UNIVERSIDAD DE JAÉN

FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

Investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la optimización en Bachillerato, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico y de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica

PRESENTADA POR:
TERESA BALCAZA BAUTISTA

DIRIGIDA POR:
Dr. D. Ángel Contreras de la Fuente
Dr. D. Viçenc Font Moll

JAÉN, 7 DE JUNIO DE 2018

A mi hijo José Miguel

Agradecimientos

Quisiera expresar mi profundo agradecimiento a los profesores doctores D. Ángel Contreras de la Fuente y D. Viçenc Font Moll por su valiosa labor en la dirección de esta Tesis Doctoral. Especialmente al Dr. Contreras de la Fuente por su abnegada dedicación, paciencia y perseverancia para que este trabajo llegara a buen fin.

A mis compañeros del IES Santo Reino, con los que comparto la inquietud de mejorar cada día en nuestra labor docente.

A mis padres, por inculcarme los valores del esfuerzo y del sacrificio, y apoyarme siempre en todos mis pequeños y grandes proyectos. A mis abuelos, por haber aportado una parte importante de la persona que soy ahora. A mi tía Rosa, por transmitirme los fundamentos del pensamiento matemático desde mi infancia. A mi tío Pepe, por su ejemplo de formación constante. A mis hermanos y a mi prima María, por enseñarme a entender la vida desde otro punto de vista.

De manera especial agradezco a mi marido su cariño y ánimo para poder llevar a cabo este proyecto y a mi pequeño retoño, por colmarme de felicidad.

Quiero agradecer a mi familia toda la ayuda que me ha dispuesto en estos dos últimos años.

Resumen

La investigación que se desarrolla en esta Tesis está centrada en los problemas de tipo didáctico que surgen en la enseñanza y el aprendizaje de las nociones matemáticas asociadas a la optimización que se resuelven con las herramientas del Cálculo Diferencial, utilizando instrumentos teóricos que facilitan el Enfoque Ontosemiótico y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica.

Para identificar, describir y explicar los factores relacionados con estos fenómenos didácticos comenzamos, en primer lugar, por la reconstrucción del significado institucional de referencia mediante un estudio histórico-epistemológico describiendo las configuraciones epistémicas asociadas a la optimización. En segundo lugar, analizamos el currículo que rige el sistema educativo de Bachillerato comparándolo con el significado de referencia para establecer los sesgos que determina. A continuación, determinamos el significado pretendido que emana de los libros de texto, realizando un análisis epistémico de la unidad didáctica referida a este contenido y un análisis ontosemiótico de los problemas resueltos identificando los conflictos semióticos potenciales. En tercer lugar, establecemos el significado implementado mediante el análisis de los apuntes de clase y su correspondencia con el deducido del análisis de los manuales. Por último, caracterizamos el significado personal analizando la resolución realizada por los estudiantes de varios problemas de optimización, mediante los registros de representación semiótica y la configuración ontosemiótica. Los resultados muestran los vacíos de significado y los conflictos semióticos que presentan los estudiantes de este nivel educativo.

Abstract

The research developed in this Doctoral Thesis is centered on the didactic problems that arise in the teaching and learning of the mathematical notions associated with the optimization problems that are solved with the tools of Differential Calculus, using the instruments that the Onto-semiotic Approach and the Theory of Register of Semiotic Representation of mathematical cognition and instruction facilitate.

In order to identify, describe and explain the factors related to these didactic phenomena we firstly start by the reconstruction of the institutional meaning of reference through a historical-epistemological study describing the epistemic configurations associated with the optimization problem. Second, we analyze the curriculum that governs the General Upper Secondary Education (Bachillerato) comparing it with the reference meaning to establish the biases it determines. Next, we determine the intended meaning that emanates from the textbooks, performing an epistemic analysis of the didactic unit referred to this content and an onto-semiotic analysis of the problems solved by identifying potential semiotic conflicts. Third, we establish the implemented meaning through the analysis of the class notes and their correspondence with the deduced one from the analysis of the manuals. Finally, we characterize the personal meaning by analyzing the resolution made by the students of several optimization problems, through the registers of semiotic representation and the onto-semiotic configuration. The results show the gaps of meaning and the semiotic conflicts that present the students of this educational level.

Índice

Introducción

En una conversación entre dos científicos, Jean Bricmont profesor de Física de la Universidad Católica de Lovaina y Richard Dawkins profesor de Genética de la Universidad de Oxford (Ligero, 2017), se pueden observar dos posturas muy interesantes respecto a la ciencia actual. Mientras Dawkins tiene una mirada muy optimista sobre la ciencia (“La ciencia es maravillosa, es poética y tiene como una especie de valor espiritual que debería valorarse como se valoran las artes, la poesía, la literatura…”, p. 33); Bricmont, en cambio, es mucho más pesimista en cuanto a los procesos más mundanos subyacentes a la investigación científica. Así, destaca como grave “problema” la mentalidad del “publicar o morir” que, según él, se ha hecho con el control de las universidades y que “fomenta la investigación –incluso aquella sin mucho sentido- por encima de la enseñanza de calidad” (p. 35).

Ambos concluyen de la siguiente manera: de un lado Dawkins expone “La ciencia es importante, no solamente por los hechos que aporta, que, por supuesto lo son, sino por la manera científica de pensar: el pensamiento crítico, el pensamiento lógico y el pensamiento escéptico”; de otra parte, Bricmont, ya casi al final añadía el “pero”: “Debemos ser escépticos ante las pseudociencias, pero también respecto a algunos aspectos de la ciencia” (p. 37).

Me sirven estas dos opiniones anteriores para poder clarificar mi postura ante este trabajo que presento acerca de la investigación en la enseñanza de la optimización. Por una parte, participo de las ideas del profesor Dawkins, ya que he basado mi trabajo en marcos teóricos científicos dentro de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, como son el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (a partir de ahora EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font; 2007; Godino 2017) y la Teoría de Registros de Representación Semiótica (a partir de ahora TRRS) (Duval, 1995; 2006). Esta elección no ha sido al azar ni ingenua, al contrario, el EOS es un marco teórico que articula diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje, para lo cual adopta una perspectiva global en la que conviven un modelo epistemológico, de cognición sobre bases semióticas, instruccional y sistémico-ecológico sobre las matemáticas, dotado de numerosas herramientas que han sido validadas en las mejores revistas de Didáctica de las Matemáticas; la TRRS me parece fundamental tenerla en cuenta también, dado que la separación que se efectúa entre el objeto matemático y sus sistemas de representación semiótica, así como la necesaria armonización entre los registros, nos acercan a la emergencia del concepto matemático y a la explicación de importantes errores en los alumnos que éstos suelen cometer cuando interactúan con las actividades matemáticas. Creemos que ambas teorías, de manera bastante satisfactoria, vienen a clarificar dos grandes problemas de la enseñanza en el aula; por una parte, ¿cómo el alumno no puede acceder al objeto matemático directamente y ha de utilizar los diversos sistemas de representación semiótica del mismo?, ¿cómo utilizar y coordinar dichos sistemas en el aula?, ¿cómo interpretar los errores en el aula de los alumnos?; por otra, si el profesor ha de utilizar extensivos en el aula sobre un determinado objeto matemático y su objetivo es lograr que sus alumnos construyan los intensivos correspondientes ¿cómo lograr esto? y ¿qué funciones semióticas utilizar?.

Por otra parte, también tengo presentes las ideas del profesor Bricmont ya que, quizás por mi condición de profesora de Matemáticas en bachillerato, considero que la investigación en la enseñanza de las Matemáticas nunca ha de estar separada de su aplicación en el aula como medio (como bien dice este profesor) de que pueda darse una verdadera calidad en la enseñanza. Es decir, como guía del desarrollo del trabajo he tenido dos miradas bien definidas: una mirada a la ciencia bien fundamentada y una mirada que sirve en cierto modo de catalizador hacia la buena enseñanza con un sentido práctico en el aula respecto a los materiales de investigación que puedan aplicarse en ésta.

He tenido oportunidad de impartir numerosos temas de la materia y entre ellos, siempre me ha llamado la atención y me ha motivado en mi enseñanza la temática de la optimización, en especial los problemas acerca de los máximos y mínimos. Primeramente por razones históricas dentro de las Matemáticas, ya que como señala Heath (1956), los problemas de máximos y mínimos son tan antiguos como el hombre mismo, estando ya presentes en los tratados griegos de la antigüedad. En la obra de Euclides “Elementos” aparecen resultados que pueden considerarse como problemas de optimización. El propio Aristóteles atribuye a la naturaleza un comportamiento optimizador. En este sentido (Boyer, 1999) afirma que Herón parece haber sido el primero que demostró por medio de un sencillo razonamiento geométrico, en una obra sobre Catóptrica o estudio de la reflexión, que la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión es una simple consecuencia del principio filosófico de Aristóteles de que la naturaleza procede siempre de la manera más sencilla o “económica”. “Si un haz de rayos luminosos parte de un foco S, se refleja en un espejo MM’ y se dirige después hacia el ojo E de un observador, entonces la luz deberá recorrer el camino más corto posible SPE, que es exactamente aquel en que los ángulos SPM y EPM’ sean iguales” (p. 229). No será hasta el siglo XVII cuando Fermat demuestre la Ley de Snell que enuncia que la luz al atravesar distintos medios ópticos, sigue la trayectoria que utiliza en su recorrido el menor tiempo posible.

Además, Santiago (2008) y Malaspina y Font (2010) indican que a lo largo de la historia, la Matemática ha tratado una gran variedad de problemas de este tipo; muchos de ellos surgidos de la realidad, tanto en el ámbito social como en el económico, y que resueltos de forma rigurosa aportan no solo la solución, sino métodos y hasta teorías.

