Legislación

Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, núm. 156 de 08 de agosto de 2007, pp.15-25.

Decreto 416/2008, de 22 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía. Consejería de Educación, pp.8-15.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Boletín Oficial del Estado, núm. 106, de 04 de mayo de 2006, pp. 17158-17207.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. Boletín Oficial del Estado, núm. 295, de 10 de diciembre de 2013, pp. 97858- 97921.

Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. Consejería de Educación, pp.23-43.

Orden de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el Currículo correspondiente a la Educación Infantil en Andalucía. Consejería de Educación, pp.17-53.

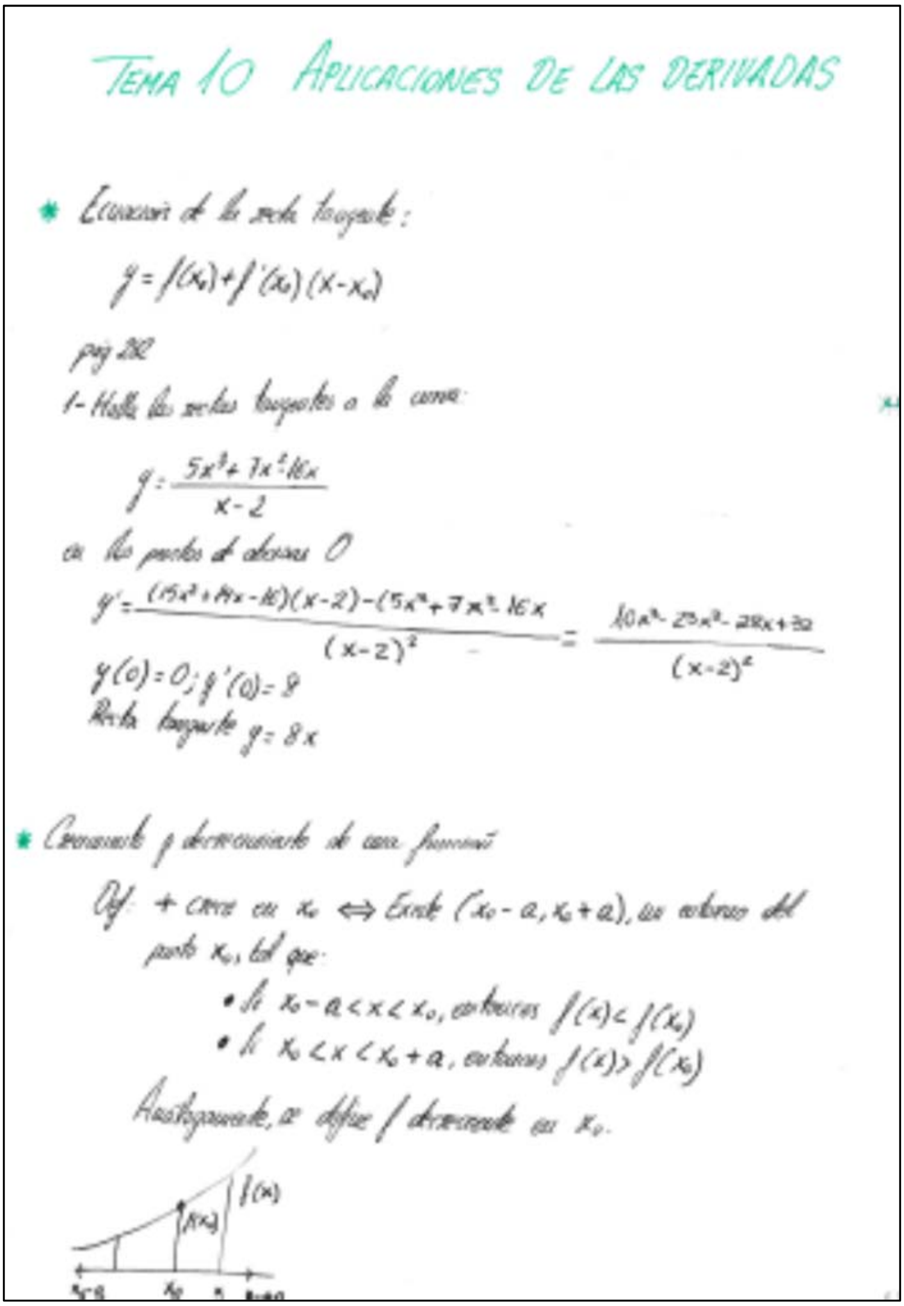
Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Ministerio de Educación y Ciencia, pp.1-183.

Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. Ministerio de Educación y Ciencia, pp.45381-45477.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, pp.169-545.

Anexos

Anexo I. Apuntes de clase correspondientes al libro de texto de la editorial Anaya



TEMA 10 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

* Ecuación de la recta tangente:

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

pág 282

1- Halla las rectas tangentes a la curva:

$y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$

en los puntos de abscisa 0

$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x-2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x-2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x-2)^2}$

$y(0) = 0$; $y'(0) = 8$

Recta tangente $y = 8x$

* Crecimiento y decrecimiento de una función

Def: f creciente en $x_0 \Leftrightarrow$ Existe $(x_0 - a, x_0 + a)$, un entorno del punto x_0, tal que:

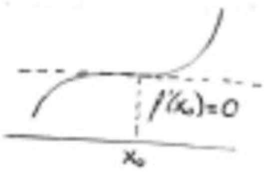
- Si $x_0 - a < x < x_0$, entonces $f(x) < f(x_0)$
- Si $x_0 < x < x_0 + a$, entonces $f(x) > f(x_0)$

Análogamente, se define f decreciente en x_0.

Utilizando la derivada:

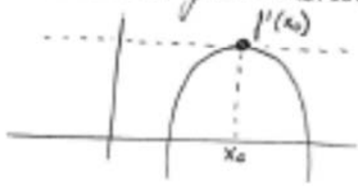
Si $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ crece en x_0

$<$ $\Rightarrow f$ decrece



¿Cómo identificamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento?

$f'(x)=0$



* Definir máximos y mínimos relativos

f tiene un máximo relativo en el punto de abcisa x_0 $\Leftrightarrow$ Existe un número a tal que si $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$, entonces $f(x) < f(x_0)$

Análogamente, se define mínimo relativo en x_0

¿Cómo identificamos los extremos relativos?

Calculamos los puntos singulares o críticos:

$f'(x)=0$

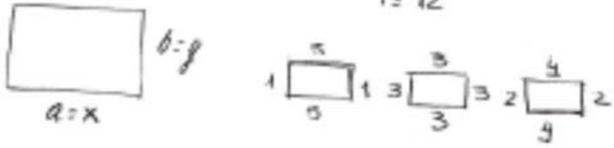
Las soluciones de esta ecuación, son los candidatos (posibles extremos)

* Ver ejem. pág. 85

* Optimización de funciones

Los problemas de optimización tratan situaciones en las que se busca el valor máx. o mín. de una variable bajo ciertas condiciones (camino más corto, mínima superficie, máximo volumen).

Ejemplo: De entre todos los rectángulos de perímetro 12cm: ¿Cuál es de mayor área?



⇒ Busco función que represente esta situación:

$A(x,y) = x \cdot y \Rightarrow A(x) = x(6-x) = 6x - x^2$ en $(0,6)$

$\begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ x + y = 6 \end{cases}$ Dom. $(0,6)$

Puntos singulares:

$A'(x) = 6 - 2x = 0 \therefore x = 3$

	$(0,3)$	$(3,6)$
f'	+	−
f	↗	↘

máximo

Solución = $\boxed{M(3,3)}$

● Otra forma:

$y = f(x)$

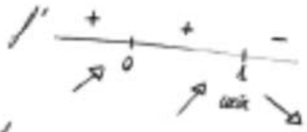
$y' = f'(x) = 0$
- x_0; $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ máx.
- x_1; $f''(x_1) > 0 \Rightarrow$ mín.
- x_2; $f''(x_2) = 0$, $f'''(x_2) \neq 0 \Rightarrow x_2$ P.I

Ejercicio (pág. 285)

3.a) Halla todos los puntos angulares. $y = -3x^4 + 4x^3$

$y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x+1)$

$y' = 0$ → $x = 0$, $x = 1$ } Puntos angulares



* Concavidad y convexidad (f'')

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava en x_0

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es convexa en x_0

$f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ punto de inflexión

Cambio de curvatura ⇒ P.I

* Ver ejemplo pág 287. / resuelto.

Ejemplo

$y=(x-1)^4$

$y'=4(x-1)^3=0 \Rightarrow x=1$

$y''=12(x-1)^2 \Rightarrow y''(1)=0$

$y'''=24(x-1) \Rightarrow y'''(1)=0$

$y^{iv}=24 \Rightarrow y^{iv}(1)=120 \neq 0 \Rightarrow$ mín

Ejercicio (pág 289)

1) ~~Descomponer el número 36~~

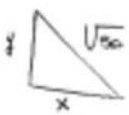
Halla el número positivo cuya suma, con 25 veces su inverso sea mínima.

