aproximación histórica desde la educación matemática

Ninguno de los ejemplos de obstáculo epistemológico dado por Bachelard se aplica a las matemáticas, como él mismo lo advirtió,[8] puesto que la matemática no es una ciencia natural, no trata acerca de fenómenos del mundo real, ni se basa en la observación y la inducción. Sin embargo, a partir del debate que desató la incorporación del concepto a la educación matemática, se empezó a creer que sí tenía sentido hablar de obstáculos epistemológicos en matemáticas, y que podían ser la explicación para eso que a diario se detectaba como obstaculizante en los aprendizajes de los estudiantes. Se buscaba un fundamento teórico para el nuevo concepto, y naturalmente transferir este concepto de las ciencias naturales a las matemáticas requería adaptaciones cuidadosas y profundas reflexiones filosóficas acerca de la naturaleza de las matemáticas.

Esta visión, a su vez, requería repensar la enseñanza y la valoración de las comprensiones de los estudiantes, lo cual relativizaba sus errores., pues algunos de ellos eran causados por formas de pensar completamente legitimas con una cierta estructura de la mente, un cierto contexto de problemas y ciertas creencias acerca de lo que es verdadero en matemáticas.

Emergió claramente entre algunos investigadores que algunas de las formas de comprensión de los estudiantes merecían más respeto y atención, y que en vez de tratar de reemplazar el conocimiento errado por el correcto, el esfuerzo de los profesores debería ser invertido en la negociación de significados, en la invención de problemas especiales en los cuales los estudiantes experimentaran un conflicto mental que los hiciera conscientes de que dichas formas de comprensión habituales, posiblemente no sean las únicas y que no son universales.

Brousseau (1983/1995) ya veía en la noción de obstáculo el medio de cambiar el estatuto del error mostrando que el error y el fracaso no tienen el papel simplificado que queremos a veces hacerles jugar, dado que el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son erráticos e imprevisibles, ellos se constituyen en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del profesor como en el del alumno, el error es constitutivo de sentido del conocimiento adquirido.

Distinguió, tres orígenes fundamentales de los obstáculos encontrados en la enseñanza matemática:

- *Un origen ontogenético, debido a las limitaciones impuestas, por el nivel de desarrollo de las capacidades cognitivas de los alumnos, en el proceso de enseñanza.*
- *Un origen didáctico, debido a las decisiones del sistema educativo, o las acciones del profesor en el proceso de enseñanza.*

---

[8] "…En efecto, la historia de las matemáticas es una maravilla de regularidad. Ella conoce pausas. Ella no conoce los periodos de errores. Ninguna de las tesis que sustentamos en este libro apunta hacia el conocimiento matemático. No se refieren sino al conocimiento del mundo objetivo". Pág. 25

- *Un origen epistemológico, por los obstáculos ligados a la naturaleza del conocimiento mismo y que son propios de él, se repiten en la historia, muestran su persistencia y dificultad para evolucionar, es decir los obstáculos en el sentido de Bachelard.*

Todo un programa de investigación empezó a desarrollarse alrededor de la noción de obstáculo epistemológico. Como un ejemplo de lo anterior se cita la tesis sobre el aprendizaje de la noción de límite sustentada por Cornu en 1983 y los trabajos de Sierpinska (1994) que la prolonga, quien se propone descubrir los obstáculos epistemológicos ligados a las matemáticas que se enseñan en la escuela y encontrar los medios didácticos para ayudar a los alumnos a superarlos, conservando dos aspectos de la noción de obstáculo epistemológico según Bachelard (1938/2004): el carácter inevitable de su aparición, y la repetición de su aparición en la filogénesis y la ontogénesis de los conceptos. Reafirma a partir de esta investigación, que aquello que está en la base de cualquier clase de obstáculo epistemológico, es su aparición inevitable y su resistencia en la historia de los conceptos considerados.

Según Sierpinska (1994, p. 133)[9] las investigaciones se enfocaron entonces en el diseño de situaciones de enseñanza, - ingeniería didáctica la llamaron los franceses-, que proveyeran condiciones favorables para la superación de obstáculos epistemológicos y posibilitaran así una comprensión mejor y más profunda de los conceptos matemáticos. En esa tendencia prácticamente se identificó comprensión con superación de obstáculos. En la necesidad de explicar las dificultades de comprensión en matemáticas que se evidencian en los estudiantes, se llegó a concluir que estas dificultades no dependían solamente de la falta de experiencia con las matemáticas, ni de las habilidades o destrezas que puedan o no tener, ni de la idiosincrasia de su pensamiento aún inmaduro, sino también de la naturaleza de los conceptos matemáticos mismos y de la cultura en la cual estos han sido desarrollados.

Es entonces cuando el concepto de "obstáculo epistemológico" de Bachelard se vuelve muy importante, puesto que el pensamiento de los estudiantes parece padecer de ciertos obstáculos epistemológicos que deben ser superados si se quiera que emerja una real comprensión en matemáticas. Estos obstáculos epistemológicos – formas de comprensión basadas en algo inconsciente, esquemas de pensamiento culturalmente adquiridos, creencias no cuestionadas acerca de la naturaleza de las matemáticas y de categorías fundamentales como número, espacio, causa, infinito, … inadecuadas con respecto a teorías actuales- direccionaron el desarrollo de los conceptos en la historia y han permanecido de alguna manera en su significado.

Se concentró así la investigación, desde una cierta tendencia, en detectar los obstáculos epistemológicos y precisar su concepto y se formulan entonces varias preguntas: ¿Sobre qué bases podemos afirmar que el pensamiento de los estudiantes sufre obstáculos epistemológicos? ¿Es un obstáculo epistemológico un error, una mala comprensión, una incomprensión, o sencillamente una cierta forma de conocer que funciona en algunos dominios restringidos, pero se revela inadecuada

[9] Understanding in Mathematics. Edición inglesa de 1994. Obra publicada en inglés, de la cual la autora de este artículo ha elaborado ya una traducción, en particular del capítulo IV.

en otros? ¿O es una actitud de la mente que permite tomar opiniones por hechos, y unos pocos casos de evidencia por leyes generales? Es esta la temática que emprende Anna Sierpinska, cuyas ideas principales se describen a continuación.

A partir de la observación de dos parejas de alumnos identificando la tangente como límite de una secante variable, y encontrando la ecuación de la tangente de una curva representativa de la función seno en el origen, Sierpinska (1994) propuso una lista de cinco grupos de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite:

- *Horror al infinito*, que reagrupa los obstáculos ligados al rechazo al estatuto de operación matemática para el paso al límite, la transferencia automática de los métodos del álgebra propuesto para manipular magnitudes finitas a las magnitudes infinitas, la transferencia de las propiedades de los términos de una serie convergente a su límite, y finalmente el obstáculo que consiste en asociar el paso al límite a un movimiento físico, a una aproximación.
- *Los obstáculos ligados al concepto de función***:** no visualización de la noción de función subyacente, restricción de una sucesión de valores, reducción monótona, no distinción de la noción de límite y de extremo inferior o inferior.
- *Los obstáculos geométricos:* la intuición geométrica hace "*un obstáculo serio en la formulación de una definición rigurosa, tanto al impedir la determinación de aquello que debiera comprenderse por la diferencia de dos magnitudes como por un apego de la noción de límite a la noción de extremo de un conjunto*".
- *Los obstáculos lógicos:* ligados a la borradura de los cuantificadores o de su orden.
- *El obstáculo simbólico*: ligado a la reticencia a introducir un símbolo específico para la operación del paso al límite.

Y concluye que de esos trabajos se obtiene la impresión que aquello que está en la base de cualquier clase de obstáculo epistemológico es su aparición y su resistencia en la historia de los conceptos considerados, así como la observación de concepciones análogas en los alumnos.

La aparición de la noción de obstáculo epistemológico en educación matemática muy pronto empezó a funcionar como una categoría, entendiendo esta como una noción que, aunque no está en el desarrollo de un dominio científico es suficientemente general y potente para direccionar el pensamiento y determinar un campo de investigación a su alrededor:

> *El pensamiento humano...tiende a organizar sus problemas alrededor de ciertas nociones que yo llamo categorías...Estas no son características invariables de nuestro intelecto y aunque no tienen un carácter de universalidad ni de necesidad, sí tienen el rango suficiente para direccionar el pensamiento. No tienen un carácter formal, pero sí un alto grado de generalidad que les permite ser aplicadas en varios dominios. Cada categoría se acompaña normalmente de otras palabras y frases usualmente usadas, de moda, que con frecuencia a los ojos de los autores dan más cientificidad, seriedad o modernidad a sus textos. Una categoría juega un doble rol. De una parte, estructura el campo teórico de investigación, permaneciendo en el*

> *centro y siendo el objeto de análisis mismo. De otra parte, es para esta categoría que el investigador busca explicar diversas cuestiones. En todo caso la principal función de una categoría es que direcciona el pensamiento*. (Skarga, 1989, citado en Sierpinska, 1994, p. 108-109)

Y eso es precisamente lo que pasó con la noción de obstáculo epistemológico: empezó a direccionar el pensamiento; todo un programa de investigación empezó a desarrollarse a su alrededor, mientras que se llevaban a cabo debates entre los teóricos acerca de la naturaleza de tales obstáculos epistemológicos, sus posibles definiciones, y la coherencia y racionalidad de importarlo de las ciencias naturales a la matemática.

Sierpinska (1994) llega a la teoría de los obstáculos epistemológicos a través de la conceptualización que ella hace de los actos de comprensión y de "comprensión o entendimiento en matemáticas". Postula de entrada que en educación matemática comprender significa "comprender bien".

Distingue tres acercamientos principales hacia esta comprensión. El primero se centra en el desarrollo de materiales de enseñanza, otro en diagnosticar la comprensión de los estudiantes, y otra más teórica, que se centra en los modelos de construcción de este aprendizaje.

Así mismo afirma que hay por lo menos cuatro clases de tales teorías o modelos. Una de ellas se centra en una jerarquía de niveles de comprensión, (Van Hiele, Freudenthal…) Otra que se centra en modelos conceptuales, estructuras cognitivas (Dubinsky y Lewin, descomposición genética). El tercero mira los procesos de aprendizaje como un juego dialéctico entre dos maneras de distinguir los objetos de comprensión. La cuarta clase puede ser llamada la aproximación histórico-empírica, en el que la atención se centra en los obstáculos a dicha comprensión, obstáculos encontrados tanto en la historia del desarrollo de las matemáticas como en la comprensión de los estudiantes mismos. Es precisamente esta última aproximación la que desarrollaremos en este escrito por cuanto se centra en los obstáculos epistemológicos. (Ver Sierpinska, capitulo IV, 1994)

La aproximación histórica-empírica a la comprensión en matemáticas en Sierpinska (1994, p. 120) se acerca a la tomada por Piaget y García en su "Psicogènesis e Historia de la Ciencia", para quienes el problema esencial es:

> *Cómo caracterizar las etapas importantes en la evolución de un concepto, de una estructura o aún de una perspectiva relativa a una disciplina particular, independientemente de aceleraciones y regresiones, el impacto o precursores de rupturas epistemológicas… El problema central, en efecto está en la existencia misma de esas etapas, y particularmente en la explicación de su secuencia*.

Es decir, según ellos, uno de los mecanismos del desarrollo conceptual es la secuencialidad en su construcción, entendiendo por secuencialidad que cada etapa es a la vez el resultado de posibilidades abiertas por las etapas anteriores y condición necesaria para las siguientes. Dado que cada nueva etapa comienza con una reorganización, en otro nivel, de formas de comprensión construidas en las etapas previas, la comprensión de las primeras etapas se encuentran integradas en aquellas de niveles superiores, por tanto, los significados de estas etapas tempranas no se pierden sino que están implicados en los futuros aprendizajes; lo cual también es posible identificar en la historia.

Otra relación que se encuentra entre la comprensión de los estudiantes y aquella encontrada en la historia de la ciencia y las matemáticas es el rol que han tomado algunas palabras que se han convertido en categorías de pensamiento. Sierpinska (1994, p. 122) lo explica de dos maneras: la racionalización (que se da cuando una palabra o expresión se convierte en un término científico incluido en una teoría) y la metaforización (cuando la palabra adquiere un sentido figurado o metafórico, que hace parte del común). Por ejemplo, la noción de masa en la física ha pasado del significado ordinario de algo grande o pesado, al sentido newtoniano que lo relaciona con la fuerza y la aceleración, al sentido que le otorga la teoría de la relatividad, incluso hasta el concepto de masa en la teoría de Dirac. Bachellard describe estos pasos como etapas de racionalidad.

En el terreno del lenguaje ordinario (vernacular) nos referimos a un cuerpo de materia que pesa, también hablamos de masa de gente. Lo mismo podemos decir de otras categorías como números, infinito... La racionalización y la metaforización son procesos que van por caminos diferente. Mientras la primera rompe con las tradiciones lingüísticas y ontológicas que las palabras cargan, la metaforización las preserva de maneras que, si bien no son literales, mantienen una carga semántica y valorativa muy fuerte. Estos dos procesos están íntimamente ligados con la descripción que hace Bachelard del obstáculo verbal.

En general Sierpinska se propone valorar como más significativo un acto de comprensión que otro, si hay superación de obstáculos, sean estos epistemológicos o de desarrollo, culturales, relacionados con la madurez del proceso hacia el conocimiento científico. Se ilustra con un ejemplo (Sierpinska, 1994, p. 124):

"Cuando se introduce la noción de la potencia cero y por definición se dice que $a^0=1$*, algunos estudiantes sencillamente adicionarán esta información a otras reglas matemáticas conocidas por ellos, sin pensar mucho en esta definición. Otros lo aceptarán como una convención útil que les sirve para preservar la continuidad de la función* $y = a^x$*. Pero habrá quienes se rebelarán en contra diciendo que la notación* $a^0 = 1$ *no tiene ningún sentido, si tomar la potencia significa multiplicar por sí misma una cantidad* $n - 1$ *veces."*

En ese momento la conceptualización de la potenciación como una multiplicación repetida, (esquema tradicional de las clases convencionales en las que se estudia la potenciación), se convierte en un obstáculo para comprender la función exponencial. Esto implica una revisión de la noción de potenciación, para superar el obstáculo, lo cual involucra una construcción y no solamente una memorización del concepto de función exponencial. Se relaciona explícitamente con las dificultades evidentes que se tiene en matemáticas con "lo dado" y las definiciones por decreto, sin ninguna argumentación que las sustente.

Pero, para la educación matemática lo que es esencial son exactamente estas aceleraciones y regresiones, citadas por Piaget y García, y las rupturas epistemológicas, tanto como los obstáculos epistemológicos y las dificultades, porque se supone que comprender y aprender es superar obstáculos. Para Sierpinska, decir entonces que la equilibración ha de obtenerse finalmente, constituye una trivialidad, pues sin desestabilizar primero las estructuras cognitivas de los estudiantes, ningún aprendizaje de algo radicalmente nuevo podrá ocurrir: la construcción de sentido y de significados está determinada más por el impacto negativo de varias normas y creencias y caminos de pensamiento que constituyen obstáculos para dicho cambio.

En cuanto a su filosofía de los obstáculos epistemológicos, reafirma los principios de Bachelard en la investigación en educación matemática y enuncia ejemplos de las matemáticas, al decir que el primer supuesto de los obstáculos epistemológicos es que, de un nivel de conocimiento y comprensión a otro, hay una necesidad de integración y reorganización. La cognición no es un proceso acumulativo. Las nuevas comprensiones pueden solamente ser parcialmente construidas sobre caminos de desarrollo previos.

Por ejemplo, cuando se pasa de los números naturales a los números enteros, o de la aritmética al álgebra debemos romper, para el arrepentimiento intelectual, parodiando al epistemólogo francés, una reorganización de entendimientos previos. Mientras que los enteros pueden ser considerados como una generalización de los números naturales, debemos tener en cuenta que ni la comprensión ni el desarrollo de los niños en los primeros años de la escuela han de servir de inmediato para esta generalización.

Los estudiantes no distinguen los números naturales como una estructura equipada con ciertas operaciones, ni su propiedad de no ser cerrado bajo algunas de ellas. Pero es precisamente tal comprensión la que se vuelve una base para la generalización. Las cantidades de manzanas o bizcochos y las operaciones usuales que hacemos con los niños no pueden servir como una base para entender la estructura de anillo de los enteros, y esto es casi lo que se espera de ellos cuando les decimos que menos por menos da más. Los enteros son apenas un primer paso en el álgebra, la cual, lejos de ser la generalización de la aritmética es una metodología de las matemáticas: la aritmética, desde el punto de vista del algebra es ya la teoría de números.

Con su investigación Sierpinska reafirma también el otro supuesto de la filosofía de los obstáculos epistemológicos: que no podemos hacer metafísica de la comprensión científica, lo cual significa que los obstáculos epistemológicos son inevitables (Sierpinska, p. 126). Nuestras creencias acerca de la naturaleza del conocimiento científico, nuestras visiones de mundo, imágenes que tomamos y que están impresas en el lenguaje que usamos, esquemas de pensamiento, todo ello forma un punto de partida para nuestro manejo de los problemas científicos tanto que ellos desvían nuestros acercamientos y soluciones. Ellos se vuelven apoyos, pero también obstáculos para un buen entendimiento. Su superación requiere una reconstrucción de comprensiones fundamentales.

Se aclara también que se tiene la creencia que los obstáculos epistemológicos aparecen más en aquellas áreas de conocimiento experimentales y concretas, y, por tanto, parecería, a priori, que el conocimiento matemático abstracto es menos dado a sufrir de obstáculos epistemológicos; sin embargo, ese no es exactamente el caso. La historia de las matemáticas es ilustrativa en tal sentido: la creencia de los Griegos en la conmensurabilidad de los segmentos; la evidencia puesta en los postulados de la geometría euclidiana; las intuiciones anteriores a Bolzano-Weiertrass acerca de la diferenciabilidad y continuidad de ciertas funciones, casos en los que en efecto, todas nuestras operaciones fundamentales de entendimiento interactúan y los actos cruciales de comprensión consisten básicamente en la superación de obstáculos.

Sierpinska relaciona también tensiones culturales y desarrollo de la comprensión al concebir la comprensión determinada tanto por la cultura como por el desarrollo; evidencia claramente su postura no radicalmente cognitiva para explicar la comprensión de la matemática. En tal sentido afirma entre otras cosas, que lo que una persona comprende no es independiente de su etapa de desarrollo, ni del lenguaje en el cual se comunica, ni tampoco de la cultura en la cual ella se socializa.

Al desarrollo le competen conceptos espontáneos formados a través de la madurez mental y física y la socialización informal fuera de la escuela, en tanto que a la instrucción se le asocia con conceptos científicos que son producto de una cultura y que sólo pueden emerger en el proceso de instrucción. Tanto en la instrucción como en el desarrollo hay momentos críticos: esos momentos gobiernan lo que precede y lo que sigue.

Para encontrar las raíces culturales de los obstáculos epistemológicos, Sierpinska se basa en la teoría del desarrollo cultural de Vigotsky y en la de la cultura de E.T. Hall. El primero guía a la idea que los primeros aprendizajes del niño de las nociones matemáticas se vuelven obstáculos epistemológicos en el pensamiento del adolescente, teoría en la que no profundizaré, por no dispersar la atención del punto central de la investigación, en tanto que la teoría de Hall señala cómo los obstáculos epistemológicos se crean, cómo funcionan en una cierta comunidad científica y cómo son transmitidos por la socialización y la educación, al concebir que lo que los niños complejizan y los adolescentes conceptualizan, o lo que cada uno de ellos intenta comprender y cómo lo logra, depende no solamente de las particularidades del cerebro humano y de las tensiones del desarrollo genético sino también, y más que todo, de la cultura en la cual cada uno es socializado.

Se fundamenta en la teoría cultural de Hall para darle sustento a su postura y para buscar el semillero de los obstáculos epistemológicos. Es pertinente entonces enunciar algunos elementos básicos de tal aproximación cultural en lo que ha sido denominado la Triada Cultural de Hall.

Hall en su teoría de la cultura provee una estructura apropiada en la que explica el obstáculo epistemológico como un fenómeno cultural. También Sierpinska cita a Foucault con su noción de *episteme* y su *arqueología del conocimiento,* de quien afirma mira la cultura diacrónicamente y no sincrónica o espacialmente como lo hace la teoría de Hall. Se cita aquí exclusiva y específicamente para plantear su visión acerca de los obstáculos epistemológicos.

Foucault señala que los obstáculos epistemológicos han sido cultivados en todo aquello que en la ciencia ha sido tomado inconscientemente por garantizado. Pero Foucault ve esta inconciencialidad de una manera positiva: los obstáculos son, contrario a las connotaciones negativas que cargan la palabra, positivos en el sentido que ellos constituyen la base para el espacio epistemológico que determina las clases de preguntas científicas y los caminos de aproximación.

> *De una parte, la historia de la ciencia traza el progreso hacia el descubrimiento, la formulación de problemas, y abre camino a la controversia… esto describe los procesos y los productos de la conciencia científica. Pero, de otra parte, trata de restaurar lo que elude la conciencia, la influencia que lo afecta, la filosofía implícita que le subyace, las temáticas no formuladas, los obstáculos no vistos…esto describe los obstáculos inconscientes. Esta inconsciencia es siempre la parte negativa de la ciencia, la que resiste, la que la desvía, la que la perturba. Lo que yo quisiera hacer, sin embargo, es revelar una inconsciencia positiva del conocimiento: un nivel que elude la conciencia de un científico y que aún es parte del discurso científico en vez de disputar su validez y disminuir su naturaleza científica. Lo que era común en la historia natural, en la economía y en la gramática del periodo griego fue ciertamente no presentar a la conciencia de los científicos…pero desconocido para ellos, los naturalistas, economistas y gramáticas emplearon las mismas reglas para definir los objetos de su propia disciplina de estudio, para formar sus conceptos, para construir sus teorías. Son estas reglas de formulación las que nunca formularon de manera correcta, sino que son encontradas únicamente diferenciando extensamente teorías, conceptos y objetos de estudio, que yo he tratado de revelar aislando sus lugares geométricos, en un nivel que yo he llamado, algo arbitrariamente quizás, arqueológico*. (Foucault, 1973, p. xi, citado por Sierpinska, 1994, p. 135)

Hall describe la cultura como una forma de comunicación, unos comportamientos aprendidos y compartidos. Habla de la triada cultural: tres niveles en que el hombre experimenta al mundo, tres formas de transmitir esta experiencia a los niños, tres tipos de conciencia, tres clases de relaciones emocionales con las cosas. *La formal, la informal y la técnica.*

El nivel formal es el nivel de las tradiciones, convenciones, opiniones no cuestionadas, costumbres y ritos sancionados que no piden justificación. El nivel informal es el nivel de los esquemas de pensamiento y comportamiento usualmente desarticulados. Nuestras formas de mecanografiar, montar en bicicleta, esquiar pertenecen a este nivel que se adquiere por imitación, práctica y participación en la cultura misma y no siguiendo un conjunto de instrucciones. Frecuentemente no toman aquí lugar procesos de enseñanza-aprendizaje. En el nivel técnico, el conocimiento se formula explícitamente: es un conocimiento analítico, tendiente a ser coherente desde el punto de vista lógico y racionalmente justificado.

También en la cultura matemática se evidencian tres niveles de experienciar el pensamiento matemático, tres maneras de transmitir esta experiencia a los otros, tres tipos de conciencia, tres maneras de relacionarnos: la formal, la informal y la técnica. Asumamos que el nivel técnico de la cultura matemática es el nivel de las teorías matemáticas, del conocimiento que es verbalizado y justificado de tal manera que es aceptado por la comunidad de matemáticos.

El nivel formal de la cultura matemática puede considerarse como el nivel de las creencias, convicciones y actitudes hacia la matemática, ideas acerca de su naturaleza, de su relación con la realidad, etc. Entonces el conocimiento y la comprensión informal son así un soporte indispensable de todo pensamiento creativo en matemáticas.

Lo que es considerado como obvio y natural, lo que es incuestionado determinará de alguna manera lo que será considerado problemático. En el nivel informal puede imprimirse el mismo como un esquema de pensamiento, un hábito tan natural que se vuelve parte de nosotros mismos. ***Los niveles formales e informales son, entonces, el semillero de los obstáculos epistemológicos.***

El progreso del nivel técnico requiere siempre superar hábitos intelectuales y todo aquello que hemos considerado verdades infalibles: "las vacas sagradas de nuestras mentes". Al mismo tiempo, desprovistos de nuestras creencias, convicciones y esquemas de pensamiento, estaríamos incapacitados ante cualquier tarea intelectual.

De otra parte, sin embargo, este mismo conocimiento y formas de entendimiento, como no son del todo conscientes y están marcados por la experiencia de situaciones concretas, pueden guiar nuestro pensamiento en nuevas situaciones que no nos llevará a la solución de los problemas: podemos inconscientemente aplicar reiteradamente el mismo esquema de acción, desconcertados de que de pronto ya no nos sirve porque seguimos fallando. Entonces a partir de la sensibilización y la conciencia de lo que nos obstaculiza podremos superar el obstáculo y cambiar viejas formas de comprensión.

Hasta aquí la recopilación en la historia y las investigaciones en educación matemática que desató el concepto introducido por Brousseau y la mirada de Anna Sierpinska. A continuación, algunos constructos teóricos asociados al concepto de obstáculo.

2.2.3 Visiones y perspectivas actuales en la educación matemática relacionadas con la noción de obstáculo

Existen diversos investigadores, enfoques y escuelas que han trabajado con nociones que tienen una estrecha relación con el concepto de obstáculo epistemológico, y que han extendido su significado a otros ámbitos no solamente cognitivos sino culturales, didácticos, semióticos, …. A continuación, nombro algunas de esas nociones que se profundizaron en detalle en el Estado del Arte. En primer lugar, está el término de *concepción* de Michele Artigue, en segundo lugar, la terminología de *error* según el enfoque de Luis Rico; seguida de la perspectiva sociocultural de la matemática y su concepción de *obstáculos culturales y didácticos* de Luis Radford. A continuación, se cita la perspectiva de "El enfoque ontosemiotico de la cognición matemática", EOS, de Juan Díaz Godino, Vicenc Font y otros, con su constructo de conflicto semiótico y sus tipos. Finalmente, y sin pretender ser exhaustiva, la mirada de Bruno D'Amore con una visión renovada del termino *misconcepción.*

Es ingenuo pensar que el concepto de obstáculo epistemológico sólo tiene defensores e investigadores fervientes que encausan todos sus esfuerzos alrededor de esta categoría. Todo lo contrario. El término ha suscitado polémica, debates, se le ha asociado con una carga semántica fuerte en el sentido negativo de barrera intraspasable y el adjetivo epistemológico ha desatado por su parte una serie de posturas divergentes pues lo asocian más a una postura estricta y radicalmente cognitivista que deja de lado la cultura como elemento fundamental en la construcción y socialización del saber, siendo que epistemológico para Bachelard es la connotación que dirige al sujeto hacia el espíritu científico, hacia el acto del conocimiento, postura compartida en esta investigación.

2.2.3.1 Concepción

Michelle Artigue utiliza el término «*concepción*», término que, como el de obstáculo, ha trazado su camino en la literatura didáctica, al menos en Francia, suscitando también pasión, aunque un poco menos que la noción de obstáculo, pero ampliamente trabajada por la comunidad.

En este parágrafo, se intenta restaurar la trayectoria de esta noción en la comunidad didáctica francesa, para poner en evidencia sus relaciones a la vez epistemológicas y cognitivas y para evocar, muy brevemente, el problema de su supervivencia en la escena de una teoría antropológica como la desarrollada por Chevallard. La noción de concepción responde a dos necesidades distintas: (Delgado, 1998).

1. Poner en evidencia la pluralidad de los puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que les son asociados a ellas, y poner en evidencia su adaptación más o menos buena a la resolución de tal o cual clase de problemas.
2. Ayudar al didacta a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica propiciada por los modelos empiristas del aprendizaje, y permitirle diferenciar el saber que el profesor va a transmitir y los conocimientos efectivamente construidos por el alumno.

Este término «*concepción*» va a aparecer en la literatura didáctica, importado en cierto modo del lenguaje corriente, sin que de parte de los autores se sienta la necesidad de dar una definición didáctica de él.

La palabra «concepción» se usa aquí en el sentido de Artigue (1984), para establecer una distinción entre el objeto matemático que es único y las significaciones variadas que le pueden asociar los estudiantes, a medida que su conocimiento va evolucionando hacia un estatus superior. La identificación y caracterización de las concepciones que los estudiantes construyen, a medida que avanzan en el estudio de las matemáticas, es un tema que ha despertado el interés de los investigadores en didáctica de las matemáticas porque, como se ha señalado (Brousseau, 1998, p. 142), son conocimientos que, en algunos casos, se constituyen en obstáculos para el aprendizaje, en torno a los cuales se reagrupan los errores recurrentes. Gómez (2000), afirma que además el estudio de las concepciones permite conocer el efecto de la enseñanza al determinar qué es lo que realmente están aprendiendo los estudiantes y tomar decisiones al respecto.

Propone también que hay diferentes concepciones previas derivadas del constructivismo, que sostiene que la mente del alumno no es una página en blanco: el alumno tiene un saber anterior, y estos conocimientos anteriores pueden ayudar al nuevo conocimiento, pero a veces son un obstáculo en la formación del mismo. El conocimiento nuevo no se agrega al antiguo, sino que lucha contra él y provoca una nueva estructuración del conocimiento total. Los errores cometidos por los alumnos en matemática son una manifestación de esas dificultades y obstáculos propios del aprendizaje, y se acepta unánimemente que es necesaria la detección y análisis de los mismos, y su utilización positiva en una suerte de realimentación del proceso educativo.

Estos conceptos previos, según Ausubel (1986, p. 61) y Pozo (1989, p. 28), son muy estables y resistentes al cambio, ya que por lo general son compartidos por muchas personas de diferentes edades, contextos culturales, formación y países. Además, muestran una serie de características relacionadas con el origen que tengan. De acuerdo con esto, Pozo (1989, p. 34), los clasifica en tres grupos:

- *Concepciones espontáneas*: Se forman por las percepciones sensoriales que tienen los niños acerca del mundo que les rodea y de hechos de la vida cotidiana. Ejemplo, al preguntar ¿Qué es el aire? Un niño de siete años responde: aire es el viento que sopla. Es frío y mueve las hojas de los árboles. Calor: Es algo caliente que produce el sol y que nos quema. Estado líquido: Es todo lo que se puede tomar y cuando se pone en un trasto se mueve y se puede regar. En estos casos es evidente la influencia de las percepciones sensoriales, las descripciones las realizan los niños con base en sensaciones y dejan de lado la definición científica y el lenguaje empleado por el maestro en la escuela, similar al obstáculo animista de Bachelard.

- *Concepciones inducidas*: Son creencias inducidas debido a procesos de socialización. Estas concepciones se originan en el entorno familiar, social y por la influencia de los medios de comunicación.[10] Ejemplos: A un niño de ocho años se le pregunta: ¿Qué es trabajo? Su respuesta fue: "*Trabajo: es lo que hacen las personas para ganarse la vida*" No hacen referencia al concepto físico de trabajo. Es obvia la influencia de la concepción social de trabajo. De lo cotidiano, de lo que las personas comprenden como trabajo en su medio familiar. Utilizan el homónimo que hace referencia a lo más cercano, a lo que viven diariamente.

- *Concepciones analógicas:* Se derivan de las comparaciones que se realizan con hechos de la vida cotidiana, así la comprensión del concepto se basa en la formación de analogías generadas por los propios alumnos en su entorno familiar o en la escuela. Ejemplos: Al

---

[10] Estudio de las concepciones de los alumnos, según la cual los estudiantes construyen sus ideas, sus representaciones de la realidad, a partir de sus propios referentes, su medio ambiente y su "lógica" ----cercana al sentido común---- que es distinta de la del profesor y de la de la ciencia.

preguntar a un alumno de ocho años: ¿Qué es el movimiento? Responde: Es como un trompo que da vueltas. Aquí no lo define, sino que hace una comparación para explicar el concepto. En este y otros ejemplos, los alumnos no logran dar una definición científica del término, sino que lo que hacen es hacer comparaciones, para poder explicarlos. Estas ideas previas que tienen estos niños influyen en su pensamiento sobre estos temas, están muy arraigadas en ellos e influyen en su proceso de aprendizaje.

2.2.3.2 Errores

Otra tendencia que se encuentra al revisar la literatura es la mirada dirigida hacia la noción de error, trabajada fundamentalmente por Luis Rico. Se presentan a continuación algunas visiones de la concepción de error encontradas en distintas perspectivas, que muestran sobre todo el paso de una connotación descalificativa a una apuesta por ser la fuente de explicaciones acerca del aprendizaje de los individuos.

Hay una pluralidad de aproximaciones teóricas acerca de las causas de los errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

La preocupación por el concepto erróneo, por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que puede desempeñar en el dominio y avance de la ciencia, ha ocupado parte importante de las reflexiones de filósofos de la ciencia y epistemólogos: Popper, Bachellard, Russell, Lakatos.

En todo caso se concibe el error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento. Las organizaciones insuficientes o deficientes, las hipótesis tentativas, las conceptualizaciones incompletas son parte del acceso al conocimiento y forman parte del modo de conocer.

Si los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero, concluiremos que en el proceso de construcción de los conceptos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y el proceso de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación, mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones, (Rico 1998, p. 75).

Acerca de la conceptualización de los errores se ha llegado a concluir que: pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje, no aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente basado sobre conocimientos adquiridos previamente, cualquier teoría de instrucción debe modificar la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes de los mismos, todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, al cometer un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarle a completar el conocimiento y llevarlo a la comprensión.

Rico (1998, p. 84) enuncia algunas características generales como consideran los errores distintas tendencias actuales:

- Los errores son sorprendentes, extremadamente persistentes y resistentes a cambiar por sí mismos ya que puede requerirse una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos.

- Pueden ser de dos tipos: sistemáticos o por azar. Los primeros son mucho más frecuentes y se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera como correcto. Los errores por azar reflejan falta de atención y lapsus ocasionales, que tienen relativamente poca importancia.
- Ignoran el significado al no cuestionar el significado espontaneo que se le dan a símbolos y conceptos con que se trabaja (Rico, p. 1998) y surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente.
- Cualquier teoría de instrucción debe modificar la tendencia a condenar los errores y a culpabilizar a los estudiantes de los mismos, sin perder de vista que todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores.
- Al cometer un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarle a completar el conocimiento y llevarlo a la comprensión.

Rico (1998, p. 84) afirma que Brousseau, Davis y Werner señalaron tres vías mediante las cuales se presenta el error:

- Ellos son el resultado de concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de la matemática, resultan de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado o cuando los alumnos utilizan procedimientos imperfectos y concepciones inadecuadas, y requiere invención de métodos propios y originales para resolver una tarea específica.

En todo caso, emerge con claridad que los errores pueden ayudarnos a investigar cuestiones abstractas relativas a la naturaleza de las matemáticas, a las que es difícil acercarse por otra vía.

En cuanto a las técnicas de análisis para el estudio de los errores en las investigaciones se distinguen cuatro estrategias (Rico, 1998, p. 99): Contar el número de soluciones incorrectas, es cercano al llamado método psicométrico, analizar los tipos de errores cometidos, analizar patrones de error para revelar errores sistemáticos y construir problemas que provoquen errores en los alumnos.

Afirma Rico (100) que muchos estudios se han situado en la tendencia del análisis psicométrico y cita a Nesher quien realiza el análisis de patrones de errores como síntomas de concepciones deficientes o inadecuadas: misconcepciones.

Esta noción de concepción deficiente señala una línea de pensamiento que causa una serie de errores, todos procedentes de una premisa incorrecta subyacente, en vez de errores esporádicos, desconectados y no sistemáticos. Aclara que la mayor parte de los estudios informan sobre la clasificación de errores y su frecuencia, lo cual no explica su origen y por tanto no pueden tratarse sistemáticamente.

Estas consideraciones acerca del error muestran sobre todo el paso de una connotación descalificadora a una apuesta por ser la fuente de explicaciones acerca del aprendizaje de los individuos.

Avancemos hacia otra mirada a los obstáculos en la perspectiva de la teoría de la objetivación cultural

2.2.3.3 Obstáculos culturales y didácticos

Luis Radford (2007), desde una perspectiva Socio-cultural de la matemática, afirma que una de las principales características de la aproximación histórico-cultural al pensamiento matemático es el componente histórico, lo cual significa, entre otras cosas, que aquello que conocemos y el modo con el cual llegamos al conocimiento deben enmarcarse no sólo por medio de aquello que hacemos ahora y cómo lo hacemos, sino también por una inteligencia histórica que reposa en prácticas sociales, instituciones, lenguaje, artefactos, libros, monumentos, etc.

El conocimiento y el conocer son ambos sostenidos por esta inteligencia histórica que hemos heredado de las generaciones pasadas. Ese es el motivo por el cual los profesores deben conocer algo de la historia de la matemática. La historia nos hace conscientes del hecho de que no somos ni el producto exclusivo de nuestras actividades, ni el producto irrevocable de nuestras prácticas discursivas. La historia de la matemática es un medio para comprendernos a nosotros mismos como seres históricos y comprender nuestra responsabilidad de educadores.

De acuerdo con esta aproximación histórico-sociocultural, el conocimiento está relacionado con las actividades en las cuales los sujetos se ocupan y esto debe ser considerado en relación con las instituciones culturales del contexto que se esté estudiando. Aquello que hace que un obstáculo sea epistemológico es su presunta naturaleza no cultural, no didáctica, no onto-genética: lo es por su propia naturaleza epistémica intrínseca. Por tanto, con dicha premisa, la naturaleza epistémica de la cultura está excluida desde el inicio.

En este orden de ideas, el "milieu" (como se considera en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau) se concibe como algo que se opone al individuo, y más precisamente, la relación del individuo con su milieu es antagónica.

Por tanto, se pregunta Radford qué tan fuerte puede ser el vínculo del obstáculo epistemológico y los factores sociales, y se atreve a concluir que no puede ser tan fuerte, pues si lo fuera, la idea de obstáculo epistemológico resultaría destruida y la tipología de obstáculos (onto-genético, didáctico, cultural y epistemológico) ya no tendría sentido.

Considera que el pensamiento y el conocimiento están imbricados definitivamente en sus contextos culturales, y que la cultura es mucho más que un estímulo y mucho más que un obstáculo para el conocimiento: la cultura es co-sustancial al conocimiento, y sugiere que el conocimiento es un producto del pensamiento – un tipo específico de actividad humana – y pensar es un género de praxis social, una forma de reflexión sobre el mundo, que responde a categorías conceptuales, éticas, estéticas, y otras categorías culturales.

Por ejemplo, el pensamiento griego del periodo clásico estaba conformado por la distinción eleática del ser y el no ser, distinción que ha operado como una categoría conceptual general que ha sostenido la episteme griega y sus manifestaciones, entre ellas, el pensamiento matemático.

La episteme china estaba conformada por categorías conceptuales diferentes, por ejemplo la oposición yin-yang, distinción que hizo concebible en el campo matemático algo similar a lo que hoy llamamos números negativos, números inconcebibles en el periodo griego clásico; entonces el mundo occidental tuvo que enfrentar profundas transformaciones para crecer con el germen de nuestro concepto contemporáneo de números negativos… el vínculo entre cultura y matemática es profundo y la razón es que las matemáticas son formas culturales de reflexión sobre el mundo, formas culturales de dar sentido a éste.

Puede pensarse que los obstáculos aparecerán cuando se lleven a cabo las prácticas socioculturales, y en esa visión antes de ser potenciadora la cultura parece ser impedimento; otra cosa es considerar la cultura y sus prácticas. Al respecto dice que existen buenos modos de enseñar y malos modos de enseñar, pero esta distinción entre bueno y malo depende de la concepción cultural del conocimiento y del rol con el cual profesores y estudiantes están involucrados en los procesos de enseñanza aprendizaje. Por esto un profesor puede ser bueno en un país y malo en otro.

Entonces, dado que Radford privilegia la construcción social, histórica y cultural del conocimiento matemático, es posible inferir que concibe los obstáculos en tanto culturales o didácticos, pues parece plantear una oposición radical entre lo epistemológico y lo cultural. Según esta mirada sociocultural se debe, a partir de las perspectivas culturales explicar el trabajo de los alumnos: cuál es el valor social que hace que uno cambie una cosa por otra, cuáles son las cosas que permitieron ese desenvolvimiento.

Finalmente, considera Radford (2007) que, si con el término "obstáculo epistemológico" nos referimos a un tipo de conocimiento parcial, puesto en alguna parte del recorrido del desarrollo conceptual, un conocimiento que sirve para resolver ciertos problemas, pero que comienza a ser causa de errores en el momento en que es aplicado por fuera de ese tipo de problemas, entonces para él la cuestión fundamental a tratar concierne a la explicación de la naturaleza del camino, que se supone es recorrido por todos nosotros durante el desarrollo conceptual, prescindiendo de nuestro encuadramiento temporal y cultural.

2.2.3.4 Conflictos Semióticos

Otra perspectiva, no tan divergente, de la de los obstáculos epistemológicos, didácticos y culturales es la que plantean Godino, Batanero y Font en "*Un enfoque ontosemiotico del conocimiento y la instrucción matemática, EOS*" (Seminario Doctorado DIE-UD I-2007). Habla de conflictos semióticos y los define como: "C*ualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa".*

Haré a continuación un rastreo en la teoría del EOS de los conceptos que subyacen en la definición de conflictos. A raíz de una búsqueda minuciosa en los documentos y correos en los que el profesor Godino habla de conflictos, encontré por ejemplo que en el EOS se habla de detectar conflictos semióticos: (*...) disparidad o desajuste entre los contenidos atribuidos a una misma expresión por el alumno y la institución. (Godino, 2002, p. 258), a partir de los a*nálisis a priori y de los análisis a posteriori.

Los conflictos semióticos se consideran como explicaciones potenciales de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes matemáticos. Aclara Godino (2007) que si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo, en tanto que cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.

Entonces afirma que "Como se ve, el conflicto es una noción más general que la de Obstáculo, y algo más específica que la de "error" o "dificultad". La idea de conflicto sugiere un origen (semiótico) de tales errores o dificultades." Y dota a tales nociones de un sentido pragmático mediado por la actividad y la práctica.

La noción de conflicto semiótico y sus tipos puede ser más flexible, al aplicarse en situaciones menos exigentes que la de obstáculo (según la concibe Brousseau), y además aporta una posible explicación: disparidad de significados. Esta noción se puede interpretar en términos de "conflictos de significados". Siempre que podemos decir que hay un obstáculo, existe un conflicto de significados. Pero no a la inversa, o sea no todo conflicto semiótico es un obstáculo, en el sentido de Brousseau. Por tanto, la noción de conflicto semiótico puede ser una herramienta más flexible que la de obstáculo.

En general, obstáculo o concepción epistemológica, se refiere al conocimiento de un sujeto "epistémico", un sujeto ideal.

La idoneidad cognitiva es una dimensión diferente de las idoneidades mediacionales (dispositivo de simulación) e interacciónales (identificación y resolución de conflictos por el profesor), pero relacionadas. Una baja idoneidad mediacional e interaccional puede llevar a unos aprendizajes deficientes, y por tanto a una baja idoneidad cognitiva.

Afirma Díaz-Godino[11] que el obstáculo (de origen epistemológico, cognitivo, didáctico) se concibe como un conocimiento, no una falta de conocimiento, que al ser aplicado en situaciones donde no es pertinente produce respuestas no adaptadas. Ese conocimiento tiene unas características especiales que Brousseau describe (es resistente al cambio, etc.).

[11] Comunicaciones personales (2007). En Seminario_idm_eos. Archivos – Contribuciones al foro. Sesiones 1, 7, 10. (sesión 1: 19 de febrero de 2007; sesión 7: 23 de abril de 2007; sesión 10: junio de 2007).

2.2.3.5 Misconcepción

La palabra misconcepción es una traducción del inglés "misconception" que antes se traducía "concepción equivocada". D'Amore (2005) explica los conflictos cognitivos en términos de imágenes al decir que un estudiante ha podido en el transcurso del tiempo, haber adquirido un concepto y haberse hecho una imagen, imagen misma que pudo haber sido reforzada en el tiempo a través de pruebas, experiencias repetidas, pero entonces ella se revela inadecuada respecto a otra del mismo concepto… se crea así un conflicto entre la imagen que tenía el estudiante y que la creía válida, in cuestionada (verdadera), y la nueva, que generalmente amplía los limites o profundiza la aplicabilidad del concepto.

Asocia la misconcepción o concepto errado afirmando que para alcanzar la construcción de un concepto es necesario pasar por una misconcepción momentánea. Para él algunas imágenes pueden ser misconcepciones, interpretaciones erradas de informaciones recibidas. Interesante sí la relación que hace con el currículo oculto del propio estudiante: aquellas reglas que él considera correctas porque generalmente le han funcionado, y para ello cita el ejemplo de las sustracciones en columnas (diferencia entre currículo enseñado y currículo aprendido).

Por tanto, el conflicto cognitivo es un conflicto interno, a causa de la no congruencia entre dos conceptos, o entre dos imágenes o entre una imagen y un concepto. Pero también dota de una connotación social al conflicto. Es social cuando no solo actúa sobre el plano interno del estudiante, sino que su significado no es compartido por el grupo de práctica social. Concluye que la carrera escolar de un individuo en las matemáticas se construye por el paso o tránsito de misconcepciones a concepciones correctas, luego la misconcepción es una concepción momentánea no correcta, en espera de consolidarse cognitivamente más elaborada, ellas no pueden ser eliminadas, ni son un daño ni un error, parecen ser un momento necesario y delicado hacia el concepto correcto.

Para terminar este panorama desde las visiones externas desde la epistemología hacia la educación matemática en general y a una disciplina particular como el cálculo, se pretende en este apartado hacer un rápido panorama acerca de las prácticas vinculadas con el aprendizaje y la enseñanza del cálculo, en ese estado de transición de estado curricular, cognitiva, cronológica, de paso del algebra al calculo que configura lo que aquí se ha denominado "trabajo inicial en el cálculo diferencial".

2.2.4 Transición o Ruptura del álgebra al cálculo: Dificultades y tensiones disciplinares

Si la ruptura numérico/algebraico se identificó de forma clara en las investigaciones sobre la comprensión del álgebra, la ruptura álgebra/cálculo, por el contrario, se ha trabajado muy poco hasta el presente en las investigaciones sobre la comprensión del cálculo. (Artigue, 1995, p. 115)

En esta transición del álgebra al cálculo TAC, es inevitable citar a Michelle Artigue, quien reagrupa las dificultades que presentan los estudiantes en la transición álgebra-cálculo en tres categorías:

- Las dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo: los números reales, las funciones y las sucesiones, entre otros, objetos que están precisamente en construcción cuando se empieza la enseñanza del cálculo.

- Las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de *límite*, que es la noción central del campo, y a su dominio técnico.

- Las dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico.

En esta última categoría, lo radical del término "*ruptura*" se puede ejemplificar mediante el tratamiento que se da en el cálculo a las desigualdades e inecuaciones, a la alternancia de cuantificadores, a las aproximaciones, al simbolismo, al lenguaje, a los razonamientos y, en particular, a las demostraciones, todo lo cual rompe con las formas de trabajo que se presentan en los cursos anteriores a la iniciación del cálculo escolar, por ejemplo, en los cursos de álgebra. Como Artigue (1995) afirma, generalmente se han atacado los problemas de incomprensión del cálculo con reformas e innovaciones al interior del cálculo mismo, sin estudiar todo ese proceso que le antecede, y propone centrarse allí, para emprender una investigación que se ubique en la Transición Algebra-Cálculo, postulando que no existe un paso natural del álgebra al cálculo, que no existe un desarrollo continuo y regular del conocimiento, sino que se da un desarrollo caótico: una ruptura**,** frente a la cual se debe emprender una investigación, que impacte en una comprensión de los conceptos del análisis.

Artigue enfatiza que, mientras la ruptura numérico/algebraico no sólo se ha identificado, sino que ha desencadenado numerosas investigaciones que aportan respecto a la comprensión del pensamiento numérico y algebraico, no ha sucedido algo similar con la ruptura álgebra/cálculo: no existe una multiplicidad de investigaciones sistemáticas ni posturas paradigmáticas sobre lo que distingue esos dos pensamientos, esas prácticas educativas, ni se sabe cómo tender el puente y alistar el camino para iniciar el trabajo en el cálculo diferencial y más importante aún tampoco se tiene conciencia sobre la importancia de estudiar esa transición, esas prácticas educativas del trabajo inicial del cálculo como otra manera de entender los problemas de comprensión de esta disciplina, ya sea en los cursos de educación secundaria, media o bachillerato (o como se llame en cada país), ya sea en los primeros semestres de la educación superior.

Artigue (1995) también resalta que el uso común de la palabra *límite* evoca las ideas de lo no traspasable, lo no alcanzable o de fin de un proceso. Señala también una segunda dificultad que tiene que ver con la doble naturaleza, estructural y operacional, que tiene el concepto de límite, y enfatiza la dificultad proveniente de la necesidad de disociar el objeto límite del proceso que permite construirlo, asociándolo con el obstáculo señalado por Sierpinska en relación con la consideración del infinito. La formalización de la noción de límite es otra dificultad, que consiste en mostrar que en ella se concibe un solo proceso, en tanto los estudiantes parecen ver dos, uno que se efectúa sobre la variable y otro sobre los valores de la función.

La reflexión acerca del paso, transición o ruptura del álgebra escolar al cálculo diferencial y de las dificultades, conflictos u obstáculos epistemológicos, semióticos, didácticos o culturales que se dan en dicha transición, en esas prácticas educativas iniciales, categorías todas cargadas semántica y teóricamente y que han generado diversas tendencias, constituye un punto crucial en las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en la educación media y superior, punto central de esta investigación.

Análogamente, las investigaciones sobre los errores y las dificultades en el campo del pensamiento matemático avanzado no son uniformes en la terminología, ya que muchas veces se utiliza indistintamente dificultad y obstáculo. En todo caso, los estudios que se han consultado están focalizados sobre la detección de obstáculos y dificultades. Se citan algunas dificultades que se reportan bajo distintas nominaciones.

Se advierte que la palabra *dificultad* está más asociada a una tradición de la psicología del aprendizaje, pero en este escrito se quiere abrir su campo semántico, presentar un panorama desde la investigación en didáctica de la matemática y citar referentes iniciales mínimos que sean objeto de un análisis mayor posteriormente.

Dando respuesta a la pregunta: ¿Qué elementos conceptuales trae el estudiante para trabajar las nociones intuitivas del cálculo? o ¿qué requiere para acceder al cálculo? Las posibles respuestas (Neira, 2000) involucran entidades como funciones, números reales, infinito, aproximaciones, continuidad, vecindades, entre otras, nociones que como tales tienen sus propios problemas de conceptualización y de representación, los que además están en construcción precisamente en este estadio de desarrollo cognitivo y conceptual, cuando se inicia el trabajo en el cálculo.

Con respecto a las funciones, en el álgebra se manejan muy dependientes de su representación gráfica o tabular, o de los procesos que las engendran, y ahora se deben trabajar como entes conceptuales sobre los cuales se van a aplicar nuevas nociones. El tema de funciones tiene su propio campo de estudio y es él mismo un núcleo de investigación en educación matemática; es, además, el eje central de toda la investigación sobre pensamiento variacional.

Vale la pena recordar aquí las dificultades que tienen los estudiantes para pasar de un registro semiótico de representación a otro, y para articular los distintos registros de representación con sus representaciones semióticas (Duval, 1992, 1998) y reconocer en todas el mismo objeto matemático. Por ejemplo, se rechaza por parte de los estudiantes la función real constante de valor 4 si se presenta en la forma “$y = 4$”, porque lo que existe en el estudiante es una asociación de la función con su fórmula dependiente de x o de función como variación; en cambio, si se presenta gráficamente por la asociación “recta = función”, se presentan menos errores.

Aquí hay que destacar el doble estatus de los objetos matemáticos: el operacional (dinámico) y el estructural (estático). En la historia de los conceptos, el primer estatus precede al segundo, aunque luego se vuelve un proceso dialéctico, y las investigaciones realizadas muestran que en la comprensión individual sucede lo mismo. A ese salto cualitativo que se refiere al paso de una concepción en un estatus dinámico a un estatus estructural, se le ha denominado “encapsulación" o "reificación". Tall (1996) ha designado "proceptual" al carácter de las nociones matemáticas que representa a la vez los objetos y los procesos. Aquí se presenta un problema: esa flexibilidad es condición necesaria en la comprensión del cálculo, pero a la vez se evidencia la dificultad que hay para desarrollarla individualmente.

En cuanto a los números reales, surgen preguntas como ¿será que los estudiantes tienen una clara distinción de los diferentes referentes numéricos? Algunas investigaciones (como la de Artigue, 1995) muestran la tendencia de los estudiantes a asociar el número real con la aproximación que de él nos da la calculadora, por ejemplo, las expresiones para π, $\sqrt{2}$... Entonces, en ese estadio, es válido cuestionar por ejemplo si los números decimales son iguales a los números reales. También se han detectado situaciones arraigadas en los estudiantes de college o de primeros semestres de universidad en los Estados Unidos, como que entre 3.25 y 3.26 no hay ningún número, o que 3.138 es mayor que 3.4, o que (3.4)2 es igual a 9.16, situaciones que muestran la complejidad de estas simbolizaciones. No es difícil hacer un sondeo entre nuestros estudiantes para confirmar que adolecen de los mismos vacíos conceptuales respecto a estos referentes.

Según Artigue (1995) hay algunas justificaciones interesantes de los estudiantes respecto a los límites. Por ejemplo, la concepción de que el límite de la sucesión 0.9, 0.99, 0.999, … debe ser menor que 1; que 0.9, 0.99, 0.999, … no tiende a 1 pero tiene límite 1; que 0.999 es menor que 1, por más nueves que se le agreguen, siempre será estrictamente menor que 1; aceptan que nunca puede pasar de 1 (porque "tiende a tener" la propiedad de los números como 0.9999 que nunca pueden pasar del límite 1). Estas ideas se han catalogado como el principio de continuidad (Leibniz) o "generic limit property", que consiste en creer que cualquier propiedad común a todos los términos de una sucesión también la tiene el límite.

Se describen en detalle a continuación algunas consideraciones sobre tensiones disciplinares y de aprehensión cognitiva en el álgebra escolar y el cálculo diferencial.

Para configurar las tensiones disciplinares y de aprehensión cognitiva se plantean consideraciones de la escolaridad institucional. Curricularmente el modo en que ocurre la instrucción en la escolaridad institucional[12] es dos cursos de algebra en 8º y 9º grado y un curso de cálculo en grado 11, es decir se presenta el álgebra como un dominio, unas prácticas, anteriores al cálculo, y no solo anteriores sino como pre-requisito para entrar a él posteriormente. En la universidad en primer semestre de ingeniería, por ejemplo, y en la mayoría de carreras, el estudiante debe tomar un curso de cálculo diferencial para el cual es necesario, aunque no suficiente, un buen dominio del álgebra. Incluso hay universidades que han incluido un curso de Fundamentos de matemática o matemáticas básicas, repaso del algebra y de las funciones, para suplir los vacíos que puedan presentarse antes de entrar a un curso formal de cálculo. Históricamente también se desarrolló primero el álgebra y posteriormente el cálculo. Así que, en este primer acercamiento, paso o transición significa el camino que ha dado tanto la humanidad como la escuela en la adquisición y ordenamiento de

[12] Así es en nuestro país y guardando las proporciones la organización curricular es similar en la mayoría de países del mundo, por lo menos en cuanto al orden en los cursos de álgebra y el cálculo.

ciertos contenidos aceptados universalmente como básicos en la educación, particularmente en el álgebra y el cálculo escolar.

En la práctica pedagógica de organización escolar actual, lo que se da es una separación de un año (trigonometría y geometría analítica). De facto se encuentra un 10º grado que configura un elemento o estadio de transición escolar, que no tiene ninguna razón ni matemática ni pedagógica, sino solo de tradición escolar. Nos interesa la transición del algebra al cálculo en el sentido de lo que cambia, con respecto al álgebra, semántica, sintáctica, semióticamente para el estudiante una vez que entra al mundo del cálculo, tanto en grado 11 como en el primer semestre de universidad. Pero no solo cronológicamente, sino también en qué momentos, en qué temáticas, con cuáles situaciones se está presentando ya una irrupción de elementos constitutivos del cálculo.

Hay múltiples tensiones entre el análisis real, el cálculo escolar, la geometría escolar, la geometría analítica escolar, el álgebra abstracta, el álgebra de bachillerato, la aritmética de los reales, la aritmética de los racionales, la aritmética de los enteros, la aritmética de los naturales, entre lo discreto y lo continuo (y en la mitad, lo denso), entre lo finito y el infinito actual (y en la mitad, el infinito potencial).

Hay algunos aspectos en los que la notación del cálculo parece ser la misma del álgebra escolar, pero no lo es, como se ve, ante todo, por la ausencia de la composición; por el entendimiento del exponente menos uno (–1) como recíproco, no como inverso de la función; por el uso del apóstrofe para la derivada; por la manera de entender las igualdades que empiezan por "y =..." como funciones; por la yuxtaposición de letras –sin indicar multiplicación– en los nombres de las funciones (como "lnx"). La idea es documentar que se trata de un registro semiótico diferente para un sistema conceptual diferente.

Tenemos la conjetura de que la notación para la geometría analítica de décimo grado no es la misma que la del álgebra escolar ni la del cálculo. En geometría analítica, los términos "no significan nada"; sólo las igualdades –que también llamamos "*ecuaciones"*– significan algo, aunque en ellas no se trata de averiguar una raíz o un conjunto solución (o conjunto de soluciones). No importa que las gráficas cartesianas determinadas por esas ecuaciones sean funcionales o no. No se usa la composición ni la derivada. Podría, pues, haber otra transición del álgebra escolar a la geometría analítica y otra al cálculo, pero en este trabajo nos interesa la que va del álgebra al cálculo, entre otras cosas, porque en el cálculo de la universidad, la geometría analítica es una unidad más o una herramienta para las llamadas *"funciones trascendentes"*.

La principal operación binaria analítica es la composición de funciones, operación que no figura en el álgebra de bachillerato. Los elementos u objetos del análisis no son los números racionales y reales, sino las funciones reales de valor real. En noveno grado los estudiantes nunca vieron una "*o*" pequeña entre dos términos algebraicos como $2x$ y x^2, pues no representaban dos funciones: la que duplica, $d(\_)$, y la que eleva al cuadrado, $c(\_)$, sino los números resultantes. En cálculo habría que escribir $(c \circ d)(x)$ y $(d \circ c)(x)$que no es lo mismo. Los objetos del cálculo son, pues, muy diferentes de los objetos de la aritmética generalizada.

Respecto a la relación continuo-discreta (al interior de la aritmética, del álgebra y del cálculo), en la mitad hay una zona gris: lo denso, o la densidad. En lo discreto están los conjuntos finitos, los números naturales y los enteros; luego se llega a los racionales positivos Q^+, que son densos, y de allí se llega a los racionales Q. Luego se trata de capturar el continuo (línea, región) a través de lo discreto y lo denso.

Generalmente se viene trabajando en el álgebra de bachillerato con ciertas funciones muy limitadas: la función cuadrado, la función cubo, las funciones lineales y las funciones afines o de gráfica lineal (que se confunden frecuentemente con las lineales). No se consideran las funciones constantes como funciones, sino como constantes. La función idéntica no se utiliza como función, tal vez "porque no hace nada". La x se considera como incógnita, como variable o como indeterminada, pero no como función (representa la función idéntica en los reales).

No es conveniente confundir la función, tomada como operación o transformación, que es un objeto activo, con su grafo, que es un objeto pasivo propio de la teoría de conjuntos. Se perdería el aspecto activo de la función y no se podría hablar de la diferencia entre el conjunto de salida y el dominio, ni de la diferencia entre el conjunto de llegada y el recorrido, rango o codominio. No habría diferencia entre *función parcial* y *función totalmente definida*, ni entre *función en* (*"into"*) y *función sobre* o *sobreyectiva* (*"onto"*). Menos conveniente todavía es confundir la función con su gráfica cartesiana. La una es un elemento u objeto analítico, y la otra es un elemento u objeto geométrico.

Para entrar en el mundo del cálculo es necesario enriquecer la visión de los estudiantes sobre la noción de igualdad y desarrollar nuevos métodos para probar igualdades. En este punto, es interesante notar que una reconstrucción similar de la noción de igualdad fue puesta en evidencia por la investigación didáctica, en la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.

En el álgebra, para demostrar que dos expresiones son iguales, se razona por equivalencia: se transforma la escritura *a(x)* = *b(x)* en una sucesión de escrituras:

$$a_1(x) = b_1(x)$$

$$a_2(x) = b_2(x)$$

$$\dots$$

$$a_i(x) = b_i(x)$$

Hasta obtener dos expresiones idénticas. Lo mismo se hace en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones. Mientras que, en el cálculo, se hace un encaje con la proposición $\forall \varepsilon > 0, |a - b\,| < \varepsilon,\ \exists \delta > 0, tal\ que\ si\ \delta > 0,\ 0 < |a - x| < \delta.$ Lo cual ha de llevar a comprender que para demostrar que en la vecindad de un punto *a*, *f(x)* < *g(x)*, no hay que resolver la inecuación, sino encontrar un intervalo de centro a donde tal desigualdad se pueda garantizar, mediante aproximaciones y estimaciones. Se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes.

Al iniciar los cursos de cálculo, se debe concebir la *función* como un objeto, como una entidad sujeta a las operaciones que otros procedimientos efectúen sobre ella, cuando lo que se concebía en cursos de álgebra, por ejemplo, era una noción de función presentada como un procedimiento aplicado a ciertos objetos llamados números; ahora ese mismo concepto, el de función, deviene en objeto al ser operado bajo otros procesos como el límite, la diferenciación o la integración, y se convierte en un sujeto sobre el cual se predican propiedades como la existencia de límite, la continuidad, la diferenciabilidad o la integrabilidad. No en vano ha sido nominado como el concepto fundamental de la llamada matemática moderna.

El análisis del comportamiento de las funciones es uno de los principales rasgos que caracterizan al pensamiento variacional. Pero para que los alumnos logren un acercamiento a esta forma de pensamiento es necesario que superen la idea de función como correspondencia entre dos valores, y que comiencen a visualizar una situación cambiante. Según Cantoral y Farfán (2000), sabiendo que el significado y el sentido acerca de la variación se establecen a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios son los referidos a fenómenos de variación y cambio, se propicia el desarrollo de acercamientos didácticos que favorezcan la construcción de significados, tanto de los conceptos como de los procesos, basados siempre en ideas variacionales.

La propuesta básica que plantean es, para el nivel que corresponda, el desarrollo de los contenidos del currículo relacionados con las variables, las funciones y el cálculo desde un enfoque variacional, considerando el estudio de la variación como una especie de eje rector del que se desprenda el contenido temático. A través de experiencias con profesores en servicio en la educación media y superior y con sus estudiantes, Cantoral, Farfán y sus coinvestigadores han constatado que, en caso de que se logren incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, los estudiantes suelen manejar la función no sólo como objeto, lo que ya es un gran logro, sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad; en otras palabras, en caso de tener un dominio del contexto geométrico/visual tanto en la algoritmia, la intuición, así como en la argumentación, se hará más posible entonces el tránsito entre las diversas representaciones.

La entrada en el mundo del cálculo obliga también a los estudiantes a reconstruir objetos matemáticos ya familiares, pero en otros mundos, como la noción de función como expresión algebraica, la *x* como representación de la función idéntica, las constantes como representaciones de las respectivas funciones constantes (Vasco, 1995) y otros casos semejantes.

La noción de tangente proporciona un caso prototípico de tal reconstrucción. La tangente es un objeto geométrico que posee propiedades específicas:

1. No corta al círculo,

2. Lo toca solo en un punto,
3. Y en el punto de contacto es perpendicular al radio.

Todas estas propiedades son globales y no tienen nada que ver con la idea de dirección común. Además, para ayudar a los alumnos a darse cuenta del carácter abstracto de los objetos geométricos, los profesores subrayan que incluso si perceptivamente el círculo y la tangente parecen coincidir localmente, en realidad tienen solo un punto común. Esta concepción geométrica se puede generalizar aplicándose a otras curvas, por ejemplo, parábolas, y conduce a la concepción algebraica de la noción de tangente como recta que tiene una intersección doble con la curva, que resulta operativa con las curvas algebraicas.

Claramente, no hay una filiación directa entre esta tangente y la definida en cálculo, caracterizada por una propiedad local: la recta con que la curva tiende a confundirse localmente (aproximación afín al orden uno) y cuya pendiente está dada por el valor de la derivada de la función asociada.