Por otra parte, desde el punto de vista didáctico, he podido observar en las aulas que los estudiantes, cuando tratan de resolver problemas de máximos y mínimos, muestran unos errores y dificultades, tales como no saber pasar de un lenguaje escrito a uno geométrico, que no son triviales sino, al contrario, muchos de ellos son muy profundos, lo cual me ha conducido a pensar que solamente con una buena preparación didáctica se pueden abordar las respuestas adecuadas de cara a la solución de los problemas didácticos inherentes a la resolución de este tipo de problemas. Son numerosas las investigaciones, como por ejemplo Tall (1997), Moreno y Cuevas (2004) y Baceelli et al. (2013), que han abordado problemas de optimización en la enseñanza, aunque estos estudios están muy sesgados hacia lo procedimental. En esta Memoria se amplía poderosamente esta perspectiva al abordar numerosas entidades de la actividad matemática, ampliando esos estudios anteriores. Es decir, el uso de ciertas herramientas de los marcos teóricos (EOS y TRRS) en la enseñanza de la optimización aporta elementos originales a esta temática.

Por tanto, la investigación didáctica de esta temática es necesaria y actual si buscamos una enseñanza de calidad (tal y como defiende el profesor Bricmont) y además, dicha investigación ha de realizarse tal y como propone el profesor Dawkins, desde una óptica científica que no solamente aporta hechos científicos sino también dota al que la realiza de un pensamiento lógico, crítico y escéptico; esto es, hemos de utilizar marcos teóricos que nos marquen la pauta científica en nuestra investigación.

Como ya he señalado anteriormente, en mi trabajo como profesora en el aula de Bachillerato he podido detectar algunos interrogantes didácticos en la enseñanza-aprendizaje de los problemas de máximos y mínimos que, de manera ingenua formulo en forma de preguntas de investigación: ¿por qué les cuesta tanto trabajo a los alumnos pasar del enunciado de un problema de optimización a sus planteamientos geométricos y analíticos correctos?, ¿si yo explico claramente estos problemas en clase por qué es tan difícil que se transfieran correctamente a los alumnos dichas explicaciones?, ¿podría clasificar sistemáticamente los errores que observo en mis alumnos cuando resuelven estos problemas?, ¿cómo preparar una buena clase sobre problemas de máximos y mínimos?, ¿qué libro de texto es el más idóneo para mi enseñanza?, ¿cómo valorar si mis clases son buenas o no?, ¿qué han aprendido mis alumnos sobre optimización?, ¿cómo evaluarlos correctamente?,...

Estas preguntas y muchas más me han acompañado y acompañan siempre en mis clases de Bachillerato. Al principio intenté dar respuesta a algunas de ellas utilizando varios libros que ampliaran mi visión sobre la temática, preguntando a compañeros acerca de cómo solucionaban ellos sus problemas en clase,…pude observar que mis intentos lograban poco éxito con los alumnos y, sobre todo, a mí no me aclaraban lo que verdaderamente ocurría en el aula, se me escapaban muchas variables, intuía que me faltaba estructuración y sabiduría para abordar los problemas didácticos citados.

Sin embargo, mi acercamiento a la Didáctica de las Matemáticas y su investigación, por medio del Área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Jaén, me ha permitido de una manera dilatada en el tiempo, conocer herramientas teóricas que me han acercado a una formulación de las preguntas anteriores bajo una óptica científica enmarcada dentro de marcos teóricos relevantes (EOS y TRRS), lo cual me ha abierto la posibilidad de poder realizar una investigación sobre la enseñanza-aprendizaje de los problemas de máximos y mínimos. Así, basándome en estos enfoques teóricos, las preguntas de investigación que he formulado de forma más científica son las siguientes:

¿Qué tipo de trayectoria didáctica siguen los significados institucionales de los problemas de optimización que se proponen en los libros de texto de 2º de Bachillerato?

¿Qué tipo de trayectoria didáctica siguen los significados institucionales de los problemas que se proponen a los alumnos en clase sobre la optimización?

¿Qué tipo de conflictos semióticos muestran los alumnos respecto a la optimización, comparados con los conflictos semióticos potenciales extraídos de los manuales, una vez recibida la enseñanza del concepto, y qué tipo de no congruencias se detectan en las conversiones entre registros?

¿Qué tipo de conexiones y complementariedades se dan entre los tratamientos y las conversiones de la teoría de registros y la idea de función semiótica del EOS, de cara a la posible explicación de los conflictos de significado en los estudiantes?

Estas preguntas tratan de dar respuesta al objetivo general del trabajo: "Analizar los fenómenos didácticos relacionados con la optimización en el nivel del Bachillerato desde las perspectivas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos y de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica".

Para dar respuesta a este objetivo, se ha elaborado esta Memoria que consta de siete capítulos. El primero de ellos se dedica a los antecedentes de la investigación, que se divide en tres partes, según las facetas epistémica, personal y mediacional. El segundo capítulo trata de los fundamentos de la investigación, que consta de cuatro apartados: marco teórico, con el EOS, la TRRS y la articulación de ambas teorías de cara a la optimización; objetivos; hipótesis; y metodología. Posteriormente, para obtener el significado de referencia se realiza un breve estudio histórico-epistemológico de la optimización, buscando las configuraciones epistémicas acerca de la misma, finalmente se realiza el significado global de la optimización. En el capítulo tercero determinamos el significado pretendido que emana de los libros de texto, realizando un análisis epistémico de la unidad didáctica referida a este contenido y un análisis ontosemiótico de los problemas resueltos identificando los conflictos semióticos potenciales. A continuación, en el capítulo cuarto, para obtener el significado pretendido, se estudia la optimización en el currículo de Bachillerato y se analizan dos libros de texto en dos fases, un análisis epistemológico de la unidad didáctica y un análisis ontosemiótico de los problemas resueltos. El capítulo quinto se dedica al significado institucional implementado a través de los apuntes de clase de los estudiantes, con un primer análisis epistemológico de dichos apuntes y un segundo análisis ontosemiótico de los problemas resueltos. Seguidamente, en el sexto capítulo se aborda el estudio de los significados personales de los estudiantes participantes en la investigación, mediante el análisis ontosemiótico de los problemas propuestos en las pruebas de evaluación correspondientes. Por último, en el capítulo séptimo, se hacen explícitas las conclusiones de la investigación, analizando los objetivos e hipótesis de la investigación según los resultados obtenidos, destacando las principales aportaciones y, por último, estableciendo las limitaciones de la investigación y las sugerencias de cara a futuras investigaciones.

Capítulo 1

Área problemática y Antecedentes

En este capítulo presentamos una perspectiva general sobre las investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica de la Matemática referentes al problema de investigación que nos atañe: la enseñanza-aprendizaje de la optimización en bachillerato.

La cuestión de la enseñanza de la optimización ha sido tratada desde diferentes enfoques en diversas investigaciones. A continuación, presentamos un recorrido por dichos estudios con el objetivo de centrar nuestro trabajo de investigación dentro del contexto de los resultados obtenidos hasta el momento. Dichas investigaciones son las que orientan el rumbo de nuestra investigación.

Hemos clasificado los trabajos sobre la optimización según el modelo de conocimiento didáctico-matemático en el que nos basamos para la elaboración de esta investigación, considerando las siguientes categorías:

- Investigaciones centradas en la faceta epistémica, concernientes a los componentes del significado institucional.
- Investigaciones centradas en la faceta personal, referentes al desarrollo del significado personal.
- Investigaciones centradas en la faceta mediacional, relativos a los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.

Resaltar que no es una clasificación absoluta, y muchos de los trabajos que a continuación presentamos podrían pertenecer a varias categorías, aunque permite ordenarlos según el elemento protagonista de la investigación.

1.1. Investigaciones centradas en la faceta epistémica

En esta categoría hemos incluido trabajos sobre la optimización relativos a análisis de libros de texto (algunos históricos), currículos y propuestas didácticas

El análisis de libros de texto puede ser una forma eficaz para proporcionar información sobre el proceso en el que la enseñanza y el aprendizaje son acometidos para una gran población durante un largo período de tiempo, tal y como señala González (2002). En esta investigación se realiza un estudio histórico de la evolución en la enseñanza del análisis matemático de los libros de texto, centrado en un aspecto más global que el lenguaje como son los sistemas de representación simbólica utilizados en éstos. Aporta información sobre las diferentes tendencias en los modelos didácticos subyacentes en los textos analizados desde finales del siglo XVII, enfatizando la independencia entre la tendencia del modelo didáctico y el periodo histórico analizado. Centrando el estudio en los puntos críticos, que son tratados bajo una perspectiva representativa, éstos se consideran una de las causas del origen del cálculo diferencial y una fuente de fenómenos que podrían caracterizar las situaciones didácticas planteadas en los libros de texto. En esta Memoria los puntos críticos son estudiados bajo una visión mucho más amplia en cuanto a la actividad matemática.

En González y Sierra (2004) se considera la investigación de los libros de texto como un método eficiente para el estudio de los procesos de enseñanza aprendizaje y se presenta una metodología para realizar el análisis de los manuales de matemáticas. Se muestra la evolución del trato de los puntos críticos en los libros españoles de la enseñanza secundaria a lo largo del siglo XX según las formas de expresión matemática que en ellos se incluyen. Los instrumentos de la metodología se clasifican en las categorías: sintáctica, semántica, pragmático-didáctica y sociocultural y en las dimensiones: descripciones verbales, tablas de datos, representaciones gráficas y expresiones simbólicas. La investigación realizada lleva a clasificar libros de texto en tres tipos: expositivos, tecnológicos o comprensivos. Además, se comprueba que el tipo de orientación de los diferentes manuales no depende de los planes de estudio en los que se encuadre, sino que, por el contrario, son las editoriales las que establecen la forma en que se estructuran los conceptos matemáticos y el tipo de actividad que debe realizar el alumno.

En esta línea de investigación se enmarca el estudio presentado en González (2004) donde se revisa la evolución de los problemas de optimización durante el siglo XX en los manuales escolares españoles. Como consideraciones generales, se observa que se ha producido un aumento progresivo de los tipos de problemas, comenzando con los problemas relacionados con fenómenos físicos, posteriormente se planteaban problemas exclusivamente matemáticos y finalmente se ha producido la incorporación de problemas relacionados con situaciones económicas. Lo que prácticamente no ha variado es el tipo de actividad que se espera del alumno, destacando la aplicación rutinaria de las reglas a ejercicios-tipo o ejercicios escolares.