$f(x)=x+\frac{25}{x}$

$f'(x)=1-\frac{25}{x^2}=\frac{x^2-25}{x^2}=0 \left\langle \begin{array}{l} x=5 \rightarrow f(5)=10 \\ x=-5 \text{ (no vale, pues } x>0) \end{array} \right.$

Observación: función continua en $(0+\infty)$.

2) De los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10cm, halla las dimensiones del de área máxima.



$x+y=10 \Rightarrow y=10-x$

maximizar: $\left.\frac{x\cdot y}{2}\right\} f(x)=\frac{x(10-x)}{2}=\frac{1}{2}(10x-x^2)$

$f'(x)=\frac{1}{2}(10-2x)=-x+5$

$f'(x)=0 \rightarrow -x+5=0; \quad x=5$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 5 \end{array}\right\} A = 12'5\ cm^2$$

$f'(x)$ +

$f'(x)$ ↗ 5 ↘

max relativo y absoluto

pág 289

4- Determinar las dimensiones de un recipiente cilíndrico de volumen 6'28l para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata

$V = 6'28l$

$$\left.V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot h\right] \pi R^2 h = 6'28\ dm^3$$

$A_T = 2 \cdot A_B + A_L = 2\pi R^2 + 2\pi R h$ minimizar

$$h = \frac{6'28}{\pi R^2} = \frac{2}{R^2}$$

$\pi \simeq 3'14$

$$f(R) = 2\pi \cdot R^2 + 2\pi \cancel{R} \cdot \frac{2}{R^{\cancel{2}}} = 2\pi R^2 + \frac{4\pi}{R} = \frac{2\pi R^3 + 4\pi}{R}$$

$$f'(R) = \frac{6\pi \cdot R^2 \cdot R - (2\pi R^3 + 4\pi) \cdot 1}{R^2} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi \cdot R^3 - 4\pi}{R^2} = \frac{4\pi R^3 - 4\pi}{R^2} =$$

$$= \frac{4\pi (R^3 - 1)}{R^2}$$

$f'(R) = 0;\ 4\pi (R^3 - 1) = 0;\ R^3 - 1 = 0 \Rightarrow R = 1$ posible max o min

$f'(R)$ 0 − 1 +

↘ ↗

$R = 1 \Rightarrow h = 2$ unid

(Pág 306)

35 Dada la función $f: [1, e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la mínima pendiente.

Pendiente recta tangente $\to f'(a)$

Llamamos: $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}$,

Puntos singulares:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3}\ ;\ f''(x) = 0\ ;\ x = 2$$

$$\underset{}{f''<0}\ \underset{2}{|}\ f''>0$$

$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2 ; f'(2) = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{4}(x-2)$$

37- El valor, en millones de euros de una empresa viene dado por:

$f(t)=9-(t-2)^2$, $0 \leq t \leq 4'5$. Deduce en qué valor de t alcanzó su máx. valor y en qué valor de t alcanzó su valor mínimo

$f'(t)=-2(t-2)$

$f'(t)=0 \rightarrow t=2$

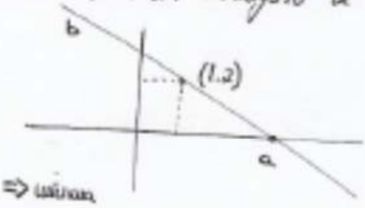
$f''(t)=-2<0 \rightarrow (2,9)$ es un máximo

Como la función es una parábola con las ramas hacia abajo, el mínimo se alcanzará en uno de los extremos del intervalo.

$f(0)=5$

$f(4.5)=2'75 \rightarrow (4.5;\ 2'75)$ es un mínimo

43- De todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$ encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.



$A=\dfrac{a \cdot b}{2} \Rightarrow$ mínima

Ecuación segmentada o canónica

$y=2x+1$

$2x-y=-1 \rightarrow \dfrac{2x}{-1}-\dfrac{y}{-1}=\dfrac{-1}{-1}$

Ecuación segmentaria o canónica

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1;\ b+2a=ab;\ b-ab=-2a;\ b(1-a)=-2a;\ b=\dfrac{-2a}{1-a}$

$$A(a) = \frac{a \cdot \frac{-2a}{1-a}}{2} = \frac{-2a^2}{2-2a} = \frac{-a^2}{1-a}$$

$A'(a) = 0 \Rightarrow -2a(1-a) + a^2 = 0; -2a + 2a^2 - a^2 = 0; a^2 - 2a = 0;$

$a = 0$ (NO)

$a = 2$

$A''(a) = 2a - 2$

$A''(2) > 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$ es un mínimo

Pag 305

18- Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{ll} f(1) = 0 \rightarrow & a+b+c+d = 0 \\ f'(0) = 2 \rightarrow & c = 2 \\ f'(1) = 0 \rightarrow & 3a+2b+c = 0 \\ f'(2) = 0 \rightarrow & 12a+4b+c = 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} a+b+d = -2 \\ c = 2 \\ 3a+2b = -2 \\ 6a+2b = -1 \end{array} \left.\right] \begin{array}{l} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{-3}{2} \\ c = 2 \\ d = \frac{-5}{6} \end{array}$$

Exámenes de Selectividad

2007. Modelo 3, Opción B

Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio es de 2 y 3 euros por cm², respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 m. ¿Cómo elegimos los cuadrados para que el coste total sea mínimo?

$2€/cm^2$ $\quad$ $3€/cm^2$

$A_1 = 2x^2$ $\quad$ $A_2 = 3y^2$

$P_1 + P_2 = 1m$

$4x + 4y = 100$

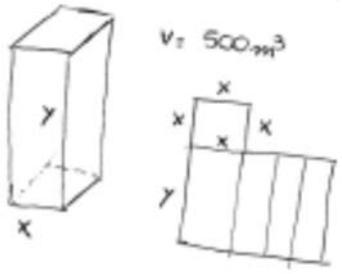
$F(x,y) = 2x^2 + 3y^2 \Rightarrow$ minimizar

Despejo y, sustituyo, derivo, = 0

$\boxed{x = 15}$ $\boxed{y = 10}$

Modelo 6, Opción B

Construir depósito en forma de prisma cuadrangular sin tapadera con capacidad de 500 m³. Dimensiones para superficie mínima.



$V = 500 m^3$

$S(x,y) = x^2 + 4xy$ mínimo

$V = A_{base} \cdot altura$

$V = x^2 y = 500$

$y = \frac{500}{x^2}$

$S(x) = x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{500}{x^2} = S(x) = \frac{x^3 + 2000}{x}$

$S'(x) = \frac{3x^2 \cdot x - x^3 - 2000}{x^2}$

$3x^2 \cdot x^3 - x^3 - 2000 = 0; \boxed{x = 10}$

$V = 100 \cdot y = 500; \boxed{y = 5}$

MODELO 2, OPCIÓN A, EJERCICIO 1

Determina dos números reales positivos sabiendo que su suma es 10 y que el producto de sus cuadrados es máximo.

$P(x,y) = x^2 \cdot y^2 \qquad x, y \in R^+$

$x + y = 10$

$P(x) = x^2(10-x)^2 = x^2(100 + x^2 - 20x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2$

$P'(x) = 4x^3 - 60x^2 + 200x = 0; \quad x = 0$

$x^2 - 15x + 50 = 0 \begin{cases} x = 5 \\ x = 10 \end{cases}$

Anexo II. Apuntes de clase correspondiente al libro de texto de la editorial Santillana


TEMA 9: Aplic derivada

1) Crecimiento y Decrecimiento (Monotonía)

- f es creciente en x_0 si $f'(x_0) > 0$
- f es decreciente en x_0 si $f'(x_0) < 0$

2) Máximos y mínimos relativos (Extremos)

f tiene un máx relativo en x_0 si pasa de creciente a decreciente

*(Al contrario es mínimo relativo - ver gráfica)

¿Cómo calcular los extremos relativos?

Se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$ (x_0 punto crítico)

a) $f'(x)^{+}$ $\quad f'(x)^{-}$ $\quad f'(x)^{+}$

x_0 Máx $\quad x_1$ Mín

b) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Máx relativo

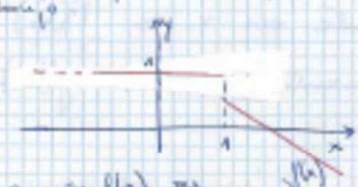
$f''(x_1) > 0 \Rightarrow$ Mín relativo

c) Si $f''(x_0) = 0$, se sigue estudiando las sucesivas derivadas

$f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión (ver ejemplo pág 256)

Ejercicios: pág 272

41) La función derivada de cierta función continua $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función definida a trozos formada por las semirrectas del dibujo.



a) Di ya si $f(x)$ es derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$ y por qué

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$

En $x=1$ $f(x)$ no es derivable ya que $f'(1^-) \neq f'(1^+)$

// f' es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$

b) Estudia el crecimiento y decrec.:

$f(x)$ es crec. en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ $(f'(x) > 0)$

$f(x)$ es decrec. en $(2, +\infty)$ $(f'(x) < 0)$

c) Averigua si $f(x)$ tiene algún extremo relativo y, si es así, para qué valor de x y de qué tipo.