-Acerca de algunas consideraciones sobre el álgebra escolar, el cálculo diferencial y el caso del límite el tema central que abordaremos en esta sección es si el álgebra de octavo y noveno grados es solo aritmética genérica o generalizada sin pretensiones adicionales, o si las tiene, qué es lo que pretende. Creemos que es lo primero. Precisamente cuando el pensamiento numérico estático se combina con el pensamiento variacional, todavía los términos reflejan los procesos de cálculo aritmético y no se han objetivado como transformaciones de un sistema analítico. Aquí pueden ser útiles las ideas de Ed Dubinsky en su Teoría APOE (*“APOS Theory”*).

Para la transformación sintáctica de expresiones a lápiz es más sencilla y rápida la notación del álgebra escolar con variables uniliterales y omisión de los símbolos de multiplicación y elevación a potencias. ¿Cuándo y para qué se empieza a utilizar la transformación sintáctica de expresiones algebraicas? Ahí es muy clara la importancia de pensar en la conversión y en el tratamiento según Raymond Duval: primero se hace la conversión del registro verbal natural al registro algebraico escolar, y luego, un tratamiento de la representación semiótica algebraica internamente en el registro algebraico escolar. En el tratamiento de una representación algebraica no se necesita pensar en lo que representa, sino pensar en las reglas y en sus restricciones para no equivocarse. Solo al final se vuelve a hacer una conversión al lenguaje natural.

Se consideran el álgebra y el cálculo como dos sistemas conceptuales diferentes, con registros semióticos para diferentes sistemas: diferente semántica, sintaxis casi igual. Como se señaló arriba, una diferencia en la sintaxis del cálculo (pero no del álgebra) es el uso del redondelito de la función compuesta. Una diferencia en la semántica es la interpretación de la x como función idéntica, que ciertamente no es del álgebra, dominio simbólico escolar que sirve para representar regularidades que se repiten en patrones y que se asocia con el pensamiento variacional, categorizado para sistemas algebraicos y analíticos. En el cálculo los tópicos más importantes que se suelen estudiar son el de razón o tasa de cambio, los límites, las derivadas, la continuidad, las integrales, nociones que giran alrededor del concepto de límite.

Desde nuestro punto de vista, el caso del área y del perímetro del círculo en los primeros grados de básica secundaria son ya casos del límite como proceso, aunque no estén aún axiomatizados o formalizados a la manera de Weierstrass. El obstáculo es la formalización: ¿por qué se pone valor absoluto y no se dice explícitamente que "x es distinto de x_0 y que está en una vecindad de longitud dos delta (2δ) alrededor de x_0"? Puede ser mucho más claro decir esto que decirle al estudiante algo así como "cero es menor que equis menos equis-sub-cero valor absoluto es menor que delta" y escribir:

$$\text{“}0 < |x - x_0| < \delta\text{”}$$

Se está poniendo el obstáculo en donde no es: en tratar de resumir dos desigualdades en una sola, suponiendo que el estudiante sí es consciente de que x_0 puede ser cualquier número positivo o negativo, pero fijo, y que x es ahora variable, pero dentro de esa "vecindad perforada". ¿Podemos suponerlo? Esto puede ser una expresión un poco más significativa para el estudiante, por lo menos desprovista del signo de valor absoluto, aunque no por ello esté libre de obstáculos todavía.

Desde este marco conceptual, así como la longitud de la circunferencia, el área del círculo y otros problemas de cuadratura involucran ya el concepto de límite en el sentido que se quisiera lo manejara el estudiante de cálculo. Lo mismo puede decirse respecto a los decimales infinitos: ¿será que 0,9 periódico es igual a 1 o diferente de 1? Ahí está presente el concepto de límite como nosotros lo vamos a entender en el marco teórico: sin absolutamente ninguna preparación sobre sucesiones, series, límites y desigualdades, sin construcción de los números reales ni conciencia de su completitud, etc.

Para caracterizar lo que llamamos *"el caso del límite"*, es necesario citar la aproximación geométrica que tradicionalmente se presenta. *"La tangente es el límite de la secante (o de las secantes)"*, se dice en el tratamiento tradicional. Hay que plantear el límite de la secante como la tangente, pues eso se hace en los cursos: se traslada el problema al terreno geométrico, pero ese es otro tipo de límite, que no tiene ε ni δ; es bueno para mostrar que el profesor está usando una noción de límite que no es la que se define con ε ni δ, y también para llamar la atención sobre otro punto poco explicitado: el profesor utiliza la palabra *tangente* en dos sentidos: uno, con el significado del final de décimo grado, cuando se habla de las funciones trigonométricas, y otro, en el sentido de la primera parte del décimo grado, cuando se habla de la tangente a las gráficas; luego, ahí el que está poniendo un obstáculo didáctico es el profesor. Está tendiendo una trampa que distingue dos usos que el enunciador sabe que son diferentes, pero el estudiante no. El profesor debería decir: *"la tangente del ángulo que forma la recta tangente con el eje horizontal"*. El concepto de pendiente como inclinación puede medirse por el ángulo, por el seno del ángulo o por la tangente del ángulo, y esto es más coherente que tratar de definirla como razón de dos variaciones $\Delta y/\Delta x$. ¿Dónde está la tangente?

En las expresiones simbólicas que involucran el símbolo de infinito, como:

$$\lim_{x \to \infty} x = \infty$$

Suele haber una inconsciencia en los estudiantes, pero también en el profesor, quien usa igual sintaxis y vocabulario cuando dice que *"la x que tiende a infinito es una variable y la otra x es una función"*. Precisamente ahí hay un ejemplo de ese paso del álgebra al cálculo: en el álgebra, la *x* representa variables en el sentido de incógnitas para averiguar o de números genéricos, pero en el cálculo representa la función idéntica.

En Euclides ya se habla de límite y hay una diferencia entre segmento finito, semirrecta y recta indefinidamente larga. Para los profesores de educación media y de universidad, "cálculo" es lo que aparece en los textos sobre cálculo. La conceptualización básica involucra el estudio de los límites, las derivadas, las integrales… y el caso del límite lo conforman todas aquellas situaciones que requieren aproximaciones y vecindades; el mismo profesor en su lenguaje utiliza expresiones como *"acercarse más y más"*, *"acercarse tanto como se quiera"*, *"tender hacia"*, *"infinitamente cercanas"*, que involucran entidades como lo infinito y lo infinitesimal. Esquematizando, tenemos:

Tabla 1. Tratamientos Algebra-Calculo

Álgebra	**Cálculo**	**Geometría Analítica**	**Análisis**
Como tratamientos en un registro simbólico para la aritmética generalizada	Como tratamientos en un registro simbólico para el análisis	Como conversiones entre dos registros simbólicos de ecuaciones y gráficas	Como sistema conceptual cuyos elementos son las funciones reales de valor real

Hay tres operadores sobre funciones que son los que caracterizan el trabajo analítico que se suele hacer en el cálculo: el límite (L), la derivada (D) y la integral (∫).

El siguiente cuadro muestra en la primera columna cada operador analítico por sí solo y el mismo aplicado a su argumento, (que es una función reificada como objeto, como aparece en la segunda columna); en la tercera columna, el valor de esa función cuando se aplica a su propio argumento genérico (que es un número real); luego el argumento aparte (que es un número real todavía no determinado) y un caso particular de un número real.

Tabla 2. Operadores Analíticos

Operador		**Argumento del op.**	**Valor**	**Argumento**	**Caso particular**
L	L(f)	f	f(x)	x	*1*
D	D(g)	g	g(y)	y	*2/7*
∫	∫(h)	h	h(z)	z	π

Tres elementos fundamentales: “Procepts, reification, APOS theory”

Tall y Vinner (1981, citados por Vasco, 2009) y Fischbein[13] propusieron dos tipos de nociones intermedias entre las nociones vagas y los conceptos científicos (en inglés los llamaron *“concept image”* y *“procept”*).

“*Concept image”* (*“imagen conceptual”*). Para comparar el concepto con la imagen conceptual, Vasco (2009) propone pensar como ejemplo en el concepto de curva en geometría diferencial; el concepto matemático de curva difícilmente puede separarse de la imagen conceptual de una línea curva, aunque dicho concepto se refiere a una función que proyecta un intervalo de R en un espacio de dos o más dimensiones, no a la imagen del intervalo bajo la función, que es la que mantenemos indisociablemente ligada a la curva. La imagen conceptual es un conglomerado de todas las estructuras, imágenes, procedimientos y relaciones asociadas con el concepto, y muchas de sus regiones pueden estar muy alejadas y aun contradecir la definición formal del concepto ya institucionalizada.

La palabra inglesa *“procept*” se podría traducir directamente por “procepto”, en el sentido de concepto procedimental, pues se relaciona más con los procesos, procedimientos o algoritmos que con los objetos o las relaciones, pero oscila de uno a otro. Por ejemplo, el estudiante de primaria y secundaria suele rechazar la distinción entre *adición* y *suma*, pues no conceptualiza propiamente la operación binaria de adición, sino que la confunde con la manera como hace las sumas, sin distinguir la operación del resultado, ni éstos del algoritmo que aprendió (por ejemplo, el algoritmo usual para sumar varios numerales decimales dispuestos en columna). En símbolos, $a + b$ puede significar sumar a con b, o el resultado de ese proceso.

Otro ejemplo es el del concepto de igualdad. Un estudiante normal, aún “exitoso”, puede pasarse todo el bachillerato sin configurar el concepto de igualdad como relación de equivalencia entre expresiones simbólicas que se refieren al mismo objeto y que permite la sustitución de la una por la otra. Le basta el procepto de igualdad, que condensa el proceso de obtener un resultado y la relación estática de igualdad. Este procepto le permite leer el símbolo “=” como “da”, aunque se pierda la propiedad simétrica. Va a creer, por ejemplo, que la ecuación “$0 = x^2 – 1$” está “mal escrita”. Pero la idea de Tall es que esa oscilación o confusión entre proceso y concepto no es rechazable, más aún, es una ambigüedad muy conveniente en el pensamiento de orden superior y los expertos también la utilizan sin darse cuenta de que a veces se refieren al proceso y a veces al producto conceptual de ese proceso.

Las palabras *reificación o cosificación*, según Vasco (2009), son dos traducciones del inglés *reification*, que se extendió en la educación matemática con los primeros trabajos de Anna Sfard.

[13] Los autores se remiten a una idea de Fischbein, Tirosh y Hess de 1979 sobre las intuiciones del infinito y a una ponencia de Vinner y Hershkowitz de 1980 en el PME IV.

En latín, *“res”* significa “cosa”, y “hacer de algo –que no es cosa– una cosa”, se puede decir *cosificación* o *reificación*.

La noción inicial de cosificación o reificación es la de formar mentalmente un objeto de lo que era un proceso, una acción, una operación o una relación. Por eso se encuentra a veces la palabra *objetivación*. Como toda palabra terminada en “*-ción*”, *cosificación*, *reificación* u *objetivación* a veces se refiere a la operación mental y a veces al resultado de esa operación.

Vasco enumera algunas pistas sobre la ocurrencia de la reificación de un nuevo producto mental:

- Separarlo de y contrastarlo con otras cosas, objetos, elementos o componentes.
- Operar sobre el nuevo producto.
- Nombrarlo con un sintagma nominal.
- Atribuirle predicados unarios o monádicos.
- Relacionarlo con otros y atribuirles predicados binarios, ternarios, etc.

La propuesta inicial de Anna Sfard, afirma Vasco (2009), era que el progreso en la conceptualización matemática con frecuencia consistía en cambiar de una manera de concebir un proceso o procedimiento como algo activo, que ocurre en el tiempo, a una consolidación y detención del mismo como un nuevo objeto o cosa sobre la cual se empieza a actuar. Para el caso del análisis, se podría pensar en que el estudiante toma las expresiones del álgebra de bachillerato solo como instrucciones para calcular un resultado; por ejemplo, entendería el término “$x^2 - 1$” como *“eleve el número al cuadrado y quítele uno”*. Es una comprensión limitada, porque no permite pasar a la función respectiva, pero es correcta. Por eso puede tener éxito en aprobar dos años de álgebra sin construir el concepto de función, pues ese concepto requiere una reificación del procedimiento de calcular el resultado. Si no se reifican las funciones como objetos, no puede construirse un sistema analítico en el que los elementos u objetos sean las funciones reales de valor real. Aquí podría estar la diferencia entre el álgebra de bachillerato y el análisis real.

En este caso Vasco (2009) plantea que la reificación es muy cercana al paso del procepto de Tall, Vinner y Fischbein al concepto respectivo. Así lo ha utilizado Ed Dubinsky en experimentos de enseñanza de la teoría de grupos. Pero no es el único caso. Por ejemplo, las relaciones simbolizadas por los signos “<” y “>”, que los estudiantes leen *menor* y *mayor*, suelen quedarse en una comparación entre dos números y no pasan a configurar un sistema de relaciones con sus propiedades, su composición, su inversión, etc., pues esas relaciones no han sido reificadas, cosificadas u objetivadas. No se puede trabajar con un sistema cuyos elementos sean las relaciones si los estudiantes no las reifican, es decir, si no las vuelven cosas u objetos mentales.

Aquí también puede haber una barrera para el paso al análisis desde el álgebra de bachillerato y el estudio de pre-cálculo y cálculo con funciones como instrucciones o como relaciones, sin reificarlas.

2.2.5 Nociones relacionadas con la ruptura epistemológica

De otro lado, y continuando con consideraciones de tipo epistemológico acerca de dos constructos importantes planteados aquí –obstáculo y ruptura epistemológica–,[14] Vasco (1991) analiza los conceptos de revolución científica, ruptura epistemológica y otros relacionados con ellos, tomados de la historia y de la epistemología de la física, para estudiar su aplicabilidad a la constitución de las disciplinas matemáticas. Discute y concluye las siguientes tres tesis:

- En cada una de las disciplinas matemáticas la ruptura epistemológica, si tiene sentido identificarla con la conformación de la respectiva disciplina, se da una sola vez.

- En cada una de las disciplinas matemáticas una vez conformada no se dan propiamente revoluciones científicas en el sentido de Kuhn, sino solo refundiciones de esas disciplinas.

- Los intentos de unificación de las disciplinas matemáticas en una sola ciencia llamada "la Matemática" –en singular y con mayúscula– no solo no son ni revoluciones ni rupturas epistemológicas, sino que puede decirse que han fracasado, y que las matemáticas, con o sin mayúscula, continúan, y previsiblemente continuarán siendo plurales.

Fichant y Pécheux (1969/1975) definen *ruptura epistemológica* como el origen o comienzo de una ciencia, en el momento que Kuhn llamó *"revolución científica"*. Estos autores consideran la ruptura constitutiva de esa ciencia, que deviene en un nuevo paradigma. Podría plantearse que las revoluciones científicas constituyen un acercamiento más sociológico que epistemológico al problema de los cambios científicos. El término *ruptura epistemológica* marca, en cambio, el punto de no retorno[15] a partir del cual comienza una nueva ciencia; en particular es todo el hecho epistemológico que sucedió con la constitución de la física científica desde Copérnico hasta Newton. Pero una vez constituida la nueva ciencia o disciplina después de la ruptura, quedan aún muchas regiones del campo teórico abierto por esa ruptura, en las cuales se mantiene un agregado de proposiciones teóricas que pretenden ser científicas, a pesar de estar formuladas todavía con lenguaje ambiguo. El trabajo de elaboración de los nuevos conceptos, las propuestas de respuestas a las nuevas preguntas y la búsqueda de coherencia conceptual llevan a periódicas revisiones de

[14] La *ruptura epistemológica* es un concepto introducido por el filósofo y poeta Gastón Bachelard (27 de junio de 1884, Bar-sur-Aube – 16 de octubre de 1962, París) en Filosofía de las Ciencias (posteriormente desarrollado en el ámbito de la sociología en 1975), a raíz de un ensayo publicado en Francia por Pierre Bourdieu, Chamboredon y Passeron, titulado *El oficio de sociólogo*. El concepto de *ruptura epistemológica* alude a la necesidad, en la praxis sociológica, de alcanzar una fisura que permita ir más allá de la evidencia, de las prenociones en sociología. Supone, en otros términos, superar los espacios de tópicos y lugares comunes para hacer *"verdadera ciencia"*, para *"conquistar el objeto contra la ilusión del saber inmediato"*.

[15] Expresión atribuida a F. Regnault que usan Fichant y Pécheux para describir la ruptura epistemológica, en un curso en 1967-1968 en París, según aparece en la advertencia inicial de Oscar Landi al libro de Fichant y Pécheux (1969/1975, pp. 7-8; ver definición I, p. 9, y la nota 6 de la p. 12).

esas sub-regiones que constituirían las *refundiciones* o cortes intracientíficos, terminología que se atribuye también a Regnault (Fichant y Pécheux, 1969/1975, p. 12, definición III y nota 6).

En este sentido, no se podría afirmar propiamente que, al pasar del álgebra al cálculo en la organización curricular y cognitiva, lo que se da sea una ruptura epistemológica en el sentido aquí planteado, pero sí se afirma como posición inicial, que hay una ruptura en cuanto a prácticas, simbolismo, lenguaje, modos de demostración y argumentación, respecto a lo que habitualmente se hace en los cursos de álgebra y lo que se empieza a trabajar en el cálculo.

A continuación, se presentan otros enfoques de Análisis Didáctico, en particular de corte fenomenológico, en aras de tener un amplio espectro de enfoques, mostrar otras tendencias, y permitir analizar las razones por las cuales el del EOS se adecuó más al análisis y a las preguntas de la investigación.

2.2.6 Análisis didáctico desde otros enfoques: Azcárate, Luis Rico - Pedro Gómez, Escuela de Utrecht

Este análisis didáctico representado por estos investigadores lo llamamos ADF (Análisis Didáctico Fenomenológico) por su referencia a la fenomenología de las situaciones didácticas de Hans Freudenthal.

Consultando a Gómez (Análisis Didáctico en Educación Matemática, 2013) un amplio grupo de profesionales de la educación matemática vienen empleando un mismo sistema de categorías y un conjunto de métodos en sus estudios y trabajos que, con carácter general, denominan análisis didáctico. Constituye un marco conceptual y metodológico, cuyo origen se remonta a los comienzos del área de Didáctica de la matemática en Holanda y España. En estas páginas se recogen ejemplos de actividades vinculadas a la formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas, propuestas para el diseño de textos y documentos, para el desarrollo e implementación de innovaciones curriculares, argumentaciones relativas a la racionalidad teórica de esta metodología y evidencias sobre su fiabilidad empírica. En conjunto, el libro muestra el potencial del análisis didáctico en Didáctica de la matemática, mediante sus diferentes funciones y su riqueza de usos e interpretaciones. Los trabajos, de carácter empírico y teórico, abordan cuestiones relativas a los ámbitos de la formación del profesorado, la innovación curricular y los fundamentos y metodología de la investigación.

Se cita a Carmen Azcárate para fijarse cómo se analizan los datos en otras investigaciones, en las que se utiliza el análisis didáctico al estilo de Luis Rico, Pedro Gómez y Evelio Bedoya, inspirado en la fenomenología de lo didáctico de Hans Freudenthal. Según Azcarate (Perspectivas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Investigación en Didáctica del Análisis, 1999) en 1996 y dentro del seno de la SEIEM surge el grupo de Didáctica del Análisis Matemático cuyo objetivo era estudiar la naturaleza del pensamiento matemático avanzado y profundizar en los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con el cálculo infinitesimal; considerando el aprendizaje de las matemáticas en términos de procesos cognitivos y no como una simple adquisición de competencias y habilidades.

Según Luis Rico (Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2013), el análisis didáctico es un término de uso común en Didáctica de la matemática. Este análisis es relevante en la disciplina desde sus inicios, ya que aporta un modo específico de abordar cuestiones didácticas primordiales. Análisis didáctico abarca un conjunto de conceptos y métodos con uso generalizado en los grupos de investigación de Didáctica de la matemática, que detallaremos en este estudio. Se sustenta en las reglas generales del análisis, tal y como éste se entiende desde la filosofía y la historia del pensamiento. Aborda problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas educativas.

La escuela de Granada tiene mucha producción, y es muy cercana a la que es ahora la Escuela de Utrecht, la Educación Matemática Realista EMR-RME, con Adrian Treffers, Leen Streefland, Jan de Lange, Koeno P. E. Gravemeijer y María van den Heuvel-Panhuizen. La lista de unas referencias que profundizan estas tendencias para tenerlas en cuenta en futuras investigaciones se encuentra en la parte de recomendaciones del capítulo VII.

Entre las nociones más importantes del cálculo están las nociones de función, límite, número real, continuidad, derivada. A continuación se presentan algunas consideraciones y configuraciones o de tipo histórico, o de tipo epistémico o cognitivo.

2.2.7 Algunas consideraciones sobre limite y derivada

La noción de límite es una de las más difíciles de todas de la matemática que se enseñan en los cursos de las carreras universitarias. Son de esperarse los tropiezos de los estudiantes, dada las complicaciones que Newton y Leibniz no lograron sobrepasar, como lo muestra Neira (1998) en El Analista de Berkeley. Uno y otro procedían intuitivamente, del mismo modo habría que proceder inicialmente en los cursos de cálculo, en lo que se emplean expresiones como “tendera”, “acercarse”, y otras por el estilo que deberían desaparecer progresivamente del lenguaje del estudiante cuando este haya madurado bien el manejo del proceso.

Históricamente, el retiro de tales expresiones ha sido forzado por la mejor comprensión del proceso. Cauchy respecto de Newton, por ejemplo, o Weierstrass respecto de Newton y Cauchy; ciertamente el curso de cálculo no es un curso de historia, pero el profesor que conoce el concepto genéticamente está más preparado para el desarrollo de sus estudiantes en dicho aprendizaje, que el profesor que basa su enseñanza en el conocimiento refinado del cálculo y reduce su enseñanza al esquema: definición, teorema, demostración.

Transcribo a continuación algunos de los problemas del cálculo diferencial tratados por Newton, tomados de sus manuscritos originales de Methods of Series and Fluxions tal como aparece en Neira (1998) en el que procede mediante problemas que clasifica en dos fundamentales, que actualmente equivalen a hallar la derivada y hallar la primitiva de una función dada.

“*Considero el tiempo como fluyendo o creciendo mediante flujo continua y a otras cantidades como creciendo continuamente con el tiempo y de acuerdo con la fluxión del tiempo, llamo fluxiones a las velocidades con las cuales se incrementan todas las otras cantidades. También de acuerdo con los momentos de tiempo doy el nombre de momentos a las partes de cualesquiera otras cantidades generadas en momentos de tiempo…”.*

En síntesis, las fluentes o cantidades fluentes son cantidades que varían con respecto al tiempo, dicho de otra manera, a las cantidades que fluyen se les llama fluentes por oposición a las cantidades constantes. Llama fluxión a la velocidad de cambio con respecto al tiempo de las cantidades fluentes. La forma en que las fluentes varían con el tiempo es arbitraria, Newton usualmente hace la hipótesis de que una de las variables, por ejemplo x se mueve uniformemente, es decir, que $\dot{x} = 1$ y lo que es importante no son las fluxiones en sí, sino sus razones.

Por otro lado, según Neira (1998) tres ideas fundamentales guiaron a Leibniz en su creación del cálculo diferencial; la primera era una idea filosófica, trataba de la construcción de una "Characteristica generalis", es decir, un lenguaje simbólico mediante el cual se pudieran escribir todos los procesos de argumentación y razonamiento, idea que explica su gran interés por las cuestiones de simbolismo y notación en matemáticas. La segunda idea a pesar de lo imprecisa que era hacia 1673, sugería ya un cálculo infinitesimal de sumas y diferencias de ordenadas mediante el cual podían ser determinadas cuadraturas y tangentes y en el que estas determinaciones aparecían como procesos inversos. La tercera idea principal fue la relativa al uso del "triángulo característico" en las trasformaciones de cuadraturas.

Resumiendo brevemente los principales conceptos en la obra de Leibniz: la diferencial de una variable y es la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de y; dy es la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas, mientas que dx es la diferencia infinitamente pequeña entre dos abscisas x sucesivas, que en este caso es igual a la distancia infinitamente pequeña entre dos y sucesivas.

Cuando Leibniz presento su cálculo recibió muchas objeciones acerca esa noción de cantidades infinitamente pequeñas por lo cual decide cambiar el concepto de diferencial y en su primera publicación del cálculo "*Un nuevo método para hallas máximos y mínimos, así como tangentes"* introduce un segmento finito llamado dx.

En cuanto al significado de los infinitesimales (una cantidad que no es 0, pero es que más pequeña que todo número real positivo) para Leibniz, el reconoció que la existencia o no existencia de estos no es obstáculo para abreviar y hablar universalmente, los llamo "ficciones útiles" y era un poco precavido acerca de la existencia real de ellos. En cuanto a Newton, afirma "por ultima razón de cantidades evanescentes (es decir, las que se aproximan a 0) se debe entender la razón de las cantidades, no antes ni después que ellas de desvanecen, sino con la cual ellas se desvanecen; utiliza los indivisibles o infinitesimales como un simple simbolismo o sistema conveniente para sus pruebas matemáticas.

Desde la invención paralela de las derivadas y las integrales por Newton y por Leibnitz, (sin precisar los aportes de Barrow), ya comenzaron dos enfoques muy diferentes del Cálculo infinitesimal, el enfoque de Newton y el de Leibnitz. Desde la perspectiva actual, el enfoque de Newton parece más "analítico", en el sentido de incluir los cambios en los valores de las variables como dependientes del tiempo, con la notación del punto sobre la x como símbolo de la fluxión de un fluyente en el tiempo (hoy diríamos "de los flujos como funciones del tiempo", pero "función" es una terminología posterior). En cambio, el enfoque de Leibnitz parece ser más geométrico, pues se preocupa por calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas y las áreas bajo las gráficas.

2.2.7.1 Configuraciones Epistémicas Sobre Derivada

La noción de configuración epistémica (CE) permite encontrar un análisis más detallado y completo sobre los significados parciales de la derivada. Para determinar este significado de la derivada, Luis R. Pino-Fan (2013) hicieron una revisión histórico-documental desde la matemática griega hasta el siglo XX, en la cual se identificaron nueve configuraciones epistémicas asociadas a los distintos problemas; las cuales son:

1. Trazado de tangentes en la matemática griega:

   "La tangente en la matemática griega" se inicia describiendo la proposición XVII que Euclides enuncia en su libro III de su obra Elementos de Geometría, en el cual se plantea trazar una línea tangente a una curva específica, en cuyo caso es un circulo. Plantean que las situaciones-problema que se presentan en esta primera configuración, son aquellas en las que se debe trazar una recta tangente a una curva específica en un punto determinado.

   Los griegos tenían la idea de que la tangente a una curva era una recta que "tocaba" a la curva sin cortarla, el método de resolución dado en esa época remontada a los años 1500 y 1700 era encontrar una circunferencia tangente en un punto C a una curva dada. Lo cual se logra igualando circunferencia y curva y obligando a que sólo se corten en un punto, ya que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio.

2. Problemas sobre variación en la edad media:

   Se caracteriza por la inclusión del infinito en los razonamientos matemáticos, el estudio del movimiento no sólo uniforme (y de la variación en general), el empleo de los infinitesimales. Puede ubicarse esta etapa en Europa en un periodo importante lo constituyen los siglos XIV, XV y XVI. En general los lenguajes y procedimientos característicos de esta configuración se consideran descriptivos, geométricos o una combinación de ambos. Finalmente, la configuración se considera más extensiva que intensiva, puesto que aún no se contaba con métodos generales para resolver problemas sobre variación y movimiento.

3. Cálculo de sub tangentes y tangentes con el álgebra:

   De esta forma se define la derivada como la pendiente de una recta tangente a una gráfica de una función en punto, los tipos de situaciones- problema que se abordan son el trazar rectas normales, tangentes o subtangentes a una curva dada en un punto determinado. El lenguaje cambia del netamente geométrico-descriptivo al de ecuaciones algebraicas y de la geometría analítica; de esta forma, el lenguaje usado en esta configuración es el característico de los procedimientos algebraicos y de la geometría analítica. Los argumentos en esta configuración van a ser algebraicos y geométricos. Se concluye que, en general, las propiedades-proposiciones característicos de esta configuración son aquellas provenientes del algebra y del estudio de las curvas mediante la geometría analítica. Finalmente se enmarca que los desarrollos realizados en esta configuración muestran intentos para encontrar métodos cada vez más generales, para abordar los problemas sobre trazado de tangentes.

4. Trazado de tangentes mediante consideraciones cinemáticas:

   Fue una propuesta elaborada por Fermat, para determinar la ***tangente*** a una curva plana, usando ***consideraciones*** de tipo ***cinemático***, que le permitieron determinar la dirección instantánea del movimiento del punto ***mediante*** el cual se genera la curva. Se alude a las demostraciones de Galileo, quien establece la ley fundamental de la composición vectorial del movimiento y la aplica para determinar la trayectoria descrita por un proyectil, basado en las ideas de que el espacio recorrido por un móvil es igual al área bajo la gráfica de su velocidad en función del tiempo. En las situaciones-problema de esta configuración se abordan problemas relacionados con el trazado de las tangentes a distintas curvas, y los lenguajes y procedimiento son del algebra y de la geométrica analítica. La lectura final que se le da a la configuración es que para el trazado de las tangentes son extensivos en cuanto a que no son generalizables en todos los casos.
5. Cálculo de máximos y mínimos mediante la idea intuitiva de límite:

   Fue uno de los grandes aportes de Fermat el cual lo aplicó a parábolas e hipérbolas y consiste en considerar en una cumbre o en un valle de la curva, cuando ε es pequeño, los valores de la función $f(x)$ y $f(x+\varepsilon)$ tan próximos que se pueden tomar como iguales. El método consiste en hacer $f(x+\varepsilon)=f(x)$, dividirlo por ε y tomar ε=0.

   El lenguaje utilizado por Fermat en la solución del problema es algebraico, gráfico y descriptivo. En esta configuración se caracteriza el uso de magnitudes infinitamente pequeñas, es decir, los infinitesimales, lo cual representa el punto de partida para los mismos. Finalmente, se destaca la aparición de conceptos como el límite y la derivada; y, al desarrollarse métodos generales para la determinación de máximos y mínimos esta configuración tiene características más intensivas que las anteriores.
6. Cálculo de tangentes y subtangentes mediante métodos infinitesimales:

   Desarrollado por Fermat nuevamente dice que la tangente será conocida si, dado el punto de tangencia, puede determinarse el punto de intersección de la tangente con el eje de una parábola. Y para determinar dicho punto de tangencia bastaba con encontrar la proyección sobre el eje o también llamado subtangente. Algunos de los principales conceptos-definiciones que se manejan en esta configuración son: a) la concepción de Barrow sobre la tangente; b) la noción intuitiva de límite; c) la noción intuitiva de la derivada. Refiriéndose a los argumentos en esta configuración, resaltan los algebraicos, geométricos y consideraciones infinitesimales; del mismo modo el lenguaje utilizado es de tipo geométrico, algebraico y descriptivo.
7. Cálculo de fluxiones:

   Newton aporta con sus estudios, la noción de fluxiones en curvas cinemáticas que describen comportamientos en función del tiempo, El procedimiento más importante de esta configuración es el método de las fluxiones de Newton, apoyada en el álgebra y el análisis geométrico. En cuanto a las situaciones - problema de esta configuración se resalta los problemas sobre el cálculo de la velocidad del movimiento en un tiempo cualquiera, dada la longitud del espacio descrito. De este modo se observó y concluyo que como en esta configuración las fluxiones es lo que en la actualidad se conoce como la derivada.

8. Cálculo de diferencias:
   El cálculo de Leibniz se define con un carácter más simbólico y analítico; las bases de su cálculo diferencial e integral son las diferencias infinitesimales y la suma de infinitamente pequeños. Para dar inicio al análisis de la configuración se ponen en consideración algunos ejemplos. Leibniz abordo situaciones-problemas sobre máximos y mínimos, tangentes y puntos de inflexión; también introduce por primera vez la expresión "Calculo diferencial" y proporciona fórmulas para derivar productos, cocientes, potencias y raíces. Leibniz, además, logro introducir un lenguaje accesible para facilitar la manipulación de conceptos, procedimientos y argumentos, los cuales se asocian a una serie de nuevos conceptos-definiciones. Para finalizar se señala que, para sus argumentaciones, Leibniz, utilizo consideraciones algebraicas, geométricas e infinitesimales; la configuración es altamente intensiva, y se concluye que, por el desarrollo de conceptos, el desarrollo de reglas y a aplicación de los conceptos a la resolución de problemas sitúan el cálculo de Leibniz por encima del cálculo de Newton.
9. Derivada como límite:
   Se describen las características, y se desarrolla el análisis de la configuración, a partir del análisis del estudio histórico sobre el desarrollo de una fundamentación rigurosa de la derivada. En esta etapa se desarrollan una serie de conceptos-definiciones para el desarrollo de la fundamentación de la derivada y para el cálculo infinitesimal en general. Como proposiciones-propiedades características de esta configuración, se tienen, varios teoremas tales como "El teorema del valor medio para funciones derivables". En cuanto al lenguaje de la presente configuración se definen como formal, algebraicos, apoyado en lenguaje geométrico. Seguidamente, los procedimientos característicos se definen como aritméticos. Finalmente se expone que los argumentos de esta configuración consiguen fundamentar el análisis infinitesimal sobre conceptos aritméticos.

Las configuraciones aquí denotadas son un recuento de todos los conceptos por los cuales se tuvo que pasar para poder llegar a definir la derivada como un límite. Las configuraciones epistémicas se componen de los objetos matemáticos primarios y sus relaciones, que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas en distintos contextos de uso.

La configuración epistémica más global es la de la derivada como un límite. Así mismo los textos guías propuestos y analizados consideran como conocimientos previos a la introducción de la derivada: funciones, continuidad y la noción de límite. Adicionalmente se pudo observar, independientemente del contexto de uso de la derivada, siempre aludían a un mismo significado: la derivada como límite del cociente de incrementos.

2.2.8 Algunas investigaciones del EOS de 2006 en adelante

A través de una revisión detallada de las publicaciones del EOS de Godino, Font y otros del 2006 en adelante se encontró una amplia gama de trabajos que han contribuido a fortalecer teóricamente el Enfoque Ontosemiotico y otras que han enriquecido la puesta en práctica de dichas teorías. Por ejemplo, y solo para referenciar algunas de ellas: Godino, J. D, Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013) sobre los componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas; Pino-Fan, L. Godino, J.D. y Font, V. (2013) acerca del diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada; Font,V., Godino,J.D. (2013) titulado “The emergence of objects from mathematical practices. Educational Studies In mathematics”. Una lista detallada sobre estas investigaciones se encuentra en el apéndice. A continuación, se citan algunas ideas de Pino Fan, Retamal, Font y Duval 2016 por el interés de ese estudio para esta investigación.

Estos autores en "Análisis de la actividad cognitiva subyacente en la resolución de una tarea sobre derivabilidad de la función de valor absoluto: dos perspectivas teóricas” presentan un estudio de la conexión en red de teorías entre la teoría de los registros de representación semiótica (TRSR) y el enfoque onto-semiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS, en inglés OSA). Los resultados obtenidos muestran una complementariedad entre estas dos perspectivas teóricas, lo que permitiría un análisis más detallado del desempeño de los alumnos.

Una de las principales preocupaciones de la comunidad investigadora sobre la educación matemática es determinar cuáles son las dificultades que los estudiantes enfrentan en su camino hacia la comprensión y, por lo tanto, el aprendizaje, las nociones matemáticas. Este interés se refleja en el hecho de que, durante décadas, uno de los principales focos de investigación dentro de nuestra disciplina científica ha sido las características de la actividad cognitiva del alumno. Además, una de las teorías más populares en el campo es la teoría de los registros de representación semiótica (TRSR) (Duval, 1995), que se centra en el estudio de la actividad cognitiva de los estudiantes al resolver problemas matemáticos, aportando nociones que hacen posible Analizar y comprender cómo los sujetos utilizan y vinculan los diferentes tipos de representaciones materiales y el papel que estas representaciones tienen en la comprensión de los conceptos matemáticos.

En el artículo se muestra un estudio comparativo entre estos dos enfoques teóricos, la teoría de los registros de representación semiótica y el enfoque onto-semiótico, que permite realizar el análisis cognitivo a partir del desempeño de los sujetos. Para llevar a cabo este estudio, y siguiendo la metodología propuesta para las obras en el marco de la creación de redes de teorías, se analiza el desempeño de un futuro maestro de secundaria en una tarea relacionada con la diferenciación de la función de valor absoluto.

Diversos autores han investigado sobre la comprensión de los estudiantes de bachillerato y primeros semestres de universidades, sobre el concepto de las derivadas; sin embargo, hay pocos estudios que cuestionan a los maestros en relación con este tema; La mayoría de estos son a los maestros de matemáticas en formación, para determinar el conocimiento y comprensión del concepto de derivadas. Este tema ha sido abordado por Luis R. Pino-Fan, Juan D. Godino, Vicenç Font en “*Explorando aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial*” (2014).

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO

En este capítulo se encuentra en primer lugar una aproximación a las nociones de error, dificultad y conflicto, seguida de una aproximación propia a una conceptualización de los obstáculos, a continuación de la cual se presentan las nociones fundamentales del análisis didáctico del Enfoque Ontosemiotico (EOS) en cuanto a las configuraciones ontosemiotica y didáctica. Luego se enuncian las facetas de idoneidad didáctica y algunas nociones sobre el enfoque Noetico-Semiotico de Raymond Duval. Finalmente se disponen algunas consideraciones acerca de las prácticas educativas universitarias vinculadas con la iniciación del cálculo diferencial (PEUC).

La selección de enfoques y tendencias actuales relacionadas con la noción de obstáculo (2.2.3) presentada en la sección anterior del Estado de Arte se ha realizado a través de un minucioso rastreo de la literatura especializada y le da vida al constructo propio que se propone como resultado de esta investigación. Estas consideraciones hacen necesaria la sección que a continuación se presenta, configurando un marco de compresión para las nociones de obstáculo y otras asociadas a ella.

3.1 Una aproximación a las nociones de error, dificultad y conflicto

Las investigaciones sobre los errores, dificultades y conflictos en el campo del pensamiento matemático avanzado no son uniformes en la terminología, ya que muchas veces se utiliza indistintamente dificultad y obstáculo. En todo caso, los estudios que se han consultado están focalizados sobre la detección de obstáculos y dejan en un segundo plano las limitaciones en los aprendizajes debidos a significados personales poco representativos de los significados institucionales de referencia.

En el EOS se considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas en un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994) y, por tanto, son derivados de dichas prácticas. Al objeto matemático se le asigna un estatuto derivado, mientras que a la práctica se le dota de un lugar privilegiado. Los objetos matemáticos personales, según Godino y Batanero (1994, p. 335), son: “emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas”. Estos objetos personales van cobrando forma −van emergiendo en un aprendizaje suscitado por la propia práctica-, así que un objeto personal implica la generación de una regla de comportamiento en el sujeto.

Dado que el significado de un objeto personal consiste en las prácticas que hace la persona, dicho objeto personal se convierte en una posibilidad permanente de planificación de prácticas. El significado de un objeto personal queda entonces ligado a otros objetos personales y significados, puesto que en las prácticas intervienen diversos objetos personales. Aquí también se logra entrever el carácter tríadico de la semiótica de Peirce en cuanto a la terceridad que se recrea en un ciclo de signos permanente, y también podría verse aquí el primer supuesto de los obstáculos epistemológicos, que de un nivel de conocimiento y comprensión a otro, hay una necesidad de integración y reorganización. La cognición no es un proceso solo acumulativo: puede ser disruptivo y reconstruirse sobre las ruinas.

Con relación a los objetos matemáticos institucionales, se pueden considerar como entes que emergen progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Emergencia ésta que es progresiva a lo largo del tiempo. Un objeto institucional implica la generación de una regla de comportamiento compartida por toda la institución. (Godino y Batanero, 1994, p. 340)

Para el EOS, el alumno pasa de ser un alumno individual a ser un alumno-en-una-institución, la relación entre los significados de los objetos personales y los institucionales hay que pensarla básicamente en términos de "ajuste". Esta parte es clave y acerca al EOS con Radford sin perder de vista los objetos personales y los demás aspectos cognitivos. Se pretende que el significado de los objetos personales se ajuste lo más posible al significado de los objetos institucionales. Esta relación de ajuste es la que subyace y posibilita "la evaluación de los conocimientos de los alumnos, y es la que me parece potente, coherente y práctica para estudiar los tales obstáculos o conflictos semiótico de cualquiera de los órdenes enunciados, relación de ajuste que la veo mediada y medida por la normatividad. Esta parte de la teoría dota de metodologías y marcos teóricos aterrizados y prácticos a las investigaciones, es decir, se vuelve tangible lo que se va a medir en términos de los significados.

En el EOS se define conflictos semióticos como: "*Cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa"*; considera que cabe hacer la distinción entre el significado personal global, el declarado y el logrado. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se consideran como errores de aprendizaje. De acuerdo con Font (2000a) y Godino, Batanero y Font (2003):

- *Hablaremos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar*.

- *El término dificultad indicará el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que, si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja.*
  A veces el error no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras en las cuales se aplica indebidamente.
  Si un tipo de error se manifiesta en un cierto número de alumnos de manera persistente en una tarea, su origen se debe buscar en los conocimientos requeridos por la tarea, y no tanto en los propios alumnos. La complejidad semiótica asociada a la práctica matemática es una posible causa de las dificultades de aprendizaje. El análisis de la trama de funciones semióticas asociada al contenido matemático permite prever su grado de dificultad potencial e identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza.

- *Cuando el error se produce porque el alumno usa un conocimiento, que es válido en algunas circunstancias, en contextos donde no se puede aplicar decimos que existe un obstáculo. La superación del obstáculo requiere que el alumno construya un significado personal del objeto en cuestión suficientemente rico, de manera que la práctica que es adecuada en un cierto contexto no se use en otro en el que no es válida. Para ello será necesario, además, que los significados pretendidos e implementados sean suficientemente representativos de los significados de referencia.*

Los errores, dificultades y conflictos que tiene su origen en la complejidad semiótica o bien en la falta de representatividad de los significados pretendidos e implementados, en el EOS se llaman conflictos semióticos y conflictos epistémicos. Esta parte de la teoría de Godino y colaboradores es la que me tiende un puente, me posibilita un tránsito entre la escuela didáctica francesa clásica (Brousseau, en especial) de corte puramente cognitivo y nuevos enfoques más dinámicos más fluidos, que la permean de cultura y socialización en la interacción humana.

La noción de conflicto semiótico y sus tipos puede ser más flexible, al aplicarse en situaciones menos exigentes que la de obstáculo (según la concibe Brousseau), y además aporta una posible explicación: disparidad de significados. Según Godino en “Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática” (Seminario Doctorado I y II-2007), esta noción se puede interpretar en términos de “conflictos de significados”. Siempre que podemos decir que hay un obstáculo, existe un conflicto de significados, pero no necesariamente aparece como un conflicto semiótico percibido por el profesor o el estudiante mismo. Esta relación no se da la inversa, o sea no todo conflicto semiótico se genera por un obstáculo, en el sentido de Brousseau. Por tanto, la noción de conflicto semiótico puede ser una herramienta más flexible que la de obstáculo, pero no pueden confundirse. Los obstáculos epistemológicos más profundos no producen ningún conflicto en el estudiante ni en sus interacciones con los profesores y compañeros.

Los análisis a priori permiten formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales entre los cuales destacan, por su relevancia, aquellos que origina un libro de texto al dejar a cargo del alumno la realización de determinadas funciones semióticas que son básicas para la correcta interpretación del texto y que, de no producirse, pueden ocasionar una disparidad entre el significado personal global del alumno y el significado institucional pretendido. Por su parte, los análisis a posteriori permiten determinar los conflictos semióticos realmente producidos y contrastarlos con los detectados a priori. En el EOS, los conflictos semióticos se consideran como explicaciones de las dificultades y los significados pretendidos.

3.2 Una aproximación propia a una conceptualización de los obstáculos

De este panorama posible: obstáculo epistemológico, concepciones, obstáculos culturales, obstáculos didácticos, conflictos semióticos, epistémicos, cognitivos e interaccionales, misconcepciones, podemos ver que, reconociendo sus diferencias sustanciales, han existido en la literatura distintos modos de enunciar esas dificultades, errores, caídas, tropiezos que los maestros detectamos en nuestros estudiantes en las aulas de clase, en todos los niveles de escolaridad, en toda clase de instituciones y de diferentes maneras; sin embargo como el lector encontrara documentado en esta tesis, algunas de esas dificultades, caídas, tropiezos pasan desapercibidas para maestros y estudiantes sin generar conflicto alguno, y se ha focalizado el interés de los investigadores por indagar lo que subyace a tales dificultades con el afán de proponer categorías de análisis para explicarlas potencialmente.

Y ¿por qué fue importante presentar ese panorama de tendencias, de miradas y de perspectivas? ¿Por qué no solamente decir de entrada bajo qué mirada desarrollaremos la investigación? Por un lado, para resaltar la importancia de la problemática, por otro para caracterizar las tendencias y perspectivas actuales alrededor de los obstáculos y conflictos, y finalmente y sobre todo para "construir" un enfoque propio que se sustente con conocimiento de las diferentes miradas y perspectivas, y que sea lo suficientemente potente para dar cuenta de las "dificultades" detectadas.

Se va a entender aquí la noción de obstáculo como un conocimiento y no como una ausencia de conocimiento; como un conocimiento y no como un error; Un conocimiento que funciona bien en algunos contextos, pero que al ser aplicado en otros produce "errores". Un inconveniente concreto que se presente en algún tema y que se revele en los errores que se cometen, en las dudas, en la perplejidad, puede deberse a que no se tienen los conocimientos necesarios, o a que los que se tienen dificultan el trabajo. A diferencia del que falta, el conocimiento que sí está pero que provoca dificultades y conflictos, dudas y errores, es síntoma de la existencia de conocimientos previos –presentes o ausentes– que entorpecen y dificultan el aprendizaje. Una dificultad concreta que se presenta en un tema y que se revela en los errores que se cometen, en las dudas, en la perplejidad, puede deberse a que no se tienen los conocimientos necesarios, o puede deberse a que los conocimientos que sí se tienen dificultan el trabajo.

Esta misma diferencia se plantea en el tipo de errores detectados: accidentales, ocasionales, *lapsus* y errores sistemáticos, que se deben a algo… ¿a qué se deben? En la conceptualización de obstáculos planteamos como supuesto una contraposición entre el conocimiento ausente (ignorancias) y el presente, pero dificultante que son los obstáculos. Esta es una variable importante para precisar lo que son los obstáculos: que son conocimiento, y no falta de él.

Aquí concebimos los errores como síntomas, indicadores de la posible existencia de obstáculos. Aquí la palabra error no se entiende como juicio calificador o término que juzga un comportamiento, conducta o respuesta errónea del estudiante, sino como aquella conducta que no sigue las reglas institucionales. Los errores, en el marco teórico de esta investigación, se consideran como los síntomas de los obstáculos; como las manifestaciones visibles de las dificultades que emergen en las prácticas educativas; y los obstáculos como la posible causa atribuida a esos errores; los obstáculos se convierten en la etiología que explica, epistemológicamente hablando, tal o cual error.

Se reconoce creatividad en los errores que cometen los estudiantes, comprensiones divergentes de las preguntas formuladas. Se trata de no cargar la palabra semánticamente con la tradición que la asocia al enjuiciamiento peyorativo y calificativo hacia los estudiantes. Los errores –mirados de esa manera– se convierten en la fuente de indagación más importante, pues los obstáculos pueden inferirse de los errores en las prácticas y de la dificultad experimentada por los que participan en ellas.

Si la conducta errática se repite sistemáticamente, se le ha de buscar la etiología en algo que no se reduce a la habilidad motora incipiente. Esa conducta, error, equivocación, violación de la regla institucional, es un síntoma de que ahí hay un obstáculo que no depende de falta de habilidades; vendrá entonces la caracterización para precisar su naturaleza, sea que genere o no algún tipo de conflicto.

Concebimos obstáculo como un constructo del que suponemos o inferimos su presencia como fuente de los errores sistemáticos y de las dificultades experimentadas por los estudiantes en las PEU. Es una atribución de causalidad a las dificultades manifiestas por los estudiantes en las PEUC.

Para entender las reservas sobre el calificativo "epistemológico" que encontramos en Radford, llamémoslo obstáculo cognitivo o didáctico, pues se debe a un conocimiento presente en el estudiante en un proceso cognitivo de aprendizaje, sin decidir todavía si es solo de orden cognitivo individual en el EOS, o también es de orden epistémico de la comunidad académica de referencia, o si es generado por la didáctica presente en las practicas.

3.3 Análisis didáctico del EOS y categorías descriptivas

3.3.1. Configuración ontosemiótica

Un modelo teórico emergente en la educación matemática, que ha ido ganando cada vez más importancia a nivel mundial, es el enfoque onto-semiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), modelo que intenta articular varias perspectivas de la disciplina y dimensiones involucradas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En cuanto al sistema de prácticas distingue dos tipos:

- Las prácticas personales que realiza una persona para llegar a la solución de un problema matemático determinado.
- Las prácticas institucionales realizadas por varias personas en el seno de una intuición para llegar a la solución de un problema matemático.

Según el EOS (Godino, 2016) la noción de *configuración ontosemiótica* (de prácticas, objetos y procesos) responde a la necesidad de identificar los objetos y procesos que intervienen y emergen en las prácticas matemáticas, y afirman que el reconocimiento de tales objetos y procesos permite, entre otras cosas, prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, e identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) relacionados tal como aparece en sus escritos en la siguiente figura.

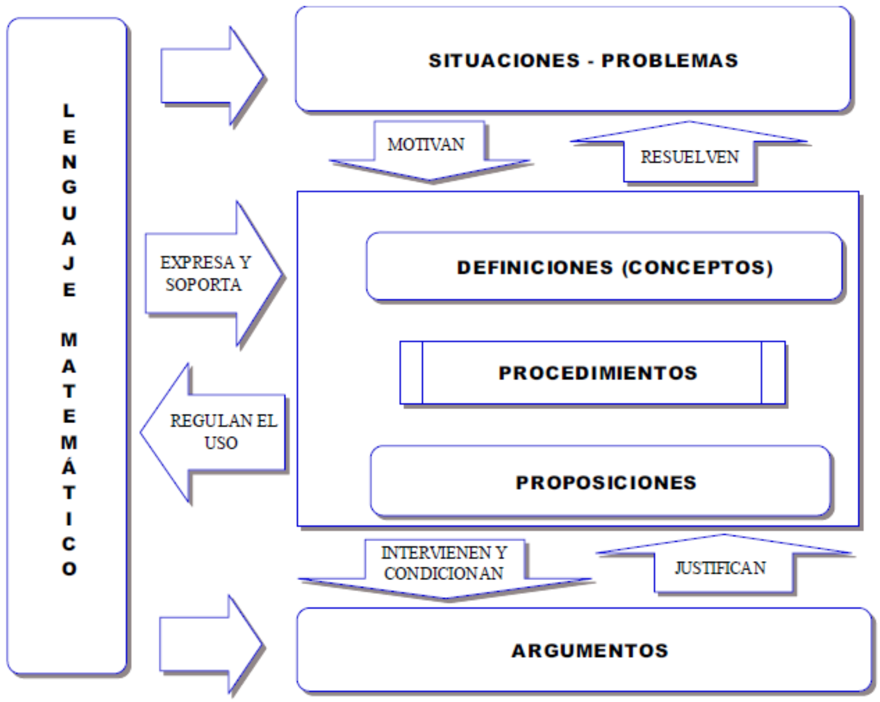


Figura 1. Configuración de objetos primarios

También afirman que con esta herramienta teórica se trata de responder a las cuestiones como: ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos activadas en las prácticas matemáticas necesarias para resolver un tipo de tareas matemáticas? (configuraciones epistémicas), ¿Qué objetos y procesos matemáticos pone en juego el estudiante para resolver un tipo de tareas matemáticas? (configuraciones cognitivas) y ¿Qué prácticas personales, objetos y procesos implicados en las mismas, realizadas por el estudiante son válidas desde la perspectiva institucional?

Dentro de los procedimientos aparecen acciones, actitudes, tareas, operaciones que necesita una interpretación conceptual. Los procedimientos pueden ser analíticos (desarrollo de un límite), graficas (una tabla), gestuales (una señal) … En cuanto a los argumentos, ellos son importantes por la razón lógica que los sustenta.

Por otro lado, la herramienta configuración ontosemiótica incorpora nociones de concepto, concepción, esquema, praxeología matemática y registro de representación semiótica. Para el EOS un objeto abstracto es entendido como una entidad: Inmaterial (no ostensiva), General (intensiva); que a su vez se puede considerar de manera: Unitaria (como regla) o sistémica (configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos), Personal (mental) o institucional (sociocultural) y Antecedente (significante) o consecuente (significado) en una relación semiótica.

Afirma también que el proceso de abstracción mediante el cual emergen o se construyen los objetos abstractos conlleva el concurso de otros procesos cognitivos - epistémicos más básicos: generalización, idealización (entendida como desmaterialización), unitarización (reificación, cosificación), significación, representación. La articulación de estos elementos se aprecia en la siguiente figura tomada de Godino(2016).

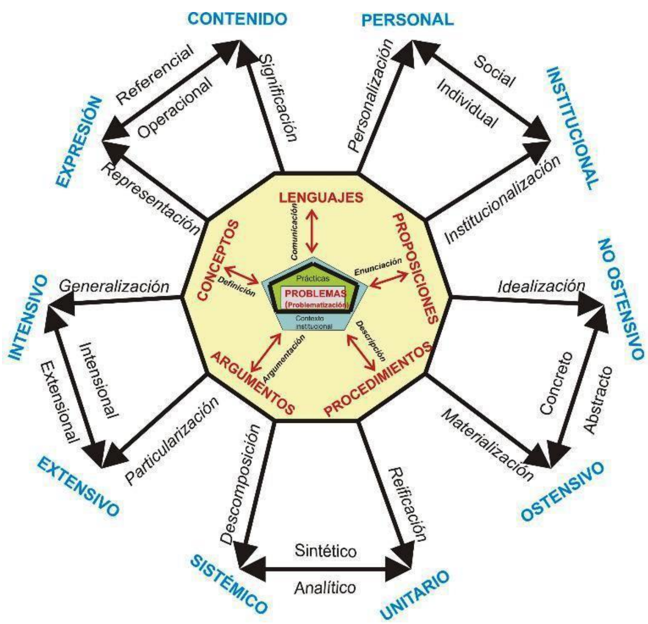


Figura 2. Configuración ontosemiótica

Según el EOS se aplica esta configuración para que se pueda observar o comprender que un objeto abstracto es entendido como una entidad que puede ser, Inmaterial, General y que a su vez se puede considerar, unitario, personal, antecedente o consecuente. Esto nos lleva a otros procesos los cuales son: generalización, idealización (entendida como desmaterialización), unitarización (reificación, cosificación), significación, representación, que complementan la configuración ontosemiótica.

3.3.2 Configuración didáctica

El EOS (Godino, 2016) define la noción de *configuración didáctica* como cualquier segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) comprendido entre el inicio y fin de una tarea, que incluye las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar la tarea.

Distinguen tres tipos de configuraciones:

- *Configuración epistémica:* (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos institucionales requeridos en la tarea).

- C*onfiguración instruccional* (sistema de funciones docentes, discentes y medios instruccionales que se utilizan, así como las interacciones entre los distintos componentes).

- C*onfiguración cognitiva – afectiva:* (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos personales que describe el aprendizaje y los componentes afectivos que le acompañan).

3.4 Análisis de facetas de idoneidad didáctica

Según Font y Godino el **Enfoque Ontosemiótico** (EOS) es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Con dicho fin se adopta una perspectiva global, teniendo en cuenta las diversas dimensiones implicadas y las interacciones entre las mismas, como se representa en la figura 3. Se resalta el carácter relacional y multidimensional de la enseñanza de las matemáticas. “La enseñanza es relacional. Los profesores, los estudiantes, y el contenido sólo se pueden comprender unos en relación con los otros.

Figura 3. Facetas y niveles de análisis didáctico

Establecen que las idoneidades epistémica (grado de representatividad de los significados institucionales implementados o pretendidos, respecto de un significado de referencia) y cognitiva (grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos) no se pueden reducir a los componentes conceptuales, procedimentales y actitudinales; que la noción de idoneidad didáctica se puede aplicar de manera puntual, en una sesión de clase, o de manera global, en una propuesta curricular.

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones y criterios según Batanero (2013) fueron introducidas en trabajos previos (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2011) como herramienta de paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa, esto es, orientada hacia la intervención efectiva en el aula. Esta se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Batanero y Font, 2007):

- Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

- Idoneidad cognitiva, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- Idoneidad interaccional. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.
- Idoneidad afectiva, grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- Idoneidad ecológica, grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

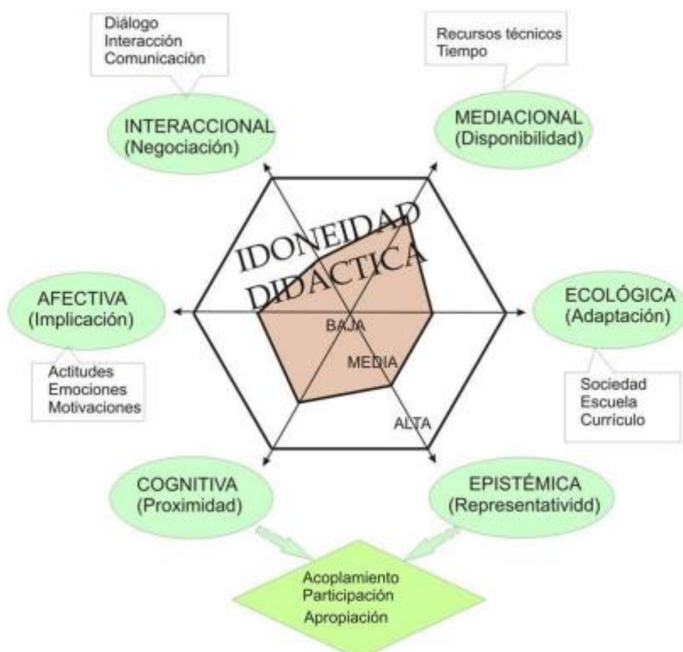


Figura 4. Idoneidad didáctica

Representan mediante un hexágono regular la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio El hexágono irregular interno correspondería a las idoneidades efectivamente logradas en la realización de un proceso de estudio implementado, y sitúan en la base las idoneidades epistémica y cognitiva al considerar que el proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de unos conocimientos específicos.

Las idoneidades epistémica y cognitiva no se pueden reducir a los componentes conceptuales, procedimentales y actitudinales, como habitualmente se considera en las propuestas curriculares. El primer paso para poder confeccionar un programa de estudio es determinar qué es idóneo desde los puntos de vista epistémico y cognitivo (así como la coordinación de estas idoneidades). La ontología (junto con las facetas duales) propuesta por el EOS permite describir las idoneidades epistémica y cognitiva en términos de configuraciones epistémicas y cognitivas (conglomerado de situaciones-problema, definiciones, procedimientos, proposiciones, lenguajes y argumentos). El núcleo de dichas configuraciones son las situaciones-problemas seleccionadas para contextualizar y personalizar los significados.

Primer nivel: Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Se mira el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos dos lenguajes son parte de conceptos, preposiciones y procedimientos que están en la elaboración de argumentos para decidir las acciones simples, en conclusión, cuando alguien tiende hacer una práctica matemática activa situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que están presentes en un lenguaje matemático.

Además, aparecen estas tipologías que se basan en el lenguaje matemático que son:

- Elementos lingüísticos: están términos, expresiones, notaciones y gráficos también están de forma escrita, oral y gestual.
- Situaciones-problemas: se encuentran las aplicaciones matemáticas, tareas y ejercicios.
- Proposiciones: son enunciados que se encuentran según el concepto.
- Procedimientos: son los algoritmos, operaciones y técnicas de cálculo.
- Argumentos: se articulan con las preposiciones y procedimientos para validar una explicación sobre un tema en específico.
- Conceptos: definición (introducido mediante definiciones o descripciones).

Las situaciones-problemas son el origen de las actividades; el lenguaje sirve para representar las ideas y sirve de instrumento para la acción y los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos.

La consideración de una entidad como primaria no es cuestión absoluta, sino que es relativa, se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje, además está relacionada con un carácter recursivo, en el sentido de cada objeto que depende de un nivel de análisis que se componen de las demás entidades como el argumento en el que se basan los conceptos, preposiciones y procedimientos.

En conclusión, la noción de ``sistema de prácticas`` es utilizado en análisis de tipo macro didáctico, en un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los tipos de entidades que están anteriormente como: situaciones-problemas, lenguajes, definiciones, preposiciones, procedimientos y argumentos.

Segundo nivel: Atributos contextuales

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) es muy importante porque se considera junto con la noción de institución, también están los objetos matemáticos que intervienen en prácticas matemáticas y emergentes de estas mismas, según el juego del lenguaje se considera en las siguientes facetas de (Godino, 2002):

- Personal-institucional: los objetos emergentes se consideran ``objetos institucionales``, mientras si son específicos de una persona se consideran como ``objetos personales`` (Godino y Batanero, 1994, p.38). En una cognición matemática se debe tener en cuenta las facetas personales e institucionales, en las que se establece relaciones dialécticas complejas y son esenciales para la educación matemática. La ``cognición personal`` es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante varios problemas, además, se encuentra la ``cognición institucional`` es el dialogo, el convenio y la regulación en un grupo de individuos que forman comunidad de prácticas.
- Ostensivo-no ostensivo: En el ostensivo se entiende que cualquier objeto es público en donde se puede mostrar a otro, en los objetos institucionales y personales tiene una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por si mismos). Cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones y símbolos), en la clasificación de ostensivo y no ostensivo es relativa dependiendo el juego del lenguaje en el que participan, el objeto ostensivo es sujeto al discurso implícito en el discurso matemático (el signo de multiplicar y la notación algebraica).
- Expresión-contenido: La actividad matemática, los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se relacionan esencialmente, los objetos no se conciben como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros, existe una relación que es semiótica entendidas en un antecedente (expresión significante) y un consecuente (contenido, significado) establece un sujeto (persona o institución) que se corresponde a un código de correspondencia.
- Extensivo-intensivo (ejemplar-tipo): se relaciona con un objeto de caso particular (por ejemplo: la función $y = 2x + 1$) y la clase general (por ejemplo: la familia de funciones $y = mx + n$). la dualidad extensivo-intensiva se utiliza para las características básicas de la actividad matemática, se centra en la dialéctica entre lo particular y general que es la clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático.
- Unitario- sistemático: Los objetos matemáticos participan como entidades unitarias, otras se deben descomponer para su estudio, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal es muy conocido y va como entidad unitaria, además deben considerarse un aprendizaje sistemático.

Tercer nivel de análisis: configuraciones y trayectorias didácticas

El centro de atención del análisis didáctico debiera progresar desde la situación –problema (o del concepto/ estructura conceptual) a la configuración epistémica/ cognitiva, y de ésta hacia la configuración didáctica –que incluye no sólo el saber y los sujetos sino también el papel del profesor, los recursos y las interacciones entre los diversos componentes. En la siguiente etapa el análisis didáctico debe contemplar la trayectoria o secuencia de configuraciones didácticas, esto es, el progresivo “crecimiento matemático” de los aprendizajes.

Cuarto nivel de análisis: dimensión normativa

La educación, como cualquier actividad social, es una actividad regulada, en algunos aspectos de manera explícita y en otros implícitamente. Desde el nivel más general de las directrices curriculares, fijadas con frecuencia con decretos oficiales, incluso mediante leyes orgánicas, hasta los comportamientos de cortesía y respeto mutuo entre profesor y alumnos, los procesos de enseñanza y aprendizaje están regulados por normas, convenciones, hábitos, costumbres, tradiciones, ... Todos estos elementos reguladores conforman lo que se denomina la "dimensión normativa de los procesos de estudio". Una empresa prioritaria del análisis didáctico debe ser el estudio de esta "dimensión normativa" para, por un lado, poder describir con mayor precisión el funcionamiento de los procesos cognitivos e instruccionales normados y, por otro, incidir en aspectos de la dimensión normativa (modificándolos si fuera necesario) para facilitar la mejora de dichos procesos de estudio de las matemáticas. La noción de dimensión normativa (que incluye también los aspectos metanormativos) ha sido introducida en Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2007) y en D'Amore, Font y Godino (2007).

Quinto nivel de análisis: idoneidad didáctica

Los análisis precedentes tienen una orientación descriptiva (¿qué puede ocurrir, o qué ha ocurrido?, ...), y explicativa (¿por qué han actuado del tal modo el profesor y los estudiantes?, ...). Estos análisis deben proporcionar información para emitir un juicio valorativo sobre el proceso de estudio, abordable en el EOS mediante la aplicación de la noción de *idoneidad didáctica* (Figura 6), desarrollada en Godino, Contreras y Font (2006), Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007).