Según Castañeda (2006), el cual realiza un estudio acerca de las obras de L'Hôpital y Agnesi, en la de L'Hôpital "Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes", el autor conforma un nuevo discurso del cálculo ya que pretende difundir el conocimiento al lector no especializado. Para ello, utiliza un lenguaje más accesible organizando las ideas en una secuenciación lógica, atendiendo a la evolución y profundidad de éstas e incluyendo consideraciones teóricas aclaratorias y resolución de problemas para facilitar la compresión. L'Hôpital plantea el concepto de punto máximo desde tres puntos de vista. En el primero lo caracteriza en función del tamaño de la ordenada, siendo el punto máximo aquel cuya ordenada es la mayor. El segundo se basa en el cambio de signo de las diferencias en un entorno cercano al punto. El tercero se basa en la posición de la tangente a la curva en ese punto que debe ser horizontal. En cualquiera de los tres casos se recurre a un argumento geométrico. En la obra de Agnesi "Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana" se encuentran cuatro caracterizaciones de estos puntos. La primera de ellas es una caracterización dinámica de una curva como un reconocimiento variacional de los puntos de una curva en los que el máximo se alcanza cuando la sucesión de ordenadas llega al valor mayor. En la segunda se considera la posición de la tangente de la misma forma que hizo L'Hôpital, es decir, cuando la tangente es cero o la subtangente infinito. En la tercera, se compara el triángulo característico a medida que el punto se acerca al máximo se observa que sus magnitudes cada vez van disminuyendo más hasta que se hacen cero lo que constituye una propiedad de las diferencias. En la cuarta caracterización se observa que las diferencias en el punto han de ser cero por lo que se definen por medio de una propiedad analítica. Como vemos, la historia de la Matemática puede suministrar herramientas para la resolución de problemas diferentes de las utilizadas en la actualidad. En González (2011) se observa que los conceptos de Análisis Matemático se tratan en la enseñanza actual de manera algebraizada y esto conlleva a la pérdida del origen y sentido de los conceptos. Sin embargo, a partir de la revisión de los conceptos de máximo y mínimo tal como aparecen en el libro de L'Hôpital, considerando que el carácter geométrico-dinámico que dio origen a esta rama de las matemáticas podría organizar los conceptos en esquemas significativos dotándolos de sentido.

Siguiendo con la línea de las investigaciones históricas de los problemas de optimización como objeto de estudio, destacamos la investigación de Santiago (2008) donde se desarrolla un análisis de los libros históricos identificando este tipo de problema, analizando su resolución y verificando la tipología de los mismos. Además, se aborda la consideración de los problemas de optimización en el currículo portugués y en los manuales escolares a lo largo del siglo XX y hasta la actualidad.

La resolución de problemas como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática es un campo que ha evolucionado bastante en los últimos años y en la actualidad, la mayoría de los diseños curriculares establecen la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basada en una instrucción vía resolución de problemas. Además, el currículo oficial demanda el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas por medio de la resolución de problemas. Concretamente, en la Orden de 5 agosto de 2008 por la que se desarrolla el currículum correspondiente al Bachillerato en Andalucía, p. 170, se dice: "La resolución de problemas debe ocupar un lugar preferente en la enseñanza de las matemáticas".

Las investigaciones que se presentan a continuación son estudios del currículo y propuestas didactas relativas a la optimización:

En Villers (1997) se pone de manifiesto que uno de los principales objetivos de las Matemáticas en Enseñanza Secundaria es el que los alumnos adquieran las destrezas necesarias para abordar situaciones de la vida real y entre ellas destaca la importancia de desarrollar la capacidad para la toma de decisiones. Considera que la optimización es un concepto matemático necesario para que los alumnos consigan tal objetivo. Sin embargo, observa que este contenido no aparece en los programas educativos hasta los últimos años y, además, es tratado de una manera muy imprecisa. Esta realidad puede ser debida a la ausencia de referencias existentes en los programas educativos. Sin embargo, este hecho contradice una de las orientaciones recogidas en un trabajo publicado en el año 1980 titulado “Commentaires du programme de mathématique pour les trois cycles” perteneciente al marco de la reforma pedagógica de l’Enseignement Primaire, donde se dan orientaciones para que se incluyan problemas de optimización en los nuevos programas educativos. En este trabajo se considera que es posible tratar situaciones relacionadas con la optimización en los primeros años escolares. Esto conllevaría varias ventajas, por ejemplo, dotar a las matemáticas de un carácter más realista ya que la optimización permite acercarlas al alumno mediante experiencias de su entorno. Propone una serie de problemas específicos que podrían ser introducidos en la práctica educativa a nivel de secundaria. Estos problemas están relacionados con la búsqueda de valores extremos en figuras geométricas y son resueltos mediante métodos algebraicos.

Ahondando en lo anterior, en Lacasta et al. (2009) se presenta una manera de introducir un problema de optimización en el primer ciclo de Educación Primaria, mediante una transposición didáctica que preserva la esencia de la optimización en un contexto matemático escolar propio de la etapa. Se afronta un problema de este tipo en el tránsito del número natural a la medida, utilizando la ingeniería didáctica como método de investigación. En este marco se diseña una situación didáctica basada en el análisis a priori. El objetivo de esta situación es doble: por un lado, la intervención razonada en los sistemas didácticos; por otra parte, producir conocimiento sobre la forma en la que se construyen y comunican problemas de optimización relativos a la medida, en edad infantil.

En Furinghetti (2004) se propone una aplicación al aula del siguiente problema de Fermat: “dividir un segmento en dos partes de forma que el producto de sus longitudes sea máximo”. Para la resolución se fomentará el papel protagonista del alumno, donde construya la resolución a partir de la experiencia. Es decir, se lleva al aula una propuesta didáctica sobre la optimización basada en documentos históricos.

En el trabajo de Karelin, Rondero y Tarasenko (2007) se invierte el orden en la relación entre la derivada y los máximos y mínimos con respecto a la propuesta tradicional que aparecen en los libros de texto. En lugar de aplicar la derivada para calcular los extremos, se utiliza la noción de máximo y mínimo para calcular funciones derivadas aplicando la relación existente entre los máximos, los mínimos y la recta tangente. Se muestra la conexión entre la búsqueda de los máximos y mínimos de una función y el cálculo de la derivada en un punto dado, en base a la interpretación geométrica del concepto y la aplicación de desigualdades. Consideran que este método permite profundizar en nociones fundamentales del cálculo y ayudar en los diferentes niveles educativos a consolidar métodos de análisis sobre las características gráficas de las funciones. Esta secuencia didáctica alternativa es utilizada por Font (2009), que propone una secuencia de actividades para calcular la derivada de la función $f(\mathrm{x})= x^2$ en las que no se usa la definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación. El objetivo es analizar las diferentes formas de argumentación utilizadas y ver cómo se está contribuyendo al desarrollo de la competencia "argumentar" en los alumnos. Se trata de conseguir una buena idoneidad epistémica atendiendo fundamentalmente a los argumentos utilizados en dicha secuencia didáctica.

Las investigaciones acerca de la optimización que a continuación se describen utilizan las nociones del EOS.

El trabajo desarrollado en Malaspina y Font (2010) destaca la importancia de desarrollar, desde los primeros grados de educación, el pensamiento optimizador de los futuros ciudadanos. Ante la realidad, que por una parte muestra que los problemas de optimización están muy presentes en la vida cotidiana, y por otra, la ausencia de éstos en los currículos, se muestra la posibilidad de introducir experiencias optimizadoras aplicables en clases de educación básica y en cursos de formación de profesores. Propone secuencias didácticas con problemas de optimización que requieren pocos conocimientos matemáticos para resolverlos, en contextos lúdicos y con muchas potencialidades didácticas y matemáticas. Se plantean situaciones en las que hay que buscar dos números de dos cifras de tal manera que su suma sea máxima, buscar números de movimientos mínimos para cambiar de posición ciertos objetos (el caso de las torres de Hanoi), combinar trozos de papel para que la superficie sea máxima, … Esta inclusión potenciaría la intuición optimizadora del individuo desde los primeros cursos de las matemáticas escolares, sin descuidar el rigor, como parte de una formación científica integral.

En Balcaza, Contreras y Font (2017) se realiza, en primer lugar, un estudio epistemológico del origen y la evolución de la noción de optimización a lo largo de la historia de la Matemática para determinar el significado de referencia de esta noción para el proceso de instrucción. En segundo lugar, se analizan dos libros de texto de segundo de Bachillerato del sistema educativo español que son los más usados como recurso didáctico por el profesorado en la asignatura de Matemáticas. El propósito del análisis es conocer cómo se pretende abordar los problemas de optimización en el proceso de instrucción. La finalidad es identificar y describir las dificultades que el estudiante pueda encontrar en el aprendizaje de esta noción.

1.2. Investigaciones centradas en la faceta personal

Los trabajos incluidos en esta categoría se centran en el análisis de las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la optimización, así como las representaciones y sus cambios.

En Campos y Estrada (1999) se presentan resultados sobre el uso de representaciones en estudiantes pre-universitarios en un proceso de resolución de un problema de optimización. Se destaca la importancia de las representaciones matemáticas y la manipulación simbólica como procesos matemáticos que intervienen en la resolución de problemas. Durante el proceso para resolver una situación donde no se obtenga la solución mediante una técnica rutinaria, el alumno tiene la posibilidad de articular sus conocimientos previos con los nuevos, construyendo un aprendizaje significativo. Los resultados de su estudio ponen de manifiesto la vinculación existente entre la resolución de esta clase de problemas de forma exitosa y la habilidad en la construcción, empleo y articulación de las representaciones. Por tanto, considera necesario incluir los problemas en el aprendizaje de los conocimientos matemáticos ya que permiten abordar un mismo contenido mediante distintos enfoques presentando los conceptos en varios sistemas representacionales y las conexiones entre ellos. En nuestra investigación se profundiza y avanza en este estudio al utilizar la TRRS, el EOS y sus relaciones dialécticas.