En $x=2$ hay un extremo relativo $(f'(x)=0)$; es un máximo relativo ya que la función es creciente a la izquierda del punto y es decreciente a la derecha.

d) Sabiendo q $f(0)=1$, calcula $f(1)$

$f(x) = x + K \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow K = 1$

$f(x) = x + 1 \Rightarrow \underline{f(1) = 2.}$

42) Sea $f(x) = a e^{x^2+bx+c}$ $a>0$; Calcula a, b, c sabiendo que f min relativo $(1, a)$ y $f(0)=1$

$f'(x) = a(2x+b)e^{x^2+bx+c}$

$\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow a(2+b)e^{1+b+c} = 0$

$\Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow a e^{c} = 1$

$a(2+b)e^{1+b+c} = 0 \Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-2}$

$a e^{1+b+c} = a \Rightarrow e^{1+b+c} = 1 \Rightarrow e^{1+b+c} = e^{0} \Rightarrow 1+b+c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-2+c = 0 \Rightarrow \boxed{c=1}$

$a e^{c} = 1 \Rightarrow ae = 1 \Rightarrow a = \boxed{\frac{1}{e}}$

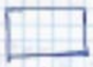
5) Optimización de funciones

Cálculo de los extremos de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$

a) Calculamos los extremos relativos de $f(x)$
b) Vemos los q. están en $[a,b]$
c) Calculamos sus imágenes y las de los extremos del intervalo
d) Si hay algún punto donde f no es derivable pero sí continua se calcula, además, su imagen

Ej) Calcular las dimensiones del mayor rectángulo cuyo perímetro es 40 m.

$P = 40\,m$,



x, y

$$2x + 2y = 40$$
$$x + y = 20$$

$S(x,y) = x \cdot y \Rightarrow S(x) = x(20-x)$

$S'(x) = 20 - x - x = 20 - 2x$

$S'(x) = 0 \Rightarrow 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$

$S''(x) = -2 \Rightarrow S''(10) = -2 < 0 \Rightarrow$ En $x = 10\,m$ se alcanza un máximo relativo que además es absoluto $(Dom(S) = (0,20))$

Ejercicios pág 274

67) Descomponer el nº 8 en dos sumandos positivos de manera que la suma del cubo del primer sumando más el cuadrado del segundo sea mínima

$x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$

$f(x,y) = x^3 + y^2$

$f(x) = x^3 + (8-x)^2 = x^3 + 64 - 16x + x^2$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 16$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{-8}{3} \; !! \end{cases}$

$f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f''(2) = 14 > 0$

$\Rightarrow$ En $x = 2$ se alcanza un mínimo relativo q. además es absoluto.

$x = 2 \Rightarrow y = 8 - 2 = 6$

Solución: El primer sumando es 2 y el segundo 6

Pág 274

78) Determina un punto de la curva de ecuación $y = xe^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima

$y = xe^{-x^2}$

Pendiente de la recta tangente a y es igual a y'

$f(x) = y' = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$

$f'(x) = y'' = (-2xe^{-x^2}(1-2x^2) + e^{-x^2}(-4x) = -2xe^{-x^2}[1-2x^2+2]$

$= -2xe^{-x^2}(3-2x) = e^{-x^2}(4x^3-6x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -2xe^{-x^2}(3-2x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 3-2x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \end{cases}$

$f''(x) = -2xe^{-x^2}(4x^3-6x) + e^{-x^2}(12x^2-6) =$

$= e^{-x^2}[-2x(4x^3-6x)+(12x^2-6)] = e^{-x^2}(-8x^4+24x^2-6)$

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ En $x=0$ se alcanza un máx relativo $(P(0,0)$

$f''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 0 \Rightarrow$ En $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ se alcanza un mín relativo

$f'\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 0 \Rightarrow$ En $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ se alcanza un mín relativo

Solución: En el punto $(0,0)$ la pendiente de la recta tangente es máxima

79) Consideramos las funciones $f(x) = e^{x}$, $g(x) = -e^{-x}$

Para cada recta r perpendicular al eje x, sean A y B los puntos de corte de dicha recta con las gráficas de f y g respectivamente. Determinar la recta r para la cual el segmento AB es de longitud mínima.

Eje x : $y = 0$

Punto A => punto de corte de $f(x)$ con r : $A(x, e^{x})$

Punto B => punto de corte de $g(x)$ con r : $B(x, -e^{-x})$

$l(x) = \sqrt{(x-x)^2 - (-e^{-x} - e^{x})^2} = \sqrt{(-e^{-x} - e^{x})^2} = \sqrt{[-(e^{-x} + e^{x})]^2} =$

$= e^{-x} + e^{x}$

$l'(x) = -e^{-x} + e^{x}$

$l'(x) = 0 \Rightarrow -e^{-x} + e^{x} \Rightarrow e^{-x} = e^{x} \Rightarrow -x = x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$l''(x) = e^{-x} + e^{x} \Rightarrow l''(0) = 2 > 0 \Rightarrow$ En $x = 0$ se alcanza un mínimo relativo, que además, es absoluto

Luego los puntos serán $A(0,1)$ y $B(0,-1)$ y la recta $\boxed{x = 0}$

80) El coste del marco de una ventana rectangular es 12'50 € por metro lineal de los lados verticales y 8 € por metro lineal de los lados horizontales:

a) Calcular razonadamente las dimensiones que debe tener el marco de una ventana de 1m² de superficie para que resulte lo más económico posible

b) Calcular, además, el coste de ese marco.

$\boxed{1m^2}$ x

y

$S(x, y) = x \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

$f(x, y) = 2 \cdot 12'50x + 2 \cdot 8y = 25x + 16y$

$f(x) = 25x + \frac{16}{x}$

$f'(x) = 25 - \frac{16}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 25 - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{16}{x^2} = 25 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4}{5} \\ x_2 = -\frac{4}{5} \text{ //} \end{cases}$

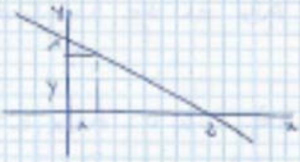
$f''(x) = \frac{32}{x^3} \Rightarrow f''\left(\frac{4}{5}\right) > 0 \Rightarrow$ En $x = \frac{4}{5}$ m se alcanza un mínimo relativo que, además, es absoluto

$x = 4/5$ m $\Rightarrow y = 5/4$ m

$x = 0'8$ m $\Rightarrow y = 1'25$ m

Solución

82) De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $\frac{x}{2}+y=1$, determina el que tiene mayor área



$r = \frac{x}{2}+y=1 \Rightarrow y = 1-\frac{x}{2}$

$S(x,y) = x \cdot y$

$S(x) = x\left(1-\frac{x}{2}\right) = x - \frac{x^2}{2}$

$S'(x) = 1-x \Rightarrow S'(x)=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$

$S''(x)=-1 \Rightarrow S''(1) = -1<0 \Rightarrow$ En $x=1$ se alcanza un máximo relativo y además es absoluto

$y = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Solución: la base mide 1 m y la altura 0'5 m

83) Queremos hacer un envase con tapa y forma de prisma regular con base cuadrada y cuya capacidad sea $10.000\,cm^3$. Sabiendo que cada cm^2 del material empleado de la base sale un 50% más caro que cada cm^2 del material empleado para el resto del prisma, halla las dimensiones del envase para que su precio sea el menor posible

$V = 10.000\ cm^3$

$V(x,y) = x^2y = 10.000 \Rightarrow y = \frac{10.000}{x^2}$

El área del prisma es $2x^2+4xy$

$C(x,y) = 1'5x^2 + x^2 + 4xy = 2'5x^2 + 4xy$

$C(x) = \left(2'5x^2 + 4x \cdot \frac{10000}{x^2}\right) = 2'5x^2 + \frac{40000}{x}$

$C'(x) = 5x - \frac{40000}{x^2}$

$C'(x) = 0 \Rightarrow 5x - \frac{40000}{x^2} = 0 \Rightarrow 5x = \frac{40000}{x^2} \Rightarrow 5x^3 = 40.000$

$\Rightarrow x = 20$

$C''(x) = 5 + \frac{80.000}{x^3}$

$C''(20) = 15 > 0 \Rightarrow$ En $x=20\,cm$ se alcanza un mínimo relativo que además es absoluto

$x = 20\,cm \Rightarrow y = \frac{10.000}{20^2} = 25\,cm$

Solución: la base mide 20 cm y la altura 25 cm

8-1) Calcula las dimensiones del triángulo isósceles inscrito en una circunferencia de radio 1, que tiene área máxima