Indicadores de idoneidad didáctica

La noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o "incidentes didácticos" puntuales.

Idoneidad epistémica: un proceso de estudio matemático, tiene mayor idoneidad epistémica en la medida en que los contenidos implementados (o pretendidos) representan bien a los contenidos de referencia.

Tabla 3. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica (matemática)

COMPONENTES:	INDICADORES:
Situaciones-Problemas	- Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación - Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	- Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, grafica, simbólica…), traducciones y conversaciones entre las mismas - Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige - Se propone situaciones de expresión matemática e interpretación

Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	- Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirige - Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos
Argumentos	- Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirige - Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar
Relaciones	- Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proporciones, etc.) se relacionan y conectan entre si - Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las practicas matemáticas

Idoneidad cognitiva: Definimos la idoneidad cognitiva como el grado en que los contenidos implementados (o pretendidos) son adecuados para los alumnos, es decir, están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos. En la siguiente tabla se incluyen los componentes e indicadores seleccionados.

Tabla 4. Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

COMPONENTES:	INDICADORES:
conocimientos previos (Se tiene en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	- Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planea su estudio) - Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversos componentes
Adaptación curricular a las diferencias individuales	- Se incluyen actividades de ampliación y refuerzo - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes
Aprendizaje: (se tiene en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistematica)	- Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, compresiones y competencias pretendidas: o Comprensión conceptual y proposicional competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia meta cognitiva - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia - Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones

En el marco del EOS se asume que el aprendizaje implica la apropiación de los significados institucionales pretendidos por parte de los estudiantes, mediante la participación en la comunidad de prácticas generada en la clase. Supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados. Los significados son entendidos en términos de prácticas operativas y discursivas y supone además el reconocimiento e interrelación de los objetos que intervienen en dichas prácticas.

Idoneidad afectiva: La emisión de un juicio sobre la mayor o menor idoneidad afectiva del proceso en cuestión se basa en el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes. En la siguiente tabla se incluyen los componentes e indicadores seleccionados.

Tabla 5. Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

COMPONENTES:	INDICADORES:
Intereses y necesidades	- las tareas tienen interés para los alumnos - se propone situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional
Actitudes	- Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. - Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quien lo dice
Emociones	- Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas - Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

La resolución de cualquier problema matemático lleva asociada una situación afectiva para el sujeto implicado, quien pone en juego no solamente prácticas operativas y discursivas para dar una respuesta al problema, sino también moviliza creencias, actitudes, emociones o valores que condicionan en mayor o menor grado y diferente sentido la respuesta cognitiva requerida.

Idoneidad interaccional: Es el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado, favorecen la autonomía en el aprendizaje y el desarrollo de competencias comunicativas. En la siguiente tabla se incluyen algunos indicadores de idoneidad referidos a las interacciones entre el profesor y los estudiantes y entre los propios estudiantes.

Tabla 6. Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

COMPONENTES:	INDICADORES:
Interacción docente-discente	- El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) - Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.) - Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento - Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos - Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase
Interacción entre alumnos	- Favorece el dialogo y comunicación entre los estudiantes

	- Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la valides de sus afirmaciones conjeturas y respuestas apoyándose en argumentos matemáticos - Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión
Autonomía	- Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
Evaluación formativa	- Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos

La importancia del discurso, el diálogo, la conversación en la clase es resaltada por diversos autores: “La naturaleza del discurso matemático es una característica central de la práctica de la clase”.

Idoneidad mediacional: Se entiende la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El uso apropiado de la tecnología es uno de los principios formulados por el NCTM (2000, p.24), indicándose, “La tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Este medio puede influenciar positivamente en lo que se enseña y, a su vez, incrementar el aprendizaje de los estudiantes”.

Tabla 7. Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

COMPONENTES:	INDICADORES:
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	- Se usan materiales manipulativos e informativos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido - Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	- El número y distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida - El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora) - El aula y a distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso institucional pretendido
Tiempo (de enseñanza colectiva/tutorización; tiempo de aprendizaje)	- El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida - Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema - Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de compresión

Idoneidad ecológica: La idoneidad ecológica se refiere al grado en que un plan o acción formativa para aprender matemáticas resulta adecuado dentro del entorno en que se utiliza. Por entorno entendemos todo lo que está fuera del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en la misma. Así, nos podemos referir a todo lo que viene en general determinado por la sociedad, la escuela, la pedagogía, la didáctica de las matemáticas.

Tabla 8. Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

COMPONENTES:	INDICADORES:
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares
Apertura hacia la innovación didáctica	- Innovación basada en la investigación y la practica reflexiva - Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo
Adaptación socio-profesional y cultural	- Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento critico
Conexiones intra e interdisciplinarias	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinarias

El EOS finalmente concluye que la noción de idoneidad didáctica proporciona una síntesis global sobre los procesos de estudio matemático, pero su aplicación requiere realizar los análisis previos de las diversas dimensiones implicadas. En particular, la idoneidad epistémica requiere caracterizar los tipos de problemas, los sistemas de prácticas institucionales correspondientes, así como la reconstrucción de las configuraciones y procesos matemáticos implicados. La idoneidad cognitiva precisa elaborar información detallada de los significados personales y la identificación de conflictos semióticos potenciales. La idoneidad interaccional y mediacional requiere analizar las trayectorias de estudio y las interacciones didácticas entre el docente, los estudiantes y los medios disponibles. El análisis de las normas ayudará a comprender los factores ecológicos que condicionan los procesos de estudio, y por tanto la valoración de la idoneidad ecológica.

La noción de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores empíricos, ha sido introducida a partir de un modelo explícito sobre el conocimiento matemático sobre bases pragmatistas - antropológicas. La introducción de la dualidad personal - institucional de los sistemas de prácticas y de las configuraciones de objetos y procesos permite aplicar sistemas de categorías similares para describir el conocimiento de los sujetos individuales y el conocimiento institucional, para el cual se postula un tipo de realidad objetiva, aunque culturalmente relativa. Otra noción clave del EOS es la de significado, entendido como contenido de las funciones semióticas, o relaciones entre objetos, configuraciones y sistemas de prácticas, la cual permite concebir el aprendizaje en términos de apropiación de significados.

La teoría de la idoneidad didáctica trata de interrelacionar las distintas facetas que intervienen en el diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. Las nociones de idoneidad epistémica y ecológica y el sistema de indicadores asociados constituyen el germen de una teoría curricular, mientras que los correspondientes a las facetas cognitiva – afectiva lo constituye para una teoría del aprendizaje. Las facetas interaccional y mediacional contienen, a su vez, el germen de una teoría de la enseñanza.

A continuación, se presentas algunas ideas fundamentales de la Teoría de los Registros de Representación semiótica de Raymond Duval, a los que acudimos para la comprensión de algunos objetos descritos en la configuración ontosemiotica como lenguajes, proposiciones, argumentos, definiciones y conceptos.

3.5 Enfoque Noético-Semiótico (ENS) de Raymond Duval

En la perspectiva de Duval (2006a), las matemáticas se distinguen de otras áreas del conocimiento, entre otros aspectos, en que el único acceso a sus objetos es de naturaleza semiótica: solo se conocen por la vía de sus representaciones semióticas, cada una de las cuales pertenece a un registro semiótico específico RSR(m). Según el registro al que pertenezca, cada una de las representaciones de un objeto matemático solo lo puede presentar parcialmente: no presenta las mismas propiedades o características del objeto que pueden presentar otras representaciones del mismo registro o de otros registros, y recíprocamente, ninguna representación en ningún registro es completa y adecuada al objeto.

Además, según la naturaleza del sistema productor de la representación o registro semiótico RSR, y el modo fenomenológico de producción de sus representaciones, se habla entonces de representaciones semióticas de producción intencional, para distinguirlas de las representaciones neurales, cuya producción no es intencional sino automática, en tanto se involucran procesos motores, sensoriales y neuronales. Dicho de otra manera, una representación semiótica se produce con signos y reglas de uso que llevan un carácter intencional; en cambio, las representaciones no semióticas no tienen este carácter intencional. Pueden ser producidas por un sistema orgánico o físico, como en el caso de una huella en la arena o una fotografía, incluso una pintura. En efecto, Duval (2006a), señala dos características que distinguen el papel central y particular de las representaciones semióticas en matemáticas que pueden ayudar a los alumnos a no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas.

En primer lugar, las representaciones semióticas son importantes en la medida en que pueden transformarse en otras representaciones semióticas pertenecientes al mismo registro RSR(m) o a otro registro RSR(n). Según Duval (2006a), las transformaciones de representaciones semióticas se pueden clasificar en dos tipos. Por una parte, el tratamiento, como transformación de una representación en otra representación de un mismo registro, y la conversión, como transformación de la representación de un objeto en un registro en otra representación del mismo objeto en otro registro. Así pues, las representaciones semióticas son importantes porque se las puede utilizar para efectuar tratamientos, como razonamientos simbólicos aritméticos, algebraicos o analíticos, y para hacer cálculos internos en el mismo registro, o para hacer conversiones de una representación semiótica RS(m, k) perteneciente a un registro RSR(m) a otra representación RS(n, l) perteneciente a otro registro diferente RSR(n).

En segundo lugar, es necesario recurrir a tipos diferentes de representaciones semióticas producidas por dos o más registros diferentes, ya que cada RS(m, k) como sistema semiótico ya producido ofrece posibilidades diferentes de tratamiento según el sistema semiótico productor o registro RS(m) que la produzca y presenta diferentes aspectos del mismo objeto matemático que pueden aparecer mejor a través de conversiones a representaciones de otros registros. Piénsese por ejemplo en la representación de los primeros cuatro números de contar levantando uno o varios dedos de la mano derecha; o con palitos o muescas como I, II, III, IIII; o en numeración romana como I, II, III, IV, en numeración griega como las letras alfa, beta, gama y delta, y en la sino-indo-arábiga decimal como 1, 2, 3, 4, mientras que en otro registro semiótico diferente, como la numeración en base cuatro ya el mismo número cuatro no tiene numeral propio, sino que habría que escribirlo ‘10’, aunque en base tres sería ‘11’ y en base dos ‘100’. Cada numeración en base natural b de dos en adelante es un registro diferente, y en el caso de n=16 o hexadecimal digital, se utilizan también literales como A, B, C, D, E, F, G que sirven, así como dígitos para los números representados por los numerales decimales 10, 11, 12, 13, 14 y 15.

Es decir, el punto fundamental en la actividad matemática no es la utilización de representaciones semióticas, lo cual es necesario e ineludible, sino la capacidad para pasar de una representación semiótica a otra representación semiótica del mismo objeto en el mismo registro o en otro registro.

Desde esta perspectiva se postula que las representaciones en matemáticas son de naturaleza semiótica intencional y que toda actividad matemática implica el recurso a representaciones semióticas y a sus transformaciones (tratamientos o conversiones), porque los objetos estudiados no son accesibles perceptiva o instrumentalmente, como en otros ámbitos de conocimiento científico; es decir, sólo se puede acceder a los objetos matemáticos mediante sus representaciones semióticas, pero no se puede confundir el objeto con ninguna de sus representaciones.

En la Didáctica de las Matemáticas en cuanto a la enseñanza, para Duval es crucial presentar a los estudiantes el mismo objeto matemático a través de representaciones diferentes producidas por registros semióticos diferentes, al menos dos de ellos y preferiblemente más, así como distinguir claramente y enseñar a efectuar los dos tipos de transformaciones semióticas, los tratamientos y las conversiones. En cuanto al aprendizaje, Duval es radical al precisar la comprensión en matemáticas como la habilidad para articular distintos registros de representación con el fin de construir y estudiar los objetos matemáticos a través de las conversiones y los tratamientos. Esta precisión duvaliana de lo que es comprender un sistema conceptual de objetos matemáticos con sus relaciones y sus operaciones permite orientar eficazmente los procesos de enseñanza, de aprendizaje y de evaluación.

Cuando se le brinda al estudiante una pluralidad de representaciones del mismo objeto matemático, se le están brindando mayores posibilidades de comprensión de ese objeto; pero no basta el carácter multi-representacional, es decir, no es suficiente representar de diversas maneras un mismo objeto en un registro, por potente que sea, como el verba oral o el verbal escrito, si no se garantiza también mediante el trabajo cognitivo de carácter multi-registro el reconocimiento del mismo objeto en distintas representaciones de los diferentes registros.

Por ejemplo, el objeto “mitad”, se puede representar como ‘el 50%’ en un registro numérico porcentual, o como ‘0,5’ en el decimal usual, o como ‘½’ en el fraccional, o como “un medio” o “la mitad de” en el verbal escrito, o como un cuadrado dividido en dos partes rectangulares iguales con una de ellas sombreada en un registro gráfico areal, o como ‘|—I—|’ en otro registro gráfico lineal. El objeto mental se construye en la medida en que se detecta aquello que permanece invariante ante las conversiones de sus representaciones de un registro a otro o ante los tratamientos dentro de un mismo registro, como en el caso de escribir ‘½ = 2/4 = 0,5 = 0,50’ en el registro numérico decimal usual.

Acerca de la comprensión de los estudiantes, Duval (2006a) manifiesta la importancia que tiene para los profesores el hecho de que los alumnos usen diferentes representaciones en el aprendizaje de objetos y conceptos matemáticos, pero a la vez resalta que el tema principal en la formación inicial y continuada de los docentes es saber cuáles son los tipos de tareas y actividades sirven para lograr este propósito, que dificultades ofrece cada registro y qué potencial presenta para apoyar y guiar la detección de distintos aspectos y propiedades de cada objeto matemático por cada tipo de estudiantes y situaciones.

Al parecer la idea más obvia es exponer varias posibles representaciones al mismo tiempo. Pero, desde un punto de vista didáctico estas actividades por sí mismas no suelen llegar muy lejos, dado que toda representación comporta dos dimensiones semánticas que pueden dificultar la aprehensión del objeto: la del contenido que representa solo parcialmente, y que es intrínseca al registro movilizado, y la del objeto que representa, que es independiente del registro que se moviliza, pero que también puede capturarse solo parcialmente en una sola representación de ese registro.

3.6 Algunas consideraciones acerca de las prácticas educativas universitarias vinculadas con el trabajo inicial en el cálculo diferencial

Se considera en esta investigación, que las prácticas educativas universitarias vinculadas con el trabajo inicial en el cálculo diferencial PEUC de los estudiantes de primer semestre de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital incluyen las prácticas discursivas y no discursivas usuales con que estudiantes y maestros “viven” las clases, con las que participan en el aula de clase alrededor de las temáticas propias de la disciplina. Contienen, entre otras, las formas de “hacer tareas”, de discutir con otros, de estudiar individualmente y en grupo, de participar.

En esta investigación se indaga la entrada al mundo del cálculo diferencial en un curso más formal que el acercamiento que da el bachillerato, como fuente rica de información acerca de los obstáculos epistemológicos, semióticos, culturales, didácticos, o de la naturaleza que sea, precisamente en ese trabajo inicial, porque se empieza a construir un lenguaje, una forma de nominar, un rigor, un hacer que permea la práctica. Porque se empiezan a tratar funciones como objetos, sobre los cuales se van a definir límites, continuidad y derivadas. Porque se habla, se escribe y se significa de una cierta manera: es ahí donde se ubica esta investigación que parte del supuesto que esa Transición del álgebra al cálculo que conforma lo que hemos denominado trabajo inicial, es fuente de indagación importante.

Se concibe la práctica configurada también por las actividades de estudiantes y maestros, por el contexto, el medio, el "currículo oculto" y el explícito por el que transita un "curso".

La práctica escolar (el término escolar solo se usa por el hecho de estar inscrito en una institución educativa, no hace referencia a la escuela primaria exclusivamente, sino a la escuela de formación formal del nivel que sea, en ese caso universitario) implica la apropiación de unas prácticas, cuyo sentido está dado por la práctica misma, y crean una cultura propia. Se caracterizan porque constituyen una realidad colectiva, delimitan un espacio específico, actúan en unos límites temporales determinados, definen roles, predeterminan y sistematizan contenidos y proponen formas de aprendizaje descontextualizado, pues los alumnos construyen sus propios procesos intelectuales, compartiendo medios semióticos, como la escritura, o formales como las matemáticas.

Se describen a continuación algunos elementos constitutivos de esas prácticas, como los esquemas de clases, los textos usados, las tareas y ejercicios, las evaluaciones, los planes de estudio, los perfiles de profesor y el tratamiento más o menos general de algunas nociones. Descripción basada no solo en la experiencia personal y la observación, sino confirmada a través de diálogos, entrevistas con un número significativo de maestros del ciclo básico de ingeniería de varias universidades colombianas, además de consultas con documentos curricularmente institucionalizados en el área de matemáticas de la facultad de ingeniería. Toda esta parte constituye lo institucional en el EOS.

- ♦ *Acerca de los esquemas de clase.* Las clases de introducción al cálculo diferencial en la universidad colombiana, en la Universidad Distrital y, específicamente, en su Facultad de Ingeniería, son clases tradicionales,[16] en las que el profesor explica los contenidos inscrito en el esquema convencional: definiciones, teoremas,[17] ejemplos, ejercicios generalmente basados en un texto guía o de consulta, en los que el tratamiento de las temáticas es usualmente el mismo. No hay espacios para elaboración de talleres y trabajos en grupo.

- ♦ *Acerca de los textos guía y de consulta.* Los textos más utilizados (impresos o ahora en formato PDF) son Cálculo o Introducción al Cálculo, de autores como Stewart, Thomas, Swokowski, Purcell, Leithold, Protter, Larson; libros que han reinado como textos guía según

[16] Se reconoce que hay esfuerzos individuales innovadores y también algunos mediados por la tecnología. Pero la generalidad, la institucionalidad del enfoque del área y del ciclo básico de ingeniería está diseñado sobre una metodología tradicional.

[17] Los teoremas tienden a desaparecer de la clase tradicional, no sus enunciados, sino sus demostraciones formales; a cambio, lo que generalmente se hace son "mostraciones" argumentadas del hecho que enuncia el teorema.

se vuelvan paradigmáticos en algunas facultades, como las de la Universidad Nacional, las de Los Andes, la Escuela Colombiana de Ingeniería… Todos ellos comparten un enfoque tradicional de por lo menos 50 años.[18]

♦ *Acerca de las tareas y ejercicios*. Lo usual es que cada profesor disponga de un repertorio o archivo personal referente a ejercicios que ilustran mejor una situación, comúnmente tomados de los libros, de los solucionarios o generados en grupos de trabajo de docentes. Esto se puede corroborar en las notas de clase que publican algunos maestros por medio de la Oficina de Publicaciones de la Universidad Distrital, como también en las guías dejadas por los profesores en las fotocopiadoras convencionales de las facultades.

Se aclara, por supuesto, que el hecho de que el tratamiento sea clásico, convencional o tradicional, no significa que no se haga un buen trabajo, comprometido, responsable y guiado hacia lo que se considera juega un rol importante en el desarrollo conceptual de los estudiantes, es decir que puede tener una alta idoneidad epistémica, usando la terminología del EOS.

♦ *Acerca de las evaluaciones*. Hay parciales y exámenes conjuntos, lo cual lleva al necesario consenso acerca de contenidos, enfoques, temáticas y metodologías. Los profesores llevan propuestas de evaluación y se conforma así la prueba, que se convierte en un verdadero sufrimiento para los estudiantes, pues la "mortalidad" es significativamente alta en estas pruebas conjuntas: se vuelven todo un reto, se advierte sin embargo que últimamente han desaparecido las pruebas finales conjuntas por los problemas de protestas, de paros, de tiempo de semestres recortados.

♦ *Acerca del currículo general de ingeniería en la Universidad Distrital*. Hay un ciclo básico en matemáticas que comprenden cálculo diferencial, cálculo integral, álgebra lineal, lógica, cálculo multivariado y ecuaciones diferenciales.

Consultados los planes de estudio de facultades de ingeniería de varias universidades –Nacional, Distrital, Andes, La Salle, Central, Gran Colombia, Piloto, Antonio Nariño, UIS, América, Autónoma, Javeriana, Escuela Colombiana de Ingeniería, UPTC– hay un consenso general acerca de los contenidos de los cursos que constituyen el Cálculo I (diferencial) y el Cálculo II (integral); en muchos casos los mismos profesores dictan los cursos en unas y otras universidades. *El syllabus de cálculo diferencial de la Universidad Distrital se ha dispuesto en el archivo de Anexos.*

♦ *Acerca del perfil del profesor en ingeniería.* En general, el perfil requerido es matemático o licenciado en matemáticas con posgrado en el área. Se encuentran profesores egresados de las

---

[18] Por citar un ejemplo, la primera edición del Cálculo de Thomas es de 1952, y van en la 12ª edición. Si comparamos la edición de 1945 y la de 1995, podemos efectivamente confirmar su enfoque tradicional.

Universidades Nacional, Pedagógica, Distrital y de los Andes principalmente, quienes usualmente dictan en más de una universidad; una gran cantidad cuenta con maestría en matemáticas o en áreas de la ingeniería; muy pocos tienen especializaciones o estudios en educación o en educación matemática. Ni en el área de matemáticas –ni en ningún área del ciclo de especialización en ingeniería en sí– la pedagogía y la didáctica son consideradas un problema, pues se parte del hecho de que saber la materia es suficiente para saber enseñar, y en algunos casos, algunos se desempeñan con exactamente los conocimientos que recibieron en sus carreras, es decir, los ingenieros con las matemáticas que vieron en sus respectivos pensum de formación de pregrado.

♦ Acerca del tratamiento del cálculo diferencial en libros de texto: Los libros más utilizados ya enunciados si bien algunos acuden a la historia de la matemática como anécdota, se encuentra un tratamiento en general formal desde el punto de vista de favorecer un esquema basado en definiciones, ejemplos y ejercicios propuestos, los teoremas básicos en general no se demuestran desde el punto de vista formal matemático y los ejercicios propuestos en general son de un nivel apropiado para estudiantes de ingeniería, es decir, no muy abstractos, ni tampoco muy superficiales.

CAPÍTULO IV: DISEÑO METODOLÓGICO Y PRESENTACIÓN DE LOS DATOS

4.1 Diseño Metodológico

Teniendo en cuenta que se pretende detectar, caracterizar y explicar las dificultades, conflictos u obstáculos que se pueden inferir a partir de la observación de la interacción de las prácticas educativa universitarias vinculadas con el trabajo inicial en el cálculo diferencial en estudiantes de primer semestre se concretan algunos elementos fundamentales del diseño metodológico propuesto.

Esta investigación se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo-interpretativo, con estudio de caso. El enfoque es cualitativo, en tanto se orienta al estudio de las acciones humanas y de la vida social y utiliza la metodología interpretativa.

Se realizaron algunas entrevistas a los estudiantes para documentar las vivencias, las experiencias, las dificultades experimentadas, con el fin de hacer las inferencias acerca de la causalidad de las dificultades y errores sistemáticos en las PEUC. Y la observación de las prácticas permitió hacer inferencias acerca de posibles dificultades, conflictos y las razones que los generan y los mantienen.

Estos elementos aportaron en la consecución de los objetivos 2 y 3. El objetivo 2 se complementó con la observación no participante de tipo etnográfico. Para el objetivo 4 se hizo un análisis de los episodios seleccionados a partir de las categorías descriptivas del EOS y para el objetivo 5 se tendrán en cuenta los indicadores de idoneidad didáctica propuestos por Godino, Batanero, Font et al.

En particular para el Objetivo 1

1. Configurar un marco de comprensión para la conceptualización del paso o transición del algebra al cálculo (TAC) y de algunos constructos teóricos relacionados con la noción de obstáculo.

Se logró a partir del estudio y análisis de las diferentes teorías y tendencias que sobre obstáculos, conflictos, dificultades, errores, transición y rupturas epistemologicas se logró documentar, y sobre la construcción propia que se logró elaborar acerca de los obstáculos como atribución de causalidad de las dificultades y errores.

La metodología fue la consulta y contraste de fuentes documentales que permitió tomar una posición propia acerca de los obstáculos como atribución de causalidad de las dificultades y errores.

En particular para el objetivo 2

2. Describir las prácticas educativas universitarias vinculadas a la iniciación del cálculo diferencial (PEUC) en estudiantes de primer semestre de Ingeniería junto con su profesora.

Para cada una de las dificultades detectadas, se realizó primero una triangulación de fuentes: observaciones de clases y del material usado (libros de texto, listas de problemas, etc.), diálogos con la profesora, entrevistas con estudiantes, y con profesores con el objetivo de seleccionar los episodios de aula más significativas para la explicación de la emergencia y mantenimiento de esta dificultad (reducción de datos).

Para cada uno de estos episodios se realizó primero una transcripción (con tres columnas), a continuación, se realizó el análisis didáctico de esta transcripción teniendo en cuenta algunos de los niveles de análisis didáctico propuestos por el EOS (matemáticas implicadas, interacciones, conflictos y dificultades y valoración de la idoneidad didáctica). Por último, se buscó explicar la emergencia de la dificultad a partir de dicho análisis.

Se realizó una triangulación de expertos (doctoranda, director, experto en el EOS, seminario de investigación) sobre el análisis didáctico realizado.

Aunque en la investigación cualitativa no se suele hablar de población y muestra, por conveniencia descriptiva tomo como población más amplia solo a los estudiantes que cursan la asignatura Cálculo Diferencial en la facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital en los años 2014 y 2015.[19] El criterio para seleccionar esta población es que eran estudiantes que en el contexto de una carrera de Ingeniería, empiezan su formación básica en matemáticas con un curso de Cálculo Diferencial, y en este mismo grupo están los estudiantes que a pesar de llevar 3 o 4 semestres en la carrera continúan cursando calculo I o calculo diferencial y a los cuales hubiera podido tener acceso directo si el tiempo y los recursos los permitieran.

De esa población estudiantil tomo como muestra solo a los del semestre 2014-1, 2014-3, 2015-1, 2015-3 que describo así: El estrato socioeconómico es 2, 3 y 4, generalmente. La mayoría estrato 3. Son estudiantes con puntajes medio y medio altos en el examen Saber 11[20] y cierta disciplina en hábitos de estudio, de conformación familiar heterogénea, la mayoría estable, y cada vez son menos los casos de estudiantes de provincia o que trabajen al iniciar sus estudios. En general son más hombres que mujeres y proceden tanto de colegios distritales como de colegios privados, estos últimos bien posicionados en las pruebas SABER 11.[21]El criterio de selección fue por la asignatura de cálculo diferencial y el semestre en que iba a iniciar la investigación.

El caso estudiado dentro de esa muestra estuvo constituido por los estudiantes de primer semestre de Ingeniería de la Universidad Distrital, que conformaban el curso de Cálculo Diferencial cuya

[19]Se especificará el número y características generales de estos estudiantes según estadísticas oficiales.
[20]Especificar el rango de puntajes de admisión
[21] En el caso de Colombia, tenemos 11 grados de educación básica y media: los cinco primeros de educación primaria; en 6º y 7º se estudia aritmética, en 8º y 9º se cursa álgebra, en 10º trigonometría y geometría analítica y en grado 11 se ven algunas nociones de cálculo diferencial: funciones, límites y algo de derivadas.

profesora titular permitió y cooperó con el trabajo de observación e investigación. Estos estudiantes son en su mayoría repitentes de la asignatura Cálculo Diferencial, la están cursando por segunda, tercera, cuarta y hasta por quinta vez. El criterio de selección del caso fue pues por la disponibilidad de la profesora, a quien llamare "Profesora (P)" solo hubo una profesora que accedió al estudio durante todos los semestres trabajados.

Las edades de los estudiantes están comprendidas entre 18 y 21 años, esto por el grado de repitencia y atraso en que caen al perder materias del llamado ciclo básico en la Universidad Distrital, del que hace parte el cálculo.

La profesora es licenciada en matemáticas, egresada de la Universidad Distrital, ejerce la docencia universitaria hace aproximadamente 15 años, simultáneamente siempre ha trabajado en otras Universidades. Actualmente dicta clase en una universidad privada reconocida y costosa de Bogotá. Manifiesta haber dictado el curso de cálculo diferencial unas 20 veces aproximadamente. A diferencia de una gran cantidad de profesores que dictan en la Facultad de Ingeniería, ella se declara comprometida con la enseñanza, preocupada por que los estudiantes pasen la materia e interesada por los métodos para enseñar y aprender mejor.

La investigación requirió la observación de las prácticas en el curso seleccionada y complementado con la observación de algunas clases de dos profesores más, requirió también alguna propuesta de diferentes tareas pertinentes a las temáticas del curso; la elaboración y propuesta de cuestionarios y el diseño y la ejecución de entrevistas para complementar la información.

Un estudio de caso es muy importante porque fuente rica de información, y está inscrito en una problemática relevante tanto local como internacional que aborda sin embargo elementos particulares toda vez que se inscribe en el caso de la educación superior en Colombia con prácticas (profesores, textos, talleres, ejercicios,…) compartidas en la enseñanza del cálculo y que en nuestro ámbito local no se ha hecho un estudio con estas características: de ahí la importancia de este estudio de caso que sin embargo aporta elementos generales para practicas compartidas vinculadas con el cálculo diferencial en la Universidad. Contestar estas preguntas siempre va más allá de un caso particular porque el maestro, los estudiantes, las clases son representativas de la generalidad de estudiantes y cursos tanto a nivel local, nacional, como internacional por compartir y unos estándares curriculares y de evaluación.

A continuación, se presenta la matriz documental de los dos episodios que se han denominado **fundamentales** por cuanto aportan elementos muy interesantes en las PEUC y que permitieron inferir elementos contenidos en la pregunta de investigación a través de los indicadores y descripciones del EOS. Fueron numerados episodio 4 y 12 de acuerdo con el orden temático que cronológicamente sucedían en el curso. Fueron seleccionados porque cada uno genera unas dificultades respecto a los límites uno y respecto a las derivadas el otro. También por su riqueza en datos acerca del lenguaje, de lo semiótico, de la gestión de las preguntas y eventuales conflictos. Y también porque será absolutamente necesario centrar la atención en unos o dos elementos de la gran cantidad de información y de datos recogidos y trabajados.

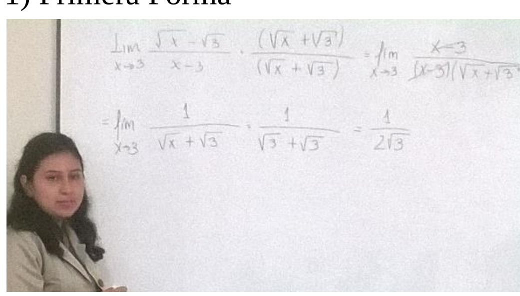
Y hay otros 14 episodios que se han denominados **complementarios** puesto que, al igual que los fundamentales, se generaron a partir de la observación de clases completas de 2 horas en diferentes momentos del semestre académico de la misma profesora, de los cuales se han seleccionado momentos que nos han permitido corroborar nuestras inferencias respecto a las viñetas seleccionados de los episodios fundamentales. A estos también se les trabajo la matriz documental y las categoriales y de indicadores de idoneidad.

4.2 Episodios fundamentales

4.2.1 Matrices Documentales

4.2.1.1 [Ep. 4] Episodio 4. Ejercicios sobre límites algebraicos y trigonométricos

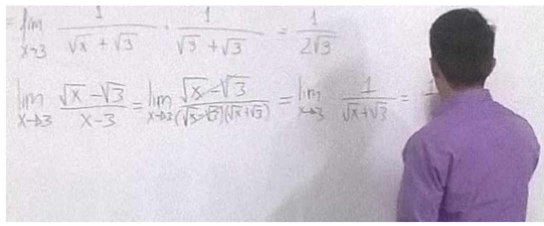
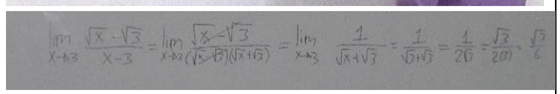
Tabla 9. Episodio 4. Ejercicios sobre límites algebraicos y trigonométricos

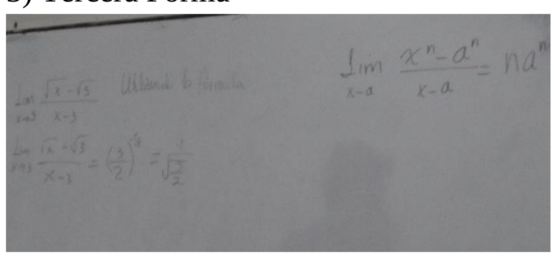
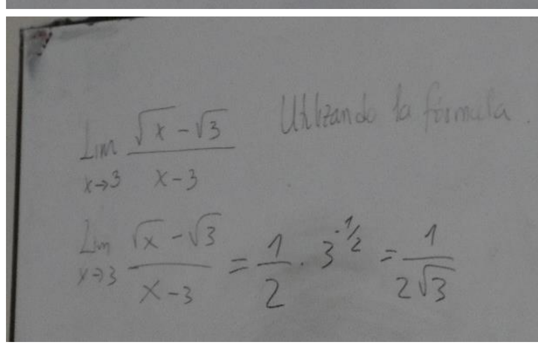
Sg.	Observaciones	Transcripción	Actividad Practicas No verbales: Orales y Escrito
1	[Hay 9 estudiantes al empezar la clase a las 6:10 a.m.] La profesora busca captar la atención de los estudiantes y centra el objetivo de la clase. Ella les pregunta sobre un taller de límites [**Ver Anexo C-1**] y les dice que van a dedicar la clase a resolver ese taller. Esto lo ha consultado conmigo un poco antes de empezar la clase y dice que va a ser una clase para mí, es decir, pasarlos al tablero, ponerlos a trabajar.	**P**: ¿Recuerdan el taller sobre límites? **P**: Pues hoy vamos a dedicar la clase a resolverlo: ustedes lo van a hacer, ¿Bueno?	Plan de la clase
2	Pasa una estudiante al tablero le va corrigiendo escritura: el igual, los paréntesis. La niña le va preguntando a un compañero, porque se siente insegura. Como la respuesta va con raíz le pide que racionalice, pero la profe le va diciendo todo el ejercicio.	**P**: Empecemos: $\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})}{x - 3}$ 1) Primera Forma 	Primera pregunta

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Le cuesta mucho dejarlos trabajar, equivocarse, si se demoran se impacienta y empieza a hacerlo ella misma, a hablar, a explicar, a reiterar insistentemente. Ella hace la pregunta y ella misma responde.

Ahora otro estudiante pasa a hacerlo aplicando factorización.

Pasa a un estudiante e insiste en que la raíz se pueda ver como diferencia de potencias.</td>
<td>$\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})}{x - 3} * \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x} + \sqrt{3})}$
$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}$
$\lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

2) Segunda Forma


$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})}$

$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
3) Tercera Forma



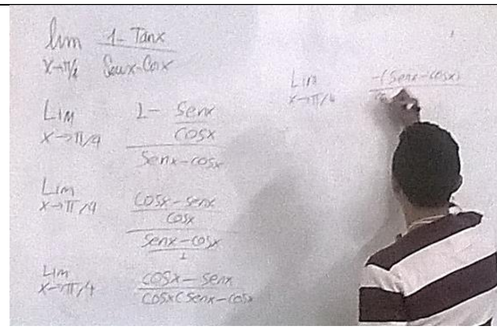
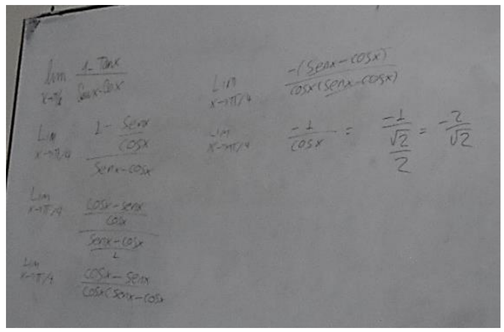
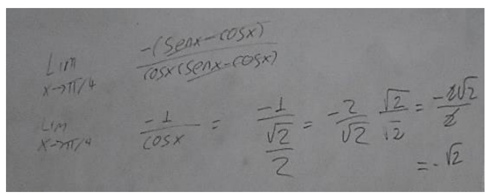
$\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})}{x - 3} = \frac{1}{2} * 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$</td>
<td>Anota en el tablero la fórmula que ella llama “Límites especiales”.
$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$
$= na^{n-1}$</td>
</tr>
<tr>
<td>3</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

	Y habla de los otros dos "Límites especiales". En un momento de la clase, en privado, le pregunte ¿Por qué los llama así?, y me dijo que porque así se los enseñaron cuando vio calculo.	**P**: ¿Qué necesitas para los límites especiales? **P:** Todas las identidades y toda la trigonometría. 1) $\lim_{x \to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ 2) $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$ 3) $\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0$	En un rincón del tablero anota esos "Límites especiales**".**
4	Realmente el que hace es el tercero, pero así dijo. Reemplaza los valores y escribe:	**P**: Yo voy a demostrarles el primero y el otro lo hacen ustedes y está en todos los libros. $\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$	Segunda pregunta
5	Ella enfatiza y repite que toca pensar.	**P**: Con los limites trigonométricos "toca pensar" y aquí en trigonometría toca pensar. Y hay que recordar los ángulos especiales. **P**: Hagan su ayuda didáctica: identidades, ángulos especiales, ángulos coterminales los 95 ángulos: haciendo la copia uno estudia, pero no es déjeme fotocopiar la suya. **P**: Tienes que poder traer eso a la mente: juguemos a hacer memoria, lo mismo con la calculadora.	Recomendaciones sobre la importancia, según ella, de pensar y de elaborar su ayuda didáctica. Recordar ángulos especiales e identidades y ese trabajo debe ser individual
6	No lo deja responder	**P**: Listo Alejo, y si está en la forma $\frac{0}{0}$ ¿Qué hago? **P**: Quitar ese indeterminado y ¿Cómo?	Formula una pregunta, Procedimiento solución del ejercicio Enuncia dos tareas

	Pero no espera ni 10 segundos y otra vez esta ella en el tablero con el marcador. Alejo responde. Alejo dice.	**P**: Pues lo único que sé, es que ustedes lo van a hacer de tarea. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}*\frac{1+cosx}{(1+cosx)}$$ **P**: Lo multiplicamos por $\frac{1+cosx}{(1+cosx)}$ que es 1 entonces es válido. **P**: Y le da $$=\frac{(1-\cos^2 x)}{x(1+cosx)}=\frac{sen^2x}{x(1+cosx)}$$ **P**: ¿Ya terminé? **P**: No. Ahí sigue el indeterminado evalúen y vera que ahí sigue el indeterminado. $\frac{sen^2x}{x(1+cosx)}$ **P:** Entonces, ¿que nos da Alejo? **E**: $$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}*\frac{senx}{1+cosx}$$ **P**: Entonces que daría: el primer limite por propiedades de los limites da 1 entonces solo nos queda el otro límite: Como ya apliqué una propiedad seguramente el indeterminado ya se haya ido. **P**: Evalué Alejo. **E**: $$=\frac{0}{2}$$ **P**: Entonces termínenlo, bueno, pero terminen y de tarea abran los libros para que vean la demostración del otro límite.	
7	Le parece interesante el ejercicio	**P**: Y ahora vámonos con uno interesante: $$\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$$	Tercera pregunta o ejercicio

	Se acerca a un estudiante que está en la primera fila y le dice: Se devuelve al tablero y continúa hablando. Sigue preguntándole a Alejo…pero ella responde y escribe Le pregunta a un estudiante llamando Felipe. Y él no responde. Una niña responde La profe se responde Alejo responde. Ella misma asocia para cuadrar el límite fundamental y sigue la indeterminación. La profesora dice.	**<u>P</u>**: ¿Cuánto es la tangente de cero? no sé. **<u>P</u>**: No se asuste pinte su triángulo equilátero de catetos e hipotenusa = 1, ángulos 30° y 60° **<u>P</u>**: Y también necesita la circunferencia unitaria. **<u>P</u>**: Vuelve a limite entonces por todo eso el lim da 0/0 forma indeterminada. **<u>P</u>**: Entonces no piense la ayuda didáctica para sacarla en el parcial. **<u>P</u>**: Entonces arranque: **<u>P</u>**: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{senx}{cosx}-senx\right)}{x^3}$ **<u>P:</u>** A ver Felipe te escucho **<u>P</u>**: ¿Ya se iría el indeterminado?: **<u>E</u>**: ¡No! **<u>P</u>**: ¿Por qué? **<u>P</u>**: Porque no he simplificado… ahora qué hago. **<u>E</u>:** Propiedades. **<u>P</u>**: ¿Alejo en matemáticas todo son propiedades entonces qué? ¿Cuáles propiedades? **<u>P</u>**: Entonces que podríamos hacer…pues conseguir un x^2?	Formula preguntas, (los asusta) y se responde las preguntas Pinta sobre la circunferencia unitaria algunos ángulos.

	Perdió el hilo del procedimiento y los insta a terminarlo por su cuenta.	**P**: Me perdí. Por favor termínenlo por ahí ahorita que van a trabajar en grupo. Pero similarmente puedo desde el comienzo obtener un sen^3 mirando el ejercicio anterior, pues multiplicamos arriba y abajo por 1 representando como $\frac{1+cosx}{1+cosx}$ **P:** Al multiplicar arriba y abajo por 1, el $\lim_{x\to 0}\frac{1}{(Cosx(1+cosx))}$ evalúelo y da $\frac{1}{2}$.	
8	Sale a traer listas y a fotocopiar para mí el parcial que aplicó el pasado viernes y que resolvió el pasado lunes **[Ver Anexo C-2]**. Me entregó desde el comienzo de la clase el taller de límites, en ese momento también salen algunos estudiantes a fotocopiar el taller que supuestamente ya han trabajado. Bueno y ya son las 7:20 a. m. y nada que empieza el trabajo en grupo al que supuestamente íbamos a dedicar toda la clase.	**P**: Bueno ahora empiecen a trabajar sobre el taller los limites trigonométricos: **P**: Soluciono dudas.	
9	Regresa pronto. 5 o 6 minutos, me entrega la fotocopia del parcial y anota un ejercicio en el tablero (se le olvidó que había dicho que trabajaran en grupo).	**P**: Realicen los siguientes ejercicios. No sé si están o no en el taller, pero los vamos a revisar: 1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)$ 2) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\, x-\cos x}$ **P**: Que están en la forma 0/0 **P**: Pasa Alejo y resuelve el segundo.	

	Él pasa el ejercicio a senos y cosenos, separa convenientemente para que quede el limite fundamental Para más claridad se presenta la transcripción de lo que aparece en las fotos.	   $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\tan x)}{sen\ x - \cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1-\frac{senx}{cosx}\right)}{sen\ x-\cos x}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{cosx - senx}{cosx}\right)}{sen\ x - \cos x}$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{cosx - senx}{cosx(senx - cosx)}$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{cosx - senx}{cosx(cosx - senx)}$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{cosx} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$	
10	Ahora ella anota otro ejercicio en el tablero, que tampoco veo en el taller.	**P**: ¿Qué forma tiene? Pero no pongan cara de que están pensando, miren el triángulo ¿que es la tangente en un triángulo? Saben que es lo	Pregunta, es un poco agresiva al decir que se hacen los que están pensando (quiere decir

	Bueno pasa la asistencia para actualizarla desde el lunes 29. Espera un ratico (creo que no más de 3 minutos) y pasa a Diego: se desempeña bien en escritura, Dice “factor de……” Termina el ejercicio muy bien y yo le pido permiso para fotografiarlo en el tablero: todos se ríen. Les advierto que las fotos no son para facebook ni nada de eso, solo para documentar que es trabajo de estudiantes y borraba inmediatamente, ni siquiera alcancé a tomar la foto.	chévere que todos los ejercicios son diferentes. **<u>P</u>**: uy y lo bonito que habla.	que no están pensando: solo fingen hacerlo). Les agradezco: se ponen nervioso, se ríen.
11	Hay 17 estudiantes al finalizar la clase Invita a leer, a consultar, a articular la matemática con el arte, con la música, a motivarlos.	**<u>P</u>**: Terminen el taller. Gracias. Busquen a Escher. **<u>P</u>**: Hay una publicación que sacaba la U. Nacional “señal que cabalgamos”: bucles, Escher, música, arte, matemáticas. **<u>P</u>**: Yo soy dispersa pero no se me olvida en que estoy no se preocupen.	Borraba inmediatamente, ni siquiera alcancé a tomar la foto.

4.2.1.2 [Ep. 12] Episodio 12: Derivada Logarítmica y Trigonométrica

Tabla 10. Episodio 12: Derivada logarítmica y trigonométrica

Sg.	Observaciones	Transcripción	Actividades prácticas no verbales: Orales y escritas
1.	6:10 AM, 12 estudiantes van llegando.	**P:** Hoy se van a trabajar ejercicios de derivación exponencial y logarítmica, entonces debemos hacer un repaso de la teoría que vimos la clase pasada. **P:** El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base: $Y = \ln x \;\rightarrow\; y' = \frac{1}{x}dx$ $Y = log_b x \;\equiv\; y = \dfrac{\ln x}{\ln b}$ $\downarrow$ $y' = \dfrac{dx}{x \ln b}$ $Y = e^x \;\rightarrow\; y' = e^x\, dx$ $Y = a^x \;\rightarrow\; y' = a^x \ln a\ dx$	La profesora va escribiendo a un lado del tablero los resultados que le dictan los muchachos y al hacerlo las va leyendo como ellos se las “deben” aprender, refiriéndose a la fórmula escrita.
2.	La profesora escribe en el tablero: “Hallar la derivada de las siguientes ecuaciones” (subraya ecuaciones). Se sale un ratico del salón y ellos van hablando, escribiendo, borrando; regresa en dos minutos y pasa la asistencia. Aún no escribe nada en el tablero. Les da un poquito de tiempo para que lo escriban. Les dice a los estudiantes que aplicarán lo visto en la semana	**P:** Entonces hagamos por ejemplo este ejercicio: **Ejercicio:** $Y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right]$	

	anterior, y que lo ideal es aplicar las propiedades. Se responde a sí misma. Todos los estudiantes dictan.	**P:** ¿Cómo les dio el ejercicio? **P:** Noten que si la base fuera negativa, por ejemplo (-6), no habría nada que hacer, porque el logaritmo estaría mal definido. $Y = \log_6\left(\frac{x}{2}\right) + \log_6\left(\frac{3}{1-x}\right) + \log_6\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)$ **P:** Por propiedades de logaritmos, ustedes qué prefieren derivar: ¿productos y cocientes, o sumas y restas? **P:** Pues sumas y restas por eso hacemos las propiedades. $Y = \log_6(x) - \log_6(2) + \log_6(3) - \log_6(1-x) + \log_6(x^2+1) - \log_6(x+2)$ $Y = \frac{\ln(x)}{\ln(6)} - \frac{\ln(2)}{\ln(6)} + \frac{\ln(3)}{\ln(6)} - \frac{\ln(1-x)}{\ln(6)} + \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(6)} - \frac{\ln(x+2)}{\ln(6)}$ **P:** Ahora aplicamos lo que vimos la clase pasada. $Si\ y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \rightarrow y' = \frac{dx}{x \ln a}$ $Y = \left(\frac{\ln(x) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(1-x) + \ln(x^2+1) - \ln(x+2)}{\ln 6}\right)$ $Y' = \frac{1}{x \ln 6} - \frac{1}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$ **P:** Luego pónganla bonita. $Y' = \frac{1}{\ln 6}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+2}\right)$	No hay que matarse haciendo cosas que ni siquiera tienen solución.

3.	Se viene hacia mí y me pregunta qué tanto escribo en el computador, otra vez la veo nerviosa: "¿Y tú a quien le vas a mostrar todo lo que yo hago?" Me pide el favor que descargue Geogebra y Derive, pues Alejo no ha vuelto a llevar su portátil. Les pide que le dicten el primer ejercicio Les hace ver que por el otro lado seria largo y difícil.	**Ejercicio 1:** $$f(x) = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{3x}{x+2}\right)}$$ **P:** Está escrito como raíz cubica. Aplicando propiedades de log: $$f(x) \ = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$$ $$f'^{(x)} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)\right]$$ $$f'(x) = \frac{1}{3}\ [\ln(3x) - \ln(x+2)]$$ $$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$$ **P:** Derivada de ln, derivada de raíz, derivada de cociente y después dicen que los parciales son difíciles y largos.	Ahora lee los 5 ejercicios propuestos en el tablero y les da indicaciones sobre cada uno.
4.	Alejo pasa y copia el ejercicio.	**P:** Ahora el segundo **Ejercicio 2:** $$f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$$ $$f(x) = \ \ln(x-2)^3 - \ln\left(\sqrt{2x-1}\right)$$ $$f(x) \ = \ 3\ln(x-2) - \tfrac{1}{2}\ln(2x-1)$$ **P:** Ahí ya puedes derivar y ¿hay alguna otra propiedad?	

	Mientras Alejo está en el tablero la profesora le va hablando. Alejo pregunta.	$f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$ $f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$ **P**: Resolvámoslo todo les parece? $f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$ $f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$ **E:** ¿Desde el comienzo habría podido ser $\frac{\ln(x-2)^3}{\ln\sqrt{2x-1}}$? **P:** ¡No! Esas son las propiedades que ustedes se inventan… Si también tratan de hacerlo con el producto.	Saca denominador común y simplifica el denominador.
5.	Él lo piensa un poco, la mayoría no lo mira y él le da el marcador a otro. Ahora otro estudiante escribe. ¿De dónde este ultimo -1? pero bueno borraron. En vez de multiplicar por -1 lo escribieron como una resta.	**P**: Ahora dale el marcador a quien tú quieras. **Ejercicio 4:** $f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$ $f(x) = \ln\big(x(x+1)\big)^{\frac{1}{2}}$ $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x(x+1))$ $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln(1-x))$ **P**: Esa derivada es una constante por la derivada de la función… $f'(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x-1})$	
6.	La profesora vuelve al tablero a proponer otro ejercicio. Pasa otro estudiante a resolverlo.	**Ejercicio 5:** $f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$ **E:** $f(x) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x - 1)$	

	Ella misma le responde Ella le borró los 1 que tenía en el numerador. Ella le dictó toda la parte de la evaluación en 0. Algunos estudiantes responden: Vuelve a decir varias veces triángulos rectos. Yo veo que Alejo y otro chico sacan un Stewart.	**P:** Puede hacer algo más con el ejercicio. **P:** ¿No? Deriva. $f'(x) = \frac{1}{(e^x+1)} * e^x - \frac{1}{(e^x\ -1)} * e^x$ $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)} - \frac{e^x}{(e^x\ -1)}$ $f'(x) = \frac{(e^x - 1)e^x - (e^x+1)e^x}{(e^x+1)(e^x - 1)}$ $f'(x)\ = \frac{(e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x)}{(e^x+1)(e^x-1)}$ $f'(x)\ = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$ **P:** Mira qué bonito, la diferencia de cuadrados en el denominador. **P:** Bueno, hay que evaluarlo en 0: $f'(0) = -\frac{2}{0}$ $\rightarrow f'no\ está\ definida\ en\ 0$ **P:** El taller que les voy a dejar está muy bonito. **P:** Listo, excelente. **P:** Listo las derivadas de exponenciales y logarítmicas, ahora ¿qué es lo que había para hoy? **E:** Derivadas de funciones trigonométricas. **P:** ¿Cuál es el dominio de las trigonométricas? **P**: Pues depende porque si las defino sobre triángulos rectos? Pero si las define sobre ángulos diferentes o sobre la circunferencia unitaria. **P**: ¿Alguien trajo el librito?	La profesora hace una seña hacia la diferencia de cuadrados en el denominador.

		P: ¿Nadie más trajo libro?	
7.	Empieza a escribir en el tablero.	**DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS** Si $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x \; dx$ **P:** La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función, es un error decir solamente “derivada de seno es coseno”. **P**: ¡No! Falta la derivada de la función.	
8.	La profesora escribe y resuelve otro ejercicio.	**Ejercicio 6:** **P:** Al derivar $f(x) = sen\,(x^2 + 3x)$ **P:** Se obtiene. $f'(x) = [cos(x^2 + 3x)](2x + 3)$	
9.	Continúa con la misma dinámica y escribe y resuelve el siguiente ejercicio. Ella llama composición de funciones a los que comúnmente se denomina regla de la cadena.	**Ejercicio 7:** **P:** Siguiente ejercicio. $f(x) = (\sin(2x^4 + 5x))^3$ **P**: Composición de funciones. $f'(x) = 3\big(sen(2x^4 + 5x)\big)^2 Cos(2x^4 + 5x)(8x^3 + 5)$ $f'(x) = 3(8x^3 + 5)(Cos(2x^4 + 5x))(sen(2x^4 + 5))^2$	La profesora lo resuelve en el tablero.
10.	Ahora propone un ejercicio y pasa a Alejo para que lo resuelva. La profesora aprecia bien el trabajo que está haciendo Alejo	**Ejercicio 8:** **P:** Inventémonos otro. **P:** Alejo desarrolla el siguiente. $f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$ **P:** Mira qué bonito	

		$f'(x) = \frac{2\,\text{sen}\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos\left(\frac{2x}{x+4}\right)((2(x+4)-2x)}{(x+4)^2}$ $f'(x) = \frac{2\,\text{sen}(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})(8)}{(x+4)^2}$ $f'(x) = \frac{16\,\text{sen}(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})}{(x+4)^2}$	
11.	La profesora formaliza las seis derivadas trigonométricas.	**Derivadas de las funciones trascendentes** **P**: Ahora escribamos las derivadas de todas las trigonométricas. $Si\ y\ =\ sen\ x\ \rightarrow y'\ = (cosx)\ dx$ $Si\ y\ =\ cosx\ \rightarrow y'\ = (-senx) dx$ $Si\ y\ =\ tgx\ \rightarrow y'\ =\ (sec^2x)\ dx$ $Si\ y\ =\ ctgx\ \rightarrow y'\ =\ (-csc^2x)\ dx$ $Si\ y\ =\ secx\ \rightarrow y' = (secx)(tgx) dx$ $Si\ y\ =\ cscx\ \rightarrow y' = (-cscx)(ctgx) dx$ **P:** Y vamos a demostrarlas todas. **P:** Mañana hacemos clase a las 11 a otra hora no puedo, y el que quiera pasar a hacer una demostración pasa y yo le ayudo con la nota del tercer corte de acuerdo?	Empieza a escribir en el tablero el título del nuevo tema. Comienza a escribir las derivadas.
12.	La profesora se emociona al ver que los estudiantes saben que la	**Ejercicio 9:** **P:** Hagamos una. **P:** Vamos a demostrar: $si\ f(x)\ =\ sen\ x\ \rightarrow f'(x)\ = (cosx)\ dx$ **Demostración:** **P:** ¿Cómo lo demuestro? **E:** Con la definición formal de límite	Escribe la función $y\ =\ sen\ x\ \rightarrow y' = (cosx)\ dx$ en el tablero, y procede a demostrarla.

	demostración se hace por medio de la definición formal de límite. Alejo hace una pregunta. La profesora no responde e inmediatamente otro estudiante le formula otra pregunta.	**P:** ¡Sí! Eso es lo que tenemos: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\right)$ **P:** Por suma de ángulos tenemos: $f(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h}\right) + \lim_{h \to 0} \frac{\sin h \ \cos x}{h}$ $f'(x) = \sin x \lim_{h \to 0} f\left(\frac{(\cos h)-1}{h}\right) +$ $\cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$ $f'(x) = \sin x\,(0) + \cos x\,(1)$ $f'(x) = \cos x$ **E**: Profe pero ahí donde está dx? **E**: ¿Para mañana todas las demás demostraciones? **P**: Sí señor.	
13.	La profesora se inventa algunos ejercicios.	**Ejercicio 10:** **P**: Inventémonos algunos ejercicios, por ejemplo: $f(x) = (\sec(5x^3 - 7x))^2$ $f'(x) = 2\sec(5x^3 - 7x)\ \sec(x^3 - 7x)\ \tan(x^3 - 7x)\,(15x^2 - 7)$ **P**: Y pónganla bonita, buen día.	

4.2.2 Matriz Categorial Descriptiva de los episodios fundamentales

ANÁLISIS DE LAS MATEMÁTICAS IMPLICADAS EN LOS EPISODIOS

Prácticas matemáticas

Configuración de objetos:

Tabla 11. Configuración de objetos: Problemas

Ep	PROBLEMAS
4	**Problemas** **P1:** Calcular $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$ **P2:** Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}$ **P3:** Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$ **P4**: Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)$ **P5:** Calcular $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x}$
12	**P1:** Hallar la derivada de $Y = \ log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right]$ **P2:** Hallar la derivada de $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$ **P3:** Hallar la derivada de $f(x) \ = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$ **P4:** Hallar la derivada de

	$$f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$$ **P5:** Hallar la derivada de $$f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$$ **P6:** Hallar la derivada de $$f(x) = sen\,(x^2+3x)$$ **P7:** Hallar la derivada de $$f(x) = (\sin(x^4+5x))^3$$ **P8:** Hallar la derivada de $$f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$$ **P9:** Demostrar mediante definición formal de límite. $$y = sen\,x \rightarrow y' = Cosx\,dx$$ **P10:** Hallar la derivada de $$f(x) = (\sec(5x^3-7x))^2$$

Tabla 12. Configuración de objetos: Lenguajes

LENGUAJES		
Ep	**Verbal**	**Simbólico**
4	Limite, límite especial, limites trigonométricos, Identidades trigonométricas, ángulos especiales, ángulos coterminales, indeterminación, Seno, Coseno, Tangente, circunferencia unitaria, ángulo, grados, triangulo, conjugado.	$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$; $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x}$; $\lim_{x\to a} f(x)$; $\frac{0}{0}$ Símbolos de las expresiones simbólicas de las funciones que aparecen (tan x, x, 3…)
12	Diferencia de cuadrados, derivada, logaritmo, derivación Exponencial, derivación logarítmica, propiedades, funciones trigonométricas, límite	El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base: $Y = lnx \rightarrow \; y' = \frac{1}{x}dx$, $Si\; y = sen\,x \rightarrow y' = (Cosx)\,dx$,$Si\; y = Cosx \rightarrow y' = (-Senx)dx$, $Si\; y = tgx \rightarrow y' = (sec^2x)\,dx$,$Si\; y = ctgx \rightarrow y' = (-csc^2x)\,dx$, $Si\; y = Secx \rightarrow y' = (Secx)(tgx)dx$, $Si\; y = Cscx \rightarrow y' = (-Cscx)(ctgx)\,dx$, $f'(0) = -\frac{2}{0} \rightarrow$

		$f'no\ está\ definida\ en\ 0$, $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$

Tabla 13. Configuración de objetos: Conceptos

Ep	CONCEPTOS
4	Límites especiales, Funciones trigonométricas, Identidades trigonométricas, Límite indeterminado de tipo 0/0
12	Derivación, funciones trigonométricas, logaritmos, derivadas de las funciones trascendentes, común denominador, simplificación.

Tabla 14. Configuración de objetos: Proposiciones

PROPOSICIONES		
Ep	**Previas**	**Emergentes**
4	Para las funciones continuas $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (implícita) $1 - cos2x = sen2x$ $Tan\ x = \frac{senx}{cosx}$ $\frac{a}{a} = 1$ El límite de un producto de funciones es el producto de límites $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$	$\lim_{x\to 3} \frac{(x^n-a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ $\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0$ $\lim_{x\to 0} \frac{(tagx-senx)}{x^3} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right) = 1$ $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{(1-\tan x)}{sen\ x - \cos x} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$
12	$f(x) = c \rightarrow F'(X) = 0$ $F(X) = X \rightarrow F'(X) = 1$ $F(X) = MX \rightarrow F'(X) = M$ $CF(X) = C.F'(X)$ $F(X) = X^n \rightarrow f'(x) = nX^{n-1}$ $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$ $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g\prime(x)}{[g(x)]^2}$ $Y = lnx \rightarrow y' = \frac{1}{x}dx$ $Y = logbx \equiv y = \frac{lnx}{lnb}$ $\downarrow$ $y' = \frac{dx}{x}lnb$ $Y = e^x \rightarrow y' = e^x\ dx$ $Y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a\ dx$	$Y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right]$ $\downarrow$ $Y' = \frac{1}{x\ln 6} - \frac{(-1)}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$ ***2):*** $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$ $\downarrow$ $f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$ ***3):*** $f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$ $\downarrow$ $f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$ ***4):*** $f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$ $\downarrow$

	$Si\ y = \sin x \to y' = \cos x\ dx$ $Si\ y = \cos x \to y' = -\sin x\, dx$ $Si\ y = \tan x \to y' = (\sec x)^2\ dx$ $Si\ y = \cot x \to y' = -(\csc x)^2 dx$ $Si\ y = \sec x \to y' = \sec x \tan x\, dx$ $Si\ y = \csc x \to y' = -\csc x \cot x\ dx$	$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right)$ ***5)*:** $f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$ $\downarrow$ $f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$ ***6)*:** $f(x) = sen\ (x^2 + 3x)$ $\downarrow$ $f'(x) = [cos(x^2 + 3x)](2x + 3)$ ***7)*:** $f(x) = (\sin(x^4 + 5x))^3$ $\downarrow$ $f'(x) = 3(8x^3 + 5)(Cos(2x^4 +$ $5x))(sen(2x^4 + 5))^2$ ***8)*:** $f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$ $\downarrow$ $f'(x) = \frac{16 \sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos\left(\frac{2x}{x+4}\right)}{(x+4)^2}$ ***9)*:** Demostrar mediante definición formal de límite. $y = sen\ x \to y' = Cosx\ dx$ $\downarrow$ $f'(x) = \cos x$ ***10)*:** $f(x) = (\sec(5x^3 - 7x))^2$ $\downarrow$ $f'(x) = 2\sec(5x^3 - 7x)\ \sec(x^3 -$ $7x)\ \tan(x^3 - 7x)\,(15x^2 - 7)$

Tabla 15. Configuración de objetos: Procedimientos

Ep	PROCEDIMIENTOS
4	1) Cálculo de límites por evaluación 2) Racionalización 3) Cálculo de límites indeterminados del tipo 0/0 4) Evaluar la función en $x = a$ 5) En caso de tener una indeterminación hay que expresar la función de una forma diferente (hay que hacer un tratamiento usando propiedades) 6) Volver a evaluar para ver si desparece la indeterminación 7) En caso contrario hay que volver a hacer un tratamiento usando propiedades 8) Despeje de ecuaciones 9) Uso de identidades trigonométricas para solución de limites
12	1) Aplicación propiedades logaritmos.