El trabajo de Contreras, Luque y Ordóñez (2004) se centra en el análisis de la resolución de un problema de optimización basándose en la teoría del juego de contextos (Contreras et al., 2004) utilizando las traducciones entre registros de representación semiótica de Duval. Según los autores, para aportar significado al enseñar un contenido matemático ha de contextualizarse en diversas situaciones de enseñanza y, paralelamente, organizar una dinámica de tratamientos intrarregistros y la coordinación interregistros. Se resuelve un problema isoperimétrico utilizando diversos contextos: geométrico, algebraico, funcional, casi infinitesimal e infinitesimal y acudiendo a los tratamientos y conversiones. Se considera que una modelización de los modos de pensamiento aritmético, algebraico, funcional e infinitesimal, basada en el funcionamiento y las interrelaciones entre los contextos y los registros semióticos, describe la complementariedad entre dichos modos de pensamiento. Tanto la coordinación entre registros, como el sentido de las representaciones y la faceta dual propuesta en Godino (2002), intensiva/extensiva, de las entidades matemáticas puestas en juego, deben guiar la arquitectura cognitiva asociada a la resolución del problema. El empleo de los distintos métodos para la resolución de problemas de optimización podría dotar de sentido al concepto de máximo y mínimo, pudiéndolo independizar del cálculo diferencial donde éste sería otra posible herramienta de resolución.

La investigación de Moreno y Cuevas (2004) pone en evidencia que impartir matemáticas de una manera prescriptiva, rutinaria y ajena al entorno del estudiante, conduce a interpretaciones falsas alrededor de los conceptos matemáticos. Se considera como uno de los problemas de la enseñanza de las matemáticas a todos los niveles, la enfatización del componente procedimental algorítmico en detrimento de la comprensión conceptual. El estudio pone de manifiesto que una interpretación errónea de los conceptos de máximos y mínimos, por parte de los alumnos, es la causa de que consideren soluciones que contradicen a su intuición a la hora de resolver problemas no rutinarios. Una de las posibles causas de las concepciones erróneas que los alumnos tienen sobre máximos y mínimos la proporciona Tall (1997), cuando considera que la resolución de problemas de forma rutinaria propicia que no se realicen las conexiones conceptuales pertinentes. En nuestra investigación tenemos en cuenta estas consideraciones y se profundiza en el análisis didáctico de los problemas de optimización.

En Villegas, Castro y Gutiérrez (2009) se realiza un estudio de las representaciones en la resolución de problemas de optimización en alumnos universitarios. La caracterización de los resultados muestra la fuerte relación entre el éxito en la resolución de problemas de optimización y la habilidad en el manejo de las representaciones. En nuestra investigación se profundiza en estas ideas al utilizar la TRRS y relacionarla con el EOS.

A continuación, describimos dos investigaciones realizadas bajo el marco teórico del EOS.

En Malaspina (2008) se presentan los resultados de una investigación cuyo fin es el de examinar el papel que juegan la intuición y el rigor en la resolución de problemas de optimización de alumnos universitarios. Se observa que hay deficiencias en el uso del lenguaje, procedimientos, proposiciones y argumentación utilizada. Además, una incorrecta interacción entre la intuición, rigor y formalización. Si bien son numerosas las investigaciones que hay sobre la intuición, el rigor, la resolución de problemas y la optimización, la relevancia de la investigación de Malaspina y Font está en haber trabajado conjuntamente estas nociones.

La investigación abordada en Baccelli et al. (2013) trata de detectar las dificultades de los alumnos universitarios de ingeniería (Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina) para resolver problemas de optimización con la finalidad de mejorar las estrategias de enseñanza de este tema. Los resultados muestran que las dificultades más frecuentes en los alumnos se encuentran en algunos de los procedimientos empleados al resolver dichos problemas. La identificación de dichos procedimientos permitirá intervenir sobre ellos para lograr un mejor desempeño a la hora de resolver problemas de optimización.

1.3. Investigaciones centradas en la faceta mediacional

En los últimos años ha aumentado considerablemente el interés de la comunidad investigadora acerca de la contribución de las nuevas tecnologías para abordar el aprendizaje. En Lagrange et al. (2001) se presentaron los resultados de un meta-análisis de más de 600 publicaciones de los últimos años con informes de investigaciones y experiencias de innovación sobre el uso de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) en la Educación Matemática. Se han constatado el bajo nivel de su integración en las clases de matemáticas y la diversidad de factores a tener en cuenta, tanto para la evaluación de sus efectos como de las condiciones de implementación. Se constata una tensión entre las altas expectativas del uso de las TIC para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y la baja integración en las clases.

Los artículos que sintetizamos a continuación se centran en educación secundaria y universitaria y hacen una propuesta específica con distintas actividades y problemas referentes a situaciones relacionadas con la optimización proponiendo el uso de las nuevas tecnologías, en concreto el uso de la calculadora gráfica, como recurso didáctico para abordarlas.

Considerando que los métodos utilizados en la educación secundaria para el cálculo de máximos y mínimos son puramente mecánicos, en Kindt (1995) se desarrolla una actividad utilizando como recurso tecnológico la calculadora gráfica. Se resuelve un mismo problema de optimización utilizando diferentes métodos. En esta línea, en Lowther (1999) se expone una experiencia optimizadora realizada con alumnos de secundaria en la que se resuelve un problema utilizando tres métodos: numérico, algebraico y con calculadora gráfica, permitiendo la articulación de los tres sistemas de representación. Aunque en las conclusiones se resalta el beneficio para los alumnos del uso de la tecnología, no se realiza ningún tipo de estudio científico que lo pueda corroborar.

En Camacho y González (1998) se presenta una clasificación de los tipos de problemas que aparecen en los libros de texto y se desarrollan algunas sugerencias didácticas para su resolución utilizando como recurso la calculadora gráfica. Una de las ventajas que plantean del uso de este recurso tecnológico en el proceso de enseñanza y aprendizaje en la resolución de problemas de este tipo, es que permite a los alumnos trabajar con distintos tipos de representación (numérico, gráfico y algebraico) lo que conlleva a enriquecer el planteamiento y el razonamiento en la resolución de los problemas. Además, se aportan resultados de diversas investigaciones que concluyen que los estudiantes que usan calculadoras gráficas para resolver problemas obtienen una mayor comprensión conceptual que los que desarrollan el aprendizaje de forma tradicional.

En Driscoll y Kobylski, (2002) se tratan reflexiones didácticas sobre la intuición y la optimización no lineal enfocadas a nivel universitario. Se propone el uso del software MAPLE como recurso para emplear en la resolución de problemas de optimización. Se expone el desarrollo de una experiencia que puede ser utilizada como una actividad de motivación en la cual los alumnos expresen sus ideas previas, experimenten e investiguen. Los autores defienden que para lograr el aprendizaje de un contenido matemático es necesario la articulación de dos o más registros de representación semiótica. Este recurso didáctico permite mostrar tres representaciones a la vez: geométrica, numérica y gráfica, favoreciendo la articulación entre ellos. En esta Memoria al discutir las relaciones y complementariedades entre TRRS y EOS, se señala que el uso y articulación de varios sistemas de representación semiótica no basta para la comprensión de los problemas de optimización ya que, como se señala en Godino et al. (2016), la comprensión se entiende como una capacidad que tiene el alumno y no tanto como un proceso mental cuando articula representaciones.

Tal como señala González (2006) el uso de las tecnologías de la información y la comunicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje ha permitido modificar el tratamiento de los problemas de optimización en la práctica educativa. Se hace una propuesta didáctica con una serie de problemas sobre optimización que son resueltos mediante el software *Cabrí-Géomètre* y se justifican las soluciones de los problemas planteados usando argumentos que no involucran al Cálculo Diferencial. Entre las conclusiones de esta investigación se destaca que muchos de los problemas que se resuelven mediante Cálculo Diferencial pueden ser usados para introducir conceptos nuevos en el nivel secundario. Las construcciones realizadas usando este software permiten desarrollar al alumno sus habilidades y reforzar sus conocimientos de geometría y que este procedimiento permite relacionar distintas representaciones.

En Díaz (2014) se muestran las ventajas de la Hoja de Cálculo para representar los problemas de optimización del cálculo diferencial que junto a una estrategia didáctica adecuada de enseñanza podría facilitar un procesamiento más profundo del tema. Las hojas de cálculo han adquirido un lugar destacado en los recursos tecnológicos para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas por su disponibilidad generalizada dentro y fuera de los entornos escolares.

La investigación presentada en Navarro et al. (2016) muestra una secuencia didáctica apoyada en la tecnología para la construcción del concepto derivada en problemas de optimización. Se plantea una actividad a alumnos de Educación Superior con hoja de trabajo, manipulable físico y archivo de GeoGebra para resolver un problema de optimización de contexto de la vida cotidiana. Basándose en el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico para el análisis didáctico de la actividad se obtienen conclusiones entre las que destacamos alguna de ellas. Se considera que el software facilita la visualización de la gráfica de la función que describe la situación problema y la representación de la figura geométrica que interviene. Se determina que la actividad contribuyó a que los estudiantes identificaran las variables involucradas y la pendiente de la recta tangente igual a cero en un punto crítico. Este tipo de actividad permite establecer las bases para la construcción del concepto de derivada por medio de la pendiente de la recta tangente con el apoyo de la tecnología.

Capítulo 2

Fundamentos

El presente capítulo está estructurado en cuatro secciones. En la primera de ellas se presentan los fundamentos teóricos de nuestra investigación, que nos permitirán analizar el conocimiento didáctico-matemático de los problemas de optimización, considerando el tratamiento otorgado a la optimización en el currículo en los libros de texto de educación de Bachillerato y en los apuntes del desarrollo del proceso de instrucción para valorar el aprendizaje de los estudiantes sobre dicho contenido.

A partir de las nociones de ambos marcos teóricos y metodológicos en la segunda y tercera sección definimos los objetivos y las hipótesis de nuestra investigación, planteando y describiendo, para cada uno de ellos, distintas fases y tareas encaminadas a la consecución de cada uno de dichos objetivos. La metodología empleada para cada fase de la investigación se describe en la cuarta sección.

2.1. Marco teórico

El problema de investigación que se aborda en esta tesis busca identificar factores de tipo didáctico que intervienen en la enseñanza y el aprendizaje de las nociones matemáticas asociadas a los problemas de optimización que se resuelven con las herramientas del Cálculo Diferencial.