Tomamos Pitágoras

$1^2=(h-1)^2+x^2 \Rightarrow x^2=1-(h-1)^2=1-(h^2-2h+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=-h^2+2h \Rightarrow x=\sqrt{2h-h^2}$

$A(x,h)=x\cdot h \Rightarrow A(h)=h\sqrt{2h-h^2}=\sqrt{2h^3-h^4}$

$$A'(h)=\frac{6h^2-4h^3}{2\sqrt{2h^3-h^4}}=\frac{3h^2-2h^3}{\sqrt{2h^3-h^4}}$$

$$A'(h)=0 \Rightarrow \frac{3h^2-2h^3}{\sqrt{2h^3-h^4}}=0 \Rightarrow 3h^2-2h^3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2(3-2h)=0 \Rightarrow \begin{cases} h_1=0 \; !! \\ h_2=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$A''(h)=(6h-6h^2)\sqrt{2h^3-h^4}-(3h^2-2h^3)\frac{6h^2-4h^3}{2\sqrt{2h^3-h^4}}$$

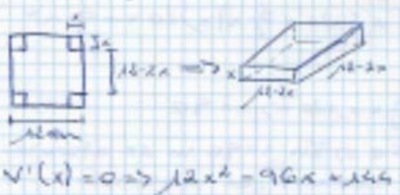
$A''\left(\frac{3}{2}\right)<0 \Rightarrow$ En $h=\frac{3}{2}$ se alcanza un máximo relativo, que además, es absoluto

$h=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución: la altura mide $\frac{3}{2}$ u y la base $\sqrt{3}$ u

FICHA PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

2) De una plancha de cartón cuadrada de 12 dm de lado se quiere construir una caja con el mayor volumen posible, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando luego la plancha de forma adecuada. ¿Qué lado debe tener el cuadrado que se ha de cortar?



$V(x)=(12-2x)^2x=$
$=(144-48x+4x^2)x=$
$=144x-48x^2+4x^3$

$V'(x)=144-96x+12x^2$

$V'(x)=0 \Rightarrow 12x^2-96x+144=0 \xrightarrow{:12} x^2-8x+12=0 \begin{cases} x_1=6 \\ x_2=2 \end{cases}$

$V''(x)=-96+24x$

$V''(6)=48>0 \Rightarrow$ En $x=6$ dm se alcanza un mínimo relativo que además es absoluto

$V''(2)=-48<0 \Rightarrow$ En $x=2$ dm se alcanza un máximo relativo que además es absoluto.

3) Hallar la base y la altura del triángulo de máxima área que se puede inscribir en una circunferencia de 12 cm de diámetro

Teorema Pitágoras

$6^2 = (h-6)^2 + x^2$

$x^2 = 36 - (h-6)^2 = 36 - (h^2 - 12h + 36) = -h^2 + 12h \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{-h^2 + 12h}$

$A(h) = h\sqrt{-h^2 + 12h} = \sqrt{-h^4 + 12h^3}$

$A'(h) = \dfrac{-4h^3 + 36h^2}{2\sqrt{-h^4 + 12h^3}}$

$A'(h) = 0 \Rightarrow \dfrac{-4h^3 + 36h^2}{2\sqrt{-h^4 + 12h^3}} = 0 \Rightarrow -4h^3 + 36h^2 = 0 \Rightarrow 4h^2(9-h) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} h = 0 \text{ !!} \\ h_2 = 9 \end{cases}$

$A''(h) = \dfrac{(-12h^2 + 72h)\,2\sqrt{-h^4 + 12h^3} - (-4h^3 + 36h^2) \cdot 2\,\dfrac{-4h^3 + 36h^2}{2\sqrt{-h^4 + 12h^3}}}{4\left(\sqrt{-h^4 + 12h^3}\right)^2}$

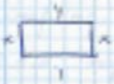
$A''(9) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ En $h = 9$ cm se alcanza un máximo relativo que además es absoluto

$h = 9 \text{ cm} \Rightarrow x = 3\sqrt{3} \text{ cm} \rightarrow \text{base} = 6\sqrt{3} \text{ cm}$

Solución: la base mide $6\sqrt{3}$ cm y la altura 9 cm

6) Se quiere cercar un terreno rectangular que está junto a una carretera. Si la valla que está junto a la carretera cuesta 24 € el metro y la del resto a 12 €, hallar el área del mayor campo que puede cercarse con un presupuesto de 4320 €



$12 \cdot 2x + 12y + 24y = 4320 \Rightarrow 24x + 36y = 4320 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 120 - \frac{2}{3}x$

$S(x,y) = x \cdot y = x\left(120 - \frac{2}{3}x\right) = 120x - \frac{2}{3}x^2$

$S'(x) = 120 - \frac{4}{3}x$

$S'(x) = 0 \Rightarrow 120 - \frac{4}{3}x \Rightarrow \frac{4}{3}x = 120 \Rightarrow x = 90$

$S''(x) = -\frac{4}{3} \Rightarrow S''(90) < 0 \Rightarrow$ En $x = 90$ m se alcanza un máximo relativo, que además, es absoluto

$x = 90 \Rightarrow y = 120 - \frac{2}{3} \cdot 90 = 60$

Solución

El lado que está junto a la carretera mide 60 m y el otro 90 m

El área mide 5400 m^2

7) De todos los triángulos isósceles de 30 cm de perímetro ¿Cuál es el área máxima?

$P = 2x + 2y = 30$ cm $\Rightarrow x = \frac{30-2y}{2} = 15 - y$

~~Teorema~~ Pitágoras

$x^2 = h^2 + y^2 \Rightarrow (15-y)^2 = h^2 + y^2 \Rightarrow h^2 = (15-y)^2 - y^2 =$

$= 225 - 30y + y^2 - y^2 = 225 - 30y \Rightarrow h = \sqrt{225 - 30y}$

$S(y,h) = \frac{2y \cdot h}{2} = y \cdot h$

$S(y) = y \cdot \sqrt{225 - 30y} = \sqrt{225y^2 - 30y^3}$

$S'(y) = \frac{450y - 90y^2}{2\sqrt{225y^2 - 30y^3}} = \frac{225y - 45y^2}{\sqrt{225y^2 - 30y^3}}$

$S'(y) = 0 \Rightarrow 225y - 45y^2 = 0 \Rightarrow y(225 - 45y) = 0 \begin{cases} y = 0 \text{ !!} \\ y = 5 \end{cases}$

S es creciente $\Rightarrow S'(y) > 0 \Rightarrow 225y - 45y^2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ S creciente en $(0, 5)$

$\underset{0}{-} \quad + \quad \underset{5}{-}$ S decreciente $(S'(y) < 0)$ en $(-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$

En $y = 5$ cm se alcanza un máximo relativo que además es absoluto

$y = 5$ cm $\Rightarrow x = 10$ cm

Solución: los lados iguales miden 10 cm y la base 10 cm

10) Hallar el radio y la altura del cono de volumen máximo que se puede inscribir en una superficie esférica de 12 cm de radio

$V(x,y) = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot (12 + y)$

~~Teorema~~ Pitágoras

$12^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x = \sqrt{144 - y^2}$

$V(y) = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{144 - y^2}\right)^2 (12 + y) = \frac{\pi}{3}(144 - y^2)(12 + y)$

$V'(y) = \frac{\pi}{3}\left[-2y(12+y) + (144 - y^2) \cdot 1\right] = \frac{\pi}{3}(-24y - 2y^2 + 144 - y^2) =$

$= \frac{\pi}{3}(-3y^2 - 24y + 144)$

$V'(y) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}(-3y^2 - 24y + 144) = 0 \xrightarrow[\frac{\pi}{3}]{} -3y^2 - 24y + 144 = 0 \Rightarrow$

$\xrightarrow[:(-3)]{} y^2 + 8y - 48 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -12 \text{ !!} \end{cases}$

$V''(y) = \frac{\pi}{3}(-6y - 24)$; $V''(4) < 0 \Rightarrow$ En $y = 4$ cm $\exists$ máximo relativo

Solución

La altura mide $16\,cm$ y el radio $8\sqrt{2}\,cm$

15) Un jardinero tiene que hacer un jardín con una forma de sector circular de 120 m de perímetro. ¿Qué longitud debe tener su radio para que el área del sector sea máxima?

$P = 120\,m \Rightarrow P = 2x + y = 120 \Rightarrow y = 120 - 2x$

arco = radio · ángulo

$y = x \cdot \alpha \Rightarrow 120 - 2x = x \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{120-2x}{x}$

$A(x, \alpha) = \dfrac{\pi x^2 \cdot \alpha}{360}$

$A(x) = \dfrac{\pi x^2}{360} \cdot \dfrac{120-2x}{x} = \dfrac{\pi x(120-2x)}{360} = \dfrac{2\pi x(60-x)}{360} = \dfrac{\pi x(60-x)}{180}$

$A'(x) = \dfrac{\pi}{180}\left[(60-x) + x(-1)\right] = \dfrac{\pi}{180}(60-x-x) = \dfrac{\pi(60-2x)}{180}$

$A'(x) = 0 \Rightarrow (60-2x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 30}$

$A''(x) = \dfrac{\pi}{180}(-2) = -\dfrac{\pi}{90}$

$A''(30) < 0 \Rightarrow$ En $x = 30\,m$ se alcanza un máximo relativo que, además, es absoluto

Solución: el radio medirá 30 m

20) Sea $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2,0)$. ¿Cuál es esa distancia?