	2) Factorización 3) Derivación 4) Aplicación límites

Tabla 16. Configuración de objetos: Argumentos

Ep	ARGUMENTOS
4	• <u>Argumento 1:</u> Tesis $$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$ Razón 1° Forma $$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}*\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}-\sqrt{3})}$$ $$\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ Tambien\frac{\sqrt{3}}{6}\ racionalizando$$ 2° Forma $$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$ ○ <u>Argumento 1.1:</u> Tesis $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=na^{n-1}$$ Razón $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$ $$Limite\ Especial$$ • <u>Argumento 2:</u> Tesis $$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}=0$$ Razón $$\operatorname*{Lim}_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}*\frac{1+cosx}{1+cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x(1-cosx)}$$ $$=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}*\frac{senx}{1+cosx}=1*\frac{0}{2}=0$$

Se ha seguido el procedimiento de cálculo de límites para el caso de indeterminación 0/0 realizando un tratamiento y utilizando, entre otras, la propiedad que el límite de un producto es el producto de límites

- <u>Argumento 3:</u>

Tesis

$$\lim_{x\to 0}\frac{(tagx - senx)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Razón

Se cumple que $Tan\ x\ = \frac{senx}{cosx}$

$$\operatorname*{Lim}_{x\to 0}\frac{(tagx - senx)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{senx}{cosx} - senx\right)}{x^3}\ =$$

$$\operatorname*{Lim}_{x\to 0}\frac{\left(\frac{senx - senx * cosx}{cosx}\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{senx(1 - cosx)}{x^3 cosx} =$$

$$\operatorname*{Lim}_{x\to 0}\frac{senx(1 - cosx)}{x^3 cosx} * \frac{1 + cosx}{1 + cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{senx(1 - \cos^2 x)}{x^3 cosx(1 + cosx)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx * sen^2 x}{x^3 cosx(1 + cosx)} = \lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} * \frac{senx}{x} * \frac{senx}{x} * \frac{1}{cosx(1 + cosx)}$$
$$= \frac{1}{2}$$

El resultado de evaluar la función en x = 0 es $\frac{1}{2}$

- <u>Argumento 4:</u>

Tesis

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right) =\ 1$$

Razón

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{senx}{cosx}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{x * cosx}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} * \frac{1}{cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx} = 1$$

- <u>Argumento 5:</u>

Tesis

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\tan x)}{sen\ x-\cos x} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Razón

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\tan x)}{sen\ x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1-\frac{senx}{cosx}\right)}{sen\ x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{cosx-senx}{cosx}\right)}{sen\ x-\cos x}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{cosx-senx}{cosx(senx-cosx)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{cosx-senx}{cosx(cosx-senx)} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{cosx} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

12

- Argumento 1:

Tesis

$$Y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right] \to Y' = \frac{1}{x\ln 6} - \frac{(-1)}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$$

Razón

$$Y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right]$$

$$Y = \log_6\left(\frac{x}{2}\right) + \log_6\left(\frac{3}{1-x}\right) + \log_6\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)$$

$$Y = \log_6(x) - \log_6(2) + \log_6(3) - \log_6(1-x) + \log_6(x^2+1) - \log_6(x+2)$$

$$Y = \left(\frac{\ln(x) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(1-x) + \ln(x^2+1) - \ln(x+2)}{\ln 6}\right)$$

$$Si\ y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \to y' = \frac{dx}{x\ln a}\ dx$$

$$Y' = \frac{1}{x\ln 6} - \frac{(-1)}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$$

- Argumento 2:

Tesis

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}} \to f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$$

Razón

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$f'^{(x)} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\ [\ln(3x) - \ln(x+2)]$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\ \left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$$

- <u>Argumento 3:</u>

Tesis

$$f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right] \ \rightarrow\ f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$$

Razón

$$f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$$

$$f(x) = \ln(x-2)^3 - \ln\left(\sqrt{2x-1}\right)$$

$$f(x) = 3\ln(x-2) - \tfrac{1}{2}\ln(2x-1)$$

$$f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$$

- <u>Argumento 4:</u>

Tesis

$$f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right)$$

Razón

$$f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$$

$$f(x) = \ln\frac{x(x+1)}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ (\ln x(x+1))$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ (\ln x + \ln(1-x))$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right)$$

- <u>Argumento 5:</u>

Tesis

$$f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right] \rightarrow f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$$

Razón

$$f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$$

$$f(x) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x - 1)$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)} - \frac{e^x}{(e^x - 1)}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)e^x - (e^x+1)e^x}{(e^x+1)(e^x - 1)}$$

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x)}{(e^x+1)(e^x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$f'(0) = -\frac{2}{0} \rightarrow f' no\ está\ definida\ en\ 0$$

- <u>Argumento 6:</u>

Tesis

$$f(x) = sen\,(x^2+3x) \rightarrow f'(x) = [cos(x^2+3x)](2x+3)$$

Razón

$$f(x) = sen\,(x^2+3x)$$

$$f'(x) = [cos(x^2+3x)](2x+3)$$

- <u>Argumento 7:</u>

Tesis

$$f(x) = (\sin(x^4+5x))^3 \rightarrow f'(x)$$
$$= 3(8x^3+5)(Cos(2x^4+5x))(sen(2x^4+5))^2$$

Razón

$$f(x) = (\sin(2x^4 + 5x))^3$$

$$f'(x) = 3\big(sen(2x^4 + 5x)\big)^2 Cos(2x^4 + 5x)(8x^3 + 5)$$

$$f'(x) = 3(8x^3 + 5)(Cos(2x^4 + 5x))(sen(2x^4 + 5))^2$$

- Argumento 8:

Tesis

$$f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2 \rightarrow f'(x) = \frac{16\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos\left(\frac{2x}{x+4}\right)}{(x+4)^2}$$

Razón

$$f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$$

$$f'(x) = \frac{2\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos(\frac{2x}{x+4})((2(x+4) - 2x)}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})(8)}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})}{(x+4)^2}$$

- Argumento 9:

Tesis

$$y = sen\, x \rightarrow y' = Cosx\, dx \rightarrow f'(x) = \cos x$$

Razón

Si

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} f(\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h})$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} f(\frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h})$$

	$$f'(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h}\right) + \lim_{h \to 0} \frac{\sin h\ \cos x}{h}$$ $$f'(x) = \sin x \lim_{h \to 0} f\left(\frac{(\cos h) - 1}{h}\right) + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$ $$f'(x) = \sin x\,(0) + \cos x\,(1)$$ $$f'(x) = \cos x$$ • <u>Argumento 10:</u> Tesis: $$f(x) = (\sec(5x^3 - 7x))^2 \to f'(x) = 2\sec(5x^3 - 7x)\ \sec(5x^3 - 7x)\ \tan(5x^3 - 7x)\,(15x^2 - 7)$$ Razón: $$f'(x) = 2\sec(5\,x^3 - 7x)\ \sec(5x^3 - 7x)\ \tan(5x^3 - 7x)\,(15x^2 - 7)$$

CAPÍTULO V: ANÁLISIS GENERAL DE LOS DATOS

Se disponen a continuación algunos elementos teóricos del EOS que permiten construir los atributos de oposiciones duales a las matemáticas implicadas en cada episodio dispuesto en la Matriz Documental.

Según el EOS (Godino, Batanero y Font, 2008) se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Tal emergencia la explican mediante dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel están problemas, definiciones, proposiciones, etc. En el segundo nivel se tiene una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar sobre los objetos del nivel anterior, es decir objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc.

En el primer nivel encontramos la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- Situaciones-problemas
- Conceptos- definiciones
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...).

En el segundo nivel encontramos los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- Personal – institucional. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como “objetos personales” (Godino y Batanero, 1994, p. 338).
- Ostensivo – no ostensivo: cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro es ostensivo. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, …). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan.
- Expresión – contenido: antecedente y consecuente La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión,

significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

- Extensivo – intensivo (ejemplar - tipo). Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo la función $y = 2x + 1$) y una clase más general (p.e., la familia de funciones $y = mx + n$). La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras y cols, 2005). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general,

- Unitario – sistémico. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas, …) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

Afirman Godino, Batanero *y* Font, *(2008)* que la emergencia de los objetos de la configuración (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/ epistémicos: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación.

Y resaltan que la consideración de las facetas duales extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico permiten la delimitación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización (Font y Contreras, 2008) y de estos con los de reificación y descomposición.

Según Godino (2017), la necesidad de identificar los objetos y procesos que intervienen y emergen en las prácticas matemáticas que se realizan para la resolución de las situaciones - problemas conduce a la noción de *configuración ontosemiótica* (de prácticas, objetos y procesos)., y dicho reconocimiento de tales objetos y procesos permite, entre otras cosas, prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje.

El EOS entiende un objeto abstracto como una entidad: Inmaterial (no ostensiva), y General (intensiva); que se puede considerar de manera:

- Unitaria (como regla) o sistémica (configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos).
- Personal (mental) o institucional (sociocultural).
- Antecedente (significante) o consecuente (significado) en una relación semiótica.

El proceso de abstracción mediante el cual emergen o se construyen los objetos abstractos conlleva el concurso de otros procesos cognitivos - epistémicos más básicos: generalización, idealización (entendida como desmaterialización), unitarización (reificación, cosificación), significación, representación. Lo cual se representó en la Figura 2.

Con el fin de ampliar, analizar y enriquecer un poco más las nociones aquí expuestas para extraer elementos e indicadores metodológicos que permitan aplicar dichas oposiciones a la matriz categorial de nuestros dos episodios, se ha agregado una columna a la matriz individual de cada episodio y se va a llenar teniendo en cuenta los elementos teóricos citados antes.

5.1 Análisis de los Episodios Fundamentales

Herramientas de análisis

A continuación, se describe la Herramienta de Análisis gráfico con la que se analizaron las matrices de facetas de idoneidad didáctica de los episodios 4 y 12, dispuestas en la sección 5.1.1.1 y 5.1.2.1 respectivamente.

Herramienta N°1

- **Tabla para la consignación de la cantidad de segmentos (frecuencia) que se clasifican dentro de cada una de las seis facetas de la idoneidad didáctica.**

A continuación, se presenta el modelo de tabla

Tabla 17. Plantilla para el registro de datos (esta no contiene datos)

Facetas De Idoneidad Didáctica episodio N°- N°sg #	
Epistémica	**Frecuencia**
Cognitiva	**Frecuencia**
Interaccional	**Frecuencia**
Mediacional	**Frecuencia**
Emocional	**Frecuencia**
Ecológica	**Frecuencia**

Recuadro donde se registra el nombre y número del episodio junto con la cantidad de segmentos que este contiene, antecedido del título: *Facetas De Idoneidad Didáctica.*

Columna de facetas de idoneidad

Columna asignada para el registro de los datos (Frecuencia)

Frecuencia: Es el número registrado en el episodio que corresponde a la cantidad de segmentos que fueron clasificados en la respectiva faceta. Cuyo valor máximo es el número de segmentos del episodio (**N°sg #**).

Tabla 18. Tabla ideal con el número máximo en cada faceta según la matriz categorial dos del episodio que se esté trabajando.

Facetas De Idoneidad Didáctica episodio N°- N°sg #	
Epistémica	**Frecuencia = N°sg #**
Cognitiva	**Frecuencia = N°sg #**
Interaccional	**Frecuencia = N°sg #**
Mediacional	**Frecuencia = N°sg #**
Emocional	**Frecuencia = N°sg #**
Ecológica	**Frecuencia = N°sg #**

- **Gráfico Radial o de Telaraña generado a partir de**: Tabla para la consignación de la cantidad de segmentos que se clasifican dentro de una idoneidad.

Las diferentes facetas de idoneidad didáctica se ubicarán en cada uno de los vértices del Gráfico Radial (*Herramienta Grafico Radial relleno; Excel*); y la cantidad de divisiones interna está determinada por la cantidad de segmentos que contenga un episodio.

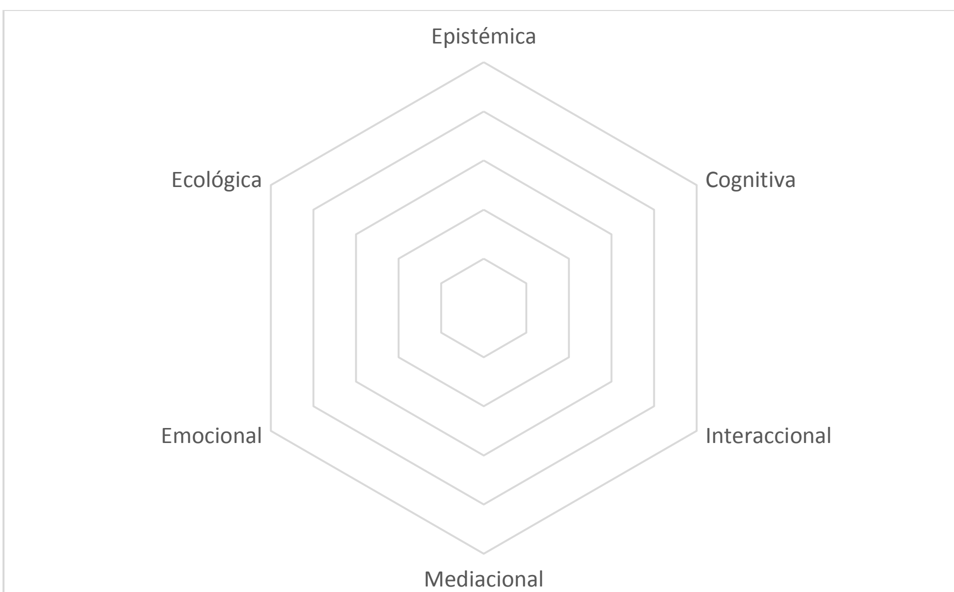


Figura 5. Gráfico radial generado a partir de la tabla 17.

Gráfico ideal donde todos segmentos presentaron indicadores máximos de cada faceta.

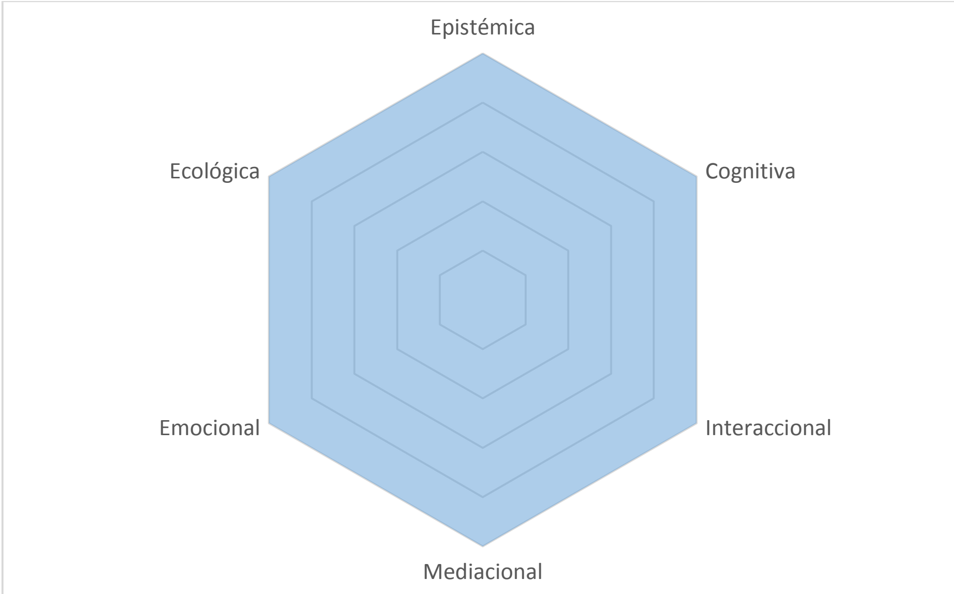


Figura 6. Grafico ideal generado a partir de la tabla 18.

La figura interna (color azul) se genera a partir de las frecuencias de las facetas, esta frecuencia está indicada por los números consignados en la columna gris.

De manera general el polígono generado internamente en el gráfico radial permite visualizar el equilibrio entre las diferentes facetas.

5.1.1 Episodio 4

A continuación, se presentan las matrices de facetas duales de Idoneidad Didáctica (I.D) del episodio fundamental 4 que son una forma de comparar, contrastar, distinguir y articular las diferentes facetas de la I.D construidas a partir de la matriz documental de cada episodio.

5.1.1.1 Matriz De Facetas de Idoneidad Didáctica

Convención de color de la letra

Es lo que se puede retirar, es necesario verificar superficialmente si no hay componentes que sirvan a la columna (olvidados).

Se utiliza para indicar en negro el componente que pertenece a la columna y en gris lo que hace parte del contexto pero que no aporta directamente un componente.

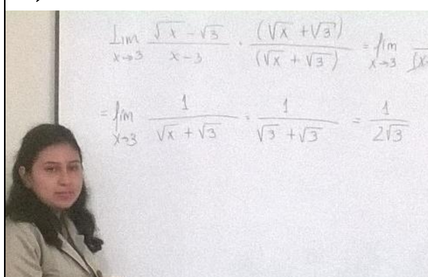
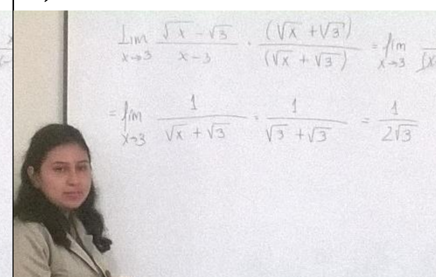
Otras conveccciones

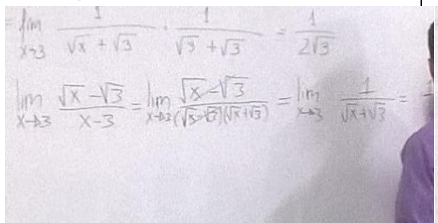
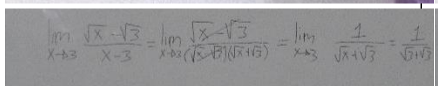
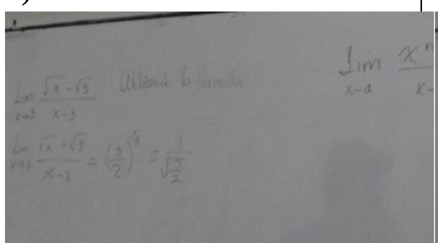
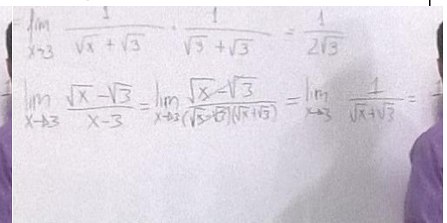
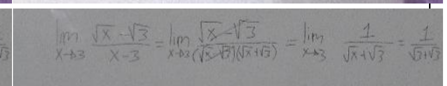
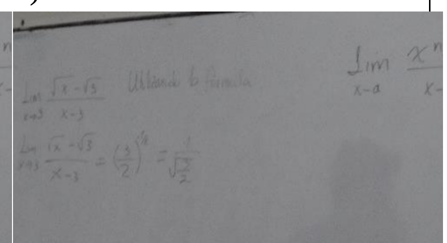
//---_---// se utiliza para aclarar el tipo de idoneidad del segmento

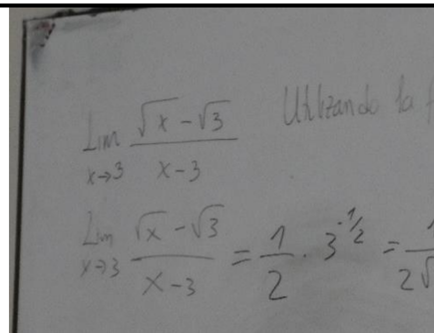
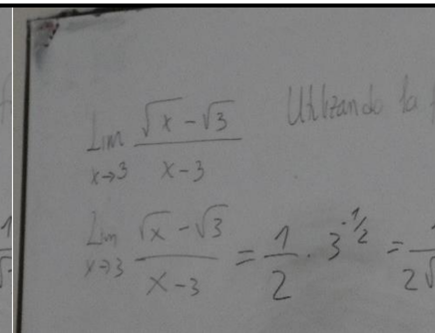
[Ep. 4] Episodio 4. Ejercicios sobre límites algebraicos y trigonométricos.

Tabla 19. Matriz de facetas duales: Epistémico - Cognitiva

Sg.	Observación de la Practica de clase	EPISTÉMICO	COGNITIVA	Análisis:
1	[Hay 9 estudiantes al empezar la clase a las 6:10 a.m.] La profesora busca captar la atención de los estudiantes y centra el objetivo de la clase. Ella les pregunta sobre un taller de límites [**Ver Anexo C-1**] y les dice que van a dedicar la clase a resolver ese taller.	**P**: ¿Recuerdan el taller sobre límites?	**P**: ¿Recuerdan el taller sobre límites?	

	Esto lo ha consultado conmigo un poco antes de empezar la clase y dice que va a ser una clase para mí, es decir, pasarlos al tablero, ponerlos a trabajar.	**P**: Pues hoy vamos a dedicar la clase a resolverlo: ustedes lo van a hacer, ¿Bueno?	**P**: Pues hoy vamos a dedicar la clase a resolverlo: ustedes lo van a hacer, ¿Bueno?	
2	Pasa una estudiante al tablero le va corrigiendo escritura: el igual, los paréntesis. La niña le va preguntando a un compañero, porque se siente insegura. Como la respuesta va con raíz le pide que racionalice, pero la profe le va diciendo todo el ejercicio. Le cuesta mucho dejarlos trabajar, equivocarse, si se demoran se impacienta y empieza a hacerlo ella misma, a hablar, a explicar, a reiterar insistentemente. Ella hace la	**P**: Empecemos: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$ 1) Primera Forma  $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} * \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$	**P**: Empecemos: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$ 1) Primera Forma  $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} * \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$	Los estudiantes realizan el desarrollo procedimental del ejercicio sin embrago todo el ejercicio está dirigido por la profesora, lo que puede limitar el desarrollo cognitivo que el estudiante pueda generar al trabajar el ejercicio, aun así, la estudiante que resuelve el ejercicio pregunta a un compañero si lo que realiza es correcto lo que abre la posibilidad a que se construya un desarrollo del problema desde los estudiantes. //---_---// Presenta carácter epistémico y cognitivo al hacer uso de conceptos desarrollados y adquiridos en clases anteriores, al tiempo que se intenta un desarrollo de diferentes maneras de un mismo ejercicio.

	pregunta y ella misma responde. Ahora otro estudiante pasa a hacerlo aplicando factorización. Pasa a un estudiante e insiste en que la raíz se pueda ver como diferencia de potencias.	2) Segunda Forma   $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$ $\lim_{x\to 3}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 3) Tercera Forma 	2) Segunda Forma   $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$ $\lim_{x\to 3}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 3) Tercera Forma 	

		 $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} = \frac{1}{2}*3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$	 $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} = \frac{1}{2}*3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$	
3	Y habla de los otros dos “Límites especiales”. En un momento de la clase, en privado, le pregunte ¿Por qué los llama así?, y me dijo que porque así se los enseñaron cuando vio calculo.	**<u>P</u>**: ¿Qué necesitas para los límites especiales? **<u>P:</u>** Todas las identidades y toda la trigonometría. 1) $\lim_{x\to 3}\frac{(x^n-a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x} = 0$	**<u>P</u>**: ¿Qué necesitas para los límites especiales? **<u>P:</u>** Todas las identidades y toda la trigonometría. 1) $\lim_{x\to 3}\frac{(x^n-a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x} = 0$	Se sigue impulsando la actitud activa del estudiante frente a la temática trabajada; la profesora recalca los elementos necesarios para el desarrollo de los distintos ejercicios de este episodio. //---_---// Presenta carácter epistémico al referir los conceptos necesarios en el desarrollo del problema.

4	Realmente el que hace es el tercero, pero así dijo. Reemplaza los valores y escribe:	**P**: Yo voy a demostrarles el primero y el otro lo hacen ustedes y está en todos los libros. $\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$	**P**: Yo voy a demostrarles el primero y el otro lo hacen ustedes y está en todos los libros. $\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$	Para generar seguridad la profesora desarrolla un ejercicio como base para la solución de los demás. //---_---// Presenta carácter epistémico en tanto que se propone un ejercicio base del cual el estudiante puede hacer uso posteriormente.
5	Ella enfatiza y repite que toca pensar.	**P**: Con los limites trigonométricos "toca pensar" y aquí en trigonometría toca pensar. Y hay que recordar los ángulos especiales. **P**: Hagan su ayuda didáctica: identidades, ángulos especiales, ángulos coterminales los 95 ángulos: haciendo la copia uno estudia, pero no es déjeme fotocopiar la suya. **P**: Tienes que poder traer eso a la mente: juguemos a hacer memoria, lo mismo con la calculadora.	**P**: Con los limites trigonométricos "toca pensar" y aquí en trigonometría toca pensar. Y hay que recordar los ángulos especiales. **P**: Hagan su ayuda didáctica: identidades, ángulos especiales, ángulos coterminales los 95 ángulos: haciendo la copia uno estudia, pero no es déjeme fotocopiar la suya. **P**: Tienes que poder traer eso a la mente: juguemos a hacer memoria, lo mismo con la calculadora.	La profesora establece una línea unidireccional de comunicación con el estudiante mediante la cual expone la importancia de poseer elementos conceptuales indispensables que debían ser adquiridos con anterioridad. //---_---// Presenta carácter epistémico ya que se presentan unos requisitos fundamentales ineludibles para el desarrollo de los problemas.
6	No lo deja responder	**P**: Listo Alejo, y si está en la forma $\frac{0}{0}$ ¿Qué hago? **P**: Quitar ese indeterminado y ¿Cómo?	**P**: Listo Alejo, y si está en la forma $\frac{0}{0}$ ¿Qué hago? **P**: Quitar ese indeterminado y ¿Cómo?	La profesora propone una indagación que le permita al estudiante adquirir una herramienta conceptual no trabajada en clase, la cual momentos después resuelve aportando la herramienta conceptual que debía ser investigada, pero que le permite a

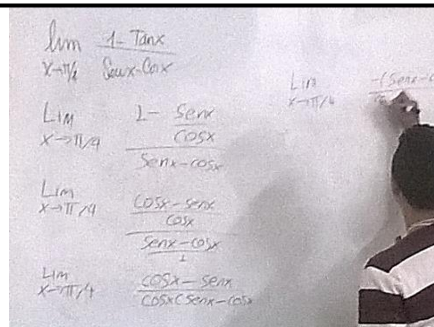
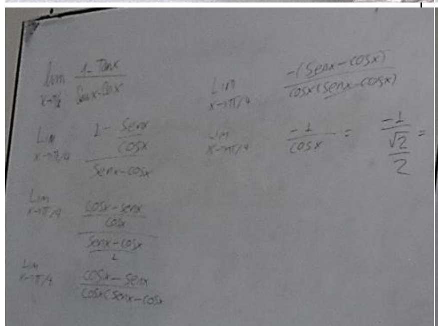
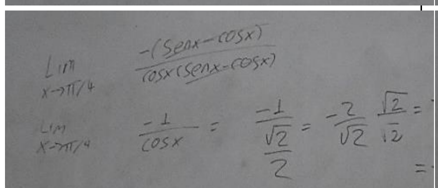
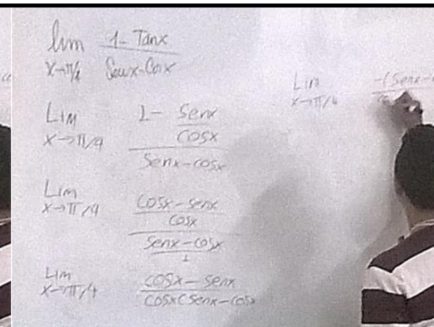
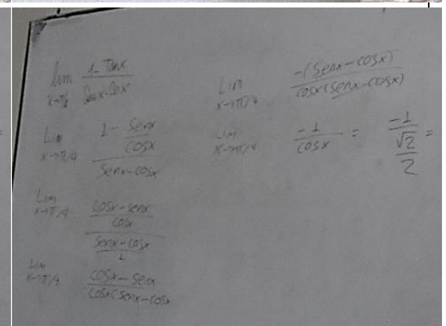
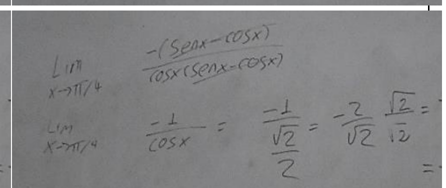
	Pero no espera ni 10 segundos y otra vez esta ella en el tablero con el marcador.	**P**: Pues lo único que sé, es que ustedes lo van a hacer de tarea. $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}*\frac{1+cosx}{(1+cosx)}$	**P**: Pues lo único que sé, es que ustedes lo van a hacer de tarea. $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}*\frac{1+cosx}{(1+cosx)}$	la profesora comenzar con el desarrollo del problema plateado; se da campo a la participación del estudiante en la solución de una parte del problema, sin embrago la mayor parte fue solucionada por la profesora. //---_---// Presenta carácter cognitivo al evidenciarse un desarrollo procedimental basado en conceptos base que permiten un grado de procesamiento conceptual, así como traspolación de herramientas a un ejercicio puntual.
		P: Lo multiplicamos por $\frac{1+cosx}{(1+cosx)}$ que es 1 entonces es válido. **P**: Y le da $=\frac{(1-\cos^2 x)}{x(1+cosx)}$ $=\frac{sen^2x}{x(1+cosx)}$ **P**: ¿Ya terminé?	**P**: Lo multiplicamos por $\frac{1+cosx}{(1+cosx)}$ que es 1 entonces es válido. **P**: Y le da $=\frac{(1-\cos^2 x)}{x(1+cosx)}$ $=\frac{sen^2x}{x(1+cosx)}$ **P**: ¿Ya terminé?	
		P: No. Ahí sigue el indeterminado evalúen y vera que ahí sigue el indeterminado. $\frac{sen^2x}{x(1+cosx)}$	**P**: No. Ahí sigue el indeterminado evalúen y vera que ahí sigue el indeterminado. $\frac{sen^2x}{x(1+cosx)}$	
		P: Entonces, ¿que nos da Alejo?	**P:** Entonces, ¿que nos da Alejo?	
	Alejo responde.	**E**: $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}*\frac{senx}{1+cosx}$	**E**: $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}*\frac{senx}{1+cosx}$	

	Alejo dice.	**P**: Entonces que daría: el primer limite por propiedades de los limites da 1 entonces solo nos queda el otro límite: Como ya apliqué una propiedad seguramente el indeterminado ya se haya ido. **P**: Evalué Alejo. **E**: $$=\frac{0}{2}$$ **P**: Entonces termínenlo, bueno, pero terminen y de tarea abran los libros para que vean la demostración del otro límite.	**P**: Entonces que daría: el primer limite por propiedades de los limites da 1 entonces solo nos queda el otro límite: Como ya apliqué una propiedad seguramente el indeterminado ya se haya ido. **P**: Evalué Alejo. **E**: $$=\frac{0}{2}$$ **P**: Entonces termínenlo, bueno, pero terminen y de tarea abran los libros para que vean la demostración del otro límite.	
7	Le parece interesante el ejercicio Se acerca a un estudiante que está en la primera fila y le dice: Se devuelve al tablero y continúa hablando.	**P**: Y ahora vámonos con uno interesante: $$\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$$ **P**: ¿Cuánto es la tangente de cero? no sé. **P**: No se asuste pinte su triángulo equilátero de catetos e hipotenusa = 1, ángulos 30° y 60° **P**: Y también necesita la circunferencia unitaria.	**P**: Y ahora vámonos con uno interesante: $$\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$$ **P**: ¿Cuánto es la tangente de cero? no sé. **P**: No se asuste pinte su triángulo equilátero de catetos e hipotenusa = 1, ángulos 30° y 60° **P**: Y también necesita la circunferencia unitaria.	Se plantea un ejercicio que necesariamente hace uso de recursos conceptuales y procedimentales que deben haber sido adquiridos con antelación, se permite el aporte de conocimientos previos de estudiantes particulares que pueden servir de base para aquellos que aún no los han adquiridos, sin embargo, la profesora interviene para que se puntualicen dichos conocimientos (es decir que se referencien herramientas específicas al problema). //---_---//

		P: Vuelve a limite entonces por todo eso el lim da 0/0 forma indeterminada. **P**: Entonces no piense la ayuda didáctica para sacarla en el parcial.	**P**: Vuelve a limite entonces por todo eso el lim da 0/0 forma indeterminada. **P**: Entonces no piense la ayuda didáctica para sacarla en el parcial.	Presenta carácter epistémico en tanto que se realiza un llamado a conceptos, elementos y herramientas que permitan el abordaje del problema, aquí se intenta la participación de estudiantes puntuales mediante el aporte conceptual de herramientas que la profesora supone manejan.
		P: Entonces arranque:	**P**: Entonces arranque:	
	Sigue preguntándole a Alejo…pero ella responde y escribe	**P**: $\lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{senx}{cosx} - senx\right)}{x^3}$	**P**: $\lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{senx}{cosx} - senx\right)}{x^3}$	
	Le pregunta a un estudiante llamando Felipe. Y él no responde.	**P:** A ver Felipe te escucho **P**: ¿Ya se iría el indeterminado?:	**P:** A ver Felipe te escucho **P**: ¿Ya se iría el indeterminado?:	
	Una niña responde	**E**: ¡No!	**E**: ¡No!	
	La profe se responde	**P**: ¿Por qué? **P**: Porque no he simplificado… ahora qué hago.	**P**: ¿Por qué? **P**: Porque no he simplificado… ahora qué hago.	
	Alejo responde.	**E:** Propiedades.	**E:** Propiedades.	
		P: ¿Alejo en matemáticas todo son propiedades entonces qué? ¿Cuáles propiedades?	**P**: ¿Alejo en matemáticas todo son propiedades entonces qué? ¿Cuáles propiedades?	

	Ella misma asocia para cuadrar el límite fundamental y sigue la indeterminación. La profesora dice. Perdió el hilo del procedimiento y los insta a terminarlo por su cuenta.	**P**: Entonces que podríamos hacer…pues conseguir un x^2? **P**: Me perdí. Por favor termínenlo por ahí ahorita que van a trabajar en grupo. Pero similarmente puedo desde el comienzo obtener un sen^3 mirando el ejercicio anterior, pues multiplicamos arriba y abajo por 1 representando como $\frac{1+cosx}{1+cosx}$ **P:** Al multiplicar arriba y abajo por 1, el $\lim_{x\to 0}\frac{1}{(Cosx(1+cosx))}$ evalúelo y da $\frac{1}{2}$.	**P**: Entonces que podríamos hacer…pues conseguir un x^2? **P**: Me perdí. Por favor termínenlo por ahí ahorita que van a trabajar en grupo. Pero similarmente puedo desde el comienzo obtener un sen^3 mirando el ejercicio anterior, pues multiplicamos arriba y abajo por 1 representando como $\frac{1+cosx}{1+cosx}$ **P:** Al multiplicar arriba y abajo por 1, el $\lim_{x\to 0}\frac{1}{(Cosx(1+cosx))}$ evalúelo y da $\frac{1}{2}$.	
8	Sale a traer listas y a fotocopiar para mí el parcial que aplicó el pasado viernes y que resolvió el pasado lunes **[Ver Anexo C-2]**. Me entregó desde el comienzo de la clase el taller de límites, en ese momento también salen	**P**: Bueno ahora empiecen a trabajar sobre el taller los limites trigonométricos: **P**: Soluciono dudas.	**P**: Bueno ahora empiecen a trabajar sobre el taller los limites trigonométricos: **P**: Soluciono dudas.	Se limita en gran medida el desarrollo autónomo de los estudiantes frente a los ejercicios propuestos en clase. //---_---// Presenta carácter cognitivo en el sentido que no se permite el desarrollo de dicha

	algunos estudiantes a fotocopiar el taller que supuestamente ya han trabajado. Bueno y ya son las 7:20 a. m. y nada que empieza el trabajo en grupo al que supuestamente íbamos a dedicar toda la clase.			idoneidad ya que se puede decir (a manera de comentario) que: Por eso los profes atienden a estudiantes en ciertas franjas horarias, que dicho sea de paso son bastante desaprovechadas por problemas de horarios)… cuesta dejar trabajar, cuesta dejar hacer: a los maestros nos cuesta dejar equivocarse, dejar rectificar, dejar preguntar, dejarlos trabajar a ellos: es como si sintiéramos por un lado que la clase se nos va y no hacemos nada! es decir dejarlos construir su propio conocimiento lo consideramos no hacer nada y nos preocupa que el tiempo de la clase se haya perdido
9	Regresa pronto. 5 o 6 minutos, me entrega la fotocopia del parcial y anota un ejercicio en el tablero (se le olvidó que había dicho que trabajaran en grupo).	**P**: Realicen los siguientes ejercicios. No sé si están o no en el taller, pero los vamos a revisar: 1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)$ 2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\, x-\cos x}$ **P**: Que están en la forma 0/0 **P**: Pasa Alejo y resuelve el segundo.	**P**: Realicen los siguientes ejercicios. No sé si están o no en el taller, pero los vamos a revisar: 1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)$ 2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\, x-\cos x}$ **P**: Que están en la forma 0/0 **P**: Pasa Alejo y resuelve el segundo.	

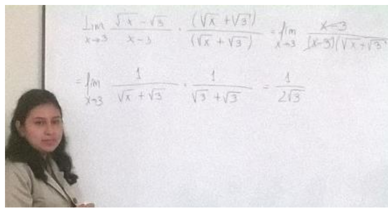
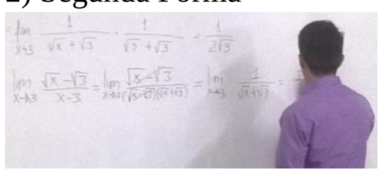
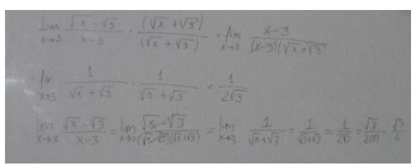
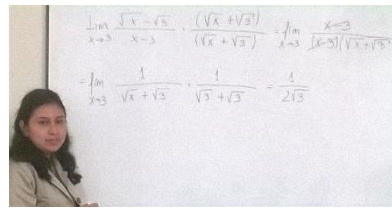
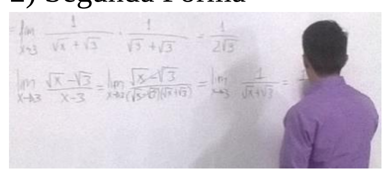
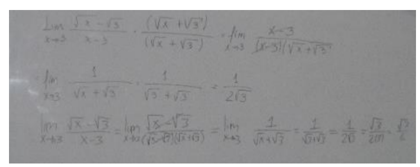
	Él pasa el ejercicio a senos y cosenos, separa convenientemente para que quede el limite fundamental	  	  	
	Para más claridad se presenta la transcripción de lo que aparece en las fotos.	$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\tan x)}{sen\ x-\cos x}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1-\frac{senx}{cosx}\right)}{sen\ x-\cos x}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{cosx-senx}{cosx}\right)}{sen\ x-\cos x}$	$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\tan x)}{sen\ x-\cos x}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1-\frac{senx}{cosx}\right)}{sen\ x-\cos x}$ $= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{cosx-senx}{cosx}\right)}{sen\ x-\cos x}$	

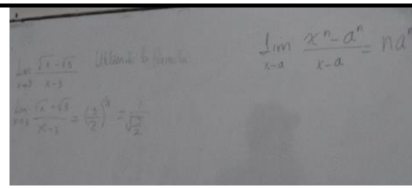
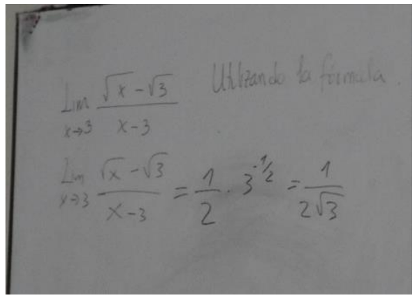
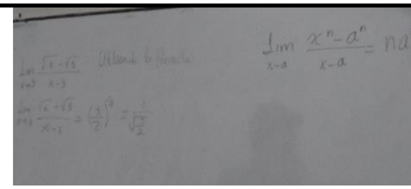
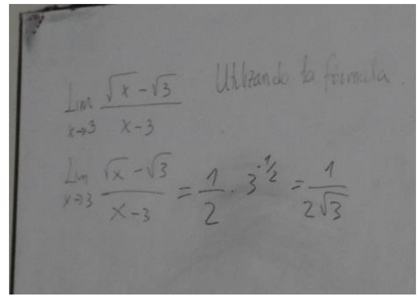
		$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{cosx - senx}{cosx(senx - cosx)}$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{cosx - senx}{cosx(cosx - senx)}$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{cosx} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$	$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{cosx - senx}{cosx(senx - cosx)}$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{cosx - senx}{cosx(cosx - senx)}$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{1}{cosx} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$	
10	Ahora ella anota otro ejercicio en el tablero, que tampoco veo en el taller. Bueno pasa la asistencia para actualizarla desde el lunes 29. Espera un ratico (creo que no más de 3 minutos) y pasa a Diego: se desempeña bien en escritura, Dice “factor de……” Termina el ejercicio muy bien y yo le pido permiso para fotografiarlo en el tablero: todos se ríen. Les advierto que las fotos no son para facebook ni nada de eso, solo para documentar que es trabajo de	**P**: ¿Qué forma tiene? Pero no pongan cara de que están pensando, miren el triángulo ¿que es la tangente en un triángulo? Saben que es lo chévere que todos los ejercicios son diferentes. **P**: uy y lo bonito que habla.	**P**: ¿Qué forma tiene? Pero no pongan cara de que están pensando, miren el triángulo ¿que es la tangente en un triángulo? Saben que es lo chévere que todos los ejercicios son diferentes. **P**: uy y lo bonito que habla.	

	estudiantes y borraba inmediatamente, ni siquiera alcancé a tomar la foto.			
11	Hay 17 estudiantes al finalizar la clase Invita a leer, a consultar, a articular la matemática con el arte, con la música, a motivarlos.	**P**: Terminen el taller. Gracias. Busquen a Escher. **P**: Hay una publicación que sacaba la U. Nacional "señal que cabalgamos": bucles, Escher, música, arte, matemáticas. **P**: Yo soy dispersa pero no se me olvida en que estoy no se preocupen.	**P**: Terminen el taller. Gracias. Busquen a Escher. **P**: Hay una publicación que sacaba la U. Nacional "señal que cabalgamos": bucles, Escher, música, arte, matemáticas. **P**: Yo soy dispersa pero no se me olvida en que estoy no se preocupen.	Se referencia elementos externos que pueden complementar los conceptos trabajados y adquiridos en clase. Se propone la culminación del taller como elemento que permita la adquisición de habilidad por parte de los estudiantes. //---_---// Presenta carácter epistémico y cognitivo ya que se hace necesario la ampliación del marco referencial conceptual del estudiante y se propone la continuación de la práctica extra clase que desarrollé agilidad en la resolución de problemas por parte de los estudiantes.

Tabla 20. Matriz de facetas duales: Interaccional – Mediacional

Sg.	Observación de la Practica de clase	INTERACCIONAL	MEDIACIONAL	Análisis:
1	La profesora busca captar la atención de los estudiantes y centra el objetivo de la clase Ella les pregunta sobre un taller de límites que adjunto y les dice que vamos a dedicar la clase a resolver ese taller (esto lo ha consultado conmigo un poco	[Hay 9 estudiantes al empezar la clase a las 6:10 a.m.] **P**: ¿Recuerdan el taller sobre límites? Pues hoy vamos a dedicar la clase a resolverlo: ustedes lo van a hacer ¿bueno?	[Hay 9 estudiantes al empezar la clase a las 6:10 a.m.] **P**: ¿Recuerdan el taller sobre límites? Pues hoy vamos a dedicar la clase a resolverlo: ustedes lo van a hacer ¿bueno?	La profesora realiza un cuestionamiento sobre un taller propuesto anteriormente, con ello se intenta entablar una interacción con los estudiantes la cual no obtiene resolución del estudiante en este segmento //---_---// Presenta carácter interaccional se pretende en un primer momento una especie de consulta

	antes de empezar la clase y dice que va a ser una clase para mí, es decir, pasarlos al tablero, ponerlos a trabajar.			por parte de la profesora hacia los estudiantes en la cual no se evidencia respuesta de estos últimos en este segmento
2	Pasa una estudiante al tablero le va corrigiendo escritura: el igual, los paréntesis. La niña le va preguntando a un compañero porque se siente insegura. Como la respuesta va con raíz le pide que racionalice pero la profe le va diciendo todo el ejercicio: le cuesta mucho dejarlos trabajar, equivocarse, si se demoran se impacienta (sin ponerse brava) sino que empieza a hacerlo ella misma, a hablar a explicar a “cantaletear”. Ella hace la pregunta y ella misma responde.	**<u>P</u>**: Empecemos: $$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$$ 1) Primera Forma  2) Segunda Forma   3) Tercera Forma	**<u>P</u>**: Empecemos: $$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$$ 1) Primera Forma  2) Segunda Forma   3) Tercera Forma	La profesora propone un ejercicio el cual es resuelto por los estudiantes de distintas formas en el tablero, a medida que la estudiante desarrolla el ejercicio se hace presente la constante corrección de la profesora a la estudiante lo que genera un grado de inseguridad de esta última. //---_---// Presenta carácter interaccional y mediacional. La interacción (corrección de la profesora a la estudiante) en este segmento puede ser negativa ya que en lugar de aclarar y servir de soporte genera en la estudiante un grado de inseguridad sobre sus proposiciones. Al igual que en el episodio anterior el tablero es una de las herramientas fundamentales para el desarrollo de la clase.

		 	 	
3	Pasa a un estudiante e insiste en que la raíz se pueda ver como diferencia de potencias. Anota en el tablero la fórmula que ella llama LÍMITES especiales. Voy a preguntarle a la salida porqué los llama así? Y habla de los otros dos LÍMITES especiales.	**P**: ¿Qué necesitas para los límites especiales? Todas las identidades y toda la trigonometría. En un rincón del tablero anota esos límites **especiales:** 1) $\lim_{x\to 3}\frac{(x^n-a^n)}{x-a}=na^{n-1}$ 2). $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$,y, 3). $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}=0$	**P**: ¿Qué necesitas para los límites especiales? Todas las identidades y toda la trigonometría. En un rincón del tablero anota esos límites **especiales:** 1) $\lim_{x\to 3}\frac{(x^n-a^n)}{x-a}=na^{n-1}$ 2). $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$,y, 3). $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}=0$	
4	Realmente el que hace es el tercero pero así dijo,	**P**: Yo voy a demostrarles el primero y el otro lo hacen	**P**: Yo voy a demostrarles el primero y el otro lo hacen	

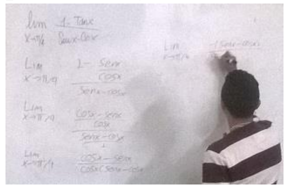
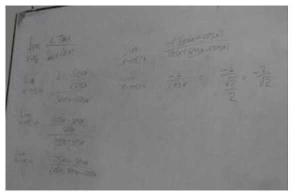
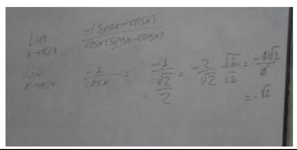
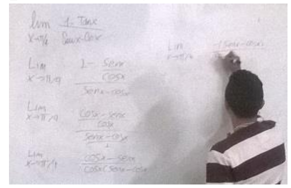
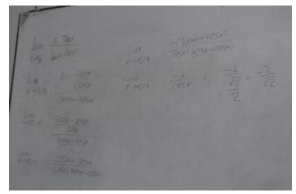
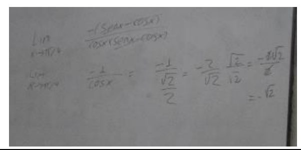
	Reemplaza los valores y escribe:	ustedes y está en todos los libros. $\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x} =$ Lim = $\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$	ustedes y está en todos los libros. $\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x} =$ Lim = $\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$	
5	Ella enfatiza y repite que toca pensar, o sea el que llamamos fundamental (esas palabras son mías).	**P**: Con los limites trigonométricos "toca pensar" y aquí en trigonometría ella enfatiza y repite que toca pensar. Y hay que recordar los ángulos especiales Hagan su ayuda didáctica: identidades, ángulos especiales, ángulos coterminales los 95 ángulos: haciendo la copia uno estudia, pero no es déjeme fotocopiar la suya. Tienes que poder traer eso a la mente: juguemos a hacer memoria, lo mismo con la calculadora.	**P**: Con los limites trigonométricos "toca pensar" y aquí en trigonometría ella enfatiza y repite que toca pensar. Y hay que recordar los ángulos especiales Hagan su ayuda didáctica: identidades, ángulos especiales, ángulos coterminales los 95 ángulos: haciendo la copia uno estudia, pero no es déjeme fotocopiar la suya. Tienes que poder traer eso a la mente: juguemos a hacer memoria, lo mismo con la calculadora.	Se intenta una interacción con los estudiantes mediante la proposición (Con los limites trigonométricos "toca pensar") que estimule una actitud reflexiva en ellos, sin embargo, el proceso comunicativo tiende a lo unidireccional profesor-estudiante //---_---// Presenta carácter interaccional al presentarse un proceso comunicativo mediante el cual la profesora intenta exponer la importancia del estar atento y ser cuidadoso en la solución de problemas de este tipo.
6	No lo deja responder	**P**: Listo Alejo, y si está en la forma $\frac{0}{0}$ ¿qué hago? **P**: quitar ese indeterminado y ¿cómo? Pues lo único que sé es lo que ustedes van a hacer de tarea $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x}$	**P**: Listo Alejo, y si está en la forma $\frac{0}{0}$ ¿qué hago? **P**: quitar ese indeterminado y ¿cómo? Pues lo único que sé es lo que ustedes van a hacer de tarea $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x}$	Aquí nuevamente se pretende abrir camino a la participación de los estudiantes, pero la impaciencia de la profesora trunca la posible respuesta de los estudiantes, sin embargo posteriormente se permite la respuesta de uno de los estudiantes. //---_---// Presenta carácter interaccional al evidenciarse la participación profesor estudiante, pero marcada en gran medida por la constante participación de la profesora.

	pero no espera ni 10 segundos y otra vez esta ella en el tablero con el marcador (A las 6:50 hay 16 estudiantes)	Lo multiplicamos por $\frac{1+cosx}{(1+cosx)}$ que es 1 entonces es válido. Y le da $\frac{(1-\cos^2 x)}{x(1+cosx)}$ ¿ya terminé? No. Ahí sigue el indeterminado evalúen y vera que ahí sigue el indeterminado. $\frac{sen^2 x}{x(1+cosx)}$ entonces que nos da Alejo **E1**: Alejo responde: $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$ $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{1+cosx}$ **<u>P</u>**: Entonces que daría: el primer limite por propiedades de los limites da 1 entonces solo nos queda el otro límite: Como ya apliqué una propiedad seguramente el indeterminado ya se haya ido. Evalué Alejo, E1: Alejo dice: $\frac{0}{2}$ **<u>P</u>**: entonces termínenlo, bueno, pero terminen y de tarea abran los libros para que vean la demostración del otro límite.	Lo multiplicamos por $\frac{1+cosx}{(1+cosx)}$ que es 1 entonces es válido. Y le da $\frac{(1-\cos^2 x)}{x(1+cosx)}$ ¿ya terminé? No. Ahí sigue el indeterminado evalúen y vera que ahí sigue el indeterminado. $\frac{sen^2 x}{x(1+cosx)}$ entonces que nos da Alejo **E1**: Alejo responde: $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$ $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{1+cosx}$ **<u>P</u>**: Entonces que daría: el primer limite por propiedades de los limites da 1 entonces solo nos queda el otro límite: Como ya apliqué una propiedad seguramente el indeterminado ya se haya ido. Evalué Alejo, E1: Alejo dice: $\frac{0}{2}$ **<u>P</u>**: entonces termínenlo, bueno, pero terminen y de tarea abran los libros para que vean la demostración del otro límite.	

7	Le parece interesante el ejercicio Se acerca a un estudiante que está en la primera fila y le dice: ,” NO SE ASUSTE PINTE SU TRIANGULO EQUILÁTERO DE CATETOS E HIPOTENUSA = 1 , ÁNGULOS 30 Y 60” Se devuelve al tablero y continúa hablando:	**<u>P</u>**: y ahora vámonos con uno interesante: $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$ **<u>P</u>**: ¿cuánto es la tangente de cero? no sé. Y también necesita la circunferencia unitaria y pinta sobre ella algunos ángulos. Vuelve a limite entonces por todo eso el lim da 0/0 forma indeterminada. Entonces no piense la ayuda didáctica para sacarla en el parcial. entonces arranque y sigue preguntándole a Alejo…pero ella responde y escribe: $\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{senx}{cosx}-senx\right)}{x^3}$ **<u>P:</u>** Felipe te escucho: ¿Ya se iría el indeterminado?: **E2**: una niña responde ¡no! P: ¿por qué? la profe se responde: porque no he simplificado… ahora qué hago	**<u>P</u>**: y ahora vámonos con uno interesante: $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$ **<u>P</u>**: ¿cuánto es la tangente de cero? no sé. Y también necesita la circunferencia unitaria y pinta sobre ella algunos ángulos. Vuelve a limite entonces por todo eso el lim da 0/0 forma indeterminada. Entonces no piense la ayuda didáctica para sacarla en el parcial. entonces arranque y sigue preguntándole a Alejo…pero ella responde y escribe: $\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{senx}{cosx}-senx\right)}{x^3}$ **<u>P:</u>** Felipe te escucho: ¿Ya se iría el indeterminado?: **E2**: una niña responde ¡no! P: ¿por qué? la profe se responde: porque no he simplificado… ahora qué hago	Nuevamente el momento de participación es impulsado desde la profesora esta vez con una participación un tanto más activa de los estudiantes en el proceso comunicativo,; la profesora genera preguntas a estudiantes puntuales con la intención de incentivar la participación de dichos estudiantes. //---_---// Presenta carácter interaccional al realizarse preguntas a estudiantes puntuales es evidente la intención de la profesora en que dichos estudiantes participen, sin embargo, cabe preguntarse ¿Por qué dichos estudiantes son los nombrados y no otros? ¿la profesora sabe los nombres de los demás estudiantes? ¿son para ella estudiantes con características particulares ?

		E1: Alejo: propiedades, **P**: Alejo en matemáticas todo son propiedades ¿entonces qué? ¿Cuáles propiedades? Ella misma asocia para cuadrar el limite fundamental y sigue la indeterminación entonces que podríamos hacer…pues ¿conseguir un x^2? **P**: me perdí. Por favor termínenlo por ahí ahorita que van a trabajar en grupo. pero similarmente puedo desde el comienzo obtener un $seno^3$ mirando el ejercicio anterior, pues multiplicamos arriba y abajo por 1 representando como $\frac{1+cosx}{1+cosx}$ Obtiene al multiplicar arriba y abajo 1 por $\lim_{x \to 0} \frac{1}{(Cosx(1+cosx))}$ evalúelo y da $\frac{1}{2}$.	E1: Alejo: propiedades, P: Alejo en matemáticas todo son propiedades ¿entonces qué? ¿Cuáles propiedades? Ella misma asocia para cuadrar el limite fundamental y sigue la indeterminación entonces que podríamos hacer…pues ¿conseguir un x^2? P: me perdí. Por favor termínenlo por ahí ahorita que van a trabajar en grupo. pero similarmente puedo desde el comienzo obtener un $seno^3$ mirando el ejercicio anterior, pues multiplicamos arriba y abajo por 1 representando como $\frac{1+cosx}{1+cosx}$ Obtiene al multiplicar arriba y abajo 1 por $\lim_{x \to 0} \frac{1}{(Cosx(1+cosx))}$ evalúelo y da $\frac{1}{2}$.	
8	Sale a traer listas y a fotocopiar para mí el parcial que aplicó el pasado viernes y que resolvió el pasado lunes. Me entregó desde el comienzo de la clase el taller de límites (adjunto) en ese	P: bueno ahora empiecen a trabajar sobre el taller los limites trigonométricos: soluciono dudas.	P: bueno ahora empiecen a trabajar sobre el taller los limites trigonométricos: soluciono dudas.	

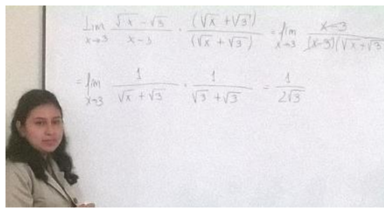
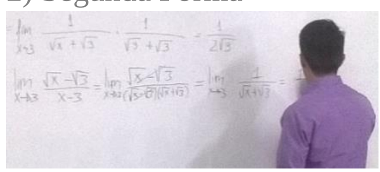
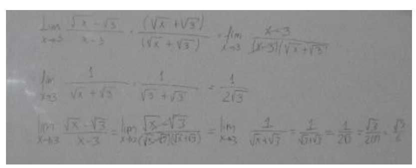
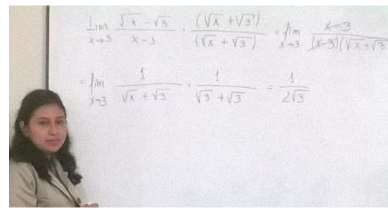
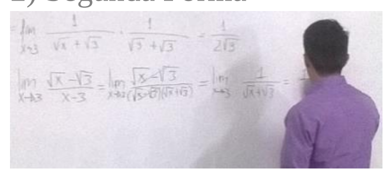
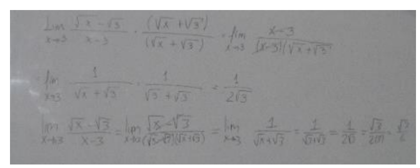
	momento también salen algunos estudiantes a fotocopiar el taller que supuestamente ya han trabajado. bueno y ya son las 7:20 a. m. y nada que empieza el trabajo en grupo al que supuestamente íbamos a dedicar toda la clase: Por eso los profes atienden a estudiantes en ciertas franjas horarias, que dicho sea de paso son bastante desaprovechadas por problemas de horarios)… cuesta dejar trabajar, cuesta dejar hacer: a los maestros nos cuesta dejar equivocarse, dejar rectificar, dejar preguntar, dejarlos trabajar a ellos: es como si sintiéramos por un lado que la clase se nos va y no hacemos nada!!!es decir dejarlos construir su propio conocimiento lo consideramos no hacer nada y nos preocupa que el tiempo de la clase se haya perdido			
9	Regresa pronto. 5 o 6 minutos, me entrega la fotocopia del parcial y anota un ejercicio en el tablero (se le olvidó que	**<u>P</u>**: realicen los siguientes ejercicios. no sé si están o no en el taller pero los vamos a revisar: 1) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right)$	**<u>P</u>**: realicen los siguientes ejercicios. no sé si están o no en el taller pero los vamos a revisar: 1) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right)$	Se permite la participación practica del estudiante se utiliza el tablero como herramienta para el desarrollo del problema. //---_---//

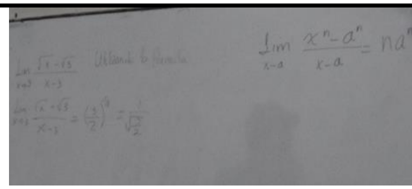
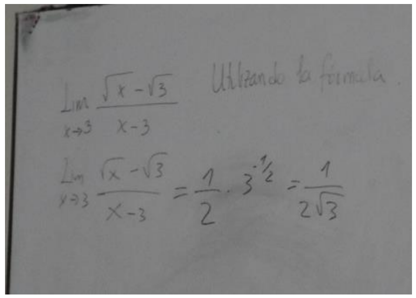
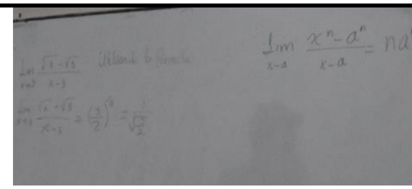
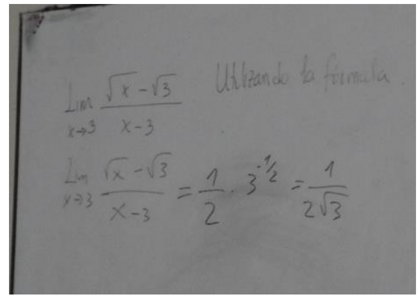
	había dicho que trabajaran en grupo). **Foto de Alejo en el tablero. Y de lo que él escribe.** Él lo pasa a senos y cosenos, separa convenientemente que quede el fundamental	2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x}$ Que están en la forma 0/0 y pasa a Alejo.   	2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x}$ Que están en la forma 0/0 y pasa a Alejo.   	Presenta carácter interaccional y mediacional; el estudiante toma un papel activo en este segmento la profesora es ahora observadora del desarrollo cognitivo del estudiante, el tablero parece por la herramienta predomínate para el desarrollo y exposición de conceptos.
10	Ahora ella anota otro en el tablero, que tampoco veo en el taller? Bueno pasa la asistencia para actualizarla desde el lunes 29. Espera un ratico (creo que no más de 3 minutos) y pasa a diego: se desempeña bien en escritura, Dice: “factor de… ” Termina el ejercicio muy bien y yo le pido permiso para	**P**: ¿qué forma tiene? Pero no pongan cara de que están pensando miren el triángulo ¿qué es la tangente en un triángulo? Saben que es lo chévere que todos los ejercicios son diferentes. **P**: uy y lo bonito que habla.	**P**: ¿qué forma tiene? Pero no pongan cara de que están pensando miren el triángulo ¿qué es la tangente en un triángulo? Saben que es lo chévere que todos los ejercicios son diferentes. **P**: uy y lo bonito que habla.	Se realiza un comentario de la profesora mediante el cual expresa que ha identificado que no muchos estudiantes están entendiendo. //---_---// Presenta carácter interaccional la profesora establece un momento comunicativo unidireccional en que expresa una preocupación y un punto de vista.

	fotografiarlo en el tablero: todos se ríen. Les advierto que las fotos no son para Facebook ni nada de eso, solo para documentar que es trabajo de estudiantes y borraba inmediatamente, ni siquiera alcancé a tomar la foto.			
11	Hay 17 estudiantes al finalizar la clase	P: terminen el taller. Gracias. Busquen a Escher. P: hay una publicación que sacaba la u. nacional "señal que cabalgamos": bucles, Escher, música, arte, matemáticas. "yo soy dispersa pero no se me olvida en que estoy no se preocupen".	P: terminen el taller. Gracias. Busquen a Escher. P: hay una publicación que sacaba la u. nacional "señal que cabalgamos": bucles, Escher, música, arte, matemáticas. "yo soy dispersa pero no se me olvida en que estoy no se preocupen".	

Tabla 21. Matriz de facetas duales: Emocional – Ecológica

Sg.	Observación de la Practica de clase	EMOCIONAL	ECOLÓGICA	Análisis:
1	La profesora busca captar la atención de los estudiantes y centra el objetivo de la clase Ella les pregunta sobre un taller de límites que adjunto y les dice que vamos a dedicar la clase a resolver ese taller (esto lo ha consultado conmigo un poco antes de empezar la clase	[Hay 9 estudiantes al empezar la clase a las 6:10 a.m.] P: ¿Recuerdan el taller sobre límites? Pues hoy vamos a dedicar la clase a resolverlo: ustedes lo van a hacer ¿bueno?	[Hay 9 estudiantes al empezar la clase a las 6:10 a.m.] P: ¿Recuerdan el taller sobre límites? Pues hoy vamos a dedicar la clase a resolverlo: ustedes lo van a hacer ¿bueno?	//---_---// Presenta carácter emocional y ecológico. Emocional al destacarse el interés de la profesora en que los estudiantes centren su atención en los conceptos que se están explicando. Y ecológico al tomar el mar la hora de inicio de la clase como referente de la cantidad de estudiantes que acceden a los temas expuestos en este segmento.

	y dice que va a ser una clase para mí, es decir, pasarlos al tablero, ponerlos a trabajar.			
2	Pasa una estudiante al tablero le va corrigiendo escritura: el igual, los paréntesis. La niña le va preguntando a un compañero porque se siente insegura. Como la respuesta va con raíz le pide que racionalice pero la profe le va diciendo todo el ejercicio: le cuesta mucho dejarlos trabajar, equivocarse, si se demoran se impacienta (sin ponerse brava) sino que empieza a hacerlo ella misma, a hablar a explicar a “cantaletear”. Ella hace la pregunta y ella misma responde.	**P**: Empecemos: $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$ 1) Primera Forma  2) Segunda Forma   3) Tercera Forma	**P**: Empecemos: $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$ 1) Primera Forma  2) Segunda Forma   3) Tercera Forma	//---_---// Presenta carácter emocional aquí este carácter se evidencia en la estudiante que está desarrollando el ejercicio en el tablero, ya que debido a las correcciones de la profesora esta pierde algo de seguridad y acude a un compañero para verificar si sus proposiciones son correctas y para que este le ayude en la solución de alguna incertidumbres que posee.