Para abordar una investigación sobre Didáctica de las Matemáticas hay que considerar un complejo proceso en el que están implicados diversos fenómenos didácticos (epistémicos, cognitivos e instruccionales), así como elementos semióticos y ecológicos. Por una parte, consideramos que un enfoque teórico que engloba todos estos aspectos y además, ayuda a su análisis, es el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino, Batanero, 1994; Godino, 2002;

Godino, Batanero, Font, 2007). Dicho marco teórico incluye un modelo epistemológico de las matemáticas sobre bases antropológicas y socioculturales, un modelo cognitivo sobre bases semióticas de índole pragmatista, y un modelo instruccional coherente con los anteriores. Por otra parte, la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Duval, 1995; 2006) permite el análisis de las diversas representaciones materiales que intervienen en la actividad matemática, las transformaciones de éstas y la función que desempeña en la comprensión de las matemáticas.

Hemos adoptado la articulación de ambos marcos teóricos porque nos proveen de herramientas teóricas que nos permitirán realizar un análisis más detallado de los conocimientos didáctico-matemáticos y, en consecuencia, contribuir a la comprensión de los procesos que acontecen en la enseñanza y aprendizaje de la optimización (Pino- Fan et al., 2015, Godino et al., 2016).

A continuación, describimos las nociones de los dos marcos teóricos que utilizamos en nuestra investigación.

2.1.1. Supuestos y herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática

En el EOS se considera la Matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente estructurado.

Se establece la noción de práctica como noción primitiva, considerándola como toda actuación o manifestación realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994). Así, estas prácticas pueden ser realizadas por una persona, sistemas de prácticas personales, o compartidas en el seno de una institución, sistemas de prácticas institucionales y se consideran como objeto básico para el análisis cognitivo (tanto en su dimensión personal como institucional).

A partir de la concepción de práctica matemática surge la noción de significado de un objeto matemático que se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas (Godino et al, 2006). Así, si considera el sistema de prácticas compartido en el seno de una institución, se refiere al significado institucional, y si se considera el manifestado por un sujeto, se refiere al significado personal.

Los significados institucionales se clasifican en los siguientes (Figura 2.1):

- implementado (sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente en un proceso de estudio específico).
- evaluado (subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes).
- pretendido (sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio).
- referencial (sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido).

Este significado de referencia será parte del significado global del objeto matemático escogido en función de la institución concreta. Para los significados personales la tipología es la siguiente (Figura 2.1):

- global (corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmernte el sujeto relativas a un objeto matemático).
- declarado (prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas).
- logrado (prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida).

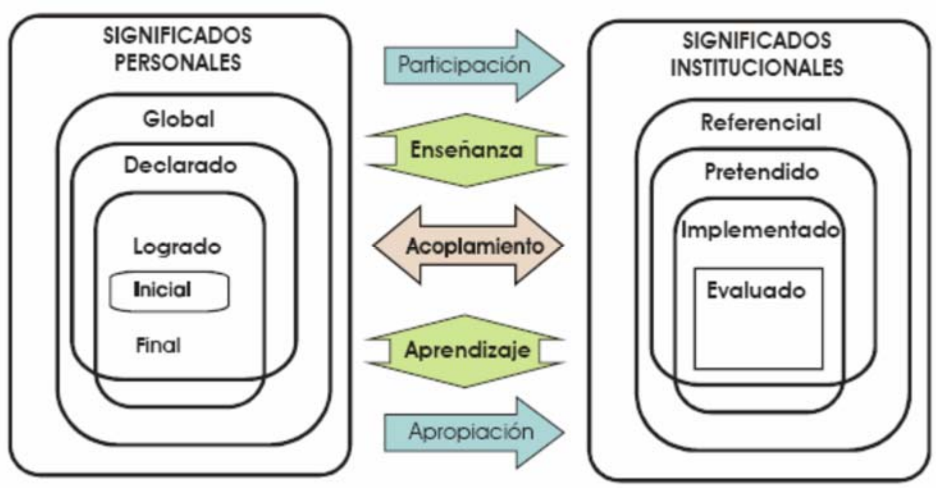


Figura 2.1: Tipos de significados institucionales y personales

Los objetos matemáticos emergen de los sistemas de prácticas, de los cuales se consideran entidades primarias los siguientes (Godino, Batanero y Font, 2007):

- Situaciones-Problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios,…).
- Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos,…) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,…).
- Conceptos (introducidos mediante definiciones o descripciones) .
- Propiedades (enunciados sobre conceptos,…).
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,…).
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,…).

Estos seis tipos de objetos matemáticos se unen y organizan para formar otras entidades más complejas componiendo entre todas la actividad matemática. La red de objetos emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos se define como configuración (Figura 2.2). Estas configuraciones pueden ser cognitivas o epistémicas según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional.

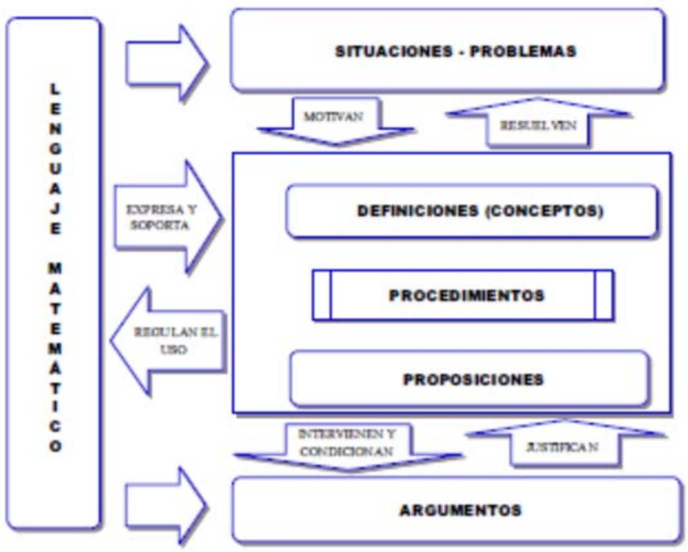


Figura 2.2: Configuración de las entidades primarias matemáticas

Según el posicionamiento del EOS, un sujeto comprende el significado de un objeto si es capaz de reconocer sus propiedades y representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas dentro de la institución correspondiente.

Las entidades pueden ser consideradas desde las siguientes facetas duales (Godino, 2002; Contreras y Ordoñez, 2006):

- Personal – Institucional: cuando los sistemas de prácticas son referidos a una persona, se reconocen como prácticas personales, mientras que cuando son referidos a una institución, como prácticas institucionales.
- Ostensivo – No ostensivo: se dice que un objeto es ostensivo si es público y observable. Los conceptos matemáticos tienen una naturaleza no ostensiva, pero se pueden hacer públicos a través de sus representaciones lingüísticas.
- Expresión – Contenido: corresponden a los elementos que se relacionan a través de la función semiótica que se define como la correspondencia o relación de dependencia entre una entidad antecedente (expresión, significante) y otra consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según una determinada regla, hábito o criterio establecida en un acto de interacción comunicativa.
- Extensivo – Intensivo (Ejemplar – Tipo; Particular – General): un objeto matemático puede ser considerado como un caso particular o bien como una clase de objetos del mismo tipo.
- Unitario – Sistémico: los objetos matemáticos pueden ser considerados como entidades unitarias o bien como sistemas que requieren de una descomposición para su estudio.

La emergencia de las entidades primarias tiene lugar mediante procesos matemáticos (secuencia de prácticas) de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos y argumentación. Por otra parte, por la faceta dual de las entidades conlleva a considerar los siguientes procesos:

- Institucionalización – Personalización
- Generalización – Particularización
- Descomposición/Análisis – Composición/Reificación
- Materialización – Idealización
- Representación – Significación

La Figura 2.3 muestra el desglose y las interacciones de los objetos matemáticos primarios, las facetas duales desde las que éstos pueden ser vistos y los procesos que llevan asociados (Godino, Batanero y Font, 2007; Font y Rubio, 2017).

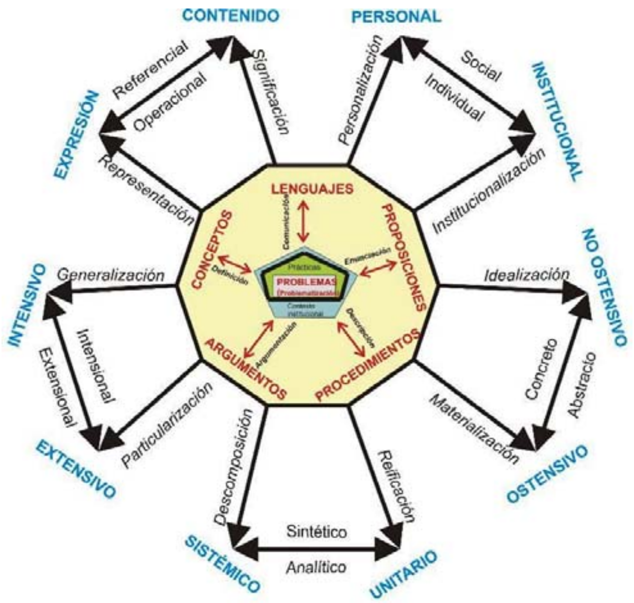


Figura 2.3: Configuración de objetos y procesos matemáticos

Bajo el marco teórico del EOS, el proceso de enseñanza y aprendizaje de la actividad matemática consiste en una interacción entre el sistema de representación externo (notacional y formal) utilizado durante los procesos de instrucción y las representaciones cognitivas (mentales internas, no ostensivas) de las nociones matemáticas, bajo ciertas reglas dictadas por los objetos matemáticos empleados en dicha interacción. Por tanto, las representaciones son las responsables de la construcción de la asignación de significado de dichos objetos matemáticos en los estudiantes.

Para profundizar en el análisis de la resolución de problemas o tareas matemáticas es necesario considerar las prácticas matemáticas realizadas con el apoyo de diversos lenguajes, tratando de mostrar las relaciones sinérgicas entre los mismos y los diversos tipos de objetos no ostensivos que necesariamente acompañan a las diversas representaciones. Para realizar este análisis utilizaremos la configuración ontosemiótica (configuración de prácticas, objetos y procesos y funciones semióticas) como herramienta analítica de las prácticas matemáticas institucionales y personales (Figura 2.4).