$f(x) = \sqrt{x-1}$ P está en la gráfica de f

$P(x,y)$ $y = \sqrt{x-1} \leadsto P(x, \sqrt{x-1})$

$A(2,0)$

$d(x,y) = \sqrt{(2-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{(2-x)^2 + y^2}$

$d(x) = \sqrt{(2-x)^2 + (\sqrt{x-1})^2} = \sqrt{(2-x)^2 + (x-1)} = \sqrt{4 - 4x + x^2 + x - 1} =$
$= \sqrt{x^2 - 3x + 3}$

$d'(x) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}$

$d'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}} = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

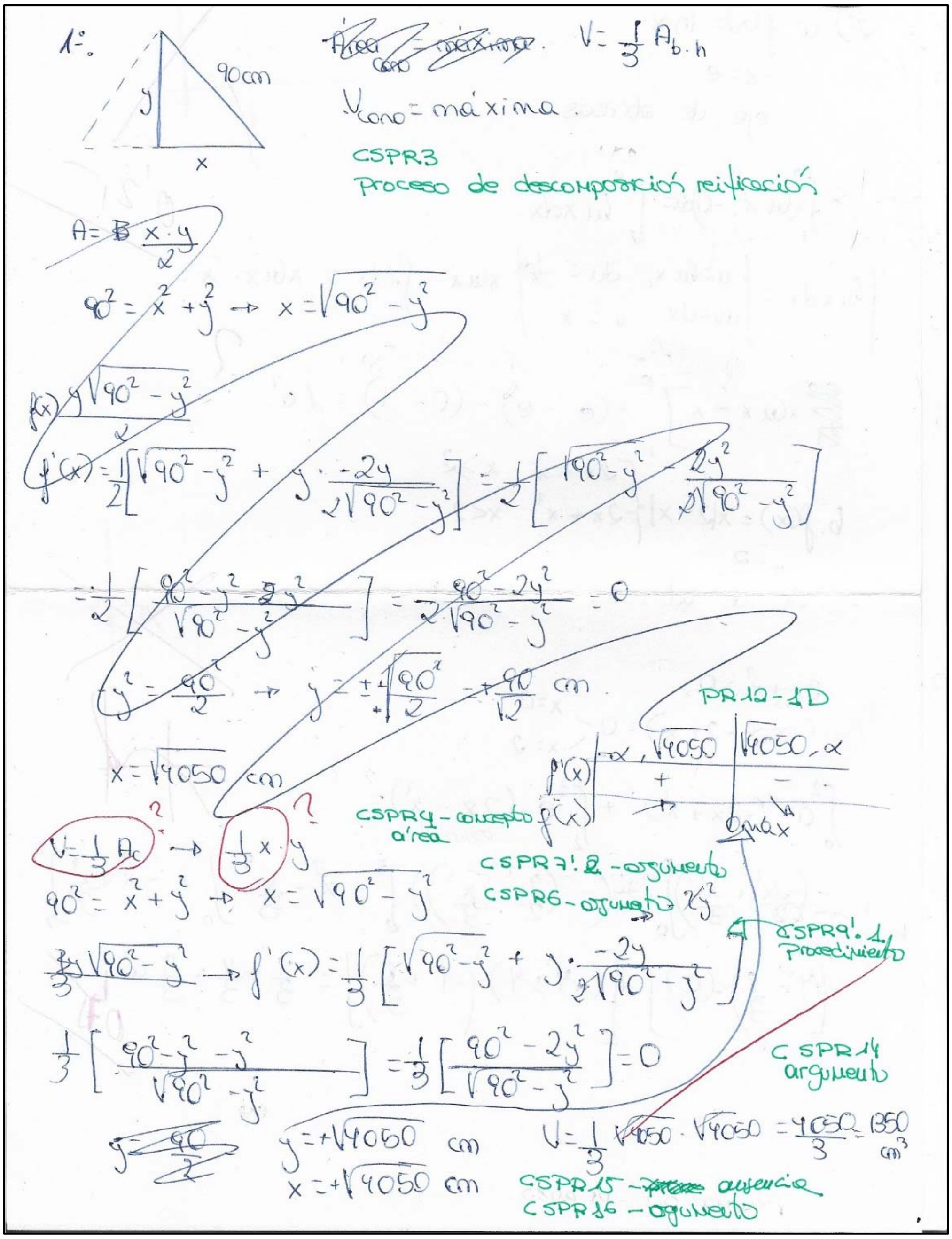
$d''(x) = \dfrac{2 \cdot 2\sqrt{x^2-3x+3} - (2x-3)\,2 \cdot \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}}{\left(2\sqrt{x^2-3x+3}\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{x^2-3x+3} - \dfrac{(2x-3)^2}{\sqrt{x^2-3x+3}}}{4(x^2-3x+3)}$

$d''\left(\dfrac{3}{2}\right) > 0 \Rightarrow$ En $x = \dfrac{3}{2}$ se alcanza un mín relativo y absoluto

$x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{2}}{\ }$

Anexo III. Respuestas cuestión 1

En este anexo incluimos una muestra de las respuestas más representativas de los conflictos semióticos encontrados en la cuestión 1.



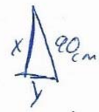
A17

1.- $h = 90cm$

$V_{cono} = \frac{1}{3}\cancel{2}\pi y^2 \cdot x$

CSPR4 - concepto área

PR12 - No configuraci



CSPR6 argumento

$90^2 = x^2 + y^2$

CSPR7.1 - procedimental

CS PR4 - área base

$A_{Base} = \cancel{2}\pi y^2$ $\quad 8100 = x^2 + y^2$; $y^2 = \cancel{8100 + x^2}$

$V_{cono} = \frac{1}{3}\cancel{2}\pi(8100 + x^2)x =$

$= \left(\frac{16200\pi}{3} + \frac{2\pi x^2}{3}\right)x =$

$= \frac{16200\pi x + 2\pi x^3}{3}$

$V' = \frac{16200\pi + 6\pi x^2}{9} = 0$

$16200\pi + 6\pi x^2 = 0$ CSPR12

$6\pi x^2 = 16200\pi$

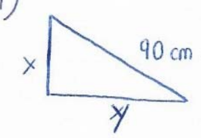
$x^2 = \frac{16200\pi}{6\pi} = 2700$

$\boxed{x = \sqrt{2700}}$ CSPR10 - argumento

$y = \sqrt{8100 + 2700}$ CSPR14 - argumento
CSPR15

$\boxed{y = \cancel{\sqrt{10800}}}$ CSPR16 argumento

1)



~~A.~~ $V = \frac{1}{3} AB \cdot h$.

$A_{lateral} = \ldots$

CSPR3 - procedimiento reificación - composición RRS

ABase; área círculo $= \pi R^2 \rightarrow \pi y^2$

CSPR8-RRS

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi y^2 \cdot 90 \rightarrow 30\pi y^2$ → no es la altura

CSPR3 - Identificación variables

CSPR8

CSPR6 - argumento

$\cancel{90^2 = x^2 + y^2} \rightarrow 90 = \sqrt{x^2+y^2}$

CSPR7' 2 - argumento

$8100 = x^2 + y^2 \rightarrow \underline{8100 - x^2 = y^2}$

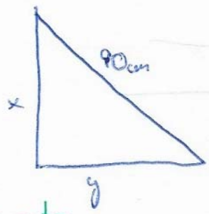
$30\pi(8100 - x^2) = 0$

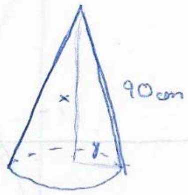
CSPR 9'1 - procedimiento

$f'(x) = 243000\pi - 30x^2\pi \rightarrow \cancel{0 - (60x\pi) = 0}$.

$\cancel{-60x\pi = 0}$.