		 	 	
3	Pasa a un estudiante e insiste en que la raíz se pueda ver como diferencia de potencias. Anota en el tablero la fórmula que ella llama LÍMITES especiales. Voy a preguntarle a la salida porqué los llama así? Y habla de los otros dos LÍMITES especiales.	**P**: ¿Qué necesitas para los límites especiales? Todas las identidades y toda la trigonometría. En un rincón del tablero anota esos límites **especiales:** 1) $\lim_{x\to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ 2). $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$,y, 3). $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0$	**P**: ¿Qué necesitas para los límites especiales? Todas las identidades y toda la trigonometría. En un rincón del tablero anota esos límites **especiales:** 1) $\lim_{x\to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ 2). $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$,y, 3). $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0$	
4	Realmente el que hace es el tercero pero así dijo,	**P**: Yo voy a demostrarles el primero y el otro lo hacen	**P**: Yo voy a demostrarles el primero y el otro lo hacen	

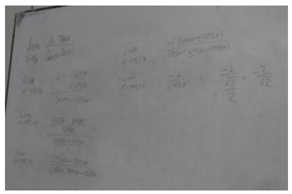
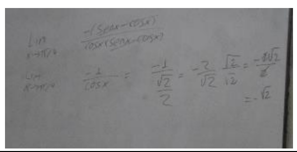
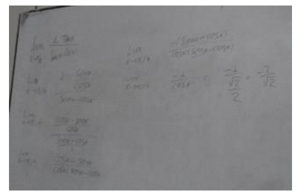
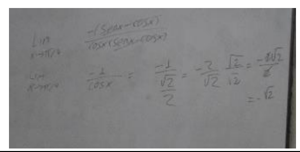
	Reemplaza los valores y escribe:	ustedes y está en todos los libros. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x} =$ Lim $= \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$	ustedes y está en todos los libros. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x} =$ Lim $= \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$	
5	Ella enfatiza y repite que toca pensar, o sea el que llamamos fundamental (esas palabras son mías).	**P**: Con los limites trigonométricos “toca pensar” y aquí en trigonometría ella enfatiza y repite que toca pensar. Y hay que recordar los ángulos especiales Hagan su ayuda didáctica: identidades, ángulos especiales, ángulos coterminales los 95 ángulos: haciendo la copia uno estudia, pero no es déjeme fotocopiar la suya. Tienes que poder traer eso a la mente: juguemos a hacer memoria, lo mismo con la calculadora.	**P**: Con los limites trigonométricos “toca pensar” y aquí en trigonometría ella enfatiza y repite que toca pensar. Y hay que recordar los ángulos especiales Hagan su ayuda didáctica: identidades, ángulos especiales, ángulos coterminales los 95 ángulos: haciendo la copia uno estudia, pero no es déjeme fotocopiar la suya. Tienes que poder traer eso a la mente: juguemos a hacer memoria, lo mismo con la calculadora.	//---_---// Presenta carácter emocional al enfatizar “que toca pensar” la profesora puede estar adquiriendo una postura en la que inconscientemente este obviando algunos de los procesos cognitivos de los estudiantes.
6	No lo deja responder	**P**: Listo Alejo, y si está en la forma $\frac{0}{0}$ ¿qué hago? **P**: quitar ese indeterminado y ¿cómo? Pues lo único que sé es lo que ustedes van a hacer de tarea $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x}$	**P**: Listo Alejo, y si está en la forma $\frac{0}{0}$ ¿qué hago? **P**: quitar ese indeterminado y ¿cómo? Pues lo único que sé es lo que ustedes van a hacer de tarea $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x}$	//---_---// Presenta carácter emocional y ecológico en un primer momento es evidente la impaciencia de la profesora ante la proposición de un ejercicio; por otra parte el tiempo de clase a transcurrido y se pueden observar más estudiantes (nuevamente el tiempo pare afectar la concurrencia de los estudiantes a la clase).

	pero no espera ni 10 segundos y otra vez esta ella en el tablero con el marcador (A las 6:50 hay 16 estudiantes)	Lo multiplicamos por $\frac{1+cosx}{(1+cosx)}$ que es 1 entonces es válido. Y le da $\frac{(1-\cos^2 x)}{x(1+cosx)}$ ya terminé? No. Ahí sigue el indeterminado evalúen y vera que ahí sigue el indeterminado. $\frac{sen^2 x}{x(1+cosx)}$ entonces que nos da Alejo **E1**: Alejo responde: $$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{1+cosx}$$ **<u>P</u>**: Entonces que daría: el primer limite por propiedades de los limites da 1 entonces solo nos queda el otro límite: Como ya aplique una propiedad seguramente el indeterminado ya se haya ido. Evalué Alejo, E1: Alejo dice: $\frac{0}{2}$ **<u>P</u>**: entonces termínenlo, bueno pero terminen y de tarea abran los libros para que vean la demostración del otro límite.	Lo multiplicamos por $\frac{1+cosx}{(1+cosx)}$ que es 1 entonces es válido. Y le da $\frac{(1-\cos^2 x)}{x(1+cosx)}$ ya terminé? No. Ahí sigue el indeterminado evalúen y vera que ahí sigue el indeterminado. $\frac{sen^2 x}{x(1+cosx)}$ entonces que nos da Alejo **E1**: Alejo responde: $$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{1+cosx}$$ **<u>P</u>**: Entonces que daría: el primer limite por propiedades de los limites da 1 entonces solo nos queda el otro límite: Como ya aplique una propiedad seguramente el indeterminado ya se haya ido. Evalué Alejo, E1: Alejo dice: $\frac{0}{2}$ **<u>P</u>**: entonces termínenlo, bueno pero terminen y de tarea abran los libros para que vean la demostración del otro límite.	

7	Le parece interesante el ejercicio Se acerca a un estudiante que está en la primera fila y le dice: ,” NO SE ASUSTE PINTE SU TRIANGULO EQUILÁTERO DE CATETOS E HIPOTENUSA = 1 , ÁNGULOS 30 Y 60” Se devuelve al tablero y continúa hablando: (FOTO)	**P**: y ahora vámonos con uno interesante: $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$ **P**: ¿cuánto es la tangente de cero? no sé. Y también necesita la circunferencia unitaria y pinta sobre ella algunos ángulos. Vuelve a limite entonces por todo eso el lim da 0/0 forma indeterminada. Entonces no piense la ayuda didáctica para sacarla en el parcial. entonces arranque y sigue preguntándole a Alejo…pero ella responde y escribe: $\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{senx}{cosx}-senx\right)}{x^3}$ **P:** Felipe te escucho: ¿Ya se iría el indeterminado?: **E2**: una niña responde ¡no! P: por qué? la profe se responde: porque no he simplificado… ahora qué hago	**P**: y ahora vámonos con uno interesante: $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$ **P**: ¿cuánto es la tangente de cero? no sé. Y también necesita la circunferencia unitaria y pinta sobre ella algunos ángulos. Vuelve a limite entonces por todo eso el lim da 0/0 forma indeterminada. Entonces no piense la ayuda didáctica para sacarla en el parcial. entonces arranque y sigue preguntándole a Alejo…pero ella responde y escribe: $\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{senx}{cosx}-senx\right)}{x^3}$ **P:** Felipe te escucho: ¿Ya se iría el indeterminado?: **E2**: una niña responde ¡no! P: por qué? la profe se responde: porque no he simplificado… ahora qué hago	

		E1: Alejo: propiedades, **P**: Alejo en matemáticas todo son propiedades ¿entonces qué? ¿Cuáles propiedades? Ella misma asocia para cuadrar el limite fundamental y sigue la indeterminación entonces que podríamos hacer…pues ¿conseguir un x^2? **P**: me perdí. Por favor termínenlo por ahí ahorita que van a trabajar en grupo. pero similarmente puedo desde el comienzo obtener un $seno^3$ mirando el ejercicio anterior, pues multiplicamos arriba y abajo por 1 representando como $\frac{1+cosx}{1+cosx}$ Obtiene al multiplicar arriba y abajo 1 por $\lim_{x\to 0}\frac{1}{(Cosx(1+cosx))}$ evalúelo y da $\frac{1}{2}$.	**E1**: Alejo: propiedades, **P**: Alejo en matemáticas todo son propiedades ¿entonces qué? ¿Cuáles propiedades? Ella misma asocia para cuadrar el limite fundamental y sigue la indeterminación entonces que podríamos hacer…pues ¿conseguir un x^2? **P**: me perdí. Por favor termínenlo por ahí ahorita que van a trabajar en grupo. pero similarmente puedo desde el comienzo obtener un $seno^3$ mirando el ejercicio anterior, pues multiplicamos arriba y abajo por 1 representando como $\frac{1+cosx}{1+cosx}$ Obtiene al multiplicar arriba y abajo 1 por $\lim_{x\to 0}\frac{1}{(Cosx(1+cosx))}$ evalúelo y da $\frac{1}{2}$.	
8	Sale a traer listas y a fotocopiar para mí el parcial que aplicó el pasado viernes y que resolvió el pasado lunes. Me entregó desde el comienzo de la clase el taller de límites (adjunto) en	**P**: bueno ahora empiecen a trabajar sobre el taller los limites trigonométricos: soluciono dudas.	**P**: bueno ahora empiecen a trabajar sobre el taller los limites trigonométricos: soluciono dudas.	En conclusión al segmento puedo identificar que cuesta dejar trabajar, cuesta dejar hacer: a los maestros nos cuesta dejar equivocarse, dejar rectificar, dejar preguntar, dejarlos trabajar a ellos: es como si sintiéramos por un lado que la clase se

	ese momento también salen algunos estudiantes a fotocopiar el taller que supuestamente ya han trabajado. bueno y ya son las 7:20 a. m. y nada que empieza el trabajo en grupo al que supuestamente íbamos a dedicar toda la clase: Por eso los profes atienden a estudiantes en ciertas franjas horarias, que dicho sea de paso son bastante desaprovechadas por problemas de horarios)… cuesta dejar trabajar, cuesta dejar hacer: a los maestros nos cuesta dejar equivocarse, dejar rectificar, dejar preguntar, dejarlos trabajar a ellos: es como si sintiéramos por un lado que la clase se nos va y no hacemos nada!!!es decir dejarlos construir su propio conocimiento lo consideramos no hacer nada y nos preocupa que el tiempo de la clase se haya perdido			nos va y no hacemos nada!!!es decir dejarlos construir su propio conocimiento lo consideramos no hacer nada y nos preocupa que el tiempo de la clase se haya perdido
9	Regresa pronto. 5 o 6 minutos, me entrega la fotocopia del parcial y anota un ejercicio en el tablero (se le olvidó que	**P**: realicen los siguientes ejercicios. no sé si están o no en el taller pero los vamos a revisar:	**P**: realicen los siguientes ejercicios. no sé si están o no en el taller pero los vamos a revisar:	

	había dicho que trabajaran en grupo). **Foto de Alejo en el tablero. Y de lo que él escribe.** Él lo pasa a senos y cosenos, separa convenientemente que quede el fundamental	1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)$ 2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x}$ Que están en la forma 0/0 y pasa a Alejo.   	1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)$ 2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x}$ Que están en la forma 0/0 y pasa a Alejo.   	
10	Ahora ella anota otro en el tablero, que tampoco veo en el taller? Bueno pasa la asistencia para actualizarla desde el lunes 29. Espera un ratico (creo que no más de 3 minutos) y pasa a diego: se desempeña bien en escritura, Dice: “factor de… ”	**P**: ¿qué forma tiene? Pero no pongan cara de que están pensando miren el triángulo ¿qué es la tangente en un triángulo? Saben que es lo chévere que todos los ejercicios son diferentes. **P**: uy y lo bonito que habla.	**P**: ¿qué forma tiene? Pero no pongan cara de que están pensando miren el triángulo ¿qué es la tangente en un triángulo? Saben que es lo chévere que todos los ejercicios son diferentes. **P**: uy y lo bonito que habla.	

	Termina el ejercicio muy bien y yo le pido permiso para fotografiarlo en el tablero: todos se ríen. Les advierto que las fotos no son para Facebook ni nada de eso, solo para documentar que es trabajo de estudiantes y borraba inmediatamente, ni siquiera alcancé a tomar la foto.			
11	Hay 17 estudiantes al finalizar la clase	**P**: terminen el taller. Gracias. Busquen a Escher. **P**: hay una publicación que sacaba la u. nacional “señal que cabalgamos”: bucles, Escher, música, arte, matemáticas. “yo soy dispersa pero no se me olvida en que estoy no se preocupen”.	**P**: terminen el taller. Gracias. Busquen a Escher. **P**: hay una publicación que sacaba la u. nacional “señal que cabalgamos”: bucles, Escher, música, arte, matemáticas. “yo soy dispersa pero no se me olvida en que estoy no se preocupen”.	//---_---// Presenta carácter emocional se evidencia en el reconocimiento que realiza la profesora sobre su autoconcepción de concentración.

5.1.1.2 Cinco Niveles De Análisis

A continuación, se presentan los cinco niveles de análisis aplicados al episodio 4; en el quinto nivel se hace alusión a la matriz de facetas anteriormente presentada.

PRIMER NIVEL DE ANÁLISIS

Identificación de prácticas matemáticas[22]

La profesora: tiene el papel protagónico de este episodio. De manera general es la que **formula y plantea** los ejercicios, ella misma los **resuelve**, **genera** y **comunica** preguntas, **selecciona los estudiantes** que pasan al tablero, **enfatiza**, **repite**, **da instrucciones** para la solución de los ejercicios, realiza **llamados de atención,** Generaliza sobre un tipo de límites y nomina (les coloca nombre) **[EP.4-Sg3].**

Los estudiantes: tienen un papel menos activo que el de la profesora, solo intervienen dos estudiantes del curso; ellos se ocupan de los procesos de **racionalización**, **factorización**, **simplificación** y **evaluación del cálculo de límites.**

Desde el punto de vista de la práctica matemática la profesora tanto plantea como resuelve los ejercicios, lo cual puede deberse a factores como:

- El paradigma de formación por el cual ha pasado la profesora.
- Modelo de desarrollo de la clase limitado por el currículo (guía de cátedra, pensum).
- Tiempo de desarrollo del curso (Cronograma curricular).
- Falsa percepción de optimización del tiempo por parte del profesor al solucionar los problemas el mismo.
- El esquema de clases de matemáticas de la facultad de ingeniería que sigue el o patrón:
    - Definir
    - Describir
    - Ejemplificar
    - Solucionar
    - Ejercitar (dejar ejercicios de tarea).
- Desconfianza en la capacidad de los estudiantes en la resolución de problemas.
- El imaginario de que es el profesor quien sabe más y explica mejor.
- Desconocimiento del error como herramienta de aprendizaje.
- Desinterés por las herramientas de la que hacer práctica docente y como cualificar esa práctica docente en aras de posibilitar un mejor aprendizaje.
- En general la profesora se relaciona con un estudiante repitente (Alejo) [EP.4; Sg.6, Sg.7, Sg.9].

[22] Font, V., Planas, N & Godino, J. (2009). Modelo Para El Análisis Didáctico En Educación Matemática. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf

Por otra parte, desde el punto de vista de la práctica matemática podemos identificar que para este caso los estudiantes están representados por dos alumnos que son los visibles. Asumen el rol de receptores y cuando tratan de resolver los ejercicios propuestos lo hacen de manera general, fenómeno que puede deberse a:

- Predominancia de la profesora como protagonista principal.
- Metodología propuesta por la profesora.
- Imaginario de los estudiantes de que así se desarrolla una clase de matemáticas.
- Carencia de los elementos bases para participar, preguntar, proponer, cuestionar.
- Pena, timidez al participar.
- Desinterés debido a:
    - Porque no entiende.
    - Falta de empatía con el profesor.
    - Incomodidad por la repitencia de la materia.
    - Falta convicción por la carrera.
    - Falta de claridad sobre el proyecto de vida.
    - Conflictos personales de diversas índoles.
    - Falta de coherencia entre lo que se enseña y el mundo que vivencia.
    - La predominancia del enfoque cuantitativo en las materias versus ganancias de saber cualitativo (conocimientos adquiridos, procesos de aprendizaje).

SEGUNDO NIVEL DE ANÁLISIS.

Identificación de objetos y procesos matemáticos.[23]

- **Procesos**

    Se evidencia un proceso de algoritmización de cálculo de límites en el que tiene un papel importante el proceso de tratamiento para conseguir expresiones equivalentes.

En síntesis, en general, podríamos estructurar la configuración de la siguiente manera: hay un procedimiento general para calcular límites de reales de una variable

1. Sustituir o evaluar
2. Ver si sale una indeterminación o no
3. Si sale una indeterminación, expresar la función de forma equivalente pero diferente, es decir, hacer tratamientos
4. Según el tipo de indeterminación y de función, sugerencias, maneras, recursos, herramientas, intuiciones, algoritmos, formas de tratamientos específicos
5. Recordar propiedades: identidades, casos de factorización, productos notables, potencias, …
6. Según sea la función, es más conveniente usar un proceso que otro.

[23] Font, V., Planas, N & Godino, J. (2009). Modelo Para El Análisis Didáctico En Educación Matemática. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf

Podríamos estructurar así desde el punto de vista de darles pautas de un procedimiento general para calcular límites, que luego se subdividen en específicos: no para algoritmizar, o mecanizar, sino para que tengan cada vez más elementos en el cálculo de límites, que junto con derivadas, es en ultimas, a lo que se dedica el cálculo diferencial en las facultades de ingeniería, o en general, más aún de cualquier calculo diferencial de primer semestre que no sea de una carrera de matemática pura o disciplinar. Con lo cual se quiere decir que, si este cálculo tiene como fin principal, entre otros, dotar a los estudiantes de las herramientas y conceptos necesarios para logar un buen desempeño, tener éxito en la solución de límites, debería al menos cumplir con esa función adecuadamente.

Es necesario subdividir el cálculo de límites en sub-casos, siendo muy importante el tratamiento en el cálculo de límites, hay un procedimiento no epistémico de la profesora en estos tratamientos de lo cual es lógico que los estudiantes experimenten dificultades de diversa índole.

Los alumnos tienen dificultades en cálculo de límites, lo cual se evidencia en el hecho de que, descontando un porcentaje muy bajito de estudiantes, la mayoría no tiene éxito.

TERCER NIVEL DE ANÁLISIS.

Descripción de interacciones en torno a conflictos.[24]

- **Interacción**

La profesora en esta clase hacer salir a la pizarra a tres alumnos que son los mismos que salen siempre en casi todas las clases

La profesora procede con el siguiente patrón de interacción: **inicio-respuesta-evaluación**, en algunos casos la respuesta es de un alumno (**r**), pero en mucho casos ella misma se responde (**R**).

"*Realicen el siguiente ejercicio. No sé si está o no en el taller, pero lo vamos a revisar:"*

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right)$ *Que está en la forma 0/0 y pasa Alejo.*

"*Listo Alejo, y si está en la forma 0/0 ¿qué hago?" ella misma dice:* "*quitar ese indeterminado y cómo? Pues lo único que sé es lo que ustedes van a hacer de tarea* "

La profesora resuelve el primer límite en la pizarra y hace intervenir a dos alumnos siguiendo el patrón **I-r-E** *(iniciación profesora-respuesta alumno-evaluación profesora).* En el segundo límite la interacción comienza con **I-R-E** *(la profesora pregunta, ella misma contesta y ella misma lo da por bueno)* y continua con I-r-E; I-R-E; I-r-E; I-R-E hasta que la profesora misma dice: *"me perdí". El segundo problema queda sin resolver*.

[24] Font, V., Planas, N & Godino, J. (2009). Modelo Para El Análisis Didáctico En Educación Matemática. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf

En el tercer problema sale un alumno a la pizarra y lo resuelve sin decir nada. La profesora lo da por bueno. Lo mismo sucede con el cuarto problema, aunque el alumno que lo resuelve es otro.

Hay que resaltar que la profesora:

1) No resuelve el primer límite como un caso particular de $\lim_{x \to a} \frac{(x^n - a^n)}{x-a}$ a pesar de decir que lo iba a hacer, y

2) que el cálculo del tercer límite queda lo deja sin terminar

La interacción que está presente en esas prácticas fomenta que siempre sean unos pocos alumnos los que solucionan los problemas:

> *Espera un ratico (creo que no más de 3 minutos) y pasa a Felipe:*
>
> Luego dice "*Felipe te escucho*"
> *La sucesión de las rectas secantes (Sn) se acerca a la recta tangente T, esto ocurre cuando qué Felipe*
>
> *Realicen el siguiente ejercicio. No sé si está o no en el taller, pero lo vamos a revisar:* $\lim_{x \to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right)$ *que está en la forma 0/0 y pasa Alejo.*
>
> *Listo Alejo, y si está en la forma 0/0 ¿qué hago? ella misma dice: quitar ese indeterminado y ¿cómo? Pues lo único que sé es lo que ustedes van a hacer de tarea*
>
> *Evalué Alejo, Alejo dice: 0/2*
>
> *Y en otros semestres el papel de Alejo estuvo representado por Carlos y Cindy.*

CONFLICTOS Y DIFICULTADES

- **Conflicto semiótico (CS1)**

En el primer ejercicio $\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})}{x-3}$, para llegar al mismo resultado que la estudiante llegó por medio de la racionalización de la expresión algebraica, la profesora pretende que los estudiantes lo vean como un caso de $\lim_{x \to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$*("que denomina ¡limites especiales!")*. Se produce una ambigüedad ya que debería haber escrito $\lim_{x \to a} \frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$.

En este punto se produce un conflicto de interpretaciones ya que los alumnos normalmente asocian la letra **n** del exponente con un número natural y la profesora pretende que lo consideren un exponente fraccionario.

Esta disparidad de interpretaciones - junto al hecho de que la manera prototípica de resolver límites con raíces sea la racionalización y no el tratamiento para pasar a una expresión con potencias - produce una dificultad en los alumnos *(en el sentido que ninguno de ellos hace el tratamiento que quiere la profesora)*. La interpretación de **n** como un número natural aquí se convierte en un obstáculo de tipo. Si la profesora hubiese utilizado, por ejemplo, una **k** en lugar de la n este obstáculo quizás se habría superado.

- Errores y Ambigüedades

Hay que resaltar que la profesora es poco cuidadosa con las notaciones. Además de utilizar la **n** para representar números que no son enteros como ya hemos comentado, introduce notaciones ambiguas que no son válidas desde el punto de vista institucional al hacer una reducción simbólica *(usa LIM en lugar de* $\lim_{x \to a}$ *, quizá para no escribirlo todo)* lo cual puede generar confusiones e interpretaciones incorrectas en sus alumnos.

Otro ejemplo de uso poco preciso, lo tenemos en el siguiente diálogo:

"Listo alejo, y si está en la forma 0/0 ¿qué hago?" (Ella misma dice): "quitar ese indeterminado y ¿cómo?... pues lo único que sé es lo que ustedes van a hacer de tarea; quitar ese indeterminado".

<u>En otro momento (2) del episodio</u>

La profesora comete varios errores y ambigüedades. No señala las cosas importantes. Deja un problema a medio hacer. No resalta la importancia del tratamiento. No es muy cuidadosa con el tratamiento, n natural, todo eso hace posible explicar la dificultad del cálculo de límites.

La interacción que está presente en esas prácticas fomenta que siempre sean unos pocos alumnos los que solucionan los problemas:

En el primer ejercicio propuesto presentado en la tabla de episodio 4:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{3}\right)}{x - 3}$$

Cuando ella insiste en que los estudiantes lo vean como un caso de lo que denomina ¡limites especiales":

1) $\lim_{x \to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x - a} = na^{n-1}$, Institucionalmente la expresión que corresponde es $\lim_{x \to a} \frac{(x^n - a^n)}{x - a} = na^{n-1}$
2) $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$
3) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x} = 0$

Específicamente el 1: $\lim_{x \to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x - a} = na^{n-1}$ en primer lugar es muy importante establecer las condiciones para el exponente n que aparece en esta "fórmula" , Por otra parte también aparece la duda de si es válido, es decir si es un teorema, si aparece en los libros, luego hacemos una búsqueda bastante intensiva y exhaustiva en internet, encontrando un video en el que lo enuncian y lo demuestran de dos maneras: tanto con el teorema del binomio como por la regla de L' Hoppital, anunciando de entrada la condición para n número natural, entero positivo. Ante lo cual es válido preguntarnos si por ejemplo al desarrollarlo por el teorema del binomio se supone tácitamente n entero positivo, o si la aplicación de la regla de L' Hôppital es correcta o se suponen funciones continuas y diferenciables. La profesora quiere que lo vean como un caso particular del límite especial que ha numerado 1 y le apliquen la fórmula para llegar al mismo resultado que la estudiante llegó por medio de la racionalización de la expresión algebraica

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x^{1/2} - 3^{1/2})}{x-3} = 1/2(3^{-1/2}) = 1/2\sqrt{3}$$

Al omitir la condición para la potencia se comete un error, y es una cuestión de tratamiento, se observa que los estudiantes tienen poco éxito en hacer este tratamiento, entonces inferimos que tienen dificultad porque ellos identifican, asocian que n es natural o entero positivo, entonces al ser la potencia fraccionaria: ½, no le otorgan el sentido ni significado que la maestra ve natural otorgarle.

Y ¿por qué nadie lo ha hecho?

El tratamiento en últimas es de lo que se trata todo. Y también es importante preguntar: ¿Por qué ellos asocian inmediatamente, sin dudarlo, sin pensarlo que n es natural y por tanto no tiene sentido para potencia fraccionaria?

Entonces también podría constituir un error de la profesora que potencia o genera un conflicto u obstáculo en los estudiantes, y además no lo resuelve porque finalmente ni en esa clase ni en las siguientes de limites volvió a abordar este ejercicio ni otro similar.

1. Escritura no institucional de la profesora: $\lim_{x \to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ $\lim_{x \to a} \frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$, no es válido cuando n no sea un numero natural, entero positivo
2. Si no hay error y puede ser válido también para n racional o real…hay una dificultad de tratamiento para convertir raíces en potencias y una dificultad de sentido y significado para asociar una expresión algebraica enunciada en términos de raíces con una regla algebraica como la sustracción de raíces enésimas.

- **Dificultades**

Los alumnos presentan dificultades en cálculo de límites, lo cual se evidencia en el hecho de que (descontando un porcentaje muy bajo de estudiantes) la mayoría no tiene éxito.

Una explicación plausible de cómo emerge esta dificultad es: que el procedimiento general para resolver límites no se ha explicado con claridad ni se ha institucionalizado, como tampoco se han explicado ni institucionalizado los procedimientos de cálculo de límites específicos.

En efecto, institucionalmente hay un procedimiento general para calcular límites, que contiene los siguientes pasos:

1. *Sustituir o evaluar el límite para ver si se obtiene una indeterminación o no.*
2. *En caso de tener una indeterminación hay que expresar la función de una forma diferente (hay que hacer un tratamiento).*
3. *Volver a evaluar para comprobar si desaparece la indeterminación*
4. *Si la indeterminación persiste, hay que volver a hacer un tratamiento utilizando ciertas propiedades y definiciones (por ejemplo que* $1 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\frac{a}{a} = 1$, *etc.)*
5. *Según la función concreta y el tipo de indeterminación hay que usar determinadas propiedades.*

Dicho procedimiento está implícito en el episodio, pero no se explica claramente ni se institucionaliza.

En la práctica observada se evidencia claramente que favorecería dar las pautas de un procedimiento general para calcular límites, los cuales posteriormente se subdividen en unos más específicos, ya que según sea la función y la indeterminación, es más conveniente usar un proceso u otro.

Igualmente sería favorable enfatizar que el límite que se calcula es un caso de una familia de límites que tienen tales propiedades.

En síntesis, al pretender responder la pregunta: ¿Por qué se genera esta dificultad?, es posible plantear las siguientes ideas:

-No hay un procedimiento general, no hay procedimientos específicos, los estudiantes no poseen los conocimientos necesarios para calcular límites y no se han dado las pautas generales.

-No hay una representatividad de tipología de límites diferentes: todo es muy inconexo. No se dice este límite es la tipología de una familia de límites que tienen tales propiedades. Falta la representatividad de una familia, los casos de límites que propone qué representatividad tienen en cuanto a los ejercicios que deberían estar calculando.

Sin pretender descalificar las prácticas de la profesora, y dado que el EOS categoriza errores y ambigüedades, en este análisis es posible detectar algunos de ellos. No se señala ni se enfatizan las cosas importantes. Se dejan problemas sin terminar. No se resalta ni se es muy cuidadosa con la importancia del tratamiento. Todo esto hace posible explicar la dificultad del cálculo de límites.

Continuando con el otro momento (2)

Tenemos una dificultad: En general la resolución de limites requieren un tratamiento para tener éxito, pero además aquí la profesora quiere que hagan un tratamiento: una transformación de raíces a potencias en forma de fracciones.

No es que la causa de esto sea que, en este caso particular está implicado que el exponente n está asociado como un numero natural, entero positivo, si así fuera, la profesora comete ambigüedad en la notación. El obstáculo que inferimos allí es que en la expresión $\lim_{x \to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$, correctamente enunciada: $\lim_{x \to a} \frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$
x^n Es una potencia con n número natural, entero positivo. Podría verse también como una ambigüedad…en todo caso inscrita en un modelo de clase mecanicista o formalista, se ve que ni siquiera realiza correctamente ciertos procesos formales, como la condición para la potencia de x. En síntesis, parece ser para los estudiantes que x^n no puede representar una raíz…no puede *ser* una raíz.

- **Generalidades**

Por otro lado, en el cuarto apartado de la tabla la profesora aborda uno de los tres límites que ha llamado "especiales: el tercero:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x} = lim = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Que además no necesita una fórmula sino requiere un procedimiento, un algoritmo de solución que involucra algunas identidades y simplificaciones básicas.
Sin embargo, es de resaltar que realizo este tercer límite, después de decir que les iba a hacer el primero, lo que realmente habría sido muy adecuado pues no los dejaría con la duda y seria consecuente con el ejercicio anterior.

En cuanto al simbolismo utilizado en el siguiente apartado, se podría afirmar que la maestra ha hecho una reducción simbólica que es un tratamiento simbólico de tipo incorrecto, englobar con la expresión Lim todo el límite (¿quizá para no escribir todo???) es otra ambigüedad que puede generar confusión en los alumnos. Es decir, hace un uso de la notación bastante ambigua, que, por lo tanto, también está dificultando el tratamiento en los alumnos.

En el apartado 6 de la tabla del episodio 4 que estamos analizando:

Listo Alejo, y si está en la forma 0/0 ¿qué hago? ella misma dice: quitar ese indeterminado y ¿Cómo? Pues lo único que sé es lo que ustedes van a hacer de tarea quitar ese indeterminado

Constituye una ambigüedad de tipo discursivo…una ambigüedad en el tipo de discurso que instaura en la clase, lo cual documenta el hecho de que aun acercándose a un modelo de clase formalista-mecanicista tampoco lo es por la falta de claridad y cierto rigor en el discurso, en los símbolos, en toda la semiótica puesta en juego, y luego en el apartado 7 de la misma tabla respecto al episodio 2: cuando plantea uno "más interesante" (las comillas son mías, las palabras de ella)

$$\lim_{x \to 0} \frac{(tagx - senx)}{x^3}$$

…Me perdí. Por favor terminenlo por ahí ahorita que van a trabajar en grupo. Pero similarmente puedo desde el comienzo obtener un seno cubo (ella quiere decir $sen^3(x)$).

Y lo dejó a medio hacer, dijo “me perdí” y dio unas pautas que no corresponden al ejercicio pues aludió al ejercicio anterior de multiplicar arriba y abajo por 1 representado en una cierta expresión que no conduce al desarrollo del ejercicio. Entonces esta no resolución de los ejercicios, por las causas que sean, podrían interpretarse como potencialmente generadoras de dificultades…

- **Conclusiones**

1. Los alumnos tienen dificultades en el cálculo de límites y estas están evidenciadas por los exámenes conjuntos, porcentajes, exámenes de los profesores. [Ver Anexos]
2. ¿Por qué se produce esta dificultad?

Una primera explicación evidente es que en la clase de esta profesora como representante de muchos profesores y de una clase magistral y donde siempre se tiene en cuenta a los mismos hay una escasa interacción, salvo un par de estudiantes, que suelen ser los más brillantes: Alejo. En este espacio de interacción se observa que es la profesora la protagonista: ella formula, explica, resuelve, evalúa, institucionaliza, lo que significa que no tenemos información acerca de la faceta cognitiva de los otros estudiantes, de su comprensión y que esta la inferimos de los exámenes.

3. Un análisis detallado de la interacción que se ha producido en el aula muestra otras razones para explicar las dificultades de los alumnos, no con indicadores muy detallados. Por ejemplo, en la calidad matemática: errores, ambigüedad, poca representatividad.
4. Si nos fijamos ya en una clase concreta de límites, observamos errores de la profesora: deja un ejercicio a la mitad, tratamiento de la n como si fuera entero, lim, esto no es especialmente lo más significativo. Lo más significativo es que lo esencial del cálculo de límites, los contenidos y procesos para el cálculo de límites no están suficientemente conectados: no aparece ni se explicita el procedimiento general. Y en este procedimiento el tratamiento es fundamental, con el cual la profesora no es especialmente cuidadosa ni tampoco le hace ver la importancia a los estudiantes: Lim, potencia n.
5. La idea de que según el tipo de función hay que emplear unas propiedades u otras conlleva trabajar una riqueza de estas funciones para que haya representatividad.

Donde no debería haber dificultades es en el cálculo de límites y derivadas pues es un cálculo dedicado a estos conceptos, pero la práctica instaurada en la clase genera un tipo de interacción y esa práctica es precisamente el obstáculo, es decir el problema es el tipo de matemáticas que se da y el tipo de interacción que se establece. Mientras no se cambien las matemáticas, mientras no se cambie el tipo de interacción, esto se convierte endémico, mientras hagamos este tipo de interacción, esto se mantiene.

CUARTO NIVEL DE ANÁLISIS.

Identificación de normas.[25]

En este apartado se presentan las inferencias realizadas a partir de: Godino, Font y Wilhelmi (2008, PP. 12).

- La clase empieza a una determinada hora con los estudiantes que estén, pero los otros pueden ingresar posteriormente, así mismo pueden retirarse cuando lo necesiten.
- La profesora es eje central en cuanto al desarrollo temático, es decir las explicaciones de los temas, la resolución de los ejercicios, el planteamiento de talleres y los modos de proceder son dispuestos y desempeñados por ella.
- No se privilegia la participación de los estudiantes, ni se da el tiempo para identificar progresos o dificultades, ni tampoco se le da importancia a esta labor de evaluación que podríamos denominar formativa.
- Los estudiantes son receptores del proceso educativo, ellos escuchan, toman apuntes, en general no responden las preguntas.
- El esquema de la clase es, podríamos llamarlo, tradicional: la profesora explica, habla, y los estudiantes copian y tratan de hacer los ejercicios; piden ayuda extra clase.
- La interacción es escasa, se habla con uno o dos estudiantes: Alejo, en otros semestres, Felipe u otro que hace el papel de Alejo.
- No hay espacio para desarrollar talleres o trabajos en grupo en la clase.
- El ritmo de dictar temas es apresurado, pues hay unos tiempos determinados por las respectivas guías de cátedra, y por la realización de las pruebas conjuntas.
- Los estudiantes en general no reclaman acerca de las notas, ni cuestionan formas de evaluar o metodologías, menos contenidos temáticos o ejercicios.
- La profesora asiste a todas sus clases, se preocupa por ir al día en contenidos, y hasta planea clases extras (por ejemplo, los sábados) para poder abarcar todos los temas propuestos.
- El uso de tecnología, o estrategias para visualizar funciones, gráficas, …está a cargo de un estudiante (Alejo) quien lleva su computador portátil, y la profesora busca un cable y conectan al televisor. Si Alejo no llega o no lleva el portátil no se realiza la actividad de visualización planeada.
- La profesora regaña, es sarcástica (“toca pensar”, “no se hagan los que están pensando”, …,” por eso se caen los puentes”).

QUINTO NIVEL DE ANÁLISIS.

Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.[26]

Componentes e indicadores de idoneidad epistémica (matemática)

La profesora propone solo ejercicios en contexto intramatemático por lo que no se fomenta la modelización. Tampoco se fomenta la argumentación más allá de la ejemplificación del

[25] Juan D. Godino, Vicenç Font y Miguel R. Wilhelmi (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático Basado en el enfoque ontosemiótico.
[26] Font, V., Planas, N & Godino, J. (2009). Modelo Para El Análisis Didáctico En Educación Matemática. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf

método de cálculo de límites. Por otra parte, tampoco llega a justificar claramente la aplicación de los pasos del método (por ejemplo, se dejan problemas sin terminar).

Los procesos de simbolización que realiza la profesora en algún caso son ambiguos por no decir incorrectos *(por ejemplo, utiliza símbolos que no son institucionales como "Lim"* $\lim_{x \to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ *, o el uso de la **n** para representar a un número racional).* Si bien se observan tratamientos no se institucionaliza la importancia de este tratamiento. Por otra parte, no se observan conversiones de expresiones simbólicas a numéricas (tablas) ni gráficas.

El proceso fundamental que se da es la mecanización, pero de manera imprecisa ya que la práctica que realizan los alumnos resolviendo límites (durante tres clases) no les lleva a tener claros los pasos del método.

En Contreras, García y Font (2012) y García (2008) se proponen las siguientes configuraciones epistémicas para caracterizar la complejidad del objeto límite: gráfica, geométrica, pre infinitesimal, infinitesimal, numérica, métrico-analítica y topológica. Nosotros, de manera análoga a lo que hacen en Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) y Ordóñez (2011) con la integral, creemos necesario considerar también otra configuración que llamaremos algebraica. La profesora analizada presenta básicamente esta configuración algebraica y en menor medida la métrica-analítica. Por otra parte, con relación a estas dos configuraciones los elementos esenciales no están bien explicados ni claramente institucionalizados, en particular el procedimiento general de cálculo de límites está presente de forma implícita.

Hay que resaltar que, situados en la configuración epistémica algebraica, además no se presenta una muestra representativa de tipos de límites ya que se pone el énfasis sobre todo la indeterminación 0/0…

La falta de procesos relevantes, en particular de modelación y de argumentación, la falta de representatividad de significados parciales *(básicamente solo se presenta la configuración algebraica)*, la falta de variedad de tipos de límites donde se aplica el cálculo de límites, la falta de claridad y de institucionalización de las nociones esenciales, etc., nos permiten afirmar que estas clases sobre límites tienen una baja idoneidad epistémica.[27]

---

[27] Para complementar el análisis objeto de este episodio vamos a tener en cuenta los siguientes documentos específicos:

- Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012) Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. Bolema, 26(42B), 667-690.
- Contreras, Ordóñez L. y Wilhelmi, M. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la enseñanza de la integral definida en el Bachillerato. Enseñanza de las Ciencias. 28(3), 367-384.
- Contreras, Ordóñez L. y Wilhelmi, M. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la enseñanza de la integral definida en el Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*. 28(3), 367-384.
- Ordóñez, J. (2011). *Restricciones institucionales en las matematicas de 2º de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. Tesis Doctoral. Universidad de Jaén.

5.1.1.3 Representación Gráfica Global del Episodio

Con base en la matriz de facetas de idoneidad didáctica se representa la frecuencia con la que cada segmento se relacionó con una u otra faceta, de lo cual se ha generado un gráfico que da cuenta de la tendencia marcada por un fuerte sesgo o inclinación a lo epistémico, cognitivo, etc. Es decir, no muestra la idoneidad sino la tendencia hacia uno de los aspectos que marcan el desarrollo de la práctica.

Tabla 22. Plantilla con datos registrados.

Facetas De Idoneidad Didáctica episodio 4 – 11 segmentos	
Epistémica	**54,54%**
Cognitiva	**27,27%**
Interaccional	**63,63%**
Mediacional	**18,18%**
Emocional	**9,09%**
Ecológica	**9,09%**

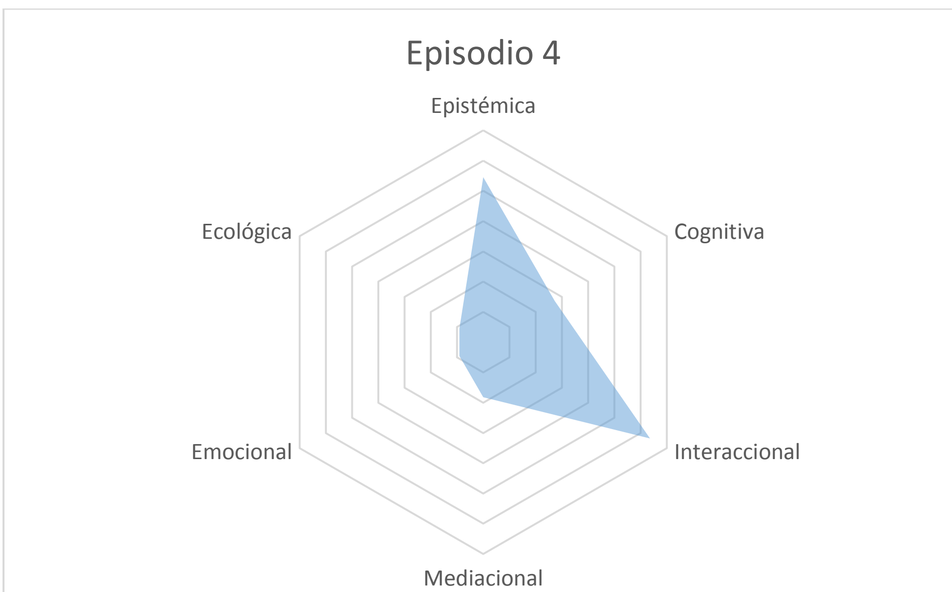


Figura 7. Gráfico radial generado a partir de la matriz de facetas de idoneidad didáctica del episodio 4

5.1.2 Episodio 12

A continuación, se presentan las matrices de facetas duales de Idoneidad Didáctica (I.D) del episodio fundamental 12 que son una forma de comparar, contrastar, distinguir y articular las diferentes facetas de la I.D construidas a partir de la matriz documental de cada episodio

5.1.2.1 Matriz de Facetas de Idoneidad Didáctica

[Ep. 12] Episodio 12: Derivada Logarítmica y Trigonométrica

Tabla 23. Matriz de facetas duales: Epistémico - Cognitiva

Sg.	Observación de la práctica de clase	EPISTÉMICO	COGNITIVA	ANÁLISIS
1.	6:10 AM, 12 estudiantes van llegando.	**P:** Hoy se van a trabajar ejercicios de derivación exponencial y logarítmica, entonces debemos hacer un repaso de la teoría que vimos la clase pasada. **P:** El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base: $Y = \ln x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}dx$ $Y = log_b x \equiv y = \frac{\ln x}{\ln b}$ $\downarrow$ $y' = \frac{dx}{x \ln b}$	**P:** Hoy se van a trabajar ejercicios de derivación exponencial y logarítmica, entonces debemos hacer un repaso de la teoría que vimos la clase pasada. **P:** El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base: $Y = \ln x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}dx$ $Y = log_b x \equiv y = \frac{\ln x}{\ln b}$ $\downarrow$ $y' = \frac{dx}{x \ln b}$	Debido a que se trata de una definición de derivada logarítmica, se relaciona en la columna epistémica. La profesora explica paso por paso la derivada en el tablero. Se muestra imparcial al no decir mayor cosa acerca del curso.

		$Y = e^x \rightarrow y' = e^x\,dx$ $Y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a\ dx$	$Y = e^x \rightarrow y' = e^x\,dx$ $Y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a\ dx$	
2.	La profesora escribe en el tablero: "Hallar la derivada de las siguientes ecuaciones" (subraya ecuaciones). Se sale un ratico del salón y ellos van hablando, escribiendo, borrando; regresa en dos minutos y pasa la asistencia. Aún no escribe nada en el tablero. Les da un poquito de tiempo para que lo escriban. Les dice a los estudiantes que aplicarán lo visto en la semana anterior, y que lo ideal es aplicar las propiedades.	**P:** Entonces hagamos por ejemplo este ejercicio: **Ejercicio 1:** $Y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right]$ **P:** ¿Cómo les dio el ejercicio? **P:** Noten que si la base fuera negativa, por ejemplo (-6), no habría nada que hacer, porque el logaritmo estaría mal definido.	**P:** Entonces hagamos por ejemplo este ejercicio: **Ejercicio 1:** $Y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right]$ **P:** ¿Cómo les dio el ejercicio? **P:** Noten que si la base fuera negativa, por ejemplo (-6), no habría nada que hacer, porque el logaritmo estaría mal definido.	Debido a que es un ejercicio para explicar las propiedades de los logaritmos, se relaciona con la columna epistémica. La profesora desarrolla el problema paso por paso en el talero. Debido a que la profesora no dice nada durante el desarrollo del ejercicio, e asume que todos los estudiantes entendieron de manera clara el ejercicio.

	Se responde a sí misma. Todos los estudiantes dictan.	$Y = \log_6\left(\frac{x}{2}\right) + \log_6\left(\frac{3}{1-x}\right) + \log_6\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)$ **P:** Por propiedades de logaritmos, ¿ustedes qué prefieren derivar: productos y cocientes, o sumas y restas? **P:** Pues sumas y restas por eso hacemos las propiedades. $Y = \log_6(x) - \log_6(2) + \log_6(3) - \log_6(1-x) + \log_6(x^2+1) - \log_6(x+2)$ $Y = \frac{\ln(x)}{\ln(6)} - \frac{\ln(2)}{\ln(6)} + \frac{\ln(3)}{\ln(6)} - \frac{\ln(1-x)}{\ln(6)} + \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(6)} - \frac{\ln(x+2)}{\ln(6)}$ **P:** Ahora aplicamos lo que vimos la clase pasada. $Si\ y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \rightarrow y' = \frac{dx}{x \ln a}$ $Y = \Big(\frac{\ln(x) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(1-x) + \ln(x^2+1) - \ln(x}{\ln 6}$ $Y' = \frac{1}{x \ln 6} - \frac{1}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$	$Y = \log_6\left(\frac{x}{2}\right) + \log_6\left(\frac{3}{1-x}\right) + \log_6\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)$ **P:** Por propiedades de logaritmos, ¿ustedes qué prefieren derivar: productos y cocientes, o sumas y restas? **P:** Pues sumas y restas por eso hacemos las propiedades. $Y = \log_6(x) - \log_6(2) + \log_6(3) - \log_6(1-x) + \log_6(x^2+1) - \log_6(x+2)$ $Y = \frac{\ln(x)}{\ln(6)} - \frac{\ln(2)}{\ln(6)} + \frac{\ln(3)}{\ln(6)} - \frac{\ln(1-x)}{\ln(6)} + \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(6)} - \frac{\ln(x+2)}{\ln(6)}$ **P:** Ahora aplicamos lo que vimos la clase pasada. $Si\ y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \rightarrow y' = \frac{dx}{x \ln a}$ $Y = \Big(\frac{\ln(x) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(1-x) + \ln(x^2+1) - \ln(x}{\ln 6}$ $Y' = \frac{1}{x \ln 6} - \frac{1}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$	

		P: Luego pónganla bonita. $Y' = \frac{1}{\ln 6}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+2}\right)$	**P:** Luego pónganla bonita. $Y' = \frac{1}{\ln 6}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+2}\right)$	
3.	Se viene hacia mí y me pregunta qué tanto escribo en el computador, otra vez la veo nerviosa: "¿Y tú a quien le vas a mostrar todo lo que yo hago?" Me pide el favor que descargue Geogebra y Derive, pues Alejo no ha vuelto a llevar su portátil. Les pide que le dicten el primer ejercicio	**Ejercicio 2:** $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$ **P:** Está escrito como raíz cubica. Aplicando propiedades de log: $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$ $f'^{(x)} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)\right]$ $f'(x) = \frac{1}{3}\ [\ln(3x) - \ln(x+2)]$ $f'(x) = \frac{1}{3}\ \left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$	**Ejercicio 2:** $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$ **P:** Está escrito como raíz cubica. Aplicando propiedades de log: $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$ $f'^{(x)} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)\right]$ $f'(x) = \frac{1}{3}\ [\ln(3x) - \ln(x+2)]$ $f'(x) = \frac{1}{3}\ \left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$	La profesora plantea un ejercicio de Logaritmo natural con un radical fraccionario. Debido a que es un tema del syllabus de la carrera, se relaciona con la columna epistémica, y ya que se debe desarrollar primero con propiedades de logaritmos, también se relaciona con la columna cognitiva, a que estos deben ser conocimientos previos. La profesora desarrolla paso por paso y de manera rápida el ejercicio, llegando así a la respuesta. La profesora no muestra ninguna postura ni ningún comentario en este momento de la clase.

	Les hace ver que por el otro lado seria largo y difícil.	**P:** Derivada de ln, derivada de raíz, derivada de cociente y después dicen que los parciales son difíciles y largos.	**P:** Derivada de ln, derivada de raíz, derivada de cociente y después dicen que los parciales son difíciles y largos.	
4.	Saca denominador común y simplifica el denominador. Alejo pregunta.	**Ejercicio 3:** $f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$ $f(x) = \ln(x-2)^3 - \ln\left(\sqrt{2x-1}\right)$ $f(x) = 3\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(2x-1)$ **P:** Ahí ya puedes derivar y ¿hay alguna otra propiedad? $f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$ $f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$ **P**: Resolvámoslo todo les parece? $f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$ $f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$ **E:** ¿Desde el comienzo habría podido ser $\frac{\ln(x-2)^3}{\ln\sqrt{2x-1}}$?	**Ejercicio 3:** $f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$ $f(x) = \ln(x-2)^3 - \ln\left(\sqrt{2x-1}\right)$ $f(x) = 3\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(2x-1)$ **P:** Ahí ya puedes derivar y ¿hay alguna otra propiedad? $f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$ $f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$ **P**: Resolvámoslo todo les parece? $f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$ $f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$ **E:** ¿Desde el comienzo habría podido ser $\frac{\ln(x-2)^3}{\ln\sqrt{2x-1}}$?	Debido a que es un ejercicio de derivada de logaritmos, nuevamente, se relaciona con la columna epistémica. La profesora primero desarrolla las propiedades de logaritmos para poder llegar a la ecuación de la forma más simplificada posible, para luego proceder a derivar. La profesora le pregunta a un estudiante si es posible seguir aplicando propiedades; como la respuesta es negativa, procede con la derivada, sin hacer ningún tipo de comentario.

	Mientras Alejo está en el tablero ella le va hablando.	**P:** ¡No! Esas son las propiedades que ustedes se inventan… Si también tratan de hacerlo con el producto. **P**: Esa derivada es una constante por la derivada de la función…	**P:** ¡No! Esas son las propiedades que ustedes se inventan… Si también tratan de hacerlo con el producto. **P**: Esa derivada es una constante por la derivada de la función…	
5.	Él lo piensa un poco, la mayoría no lo mira y él le da el marcador a otro. Alejo escribe. ¿De dónde este ultimo -1? pero bueno borraron. Pasa otro estudiante a hacer el siguiente.	**P**: Ahora dale el marcador a quien tú quieras. **Ejercicio 4:** $f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$ $f(x) = \ln\big(x(x+1)\big)^{\frac{1}{2}}$ $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x(x+1))$ $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln(1-x))$ $f(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x-1})$	**P**: Ahora dale el marcador a quien tú quieras. **Ejercicio 4:** $f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$ $f(x) = \ln\big(x(x+1)\big)^{\frac{1}{2}}$ $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x(x+1))$ $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln(1-x))$ $f(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x-1})$	La profesora plantea un ejercicio, por lo que este segmento se ubica en la columna epistémica. La profesora plantea de manera adecuada el ejercicio, sin ningún error ni interrupción. Ya que no hubo ninguna interrupción durante la explicación, de deduce que no existe ninguna pregunta por parte de ningún estudiante.
6.	La profesora vuelve al tablero a proponer otro ejercicio. Ella misma le responde	**Ejercicio 5:** $f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$ **E:** $f(x) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x - 1)$ **P:** Puede hacer algo más con el ejercicio. **P:** ¿No? Deriva.	**Ejercicio 5:** $f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$ **E:** $f(x) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x - 1)$ **P:** Puede hacer algo más con el ejercicio. **P:** ¿No? Deriva.	En este segmento se plantea un ejercicio acorde a los temarios propuestos para el curso, por lo que entra en la columna epistémica. La profesora plantea de nuevo un ejercicio, ahora un poco más complejo en comparación con los anteriores.

	Ella le borró los 1 que tenía en el numerador.	$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)} - \frac{e^x}{(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{(e^x-1)e^x - (e^x+1)e^x}{(e^x+1)(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{(e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x)}{(e^x+1)(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$ **P:** Mira qué bonito, la diferencia de cuadrados en el denominador.	$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)} - \frac{e^x}{(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{(e^x-1)e^x - (e^x+1)e^x}{(e^x+1)(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{(e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x)}{(e^x+1)(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$ **P:** Mira qué bonito, la diferencia de cuadrados en el denominador.	Debido a que nuevamente no hace ningún comentario respecto l ejercicio ni respecto a los estudiantes, se deduce que los estudiantes entendieron de manera adecuada.
	Ella le dictó toda la parte de la evaluación en 0.	**P:** Bueno, hay que evaluarlo en 0: $f'(0) = -\frac{2}{0}$ $\rightarrow f' no\ está\ definida\ en\ 0$ **P:** El taller que les voy a dejar está muy bonito. **P:** Listo, excelente.	**P:** Bueno, hay que evaluarlo en 0: $f'(0) = -\frac{2}{0}$ $\rightarrow f' no\ está\ definida\ en\ 0$ **P:** El taller que les voy a dejar está muy bonito. **P:** Listo, excelente.	
	Algunos estudiantes responden:	**P:** Listo las derivadas de exponenciales y logarítmicas, ahora ¿qué es lo que había para hoy? **E:** Derivadas de funciones trigonométricas.	**P:** Listo las derivadas de exponenciales y logarítmicas, ahora ¿qué es lo que había para hoy? **E:** Derivadas de funciones trigonométricas.	
	Ella responde.	**P:** ¿Cuál es el dominio de las trigonométricas?	**P:** ¿Cuál es el dominio de las trigonométricas?	

	Vuelve a decir varias veces triángulos rectos. Yo veo que Alejo y otro chico sacan un Stewart.	**P**: Pues depende porque si las defino sobre triángulos rectos? Pero si las define sobre ángulos diferentes o sobre la circunferencia unitaria. **P**: ¿Alguien trajo el librito? **P**: ¿Nadie más trajo libro?	**P**: Pues depende porque si las defino sobre triángulos rectos? Pero si las define sobre ángulos diferentes o sobre la circunferencia unitaria. **P**: ¿Alguien trajo el librito? **P**: ¿Nadie más trajo libro?	
7.	Empieza a escribir en el tablero.	**DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS** Si $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x\ dx$ **P:** La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función, es un error decir solamente "derivada de seno es coseno". **P**: No! Falta la derivada de la función.	**DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS** Si $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x\ dx$ **P:** La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función, es un error decir solamente "derivada de seno es coseno". **P**: No! Falta la derivada de la función.	En este segmento se explican las derivadas de las funciones trigonométricas, por lo cual se relaciona con la columna Epistémica. La profesora explica la derivada de seno, y aclara cómo se debe decir correctamente. La profesora explica de manera adecuada la derivada de coseno.
8.		**Ejercicio 6:** **P:** Al derivar $f(x) = sen\ (x^2 + 3x)$ **P:** Se obtiene. $f'(x) = [cos(x^2 + 3x)](2x + 3)$	**Ejercicio 6:** **P:** Al derivar $f(x) = sen\ (x^2 + 3x)$ **P:** Se obtiene. $f'(x) = [cos(x^2 + 3x)](2x + 3)$	La profesora plantea un problema, que va acorde al tema de la materia**.** Desarrolla el problema en únicamente dos pasos. La profesora evidencia con esto la Regla de La Cadena, mientras lo explica de manera eficiente.

9.		**Ejercicio 7:** **P:** Siguiente ejercicio. $f(x) = (\sin(2x^4 + 5x))^3$ **P**: Composición de funciones. $f'(x) = 3\left(sen(2x^4 + 5x)\right)^2 Cos(2x^4 + 5x)(8x^3 + 5)$ $f'(x) = 3(8x^3 + 5)(Cos(2x^4 + 5x))(sen(2x^4 + 5))^2$	**Ejercicio 7:** **P:** Siguiente ejercicio. $f(x) = (\sin(2x^4 + 5x))^3$ **P**: Composición de funciones. $f'(x) = 3\left(sen(2x^4 + 5x)\right)^2 Cos(2x^4 + 5x)(8x^3 + 5)$ $f'(x) = 3(8x^3 + 5)(Cos(2x^4 + 5x))(sen(2x^4 + 5))^2$	La profesora explica un ejercicio de derivada trigonométrica, lo cual quiere decir que se relaciona en la columna epistémica. Desarrolla el ejercicio por medio de la regla de la cadena, explicándola a los estudiantes. Se asume que los estudiantes entendieron de manera exitosa el ejercicio, debido a que nadie tiene preguntas.
10.		**Ejercicio 8:** **P:** Inventémonos otro. **P:** Alejo desarrolla el siguiente. $f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$ **P:** Mira qué bonito $f'(x) = \frac{2\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos(\frac{2x}{x+4})((2(x+4}{(x+4)^2}$ $f'(x) = \frac{2\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})(8)}{(x+4)^2}$	**Ejercicio 8:** **P:** Inventémonos otro. **P:** Alejo desarrolla el siguiente. $f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$ **P:** Mira qué bonito $f'(x) = \frac{2\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos(\frac{2x}{x+4})((2(x+4}{(x+4)^2}$ $f'(x) = \frac{2\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})(8)}{(x+4)^2}$	La profesora plantea un ejercicio que va acorde al programa de la materia. Aplica las propiedades de la división de derivadas y de la potenciación, haciéndolo de una manera fácil y rápida. La profesora, al no comentar nada respecto al curso, evidencia que está a gusto en este episodio.

		$f'(x) = \frac{16\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})}{(x+4)^2}$	$f'(x) = \frac{16\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})}{(x+4)^2}$	
11.		**Derivadas de las funciones trascendentes** **P**: Catalina díctame las derivadas trigonométricas. $Si\ y = sen\ x \rightarrow y' = (Cosx)\ dx$ $Si\ y = Cosx \rightarrow y' = (-Senx)dx$ $Si\ y = tgx \rightarrow y' = (sec^2x)\ dx$ $Si\ y = ctgx \rightarrow y' = (-csc^2x)\ dx$ $Si\ y = Secx \rightarrow y' = (Secx)(tgx)dx$ $Si\ y = Cscx \rightarrow y' = (-Cscx)(ctgx)\ dx$ **P:** Y vamos a demostrarlas todas. **P:** Mañana hacemos clase a las 11 a otra hora no puedo, y el que quiera pasar a hacer una demostración pasa y yo le ayudo con la nota del tercer corte de acuerdo?	**Derivadas de las funciones trascendentes** **P**: Catalina díctame las derivadas trigonométricas. $Si\ y = sen\ x \rightarrow y' = (Cosx)\ dx$ $Si\ y = Cosx \rightarrow y' = (-Senx)dx$ $Si\ y = tgx \rightarrow y' = (sec^2x)\ dx$ $Si\ y = ctgx \rightarrow y' = (-csc^2x)\ dx$ $Si\ y = Secx \rightarrow y' = (Secx)(tgx)dx$ $Si\ y = Cscx \rightarrow y' = (-Cscx)(ctgx)\ dx$ **P:** Y vamos a demostrarlas todas. **P:** Mañana hacemos clase a las 11 a otra hora no puedo, y el que quiera pasar a hacer una demostración pasa y yo le ayudo con la nota del tercer corte de acuerdo?	En este segmento la profesora explica el tema de las derivadas de las funciones Trascendentes, el cual está dentro del Syllabus. Representa de manera organizada en el tablero las fórmulas de las funciones trascendentes, y todos proceden a escribirlas en sus cuadernos. No se hace ningún comentario al respecto, lo cual evidencia que es un tema que ha quedado claro en este segmento.
12.		**Ejercicio 9:** **P:** Hagamos una.	**Ejercicio 9:** **P:** Hagamos una.	La profesora plantea una demostración de la derivada de seno, y deciden hacerla por

	La profesora se emociona al ver que los estudiantes saben que la demostración se hace por medio de la definición formal de límite.	**P:** Vamos a demostrar: $si\ f(x) = sen\ x \rightarrow f'(x) = (cosx)\ dx$ **Demostración:** **P:** ¿Cómo lo demuestro? **E:** Con la definición formal de límite **P:** ¡Sí! Eso es lo que tenemos: $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\right)$ **P:** Por suma de ángulos tenemos: $f(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h}\right) + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h\ \cos x}{h}$ $f'(x) = \sin x \lim_{h\to 0} f\left(\frac{(\cos h)-1}{h}\right) + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$	**P:** Vamos a demostrar: $si\ f(x) = sen\ x \rightarrow f'(x) = (cosx)\ dx$ **Demostración:** **P:** ¿Cómo lo demuestro? **E:** Con la definición formal de límite **P:** ¡Sí! Eso es lo que tenemos: $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\right)$ **P:** Por suma de ángulos tenemos: $f(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h}\right) + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h\ \cos x}{h}$ $f'(x) = \sin x \lim_{h\to 0} f\left(\frac{(\cos h)-1}{h}\right) + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$	medio de la definición formal de límite. La profesora le pregunta a los estudiantes por medio de qué pueden desarrollar esa derivada, y una estudiante responde con seguridad que con la definición formal de límite, y procede a hacerla en el tablero. La profesora, al ver que un estudiante respondió de forma acertada, se emociona.

	Alejo preguntó algo y me lo perdí: ah ya averigüé. Alejo vuelve a preguntar.	$f'(x) = \sin x\,(0) + \cos x\,(1)$ $f'(x) = \cos x$ **E**: Profe pero ahí donde está dx? **E**: ¿Para mañana todas las demás demostraciones? **P**: Sí señor.	$f'(x) = \sin x\,(0) + \cos x\,(1)$ $f'(x) = \cos x$ **E**: Profe pero ahí donde está dx? **E**: ¿Para mañana todas las demás demostraciones? **P**: Sí señor.	
13	La profesora se inventa algunos ejercicios.	**Ejercicio 10:** **P**: Inventémonos algunos ejercicios, por ejemplo: $f(x) = (\sec(5x^3 - 7x))^2$ $f'(x) = 2\sec(5x^3 - 7x)\ \sec(x^3 - 7x)\ \tan(x^3 - 7x)\,(15x^2 - 7)$ **P**: Y pónganla bonita, buen día.	**Ejercicio 10:** **P**: Inventémonos algunos ejercicios, por ejemplo: $f(x) = (\sec(5x^3 - 7x))^2$ $f'(x) = 2\sec(5x^3 - 7x)\ \sec(x^3 - 7x)\ \tan(x^3 - 7x)\,(15x^2 - 7)$ **P**: Y pónganla bonita, buen día.	

Tabla 24. Matriz de facetas duales: Interaccional - Mediacional

Sg.	Observación de la práctica de clase	INTERACCIONAL	MEDIACIONAL	ANÁLISIS
1.	6:10 AM, 12 estudiantes van llegando	**P:** Hoy se van a trabajar ejercicios de derivación exponencial y logarítmica, entonces debemos hacer un repaso de la teoría que vimos la clase pasada.	**P:** Hoy se van a trabajar ejercicios de derivación exponencial y logarítmica, entonces debemos hacer un repaso de la teoría que vimos la clase pasada.	

<table>
<tr><td></td><td></td><td>P: El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base:

$Y = \ln x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x} dx$

$$Y = log_b x \equiv y = \frac{\ln x}{\ln b}$$
$$\downarrow$$
$$y' = \frac{dx}{x \ln b}$$
$$Y = e^x \rightarrow y' = e^x \, dx$$
$$Y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a \; dx$$</td><td>P: El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base:

$Y = \ln x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x} dx$

$$Y = log_b x \equiv y = \frac{\ln x}{\ln b}$$
$$\downarrow$$
$$y' = \frac{dx}{x \ln b}$$
$$Y = e^x \rightarrow y' = e^x \, dx$$
$$Y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a \; dx$$</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>La profesora escribe en el tablero: “Hallar la derivada de las siguientes ecuaciones” (subraya ecuaciones).

Se sale un ratico del salón y ellos van hablando, escribiendo, borrando; regresa en dos minutos y pasa la asistencia. Aún no</td><td>P: Entonces hagamos por ejemplo este ejercicio:

Ejercicio 1:
$$Y = log_6 \left[\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{3}{1-x}\right) \left(\frac{x^2+1}{x+2}\right) \right]$$</td><td>P: Entonces hagamos por ejemplo este ejercicio:

Ejercicio 1:
$$Y = log_6 \left[\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{3}{1-x}\right) \left(\frac{x^2+1}{x+2}\right) \right]$$</td><td>Este segmento se relaciona con la columna interaccional porque se evidencia de forma clara que la profesora se expresa verbalmente hacia los estudiantes.

El ejemplo que brinda la profesora es de logaritmos; ella hace una aclaración de una restricción para las derivadas logarítmicas de manera clara, y se percata que los estudiantes entiendan.</td></tr>
</table>

	escribe nada en el tablero. Les da un poquito de tiempo para que lo escriban. Les dice a los estudiantes que aplicarán lo visto en la semana anterior, y que lo ideal es aplicar las propiedades. Se responde a sí misma. Todos los estudiantes dictan.	**P:** ¿Cómo les dio el ejercicio? **P:** Noten que si la base fuera negativa, por ejemplo (-6), no habría nada que hacer, porque el logaritmo estaría mal definido. $Y = \log_6\left(\frac{x}{2}\right) + \log_6\left(\frac{3}{1-x}\right) + \log_6\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)$ **P:** Por propiedades de logaritmos, ¿ustedes qué prefieren derivar: productos y cocientes, o sumas y restas? **P:** Pues sumas y restas por eso hacemos las propiedades. $Y = \log_6(x) - \log_6(2) + \log_6(3) - \log_6(1-x) + \log_6(x^2+1) - \log_6(x+2)$ $Y = \frac{\ln(x)}{\ln(6)} - \frac{\ln(2)}{\ln(6)} + \frac{\ln(3)}{\ln(6)} - \frac{\ln(1-x)}{\ln(6)} + \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(6)} - \frac{\ln(x+2)}{\ln(6)}$	**P:** ¿Cómo les dio el ejercicio? **P:** Noten que si la base fuera negativa, por ejemplo (-6), no habría nada que hacer, porque el logaritmo estaría mal definido. $Y = \log_6\left(\frac{x}{2}\right) + \log_6\left(\frac{3}{1-x}\right) + \log_6\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)$ **P:** Por propiedades de logaritmos, ¿ustedes qué prefieren derivar: productos y cocientes, o sumas y restas? **P:** Pues sumas y restas por eso hacemos las propiedades. $Y = \log_6(x) - \log_6(2) + \log_6(3) - \log_6(1-x) + \log_6(x^2+1) - \log_6(x+2)$ $Y = \frac{\ln(x)}{\ln(6)} - \frac{\ln(2)}{\ln(6)} + \frac{\ln(3)}{\ln(6)} - \frac{\ln(1-x)}{\ln(6)} + \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(6)} - \frac{\ln(x+2)}{\ln(6)}$	La profesora se relaciona con los estudiantes de manera respetuosa, y de forma correcta en sus explicaciones, para que los estudiantes puedan aprender de manera más fácil. Explica las propiedades de algunos logaritmos, y se asegura de que los estudiantes entiendan.