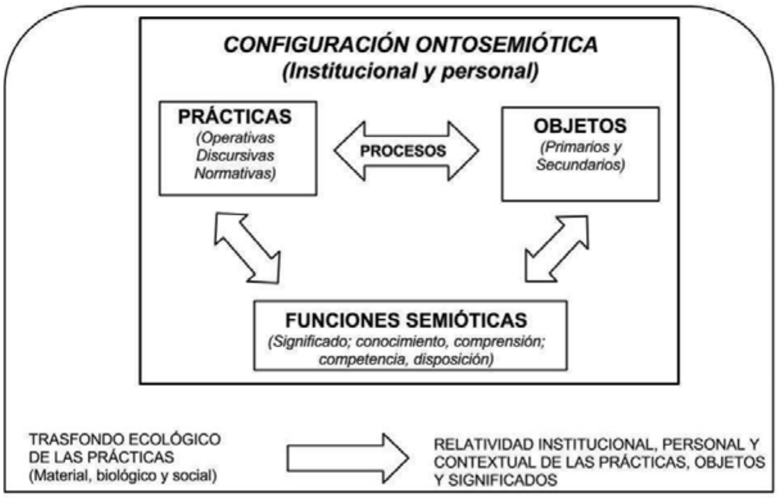


Figura 2.4: Entidades primarias de la ontología y epistemología EOS

En el análisis ontosemiótico, la función semiótica permite analizar los procesos de interpretación que los estudiantes deben realizar cuando intentan construir los significados de los objetos matemáticos. Un conflicto semiótico se define como una disparidad entre los contenidos atribuidos a una misma expresión por dos personas o instituciones en interacción didáctica. Este constructo permite identificar y explicar las potenciales dificultades que tendrán los estudiantes en el proceso de instrucción recibido (Godino et al., 2006).

Para analizar un proceso de instrucción, el EOS propone un modelo denominado "modelo del conocimiento didáctico–matemático" que incluye seis facetas o dimensiones involucradas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de tópicos específicos de matemáticas:

- Epistémica: distribución, a lo largo del tiempo de enseñanza aprendizaje, de los componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
- Cognitiva: desarrollo de los significados personales (aprendizajes).
- Afectiva: distribución temporal de los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
- Interaccional: secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados.
- Mediacional: distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.

- Ecológica: sistema de relaciones con el entorno social, político, económico,… que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Para cada una de estas facetas o dimensiones se contemplan, a su vez, diversos niveles que permiten el análisis de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales:

- Prácticas matemáticas y didácticas: descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes.
- Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos): descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.
- Normas y metanormas: identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
- Idoneidad: identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica.

Con el fin de mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas hay que evaluar el proceso de instrucción para lo cual el EOS dota de la herramienta de la idoneidad didáctica que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Contreras y Font, 2006):

- Idoneidad epistémica: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de unos significados de referencia.
- Idoneidad cognitiva: expresa el grado de proximidad de los significados pretendidos/ implementados con respecto a los significados personales logrados.
- Idoneidad interaccional: se refiere al grado en el que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar las dificultades potenciales de los alumnos y, por otra parte, resolver los conflictos que se

producen en el proceso de instrucción.

- Idoneidad mediacional: es el grado de disponibilidad de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de la actividad.
- Idoneidad emocional: describe el grado de implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- Idoneidad ecológica: expresa el grado en el que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo y a los condicionamientos del entorno en el que se desarrolla.

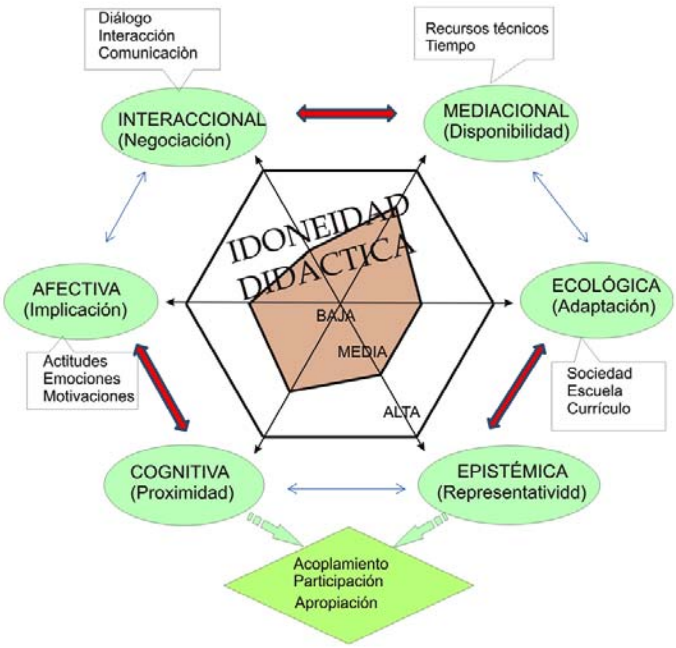


Figura 2.5: Componentes de la idoneidad didáctica

Para conseguir una idoneidad didáctica alta hay que lograr un equilibrio entre ellas (Figura 2.5). Considerando las características del trabajo de investigación que presentamos en esta Memoria nos restringimos a evaluar la idoneidad epistémica, cognitiva y ecológica considerando los indicadores que mostramos en la Tabla 2.1.

IDONEIDAD EPISTÉMICA	
COMPONENTES	INDICADORES
Situaciones-problemas	Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).
Lenguajes	Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas. Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

IDONEIDAD COGNITIVA	
COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.
Aprendizaje (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas. Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia.

	Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.
IDONEIDAD ECOLÓGICA	
COMPONENTES	INDICADORES
Adaptación al currículo	Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Educación en valores	Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.

Tabla 2.1: Indicadores de idoneidad didáctica, Godino (2011)

2.1.2. Supuestos y herramientas de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica

Desde la perspectiva semiótica-cognitiva de la TRRS, para abordar las dificultades de aprendizaje de las matemáticas hay que analizar los distintos tipos de signos que se usan en la práctica y sus transformaciones. Un conjunto estructurado de signos será un Registro de Representación Semiótica (RRS) si se pueden realizar las siguientes actividades cognitivas:

En primer lugar, constituir una traza o un conjunto de trazas perceptibles que sean identificables como una representación de cualquier cosa en un sistema determinado. A continuación, transformar las representaciones mediante las únicas reglas propias del sistema, de manera que se obtengan otras representaciones que pueden constituir un aporte de conocimiento con relación a las representaciones iniciales. Finalmente, convertir las representaciones producidas en un sistema en representaciones de otro sistema, de tal manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a lo que se representa (Duval, 1995, p. 21).

Se diferencian los siguientes RRS: la lengua natural (oral, escrita); representaciones numéricas (entera, fraccionaria, decimal); representaciones figurales o gráficas (lineales, planas o espaciales) y representaciones alfanuméricas (algebraicas). Se reconoce la posición dominante del RRS de la lengua natural, en tanto metalenguaje de todos los lenguajes y de él mismo.

Las transformaciones posibles entre representaciones pueden ser de dos tipos: tratamiento (la actividad supone una transformación entre representaciones de un mismo RRS) y conversión (la actividad supone una transformación entre representaciones de distintos RRS, siendo en este caso, esencial, la articulación de los registros).

Dos representaciones se dice que son congruentes cuando cumplen tres condiciones: correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, mismo orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones, y si para convertir una unidad significante de la representación de partida se tiene una única unidad significante en la representación de llegada (Duval, 1995, p. 6). Si uno de estos tres criterios no se verifica, las representaciones son no congruentes lo que puede suponer dificultad de compresión para el estudiante.

En el estudio del proceso de instrucción de los problemas de optimización realizaremos un análisis muy detallado de las prácticas matemáticas considerando los Registros de Representación Semiótica y la noción de configuración ontosemiótica desarrollando el análisis detallado de los elementos lingüísticos y de los conocimientos implicados en las trasformaciones entre registros de representación mediante las funciones semióticas.

2.1.3. Articulación de las herramientas registro de representación semiótica y configuración ontosemiótica

La noción de registro de representación semiótica, sus tipos, los tratamientos y conversiones entre registros, aportan un recurso para analizar la entidad primaria "lenguaje" del EOS. La TRRS amplía la categoría del lenguaje del EOS distinguiendo distintos tipos y desvelando el papel esencial de las transformaciones que se realizan entre (y dentro) los distintos tipos de lenguaje. A su vez, la noción de configuración de objetos y procesos aporta un enriquecimiento de la TRRS ya que es una herramienta que facilita el análisis detallado de los conocimientos implicados en las transformaciones entre registros de representación que se realizan en las prácticas matemáticas (Pino-Fan et al., 2015; Godino, Contreras y Font., 2016).

El EOS considera la relación entre representación semiótica y registro de representación semiótica como un ejemplar particular de función semiótica, considerando un registro como un tipo o clase de representación, Godino y Font (2010).

La compresión en la TRRS bajo el punto de vista cognitivo se fundamenta en la conversión de representaciones. Así un sujeto comprenderá un objeto representado si dispone al menos de dos registros diferentes para representarlo que pueda pasar de manera natural de un registro a otro.

El EOS asume la importancia de las diferentes representaciones ostensivas y las traducciones entre ellas en la comprensión matemática, pero considera que un sujeto ha comprendido un determinado contenido cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas. Además, dota de herramientas para explicar, desde el punto de vista epistémico, sobre cuáles son las insuficiencias del conocimiento del sujeto en un problema determinado, al identificar y describir de manera detallada los objetos matemáticos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas operativas, discursivas y normativas.

2.2. Objetivos

Este trabajo de investigación tiene como objetivo general identificar, describir y explicar los factores relacionados con los fenómenos didácticos que surgen en la enseñanza y el aprendizaje de las nociones matemáticas asociadas a los problemas de optimización, que se resuelven con las herramientas del Cálculo Diferencial, utilizando los instrumentos teóricos que facilitan el Enfoque Ontosemiótico y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica.

Este objetivo general se concreta en los cinco objetivos específicos que desarrollamos a continuación.