(1)





CSPR6-argumento

CSPR7: 8-argumento

$y = \sqrt{90^2 - x^2}$

Vol: $\cancel{2\pi\sqrt{90^2 - x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{90^2 - x^2} \cdot x}{2}\right)$

CSPR4-concepto

$y = \pi x (90^2 - x^2)$ ← CSPR8-RRS

$f(x) = \frac{1}{3}(90^2 \pi x - \pi x^3)$ bien

$f'(x) = 90^2 \pi - 3\pi x^2$

$f'(x) = 0 \qquad 90^2\pi - 3\pi x^2 = 0$

$x^2 = \frac{90^2 \pi}{3\pi} = \pm \frac{90}{\sqrt{3}}$ Se coge el positivo

$= \frac{90\sqrt{3}}{3} = 30\sqrt{3}$ ✓

CSPR12, CSPR14

CSPR13-procedimiento

$90^2 = y^2 + 30^2 \cdot 3$

$y = \sqrt{90^2 - 30^2 \cdot 3}$

CSPR16

$f'(y) = 7200\pi y - 4\pi y^3 - 2\pi y^3 = 0$

$-6\pi y^3 + 7200\pi y = 0$

$6y\left[-\pi y^2 + 1200\pi\right] = 0.$

$\boxed{y=0}$

$-\pi y^2 + 1200\pi = 0.$

$+\pi y^2 = +1200\pi$

$\cancel{y^2 = \frac{1200\pi}{\pi}}$

$y = \pm\sqrt{1200} = y = \pm 20\sqrt{3}$ → como estamos trabajando con áreas

la solución sería $\boxed{y = +\cancel{20\sqrt{3}}}$

~~$f''(x) =$~~

$h = \sqrt{8100 - (\sqrt{1200})^2}$

$h = \sqrt{8100 - 1200}$

$\boxed{h = \sqrt{6900}}$ → $\boxed{h = \cancel{10}\sqrt{69}}$

1'5

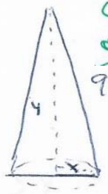
CSPR12 CSPR14 - argumento

CSPR15

$h = \sqrt{6900}$ cm

$y = \sqrt{1200}$ cm.

1:



CSPR6 argumento

90cm.

$90 = x^2 + y^2$

$V(x,y) = \frac{1}{3}\pi x^2 y$

• Cambio de variables

$x^2 + y^2 = 90^2$ → $x^2 = 90 - y^2$

$V(x,y) = \frac{1}{3}\pi x^2 y$ → $\frac{1}{3}\pi(90^2 - y^2)y$ =)

CSPR8 - RRS

$V(x,y) = \frac{\pi}{3}(90y - y^3) =$

$V(x,y) = 30\pi y - \frac{\pi y^3}{3}$

1,25

• 1ª derivada:

$V'(x,y) = 30\pi - \pi y^2$

$30\pi = \pi y^2$; $y^2 = \frac{30\pi}{\pi}$

$y = \pm\sqrt{30}$ CSPR10 - argumento

PR12-2D

• 2ª derivada

$-2\pi y = 0$

$\boxed{y = \sqrt{30}}$ < 0 → Volumen es máximo.

• Cálculo segunda variable

$90 = x^2 + y^2$

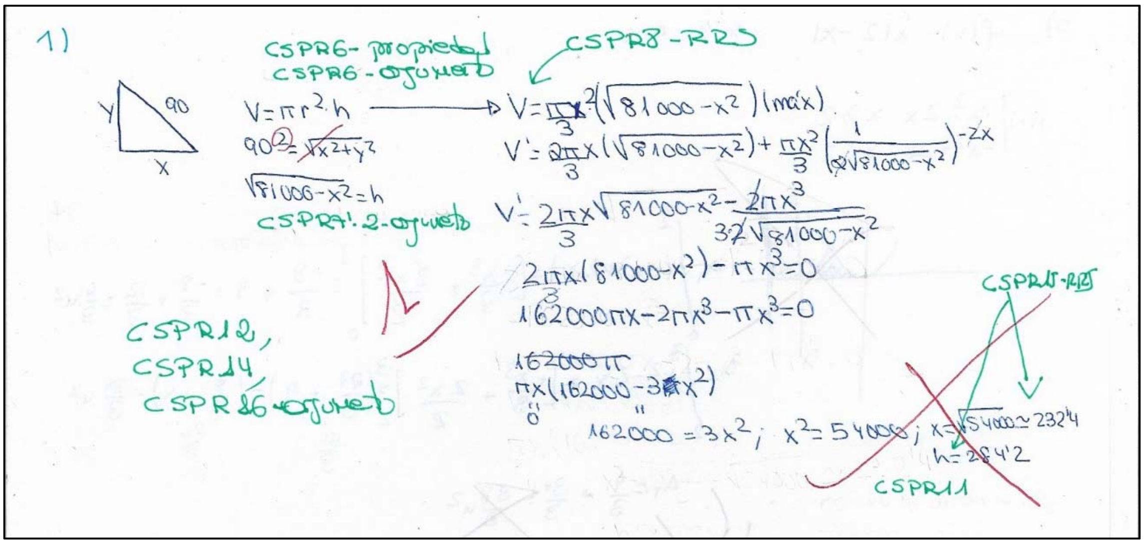
$90 = x^2 + (\sqrt{30})^2$; $90 = x^2 + 30$;

$x^2 = 60$; $x = \sqrt{60}$

CSPR13

CSPR14 - argumento

CSPR15



1)

CSPR6- propiedad
CSPR6 - argument

CSPR8 - RRS

$V = \pi r^2 h \longrightarrow V = \frac{\pi}{3} x^2 (\sqrt{81000 - x^2})$ (màx)

$90 = \cancel{\sqrt{x^2+y^2}}$

$V' = \frac{2\pi}{3} x (\sqrt{81000-x^2}) + \frac{\pi x^2}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{81000-x^2}}\right) \cdot -2x$

$\sqrt{81000-x^2} = h$

CSPR7.2-argument

$V' = \frac{2\pi x \sqrt{81000-x^2}}{3} - \frac{2\pi x^3}{3 \cdot 2\sqrt{81000-x^2}}$

$\frac{2\pi x (81000-x^2) - \pi x^3}{3} = 0$

$162000\pi x - 2\pi x^3 - \pi x^3 = 0$

$\pi x(162000 - 3x^2)$

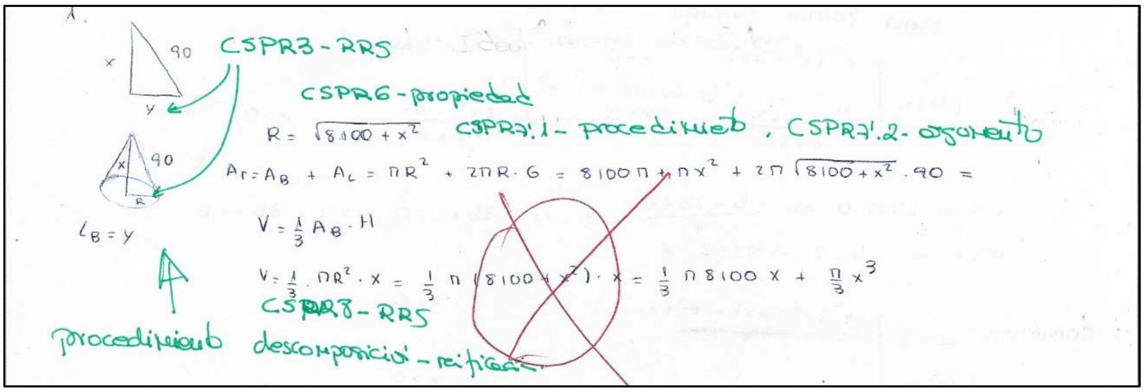
$162000 = 3x^2; \; x^2 = 54000; \; x = \sqrt{54000} \simeq 232'4$

$h = 284'2$

CSPR11-RRS

CSPR11

CSPR12,
CSPR14
CSPR16-argument



CSPR3 - RRS

CSPR6-propiedad

$R = \sqrt{8100 + x^2}$ CSPR7.1- procediment, CSPR7.2- argument

$A_T = A_B + A_L = \pi R^2 + 2\pi R \cdot G = 8100\pi + \pi x^2 + 2\pi\sqrt{8100+x^2} \cdot 90 =$

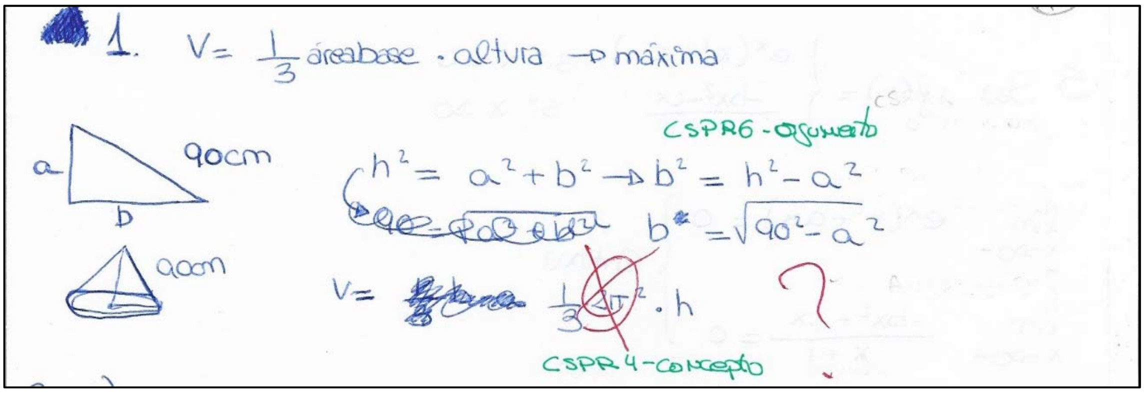
$L_B = y$

$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$

$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot x = \frac{1}{3}\pi(8100 + x^2)\cdot x = \frac{1}{3}\pi 8100x + \frac{\pi}{3}x^3$