		P: Ahora aplicamos lo que vimos la clase pasada. $Si\ y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \rightarrow y' = \frac{dx}{x \ln a}$ $Y =$ $\left(\frac{\ln(x) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(1-x) + \ln(x^2+1) - \ln(x}{\ln 6}\right.$ $Y' = \frac{1}{x \ln 6} - \frac{1}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$ **P:** Luego pónganla bonita. $Y' = \frac{1}{\ln 6}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+2}\right)$	**P:** Ahora aplicamos lo que vimos la clase pasada. $Si\ y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \rightarrow y' = \frac{dx}{x \ln a}$ $Y =$ $\left(\frac{\ln(x) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(1-x) + \ln(x^2+1) - \ln(x}{\ln 6}\right.$ $Y' = \frac{1}{x \ln 6} - \frac{1}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$ **P:** Luego pónganla bonita. $Y' = \frac{1}{\ln 6}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+2}\right)$	
3.	Se viene hacia mí y me pregunta qué tanto escribo en el computador, otra vez la veo nerviosa: “¿Y tú a quien le vas a mostrar todo lo que yo hago?” Me pide el favor que descargue Geogebra			

	y Derive, pues Alejo no ha vuelto a llevar su portátil. Les pide que le dicten el primer ejercicio Les hace ver que por el otro lado seria largo y difícil.	**Ejercicio 2:** $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$ **P:** Está escrito como raíz cubica. Aplicando propiedades de log: $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$ $f'^{(x)} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)\right]$ $f'(x) = \frac{1}{3}\ [\ln(3x) - \ln(x+2)]$ $f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$ **P:** Derivada de ln, derivada de raíz, derivada de cociente y después dicen que los parciales son difíciles y largos.	**Ejercicio 2:** $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$ **P:** Está escrito como raíz cubica. Aplicando propiedades de log: $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$ $f'^{(x)} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)\right]$ $f'(x) = \frac{1}{3}\ [\ln(3x) - \ln(x+2)]$ $f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$ **P:** Derivada de ln, derivada de raíz, derivada de cociente y después dicen que los parciales son difíciles y largos.	
4.		**Ejercicio 3:** $f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$ $f(x) = \ln(x-2)^3 - \ln\left(\sqrt{2x-1}\right)$ $f(x) = 3\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(2x-1)$ **P:** Ahí ya puedes derivar y ¿hay alguna otra propiedad?	**Ejercicio 3:** $f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$ $f(x) = \ln(x-2)^3 - \ln\left(\sqrt{2x-1}\right)$ $f(x) = 3\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(2x-1)$ **P:** Ahí ya puedes derivar y ¿hay alguna otra propiedad?	Este segmento se relaciona en la columna interaccional, porque se muestra que existe una conversación entre la profesora y un estudiante dentro del aula de clase. La profesora explica que primero deben aplicarse las propiedades de los logaritmos a la función, y después de eso si

	Saca denominador común y simplifica el denominador. Alejo pregunta. Mientras Alejo está en el tablero ella le va hablando.	$f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$ $f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$ **P**: Resolvámoslo todo les parece? $f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$ $f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$ **E:** ¿Desde el comienzo habría podido ser $\frac{\ln(x-2)^3}{\ln\sqrt{2x-1}}$? **P:** ¡No! Esas son las propiedades que ustedes se inventan… Si también tratan de hacerlo con el producto. **P**: Esa derivada es una constante por la derivada de la función…	$f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$ $f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$ **P**: Resolvámoslo todo les parece? $f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$ $f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$ **E:** ¿Desde el comienzo habría podido ser $\frac{\ln(x-2)^3}{\ln\sqrt{2x-1}}$? **P:** ¡No! Esas son las propiedades que ustedes se inventan… Si también tratan de hacerlo con el producto. **P**: Esa derivada es una constante por la derivada de la función…	se aplican las reglas de derivación. Pregunta para asegurarse que sus alumnos han aprendido de manera correcta, a lo que los alumnos responden de forma errónea, lo cual evidencia que no es así. La profesora no responde de una manera adecuada a la intervención de los estudiantes, quienes no respondieron de manera correcta a su pregunta no porque no quisieran hacerlo, sino porque realmente no entienden muy bien el tema.
5.	Él lo piensa un poco, la mayoría no lo mira y él le da el marcador a otro. Alejo escribe.	**P**: Ahora dale el marcador a quien tú quieras. **Ejercicio 4:** $f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$ $f(x) = \ln\left(x(x+1)\right)^{\frac{1}{2}}$ $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x(x+1))$ $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln(1-x))$	**P**: Ahora dale el marcador a quien tú quieras. **Ejercicio 4:** $f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$ $f(x) = \ln\left(x(x+1)\right)^{\frac{1}{2}}$ $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x(x+1))$ $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln(1-x))$	

	¿De dónde este ultimo -1? pero bueno borraron. Pasa otro estudiante a hacer el siguiente.	$f(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x-1})$	$f(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x-1})$	
6.	La profesora vuelve al tablero a proponer otro ejercicio. Ella misma le responde Ella le borró los 1 que tenía en el numerador.	**Ejercicio 5:** $f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$ **E:** $f(x) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x - 1)$ **P:** Puede hacer algo más con el ejercicio. **P:** ¿No? Deriva. $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)} - \frac{e^x}{(e^x - 1)}$ $f'(x) = \frac{(e^x-1)e^x - (e^x+1)e^x}{(e^x+1)(e^x - 1)}$ $f'(x) = \frac{(e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x)}{(e^x+1)(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$ **P:** Mira qué bonito, la diferencia de cuadrados en el denominador. **P:** Bueno, hay que evaluarlo en 0: $f'(0) = -\frac{2}{0}$ $\rightarrow f' no\ está\ definida\ en\ 0$	**Ejercicio 5:** $f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$ **E:** $f(x) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x - 1)$ **P:** Puede hacer algo más con el ejercicio. **P:** ¿No? Deriva. $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)} - \frac{e^x}{(e^x - 1)}$ $f'(x) = \frac{(e^x-1)e^x - (e^x+1)e^x}{(e^x+1)(e^x - 1)}$ $f'(x) = \frac{(e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x)}{(e^x+1)(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$ **P:** Mira qué bonito, la diferencia de cuadrados en el denominador. **P:** Bueno, hay que evaluarlo en 0: $f'(0) = -\frac{2}{0}$ $\rightarrow f' no\ está\ definida\ en\ 0$	

	Ella le dictó toda la parte de la evaluación en 0. Algunos estudiantes responden: Ella responde. Vuelve a decir varias veces triángulos rectos. Yo veo que Alejo y otro chico sacan un Stewart.	**P:** El taller que les voy a dejar está muy bonito. **P:** Listo, excelente. **P:** Listo las derivadas de exponenciales y logarítmicas, ahora ¿qué es lo que había para hoy? **E:** Derivadas de funciones trigonométricas. **P:** ¿Cuál es el dominio de las trigonométricas? **P**: Pues depende porque si las defino sobre triángulos rectos? Pero si las define sobre ángulos diferentes o sobre la circunferencia unitaria. **P**: ¿Alguien trajo el librito? **P**: ¿Nadie más trajo libro?	**P:** El taller que les voy a dejar está muy bonito. **P:** Listo, excelente. **P:** Listo las derivadas de exponenciales y logarítmicas, ahora ¿qué es lo que había para hoy? **E:** Derivadas de funciones trigonométricas. **P:** ¿Cuál es el dominio de las trigonométricas? **P**: Pues depende porque si las defino sobre triángulos rectos? Pero si las define sobre ángulos diferentes o sobre la circunferencia unitaria. **P**: ¿Alguien trajo el librito? **P**: ¿Nadie más trajo libro?	
7.	Empieza a escribir en el tablero.	**DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS** Si $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x \; dx$ **P:** La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función, es un error	**DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS** Si $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x \; dx$ **P:** La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función, es un error	

		decir solamente "derivada de seno es coseno". **P**: No! Falta la derivada de la función.	decir solamente "derivada de seno es coseno". **P**: No! Falta la derivada de la función.	
8.		**Ejercicio 6:** **P:** Al derivar $f(x) = sen\,(x^2 + 3x)$ **P:** Se obtiene. $f'(x) = [cos(x^2 + 3x)](2x + 3)$	**Ejercicio 6:** **P:** Al derivar $f(x) = sen\,(x^2 + 3x)$ **P:** Se obtiene. $f'(x) = [cos(x^2 + 3x)](2x + 3)$	
9.		**Ejercicio 7:** **P:** Siguiente ejercicio. $f(x) = (\sin(2x^4 + 5x))^3$ **P**: Composición de funciones. $f'(x) = 3\big(sen(2x^4 + 5x)\big)^2 Cos(2x^4 + 5x)(8x^3 + 5)$ $f'(x) = 3(8x^3 + 5)(Cos(2x^4 + 5x))(sen(2x^4 + 5))^2$	**Ejercicio 7:** **P:** Siguiente ejercicio. $f(x) = (\sin(2x^4 + 5x))^3$ **P**: Composición de funciones. $f'(x) = 3\big(sen(2x^4 + 5x)\big)^2 Cos(2x^4 + 5x)(8x^3 + 5)$ $f'(x) = 3(8x^3 + 5)(Cos(2x^4 + 5x))(sen(2x^4 + 5))^2$	
10.		**Ejercicio 8:** **P:** Inventémonos otro. **P:** Alejo desarrolla el siguiente. $f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$	**Ejercicio 8:** **P:** Inventémonos otro. **P:** Alejo desarrolla el siguiente. $f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$	

		P: Mira qué bonito $f'(x) = \frac{2\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos(\frac{2x}{x+4})((2(x+4}{(x+4)^2}$ $f'(x) = \frac{2\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})(8)}{(x+4)^2}$ $f'(x) = \frac{16\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})}{(x+4)^2}$	**P:** Mira qué bonito $f'(x) = \frac{2\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos(\frac{2x}{x+4})((2(x+4}{(x+4)^2}$ $f'(x) = \frac{2\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})(8)}{(x+4)^2}$ $f'(x) = \frac{16\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})}{(x+4)^2}$	
11.		**Derivadas de las funciones trascendentes** **P**: Catalina díctame las derivadas trigonométricas. $Si\ y = sen\ x \rightarrow y' = (Cosx)\ dx$ $Si\ y = Cosx \rightarrow y' = (-Senx)dx$ $Si\ y = tgx \rightarrow y' = (sec^2x)\ dx$ $Si\ y = ctgx \rightarrow y' = (-csc^2x)\ dx$ $Si\ y = Secx \rightarrow y' = (Secx)(tgx)dx$	**Derivadas de las funciones trascendentes** **P**: Catalina díctame las derivadas trigonométricas. $Si\ y = sen\ x \rightarrow y' = (Cosx)\ dx$ $Si\ y = Cosx \rightarrow y' = (-Senx)dx$ $Si\ y = tgx \rightarrow y' = (sec^2x)\ dx$ $Si\ y = ctgx \rightarrow y' = (-csc^2x)\ dx$ $Si\ y = Secx \rightarrow y' = (Secx)(tgx)dx$	

		$Si\ y = Cscx \rightarrow y' = (-Cscx)(ctgx)\ dx$ **P:** Y vamos a demostrarlas todas. **P:** Mañana hacemos clase a las 11 a otra hora no puedo, y el que quiera pasar a hacer una demostración pasa y yo le ayudo con la nota del tercer corte de acuerdo?	$Si\ y = Cscx \rightarrow y' = (-Cscx)(ctgx)\ dx$ **P:** Y vamos a demostrarlas todas. **P:** Mañana hacemos clase a las 11 a otra hora no puedo, y el que quiera pasar a hacer una demostración pasa y yo le ayudo con la nota del tercer corte de acuerdo?	
12.	La profesora se emociona al ver que los estudiantes saben que la demostración se hace por medio de la definición formal de límite.	**Ejercicio 9:** **P:** Hagamos una. **P:** Vamos a demostrar: $si\ f(x) = sen\ x \rightarrow f'(x) = (cosx)\ dx$ **Demostración:** **P:** ¿Cómo lo demuestro? **E:** Con la definición formal de límite **P:** ¡Sí! Eso es lo que tenemos: $f'(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\right)$ **P:** Por suma de ángulos tenemos:	**Ejercicio 9:** **P:** Hagamos una. **P:** Vamos a demostrar: $si\ f(x) = sen\ x \rightarrow f'(x) = (cosx)\ dx$ **Demostración:** **P:** ¿Cómo lo demuestro? **E:** Con la definición formal de límite **P:** ¡Sí! Eso es lo que tenemos: $f'(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\right)$ **P:** Por suma de ángulos tenemos:	Este segmento ss clasificado dentro de la idoneidad interaccional porque se dirige hacia los estudiantes para desarrollar una demostración. La profesora pide una demostración de un límite trigonométrico, a lo que los estudiantes responden de manera acertada que se puede desarrollar por la definición formal de límite. Se puede evidenciar la emoción de la profesora al ver que los estudiantes saben de manera correcta la respuesta. La profesora se exalta al notar que sus estudiantes responden con seguridad que para demostrar una derivada

	Alejo preguntó algo y me lo perdí: ah ya averigüé. Alejo vuelve a preguntar.	$f(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right) + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h\ \cos x}{h}$ $f'(x) = \sin x \lim_{h\to 0} f\left(\frac{(\cos h)-1}{h}\right) + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$ $f'(x) = \sin x\,(0) + \cos x\,(1)$ $f'(x) = \cos x$ **E**: Profe pero ahí donde está dx? **E**: ¿Para mañana todas las demás demostraciones? **P**: Sí señor.	$f(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right) + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h\ \cos x}{h}$ $f'(x) = \sin x \lim_{h\to 0} f\left(\frac{(\cos h)-1}{h}\right) + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$ $f'(x) = \sin x\,(0) + \cos x\,(1)$ $f'(x) = \cos x$ **E**: Profe pero ahí donde está dx? **E**: ¿Para mañana todas las demás demostraciones? **P**: Sí señor.	trigonométrica es necesaria la definición formal de límite.
13.	La profesora se inventa algunos ejercicios.	**Ejercicio 10:** **P**: Inventémonos algunos ejercicios, por ejemplo: $f(x) = (\sec(5x^3 - 7x))^2$ $f'(x) = 2\sec(5x^3 - 7x)\ \sec(x^3 - 7x)\ \tan(x^3 - 7x)\,(15x^2 - 7)$	**Ejercicio 10:** **P**: Inventémonos algunos ejercicios, por ejemplo: $f(x) = (\sec(5x^3 - 7x))^2$ $f'(x) = 2\sec(5x^3 - 7x)\ \sec(x^3 - 7x)\ \tan(x^3 - 7x)\,(15x^2 - 7)$	

		P: Y pónganla bonita, buen día.	**P**: Y pónganla bonita, buen día.	

Tabla 25. Matriz de facetas duales: Emocional - Ecologica

Sg.	Observación de la práctica de clase	EMOCIONAL	ECOLÓGICA	ANÁLISIS
1.	6:10 AM, 12 estudiantes van llegando.	**P:** Hoy se van a trabajar ejercicios de derivación exponencial y logarítmica, entonces debemos hacer un repaso de la teoría que vimos la clase pasada. **P:** El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base: $Y = \ln x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x} dx$ $Y = log_b x \equiv y = \frac{\ln x}{\ln b}$ $\downarrow$ $y' = \frac{dx}{x \ln b}$ $Y = e^x \rightarrow y' = e^x\, dx$ $Y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a\ dx$	**P:** Hoy se van a trabajar ejercicios de derivación exponencial y logarítmica, entonces debemos hacer un repaso de la teoría que vimos la clase pasada. **P:** El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base: $Y = \ln x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x} dx$ $Y = log_b x \equiv y = \frac{\ln x}{\ln b}$ $\downarrow$ $y' = \frac{dx}{x \ln b}$ $Y = e^x \rightarrow y' = e^x\, dx$ $Y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a\ dx$	
2.	La profesora escribe en el tablero: "Hallar la derivada de las	**P:** Entonces hagamos por ejemplo este ejercicio: **Ejercicio 1:**	**P:** Entonces hagamos por ejemplo este ejercicio: **Ejercicio 1:**	

	siguientes ecuaciones" (subraya ecuaciones). Se sale un ratico del salón y ellos van hablando, escribiendo, borrando; regresa en dos minutos y pasa la asistencia. Aún no escribe nada en el tablero. Les da un poquito de tiempo para que lo escriban. Les dice a los estudiantes que aplicarán lo visto en la semana anterior, y que lo ideal es aplicar las propiedades. Se responde a sí misma.	$Y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right]$ **P:** ¿Cómo les dio el ejercicio? **P:** Noten que si la base fuera negativa, por ejemplo (-6), no habría nada que hacer, porque el logaritmo estaría mal definido. $Y = \log_6\left(\frac{x}{2}\right) + \log_6\left(\frac{3}{1-x}\right) + \log_6\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)$ **P:** Por propiedades de logaritmos, ¿ustedes qué prefieren derivar: productos y cocientes, o sumas y restas?	$Y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right]$ **P:** ¿Cómo les dio el ejercicio? **P:** Noten que si la base fuera negativa, por ejemplo (-6), no habría nada que hacer, porque el logaritmo estaría mal definido. $Y = \log_6\left(\frac{x}{2}\right) + \log_6\left(\frac{3}{1-x}\right) + \log_6\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)$ **P:** Por propiedades de logaritmos, ¿ustedes qué prefieren derivar: productos y cocientes, o sumas y restas?	

	Todos los estudiantes dictan.	**P:** Pues sumas y restas por eso hacemos las propiedades. $Y = \log_6(x) - \log_6(2) + \log_6(3) - \log_6(1-x) + \log_6(x^2+1) - \log_6(x+2)$ $Y = \frac{\ln(x)}{\ln(6)} - \frac{\ln(2)}{\ln(6)} + \frac{\ln(3)}{\ln(6)} - \frac{\ln(1-x)}{\ln(6)} + \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(6)} - \frac{\ln(x+2)}{\ln(6)}$ **P:** Ahora aplicamos lo que vimos la clase pasada. $Si\ y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \rightarrow y' = \frac{dx}{x \ln a}$ $Y = \left(\frac{\ln(x) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(1-x) + \ln(x^2+1) - \ln(x}{\ln 6}\right.$ $Y' = \frac{1}{x \ln 6} - \frac{1}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$ **P:** Luego pónganla bonita. $Y' = \frac{1}{\ln 6}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+2}\right)$	**P:** Pues sumas y restas por eso hacemos las propiedades. $Y = \log_6(x) - \log_6(2) + \log_6(3) - \log_6(1-x) + \log_6(x^2+1) - \log_6(x+2)$ $Y = \frac{\ln(x)}{\ln(6)} - \frac{\ln(2)}{\ln(6)} + \frac{\ln(3)}{\ln(6)} - \frac{\ln(1-x)}{\ln(6)} + \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(6)} - \frac{\ln(x+2)}{\ln(6)}$ **P:** Ahora aplicamos lo que vimos la clase pasada. $Si\ y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \rightarrow y' = \frac{dx}{x \ln a}$ $Y = \left(\frac{\ln(x) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(1-x) + \ln(x^2+1) - \ln(x}{\ln 6}\right.$ $Y' = \frac{1}{x \ln 6} - \frac{1}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$ **P:** Luego pónganla bonita. $Y' = \frac{1}{\ln 6}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+2}\right)$	
3.	Se viene hacia mí y me pregunta qué			

	tanto escribo en el computador, otra vez la veo nerviosa: "¿Y tú a quien le vas a mostrar todo lo que yo hago?" Me pide el favor que descargue Geogebra y Derive, pues Alejo no ha vuelto a llevar su portátil. Les pide que le dicten el primer ejercicio Les hace ver que por el otro lado seria largo y difícil.	**Ejercicio 2:** $$f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$$ **P:** Está escrito como raíz cubica. Aplicando propiedades de log: $$f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$$ $$f'^{(x)} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)\right]$$ $$f'(x) = \frac{1}{3}\ [\ln(3x) - \ln(x+2)]$$ $$f'(x) = \frac{1}{3}\ \left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$$ **P:** Derivada de ln, derivada de raíz, derivada de cociente y después dicen que los parciales son difíciles y largos.	**Ejercicio 2:** $$f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$$ **P:** Está escrito como raíz cubica. Aplicando propiedades de log: $$f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$$ $$f'^{(x)} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)\right]$$ $$f'(x) = \frac{1}{3}\ [\ln(3x) - \ln(x+2)]$$ $$f'(x) = \frac{1}{3}\ \left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$$ **P:** Derivada de ln, derivada de raíz, derivada de cociente y después dicen que los parciales son difíciles y largos.	
4.		**Ejercicio 3:** $$f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$$	**Ejercicio 3:** $$f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$$	

	Saca denominador común y simplifica el denominador. Alejo pregunta. Mientras Alejo está en el tablero ella le va hablando.	$f(x) = \ln(x-2)^3 - \ln\left(\sqrt{2x-1}\right)$ $f(x) = 3\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(2x-1)$ **P:** Ahí ya puedes derivar y ¿hay alguna otra propiedad? $f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$ $f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$ **P**: Resolvámoslo todo les parece? $f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$ $f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$ **E:** ¿Desde el comienzo habría podido ser $\frac{\ln(x-2)^3}{\ln\sqrt{2x-1}}$? **P:** ¡No! Esas son las propiedades que ustedes se inventan… Si también tratan de hacerlo con el producto. **P**: Esa derivada es una constante por la derivada de la función…	$f(x) = \ln(x-2)^3 - \ln\left(\sqrt{2x-1}\right)$ $f(x) = 3\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(2x-1)$ **P:** Ahí ya puedes derivar y ¿hay alguna otra propiedad? $f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$ $f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$ **P**: Resolvámoslo todo les parece? $f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$ $f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$ **E:** ¿Desde el comienzo habría podido ser $\frac{\ln(x-2)^3}{\ln\sqrt{2x-1}}$? **P:** ¡No! Esas son las propiedades que ustedes se inventan… Si también tratan de hacerlo con el producto. **P**: Esa derivada es una constante por la derivada de la función…	
5.	Él lo piensa un poco, la mayoría no lo mira y él le da el marcador a otro. Alejo escribe.	**P**: Ahora dale el marcador a quien tú quieras. **Ejercicio 4:**	**P**: Ahora dale el marcador a quien tú quieras. **Ejercicio 4:**	

	¿De dónde este ultimo -1? pero bueno borraron. Pasa otro estudiante a hacer el siguiente.	$f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$ $f(x) = \ln\big(x(x+1)\big)^{\frac{1}{2}}$ $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x(x+1))$ $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln(1-x))$ $f(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x-1})$	$f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$ $f(x) = \ln\big(x(x+1)\big)^{\frac{1}{2}}$ $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x(x+1))$ $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln(1-x))$ $f(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x-1})$	
6.	La profesora vuelve al tablero a proponer otro ejercicio. Ella misma le responde Ella le borró los 1 que tenía en el numerador.	**Ejercicio 5:** $f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$ **E:** $f(x) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x-1)$ **P:** Puede hacer algo más con el ejercicio. **P:** ¿No? Deriva. $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)} - \frac{e^x}{(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{(e^x-1)e^x-(e^x+1)e^x}{(e^x+1)(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{(e^{2x}-e^x-e^{2x}-e^x)}{(e^x+1)(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$	**Ejercicio 5:** $f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$ **E:** $f(x) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x-1)$ **P:** Puede hacer algo más con el ejercicio. **P:** ¿No? Deriva. $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)} - \frac{e^x}{(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{(e^x-1)e^x-(e^x+1)e^x}{(e^x+1)(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{(e^{2x}-e^x-e^{2x}-e^x)}{(e^x+1)(e^x-1)}$ $f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$	

	Ella le dictó toda la parte de la evaluación en 0. Algunos estudiantes responden: Ella responde. Vuelve a decir varias veces triángulos rectos. Yo veo que Alejo y otro chico sacan un Stewart.	**P:** Mira qué bonito, la diferencia de cuadrados en el denominador. **P:** Bueno, hay que evaluarlo en 0: $f'(0) = -\frac{2}{0}$ $\rightarrow f'no\ está\ definida\ en\ 0$ **P:** El taller que les voy a dejar está muy bonito. **P:** Listo, excelente. **P:** Listo las derivadas de exponenciales y logarítmicas, ahora ¿qué es lo que había para hoy? **E:** Derivadas de funciones trigonométricas. **P:** ¿Cuál es el dominio de las trigonométricas? **P**: Pues depende porque si las defino sobre triángulos rectos? Pero si las define sobre ángulos diferentes o sobre la circunferencia unitaria. **P**: ¿Alguien trajo el librito? **P**: ¿Nadie más trajo libro?	**P:** Mira qué bonito, la diferencia de cuadrados en el denominador. **P:** Bueno, hay que evaluarlo en 0: $f'(0) = -\frac{2}{0}$ $\rightarrow f'no\ está\ definida\ en\ 0$ **P:** El taller que les voy a dejar está muy bonito. **P:** Listo, excelente. **P:** Listo las derivadas de exponenciales y logarítmicas, ahora ¿qué es lo que había para hoy? **E:** Derivadas de funciones trigonométricas. **P:** ¿Cuál es el dominio de las trigonométricas? **P**: Pues depende porque si las defino sobre triángulos rectos? Pero si las define sobre ángulos diferentes o sobre la circunferencia unitaria. **P**: ¿Alguien trajo el librito? **P**: ¿Nadie más trajo libro?	
7.	Empieza a escribir en el tablero.	**DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**	**DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS**	

		Si $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x\ dx$ **P:** La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función, es un error decir solamente "derivada de seno es coseno". **P**: No! Falta la derivada de la función.	Si $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x\ dx$ **P:** La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función, es un error decir solamente "derivada de seno es coseno". **P**: No! Falta la derivada de la función.	
8.		**Ejercicio 6:** **P:** Al derivar $f(x) = sen\ (x^2 + 3x)$ **P:** Se obtiene. $f'(x) = [cos(x^2 + 3x)](2x + 3)$	**Ejercicio 6:** **P:** Al derivar $f(x) = sen\ (x^2 + 3x)$ **P:** Se obtiene. $f'(x) = [cos(x^2 + 3x)](2x + 3)$	
9.		**Ejercicio 7:** **P:** Siguiente ejercicio. $f(x) = (\sin(2x^4 + 5x))^3$ **P**: Composición de funciones. $f'(x) = 3\big(sen(2x^4 + 5x)\big)^2 Cos(2x^4 + 5x)(8x^3 + 5)$ $f'(x) = 3(8x^3 + 5)(Cos(2x^4 + 5x))(sen(2x^4 + 5))^2$	**Ejercicio 7:** **P:** Siguiente ejercicio. $f(x) = (\sin(2x^4 + 5x))^3$ **P**: Composición de funciones. $f'(x) = 3\big(sen(2x^4 + 5x)\big)^2 Cos(2x^4 + 5x)(8x^3 + 5)$ $f'(x) = 3(8x^3 + 5)(Cos(2x^4 + 5x))(sen(2x^4 + 5))^2$	

<table>
<tr><td>10.</td><td></td><td>

Ejercicio 8:

P: Inventémonos otro.

P: Alejo desarrolla el siguiente.

$$f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$$

P: Mira qué bonito

$$f'(x) = \frac{2\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos(\frac{2x}{x+4})((2(x+4}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})(8)}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})}{(x+4)^2}$$

</td><td>

Ejercicio 8:

P: Inventémonos otro.

P: Alejo desarrolla el siguiente.

$$f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$$

P: Mira qué bonito

$$f'(x) = \frac{2\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos(\frac{2x}{x+4})((2(x+4}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})(8)}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})}{(x+4)^2}$$

</td><td></td></tr>
<tr><td>11.</td><td></td><td>

Derivadas de las funciones trascendentes

P: Catalina díctame las derivadas trigonométricas.

$$Si\ y = sen\ x \rightarrow y' = (Cosx)\ dx$$

$$Si\ y = Cosx \rightarrow y' = (-Senx)dx$$

$$Si\ y = tgx \rightarrow y' = (sec^2 x)\ dx$$

</td><td>

Derivadas de las funciones trascendentes

P: Catalina díctame las derivadas trigonométricas.

$$Si\ y = sen\ x \rightarrow y' = (Cosx)\ dx$$

$$Si\ y = Cosx \rightarrow y' = (-Senx)dx$$

$$Si\ y = tgx \rightarrow y' = (sec^2 x)\ dx$$

</td><td></td></tr>
</table>

		$Si\ y = ctgx \rightarrow y' = (-csc^2x)\ dx$ $Si\ y = Secx \rightarrow y' = (Secx)(tgx)dx$ $Si\ y = Cscx \rightarrow y' = (-Cscx)(ctgx)\ dx$ **P:** Y vamos a demostrarlas todas. **P:** Mañana hacemos clase a las 11 a otra hora no puedo, y el que quiera pasar a hacer una demostración pasa y yo le ayudo con la nota del tercer corte de acuerdo?	$Si\ y = ctgx \rightarrow y' = (-csc^2x)\ dx$ $Si\ y = Secx \rightarrow y' = (Secx)(tgx)dx$ $Si\ y = Cscx \rightarrow y' = (-Cscx)(ctgx)\ dx$ **P:** Y vamos a demostrarlas todas. **P:** Mañana hacemos clase a las 11 a otra hora no puedo, y el que quiera pasar a hacer una demostración pasa y yo le ayudo con la nota del tercer corte de acuerdo?	
12.	La profesora se emociona al ver que los estudiantes saben que la demostración se hace por medio de la definición formal de límite.	**Ejercicio 9:** **P:** Hagamos una. **P:** Vamos a demostrar: $si\ f(x) = sen\ x \rightarrow f'(x) = (cosx)\ dx$ **Demostración:** **P:** ¿Cómo lo demuestro? **E:** Con la definición formal de límite **P:** ¡Sí! Eso es lo que tenemos:	**Ejercicio 9:** **P:** Hagamos una. **P:** Vamos a demostrar: $si\ f(x) = sen\ x \rightarrow f'(x) = (cosx)\ dx$ **Demostración:** **P:** ¿Cómo lo demuestro? **E:** Con la definición formal de límite **P:** ¡Sí! Eso es lo que tenemos:	

	Alejo preguntó algo y me lo perdí: ah ya averigüé. Alejo vuelve a preguntar.	$f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\right)$ **P:** Por suma de ángulos tenemos: $f(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\frac{\sin h\ \cos x}{h}$ $f'(x) = \sin x \lim_{h\to 0} f\left(\frac{(\cos h)-1}{h}\right) + \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$ $f'(x) = \sin x\,(0) + \cos x\,(1)$ $f'(x) = \cos x$ **E**: Profe pero ahí donde está dx? **E**: ¿Para mañana todas las demás demostraciones? **P**: Sí señor.	$f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\right)$ **P:** Por suma de ángulos tenemos: $f(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}\right)$ $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\frac{\sin h\ \cos x}{h}$ $f'(x) = \sin x \lim_{h\to 0} f\left(\frac{(\cos h)-1}{h}\right) + \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$ $f'(x) = \sin x\,(0) + \cos x\,(1)$ $f'(x) = \cos x$ **E**: Profe pero ahí donde está dx? **E**: ¿Para mañana todas las demás demostraciones? **P**: Sí señor.	
13.	La profesora se inventa algunos ejercicios.	**Ejercicio 10:** **P**: Inventémonos algunos ejercicios, por ejemplo:	**Ejercicio 10:** **P**: Inventémonos algunos ejercicios, por ejemplo:	

		$f(x) = (\sec(5x^3 - 7x))^2$ $f'(x) = 2\sec(5x^3 - 7x)\ \sec(x^3 - 7x)\ \tan(x^3 - 7x)\,(15x^2 - 7)$ **P**: Y pónganla bonita, buen día.	$f(x) = (\sec(5x^3 - 7x))^2$ $f'(x) = 2\sec(5x^3 - 7x)\ \sec(x^3 - 7x)\ \tan(x^3 - 7x)\,(15x^2 - 7)$ **P**: Y pónganla bonita, buen día.	

5.1.2.2 Cinco Niveles De Análisis

A continuación, se presentan los cinco niveles de análisis aplicados al episodio 12; en el quinto nivel se hace alusión a la matriz de facetas anteriormente presentada.

PRIMER NIVEL DE ANÁLISIS.

Identificación de prácticas matemáticas[28]

De manera similar al episodio 4, la profesora parece ser el eje central del desarrollo de la clase aun así es visible la participación de algunos estudiantes los cuales responden a algunas de las preguntas que la profesora realiza durante el episodio.

Durante el desarrollo de este episodio es la profesora quien **pregunta** y **responde** a sus propios interrogantes, los cuales parecieran estar dirigidos a los estudiantes, pero a los que en varios momentos no deja responder [EP.12 Sg 2], análogamente la profesora es la que **cuestiona** de manera irónica los errores que cometen los estudiantes [EP.12 Sg 4] y no profundiza en las posibles causas de dichas confusiones; La profesora también cumple el papel de **proveer** las herramientas y conceptos bases para el desarrollo del tema, aun así algunas representaciones en leguaje simbólico de los conceptos expuestos pueden llegar a ser algo confusos [EP.12 Sg 1, Sg 7, Sg 11] lo que puede generar en los estudiantes un manejo inadecuado del lenguaje matemático, como punto final son evidentes como procesos realizados por la profesora la **proposición** de mecanismos de solución, la **corrección** de errores, la **exposición** de propiedades (logarítmicas), **demostración** de las proposiciones matemáticas y **resolución** de los ejercicios.

Por otra parte los estudiantes cumplen el papel de **receptores** de los planteamientos expuestos por la profesora, ocasionalmente **proponen** [EP.12 Sg 12]y se evidencia un notorio condicionamiento de su papel a **ejecutar** los procedimientos establecidos en el episodio por la profesora [EP.12 Sg 2]; los estudiantes también están encargados de **calcular** algunos límites y derivadas, sin embargo son pocos los estudiantes que participan en el desarrollo y aplicación de los procedimientos, debido a que generalmente es la profesora la que realiza estos procesos; en casos particulares son algunos de los estudiantes los que **recuerdan, reconocen y asocian** el elemento conceptual para el desarrollo de un planteamiento matemático [EP.12 Sg 12].

SEGUNDO NIVEL DE ANÁLISIS.

Identificación de objetos y procesos matemáticos [31]

Lenguajes

- **Objetos**

  Verbal (Diferencia de cuadrados, derivada, logaritmo, derivación Exponencial, derivación logarítmica, propiedades, funciones trigonométricas, límite)

  Simbólico: El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base: $Y = lnx \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}dx, Si\, y \ = \ sen\, x \ \rightarrow y' \ = (Cosx)\, dx, Si\, y \ =$

[28] Font, V., Planas, N & Godino, J. (2009). Modelo Para El Análisis Didáctico En Educación Matemática. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf

$Cosx \rightarrow y' = (-Senx)dx, Si\ y = tgx \rightarrow y' = (sec^2x)\,dx, Si\ y = ctgx \rightarrow y' = (-csc^2x)\,dx, \quad Si\ y = Secx \rightarrow y' = (Secx)(tgx)dx, \quad Si\ y = Cscx \rightarrow y' = (-Cscx)(ctgx)\,dx, \quad f'(0) = -\frac{2}{0} \rightarrow f'no\ est\acute{a}\ definida\ en\ 0\,, \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$

Este episodio está marcado por una constante presencia de elementos simbólicos La carga de representatividad recae en las expresiones matemáticas que se presentan durante toda la clase; el lenguaje verbal es la herramienta mediante la cual se sustentan las proposiciones simbólicas; no es en sí centro de desarrollo sino que cumple la función de medio de interconexión entre lo expuesto como concepto y lo representado de manera simbólica. Aun así, ocasionalmente es el lenguaje verbal el que permite la poca interacción profesor-estudiante y viceversa.

- **Procedimientos**

Evidentemente, al ser la profesora el eje central, la mayoría de procesos están caracterizados por la *validación* de los conceptos [Ep.12 Sg 1, Sg 7, Sg12] que se desarrollan durante el episodio; así mismo la profesora es la encargada de la *enunciación y argumentación* de las proposiciones matemáticas, lo que genera un bajo índice de participación de los estudiantes durante la clase. Sin embargo, el uso del dx al enunciar las derivadas de las funciones no hace parte del saber institucional puesto que esta expresión no representa la derivada interna de la función, sino es una representación de la diferencial de x: dx. Hace parte de la faceta cognitiva de la profesora quien usa esta expresión con la intención de que el estudiante asocie con ella la derivada de la función, y lograr así un mejor desempeño en las evaluaciones.

Los estudiantes por su parte son los encargados de los procesos de *conceptualización;* es decir, son los que deberían interiorizar los conceptos y procesos expuestos por la profesora, su papel se caracteriza por una actitud pasiva desde la cual solo responden preguntas realizadas en pocos momentos del episodio donde la profesora permite la participación [EP.12 Sg 12], la *identificación* de la herramienta necesaria para la demostración del límite trigonométrico también hace parte de los procesos realizados por los estudiantes (puntualmente un estudiante[Ep.12 Sg 12]); aun así los procesos de *proponer* y *argumentar*, que en gran medida deberían estar marcados por la participación de los estudiantes, quedan limitados debido a la actitud de la profesora [Ep.12 Sg 2] .

TERCER NIVEL DE ANÁLISIS.

Descripción de interacciones en torno a conflictos.[29]

- **Interacción**

Los patrones de interacción son muy parecidos a los propuestos en el tercer nivel de análisis del episodio 4; parece ser que esta es una característica constante en el desarrollo de las clases que dirige la profesora: La profesora procede con el siguiente patrón de interacción: **inicio-respuesta-evaluación**, en algunos casos la respuesta es de un alumno (**r**), pero en mucho casos ella misma se responde (**R**).

[29] Font, V., Planas, N & Godino, J. (2009). Modelo Para El Análisis Didáctico En Educación Matemática. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf

Por otra parte, pareciera ser que la profesora limita la participación activa del estudiante, pues aunque cuando ella realiza una pregunta (evidentemente dirigida a los estudiantes), ella no espera y se responde casi que de manera automática, suponiendo en alguna medida que los estudiantes no lo van a hacer; sin embargo, no debe verse este hecho como una responsabilidad única de la profesora pues si bien es cierto que cohíbe el tiempo de respuesta del estudiante, también es necesario tomar en cuenta que las actitudes (desinterés, preocupación, incomodidad, etc.) y los imaginarios que los estudiantes poseen sobre el desarrollo de una clase de matemáticas (complicada, tediosa, aburrida, etc.), son otros factores que propician un ambiente complicado para el desarrollo de la clase.

[Ep.12 Sg 2]. "**P:** Por propiedades de logaritmos, ¿ustedes qué prefieren derivar: ¿productos y cocientes, o sumas y restas?

Se responde a sí misma.

P: Pues sumas y restas por eso hacemos las propiedades."

La predominancia de la profesora como elemento principal de la clase genera un ambiente poco dinámico. El desarrollo del episodio se torna lineal y en ocasiones predecible; la interacción la mayoría de veces queda reducida a: **pregunta la profesora- responde ella misma (I-R-E),** en contadas ocasiones es el estudiante es el que pregunta y no necesariamente hace referencia a un tema expuesto, sino que algunas veces tiene que ver más con cuestiones de plazos y tiempos de entrega de trabajos (i-R-E) [Ep.12 Sg 2].

En el aspecto cognitivo se puede decir:

El desplazamiento del estudiante hacia una posición meramente receptiva y operativa complejiza el análisis de falencias y vacíos conceptuales, ya que estas no se muestran explícitamente, sino que se extraen momentos puntuales en los que los estudiantes mediante gestos y actitudes dejan en evidencia su incomprensión de una pregunta o un concepto; ejemplo de ello es que durante varios momentos de la clase cuando la profesora pregunta sobre la solución de un ejercicio, ellos guardan silencio.

CONFLICTOS Y DIFICULTADES

- **Conflictos semióticos** (**CS1**)

En este episodio un conflicto semiótico se evidencia en la proposición [Ep.12 Sg 1] realizada por la profesora donde expresa lo siguiente:

$$Y = \ln x \;\; \rightarrow \;\; y' = \frac{1}{x}dx$$

$$Y = log_b x \;\equiv\; y = \frac{\ln x}{\ln b}$$

$$\downarrow$$

$$y' = \frac{dx}{x \ln b}$$

La expresión y' significa $\frac{dy}{dx}$, que representa una razón de dos cambios, el cambio de y y el cambio de x, por lo que constituye una falta de precisión y de rigor escribir el dx en la parte derecha de la formula pues el dx ya está contenido en y'. Se puede interpretar que utiliza él dx para representar "la derivada interna de la función". Sin embargo, esta escritura y esta forma de hacer las cosas se caracteriza como un error y como una ambigüedad, ambas categorías generadoras de conflictos y obstáculos inferidos desde las prácticas observadas. Aquí aparece claro que la profesora usa las diferenciales (dy, dx) para la función logarítmica de manera totalmente mecánica y por demás no institucional pues no distingue entre la derivada y la diferencial.

Por otra parte, no es sencillo evidenciar cuales razones son las que llevan a que la profesora utilice dicha expresión [EP.12 Sg 1-2-7-11-12] para representar la derivada de la función. El primer supuesto sobre este fenómeno podría ser que la profesora intenta generalizar la proposición no solo para x sino que desea incluir funciones compuestas de tal manera que cuando se realice la derivada se tenga en cuenta la función interna contenida en ln.

- **Errores y Ambigüedades**

Hay que resaltar que la profesora en cuanto a las notaciones no siempre sigue reglas institucionales. Además de utilizar dx para representar derivadas o diferenciales, pareciera que los utiliza para representar números, cuando de hecho no son números. Esa expresión dx claramente no epistémica, no institucional, no rigurosa, es como una estrategia para que los estudiantes recuerden la derivada interna de la función.

- **Dificultades**

De manera general se evidencia una cierta dificultad por parte de los estudiantes en la comprensión de las propiedades de los logaritmos [Ep.12 Sg 4]. La profesora escribe la siguiente función en el tablero

$$f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$$

La profesora la reescribe usando propiedades de los logaritmos de la siguiente manera:

$$f(x) = \ln(x-2)^3 - \ln\left(\sqrt{2x-1}\right)$$

$$f(x) = 3\ln(x-2) - \tfrac{1}{2}\ln(2x-1)$$

Deriva la función y obtiene:

$$f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{5x - 1}{(x - 2)(2x - 1)}$$

Es en este momento donde un estudiante propone que:

E: ¿Desde el comienzo habría podido ser?

$$\frac{\ln(x - 2)^3}{\ln\sqrt{2x - 1}}$$

Inmediatamente la profesora corrige al estudiante y le dice:

P: ¡no! Esas son las propiedades que ustedes se inventan. Si también tratan de hacerlo con el producto.

La pregunta del estudiante es sumamente profunda pues para el de alguna manera el logaritmo de un cociente debería ser el cociente de los logaritmos, pues ese operador Ln en la cognición funciona algo así como un operador lineal, es decir, debería poderse distribuir en el numerador y denominador.

Sin embargo, no hay un seguimiento profundo ni un cuestionamiento para esclarecer cuáles son los motivos por los cuales el estudiante realiza dicha pregunta, la dificultad evidentemente tiene que ver con el manejo de las propiedades de logaritmos. Este hecho puede propiciar la permanencia de la incomprensión en el estudiante y de esta manera generar posteriores conflictos sobre la utilización de las propiedades de los logaritmos.

En cuanto a la gestión de la clase por parte de la profesora, se puede inferir que se presenta una gestión en la que cuando hay una pregunta no se responde o no se aclara la duda manifestada adecuada ni suficientemente. La respuesta se reduce a un conjunto de normas sin explicación tal como emerge en esta situación, que puede resultar en un potenciador de conflictos, obstáculos y dificultades presentes y futuras. La respuesta más bien representa una ironía, en la que no se responde la pregunta del estudiante, ni se pone un contraejemplo para hacerle ver que la propiedad que el propone no es correcta, sino que se contesta con una especie de sarcasmo: "Esas son las propiedades que ustedes se inventan".

CUARTO NIVEL DE ANÁLISIS.

Identificación de normas.[30]

En este apartado se presentan las inferencias realizadas a partir de: Godino, Font y Wilhelmi (2008, PP. 12).

- La clase empieza a una determinada hora con los estudiantes que estén, pero los otros pueden ingresar posteriormente, así mismo pueden retirarse cuando lo necesiten
- La profesora es eje central en cuanto al desarrollo temático, es decir las explicaciones de los temas, la resolución de los ejercicios, el planteamiento de talleres y los modos de proceder son dispuestos y desempeñados por ella.

[30] Juan D. Godino, Vicenç Font y Miguel R. Wilhelmi (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático Basado en el enfoque ontosemiótico

- No se privilegia la participación de los estudiantes, ni se da el tiempo para identificar progresos o dificultades, ni tampoco se le da importancia a esta labor de evaluación que podríamos denominar formativa.
- Los estudiantes son receptores del proceso educativo, ellos escuchan, toman apuntes, en general no responden las preguntas.
- El esquema de la clase es, podríamos llamarlo, tradicional: la profesora explica, habla, y los estudiantes copian y tratan de hacer los ejercicios; piden ayuda extra clase.
- La interacción es casi nula, se habla con uno o dos estudiantes; Alejo, o en otros semestres, Felipe u otro que hace el papel de Alejo.
- no hay espacio para talleres o trabajo en grupo elaborados en la clase.
- El ritmo de dictar temas es apresurado, pues hay unos tiempos determinados por las respectivas guías de catedra, y por la realización de las pruebas conjuntas.
- Los estudiantes en general no reclaman acerca de las notas, ni cuestionan formas de evaluar o metodologías, menos contenidos temáticos o ejercicios.
- La profesora asiste a todas sus clases, se preocupa por ir al día en contenidos, y hasta planea clases extras (por ejemplo, los sábados) para poder abarcar todos los temas propuestos.
- El uso de tecnología, o estrategias para visualizar funciones, gráficas, …está a cargo de un estudiante (Alejo) quien lleva su computador portátil, y la profesora busca un cable y conectan al televisor. Si Alejo no llega o no lleva el portátil no se realiza nada.
- La profesora regaña, es sarcástica (“toca pensar”, “no se hagan los que están pensando”, “esas son las propiedades que ustedes se inventan”, “por eso se caen los puentes”.

QUINTO NIVEL DE ANÁLISIS.

Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción[31]

Si bien el episodio está marcado por la interacción entre los diferentes actores del contexto educativo (Profesor, estudiante), dicha interacción está caracterizada en gran parte del episodio por ser unidireccional, es decir, se desarrolla de tal manera que el flujo interaccional toma como punto de inicio a la profesora y se desplaza a los estudiantes, quienes pocas veces invierten dicho flujo para retroalimentar las explicaciones de la profesora, lo cual ayudaría a monitorear la compresión o dificultad de un tema por parte de los estudiantes.

La *faceta mediacional* queda reducida en el contexto tangible a la utilización del tablero como herramienta por excelencia para la exposición de proposiciones. Herramientas como televisores, computadoras, textos académicos son ocasionales y dependen en gran medida de elementos extracurriculares; para el caso puntual de este episodio dicho medio es visualizado en el episodio [Ep.12 Sg 4].

La predominancia de la *faceta epistémica* en la mayoría de los segmentos indica que uno de los focos de interés de la clase es la obtención de procedimientos básicos para la solución de ejercicios matemáticos. Para dicho efecto la profesora enfatiza en lo que ella considera importante; así mismo corrige y realiza comentarios sobre los errores cometidos por los estudiantes; sin embargo aunque dicha faceta posea tal importancia, pocos son los momentos en los que los estudiantes tienen oportunidad de preguntar sobre lo que no les queda claro, al tiempo que en gran parte del episodio no se resuelve ni se profundiza sobre los vacíos conceptuales y procedimentales de los estudiantes,

[31] Font, V., Planas, N & Godino, J. (2009). Modelo Para El Análisis Didáctico En Educación Matemática. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf

quienes ven limitada su participación a la mera recepción de información proporcionada por y desde la profesora.

En comparación con la faceta epistémica, de *la faceta cognitiva no* podemos decir mucho debido a que son pocos los instantes en que el estudiante trabaja de manera autónoma. La mayoría de procesos matemáticos están a cargo de la profesora, así como la proposición de enunciados y la identificación de los errores; los estudiantes poco proponen modelos o procesos de solución para los ejercicios, son contadas las ocasiones en los que son los protagonistas del episodio. Esto puede estar relacionado con el hecho de que es la profesora la que generalmente incentiva la interacción, aun cuando es ella misma la que no permite que se concrete eficazmente.

Por último, tenemos la *faceta ecológica*. La importancia de esta faceta no es perceptible en el episodio; son pocos o insuficientes los indicadores que podemos encontrar a lo largo del episodio; la relación de los contenidos académicos propuestos con elementos extra académicos es a grandes rasgos imperceptible, no se evidencia explícitamente referencia a variables sociales, económicas, culturales, etc., lo cual puede transformase en una posible explicación a factores como:

- Desinterés de los estudiantes (¿Por qué es importante?)
- Descontextualización del conocimiento matemático (¿Dónde se usa?).
- Aplicabilidad del conocimiento matemático (¿Para qué se aplica en el mundo?)
- Importancia de los elementos conceptuales (¿Por qué es importante adquirirlos?)
- Incomprensión del cálculo.

5.1.2.3 Representación Gráfica Global del Episodio

Con base en la matriz de facetas de idoneidad didáctica se representa la frecuencia con la que cada segmento se relacionó con una u otra faceta, de lo cual se ha generado un gráfico que da cuenta de la tendencia marcada por un fuerte sesgo o inclinación a lo epistémico, cognitivo, etc. Es decir, no muestra la idoneidad sino la tendencia hacia uno de los aspectos que marcan el desarrollo de la práctica.

Tabla 26. Plantilla con datos registrados.

Facetas De Idoneidad Didáctica Episodio 12 – 13 segmentos	
Epistémica	100%
Cognitiva	23,08%
Interaccional	23,08%
Mediacional	0%
Emocional	0%
Ecológica	0%

Nota: Aunque la tabla arroja el 100% en la faceta epistémica por el simple hecho de que todo el episodio es desarrollado por la profesora, no significa que la idoneidad epistémica sea solo porque por indicadores de frecuencia aparece ese 100% (cuantitativamente) sin embargo la viñeta selecciona en la que aparece dx en todas las derivadas indica que hay no es una práctica epistémica-institucional, que no hay una distinción rigurosa matemática entre derivada y diferencias, luego no se puede afirmar que la idoneidad epistémica sea del 100%.

Figura 8. Gráfico radial generado a partir de la matriz de facetas de idoneidad didáctica del episodio 12

A continuación, se presenta la Matriz Categorial que se ha denominado Descriptiva y a la cual se le ha agregado una columna de atributos de oposiciones.

5.2 Matriz Categorial Descriptiva (Prácticas Matemáticas Y Configuración De Objetos) Y De Oposiciones

5.2.1 [Ep. 4] Episodio 4. Ejercicios sobre límites algebraicos y trigonométricos

Tabla 27. Matriz categorial descriptiva y de oposiciones – Episodio 4

CATEGORÍAS	DUALIDADES Y OPOSICIONES
Problemas **P1:** Calcular $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$ **P2:** Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}$ **P3:** Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$ **P4**: Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)$ **P5:** Calcular $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x}$	
Lenguaje • Verbal Limite, límite especial, limites trigonométricos, Identidades trigonométricas, ángulos especiales, ángulos coterminales, indeterminación, Seno, Coseno, Tangente, circunferencia unitaria, ángulo, grados, triangulo, conjugado. • Simbólico	La definición es una expansión discursiva y también un concepto La definición como letrero es un lenguaje. La definición también es un proceso y concepto. En el lenguaje hay términos, predicados, proposiciones, expansiones discursivas.

$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$; $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x}$; $\lim_{x\to a} f(x)$; $\frac{0}{0}$ Símbolos de las expresiones simbólicas de las funciones que aparecen ($tan\ x, x, 3$ ……)	**Son** Términos: ostensibles, sistémico Expresion. Extensivo
• Proposiciones <u>Previas</u> Para las funciones continuas $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (implícita) $1 - cos2x = sen2x$ $Tan\ x = \frac{senx}{cosx}$ $\frac{a}{a} = 1$ El límite de un producto de funciones es el producto de límites $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$	Son proposiciones como parte de Lenguajes, No ostensivas Intensivo
<u>Emergentes:</u> 1) $\lim_{x\to 3}\frac{(x^n-a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ 2) $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x} = 0$ 4) $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3} = \frac{1}{2}$ 5) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right) = 1$ 6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$	Anuncia que demostrara este primer límite que llama especial, sin embargo, el que realiza es el tercero. Estas 6 proposiciones son: No ostensivas Extensiva Sistémica Personal Las proposiciones son importantes por el concepto que expresan, por tanto también pueden estar en la casilla de conceptos.
• Argumentos <u>Argumento 1:</u> Tesis $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ Razón 1° Forma $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} * \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}-\sqrt{3})}$	En las proposiciones y las razones lo importante no es el lenguaje sino el contenido conceptual.

$\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ Tambien\frac{\sqrt{3}}{6}\ racionalizando$ 2° Forma $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ <u>Argumento 1.1:</u> Tesis $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=na^{n-1}$ Razón $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ $Limite\ Especial$ <u>Argumento 2:</u> Tesis $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}=0$ Razón $\text{Lim}_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}*\frac{1+cosx}{1+cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x(1-cosx)}$ $=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}*\frac{senx}{1+cosx}=1*\frac{0}{2}=0$ Se ha seguido el procedimiento de cálculo de límites para el caso de indeterminación 0/0 realizando un tratamiento y utilizando, entre otras, la propiedad que el límite de un producto es el producto de límites <u>Argumento 3:</u> Tesis $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}=\frac{1}{2}$ Razón Se cumple que $Tan\ x\ =\frac{senx}{cosx}$ $\text{Lim}_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{senx}{cosx}-senx\right)}{x^3}=$ $\text{Lim}_{x\to 0}\frac{\left(\frac{senx-senx*cosx}{cosx}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{senx(1-cosx)}{x^3cosx}=$ $\text{Lim}_{x\to 0}\frac{senx(1-cosx)}{x^3cosx}*\frac{1+cosx}{1+cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{senx(1-\cos^2 x)}{x^3cosx(1+cosx)}=$	Son proposiciones ostensibles y extensivas La razón del argumento es no ostensible e institucional porque se comparte. Se reconoce una dificultad para clasificar cada evento en las categorías de EOS Hay varios tipos de argumentos, sin embargo, en esta clase son puramente algebraicos y procedimentales, El argumento es el resultado y el procedimiento. Es resultado en tanto objeto descrito en el análisis didáctico del EOS como queda lingüísticamente en la transcripción; Es proceso en tanto procedimiento argumentativo como ocurrió en la situación problémica en el aula.

$\lim_{x\to 0}\frac{senx*sen^2x}{x^3cosx(1+cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}*\frac{senx}{x}*\frac{senx}{x}*\frac{1}{cosx(1+cosx)}$ $=\frac{1}{2}$ El resultado de evaluar la función en x =0 es $\frac{1}{2}$ <u>Argumento 4:</u> Tesis $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)=1$ Razón $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{senx}{cosx}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{x*cosx}\right)=$ $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}*\frac{1}{cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx}=1$ <u>Argumento 5:</u> Tesis $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x}=-\frac{2}{\sqrt{2}}$ Razón $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(1-\frac{senx}{cosx}\right)}{sen\,x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\frac{cosx-senx}{cosx}\right)}{sen\,x-\cos x}$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cosx-senx}{cosx(senx-cosx)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}-\frac{cosx-senx}{cosx(cosx-senx)}=$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{cosx}=-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}$	
Conceptos Límites especiales, Funciones trigonométricas, Identidades trigonométricas, Límite indeterminado de tipo 0/0	Son: No ostensibles (inmateriales) Intensivos (generales) Contenidos. Intensivos
Procedimientos 1) Cálculo de límites por evaluación. 2) Racionalización. 3) Cálculo de límites indeterminados del tipo 0/0 4) Evaluar la función en $x=a$ 5) En caso de tener una indeterminación hay que expresar la función de una forma diferente (hay que hacer un tratamiento usando propiedades).	Son: No ostensibles. Informales y no rigurosos Cálculos algebraicos Evaluación cálculo aritmético Transformaciones tipo tratamiento de Duval Extensiva y no intensivo

6) Volver a evaluar para ver si desparece la indeterminación. 7) En caso contrario hay que volver a hacer un tratamiento usando propiedades. 8) Despeje de ecuaciones. 9) Uso de identidades trigonométricas para solución de límites.	

Tabla 28. Elementos de análisis de resultados del Episodio 4

Al tratar de distinguir los objetos que se podrían clasificar dentro de los Lenguajes y los que no lo son, se encontraron frecuentes dificultades. Por ejemplo, las definiciones que se presentan por parte de la profesora o en los libros de texto son también Proposiciones, claramente identificables y ostensibles, pero también podrían ser clasificadas como Conceptos, pero serían no ostensibles. Las Proposiciones y las Argumentaciones son Lenguajes, pero habría que caracterizarlas en sus propias categorías que se distinguen entre sí porque toda argumentación tiene una o más proposiciones, pero ambas volverían a aparecer en Lenguajes. Para evitar estas dobles clasificaciones, tanto Proposiciones como Argumentaciones podrían ser reubicadas como subcategorías de los Lenguajes, que sería una macro-categoría con situaciones, procesos y objetos. Las Proposiciones podrían tener a su vez una sub-categoría que fueran las Definiciones cuando se toman como formulaciones lingüísticas, no como procesos mentales. Pero cuando en una argumentación se usa una definición sin repetirla, se puede clasificar como Concepto, y por lo tanto sería no ostensible. Pero Proposiciones y Argumentaciones como subcategorías no agotan los objetos que pueden aparecer en la macro-categoría Lenguajes. Podrían agregarse subcategorías como expresiones semióticas no articuladas (como los gestos), y en las articuladas se podrían distinguir subcategorías como términos, operadores y predicados; luego vendrían las Proposiciones y las demás Expansiones Discursivas, entre ellas las Argumentaciones, las Narraciones y las Instrucciones.

Tabla 29. Viñeta episodio 4

Viñeta Ep4 Seg1-2-3
P: ¿Recuerdan el taller sobre límites? Pues hoy vamos a dedicar la clase a resolverlo: ustedes lo van a hacer ¿bueno? **P**: Empecemos: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$

Pasa a un estudiante e insiste en que la raíz se pueda ver como diferencia de potencias. Anota en el tablero la fórmula que ella llama límites **especiales:** 1) $\lim_{x\to 3}\frac{(x^n-a^{n)}}{x-a}=na^{n-1}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=1$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}=0$
1° Forma $racionalizando$ $$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}*\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}-\sqrt{3})}$$ $$\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ Tambien\frac{\sqrt{3}}{6}$$
2° Forma *factorización:* diferencia de cuadrados en el denominador $$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$
3° Forma. Aplicando la fórmula del “limite especial” $$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}=\frac{1}{2}*3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$
Son proposiciones ostensibles y extensivas

Tabla 30. Análisis de dualidades y oposiciones de la viñeta del Episodio 4

Viñeta Ep4 Seg1-2-3	**Análisis de dualidades y oposiciones**
$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$ $\lim_{x\to 3}\frac{(x^n-a^{n)}}{x-a}=na^{n-1}$ La expresión correcta que corresponde es $\lim_{x\to a}\frac{(x^n-a^{n)}}{x-a}=na^{n-1}$	La profesora insiste nuevamente en que la raíz se pueda ver como diferencia de potencias para aplicarle la formula enunciada. Pero en ninguno de los libros de cálculo consultados aparece este como límite especial. También es importante preguntar: ¿por qué los estudiantes asocian inmediatamente, sin dudarlo, sin pensarlo que n es natural y por tanto no tiene sentido para potencia fraccionaria? Ese exponente n que aparece en esa fórmula al desarrollarlo por el teorema del binomio se supone tácitamente n entero positivo. De hecho es un límite que requiere un caso de factorización de resta de potencias iguales, y su procedimiento nuevamente es algebraico, manual, quizá lo especial podría ser que la potencia

	n es intensivo y no extensivo, es generalización y no un caso particular con n=2 o n=3. Además, podría realizarse usando la regla de L'Hôpital pues es un límite de la forma 0/0 y quedaría de la siguiente manera derivando numerador y denominador por separado: $\lim_{x \to a} \frac{(x^n - a^{n)}}{x - a}$ $\lim_{x \to a} \frac{nx^{n-1}}{1} = na^{n-1}$

Tabla 31. Elementos de análisis de resultados de la viñeta seleccionada

Hay una resistencia en los estudiantes para realizar el límite propuesto con la fórmula de "limite especial", pues lo abordan en primer lugar por racionalización, método que está más asociado cuando se presentan raíces en los límites. O ese segundo procedimiento que involucra un caso de factorización en el denominador, que no es en lo primero que piensan la mayoría de estudiantes. Pero el que la profesora insiste en usar como un caso particular de lo que ha llamado límite especial, ninguno lo ha realizado por ese método, incluso se tardan bastante en aplicar la fórmula para obtener el resultado, pues ahí no habrá ningún procedimiento más que reemplazar la x por el número 3. Los argumentos son proposiciones como parte de Lenguajes, No ostensivas, Intensivo. Hay varios tipos de argumentos, sin embargo en esta clase son puramente algebraicos y procedimentales. El argumento es el resultado y el procedimiento. Es resultado en tanto objeto descrito en el análisis didáctico del EOS como queda lingüísticamente en la transcripción; Es proceso en tanto procedimiento argumentativo como ocurrió en la situación problémica en el aula. Se reconoce una dificultad para clasificar cada evento en las categorías de EOS Al peguntar a la profesora la razón por lo que llama a ese límite "especial" respondió que así se lo enseñó el profesor Oriol en la licenciatura, y ese era "el profesor" el admirado, el que sabía, el que formó a muchas generaciones de licenciados. Así que es cierto eso de que el ejemplo enseña más que la palabra, también ese rol de autoridad que ostentan algunas personas y ese repetir actitudes y hábitos incuestionables, también en la educación. En cuanto al ejercicio número 3 también tiene un procedimiento analítico de solución que consiste en multiplicar por la conjugada del numerador, hacer aparecer la identidad fundamental, reemplazarla, identificar el limite fundamental y evaluarlo, es decir, no tiene el status epistemológico del límite número 2 que sí es un teorema, que no se puede resolver con un tratamiento algebraico, ni analítico. Lo máximo que se puede hacer es verificarlo

con vecindades alrededor de 0 y tomar el sen, luego el cociente y estimar la tendencia de esos cocientes hacia 1.

5.2.2 [Ep. 12] Episodio 12. Derivadas Logarítmica y Trigonométrica

TABLA 32. Matriz categorial descriptiva y de oposiciones – Episodio 4

CATEGORÍAS	DUALIDADES Y OPOSICIONES
Problemas **P1:** Hallar la derivada de $$Y = \ log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right]$$ **P2:** Hallar la derivada de $$f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$$ **P3:** Hallar la derivada de $$f(x) \ = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$$ **P4:** Hallar la derivada de $$f(x) = \ \ln\sqrt{x(x+1)}$$ **P5:** Hallar la derivada de $$f(x) \ = \ \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$$ **P6:** Hallar la derivada de $$f(x) = \ sen\ (x^2+3x)$$ **P7:** Hallar la derivada de $$f(x) = \ (\sin(x^4+5x))^3$$ **P8:** Hallar la derivada de $$f(x) \ = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$$ **P9:** Demostrar mediante definición formal de límite.	