La determinación del significado global de referencia requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución de la optimización. De esta manera será posible detectar las situaciones que dieron origen al concepto y las dificultades que fue necesario superar hasta llegar al estado actual de la cuestión. Es por ello por lo que planteamos este primer objetivo de investigación:

Objetivo 1: Realizar un análisis epistemológico de la evolución histórica de la optimización a fin de detectar el significado institucional de referencia, para poder caracterizar la emergencia de dicho objeto a través de las prácticas ligadas a los diversos campos de problemas.

Uno de los significados a estudiar que permite comprender lo que el estudiante aprende en el aula es el significado pretendido por el profesor, que tiene como objetivo extraer aquellos significados presentes antes de aplicarlos a la clase. De aquí se extrae el segundo objetivo de investigación:

Objetivo 2: Analizar los libros de texto de segundo de Bachillerato, estudiando las situaciones-problemas presentes en dichos libros de texto, los lenguajes utilizados, los procedimientos puestos en juego, los conceptos que se utilizan, las propiedades y las argumentaciones realizadas como soporte del discurso matemático, así como las no congruencias de las conversiones entre registros de representación semiótica, a fin de detectar el significado institucional pretendido.

Centrándonos en los sistemas de prácticas y en la elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos aplicados al estudio de la enseñanza de la optimización, se busca hacer visible el significado institucional implementado. De aquí se extrae el tercer objetivo de la investigación:

Objetivo 3: Estudiar y extraer el significado institucional implementado de los problemas de optimización que se proponen en el desarrollo de la instrucción, mediante las configuraciones epistémicas asociadas, a nivel de segundo curso de Bachillerato, utilizando los apuntes de clase, por medio del análisis de las entidades primarias de la actividad matemática ya citadas: situaciones-problema, lenguajes utilizados, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentaciones, así como las no congruencias de las conversiones entre registros de representación semiótica.

Una vez que el alumno ha recibido la enseñanza hay que conocer aquellos significados que verdaderamente han asimilado. Se trata del cuarto objetivo de investigación:

Objetivo 4: Por una parte, extraer y analizar los significados personales de los estudiantes de bachillerato respecto de su experiencia en el aula sobre máximos y mínimos; por otra, analizar dichos significados personales teniendo en cuenta la evaluación de las respuestas de los estudiantes a los problemas relacionados con la optimización, buscando los conflictos semióticos presentes en sus respuestas así como los procesos de conversión y las no congruencias asociadas entre registros semióticos.

Por último, consideramos un objetivo sobre la valoración didáctica que tratamos en las conclusiones.

Objetivo 5: Valorar la idoneidad didáctica del proceso de estudio en sus facetas epistémica, cognitiva y ecológica.

2.3. Hipótesis

Mediante el estudio riguroso del proceso de instrucción de los problemas de optimización en el segundo curso de Bachillerato bajo los marcos teóricos ya expuestos, pretendemos, como hipótesis general, verificar que las causas de naturaleza ontosemiótica de las dificultades mostradas por los alumnos, respecto a los problemas de optimización en 2º de Bachillerato, pueden ser explicadas mediante un análisis didáctico por medio del EOS y la TRRS.

Esta hipótesis general se concreta en tres hipótesis de trabajo que presentamos a continuación.

Hipótesis 1: Los significados institucionales de los problemas de optimización que aparecen en los libros de texto presentan una trayectoria didáctica constituida por las entidades primarias de la actividad matemática: lenguaje, procedimientos, conceptos, propiedades, argumentaciones y conversiones entre registros de representación semiótica, donde la faceta general es predominante sobre la particular, apareciendo conflictos semióticos potenciales y no congruencias en las conversiones entre registros de representación semiótica.

Hipótesis 2: Los significados institucionales de los problemas de optimización que proponen los profesores a sus alumnos presentan una trayectoria didáctica constituida por las entidades primarias de la actividad matemática: lenguaje, procedimientos, conceptos, propiedades, argumentaciones y conversiones entre registros de representación semiótica, donde la faceta particular es predominante sobre la general, apareciendo conflictos semióticos potenciales, así como no congruencias en las conversiones entre registros de representación semiótica.

Hipótesis 3: Los alumnos muestran unos conflictos semióticos relacionados con los conflictos semióticos potenciales, tanto del proceso de instrucción como de los libros de texto. Además, también aparecen conflictos semióticos relacionados con la no congruencia de las conversiones entre registros semióticos y con los instrumentos de cálculo utilizados.

2.4. Metodología

El problema de investigación que se presenta se centra en el estudio de los problemas de tipo didáctico que surgen en la enseñanza de las nociones matemáticas asociadas a los problemas de optimización en el Bachillerato. Atendiendo a las características del estudio lo clasificamos según los ejes de investigación que se proponen en el EOS.

El foco de atención de la investigación se fija en la dimensión epistémica y cognitiva del proceso de instrucción teniendo en cuenta la dimisión interaccional y ecológica. La finalidad del estudio es descriptiva, buscando la explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje y los efectos de los factores intervinientes y valorando la idoneidad del proceso. En cuanto a la generalización es de carácter exploratorio, pues no se pretende generalizar los resultados ya que la optimización está ligada a una unidad didáctica en el nivel de segundo de Bachillerato.

La investigación que hemos realizado es de carácter cualitativo preferentemente ya que se enfoca a comprender y profundizar los fenómenos didácticos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto, de tal modo que los planteamientos se aplican a un número menor de casos. Sin embargo, también tiene aspectos de carácter cuantitativo ya que los planteamientos que se realizan son direccionados y fundamentados en la revisión de la literatura.

A continuación, describimos la metodología seguida según los objetivos planteados.

Para determinar el significado de referencia de la optimización concerniente al primer objetivo, se requiere la realización de un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del concepto en cuestión que se desarrolla en el capítulo 3 de esta Memoria. Ello conduce, en primer lugar, a la utilización de fuentes bibliográficas en las que aparece el objeto “optimización” bajo el punto de vista histórico y evolutivo; en la reconstrucción se utilizará un análisis basado en las entidades primarias de la actividad matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). Posteriormente, se describirán las configuraciones socio-epistémicas identificadas a lo largo del recorrido histórico mediante las cuales reconstruiremos el significado para la noción "optimización", teniendo en cuenta los tipos de problemas abordados en distintos momentos históricos y los sistemas de prácticas correspondientes (Pino, Godino y Font, 2011).

Para desarrollar el segundo objetivo, comenzamos analizando la legislación educativa que rige el sistema educativo en el periodo donde se desarrollan los trabajos de investigación y se describe en la segunda sección del capítulo 4. Se consideran las orientaciones metodológicas, los objetivos, los núcleos temáticos, los contenidos y los criterios de evaluación vinculados con la optimización comparándolos con el significado institucional de referencia mediante las configuraciones epistémicas.

Este segundo objetivo pretende la identificación del significado pretendido de la optimización, dado que se trata de un contenido incluido en el currículo del sistema educativo español (Ministerio de Educación y Ciencia, MEC), por lo que analizaremos los libros de texto de segundo curso de Bachillerato en la Modalidad de Ciencias y Tecnología que se desarrolla en la sección tercera del capítulo 4. Para ello seleccionamos una muestra intencional formada por dos manuales, considerando el criterio de examinar las editoriales con mayor difusión en la provincia de Jaén (España). El estudio constará de dos fases.

La primera fase corresponde al análisis epistemológico utilizando la configuración epistémica como una herramienta que permite describir la estructura de textos globales. En esta investigación, la utilizamos para realizar un macroanálisis de la unidad didáctica de los libros de texto analizados donde se incluya la optimización. Se distinguirán unidades de análisis que, en general, coincidirán con las situaciones-problema, después se tomarán segmentos de análisis (Contreras et al., 2005; Contreras; Ordóñez, Wilhelmi, 2010). Éstas se analizarán según las entidades primarias de la actividad matemática: lenguajes, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentaciones y conversiones del objeto optimización describiéndolas según la metodología utilizada en Balcaza, Contreras y Font (2017).

Una vez realizado el análisis, determinaremos las configuraciones epistémicas asociadas a las prácticas matemáticas presentes en cada uno de los libros de texto. Tal como se pone de manifiesto en Font y Godino (2006), mediante este constructo describimos el significado institucional pretendido del contenido estudiado, lo que nos permitirá comparar textos de distintas orientaciones epistemológicas.

En la segunda fase, se realizará un análisis ontosemiótico, articulando las herramientas del EOS y los registros de representación semiótica de un problema resuelto presente en alguno de los manuales. Para ello se utilizará la configuración ontosemiótica, identificando las prácticas matemáticas, los objetos y los procesos puestos en juego, las funciones semióticas y los registros de representación semiótica. El análisis de la actividad matemática mediante estas dos herramientas permite revelar los conflictos semióticos potenciales y la no congruencia entre registros.

La faceta extensiva/intensiva se analizará según que el libro de texto desarrolle la enseñanza de lo particular a lo general (extensiva) o de lo general a lo particular (intensiva).

En el tercer objetivo nos proponemos caracterizar el significado institucional implementado del proceso de instrucción de la optimización. Para ellos realizamos el análisis de los apuntes de clase elaborados durante dicho proceso tal y como se describe en el capítulo 5 de esta Memoria. La población de estudiantes sobre la que se centra nuestra investigación está constituida por el alumnado de 2º de Bachillerato de la Comunidad Autónoma de Andalucía. Tomamos una muestra intencional (Ghiglione y Mataron, 1989) de dos centros en los que se imparta la modalidad del Bachillerato de Ciencias y Tecnología cuyo profesor planifique la instrucción utilizando como recurso didáctico alguno de los libros de texto pertenecientes a las editoriales seleccionadas en el capítulo anterior. En los estudios cualitativos, el tamaño de la muestra no es importante desde una perspectiva probabilística, pues el interés del investigador no es generalizar los resultados de su estudio a una población más amplia. Lo que se busca es la indagación cualitativa en profundidad. Además, dado que la información que se trabaja es bastante confidencial (apuntes de clase y exámenes realizados por los alumnos), se ha buscado que los dos centros seleccionados estén dispuestos a facilitar la información que se les solicite. De cada uno de los grupos seleccionamos, bajo el criterio del profesor, los apuntes del alumno que los tomaba más fielmente a lo que se había realizado en clase.