CSPR8-RRS

procediment descomposició - reificació



1. $V = \frac{1}{3}$ àreabase · altura → màxima

CSPR6-argument

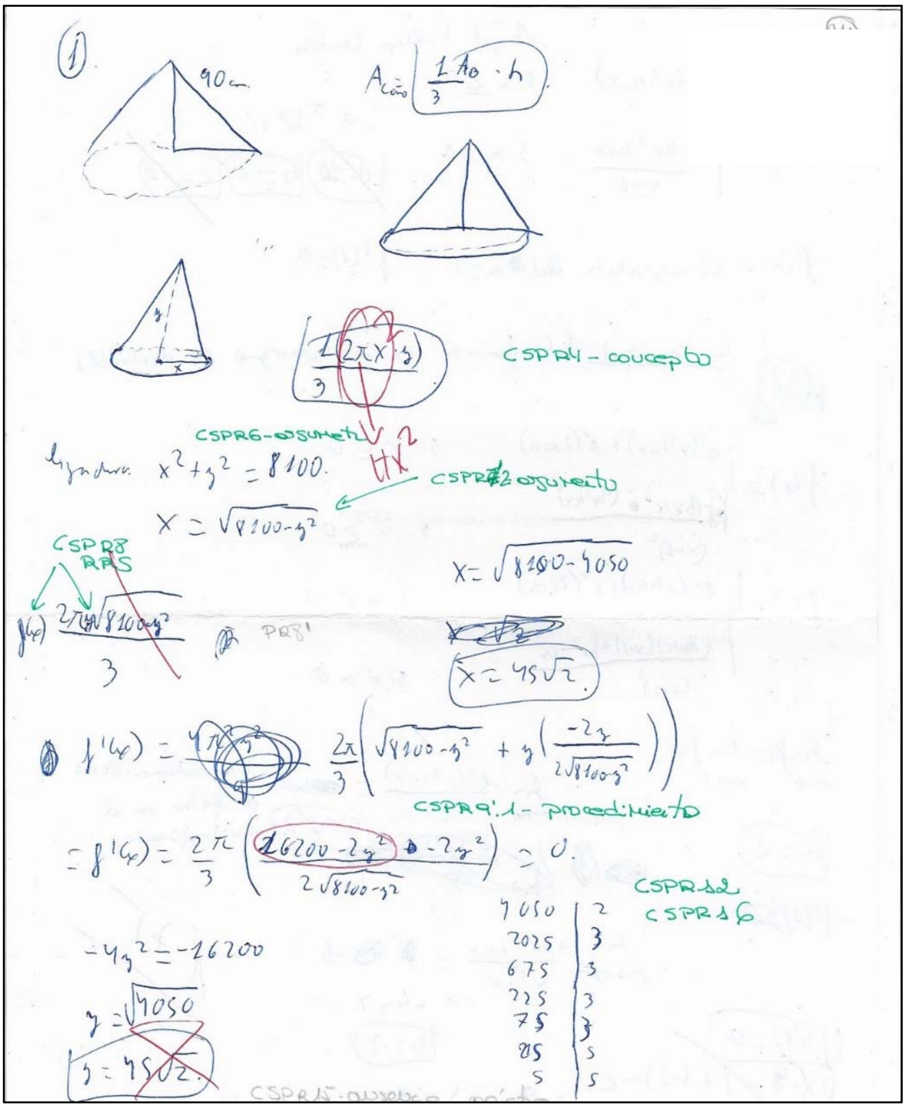
$h^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = h^2 - a^2$

$b = \sqrt{90^2 - a^2}$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

?

CSPR4-concepte



(1)

90cm

$A_{cône} = \frac{1}{3} A_b \cdot h$

$\frac{1}{3}(2\pi x \cdot y)$ CSPR4 - conceito

CSPR6 - argumento

$4x^2$

Igualdade: $x^2 + y^2 = 8100.$ CSPR2 argumento

$x = \sqrt{8100 - y^2}$

CSPR8
RRS

$x = \sqrt{8100 - 4050}$

$f(x)\ \frac{2\pi\sqrt{8100 - y^2}}{3}$ PR8'

$\boxed{x = 45\sqrt{2}}$

$f'(x) = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{8100 - y^2} + y\left(\frac{-2y}{2\sqrt{8100 - y^2}}\right)\right)$

CSPR9'.1 - procedimento

$= f'(x) = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{16200 - 2y^2 - 2y^2}{2\sqrt{8100 - y^2}}\right) = 0.$

CSPR12
CSPR16

$-4y^2 = -16200$

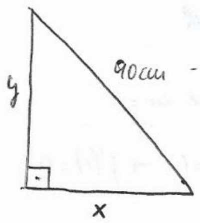
$y = \sqrt{4050}$

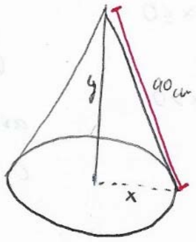
$\boxed{y = 45\sqrt{2}}$

4050	2
2025	3
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5

CSPR15 - ...

1





⊕ medidas de los catetos para volumen máximo

$$90 = \sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 8100 = x^2+y^2 \longrightarrow y = \sqrt{8100-x^2}$$

CSPR6 - argumento

CSPR7.2 - argumento

$$A_{base} = \pi \cdot x^2$$

CSPR4 - concepto

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot y = \pi \cdot x^2 \cdot \sqrt{8100-x^2} \longrightarrow$$

CSPR8 - RRS

$$\longrightarrow V' = 2\pi x \cdot \sqrt{8100-x^2} + \pi x^2 \left(\frac{-2x}{2\sqrt{8100-x^2}}\right) =$$

$$= 2\pi x \sqrt{8100-x^2} - \frac{\pi x^3}{\sqrt{8100-x^2}} = \frac{2\pi x(8100-x^2) - \pi x^3}{\sqrt{8100-x^2}} =$$

$$= \frac{16200\pi x - 2\pi x^3 - \pi x^3}{\sqrt{8100-x^2}} = \frac{16200\pi x - 3\pi x^3}{\sqrt{8100-x^2}}$$

$$16200\pi x - 3\pi x^3 = 0$$

$$\pi x(16200 - 3x^2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 - 16200 = 0 \; ; \; x^2 = 5400 \; ; \; x = \begin{cases} \sqrt{5400} \\ -\sqrt{5400} \end{cases} \end{cases}$$

1'75

CSPR10 - argumento

PR12 - 1D

	$-\infty, -\sqrt{5400}$	$-\sqrt{5400}, 0$	$0, \sqrt{5400}$	$\sqrt{5400}, +\infty$
f'			+	−
f			↗	↘

Despreciamos medidas negativas

CSPR15

$$x = \sqrt{5400} \simeq 73'49 \text{ cm}$$

$$y = \sqrt{8100 - 5400} = \sqrt{2700} \simeq 51'96 \text{ cm}$$

CSPR14 - argumento

6.

1.

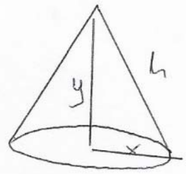
$h = 90$

$x = \sqrt{h^2 - y^2}$

PR6- ausencia arg

PR7

Ausencia argumento



PR12-1D

$V(y) = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi(h^2 - y^2)y = \frac{1}{3}\pi(yh^2 - y^3)$

$V'(y) = \frac{1}{3}\pi(h^2 - 3y^2) = 0$

$\frac{1}{3}\pi h^2 - \pi y^2 = 0$

DR13

$y^2 = \frac{1}{3}h^2 \; ; \; y = \frac{\sqrt{3}}{3}h \simeq \underline{30\sqrt{3}\ cm} \simeq 51'96\ cm$

CSPR14 DR15

$x = \sqrt{h^2 - y^2} = \sqrt{90^2 - 900 \cdot 3} \simeq \underline{73'48\ cm}$

	$(0, \sqrt{3}/3\,h)$	$(\sqrt{3}/3\,h, h)$
$V'(y)$	+	−
$V(y)$	↗	↘

2

CSPR12-1D argumento

1.