$y = sen\,x \rightarrow y' = Cosx\,dx$ **P10:** Hallar la derivada de $f(x) = (\sec(5x^3 - 7x))^2$	
Lenguaje • Verbal Diferencia de cuadrados, derivada, logaritmo, derivación Exponencial, derivación logarítmica, propiedades, funciones trigonométricas, límite El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base • Simbólico : $Y = lnx \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}dx,$ $Si\,y = sen\,x \rightarrow y' = (Cosx)\,dx,$ $Si\,y = Cosx \rightarrow y' = (-Senx)dx,$ $Si\,y = tgx \rightarrow y' = (sec^2x)\,dx,$ $Si\,y = ctgx \rightarrow y' = (-csc^2x)\,dx,$ $Si\,y = Secx \rightarrow y' = (Secx)(tgx)dx,$ $Si\,y = Cscx \rightarrow y' = (-Cscx)(ctgx)\,dx,$ $f'(0) = -\frac{2}{0} \rightarrow f'no\ está\ definida\ en\ 0$, $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ • Proposiciones <u>Previas:</u> $f(x) = c \rightarrow f'(X) = 0$ $f(X) = X \rightarrow f'(X) = 1$ $f(X) = MX \rightarrow f'(X) = M$ $Cf(X) = C.f'(X)$ $f(X) = X^n \rightarrow f'(x) = nX^{n-1}$ $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$	La definición es una expansión discursiva y también un concepto La definición como letrero es un lenguaje. La definición también es un proceso y concepto. En el lenguaje hay términos, predicados, proposiciones, expansiones discursivas. Todas estas siete proposiciones compuestas son de| carácter Personal por el dx que acompaña la fórmula al lado derecho que de facto lo pone la profesora pues no aparece así en los textos, ni es ostentado por el saber institucional en ninguna instancia, ni por el saber disciplinar riguroso de la matemática Son proposiciones como parte de Lenguajes, No ostensivas

$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$ $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$ $Y = lnx \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}dx$ $Y = logbx \equiv y = \frac{lnx}{lnb}$ $\downarrow$ $y' = \frac{dx}{x}lnb$ $Y = e^x \quad \rightarrow \quad y' = e^x\, dx$ $Y = a^x \quad \rightarrow \quad y' = a^x \ln a\ dx$ $Si\ y = \sin x \rightarrow y' = \cos x\ dx$ $Si\ y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x\, dx$ $Si\ y = \tan x \rightarrow y' = (\sec x)^2\, dx$ $Si\ y = \cot x \rightarrow y' = -(\csc x)^2 dx$ $Si\ y = \sec x \rightarrow y' = \sec x \tan x\, dx$ $Si\ y = \csc x \rightarrow y' = -\csc x \cot x\ dx$ <u>Emergentes</u> *Ejercicio 1:* $Y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right]$ $\downarrow$ $Y' = \frac{1}{x\ln 6} - \frac{(-1)}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$ *Ejercicio 2:* $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$ $\downarrow$	Intensivo No ostensivas Extensiva Sistémica Personal Las proposiciones son importantes por el concepto que expresan, por tanto también pueden estar en la casilla de conceptos.

$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$ *Ejercicio 3:* $f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$ $\downarrow$ $f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$	Son proposiciones ostensibles y extensivas La razón es no ostensible e institucional porque se comparte.
Ejercicio 4: $f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$ $\downarrow$ $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right)$ *Ejercicio 5:* $f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$ $\downarrow$ $f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$ *Ejercicio 6*: $f(x) = sen\,(x^2+3x)$ $\downarrow$ $f'(x) = [cos(x^2+3x)](2x+3)$ *Ejercicio 7*: $f(x) = (\sin(x^4+5x))^3$ $\downarrow$ $f'(x) = 3(8x^3+5)(Cos(2x^4+5x))(sen(2x^4+5))^2$ *Ejercicio 8*: $f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$	

$\downarrow$ $$f'(x) = \frac{16\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos\left(\frac{2x}{x+4}\right)}{(x+4)^2}$$ *Ejercicio 9*: Demostrar mediante definición formal de límite. $$y = sen\, x \to y' = Cosx\, dx$$ $\downarrow$ $$f'(x) = \cos x$$ *Ejercicio 10*: $$f(x) = (\sec(5x^3 - 7x))^2$$ $\downarrow$ $$f'(x) = 2\sec(5x^3 - 7x)\ \sec(x^3 - 7x)\ \tan(x^3 - 7x)\,(15x^2 - 7)$$ • Argumentos <u>Argumento 1:</u> Tesis $Y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right] \to Y' = \frac{1}{x\ln 6} - \frac{(-1)}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$ Razón $$Y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right]$$ $$Y = \log_6\left(\frac{x}{2}\right) + \log_6\left(\frac{3}{1-x}\right) + \log_6\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)$$ $$Y = \log_6(x) - \log_6(2) + \log_6(3) - \log_6(1-x) + \log_6(x^2+1) - \log_6(x+2)$$ $$Y = \left(\frac{\ln(x) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(1-x) + \ln(x^2+1) - \ln(x+2)}{\ln 6}\right)$$	Hay varios tipos de argumentos, sin embargo en esta clase son puramente algebraicos y procedimentales, El argumento es el resultado y el procedimiento. Es resultado en tanto objeto descrito en el análisis didáctico del EOS como queda lingüísticamente en la transcripción; Es proceso en tanto procedimiento argumentativo como ocurrió en la situación problémica en el aula.

$$Si\ y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \rightarrow\ y' = \frac{dx}{x\ln a}\ dx$$ $$Y = \left(\frac{\ln(x) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(1-x) + \ln(x^2+1) - \ln(x+2)}{\ln 6}\right)$$ $$Y' = \frac{1}{x\ln 6} - \frac{1}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$$ $$Y' = \frac{1}{\ln 6}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x+2}\right)$$ <u>Argumento 2:</u> Tesis $$f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$$ Razón $$f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$$ $$f'^{(x)} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)\right]$$ $$f'(x) = \frac{1}{3}\ [\ln(3x) - \ln(x+2)]$$ $$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$$ <u>Argumento 3:</u> Tesis $$f(x) = f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right] \rightarrow f'(x) = \frac{3(2x-1)-(x-2)}{(2x-1)(x-2)}$$ Razón $$f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$$ $$f(x) = \ln(x-2)^3 - \ln\left(\sqrt{2x-1}\right)$$ $$f(x) = 3\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(2x-1)$$	Se reconoce una dificultad para clasificar cada evento en las categorías de EOS Son proposiciones como parte de Lenguajes, No ostensivas Intensivo

$f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$	
$f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$	
$f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$	Personal
$f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$	
<u>Argumento 4:</u>	
Tesis	
$f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right)$	Personal
Razón	Personal
$f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$	Personal
$f(x) = \ln\frac{x(x+1)}{2}$	Personal
	Personal
$f(x) = \frac{1}{2}\ (\ln x(x+1))$	Personal
$f(x) = \frac{1}{2}\ (\ln x + \ln(1-x))$	
$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right)$	
<u>Argumento 5:</u>	
Tesis	No ostensivas
	Extensiva
$f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right] \rightarrow f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$	Sistémica
Razón	Personal
$f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$	
$f(x) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x-1)$	

$$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)} - \frac{e^x}{(e^x\ -1)}$$ $$f'(x) = \frac{(e^x - 1)e^x - (e^x+1)e^x}{(e^x+1)(e^x - 1)}$$ $$f'(x)\ = \frac{(e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x)}{(e^x+1)(e^x-1)}$$ $$f'(x)\ = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$$ $$f'(0) = -\frac{2}{0} \rightarrow f'no\ está\ definida\ en\ 0$$ <u>Argumento 6:</u> Tesis $$f(x) = sen\ (x^2+3x) \rightarrow f'(x) = [cos(x^2+3x)](2x+3)$$ Razón $$f(x) = sen\ (x^2+3x)$$ $$f'(x) = [\cos(x^2+3x)](2x+3)$$ <u>Argumento 7:</u> Tesis $$f(x) = (\sin(x^4+5x))^3 \rightarrow f'(x) = 3(8x^3 + 5)(Cos(2x^4+5x))(sen(2x^4+5))^2$$ Razón $$f(x) = (\sin(2x^4+5x))^3$$ $$f'(x) = 3\left(sen(2x^4+5x)\right)^2 Cos(2x^4+5x)(8x^3+5)$$ $$f'(x) = 3(8x^3+5)(Cos(2x^4+5x))(sen(2x^4+5))^2$$ <u>Argumento 8:</u> Tesis	

$f(x)=\left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2 \rightarrow f'(x) = \frac{16\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos\left(\frac{2x}{x+4}\right)}{(x+4)^2}$ Razón $f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$ $f'(x)=\frac{2\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos(\frac{2x}{x+4})((2(x+4)-2x)}{(x+4)^2}$ $f'(x)=\frac{2\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})(8)}{(x+4)^2}$ $f'(x)=\frac{16\sin(\frac{2x}{x+4})\cos(\frac{2x}{x+4})}{(x+4)^2}$ <u>Argumento 9:</u> Tesis $y = sen\,x \rightarrow y' = Cosx\,dx \rightarrow f'(x)=\cos x$ Razón Si $f'(x)=\lim_{h\to 0} f\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ $f'(x)=\lim_{h\to 0} f(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h})$ $f'(x)=\lim_{h\to 0} f(\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h})$ $f'(x)=\lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\frac{\sin h\ \cos x}{h}$ $f'(x)=\sin x\lim_{h\to 0} f\left(\frac{(\cos h)-1}{h}\right)+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$ $f'(x)=\sin x\,(0)+\cos x\,(1)$ $f'(x)=\cos x$ <u>Argumento 10:</u> Tesis	Las tesis Son proposiciones ostensibles y extensivas Las razones son no ostensibles e institucionales.

$f(x) = (\sec(5x^3 - 7x))^2 \rightarrow f'(x) = 2\sec(5x^3 - 7x)\ \sec(5x^3 - 7x)\ \tan(5x^3 - 7x)\,(15x^2 - 7)$ Razón $f'(x) = 2\sec(5x^3 - 7x)\ \sec(5x^3 - 7x)\ \tan(5x^3 - 7x)\,(15x^2 - 7)$	
Conceptos Derivación, funciones trigonométricas, logaritmos, derivadas de las funciones trascendentes, común denominador, simplificación,	Son: No ostensibles (inmateriales) Intensivos (generales) Contenidos. Intensivo
Procedimientos 1) Aplicación propiedades logaritmos. 2) Factorización 3) Derivación 4) Aplicación límites	Son: No ostensibles. Informales y no rigurosos Cálculos algebraicos Evaluación cálculo aritmético Transformaciones tipo tratamiento de Duval Extensiva y no intensivo

TABLA 33. VIÑETA EPISODIO 12

Viñeta Ep12 Seg2
P: Hoy se van a trabajar ejercicios de derivación exponencial y logarítmica $Y = lnx \rightarrow y' = \frac{1}{x}dx \qquad Y = logbx \equiv y = \frac{lnx}{lnb} \rightarrow y' = \frac{dx}{x}\ lnb$ ***P:*** *El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base:* $Y = e^x \rightarrow y' = e^x\,dx$

$$Y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a\ dx$$
Viñeta Ep12 Seg7
Si $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x\ dx$ **P:** La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función, es un error decir solamente “derivada de seno es coseno”.
Viñeta Ep12 Seg11
P: En el tablero: $Si\ y = sen\ x \rightarrow y' = (Cosx)\ dx$ $Si\ y = Cosx \rightarrow y' = (-Senx)dx$ $Si\ y = tgx \rightarrow y' = (sec^2x)\ dx$ $Si\ y = ctgx \rightarrow y' = (-csc^2x)\ dx$ $Si\ y = Secx \rightarrow y' = (Secx)(tgx)dx$ $Si\ y = Cscx \rightarrow y' = (-Cscx)(ctgx)dx$ Esto seis enunciados en los que claramente aparece el uso de dx en la derivada se presentan con el fin de dar cuenta de que dx no se presentó solamente en una situación sino que hace parte del discurso de la profesora al explicar todas las derivadas.

Tabla 34. Análisis de dualidades y oposiciones episodio 12

Viñeta Ep12 Seg2	Análisis de dualidades y oposiciones
$\mathbf{Y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x} dx}$	Es una proposición compuesta que consta de dos partes con un operador intermedio Las proposiciones están unidas por un operador de → implicación por lo tanto parecen requerir un proceso de validación. Las razones aparecen en lo no ostensible y en lo cognitivo personal. Esa implicación es compartida por todos los profesores por lo tanto es institucional también. El operador lógico → necesita una explicación que no aparece explícitamente. Las tesis están ostensibles como proposiciones lingüísticas compuestas de dos partes. Esa razón cognitiva es también institucional o epistémica porque es aceptada por toda la comunidad académica. ostensibles,

	Son proposiciones como parte de Lenguajes, No ostensivas Intensivo Extensiva Sistémica Personal La razón es no ostensible e institucional porque se comparte. Hay varios tipos de argumentos, sin embargo en esta clase son puramente algebraicos y procedimentales, El argumento es el resultado y el procedimiento. Es resultado en tanto objeto descrito en el análisis didáctico del EOS como queda lingüísticamente en la transcripción; Es proceso en tanto procedimiento argumentativo como ocurrió en la situación problémica en el aula. Se reconoce una dificultad para clasificar cada evento en las categorías de EOS
Viñeta Ep12 Seg7	**Análisis de dualidades y oposiciones**
Si $\boldsymbol{f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x\ dx}$ **P:** La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función, es un error decir solamente “derivada de seno es coseno”.	1. La profesora pone la diferencial de x (dx) como parte de la derivada. Se podrían inferir por lo menos dos explicaciones para esta escritura. la primera es que está pensando en una regla de la cadena y ese dx representa la derivada interna de la función, “*la derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función*” y la segunda es que está pensando en la integral, más exactamente en la antiderivada que requiere ese dx para devolverse y decir algo como la antiderivada de $\boldsymbol{\cos x\ dx}$ es $\boldsymbol{\sin x}$. Revela fundamentalmente esa falta de distinción rigurosa entre la derivada y la diferencial. La notación compartida por la comunidad académica y por los textos de cálculo para lo que en la clase la profesora quiere decir es, por ejemplo: $\boldsymbol{\text{Si } f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x\ , o}$ $\boldsymbol{\text{Si } f(u) = \sin u, y\ u\ es\ funci\text{ó}n\ de\ x \rightarrow f'(u) = \cos u \frac{du}{dx}}$

Al poner el tema con algunos profesores de matemáticas de la Facultad, se les preguntó:

¿Cuál es la diferencia entre derivada y diferencial?

Algunas respuestas obtenidas:

- En R son la misma cosa.
- En R^2 son lo mismo.
- En R^3 son diferentes significados:

Δy es el comportamiento de la función y.

dy es el comportamiento de la recta tangente

(¿recta tangente en R^3? !! O en R^2?

- $\Delta x = dx \; pero \; \Delta y \neq dy$
- $f(x+h) - f(x) = \Delta x$
- $\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$?
- Pero $f'(x) = \frac{dy}{dx} \rightarrow razon \; de \; cambio$
- $Si \; x2 \rightarrow x1$ ent $x2 - x1 \rightarrow 0$
  entonces $dy = \frac{y2-y1}{x2-x1}$
- Si $f'(x) = \frac{dy}{dx} \rightarrow f'(x).dx = dy$
- $\int f'(x).dx = \int dy \; \rightarrow y + c$

¿Por qué las integrales necesitan el dx, dy, dt en la expresión $\int f(x)dx$?

- Para saber con respecto a que variable se integra ←
- Es importante por ejemplo en varias variables en el concepto de derivada parcial y de integrales dobles y triples $\iint \wedge \iiint$
- Si $\int \int dy \Rightarrow x \; es \; constante$
- Si $\int \int dx \Rightarrow y \; es \; constante$

¿Pero realmente cuál es el papel de esa dx en $\int f(x)dx$?

- Es que si dx o dy o dt no está no se puede integrar.
- Por el Teorema Fundamental del Cálculo T.F.C.

¿Son las siguientes notaciones correctas matemáticamente?

$\int Df(x) = f(x)$

$D \int f(x) = f(x)$

$f'(x) = y' = D_x y \; = \frac{dy}{dx} \neq \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ¿Por qué no son iguales?

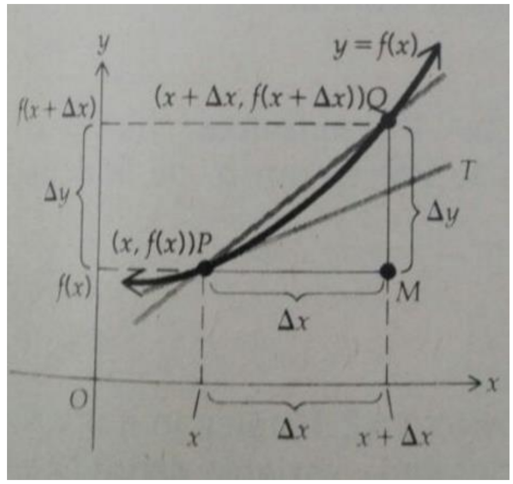
¿Se dice que una función es derivable o diferenciable?

¿Cuándo es derivable?

¿Cuándo es diferenciable?

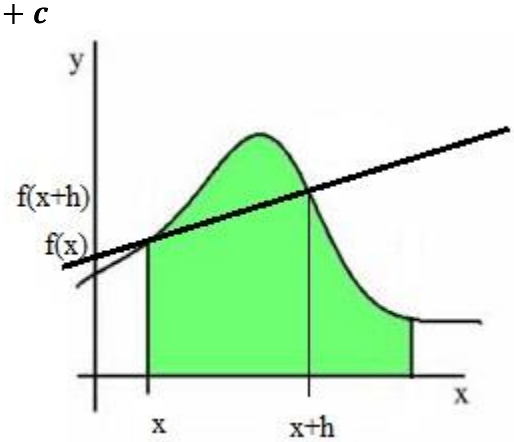
Realmente se llama C. Diferencial, No C. Derivadas

¿Por qué los profes no lo presentan claro?
¿Cuál de las dos: $dx\ o\ \Delta x$ está relacionada con la $dy\ o\ \Delta y$?
$m_{sec} \wedge m_{ran}\ en\ R^2$ qué relación tienen con $dx\ o\ \Delta x$, y con $dy\ o\ \Delta y$?

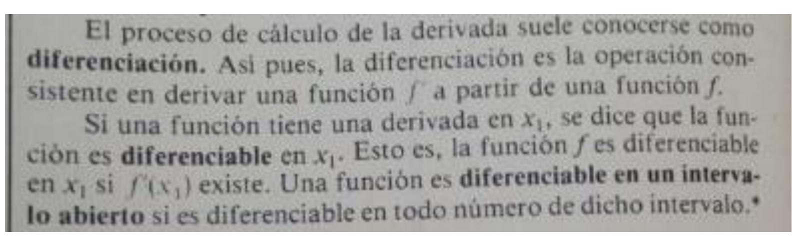


Podemos decir lo siguiente

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{dy}{dx}}$$
$$\boldsymbol{\int f'(x).dx = \int \frac{dy}{dx} dx}$$
$$\boldsymbol{f(x) = y + c}$$



Formalizando algunos conceptos involucrados en lo aquí discutido, cito a continuación algunos extractos del Cálculo de Leithold, con el objetivo de precisar:



El proceso de cálculo de la derivada suele conocerse como **diferenciación.** Así pues, la diferenciación es la operación consistente en derivar una función f' a partir de una función f.

Si una función tiene una derivada en x_1, se dice que la función es **diferenciable** en x_1. Esto es, la función f es diferenciable en x_1 si $f'(x_1)$ existe. Una función es **diferenciable en un intervalo abierto** si es diferenciable en todo número de dicho intervalo.*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (5)$$

donde

$$F'(x) = f(x)$$

y

$$d(F(x)) = f(x)\,dx \qquad (6)$$

Leibniz estableció la convención de expresar la diferencial de una función después del símbolo de antidiferenciación. La ventaja de utilizar la diferencial en esta forma será evidente para el lector cuando calcule antiderivadas cambiando la variable de la sección 4.2. De (5) y (6) podemos escribir

$$\int d(F(x)) = F(x) + C \qquad (7)$$

Esta ecuación se usará para obtener fórmulas para antidiferenciación en las secciones que siguen. La ecuación (7) establece que cuando se antidiferencia la diferencial de una función, se obtiene esa función y además una constante arbitraria. Así, puede considerarse que el símbolo $\int$ para antidiferenciación es la operación inversa de la operación denotada por d para calcular una diferencial.

Si $\{F(x) + C\}$ es el conjunto de todas las funciones cuyas diferenciales son $f(x)dx$, entonces es asimismo el conjunto de todas las funciones cuyas derivadas son $f(x)$. Por lo tanto, la antidiferenciación se considera como la operación de hallar el conjunto de todas las funciones que tienen una derivada determinada.

Como la antidiferenciación es la operación inversa de la diferenciación, los teoremas de antidiferenciación se pueden obtener de los teoremas dados para la diferenciación. Así, los teoremas siguientes se pueden demostrar a partir de los teoremas para la diferenciación correspondientes.

$$\boxed{\int dx = x + C}$$

$$\boxed{\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx}$$

donde a es una constante.

El teorema 4.1.5 establece que para encontrar la antiderivada de una constante por una función se calcula primero una antiderivada de la función y luego se multiplica por la constante.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

El símbolo $\frac{dy}{dx}$ como notación para la derivada lo utilizó primero el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). En el siglo XVII Leibniz y Sir Isaac Newton (1642-1727), trabajando de manera independiente, dieron a conocer casi simultáneamente la derivada. Leibniz probablemente consideró a dx y dy como pequeñas variaciones en las variables x y y, y a la derivada de y con respecto a x, como la razón de dy a dx cuando dy y dx se hacen pequeñas. El concepto de límite, como se conoce hoy día, era desconocido para Leibniz.

En la notación de Lagrange, el valor de la derivada en $x = x_1$ lo indica $f'(x_1)$. Con la notación de Leibniz escribiríamos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$$

Debe recordarse cuando se use $\frac{dy}{dx}$ como notación para representar la derivada de una función, que a dy y dx no se les ha dado significado independiente hasta ahora en el texto, aunque más adelante se definirán por separado. Así que en esta ocasión $\frac{dy}{dx}$ es un símbolo que corresponde a una derivada y no se le debe considerar como razón. En realidad, $\frac{d}{dx}$ puede considerarse como un operador (un símbolo para la operación de calcular la derivada), y cuando se escriba $\frac{dy}{dx}$, esto significa $\frac{d}{dx}(y)$, es decir, la derivada de y con respecto a x.

Entonces, cuando $f'(x)$ existe,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

donde

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{2}$$

A partir de (1) se sigue que, para cualquier $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \qquad \text{o sea,} \qquad \Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

A continuación, se transcriben textualmente las consideraciones del director y codirector acerca de la situación expuesta con el ánimo de no perder tan enriquecedores apuntes.[32]

TABLA 35. VIÑETA

Viñeta
RV: "Desde Bajtín es claro que el uso particular de la palabra en la práctica es su significado. ¿Cuál era este uso? Lo que nos quiere decir Bajtín es que un enunciado está lleno de matices dialógicos, y sin tomarlos en cuenta es imposible comprender hasta el final el estilo del enunciado. Carlos Eduardo tiene una hipótesis sobre esta forma de hablar de la profesora sobre el *dx*, que, si recuerdo bien, está asociada con el procedimiento que se efectúa en el cálculo de la anti derivada. Mi hipótesis es otra. Está asociada con la fórmula de derivación implícita a la cual la profesora podría estar acudiendo. Acepté en su momento que la hipótesis de Carlos Eduardo me gustaba más. Sin embargo, sería bueno ir más profundamente en el asunto y por qué no indagar directamente con la misma profesora. Voloshinov sostiene que el lenguaje es *interacción verbal* en tanto que no sólo se toma en su dimensión cognitiva-racional, sino ante todo como un fenómeno de alteridad, lo cual sugiere que en dicho fenómeno puede estar ocurriendo una práctica de hablar de la profesora, tal vez heredada, que recurre a ciertas elocuciones y que, según ella, le van a permitir lograr que los estudiantes le entiendan." CEV: "Otra hipótesis es que, si la profesora está segura de que la integración indefinida es un reversazo de la derivación, el operador de integración indefinida o anti derivada $\int(\_)$ debe anular el operador de diferenciación $D(-)\ o\ (-)$': $\int(D(f(x)) \cdot dx) = \int(f'(x) \cdot dx) = f(x)$ o cualquier otra función $f(x) + c$ que tenga la misma derivada $f'(x)$ Tendría pues razón en pedirle a los estudiantes hacer explícito el "dx" en $f'(x) \cdot dx$ para reversar la integración que ella ve como "$\int(f'(x) \cdot dx)$", aunque otros matemáticos vean el operador de anti derivada o integral indefinida como si tuviera el símbolo despegado en dos partes con una ventanita en la mitad: $\int(-) \cdot dx$, que aplicado a $f'(x)$ daría $\int[f'(x)] \cdot dx$ Pero mi siguiente jugada de esgrima verbal sería decirle a la profesora que de todas maneras incurre en un desliz de notación y en otro de interpretación de la derivada y la diferencial, pues si usara la notación de Leibnitz, vería que para él la derivada es la razón entre dos diferenciales: $D(f(x)) = df(x)/dx, luego\ D(f(x)) \cdot dx = (df(x)/dx) \cdot dx = df(x)$ (Ya sin "dx"!).

[32] Conversación privada de Rodolfo Vergel y Carlos Eduardo Vasco realizada el 4 de abril de 2017 en Bogotá, Colombia.

Ahora, siguiendo a Leibnitz, el operador de integración indefinida $\int(-)$ sí es un reversazo de la diferenciación $d(-)$, pero no de la derivación $D(-)$! $\int((D(f(x))\cdot dx) = \int df(x)$ y la integral $\int$de la diferencial $df(x)$ sí corresponde a $f(x)$, *módulo* su clase de equivalencia de funciones equidiferenciales: $$\int df = [f]$$ En donde no hace falta la x, pues la clase de equivalencia o clase equidiferencial de f, $[f]$ es lo que llamamos muy mal notado "$f(x)+c$", con una lectura más mala todavía: "en donde c es una constante arbitraria". Mi siguiente jugada de esgrima verbal sería: "¡Si c es arbitraria, no es constante sino variable!".

Ambientación a la entrevista:

A continuación, se transcribe la entrevista que se realizó a la profesora con el objetivo de contrastar las hipótesis realizadas acerca del uso del $d\,x$, y tener de primera mano sus concepciones acerca de esa práctica, de esa forma de notación, como también acerca del significado que le otorga a ese $d\,x$; de paso decantar sus concepciones sobre derivadas y diferenciales, todo ello con el ánimo de precisar un análisis riguroso de acuerdo con nuestro marco teórico y metodológico. [33]

Antes de empezar a grabar ya habíamos conversado acerca del interés de comprender su notación, concretamente ese dx que coloca al lado de la derivada de todas las funciones en el episodio 12 y se logró que permitiera grabar sus ideas al respecto.

TABLA 36. ENTREVISTA

Entrevista
I: "Al escribir al lado de la derivada ese dx, en qué estás haciendo el énfasis y qué pretendes en los estudiantes? Explícame lo que me quieres decir." **P**: "Cuando nosotros abordamos el concepto derivada en algunas funciones particulares como las funciones trascendentes, noto que mis estudiantes le prestan demasiada importancia a la representación simbólica y no al concepto que queremos tener en una representación simbólica. Frente a representación simbólica me refiero a una ecuación. Si yo tengo que la derivada del seno es el coseno como parece en muchos libros de cálculo, ven una fórmula y la repiten de memoria. Lo importante es ver que la derivada del seno no es el coseno, sino que la derivada del seno y tú vas de encontrar después de eso muchas funciones, que la derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función y no revisar la derivada, repasando, repitiendo una fórmula, sino entender que nuestros sistemas de

[33] Entrevista personal de la investigadora (I) con la profesora (P) realizada el 28 de abril de 2017 en Bogotá, Colombia.

representación simbólicos lo que nos permiten es representar, en una ecuación un concepto.”

I: “Pero lo que me dijiste, ¿el énfasis que le das al poner dx es para que ellos caigan en cuenta que les falta la derivada de la función?”

P: “A que me refiero cuando y esto pasa en todo a la derivada de las funciones trascendentes, en todas, sea la exponencial, la logarítmica, bueno la exponencial, la trigonométrica, la hiperbólica con sus respectivas inversas, en todas siempre tienes que revisar y hacer énfasis con ellos que aunque está la fórmula siempre lo que está derivando al final tienes que hacer la derivada de la función, que tú no estás de derivando un x, que la derivada del $sen(x)$ no es el $cos(x)$, qué ese x lo que nos está interpretando en la fórmula es una función entonces que al final tengo que derivar dicha función.”

I: “¿Tú crees que nuestros compañeros, los otros colegas de matemáticas tienen en cuenta este pedacito que digamos es una práctica, una escritura que compartimos los profesores de matemáticas de la facultad por ejemplo o donde tú trabajas?”

P: “Yo la verdad considero que yo en una universidad en la que trabajo en particular tengo desde hace muchos años un curso de repitentes y yo veo siempre la misma reitero siempre lo mismo en los estudiantes, ellos memorizan una fórmula y no esto, muchas fórmulas en otros conceptos no sólo derivada, de integrales de eso, sino solamente memorizan los símbolos de la fórmula, las letras, pero no el concepto inmerso que tiene una formula. Entonces independientemente que sea con derivada pasa lo mismo con la longitud de curva, con el volumen de un sólido, con hallar el área entre curvas, ellos repasan, repiten la fórmula de memoria, pero no hemos entendido, no se ha hecho el trabajo de que esa representación simbólica es una ecuación, una fórmula, pero eso lo necesitamos para representar el lenguaje matemático, pero más allá de la fórmula está el concepto inmerso en ella y es lo que nos hace falta reforzar en eso. Repiten la fórmula nada más pero no entienden verdaderamente el concepto derivada y menos en funciones trascendentes.”

I: “¿Ósea que ese dx es para llamar su atención y decir no se les olvide?”

P: “Más que no se les olvide es que no siempre les van a colocar en el seno derivar el $sen(x)$ sino ese dx lo que les van a colocar ahí es cualquier función.”

Audio

Algunos elementos de análisis: Claramente el uso y el énfasis que la profesora pone en ese dx, significa la derivada de la función pues *“no siempre tienen que derivar* $senx$" , sino que ese x puede ser una función cualquiera. Entonces más que una forma de que se acuerden de poner la derivada de la función es para que puedan reemplazar ese dx por la derivada de la función. No utiliza la expresión “derivada interna”. Llama la atención también que para ella eso es correcto, no tiene ningún problema acerca de distinguir derivada de diferencial.

TABLA 37. ANALISIS EPISODIO 12 - SEGMENTO

<table>
<tr><th>Ep12 Seg4</th></tr>
<tr><td>
Ahora el segundo: Alejo pasa y copia el ejercicio

$$\textbf{Ejercicio 3}: f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$$

$f(x) = \ln(x-2)^3 - \ln\sqrt{2x-1}$
$f(x) = 3\ln(x-2) - \frac{1}{2}\ln(2x-1)$

P: Ahí ya puedes derivar y ¿hay alguna otra propiedad? Ella misma se responde

$$f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$$
$$f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$$
$$f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$$
$$f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$$

P: Por el otro lado seria largo y difícil: derivada de ln derivada de raíz derivada de cociente y después dicen que los parciales son difíciles y largos.

E: ¿Desde el comienzo habría podido ser

$$f(x) = \frac{\ln(x-2)^3}{\ln\sqrt{2x-1}}$$

P: ¡No! Esas son las propiedades que ustedes se inventan. Si también tratan de hacerlo con el producto.
</td></tr>
<tr><td>
El análisis de este fragmento se centra en la pregunta del estudiante que consiste en aplicar “mal” las propiedades de los logaritmos y sobre todo por la respuesta de la profesora, que no constituye en sí una respuesta pues no explica porque no se puede aplicar “esa propiedad”, ni profundiza en las razones por las cuales el estudiante está convencido de que es correcta y esto abreviaría los cálculos sino que emite una frase irónica: *“¡No! Esas son las propiedades que ustedes se inventan. Si también tratan de hacerlo con el producto*”. Es decir, los potenciales conflictos que podemos inferir en esta situación no dan lugar a una gestión inadecuada por parte de la profesora que logre transcenderlo.
</td></tr>
</table>

5.3 Descripción de la Práctica

Esta sección constituye el complemento a la sección 3.6 del Marco Teórico en la que se esbozaron rasgos generales descriptores de las PEUC. En este apartado se presentan los enunciados de lo más relevante al interior de las PEUC en una secuencia de 16 clases en diferentes semestres con la misma profesora.

De las matrices documentales y categoriales es posible concluir que las clases son magistrales, en las que la profesora define, explica, justifica, evalúa, institucionaliza, responde, desarrolla, realiza, y tiene bajo su dominio la mayoría de actividades que soportan el curso de Cálculo Diferencial.

Los estudiantes toman apuntes, atienden, preguntan poco, intervienen poco, pasan al tablero solo uno o dos en algunas clases, de un curso de 25 a 30 estudiantes. No se les asigna trabajo en grupo en el salón, tampoco se les da espacio para desarrollar talleres de ejercicios, ni para interactuar libremente hablando entre ellos alrededor del desarrollo de algún tema.

En cuanto a la gestión de las preguntas y a la atención que se da a ellas, aproximadamente en 15 ocasiones (segmentos) donde estudiantes le preguntan a la profesora, se observó que, o no se responden, o se responden con sarcasmos, con ironías que no profundizan en el trasfondo de la pregunta para decantar las posibles dificultades o eventuales conflictos que tiene el estudiante, ni tampoco se aprovechan para ampliar un tema o para hacer caer en cuenta en algo sumamente importante, o para que ellos tomen conciencia, objetiven algún proceso u objeto matemático, o alguna práctica que se considere fundamental. En ese sentido no se gestionan las dudas, las dificultades no se tienen en cuenta, muchos menos se interesa o cuestiona acerca de posibles obstáculos que puedan estar ocasionando tales dudas o que puedan estar generando potenciales obstáculos por dejar así las preguntas.

Otro aspecto muy llamativo es el hecho de dejar a medias algunos ejercicios, aproximadamente en 22 ocasiones (segmentos) en total de los 16 episodios de clase, por ejemplo, en los segmentos 6 y 7 del episodio 4 con frases como "termínenlo", o por ejemplo, en los segmentos 6 y 11 del episodio 12 enunciando frases que parecen estar guiando el proceso que falta: simplifiquen, evalúen y ya" pero que potencialmente son generadores de obstáculos que están emergiendo para futuros cursos, como el método de la derivación implícita, asemejando un proceso de derivadas parciales, o el de separar las variables como en ecuaciones diferenciales para hallar la derivada de logaritmo natural, momentos que no causan conflicto ni a los estudiantes, ni a la profesora, pero sí al observador o investigador. No se les moviliza a inquirirse a sí mismos y cuando alguno se da cuenta de algo tan importante como que falta el dx, la profesora lo pasa por alto.

Con base en la clasificación de conflictos del EOS (sección 3.1): "…conflictos semióticos potenciales entre los cuales destacan, por su relevancia, aquellos que origina un libro de texto al dejar a cargo del alumno la realización de determinadas funciones semióticas que son básicas para la correcta interpretación del texto y que, de no producirse, pueden ocasionar una disparidad entre el significado personal global del alumno y el significado institucional pretendido", es claro que esta categoría es la que aparece cada vez que la profesora deja sin terminar un ejercicio, o dice termínenlo, o me confundí, factoricen y evalúen y ya. Frases como esa, son indicadores claros de este conflicto semiótico con esta explicación.

Acerca de la interacción, esta se limita a uno o dos estudiantes con los que la docente cuenta para que realicen algún ejercicio, dicten una definición, evalúen un límite, respondan alguna pregunta, traigan el portátil para proyectar alguna gráfica en los televisores, entre otras. Se enuncian a continuación los dos episodios fundamentales y los segmentos de estos, en los que se ha documentado y soportado lo anteriormente descrito:

De forma general se encontró que en el Episodio 4 hay un poco más de interacción, en el sentido que ella al menos pregunta a su estudiante: Alejo y pasa algún otro estudiante al tablero. El Episodio 12 consta puramente de explicaciones formales de su parte donde corta la dialéctica y también corta la acción.

Ep4 – Sg. 2/6: La profesora hace todo, tiende a tomarse la totalidad de la clase. Ella formula, pero ella misma responde. No permite que el estudiante responda. Trabaja con un estudiante que generalmente es el mismo: Alejo. Algo visto como una especie de segregación, pues solo tiene en cuenta a uno de todos los estudiantes, solo le presta atención a uno de ellos.

Ep4 – Sg. 2/5/7/10/11: La profesora tiende a usar frases sarcásticas, irónicas, agresivas en cierto modo, lo cual revela una actitud de burla o peyorativa de parte de ella: *"No se hagan los que están pensando*", *"Cuántas neuronas perdimos",* "*En esta toca pensar*…".

Ep4 – Sg. 1/3/6: Con base en las experiencias recolectadas de la observación y documentación de las clases de la profesora (por ejemplo, cuando dice "esas son las propiedades que ustedes se inventan" o no resuelven un ejercicio como debe ser) y en los resultados obtenidos en las evaluaciones y parciales [Ver Anexos] se puede inferir que los estudiantes vienen con muy pocas y deficientes bases algebraicas.

Ep4 – Sg. 8: En particular, por lo observado en todos los episodios de clase, a la profesora le cuesta dejar trabajar, dejar hacer, dejar equivocarse, dejar rectificar, dejar preguntar, dejarlos trabajar a ellos, rápidamente interviene, rápidamente es ella quien empieza a hacer "lo correcto", es como si sintiera que la clase se termina y no se alcanzó a hacer nada de lo esperado, es decir, dejarlos construir su propio conocimiento lo considera "no hacer nada" y le preocupa que el tiempo de la clase se haya perdido. No se fomenta la práctica de construir saber, de compartir procesos, de contrastar, de poner en común, de argumentar, de defender procedimientos, argumentos y resultados.

Ep4 – 8/9: Hay una constante tendencia de la profesora de cambiar las prácticas y de paso la intencionalidad de la clase, es decir, no es consecuente lo que dice con lo que hace, se puede inferir que es un comportamiento arraigado en su ser docente.

Ep4 – 11: Borra muy rápido. No da el tiempo suficiente para que el estudiante tome notas, ponga atención, piense

Ep12 – 2/6: Sigue en una dinámica de preguntar y responder ella misma.

Ep12 – 4: Al hacer la resta de fracciones no se toma la molestia de explicar, y ellos seguramente tienen dudas, "pero eso es álgebra, no me puedo devolver tanto, hasta el colegio ni más faltaba, esa parte es de ustedes". Reconocimiento del algebra como pre-requisito del cálculo, como fundamento de él, como base sin la cual es imposible avanzar ni entender, y por otro lado la mirada peyorativa a que el álgebra se da por vista, por asimilada por el estudiante, tanto que no se puede rebajar a explicar algebra, "ni más faltaba", no me puedo devolver tanto".

5.4 Resultados

En cuanto a la categoría de Lenguajes en las matrices categoriales, al tratar de distinguir los objetos que se podrían clasificar dentro de los Lenguajes y los que no lo son, se encontraron frecuentes dificultades. Por ejemplo, las definiciones que se presentan por parte de la profesora o en los libros de texto son también Proposiciones, claramente identificables y ostensibles, pero también podrían ser clasificadas como Conceptos, pero serían no ostensibles.

Las Proposiciones y las Argumentaciones son Lenguajes, pero habría que caracterizarlas en sus propias categorías que se distinguen entre sí porque toda argumentación tiene una o más proposiciones, pero ambas volverían a aparecer en Lenguajes.

Para evitar estas dobles clasificaciones, tanto Proposiciones como Argumentaciones podrían ser reubicadas como subcategorías de los Lenguajes, que sería una macro-categoría con situaciones, procesos y objetos.

Las Proposiciones podrían tener a su vez una sub-categoría que fueran las Definiciones cuando se toman como formulaciones lingüísticas, no como procesos mentales. Pero cuando en una argumentación se usa una definición sin repetirla, se puede clasificar como Concepto, y por lo tanto sería no ostensible.

Pero Proposiciones y Argumentaciones como subcategorías no agotan los objetos que pueden aparecer en la macro-categoría Lenguajes. Podrían agregarse subcategorías como expresiones semióticas no articuladas (como los gestos), y en las articuladas se podrían distinguir subcategorías como términos, operadores y predicados; luego vendrían las Proposiciones y las demás Expansiones Discursivas, entre ellas las Argumentaciones, las Narraciones y las Instrucciones.

A continuación se presentan Dificultades, Conflictos y algunos Obstáculos inferidos de los episodios fundamentales 4 y 12, con las respectivas viñetas seleccionadas, dispuestos estos resultados en forma de tabla.

<table>
<tr><td colspan="4">Cuando una estudiante pasa al tablero ella le va corrigiendo escritura como el igual, los paréntesis, entre otros.
La estudiante desarrolla el ejercicio preguntándole a un compañero, porque se siente insegura.
Como la respuesta que obtiene va con raíz la profesora le pide que racionalice la expresión $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ pero a su vez le va diciendo todo el ejercicio.</td></tr>
<tr><td></td><td>Dificultades</td><td>Conflictos</td><td>Obstáculos Inferidos</td></tr>
</table>

Ep. 4 Seg. 2	Dificultad entre estudiantes y profesor: Desarrollar el límite, factorizar, multiplicar por la conjugada y Racionalizar la expresión, $\frac{1}{2\sqrt{3}}$, Dificultad de la profesora consigo misma: dar tiempo para que los estudiantes empiecen a trabajar o a ver que no saben por dónde empezar, o darse cuenta en dónde tienen problemas.		En esta situación se pone de manifiesto que a la profesora le cuesta mucho dejarlos trabajar, equivocarse, si se demoran se impacienta y empieza a hacer ella misma el ejercicio. Ella formula las preguntas y ella misma las responde. Este comportamiento genera una presión en los estudiantes y no permite que se desempeñen correctamente. Tampoco deja ver si se da una real comprensión del procedimiento generando dificultades en ejercicios parecidos, conflictos también pues se puede presentar una disparidad de significados cuando se hable de racionalización y posibles obstáculos porque más adelante se van cohibir de preguntar y a guardar sus dudas.

Propone un ejercicio: $$\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{x-3}$$ Al pedir que lo resuelvan no lo hacen como ella espera, sino que en primer lugar lo desarrollan racionalizando el numerador: $$\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{x-3}*\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}$$ $$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}$$ $$\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Luego lo hacen usando viendo el denominador como un caso de diferencia de cuadrados, es decir, usando factorización.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Por último pasa un estudiante y le solicita explícitamente que lo desarrolle usando la "fórmula del límite especial" que anoto en el tablero.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

Con dudas el estudiante aplica el "limite especial".

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{x-3}=\frac{1}{2}*3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

	Dificultades	Conflictos	Obstáculos Inferidos
Ep. 4 Seg. 2	Hay una dificultad en ver la raíz cuadrada como diferencia de potencias iguales. Y un obstáculo no semiótico sino generado por la semiótica. Hay dificultad entre los estudiantes y la docente pues ellos no ven que se pueda aplicar la fórmula a este límite	Conflicto pues hay disparidad de significados: para los estudiantes el n de la fórmula es entero positivo, por tanto la potencia fraccionaria no se ajusta al caso. Hay un desajuste de significados, realmente hay un conflicto semiótico epistémico y cognitivo.	Es de resaltar que los estudiantes resolvieron el límite, e incluso de dos formas: racionalizando que fue en lo que primero pensaron, multiplicaron por la conjugada del numerador arriba y abajo, simplificaron, evaluaron el límite. Y en segundo lugar factorizando como diferencia de cuadrados el denominador, no fue nada fácil verlo de esta forma, aunque no fue tan rápido, pues se espera que las raíces cuadradas sean exactas y no que se dejen indicadas. La dificultad radica en que ellos no pueden ver esta expresión como un caso de "límite especial" que la profesora enuncia, y el que ella espera que apliquen. La dificultad aquí no es algebraica - operativa sino como "institucional" en tanto hay desajuste de significados.

<table>
<tr><td colspan="4">Cuando la profesora escribe de manera más formal los limites en el tablero comete un error, pues pone un 3 en el límite en vez de a:
$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$$
$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$
$$\sqrt{3} = 3^{1/2}$$
En un momento de la clase cuando le pregunte en privado, porque los llamaba así, me dice que porque así se los enseñaron cuando vio calculo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ep. 4
Seg. 3</td><td>Dificultades</td><td>Conflictos</td><td>Obstáculos Inferidos</td></tr>
<tr><td></td><td>Se presenta una imprecisión en la escritura del límite pues escribe 3 en vez a cuando lo está enunciando en forma general lo que también contribuye a confundir aún más la aplicación de ese “limite especial”.</td><td>Este “limite especial” que llama la profesora no es más que la aplicación de la regla de L’Hopital pues el límite está en la forma 0/0 lo que permite derivar arriba y abajo por separado y llegar al resultado que se presente.

Este argumento: “…así me lo enseñaron” demuestra que las prácticas de enseñanzas malas o buenas se adquieren y se mantienen por imitación a lo largo de la formación académica.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">Yo voy a demostrarles el primero y el otro lo hacen ustedes y está en todos los libros.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ep. 4
Seg. 4</td><td>Dificultades</td><td>Conflictos</td><td>Obstáculos Inferidos</td></tr>
<tr><td></td><td>Es un conflicto epistémico ya que disparidad de significados del termino demostración.</td><td>La profesora es imprecisa en el lenguaje puesto que dicen va a demostrar uno y realmente lo que hace es</td></tr>
</table>

			desarrollar el tercero. Usa el termino demostrar cuando en realidad lo que hace es desarrollar el ejercicio algebraicamente a lo cual no se le puede llamar en matemáticas demostración,

<table>
<tr><td colspan="4">La profesora le pide a Alejo que resuelva
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}$$
Multiplica por la conjugada de numerador, aplica la identidad fundamental, separa el límite y Alejo evalúa. A pesar de que afirma que ellos lo hagan de tarea, no espera ni 10 segundos y se pone a realizarlo y al final dice “termínenlo”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ep. 4
Seg. 6</td><td>Dificultades</td><td>Conflictos</td><td>Obstáculos Inferidos</td></tr>
<tr><td>genera una dificultad al no permitir que los estudiantes resuelvan el ejercicio para ver las dudas y posibles conflictos que tengan
Dificultad porque la docente no completa ciertos ejercicios o cortaba el proceso, lo que no permite su completa comprensión.</td><td>Termínenlo. Dejar inconcluso algún ejercicio es potencialmente generador de conflictos,</td><td>Hay una baja interacción.
La profesora pregunta, formula, responde, escribe, evalúa, institucionaliza; es ella quien lo hace todo, lo cual se asocia con un nivel bajo en la faceta interaccional y.

Dejar inconcluso algún ejercicio es potencialmente generador de conflictos, pues no se sabe si lo terminen bien, o si realmente lo termine, y entonces queda en su cognición y en sus prácticas a medio hacer, con vacíos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>La profesora plantea un ejercicio que considera “interesante”.
$$\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">Les pregunta a algunos estudiantes partes del proceso, pero no espera la respuesta y lo desarrolla a su manera.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ep. 4
Seg. 7</td><td>Dificultades</td><td>Conflictos</td><td>Obstáculos Inferidos</td></tr>
<tr><td>Dificultad al aplicar identidades trigonométricas
Dificultad entre los estudiantes en los procedimientos algebraicos

Dificultad en el desarrollo del límite pues no señala claramente cómo se habría podido obtener ese sen^3 del que habla.</td><td>En un momento del desarrollo del ejercicio dice "me perdí" y pide que lo terminen.
Pierde o cambia la intención de trabajo en grupo. Lo anuncia y luego lo cambia.
Por ultimo también afirma que desde el comienzo se podía obtener un sen^3 a partir del ejercicio anterior.</td><td>Considera interesante el ejercicio porque involucra varias identidades trigonométricas y procesos algebraicos, temas en lo que sabe que los estudiantes presentan dificultades.
Es la profesora quien nuevamente desarrolla el ejercicio quitando la posibilidad de participación de algún estudiante a pesar de que les formula pero son retoricas y no tiene en cuenta.
El hecho de decir "me perdí, termínenlo" es generador de dificultades, conflictos y de obstáculos pues deja a medio hacer un ejercicio que potencialmente presenta vacíos, falencias, incertidumbre y más si no hay la retroalimentación respectiva.
Respecto al trabajo en grupo cambia las prácticas que quisiera hacer, por supuesto también la intencionalidad.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">La profesora expresa la derivada de $Y = \ln x$ como $y' = \frac{1}{x}dx$,

Y también las dos derivadas siguientes:

$$Y = e^x \rightarrow y' = e^x\,dx$$
$$Y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a\ dx$$</td></tr>
<tr><td></td><td>Dificultades</td><td>Conflictos</td><td>Obstáculos Inferidos</td></tr>
</table>

Ep. 12 Seg. 1		El uso de ese dx al lado derecho es un error desde el punto de vista matemático, epistémico e institucional. Desde el punto de vista del análisis Constituye un conflicto epistémico y cognitivo de la profesora, sin embargo ese conflicto no es público ni observable. Es un indicador de un conflicto epistémico-cognitivo de la profesora.	Puesto que dx representa una diferencial y no una derivada. Además la derivada es una razón de dos diferenciales: $y' = \frac{dy}{dx}$ es decir, la derivada ya contiene la expresión dx, luego no se explica como ese dx aparece multiplicando al otro lado de la ecuación. Se podría atribuir esta conducta tan particular de dos formas: Que ella está pensando como en variables separables cuando se intenta resolver una ecuación diferencial, o que el dx juegue el papel que juega en la integral indefinida. Ella tiene su propia forma de institucionalizar, tiene su propia concepción de las derivadas con el fin de que los estudiantes se acuerden de las formulas.

La profesora escribe en el tablero: "Hallar la derivada de las siguientes ecuaciones" (subraya ecuaciones).			
	Dificultades	Conflictos	Obstáculos Inferidos
Ep. 12 Seg. 2		Conflicto semiótico	Esto es una imprecisión en el lenguaje pues no se halla la derivada de ecuaciones sino de funciones, claro generador de conflictos y obstáculos pues queda una noción inconsistente de lo que es la derivada y sobre que actúa.

La profesora pide derivar la siguiente función:

<table>
<tr><td colspan="4">

$$f(x) = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{3x}{x+2}\right)}$$

Y convierte la raíz cubica en potencia (1/3)

$$f(x) \ = \ln \left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ep. 12
Seg. 3</td><td>Dificultades</td><td>Conflictos</td><td>Obstáculos Inferidos</td></tr>
<tr><td>Dificultad en expresar las raíces cúbica en forma de potencia
Dificultad para apreciar y entender la conveniencia de escribir las raíces en forma de potencia</td><td></td><td>No explica ni ve la necesidad de aclarar por qué la potencia queda elevada a la 1/3, es decir, convierte la raíz cubica en potencia sin tener en cuenta si es claro para todos los estudiantes. Y tampoco argumenta la razón por la cual conviene más esa representación semiótica, que es justamente para aplicar propiedades de logaritmos antes de derivar.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">

Al terminar de resolver la derivada de la función:

$$f(x) \ = \ln \left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$$

Aplicando propiedades de los logaritmos, un estudiante le pregunta si desde el comienzo habría podido ser

$$\frac{\ln(x-2)^3}{\ln\sqrt{2x-1}}$$

A lo que la profesora responde: “¡No! Esas son las propiedades que ustedes se inventan… Si también tratan de hacerlo con el producto”

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ep. 12
Seg. 4</td><td>Dificultades</td><td>Conflictos</td><td>Obstáculos Inferidos</td></tr>
<tr><td>Dificultad al entender y aplicar las propiedades de los logaritmos, en particular el logaritmo de un cociente

Dificultad al recibir la respuesta a la pregunta</td><td>Discordancia entre lo que los estudiantes creen que debería ser el logaritmo de un cociente y lo que matemáticamente es correcto.</td><td>La pregunta del estudiante tiene mucho sentido porque parecería natural que el logaritmo de un cociente sea el cociente de los logaritmos, pero no es así y no se explica el por qué. Esta sobre generalización de patrones de linealidad constituye un</td></tr>
</table>

	formulada en forma de ironía o sarcasmo		obstáculo que se mantiene porque no se profundiza la respuesta, no se hace una reflexión ni epistémica ni didáctica sobre hechos como este, lo que mantiene y perpetúa este tipo de creencias en los estudiantes.
Aquí claramente se ve un inadecuado manejo y gestión de las preguntas formuladas por los estudiantes, las escasas ocasiones en que se atreven a preguntar. Una inadecuada manera de responder pues solo se señala que son invenciones, pero ni siquiera se contrasta con la propiedad matemáticamente correcta, ni se profundiza un poco para decantar las posibles dudas, creencias, misconcepciones que puedan estar provocando tal forma de pensar y proceder.			

En el desarrollo el siguiente ejercicio:

$$f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$$
$$f(x) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln(1-x))$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x-1}\right)$$

Al sacar la derivada interna que es -1, en vez de multiplicar por -1 lo escribieron como una resta.

	Dificultades	Conflictos	Obstáculos Inferidos
Ep. 12 Seg. 5			Hay una imprecisión de tipo algebraica que se pasa por alto y es que al sacar la derivada de $\ln(1-x)$ que es $\frac{1}{1-x}$ por la derivada interna que es (-1), ese -1 lo dejan restando en vez de indicarlo como un producto, error que se comete como mucha frecuencia.

En el siguiente ejercicio:

$$f(x) = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x - 1)$$

Al derivarlo queda

$$f'(x) = \frac{1}{(e^x + 1)} * e^x - \frac{1}{(e^x - 1)} * e^x$$

"1 sobre la función por la derivada de la función". Ella decide borrar los 1 para que quede presentado de la siguiente manera:

<table>
<tr><td colspan="4">$$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)} - \frac{e^x}{(e^x\ -1)}$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ep. 12
Seg. 6</td><td>Dificultades</td><td>Conflictos</td><td>Obstáculos Inferidos</td></tr>
<tr><td>Dificultad en entender cundo ya han desaparecido los 1 de los numeradores, porque se borra un paso en el tratamiento algebraico</td><td></td><td>Ella le borra los 1 (unos) del numerador, pero no se toma la molestia de explicar por qué lo hace, por qué es mejor no dejarlos, sencillamente los borra y no hace ver la conveniencia de expresar la derivada sin los unos en el numerador.
Es ella quien ejecuta la acción, no deja que el estudiante lo haga para tomar conciencia de este paso.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">Al obtener la derivada de
$$f(x) = \ln(e^x+1) - \ln(e^x - 1)$$
Que es
$$f'(x)\ = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$$
Ella afirma que el denominador es una diferencia de cuadrados y lo evalúa en 0.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ep. 12
Seg. 6</td><td>Dificultades</td><td>Conflictos</td><td>Obstáculos Inferidos</td></tr>
<tr><td>Dificultad en identificar la diferencia de cuadrados del denominador. Es decir, de interpretar e^{2x} como el cuadrado de una expresión, o sea de e^x
Dificultad al evaluar el límite en el punto dado con la función exponencial</td><td></td><td>En la expresión $\frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$ en el denominador no es evidente la diferencia de cuadrados, esta como encriptada en la escritura, bastaría reescribir para que lo vean claramente:
$$e^{2x} = (e^x)^2$$
Se evidencio un obstáculo pues muchos estudiantes se quedaron pensando en donde estaba la diferencia de cuadrados, y se pasó por alto, ni siquiera creo conflicto.

Ella recurre a teoremas que para ellos tal vez no sean muy claros. Respecto a este mismo punto, ella dicta la evaluación</td></tr>
</table>

			del límite en 0, pero ellos se quedan como pensando.

Al definir las funciones trigonométricas sobre triángulos rectángulos ella usa la expresión "triángulos rectos" es varias ocasiones.			
Ep. 12 Seg. 6	Dificultades	Conflictos	Obstáculos Inferidos
		Esto constituye un conflicto epistémico y semiótico. Conflicto semiótico al llamar a las cosas con nombres incorrectos.	Dice varias veces: triángulos rectos, este nombre es matemáticamente incorrecto pues el calificativo recto se aplica a los ángulos y no a los triángulos; a estos últimos se les aplica el adjetivo rectángulos. Esta es otra expresión no epistémica que puede confundir o por lo menos no expresar lo que entienden por triángulos rectángulos que son aquellos que tienen un ángulo recto.

En el título del segmento anuncia que se van a estudiar las derivadas de las funciones trascendentes y desarrolla únicamente las de las funciones trigonométricas.			
Ep. 12 Seg. 11	Dificultades	Conflictos	Obstáculos Inferidos
			Las funciones trascendentes comprenden las funciones trigonométricas, las trigonométricas inversas, las logarítmicas, las exponenciales y las hiperbólicas. Y solo presento las derivadas trigonométricas lo que genera una falsa concepciones en los estudiantes de que las trascendentes son solo esas. Tampoco hubo una explicación de porqué se llaman trascendentes.

Se vuelve a repetir ese uso particular del dx al hablar de las derivadas trigonométricas, tales como:

$$Si\ y\ =\ sen\ x\ \rightarrow y'\ = (cosx)\ dx$$

$$Si\ y\ =\ cosx\ \rightarrow y'\ = (-senx)dx$$

$$Si\ y\ =\ tgx\ \rightarrow y'\ =\ (sec^2x)\ dx$$

$$Si\ y\ =\ ctgx\ \rightarrow y'\ =\ (-csc^2x)\ dx$$

$$Si\ y\ =\ secx\ \rightarrow y' = (secx)(tgx)dx$$

$$Si\ y\ =\ cscx\ \rightarrow y' = (-cscx)(ctgx)dx$$

	Dificultades	Conflictos	Obstáculos Inferidos
Ep. 12 Seg. 7,11	Dificultad de la docente consigo misma al utilizar una expresión no adecuada para significar la derivada de la función	Conflicto semiótico epistémico y cognitivo: desajuste de significados institucional-personal en el docente	Esto constituye un conflicto semiótico-epistémico y cognitivo desde el punto de vista del docente. Epistémico porque hay una disparidad entre lo institucional matemático y lo que ella ha apropiado como la derivada de una función; y cognitivo porque esta disparidad o discordancia de significados a pesar de darse un sujeto epistémico como el docente marca la forma como ella se ha apropiado de este saber cognitivo.

Cuando Alejo le pregunta en donde está el dx en la demostración de:

$$f(x)\ =\ sen\ x\ \rightarrow f'(x)\ = (cosx)\ dx$$

Cuyo resultado de la demostración fue:

$$f'(x) = \cos x$$

La profesora no responde.

	Dificultades	Conflictos	Obstáculos Inferidos
Ep. 12 Seg. 12			Este segmento es sumamente importante pues un estudiante muy agudamente se da cuenta que en la demostración al final por ninguna parte se ha obtenido el dx. Esto ha debido tocar a la profesora, hacerla reflexionar pues debería crear en ella un conflicto; si se profundizara en esa pregunta del estudiante quizá se hubiera podido llegar a la conclusión que efectivamente esa forma de escribir las derivadas con ese dx al final no es matemáticamente correcta. Pero a cambio de toda esta potencialidad, no hubo respuesta por parte de la profesora y se pasó a otro tema, se dio por terminada la clase.

VI: CONCLUSIONES, LIMITACIONES, RECOMENDACIONES E IMPACTOS ESPERADOS

Conclusiones de la indagación teórica: (para el objetivo 1)

1) Inicialmente se partió de una reflexión amplia sobre las culturas, las ciencias, los conocimientos, los saberes y las opiniones, en la que se llamó la atención sobre el hecho de que en una concepción amplia de opinión, de saber, de conocimiento, de ciencia y de cultura no es posible concebir los unos sin los otros, y se hizo explícito que la epistemología subyace a todos esos conceptos, en tanto forma de aproximarnos al conocimiento científico, razonado, sustentado, fundamentado, y no al de la mera opinión, primer obstáculo que hay que superar, según diría Bachelard.
2) De esa reflexión se derivó una primera conclusión. Los obstáculos epistemológicos son obstáculos para un cambio en la manera de construir conocimiento y de aprender; no son solamente obstáculos para una correcta o incorrecta comprensión; es decir, obstaculizan la comprensión en sí misma. El rastreo teórico nos ayudó a separar las *dificultades* de aprendizaje y los *conflictos* semióticos, que se observan en la interacción

entre maestros y estudiantes, de los *obstáculos* subyacentes que no son ostensibles ni directamente observables, sino que solo podemos inferirlos a partir de los datos por medio de las herramientas teóricas de que disponemos porque han sido ya trabajados en varias teorías de la Didáctica de las Matemáticas: en el EOS, en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, en la teoría de Pensamiento Avanzado de Tall, en el Enfoque Noéetico-Semiótico de Duval, en el Enfoque Semiótico-Cultural de Radford y en otras teorías sobre el aprendizaje, tanto respecto a los procesos cognitivos personales de los estudiantes como respecto a la intermediación lingüística (que consideramos solo parte de las distintas interacciones semióticas en distintos registros). En síntesis pudimos especificar que las dificultades y conflictos son detectables por la observación no participante y por las respuestas de los participantes a preguntas de otros participantes y a las posteriores preguntas, exámenes y entrevistas de los investigadores y, por ello, son en alguna forma ostensibles; pero los obstáculos no lo son, sino que son inferencias que hace el investigador a partir de sus microscopios teóricos. Por ello podemos productivamente atribuir las dificultades y conflictos que observamos a *obstáculos didácticos* causados involuntariamente por los procesos seguidos por los docentes en las situaciones didácticas en las que ubican a sus estudiantes y en los problemas o tareas que en ellas les proponen, y por las herramientas de enseñanza empleadas por los docentes (incluido el lenguaje utilizado como herramienta privilegiada, según Vygotsky, y en particular, incluidas las producciones lingüísticas producidas por el registro semiótico de la lengua materna del estudiante como registro privilegiado pero no único pues sería ineficaz si no se triangula con otros registros, según Duval); también podemos atribuir las dificultades observadas a *obstáculos cognitivos* en cada estudiante, debidos a los distintos grados de conocimientos previos de tipo conceptual o de adquisición de destrezas de cálculo algebraico y, a mayor nivel de profundidad, podemos atribuirlas a *obstáculos epistemológicos* que se deben a conocimientos previos adquiridos y arraigados que han sido exitosamente utilizados en otras situaciones problemáticas anteriores pero que inconscientemente para maestros y discípulos impiden las reconceptualizaciones necesarias para superar las dificultades observables. En una u otra concepción de sociedad, cultura e interacción humana, todos tres son obstáculos culturales; por ser atribuibles a cada estudiante en particular, son también obstáculos individuales, y todos ellos, más o menos directamente, son también de naturaleza semiótica; pero los obstáculos didácticos, y en particular los lingüísticos, se pueden considerar más directamente como culturales, y los cognitivos y los epistemológicos se pueden considerar más directamente como individuales, en cuanto la cultura y en particular el lenguaje, han sido ya internalizados y “hechos propios” o “apropiados” por el estudiante en procesos de aprendizaje anteriores a la situación observada en una investigación.

3) Así que podemos introducir a los estudiantes en una nueva situación didáctica, problemática o situación-problema y esperar que en el curso de ella emerjan toda clase de dificultades y conflictos, que llamamos errores, misconcepciones, malas

comprensiones o les damos otros nombres peyorativos, pero difícilmente podremos reorientar eficazmente nuestras prácticas como docentes de manera que podamos superar esas dificultades y conflictos si no podemos atribuirlas a obstáculos específicos que consideramos actuantes y potentes aunque directamente inobservables. Precisamente esta es una de nuestras principales tareas como profesores: si conjeturamos a qué tipo de obstáculo pueden deberse las dificultades y conflictos experimentados, con más eficacia podremos ayudar a los estudiantes a superarlos por sí mismos, a ser conscientes de las diferencias; entonces, los estudiantes quizá puedan hacer sus propias reorganizaciones mentales y reconceptualizaciones de manera que tengan menos dificultades y experimenten menos conflictos para alinear sus producciones cognitivas internas con las epistémicas institucionalizadas en los currículos, textos y producciones matemáticas avanzadas.

4) *Superar obstáculos* no significa cambiarse a otro sistema de creencias o a otro esquema de pensamiento más persistente y más creíble, sino más bien es un proceso crítico y autocrítico que –con la ayuda del docente dotado de los microscopios teóricos apropiados– puede llegar a ser más apropiado para que cada estudiante pueda aproximarse a los problemas con los que se enfrenta en cada situación didáctica con una permanente conciencia sobre el campo de construcción y aplicación de los conceptos, modelos y teorías, acerca de su alcance y de sus limitaciones para saber en qué dominios aplicarlos y en cuáles no, así como para automotivarse y autoevaluarse.
5) La razón por la cual un educador matemático de cualquier nivel de enseñanza podría llegar a interesarse por la teoría de los obstáculos y a distinguirlos de los conflictos y dificultades es porque el patrón del desarrollo conceptual en la historia de muchas ramas de las matemáticas y la física parece ser “recapitulado” cada vez que un estudiante en su niñez y adolescencia se embarca en el proyecto de comprensión de algo nuevo o en la construcción de un nuevo concepto. En ese sentido muy restrictivo pero utilizable de manera heurística, podríamos hablar de la recapitulación de la sociogénesis histórico-cultural de los conceptos científicos en la ontogénesis individual del aprendizaje de esos mismos conceptos por parte de los estudiantes (Piaget y García, 1982; para la reinterpretación heurística, ver Vasco, 1995).
6) El estudio de los conflictos y dificultades detectados en la transición del álgebra al cálculo diferencial y de los obstáculos que se pueda conjeturar que están activos detrás de lo observado podrá aportar muchas herramientas de apoyo y orientación didáctica a los formadores de profesores, a los profesores en ejercicio y a los estudiantes que se preparan para ser futuros profesores en varios aspectos: en la caracterización y explicación de la estructura y funcionamiento de cada obstáculo inconscientemente atravesado en el camino de los estudiantes por la actividad semiótico-comunicativa del docente mismo, y por lo tanto, dentro del sistema didáctico; en afinar su mirada y su atención para no caer en imprecisiones que se conviertan en obstáculos didácticos que creen dificultades y conflictos a sus estudiantes, y en la explicitación de herramientas teóricas y metodológicas para el mejoramiento de su práctica docente que le sean útiles

para superar esas dificultades y conflictos si se dan, y para facilitar y potenciar su propio aprendizaje continuado y permanente en el cálculo diferencial e integral y en su enseñanza en diferentes niveles de escolaridad.

7) Respecto a cómo se generan ciertas dificultades o conflictos a partir de las prácticas cotidianas en el aula, sin consciencia y sin culpa alguna por parte del docente, se afirma que siempre que las clases sean tales como transcurrieron las clases que fueron documentadas, observadas y analizadas en esta investigación, la consecuencia difícilmente evitable es que se van a generar estas mismas dificultades y conflictos. Paralelamente, se puede también afirmar que siempre que la gestión de los conflictos y las respuestas a las preguntas, a las dudas y a las inquietudes de los estudiantes sean como se documentó en los episodios analizados aquí, estas mismas dificultades van a seguir estando presentes; es decir, se van a mantener en un modelo de prácticas educativas universitarias en la iniciación del Cálculo Diferencial e Integral (PEUC) que no permiten ni fomentan, ni posibilitan la interacción productiva, ni la retroalimentación apropiada, ni la gestión eficaz de los conflictos, ni las respuestas adecuadas a las preguntas de los estudiantes.

8) En el camino del aprendizaje del Cálculo en las universidades, o sea, en las prácticas universitarias (PEU) de la adquisición de conocimientos, habilidades y destrezas matemáticas, para el caso del Cálculo como rama aplicada del análisis matemático se podría ya adelantar otra conclusión: mientras el estudiante no pase de tomar las fórmulas y ecuaciones como símbolos de procesos de calcular números a partir de remplazar variables por constantes numéricas o —para reformular lo anterior con la teoría APOE de Ed Dubinsky y con la teoría de la primera Anna Sfard (1991, 1994)— mientras no se logre el paso de *acciones y procedimientos* a los *objetos* y *esquemas*, y mientras no se pase de los *procesos* a la *reificación*, el estudiante no puede pasar de los sistemas aritmético-algebraicos, cuyos elementos son los números enteros, fraccionarios y reales, a los sistemas analíticos, cuyos elementos son las funciones como operaciones unarias reificadas. Tanto los estudiantes como muchos de sus profesores siguen pensando que el sistema simbólico que aprendieron en el álgebra de bachillerato representa lo mismo cuando se usa en el cálculo, pues en ambas asignaturas basta saber operar con algunas reglas que se refieren solo a los símbolos, sin tener que pensar en los conceptos. Pero no es así, pues manejar variables como *x, y, z,* cuyos valores son números específicos de un sistema numérico elemental, como **R**, no es lo mismo que utilizar, además, nuevas variables como *f, g, h,* cuyos valores son funciones específicas de un espacio funcional **F**(**R**^**R**), que transforman los valores de argumentos *x, y, z* en otros valores, ni las operaciones usuales entre números son las mismas que las operaciones entre funciones, y menos todavía, no hay consciencia clara de que esas operaciones pueden o no diferir de la nueva operación básica entre funciones, que es la composición, nunca explicitada en el álgebra elemental. (Neira, 2012)

Conclusiones del Análisis de los Datos

1) Respecto al uso del dx al plantear las derivadas de $senx, lnx, cosx, tanx$ y otras funciones

Al colocar la profesora siempre al lado derecho de la derivada de la función la expresión dx, como se documentó en la sección respectiva, es posible afirmar que hay aquí unas prácticas, discursos, formas de expresión y de enseñanza que no se pueden atribuir a la comunidad académica internacional, ni siquiera a la de la misma universidad y facultad en donde ejerce su docencia la profesora observada, sino a ella como profesora concreta y particular o a cada profesor que incorpore ese tipo de prácticas, discursos y formas de expresión con la convicción de que está proponiéndola a sus estudiantes como mediación del saber sabio al saber que está de facto enseñando, sin ser consciente de las diferencias entre el saber sabio o epistémico, el saber institucional de su propia institución y el saber que él toma por el saber a enseñar aquí y ahora. Esta distinción nos aclara por qué la profesora puede utilizar algo que no está ni en el saber sabio ni en el saber a enseñar, con toda la consciencia de que es una expresión matemáticamente correcta y didácticamente potente para resolver futuros ejercicios de derivación.

Aparece en esa viñeta una práctica distante de lo epistémico y de lo institucional. Podemos categorizarla como una práctica no institucional, no epistémica, que es fruto de la apropiación personal que la profesora ha hecho de las derivadas y las diferenciales por una parte, y de otra, por las dificultades que ella sabe que los estudiantes van a encontrar en las preguntas de los exámenes, y por tanto ella se ha apropiado una práctica que cree les va a ayudar a sus estudiantes resolver esos ejercicios sin dificultad. El uso del *dx* después de la derivada de la función, no es institucional, es cognitivo de ella; parece jugar el rol para la profesora de la derivada interna de la función que ella en la entrevista aclara diciendo:

> *Está mal decir que la derivada de seno es coseno, no no no no! La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función: dx representa justamente "la derivada de la función".*

Curiosamente, la profesora utiliza no una expresión que se parezca a otras que ha utilizado para las derivadas, como 'du/dx', o un apóstrofe (como *u'*), sino *'dx'*, que se utiliza en las integrales para expresar cuál es la variable con respecto a la cual se integra: $\int f(x)dx$.

Aunque no se tienen datos explícitos acerca del aspecto cognitivo en los estudiantes, porque la interacción de la profesora con ellos fue muy poca y porque no fue posible seguir el desempeño de los estudiantes precisamente por el esquema y la práctica instaurada por la profesora ya descrita en las matrices documentales, sí es posible inferir algunos elementos a partir de las preguntas, a partir de las proposiciones interrogativas y de los resultados obtenidos.

Analizando los exámenes parciales, en los casos "exitosos", que son más que los exitosos en el episodio de límites, sus estudiantes lograron identificar una "derivada interna" distinta de la función que se les pedía derivar. La conjetura de que se trata de la derivada interna se confirma con lo que ella manifiesta en la entrevista, y es que a sus estudiantes "les va mejor" que en otros temas, pues logran "acordarse" del *'dx'* al lado de la derivada de la función y notan la necesidad de hacer una derivación intermedia. Parece pues ser claro que la buena intención de la profesora funciona; aunque es una práctica no institucional ni epistémica, en términos de lo cognitivo de lo que se logra apropiar el estudiante, sí le ayuda a escribir bien las fórmulas de las derivadas que requieren la derivación intermedia de la función que afecta al argumento final.

2) Sobre la distinción entre lo epistémico y lo cognitivo y su relación con lo insititucional y lo personal en el Enfoque Ontosemiótico—EOS

En el Análisis Didáctico planteado por el Enfoque Ontosemiótico–EOS hay una distinción entre lo epistémico y lo cognitivo; lo primero está más fuertemente asociado a lo institucional, representado por los libros de texto, por las disciplinas y sus currículos, por los maestros y autoridades educativas y científicas como representantes institucionales del saber epistémico o saber sabio, y lo segundo está más asociado al estudiante y a sus procesos personales de estudio y aprendizaje. Pero el análisis de los episodios y viñetas en las que la profesora introduce diferenciales en la expresión algebraica de las derivadas nos obligó a revisar y contrastar las oposiciones entre lo cognitivo y lo epistémico y entre lo personal y lo institucional como se venían utilizando en el EOS y como comenzamos a utilizarlas en el análisis de los datos.

En este caso de la introducción de diferenciales en las expresiones de las derivadas hay un elemento cognitivo en la profesora, que consiste en la manera como ella se ha apropiado personalmente de los saberes y los conocimientos epistémicos, manifestada en su discurso oral y escrito en el aula de clase, pues actúa como si esta apropiación personal fuera institucional y procede a imponerla con su autoridad, aunque dicha concepción no es epistémica ni aparezca validada e institucionalizada en los textos y currículos, ni siquiera entre sus colegas que enseñan el mismo curso de Cálculo Diferencial.

Esta distinción más fina entre las dos polaridades el EOS –la una entre lo institucional y lo personal y la otra entre lo epistémico y lo cognitivo– no se esperaba antes del análisis, pero apareció clara y repetidamente en las transcripciones de la actividad docente de la profesora.

Según el esquema metodológico ya muy extendido para la clasificación de los conocimientos, saberes, opiniones y creencias de los actores del sistema didáctico, tanto en el triángulo didáctico de Brousseau como en el de Chevallard (Saber-Profesor-Estudiante), en el saber hay una distinción clara entre el saber apropiado por el profesor (el saber-a-enseñar) y el cognitivo del estudiante (el saber-aprendido).

La conclusión de nuestro análisis es que, al menos en esta caso, se da claramente un nivel intermedio entre lo Institucional de la Universidad, la Facultad y las Carreras de Ingenería y lo Personal de cada sujeto individual, y entre lo Epistémico del saber circulante en la comunidad matemática y lo Cognitivo del saber provisorio del que haya logrado apropiarse cada estudiante.

Proponemos pues que hay un nivel intermedio de saber que ha interiorizado el profesor y que es el que se propone enseñar al estudiante, con una concepción o creencia subjetiva acompañada de un convencimiento personal del profesor de que ese saber es coincidente con el saber institucional de tipo epistémico para el Cálculo Diferencial e Integral.

Así pueda parecer repetitivo, nuestra interpretación del saber de la profesora observada acerca de la derivadas, las diferenciales y sus relaciones y notaciones no corresponde ni a lo epistémico de la comunidad matemática, ni a lo cognitivo del estudiante, ni a lo institucional de la Universidad ni de la Facultad, ni a lo personal del estudiante tal como está descrito en el EOS de Godino, Batanero y Font. Habría que situarlo en un nuevo nivel de transposición del saber epistémico al saber cognitivo-del-docente, que podría compararse y evaluarse con relación al saber epistémico avalado por la institución, y que puede o no llegar a convertirse en saber cognitivo personal del estudiante, o generarle nuevas interpretaciones y concepciones alternas y aun equivocadas al estudiante que experimenta situaciones didácticas diseñadas y gestionadas por un docente que tiene ese tipo de concepción intermedia.

Sin entrar en detalles o diferencias de interpretación, esta propuesta parece coincidir con una de las críticas que le hizo Chevallard a Brouseau sobre el saber sabio y el saber escolar como transposición didáctica del saber sabio. La idea es que no hay solo una transpsicón didáctica del saber sabio de la comunidad de investigadores en matemáticas, que podría considerarse epistémico solo para un tiempo, un lugar amplio y una cultura específica, a un saber escolar que podría considerarse institucional pero solo para una institución educativa específica. Habría muchas y muy distintas transposiciones, prácticamente una para cada institución situada en un tiempo y lugar y una para cada educador afiliado a esa institución en ese tiempo y lugar, o para cada texto escolar específico, y el educando solo estaría expuesto a ese saber particular, sin acceso directo al saber epistémico o saber sabio, pero al menos con la posibiidad de criticar uno de esos saberes escolares a los cuales está expuesto desde otro de ellos. En nuestro caso, un estudiante detectó la ausencia del ‘dx’ en la conclusión de una pretendida “demostración de la fórmula de la derivada”.

Algo parecido le sucedió a Chevallard cuando empezó a trabajar en la transposición didáctica con Josep Gascón y Mariana Bosch: encontró que la transposición didáctica no era solo del saber sabio de las matemáticas de investigación a los libros de texto escolar, como creían inicialmente Brousseau y él, sino que también aparecía en la apropiación diferencial de los maestros de ese saber ya traspuesto, que era otra especie de transposición que hace difícil mantener la distinción entre el saber sabio (que en el EOS es el epistémico institucionalizado) y el saber escolar (que en el EOS es el cognitivo personalizado por los estudiantes), pues aparece como intermediario ese saber circulante entre los maestros, que es personal de cada uno de ellos pero no puede calificarse de epistémico por no coincidir con el saber circulante en la comunidad de matemáticos investigadores, ni de institucional por no aparecer en los planes, programas, syllabus y textos recomendados y otros documentos oficiales de la universidad o la facultad o el departamento de matemáticas, aunque cada docente cree que sí lo es y siente la necesidad de institucionalizarlo así en su actividad docente cotidiana.

No hay duda de que hay una primera transposición del saber sabio al saber institucional escolar local representado en textos, libros, manuales y artículos, syllabus, guías de cátedra, notas del profesor, que ya dispersa lo que parecía homogéneo como lo sería el saber escolar institucional para esa escuela o institución educativa. Así, la transposición didáctica puede tener diferentes etapas y ser efectuada varias veces por distintas personas hasta llegar al aula. Pero otra transposición puede ocurir en el momento en que el mismo profesor de la asignatura Cálculo I empieza a escribir un texto escolar, una guía, un taller o un plan de clase o de período escolar, o cuando toma un curso de capacitación o profundización y cambia su percepción de lo que creía que debería enseñar. Ahí hay otra transposición cuyo producto podría distanciarse y aun contradecir otros productos de otras transposiciones. En el Cálculo Diferencial, por ejemplo, de hecho la definición de límite que se encuentra en un libro puede ser diferente de la de otros libros de cálculo. La categoría del saber cognitivo del docente pone también en cuestión la categoría del saber escolar en el sentido saber institucionalizado y su relación con el saber sabio y con el saber escolar en el sentido del saber específico que circula durante las clases concretas de ese docente en un período escolar dado. Es la presencia documentada en la profesora observada de esa práctica de enseñar un saber intermedio entre el epistémico, el institucional y el escolar la que nos exige refinar y subdividir estas categorías del EOS.

Tal vez fue por alguna razón semejante por lo que Chevallard propuso que en la TAD no deberíamos partir de que los investigadores ya sabemos lo que es institucional y lo que es epistémico, sino que lleguemos al salón de clase como un antropólogo que quiere estudiar etnográficamente una cultura extraña de la que sabe poco, no domina su lenguaje, y solo puede describir las prácticas y sus praxeo-logías observables, así como las técnicas y sus tecno-logías acompañantes, sin juzgar externamente cuáles cree el mismo investigador que son "las verdaderas, correctas, epistémicas o institucionalizadas", sino afirmar cuáles parecen ser las "localmente institucionalizadas" en esa cultura escolar, con un sentido mucho más etnográfico de "institución" y sin postular una institución matemática universal que sea la poseedora del saber sabio y epistémico.

3) Acerca de la Idoneidad Emocional y la ocurrencia de sarcasmos

Cuando la profesora da a sus estudiantes un discurso sobre la importancia de estudiar, de tomar buenas decisiones, la primera vez que dice ese discurso tiene una alta idoneidad emocional; pero la segunda o tercera vez que lo dice es de baja idoneidad emocional, pues los estudiantes lo perciben como mera repetición ya sin sentido para ellos. Un aspecto a tener en cuenta es si la profesora considera que estas repeticiones de las exhortaciones a estudiar contribuyen a formar un buen clima de aula; pero otro aspecto difícil de evaluar es si los estudiantes lo perciben de esa manera.

En cuanta a la ironía y la manera como la Profesora responde a los estudiantes al hacer una pregunta sincera: *cómo habla de bonito, no se haga el que está pensando, no se invente leyes o reglas,* estas expresiones no solo no tienen en cuenta la duda manifestada en la pregunta, la incomprensión que están tratando de hacer explicita sino que causan una cierta ruptura en la interacción de la pregunta con la respuesta esperada; esto corresponde a la faceta emocional, también a la ecológica y es parte central de la gestión de los conflictos, de la gestión de las preguntas que formulan los estudiantes, las que no gestiona adecuadamente en el sentido en que no trata de detectar el sentido profundo que las genera, en otras ocasiones ni siquiera aparece una respuesta a la pregunta así sea superficial o no, y en otras varias ocasiones responde con frases irónicas. Esta práctica no solo no aclara las dudas sino actúa como un mecanismo que mantiene y perpetúa las dificultades vinculadas con el cálculo diferencial.

4) En cuanto a la Herramienta metodológica del EOS utilizada

La metodología empleada en el análisis de los datos emerge como una herramienta potente para futuras investigaciones, en particular por el refinamiento metodológico realizado junto con el hecho de unir la matriz de Prácticas Matemáticas y Configuración De Objetos con la de oposiciones agregando una columna. La matriz descriptiva de procesos, objetos y polaridades también es un aporte y una innovación pues se le aplica a cada objeto. En síntesis el aparato analítico-metodológico utilizado y configurado en esta tesis es un aporte al EOS.

En cuanto a los episodios fundamentales y las viñetas seleccionadas, se estudiaron las prácticas en las que observamos algunos procesos y objetos; entre los procesos los que se repiten son los procedimientos tipo algorítmico y entre los objetos encontramos los observables y los no observables.

Se analizó un límite en un episodio, una derivada en otro episodio; de ellos sacamos los lenguajes, los conceptos y los procedimientos. Al tratar de usar el EOS caímos en cuenta que hay lenguajes, gestos y expresiones de otro tipo. Por lo cual la categoría de Lenguajes queda demasiado amplia, pues allí están contenidos símbolos, términos, proposiciones, predicados,…y aún expresiones que no se podrían catalogar como ninguna de ellos como Lim, razón por la cual tratamos de usar una lingüística más fina.

El aporte al EOS no es solamente el resultado del análisis, sino emerge del esfuerzo de utilizar las categorías del Enfoque y de haber sufrido muchas dificultades para clasificar los objetos y los procesos. De esas dificultades y de los distintos conflictos semióticos experimentados durante el análisis de los datos y la redacción de resultados y conclusiones, pude inferir que el obstáculo que estaba detrás era la ambigüedad de los términos y la no disyunción de las categorías y subcategorías de los Lenguajes y los Conceptos/Definiciones. Así fui cayendo en la cuenta de la necesidad de refinarlas y operacionalizarlas mejor.

Esto se vio de manera muy específica en el análiss de algunos casos que llaman mucho la atención en las transcripciones. Por ejemplo, en el caso de solución de un límite que para la profesora es una fórmula pero para los estudiantes no; o por ejemplo que $\frac{1}{x}dx$ no es una proposición ni es una F.B.F (Fórmula Bien Formada) entonces surge la pregunta, que es? Nos quedamos cortos con las categorías de proposición, argumento, concepto, definición,…casos como este nos hace requerir un instrumento más refinado, más fino, que hile un poco más delgado y en el que se puedan plantear atributos correspondientes. En el proceso de análisis nos dimos cuenta que clasificamos todo en lenguaje. Eso da la necesidad de refinar la categoría para lenguajes, proposiciones y argumentos. Podría por ejemplo proponerse la utilización de categorías o subcategorías como términos, predicados, operadores.

En la lista de los seis tipos de objetos ciertamente las *Proposiciones* y los *Argumentos* ya son subtipos del tipo *Lenguajes*. Los *Procedimientos* (algorítmicos o no) sí formarían un tipo objeto diferente de los *Lenguajes*. Lo mismo pasa con *Concepto/Definición*: generalmente se identifican los conceptos con las definiciones rigurosas que dan los libros, y eso también reduciría este subtipo al tipo *Lenguajes.* No quedarían sino dos tipos puros: *Lenguajes* y *Procedimientos*.

En síntesis usamos el EOS con su análisis didáctico descriptivo: se distinguen las situaciones, los procesos y los objetos; luego se clasifican en Lenguajes, Conceptos-Definiciones, Proposiciones, Argumentos y Procedimientos. A esas cinco categorías se le aplicaron las oposiciones del decágono, y se hizo necesario subdividir y refinar la categoría Lenguajes, y precisar la de Conceptos-Definiciones.

Comenzando por la última, hay un problema en entender la definición como una expansión discursiva, con lo cual volvería a quedar en la categoría Lenguajes y sería claramente ostensiva, mientras que si se considera como un concepto mental, sería apenas inferida de los usos de la misma palabra o expresión, y claramente no ostensible. La definición como un letrero estereotipado con una palabra o expresión breve al comienzo (definiendum), el verbo "es" y luego otra expresión larga (definiens) es claramente de la categoría *Lenguajes*, pero también puede ser un *concepto* mental, y en algunos casos también puede ser un *proceso* de definir un concepto nuevo con la ayuda de otros conceptos ya definidos y por medio de la conocida técnica de dar ejemplos y contraememplos.

También se hizo necesario precisar la categoría Argumentos, pues hay varios tipos de argumentos, y a veces algunos tienen una sola proposición explícita; en el caso de algunos tratamientos puramente algebraicos para transformar un término en otro ni siquiera tienen proposiciones explícitas. Los argumentos observados en las clases fueron puramente algebraicos y procedimentales, de tal manera que pareciera que el argumento fuera la coincidencia del resultado de seguir paso a paso el procedimiento con la regla o caso prototípico enunciado previamente, tal como se aclaró en el análisis de oposiciones.

Igualmente, la categoría de Argumentos y la de Proposiciones son subcategorías de la de Lenguajes, no son dos categorías paralelas a Lenguajes. En caso de que un argumento tenga una sola proposición explícita, no hay criterio claro para ubicar ese renglón como Proposición o como Argumento. Ya vimos cómo una Definición puede ser una proposición, y por lo tanto sería también de la categoría Lenguajes y de la subcategoría Proposiciones. Esto requiere una revisión por parte de los expertos en el EOS para reformular y distinguir las cinco categorías, precisar las distinciones apropiadas, dar los criterios que operacionalizan cada categoría y reforzarlos con algunos ejemplos.

Acerca del obstáculo de la sobregeneralización de Linealidad

Según De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, L. (2007) diversas investigaciones han demostrado que los estudiantes de diferentes edades tienen una fuerte tendencia a aplicar modelos lineales o proporcionales en cualquier lugar, incluso en situaciones donde no son aplicables. Por ejemplo, en geometría se sabe que muchos estudiantes creen que si los lados de una figura se duplican, el área se duplica también. Sin embargo, también la historia de la ciencia proporciona varios casos de pensadores que postularon inadecuadamente las relaciones lineales para describir las situaciones.

El uso indebido de la linealidad se ha encontrado en diferentes niveles y en una variedad de contextos matemáticos (véase, por ejemplo, De Bock et al., 1999). En la aritmética elemental, el fenómeno del razonamiento proporcional inadecuado se relaciona a menudo con una "falta de sentido común" en el aula de matemáticas (Gagatsis, 1998, Greer, 1993, Nesher, 1996, Verschaffel et al., 1994, Wyndhamn y Säljö, 1997). Cuando se enfrentan a los llamados "problemas de pseudo proporcionalidad" (por ejemplo, "Se tarda 15 minutos en secar una camisa en el tendedero. ¿Cuánto tiempo tardará en secar 3 camisas fuera?"), Muchos estudiantes dan respuestas basadas en la proporcionalidad directa, es decir, triplicando el tiempo de secado porque el número de camisas se triplica. También en los casos en que el modelado con proporcionalidad directa en el mejor de los casos ofrece una aproximación, como, por ejemplo, en el problema del corredor: "el mejor tiempo de John para correr 100 metros es 17 segundos ¿Cuánto tiempo le llevará a correr 1 kilómetro?),

Sólo muy pocos estudiantes se dan cuenta de que la proporcionalidad directa dará sólo una respuesta aproximada. En la educación secundaria, los «errores de linealidad» se presentan a menudo en los campos de álgebra y pre-cálculo. Los estudiantes tienden a sobregeneralizar lo que se ha experimentado como "verdadero" para funciones lineales a funciones no lineales por ejemplo un caso muy común es querer concluir que la raíz cuadrada de una suma es la suma de las raíces cuadradas, o que el logaritmo de un producto es el producto de los logaritmos. O como en lo evidenciado en el episodio 12 [Segmento 4], cuando el estudiante pregunta si desde un principio se hubiera podido expresar el logaritmo de ese cociente, como el cociente de los logaritmos; a lo que la profesora respondió con un sarcasmo en señal de que esas son invenciones de los estudiantes pero sin tener conciencia de que esa pregunta expresa un obstáculo que es la ilusión de la linealidad.

De Bock., et al citan a Matz (1992), quien afirma que estos errores de linealidad resultan de la sobregeneralización de la ley distributiva por parte de los estudiantes. La utilización tan reiterada de la ley distributiva en la aritmética y el álgebra temprana hace que los estudiantes la apliquen en contextos no lineales, sin preguntarse bajo qué condiciones se utiliza, y sin que los profesores ni siquiera adviertan esa sobre generalización que es potenciadora de errores, conflictos, dificultades y obstáculos.

El ejemplo más conocido del uso indebido de la linealidad por parte de los estudiantes, es la aplicación inadecuada de esta en problemas que involucran relaciones entre la longitud y el área y / o el volumen ampliadas o reducidas (De Bock et al., 1998). Como el esclavo en el dialogo de Platón, los estudiantes de diferentes niveles educativos tienden a generalizar cambios en las dimensiones lineales a cambios en el área y el volumen. Al responder a las preguntas sobre el efecto de reducir a la mitad o duplicar las caras de una figura para producir una figura similar, la mayoría de los estudiantes -e incluso los futuros profesores- afirman que el área y el volumen serán reducidos a la mitad o duplicados (Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas, 1989; Y Mitchelmore, 2000, Simon y Blume, 1994, Tierney et al., 1990). En palabras de De Bock., Van Dooren, Janssens y Verschaffel, L. (2007):

> *Intuitive reasoning, the linearity illusion, shortcomings in geometrical knowledge, inadequate habits and beliefs seem to be a fertile soil for a superficial or deficient mathematical modelling process. As several authors have stressed, mature mathematical modelling involves a complex, cyclical process consisting of a number of subsequent steps: understanding the situation described; selecting the elements and relations in this situation that are relevant; building a mathematical model and working through it; interpreting the outcome of the computational work in terms of the practical situation; and evaluating the results and the applied model itself*

(Burkhardt, 1994; Greer, 1997; Verschaffel et al., 2000). In the modelling process observed in many of our students, some of these steps were completely bypassed. Little effort was invested in understanding the problem situation and in making a clear mental representation of the relevant elements and relations. The mathematical model then mainly occurred on the basis of 'reflex-like recognising', and is almost immediately translated in calculations. These calculations received the most time and attention in the problem-solving process. The superficial modelling was moreover affected by inadequate habits and beliefs (e.g. solving word problems is just doing the correct operations with the given numbers, drawings are less trustworthy than formulas).

…students' improper use of linear reasoning can also be seen as a symptom of an immature and even distorted disposition towards mathematical modelling.

A manera de síntesis

Del panorama presentado en el estado del arte en cuanto a las miradas, enfoques y formas de nominar aquello que se ha manifestado dificultante en el aprendizaje del cálculo, se quiso caracterizar lo encontrado como una dificultad, o como un conflicto, sin embargo concluimos que el concepto de obstáculo sigue siendo válido y no se puede reemplazar por el de conflicto porque el hecho de que no haya conflicto no evidencia para nadie el problema.

En el marco teórico se consolidaron como punto de partida varios elementos referentes a esta categoría que a lo largo del análisis fueron adquiriendo identidad propia aunque un poco distinta a lo consolidado en lo teórico, que fue emergiendo y constituyendo un valioso aporte de esta investigación por cuanto muestra la dinámica del proceso de discusión y análisis.

Lo observable es que hay una dificultad, evidenciada en la demora al contestar, en los errores, en el tipo de preguntas que formulan cuando se atreven a hacerlo, en las respuestas que dan cuando se atreven a hablar, en los errores que comenten en los exámenes, todo esto constituye los síntomas y podrían muchos de estos ser caracterizados como conflictos, en el sentido de la disparidad entre los significados institucionales y/o personales, pero puede ocurrir la dificultad sin conflicto y esas son las más difíciles de detectar precisamente porque no son observables, se les pasa al profesor, al observador, al estudiantes, a todos. Se adoptó la categoría de obstáculo y las otras dos se tomaron como síntomas: dificultades en la comunicación, dificultades en el desarrollo de ejercicios, dificultades para terminar los ejemplos, (dificultades para dejar trabajar a los estudiantes). Las dificultades y los conflictos fueron lo observable, mientras que los obstáculos fueron inferencias de lo que estaba pasando. Algunos ejemplos de dificultades:

- El estudiante no puede terminar el ejercicio.
- Cuando la Profesora habla de triángulo "recto" hay una dificultad de comunicación por el conflicto semiótico de llamar a ese objeto incorrectamente.
- En el uso de dx no hay dificultad, no nota ningún conflicto, pero ahí viene la inferencia de que eso no es institucional, pero la profesora lo institucionaliza como si lo fuera: esta es precisamente la categoría nueva. Las prácticas parecen ocurrir sin conflicto.

- Los estudiantes no aplican la fórmula del límite "especial" porque no reconocen las hipótesis para su aplicación: la potencia fraccionaria
- Los trabajos en grupo aún no están institucionalizados como prácticas, cuando lo anuncia lo hace por darle gusto al observador (a mí), pero finalmente no lo realiza
- En el episodio que la profesora pregunta que no entendieron de la definición de limite se habla de la vecindad, y ella responde que "*no es la vecindad del chavo",* la pura definición de limite es un obstáculo didáctico, y al ponerlos a leer y decir "*eso así se estudia, leyendo, consultando, preguntando"*, institucionaliza el buen estudio, los buenos hábitos de estudio pero no la definición ni el concepto de limite, ni de vecindad, porque no explica lo que es, solo hace un chiste con el chavo del ocho, ni la noción de distancia, ni la de valor absoluto, ni la de los cuantificadores, ni la de los épsilon y deltas. De hecho algo importante en cuanto a las vecindades es que se pierde el concepto de cercanía al exigirle la clausura al espacio, lo cual sí crea un obstáculo epistemológico pues ya no es vecindad si no está cercano, lo cual es condición para serlo. La profesora soslaya la dificultad diciendo lean, investiguen, empíricamente diferentes.
- En el episodio donde deriva implícitamente un producto de la forma xy, diciendo *"derivo respecto a x, luego derivo respecto a y"*, está haciendo algo como una derivada parcial, lo cual no es epistémicamente correcto pues no son derivadas parciales porque requeriría que tanto x como y fueran variables independientes de otra función z que depende de ellas, también es como un truco o un algoritmo que puede funcionar pero que al institucionalizar, tanto el proceder como el concepto, y tanto la profesora como luego los estudiantes lo institucionaliza y es su propia reconstrucción puede devenir en obstáculos epistemológicos, por ejemplo al definir el concepto de derivada parcial en un futuro curso de cálculo multivariado que obligatoriamente verán los estudiantes en su carrera. Se están sembrando las semillas de potenciales obstáculos a futuro. Importante también ampliar un poco este tema de las variables dependientes e independientes. La forma de derivar de ella puede ser un truco o un algoritmo que puede funcionar pero que epistémicamente es erróneo.

El asunto de que una dificultad no genere conflicto es un riesgo para que ni el docente, ni el estudiante, ni el investigador vean una dificultad y entonces no podamos decir que fue lo que causo el obstáculo. El hecho de que no haya conflicto no quiere decir que no haya una dificultad, un problema. La categoría de Obstáculo que no produce conflicto es muy potente por ejemplo la profesora considerada buena profesora y que dice y usa el dx de esa manera.

Resumiendo:

- Conflicto lo tomamos como perturbación de una conducta; es un observable, un ostensible como dice el EOS.
- Obstáculo (epistemológico) es un constructo que "emerge" de la repetición de ciertas perturbaciones en las prácticas.

Todas estas consideraciones nos han llevado a proponer que hay razones para mantener el concepto de obstáculo, es decir, que está bien utilizado el término obstáculo como algo que inferimos que describe bien algo que pasa desapercibido porque no hubo conflicto. El problema de que no haya conflicto observable es semejante a una situación en que no nos ponemos a buscar la llave porque ni siquiera nos hemos dado cuenta de que se cayó. En nuestro caso y a manera de metáfora una situación es que la profesora le ponga una cascara de plátano para que el estudiante caiga y otra que ponga una cascara sin darse cuenta, como es el caso del uso □□ en las derivadas. Al no crear conflicto, tanto profesores, estudiantes, investigadores, etc. pueden pasarse toda la vida sin cuestionarse nada.

Se mantuvo la conciencia acerca de la ambigüedad de las ideas de obstáculo, dificultad y conflicto, lo cual fue potente analíticamente para hacer el análisis de los datos, pues esa independencia en las categorías descritas permitió que emergieran libremente los problemas epistémicos, didácticos, cognitivos,… con su correspondiente explicación.

Por ejemplo en nuestro caso de dx, ese dx es un símbolo, una GESTALT que puede significar que la profesora no distingue entre diferencial y derivada, que usa el dx como abreviatura de la derivada interna o abreviatura de la diferencial, y que claramente no es correcta ninguna de las dos interpretaciones, se está confundiendo la derivada con la diferencial, lo que constituye un obstáculo semiótico, epistémico y cognitivo de la profesora.

El problema es que estas formas de proceder no corresponden ni con la derivada de Leibniz ni con el teorema fundamental del cálculo: la derivada es una razón de diferenciales:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Si $f(x) = Ln(x) \;\; \rightarrow \;\; f'(x) = \frac{1}{x}dx \;\; \rightarrow \;\; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}dx$

Es una equivocación llamar dx a la derivada y dx a la diferencial. Desde el punto de vista semiótico es un error llamar lo mismo a cosas diferentes, resaltamos que lo contrario si se puede hacer, es decir, llamar de diferentes maneras a lo mismo, por ejemplo ½ = mitad.

Se debe usar el mismo signo para lo mismo, pero llamar de la misma manera a dos cosas diferentes no es correcto. Se tiene aquí claramente un obstáculo semiótico.

Desde el punto de vista analítico podemos observar que la profesora no da explicación de las fórmulas que enuncia para las derivadas que involucran el uso del dx y esa falta de aclaración se puede explicar porque desde el punto de vista de la profesora no es necesario, todo está bien, lo hace porque así lo hace siempre y lo considera correcto, es más considera que el dx le da un énfasis casi nemotécnico para que los estudiantes recuerden cuando saquen una derivada, sin embargo desde el punto de vista académico-matemático no es algo correcto, va en contra de lo institucional. En cuanto a la categoría Lenguajes, $\frac{1}{x}$ es un término compuesto de 2 términos y 1 operador simbólico. Nos quedamos cortos con las categorías de proposición, argumento, concepto, definición,…casos como este nos hace requerir un instrumento más refinado, más fino, que hile un poco más delgado y en el que se puedan plantear atributos correspondientes. En el proceso de análisis nos dimos cuenta que clasificamos todo en lenguaje. En la lista de los seis tipos de objetos ciertamente las *Proposiciones* y los *Argumentos* ya son subtipos del tipo *Lenguajes*. Los *Procedimientos* (algorítmicos o no) sí formarían un tipo objeto diferente de los *Lenguajes*.

Pero si se trata de programas de computador o simples listas de instrucciones, también serían subtipos del tipo *Lenguajes*.

Lo mismo pasa con *Concepto/Definición*: generalmente se identifican los conceptos con las definiciones rigurosas que dan los libros, y eso también reduciría este subtipo al tipo *Lenguajes.* No quedarían sino dos tipos puros: *Lenguajes* y *Procedimientos*.

Por otra parte, evaluar no es sinónimo de institucionalizar, aunque toda evaluación puede ser una forma de institucionalización, pero no al contrario. La evaluación como actividad didáctica es diferente de la gestión de la situación didáctica. Un proceso se institucionaliza en el momento en que se vuelve semejante al ostentado por los libros, por la guías, por los currículos; en cambio al evaluar lo que se hace es más revisar si ese proceso ha sido asimilado por el estudiante.

Al considerar la faceta Epistémica centrémonos por ejemplo en las siguientes expresiones: $\square\square^2$ y $\square^2\square$. Respecto a ellas podemos formular algunos interrogantes: ¿Por qué son diferentes?, ¿Qué significan?, ¿Qué representa cada expresión? , ¿Por qué el cuadrado en sitios diferentes?, ¿Los estudiantes caen en la cuenta?, generalmente se usan estas notaciones sin la suficiente explicación ni profundización sobre lo que el cuadrado está haciendo sobre cada una de las expresiones y mucho menos reflexionando si para los estudiantes significan lo que nosotros queremos que ellas signifiquen. Este caso es un prototipo de cómo la simbología de las matemáticas ocultan los significados de los objetos.

Acerca de la faceta interaccional, ella está marcada por las interacciones que se den o no, a propósito de los temas que se estén desarrollando, en cambio lo normativo es todo aquello que explicita o tácitamente rige la interacción (profesor-alumno; alumno-alumno) en la clase, y además de la interacción determina y condiciona el desarrollo de los contenidos y de todo el curso. Luego lo normativo no se reduce solamente a lo interaccional.

En el archivo de anexos se encuentra una transcripción fiel de las intervenciones de Vasco en el segundo congreso CIVEOSen diálogo con Godino.

ANEXO intervenciones de Vasco en el segundo congreso CIVEOS: Según diálogo con Godino,

"Aquí volvería a cuestionar la división entre estos seis tipos de objetos primarios: lenguajes, problemas, conceptos/definición, proposiciones y argumentos, procedimientos. No hay manera de estipular restricciones puramente verbales para lograr un sublenguaje técnico que pueda contradecir las inclusiones categoriales indicadas por los términos (que faltan, no identificables con los conceptos), los predicados (que faltan), los operadores lógicos (que faltan), las proposiciones (como fórmulas bien formadas como sucesiones simbólicas a partir de términos, predicados y operadores lógicos), las definiciones (como un tipo de proposiciones bimembres, tampoco identificables con los conceptos) y los argumentos (como sucesiones de proposiciones) dentro de la categoría de lenguaje o lenguajes, a menos que se entienda "lenguajes" como

“lenguas” en el sentido de sistemas lingüísticos saussureanos. Pero en este caso, también en todas esas categorías el investigador se encontraría con lenguajes.”

“En cualquier sistema teórico que pretenda agregar restricciones lingüísticas a las categorías primarias se pretende operacionalizarlas de manera que otro investigadores puedan clasificar exitosa y válidamente (en forma triangulable por otros expertos en los procedimientos investigativos del paradigma) los fenómenos observados en esas categorías, que deberían pretender ser disyuntas, exhaustivas y no vacías. Aquí no veo posible cumplir con la disyunción, y sin los términos y los operadores ni siquiera se puede pretender la exhaustividad de las subcategorías de la de lenguaje(s).”

En los juegos de lenguaje de los investigadores no se puede pretender tener una categoría Lenguajes que sea útil para los análisis sin subdividirla en forma operacional, pública y contrastable a través de los análisis que hagan otros investigadores, de tal manera que se distingan los lenguajes análogos, gestuales, tonales, icónicos e indexicales de los lenguajes articulados que requieran una interpretación de segundo orden en modelos mentales privados solo accesibles a la experiencia personal del sujeto individual que, como diría Leibnitz en la Monadología, vive encerrado en su cárcel craneana, apenas con unas estrechas ventanitas hacia el pasado.

“En cuanto a aceptar la división inicial de los fenómenos fundamentales observables en una investigación en prácticas, procesos, objetos y conceptos, para mí “procesos” es la categoría más general de las tres: a ciertos procesos observables y replicables los llamamos prácticas, que incluirían los discursos y actos de habla que los acompañan, motivan o explican (que son las praxeo-logías de Chevallard, que también son procesos); a otros procesos técnicos los llamamos procedimientos (las técnicas que Chevallard acompañaría con las tecno-logías), y a ciertos procesos mentales los llamaríamos conceptos en el sentido de procesos de conceptualización y razonamiento sobre esas conceptualizaciones, que ciertamente son procesos mentales, que aunque no sean directamente observables, sí se pueden inferir a través del examen de los productos, que serían objetos”.

“Los conceptos serían solo un tipo de los distintos objetos mentales con los que trabaja el pensamiento, el intelecto o la razón, pues en filosofía se distinguen al menos tres: los conceptos, los juicios y los razonamientos. Los tres son tipos privados o mentales no ostensibles que corresponden a tres tipos públicos y ostensibles de la categoría Lenguajes: los predicados, las proposiciones y los argumentos”. …Si se separan como tipo del EOS los objetos que emergen de las prácticas, habría que agregar la categoría de los sujetos de las prácticas, y habría que considerar los procesos de objetivación y los procesos de subjetivación, como los distingue Luis Radford. Quedarían pues como las cuatro grandes categorías fundamentales procesos (ostensibles o públicos y no ostensibles, privados o mentales), prácticas (discursivas y no discursivas, que también pueden ser ostensibles o públicas, como las prácticas de enseñanza, pero también podrían ser no ostensibles, privadas o mentales, como las prácticas de pensamiento, reflexión, meditación u otras), sujetos y objetos (ostensibles o públicos y no ostensibles, privados o mentales)”.

“Las definiciones verbales o “de diccionario” (“léxicas”) serían un subtipo de las proposiciones, y los argumentos serían sistemas de proposiciones; pero faltarían otros sistemas de proposiciones que no son argumentos pero sí son expansiones discursivas, como las narraciones, las explicaciones o las teorías formales axiomatizadas, en donde figuren solo las definiciones, los axiomas y los teoremas pero no las demostraciones.

Además, con la lingüística de Chomsky, la Teoría General de Procesos y Sistemas y la Teoría de Modelos en Lógica, no basta con señalar dentro de la categoría Lenguaje las proposiciones y las expansiones discursivas como los argumentos u otras, pues habría que distinguir en cada proposición sus componentes, no solo los predicados o sintagmas verbales o sintagmas predicales, sino también los sintagmas nominales y los sintagmas operacionales.

En la Teoría General de Procesos y Sistemas los sintagmas nominales corresponden a los elementos o componentes del sustrato de un sistema; los sintagmas predicales corresponden a las relaciones de la estructura del mismo sistema, y los sintagmas operacionales corresponden a las acciones, transformaciones u operaciones de la dinámica del mismo sistema. No pueden omitirse ninguno de los tres”.

Y claro que ese refinamiento se hizo necesario cuando, por ejemplo, quisimos analizar lo que dice la profesora cuando escribe un límite como “lim [x --> 0] (1/x)”, y vimos que no aportó mucho escribir en la matriz categorial que eso es lenguaje, pues no pudimos clasificar ese sistema de semiótico en un subtipo de lenguaje, como proposición, pues no lo es, ni siquiera es una fórmula bien formada. Tampoco es un argumento, ni un predicado ni una propiedad. Parece que en algunas exposiciones del EOS se propuso que las propiedades son ciertos tipos de proposiciones, pero una cosa es la propiedad conmutativa de la multiplicación y otra cosa es una proposición que la enuncie, como “xy = yx”. Al respecto, Vasco propone:

“En el EOS, este sistema semiótico ya producido o representación semiótica “lim [x --> 0] (1/x)” no se puede catalogar en un subtipo de Lenguajes que tenga poder analítico y permita analizar la práctica de enseñar la unidad de límites al comienzo del Cálculo I. Parece necesaria la categoría de término, con la definición recursiva usual; pero no esta sería suficiente sin la categoría operador, para reconocer el papel que juega aquí el símbolo ‘lim’ para representar el operador lineal sobre un espacio funcional, cuyos invariantes son las funciones continuas.

Si la profesora quiere continuar la escritura en el tablero, tiene que usar un relator binario o predicado diádico simbolizado por ‘=’. Pero apenas escriba el relator binario ‘=’, le va a quedar difícil seguir, porque según lo dice ella misma en discursos previos, ‘oo’ (el ocho dormido) no es un objeto matemático, y sin embargo, sí escribe un sistema semiótico “con sentido completo” o “proposición” en la que aparece este término ‘oo’:

“lim [x -->0] (1/x) = oo”.

No nos ganamos nada con clasificar esta representación semiótica como Lenguaje o como Proposición, pues todo el análisis de esta proposición para su descripción categorial y para su idoneidad didáctica depende de que se especifiquen los usos y significados de los términos básicos ‘x’, ‘0’, ‘1’, ‘oo’; de que se aclare el uso y el significado de la flecha ‘-->’; del operador *de inversión ‘1/(_)’ y de su valor en los casos del 0 y del oo; de las convenciones epistémicas respecto a la lectura del segmento ‘x-->0’, como “equis tiende a cero” o “equis se acerca a cero”, que son conversiones de un registro semiótico a otro. Aún con esas herramientas analíticas, todavía no hemos dicho gran cosa si no analizamos por qué y cuándo y en qué sentido se liga el término de la izquierda ‘lim [x -->0] (1/x)’ con el de la derecha ‘oo’ por medio del relator binario ‘=’.”, Por todo lo anterior al intentar avanzar en el análisis, no tenemos más remedio que experimentar la necesidad de refinar las categorías del EOS, en particular, la categoría Lenguajes.*

El EOS prefiere no hablar de obstáculos ni dificultades ni errores, sino de conflictos semióticos. El problema es que al hacer el análisis, se empieza a ver que las dificultades más de fondo se dan precisamente cuando ni el profesor ni el estudiante parecen tener ni sentir ningún conflicto! El observador no ve conflictos como conductas disruptivas en el aula de clase que observa (que sí los ve cuando el saber personal cognitivo del estudiante choca con el saber institucional epistémico que el profesor representa) pero sí detecta una especie de conflicto o dificultad entre el discurso que desarrolla el profesor y lo que es el saber epistémico que el observador cree que debería presentar el docente como representante de lo institucional, o entro lo que el profesor trata de institucionalizar con recomendaciones, instrucciones, ejemplos y evaluaciones y lo que el observador cree que debería haber institucionalizado, pues no es lo que el observador considera epistémico. Efectivamente, es el investigador el que experimenta esa sensación de que hay un conflicto, no el profesor ni los estudiantes.

Se vio muy bien en la manera como la profesora agrega “dx” a las derivadas usuales, pensando que con eso les ayuda a sus estudiantes a recordar la derivada interna cuando la variable sobre la que actúa la función no sea x sino otra función de x. Eso no es epistémico ni institucional, pues no aparece ni en el texto, ni en el syllabus ni en lo que dicen y usan otros profesores de cálculo I de la misma universidad. Más aún, es un error epistémico confundir la diferencial con la derivada; pero desde el punto de vista didáctico, la profesora cree que eso ayuda, y lo confirma con que a sus estudiantes les va mejor en esas preguntas capciosas en donde los estudiantes de otras secciones “caen en la trampa” de derivar directamente.

Ni el caso de dificultades y obstáculos epistemológicos, semióticos y didácticos que no producen conflicto, ni el caso de la tensión entre lo que es personal-cognitivo del profesor respecto al saber epistémico institucional están contemplados en el EOS, y por eso son conclusiones muy valiosas que constituyen un aporte metodológico al EOS y a futuras investigaciones.

Es decir que si afinamos el análisis y los resultados, vemos dificultades y tensiones que no producen conflicto abierto, y vemos un nivel intermedio entre el saber epistémico institucionalizado y el saber cognitivo personalizado por cada estudiante, así no sepamos cómo llamarlo, pues es cognitivo en el maestro pero él cree que es epistémico, y así lo hace aparecer antes sus alumnos, considerando “de buena fe” que debe institucionalizarlo.

En los enfoques citados en el estado del arte se consideran los obstáculos cognitivos y los epistémicos, caracterizados fundamentalmente porque los cognitivos están asociados a procesos en los estudiantes, mientras que los epistémicos están estrechamente relacionados con los maestros. Sin embargo lo encontrado en esta investigación, respecto al uso de dx por parte de la profesora para representar la derivada de la función, como ha sido ampliamente discutido en el análisis, hace emerger una nueva categoría que podríamos ubicar en la mitad entre lo cognitivo y lo epistémico, que no es exactamente cognitivo ni epistémico pero que a la vez tiene dimensiones cognitivas y epistémicas.

No es cognitivo como lo considera el EOS pues es una práctica que hace la profesora y no el estudiante. No es epistémico como lo considera el EOS pues este uso de dx no está institucionalizado en el saber sabio: textos, generalidad de maestros. Es una práctica cognitiva de la maestra, es una apropiación del saber muy particular de ella; es como una transposición didáctica del saber sabio al saber de los textos, las instituciones; saber sabio por parte de la profesora pero no epistémico porque no es compartido: no epistémico porque no es compartido y no cognitivo porque no es de los estudiantes. Es la apropiación propia de la profesora, que en el espacio de la clase se vuelve institucional por el rol que ella desempeña allí. Esto nos está diciendo que la clasificación cognitivo - epistémico tal como aparece en la teoría en estos momentos no da cuenta para casos como el aquí reportado en cuanto a la apropiación del conocimiento por parte de la profesora. Por un lado son dos polos que parecen ser disyuntos, y por otro lado se requieren como varios estadios grises entre un polo y el otro. Lo didáctico configura una institucionalidad diferente a la de los matemáticos puros, ni siquiera a la de los textos de pregrado.

En el EOS todo conflicto genera un obstáculo pero el aporte es que se han encontrado unos obstáculos que no producen conflicto. emerge un objeto que no es personal ni epistémico.

LIMITACIONES

Una de las limitaciones en la observación es precisamente que no es natural ni común que otro profesor asista a una clase, converse con el profesor titular, tome fotos, menos aún en la Universidad en una Facultad de Ingeniería; eso causa un elemento extraño e intimida en algunos casos comportamiento y desempeños. Además que no fue nada fácil conseguir un colega, otro profesor, en este caso, profesora, dispuesta a abrir su aula a la observación de un tercero, pues se expone en todo sentido: en sus saberes, sus prácticas, sus deficiencias y fortalezas, y porque no se sabe el uso que el investigador pueda darle a esta información.

El pensum unificado de Cálculo Diferencial en temáticas, parcelado en semanas, la realización de pruebas conjuntas, si bien garantiza ciertos desarrollos y cumplimientos de los cursos, también actúan de cierta manera como limitantes en el sentido que establecen unos tiempos, unas dinámicas que se deben cumplir, y por lo tanto puede hacer más difícil el permitir más interacción, más trabajos en grupo, más retroalimentaciones, más revisión de talleres, más pasarlos al tablero, más puestas en común.

La mayor limitación precisamente fue la falta de datos sobre la comprensión de los estudiantes, sobre las dificultades que encuentran en proceso de apropiación del cálculo, por la poca oportunidad que se les da en las clases de expresarse, de preguntar, de equivocarse, de presentar ejercicios, talleres, tareas y, sobre todo, de recibir la debida evaluación y retroalimentación.

RECOMENDACIONES PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Las dificultades que encuentran los estudiantes en estas áreas básicas del currículo en la formación matemática debe ser un problema al cual las Facultades de Ingeniería le deben poner atención, pues hay un marcado desinterés por los problemas cognitivos, didácticos y epistémicos en las prácticas educativas. Es decir, la enseñanza, la pedagogía son valoradas en menos rango que los problemas de la ingeniería, de la programación, de las bases de datos, es decir, no se dimensiona de la misma manera y si no se cambia esa mirada, los intentos por mejorar deserción y repitencia se van a quedar en la superficie, en los formalismos, pero no van a atacar la raíz del problema al interior de las aulas con maestros, estudiantes y saberes.

Es deseable que más profesores de las Facultades de Ingeniería permitan observación de sus prácticas, pues solo de esta manera se logra conciencia sobre las bondades y deficiencias que cada uno ostenta en su práctica,, a partir de lo cual puede construirse una verdadera cualificación de prácticas, saberes y de formación.

Esa vigilancia epistemológica sobre las creencias, los discursos, las actuaciones, los significados, los sentidos, los saberes, que debemos los maestros mantener permanentemente es la base para objetivar y tomar conciencia acerca de si lo que creemos, pensamos, decimos, enseñamos y expresamos es potencialmente generador de dificultades u obstáculos.

En las preguntas, las dudas, las dificultades, los errores que observamos en los estudiantes están los verdaderos síntomas o indicadores de lo que no han comprendido, de lo que aún no han conceptualizado, de lo que los hace repetir una y otra vez y obstaculizar su avance en su carrera profesional. Por tanto la atención que se dé a ellos, y la gestión que hagamos puede marcar su avance o estancamiento en ese camino por el que están transitando hacia unas bases sólidas en cálculo para su formación profesional y académica.

Se debe favorecer la buena práctica pedagógica en los cursos, el trabajo en grupo, las puestas en común como unas orientaciones que permeen toda el área de matemáticas de las Facultades, pues solo contrastando, argumentando, resolviendo y expresando, los estudiantes tendrán la libertad de preguntar y el profesor de revelar esas limitaciones y dificultades.

Y en cuanto a señalar algunos elementos para una agenda de trabajo para futuras investigaciones, sería deseable profundizar en la bibliografía que se agrega a continuación con sus consecuentes complementos y contrastes en tales escuelas.

Para terminar se presenta una lista de referencias de la escuela de Utrecht para su estudio, si se quiere profundizar en futuras investigaciones en la sección 2.2.3 del capítulo II

- Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, K. P. E. (1994). Developing realistic mathematics education. CD-Beta Press, Utrecht.

- Lange, J. de (1995). Assessment: No Change without Problems. In: Lange, J. de (1996), Using and Applying Mathematics in Education.
- Streefland, L. (1991). Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Streefland (ed.) (1991). Realistic Mathematics Education in Primary School. Utrecht: CD-b Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Treffers, A. (1975). De Kiekkas van Wiskobas. Beschouwingen over Uitgangspunten en Doelstellingen van het Aanvangs- en Vervolgonderwijs in de Wiskunde. Leerplan publicatie nummer 1. Utrecht, the Netherlands: IOWO.
- Treffers, A. (1987). Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in The Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (ed.), Realistic Mathematics Education in Primary School. Utrecht: CD-b Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). Assessment and realistic mathematics education. Utrecht: CD-b Press / Freudenthal Institute, Utrecht University. New Theory: Realistic Mathematics Education.

Resultados esperados

6.3.1 Relacionados con la generación de conocimiento:

A través del estudio de los obstáculos, conflictos y dificultades en el trabajo inicial del cálculo diferencial en estudiantes de Ingeniería se aportó en:

- La caracterización y explicación de la estructura y funcionamiento del obstáculo en el sistema didáctico.
- Herramientas teóricas y metodológicas a formadores de profesores, profesores y estudiantes para el mejoramiento de su práctica docente y de su aprendizaje en el cálculo diferencial en diferentes niveles de escolaridad.
- Herramientas teóricas y metodológicas para la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial escolar en estudiantes universitarios.

6.3.2 En relación con el fortalecimiento de la comunidad científica en Educación Matemática

- Aportar herramientas teóricas y metodológicas para el análisis y reflexión de los planes de mejoramiento en el diseño, implementación, desarrollo y evaluación de la investigación curricular de los programas de Ingeniería.

6.3.3 Dirigidos a la apropiación social del conocimiento en didáctica de las matemáticas y la formación de profesores de matemáticas

- Aportar elementos de profundización, sustentación y fundamentación epistemológica y metodológica a la investigación sobre obstáculos, conflictos, dificultades que se presentan al iniciar el estudio del cálculo diferencial escolar.
- Desarrollar propuestas investigativas en la temática de la formación de profesores que tengan en cuenta los obstáculos detectados en el aprendizaje del cálculo.
- Así mismo, se esperan impactos a partir del uso de los resultados de investigación en lo institucional, en relación con la investigación en didáctica de las matemáticas y en la formación de profesores de matemáticas, con las comunidades de investigadores y con las políticas educativas. Se espera plantear propuestas didácticas para superar los obstáculos caracterizados y para desarrollar prácticas escolares que conduzcan a una transición más continua del conocimiento superando las rupturas y los obstáculos; una mayor sustentación teórica y metodológica en el área de matemáticas del ciclo básico de ingeniería para la evaluación de las prácticas docentes de los profesores de matemáticas y una ampliación de la base teórica y metodológica de los investigadores, grupos de investigación, formadores de profesores, profesores en ejercicio en la línea de investigación concerniente a la formación de profesores de matemáticas que tengan en cuenta la caracterización de las PEUC y los obstáculos inferidos a partir de su estudio.
- Los acercamientos descritos anteriormente permitieron obtener algunos resultados prometedores para la investigación que profundizo la tesis doctoral en esta dirección. Consideramos que estos favorecen la discusión y elaboración de propuestas. Hemos encontrado que la detección de dificultades, obstáculos y rupturas, y su clasificación en semióticos, didácticos, epistemológicos, culturales, etc., plantean un gran número de problemas no triviales.
- Se espera haber señalado varios elementos de análisis en dirección a elaborar reflexiones de orden epistemológico y didáctico en cuanto a comprender, interpretar y quizá aportar en la solución, de una manera más amplia, de las dificultades y obstáculos detectados en la comprensión del cálculo diferencial. El trabajo empírico, la recolección y análisis de datos, confirmo las bondades y también las limitaciones de este acercamiento.

Resultados del proceso metodológico

- Refinamiento de nociones asociadas al concepto de obstáculos epistemológico como conflictos y dificultades.
- Instrumentos que permitan recolectar la información pertinente y que posibiliten el estudio de potenciales obstáculos al iniciar el estudio de cálculo en primer semestre de Universidad. La Matriz Documental, La Matriz Categorial Descriptiva, La Matriz Categorial Descriptiva (Prácticas Matemáticas Y Configuración De Objetos) Y De Oposiciones y la Matriz de Facetas de Idoneidad.

- Información necesaria y pertinente, en el marco del currículo en matemáticas en Ingeniería que posibilite, gestione y sistematice una reflexión permanente sobre formas de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial.
- Diseño metodológico que sirva para el análisis didáctico y de idoneidad de manera general.

6.4 Impactos de la investigación

6.4.1 Impactos a partir del uso de los resultados de investigación en lo institucional

- Propuestas Didácticas para superar los obstáculos, conflictos y dificultades caracterizados y para unas prácticas escolares que conduzcan a una transición más continúa del conocimiento superando las rupturas y los obstáculos.
- Mayor sustentación teórica y metodológica en el área de matemáticas del ciclo básico de Ingeniería para la evaluación de las prácticas docentes de los profesores de matemáticas.
- Consolidación de los planes de mejoramiento académico y de la gestión curricular del ciclo básico de Ingeniería y del área de matemáticas de la Facultad de Ingeniería.

6.4.2 Impactos en relación con la investigación en didáctica de las matemáticas y formación de profesores de matemáticas

- Ampliación de la base teórica y metodológica de los investigadores, grupos de investigación, formadores de profesores, profesores en ejercicio en la línea de investigación concerniente a la formación de profesores de matemáticas que tengan en cuenta la caracterización de las PEUC y los obstáculos inferidos a partir de su estudio.

6.4.3 Impactos en relación con las comunidades de investigadores y políticas educativas

- Desarrollo de transformaciones en las políticas socioeducativas en la formación de profesores de matemáticas para la educación media y superior.
- Propuestas de innovación y mejoramiento de las prácticas docentes en el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo diferencial en las Facultades de Ingeniería.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognoscitivos y didácticos. "Ingeniería Didáctica en Educación Matemática", pp. 97-135. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá. **1995**. Una Empresa Docente. Pedro Gómez, editor.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 10, (2-3), pp. 241-286.

Bachelard, G. (2004). *La formación del espíritu científico*. Mèxico: Siglo XXI. (Obra original publicada en francés en 1938).

Bergé, A. (2004). Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la completitud en la enseñanza universitaria. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Buenos Aires.

Brousseau, G. (1995). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. En Serie Educación Matemática. "Módulo Educación Matemática", nº1, (pp. 264-326). Ibagué -Tolima, Colombia.

_______________ (1983/1998). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, *2*(3), pp. 303-346.

Brousseau, G. (1976) La problématique et l'enseignement des Mathématiques, XXVIIIème Rencontre de la CIEAEM, Louvain la Neuve

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En: *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8;* Sevilla. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Contreras, A. (2000). La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En: Climent, N. de los A.; Contreras, L. C. y Carrillo, J. (Eds.). *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 71-86). Huelva: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Actas EMA (Encuentro de Matemáticos Andaluces, Sevilla, pp. 305-320).

Contreras,A., Garcia,M. y Font, V. (2012). Análisis de un proceso educativo sobre la enseñanza del límite de una función. Bolema-Mathematics Education Bulletin, 26(42).

Cook, T. y Reichard, Ch. (1988). *Métodos cualitativos y cuantitativos de investigación.* Madrid: Morata.

D'Amore, B. (2007). Epistemología, didattica della matematica e pratiche di insegnamento. *La matematica e la sua didattica*, *21*(3), pp. 347-369.

D'Amore, B. y Arrigo, G. (1999). "Lo veo, pero no lo creo": Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación Matemática* (Mexico DF), *11*(1), pp. 5-24.

--------------------------------------- (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*. (México DF). *16*(2), 5-20.

D'Amore, B. (2005) *Bases filosóficas, pedagógicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*, Reverté.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., Verschaffel, L. (2007).The Illusion of Linearity: From Analysis to ImprovementSeries: Mathematics Education Library, Vol. 41 Berlin/New York: Springer-Verlag.

Delgado, C. (1998) Estudio Microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de Límite y Continuidad en universitarios de primer curso**.** Tesis doctoral inédita. Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals, Bellaterra, Otoño 1998

Díaz-Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Granada: Universidad de Granada. Consultado en http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semióticas/monografiatfs.pdf

Díaz-Godino J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas para Maestros*. Granada: Universidad de Granada

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En E. Sanchez (Ed.) Antología de la Educación Matemática. Mexico: Cinvestav IPN. Trad. Parra, M del original en francés: "Graphiques et equations" (1988). L'Articulation de deux registres" Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. pp. 125-139.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En Perspectives on the teachng of Geometry for the 21 Century. Mammana, C., Villani, V., pp 37-51. (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2006a). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar de registro de representación. *La Gaceta de la RSME., 9*(1), pp. 143-168.

Duval, R. (2006b). *La conversión des représentations: Un des deux processus fondamentaux de la pensée*. Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.

Ferrini-Mundy, J. y Guadard, M. (1992). Secondary school calculus: preparation or pitfall in the study of college calculus. *Journal of Research in Mathematics Education, 23*(1), 56-71.

Fichant, M. y Pécheux, M. (1975). *Sobre la historia de las ciencias* (2ª ed.). México: Siglo XXI. (Obra original publicada en francés en 1969).

Goldin, G. (2000). A scientific perspectives on structured, task-based interviews in mathematics education research (pp. 517-545). En A. Kelly & R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education.* Mahwah New Jersey- London: LEA.

Gómez, A. (2000). Las concepciones escolares de los decimales. X JAEM. (pp. 543-548). Zaragoza

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10, 7-37. pp. 6-10.

Godino, J., Font V., D'Amore B., (2008) Documentos discusión Seminario DIE-UD. 2007-2008.

Kilpatrick, J. A. (1992). History of research in Mathematics Education. En: Grouws, D. (Ed.). *Handbook or research on Mathematics teaching and learning* (pp. 3-38). New York: MacMillan.

Lleras G., Gutiérrez, S., Bernal, V., (2005). Desarrollo de la abstracción reflexiva en estudiantes de cálculo diferencial de la escuela colombiana de ingeniería mediante la teoría APOE. Escuela Colombiana de Ingeniería. Documento inédito.

Moru, E. (2006). Epistemological Obstacles in Coming to Understand the Limit Concept at Undergraduate Level: A Case of the National University of Lesotho. Tesis doctoral inédita**.**

Neira, G. (2012). Del Algebra al Cálculo: ¿Transición o Ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica. En (Universidad Distrital Francisco José de Caldas): Pensamiento, Epistemología y Lenguaje Matemático. Libros de los énfasis del Doctorado Interinstitucional en Educación., n. 2, pp. 13-42.

Neira, G. (2000). El pasó del álgebra al cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. *Revista Ingeniería* (Universidad Distrital Francisco José de Caldas), n. 1, pp. 87-92.

---------------- (1998). El Analista de George Berkeley. Critica al cálculo de Newton y Leibniz. Bogotá. Ediciones FODUN.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Pino-Fan, L. (2013). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada (España).

Pozo, J. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata.

Radford, L. D'Amore, B. y Bagni, G. (2007). Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática. Cuadernos del seminario en educación, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, pp. 103-129

Radford, L. (2002). On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking. Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 26, Cockburn, A. and Nardi, E., Vol. 4, pp. 81-88

Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. EMA, "Una Empresa Docente" J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds). México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 69 – 108.

Sbaragli, S. (2004). Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito Teachers' convictions on mathematical infinity. Universidad de Bologna, Tesis doctoral inédita.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Studies in Mathematics Education Series. London, The Falmer Press.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* pp. 151-169.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. En: Grouws, D. (Ed.), *Handbook or research on Mathematics teaching and learning* (pp. 495-510). New York: MacMillan.

Vasco, C. E. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. In D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West, & M. S. Wiske (Eds.), *Software goes to school: Teaching for understanding with new technologies* (pp. 54-69). New York-Oxford: Oxford University Press.

Vasco, C. E. (1991). ¿Hay revoluciones o rupturas epistemológicas en las matemáticas? *Revista de la Facultad de Ciencia*s (Universidad Javeriana), *1*(4), pp. 29-52.

Vasco, C. E. (2009). Acerca de "concept-image, procept, reification". En: *Seminario de investigación del DIE-UD*. Bogotá: DIE-Universidad Distrital Francisco José de Caldas.