Volumen del cono máximo

A18

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{Base} \cdot h.$ $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot y^2 \cdot X$

$A_{Base} = \pi \cdot y^2$

$90^2 = x^2 + y^2$ CSPR6- argumento

$y = \sqrt{90^2 - x^2}$ CSPR7.2- argumento

CSPR8- RRS

$\frac{1}{3}\pi\,(90^2 - x^2) \cdot x$

$\frac{1}{3}\pi\,\frac{90^2 x - x^3}{\cancel{3}}$

$f'(x) = (2 \cdot 90^2 - 3x^2) \cdot \frac{1}{3}\pi$

$(16200 - 3x^2)\,\frac{1}{3}\pi = 0$ CSPR12

2

$5400\pi - \pi x^2 = 0$

CSPR15- RRS

$x = \sqrt{\frac{-5400\pi}{-\pi}} = \sqrt{5400} = 73,485\,cm$ //

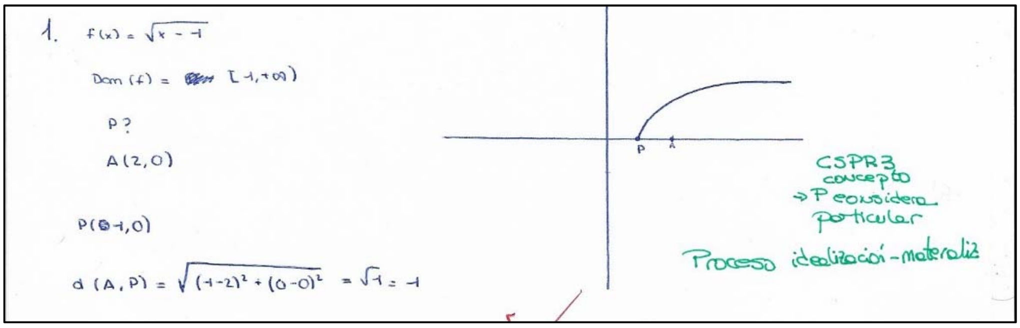
CSPR9'.2- procedimiento

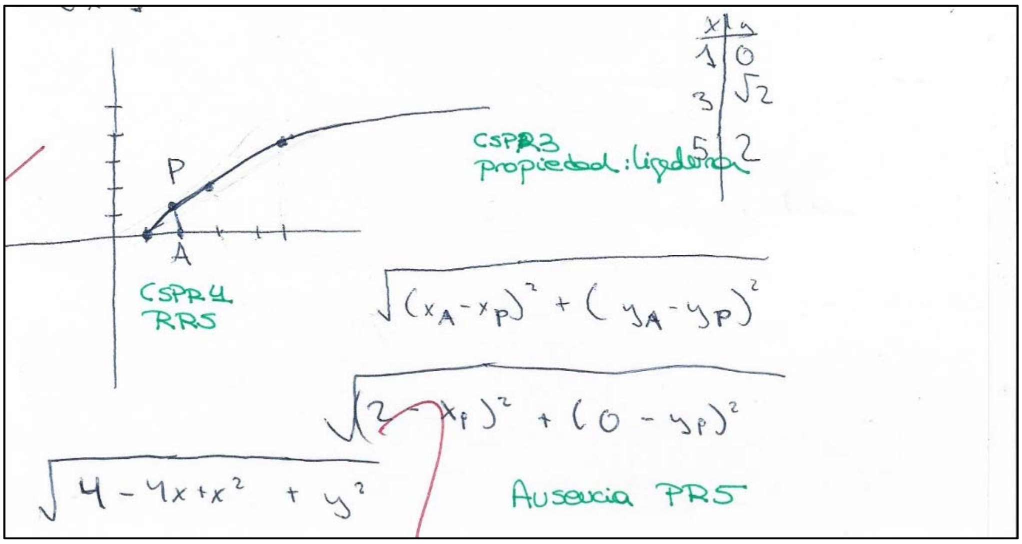
$y = \sqrt{90^2 - x^2}$

$y = \cancel{\sqrt{\ldots}}\ \sqrt{2700} = 51,96\,cm$ //

Anexo IV. Repuestas cuestión 2

En este anexo incluimos una muestra de las respuestas más representativas de los conflictos semióticos encontrados en la cuestión 2.

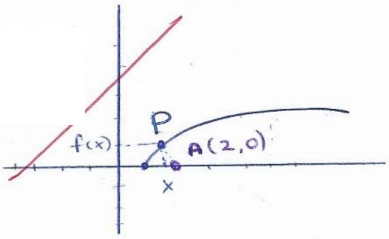




$f(x) = \sqrt{x-1}$

$P(x, \sqrt{x-1})$ $\boxed{d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}}$

$A(2, 0)$



$d = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x-1})^2}$

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}} \rightarrow$ función a optimizar

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-3x+3}} \cdot (2x-3) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}$

PR7-2D

$\dfrac{2x-3}{\cancel{2\sqrt{x^2-3x+3}}} = 0$

$2x - 3 = 0$

$2x = 3$

$x = \dfrac{3}{2}$

$f''(x) = \dfrac{2\left(2\sqrt{x^2-3x+3}\right) - \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2-3x+3}} \cdot (2x-3) \cdot \cancel{2} \cdot (2x-3)}{\left(2\sqrt{x^2-3x+3}\right)^2} =$

$= \dfrac{4\sqrt{x^2-3x+3} - \dfrac{4x^2-12x+9}{\sqrt{x^2-3x+3}}}{4x^2-12x+12} =$

$= \dfrac{\dfrac{\cancel{4x^2} \cancel{-12x} + 12 \cancel{-4x^2} \cancel{+12x} - 9}{\sqrt{x^2-3x+3}}}{4x^2-12x+12} =$

$= \dfrac{3}{(4x^2-12x+12)\cdot\sqrt{x^2-3x+3}}$; $f''\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \rightarrow$ mínimo en $x = \dfrac{3}{2}$

CSPR8 - argumento

el punto P (de f(x)) más próximo al punto A(2, 0) es $P\left(\frac{3}{2}, \sqrt{1/2}\right)$

(1) $f(x)=\sqrt{x-1}$ Dom $f(x)=[1+\infty)$

$f: [1+\infty) \to \mathbb{R}$ $d=\sqrt{(x_1-2)^2+(y_1-0)^2}$

$A(2,0)$ $P(x_1, \sqrt{x_1-1})$

$$d=\sqrt{(x_1-2)^2+(\sqrt{x_1-1})^2}=\sqrt{x_1^2-4x_1+4+x_1-1}=$$
$$=\sqrt{x_1^2-3x_1+3}$$

$f(x)$ a minimizar $=\sqrt{x_1^2-3x_1+3}$ CSPR6-procedimiento

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x_1^2-3x_1+3}}\cdot(2x_1-3)=0 \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}$$

PR7-1D

sg $f'(x)$	$-$ (3/2)	$+$
Monotonía $f(x)$	Decrec.	Crec.

CSPR8 argumento

$x_1=\frac{3}{2}$ es un mínimo

$y_1=\sqrt{\frac{1}{2}}$

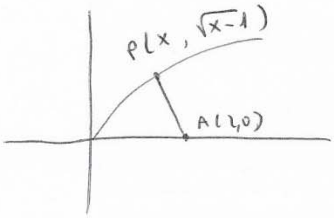
$x^2-3x+3=0$ $x=\frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}=$ no tiene solución real

$$d=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=$$

$=\frac{1}{2}$ u.

$f(x) = \sqrt{x-1}$ $\qquad$ $d = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x-1})^2}$

Función a minimizar



$$f(x) = \sqrt{x^2-4x+4+x-1} = \sqrt{x^2-3x+3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-3x+3}} \cdot (2x-3) = 0$$

$2x-3=0$

$\boxed{x = \frac{3}{2}}$ $\qquad$ $\boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$d = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} \;// = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

PR7-2D

$$f''(x) = \frac{2\cdot(2\sqrt{x^2-3x+3}) - (2x-3)\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{x^2-3x+3}}\cdot(2x-3)}{4(x^2-3x+3)} =$$

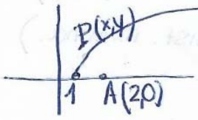
$$= \frac{4\sqrt{x^2-3x+3} - \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x^2-3x+3}}}{4x^2-12x+12}$$

$f''\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ $\quad$ $x = \frac{3}{2}$ es ~~máximo~~ mínimo $\quad$ CSPR8-argumento

CSPR9-argumento

↳ No contextualiza solución

1. $f:[1,+\infty)\rightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x)=\sqrt{x-1}$ $\quad P(x,y)$ $\quad \frac{47}{60}$



$P(x,\sqrt{x-1})$

$d = f(x) = \sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{x-1})^2}$ CSPR6-procedimiento

$f(x)=\sqrt{(x-2)^2+x-1}$

$f'(x)=\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{(x-2)^2+x-1}}\cdot \cancel{2}(x-2)+1 = 0$ $\quad x-2+1=0$

$x-1=0$ $\quad \boxed{x=1}$

$f''(x)=\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+x-1}-(x-1)\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{(x-2)^2+x-1}}\cdot\cancel{2}(x-2)+1}{\left(\sqrt{(x-2)^2+x-1}\right)^{\cancel{2}}}$ PR7-2D

$f''(x)=\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+x-1}-(x-1)\cdot(x-1)}{(x-2)^2+x-1\cdot\sqrt{(x-2)^2+x-1}}$

$f''(1)>0$ mínimo $\longrightarrow P(1,0)$

$d=\sqrt{(1-2)^2+(0-0)^2} = 1$