Por ello estimamos que dichos apuntes nos pueden dar una buena aproximación del significado implementado en cada grupo en cuanto a las configuraciones epistémicas que el profesor selecciona y los modos en que lo hace. El análisis de los apuntes de clase consta de dos fases.

La primera fase consiste en un análisis global mediante un estudio epistemológico. Se determinarán las configuraciones epistémicas que resumen el desarrollo del objeto optimización considerando las situaciones-problema que aparecen en los apuntes utilizando las entidades primarias de la actividad matemática: lenguajes, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentaciones y conversiones descrito con detalle en metodología correspondiente al análisis de los libros de texto. Además, se detectarán conflictos semióticos potenciales, así como las posibles no congruencias entre las conversiones. La faceta extensiva/intensiva se analizará en los apuntes en los que se desarrolle la enseñanza de lo particular a lo general (extensiva) o de lo general a lo particular (intensiva).

La segunda fase consiste en un análisis ontosemiótico de un problema resuelto presente en los apuntes. Para ello se identificarán las prácticas matemáticas, los objetos y los procesos puestos en juego y mediante las funciones semióticas pondremos de manifiesto los conflictos semióticos potenciales.

En el cuarto objetivo nos proponemos extraer los significados personales de los estudiantes de Bachillerato respecto de su experiencia en el aula sobre optimización. Para ello elaboramos un cuestionario que se pasó a los alumnos de ambos grupos. En el capítulo 6 presentamos el análisis elaborado de las respuestas dadas por los estudiantes. A partir de los conflictos semióticos y las no congruencias entre registros que identificamos en cada una de las contestaciones, mediante las funciones semióticas explicamos su origen vinculándolos a la entidad correspondiente. Las prácticas matemáticas y los conflictos se codificaron en base a una plantilla que consideramos como solución experta, lo que nos permite cuantificarlos y poder establecer características comunes para visibilizar el significado personal logrado de los estudiantes de los grupos que siguieron esta instrucción.

El quinto objetivo lo abordamos en el último capítulo 7 de esta Memoria mediante una aproximación a la valoración de la idoneidad del tratamiento de la optimización en 2º de Bachillerato en la faceta epistémica, cognitiva y ecológica. A partir de los indicadores de las diferentes idoneidades describiremos insuficiencias encontradas en el proceso de instrucción de la optimización en la institución considerada.

Capítulo 3

Significado institucional de referencia

Para la determinación del significado de referencia de la optimización, que en el EOS se define como el sistema de prácticas para resolver dicho tipo de situaciones-problemas compartidas en el seno de una institución, se requiere la realización de un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y la evolución de dicho concepto. Ello conduce, en primer lugar, a la utilización de fuentes bibliográficas en las que aparece el objeto optimización desde el punto de vista histórico y evolutivo. Posteriormente, se establecerán las configuraciones socio-epistémicas identificadas a lo largo del recorrido histórico de la optimización. Para la construcción de dichas configuraciones se utilizará un análisis basado en las entidades primarias de la actividad matemática: situaciones-problema, lenguajes, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentaciones (Godino, Batanero y Font, 2007).

3.1. Análisis histórico-epistemológico de la optimización

Acudiendo a la historia de la Matemática, utilizando fuentes originales o trabajos que respetan éstas (Heath, 1956; D'Alexandrie y Eecke, 1933; Bessot et al., 1999; Tannery y Henry, 1912, González 1992; Boyer, 1999) observamos la relevancia de los problemas de optimización en el desarrollo del conocimiento. Según los cambios y progresos que ha experimentado la optimización a lo largo del desarrollo científico hemos diferenciado los siguientes periodos para su estudio: la Grecia clásica, la Edad Media, los siglos XVI y XVII y los siglos XVIII y XIX.

3.1.1. Periodo Griego

La primera etapa de la historia de la Matemática relacionada con la optimización se encuentra en el periodo que abarca desde el siglo IV a. C. hasta el siglo IV d. C. Las obras de matemáticos como Euclides, Pappus y Apolonio aportan resultados que podemos considerarlos como los primeros problemas de máximos y mínimos que surgen en la historia.

En la obra de Euclides (330 a.C. - 260 a.C), “Los Elementos”, aparecen situaciones que pueden considerarse problemas de optimización concernientes a la Geometría Plana. En concreto, son proposiciones incluidas en el libro III (proposiciones 7, 8,1 5 y 16) y en libro VI (proposición 27) que exponemos a continuación (Heath, 1956):

Proposición 7**.** “Si se toma un punto en el diámetro de un círculo que no sea el centro y desde él hasta el círculo caen algunas rectas, será la mayor aquella en la que está el centro, y la menor la que queda, y de las demás, la más cercana a la que pasa por el centro es siempre mayor que la más lejana, y solo caerán dos iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña.”

Proposición 8**.** “Si se toma un punto exterior a un círculo y del punto al círculo se dibujan algunas rectas, una de las cuales pasa por el centro y las demás al azar, de las rectas que caen en la parte cóncava de la circunferencia, la mayor es la que pasa por el centro, y de las demás siempre la más próxima a la que pasa por el centro ,es mayor que la más lejana; pero de las que caen en la parte convexa de la circunferencia la menor es la que está entre el punto y el diámetro, y de las demás la más próxima a la más pequeña es siempre menor que la más lejana, y solo caen dos iguales del punto al círculo a uno y otro lado de la más pequeña.”

Proposición 15**.** “En un círculo, el diámetro es la recta mayor y de las demás, la más próxima al centro es siempre mayor que la más lejana.”

Proposición 16**.** “La recta dibujada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos con el diámetro, caerá fuera del círculo, y no se interpondrá otra recta al espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor, y el que queda, es menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo.”

En las Proposiciones 27, 28 y 29 se estudian propiedades de los paralelogramos construidos sobre un segmento dado a los que se les añade o se les quita otro paralelogramo semejante a uno conocido.

Proposición 27**.** “Entre todos los paralelogramos aplicados sobre la misma recta y deficientes de paralelogramos semejantes al construido sobre la mitad de esta recta, y semejantemente dispuestos, el mayor es el aplicado a la mitad de la recta y semejante a su defecto” (Figura 3.1).

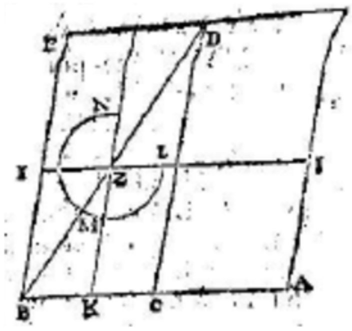


Figura 3.1: La Proposición VI.27 de *Los Elementos* de Euclides (Heath, 1956)

En particular, si se considera un rectángulo, la proposición 27 resuelve el problema de optimización “dividir un segmento AB en dos, de manera que el área del rectángulo que determinan sea máxima”. Este es precisamente el primer problema que resuelve Fermat en sus métodos de máximos y mínimos y tangentes como veremos más adelante.

Estas situaciones de optimización que incluye Euclides en su obra son resultados referentes a distancias, áreas y ángulos máximos o mínimos de segmentos de la circunferencia y en paralelogramos. Para la demostración de estas proposiciones Euclides utiliza como base la técnica de la reducción al absurdo y las construcciones geométricas usando resultados relacionados con la igualdad de triángulos y relaciones entre los ángulos de un triángulo.

En el trabajo de Apolonio (262 a.C. - 180 a.C.) sobre secciones cónicas encontramos proposiciones que podemos considerar situaciones-problemas referentes a la optimización. En particular, en su obra de ocho tomos sobre *Secciones Cónicas*, el Libro V trata de segmentos de longitud máxima y mínima trazados respecto de una cónica. Demuestra que “si O es cualquier punto en el interior de una cónica y si OP es el segmento de recta de longitud máxima o mínima desde el punto O a la cónica, entonces la recta perpendicular a OP en P es tangente a la cónica en P; y si O' es cualquier punto sobre OP producido fuera de la cónica, entonces O'P es el segmento de longitud mínima de O' a la cónica", (Kline 1992, p 97). Para la demostración de este resultado utiliza una argumentación sintética. En la actualidad estas situaciones sobre "rectas máximas y mínimas" se consideran resultados sobre las tangentes y normales de las secciones cónicas, (Boyer, 1999).

Otro tratado que muestra la presencia de resultados sobre situaciones de optimización es la obra de Pappus de Alejandría (290-350) *Colección Matemática* (D' Alexandrie y Eecke, 1933).

Dichas situaciones están incluidas en los libros V, VI y VII como proposiciones y son resultados de la geometría plana y espacial tal y como mostramos a continuación. El libro V está dedicado a las propiedades comparativas de las figuras planas isoperimétricas y a las figuras sólidas de igual superficie. En la proposición 5 del libro V aborda la optimización del área de un triángulo dado su perímetro y la medida de la base. Lo demuestra mediante un método constructivo, comparando segmentos de recta, ángulos y triángulos. Se basará en este resultado para optimizar el área de polígonos isoperimétricos, proposición 10, en cuya demostración el autor usa la técnica de la reducción al absurdo triangulando las figuras.

Más adelante, en la proposición 18, demuestra que la esfera tiene el mayor volumen de entre los sólidos regulares con la misma área y que dados dos sólidos regulares con igual área, tiene mayor volumen el que posee mayor número de caras. En la demostración utiliza un método constructivo, comparando el volumen de la superficie esférica con el volumen del poliedro circunscrito a la esfera y utilizando una segunda esfera con el área del poliedro.

En el libro VI trata un problema de Geometría Espacial en el que pretende determinar el ángulo mínimo entre una recta y un plano. También esta demostración es abordada por un método constructivo, trazando perpendiculares y comparando rectas y ángulos.

Por último, en el libro VII incluye la optimización de la distancia entre un punto y una recta. La demostración la realiza también por construcción, comparando medidas de segmentos de recta y de ángulos para llegar a la solución óptima.

En este periodo se trata un problema de optimización vinculado con la naturaleza de la luz. Herón propuso en su obra Catóptrico que la luz viaja siguiendo el camino geométricamente más corto, dentro de un mismo medio de propagación (Boyer, 1999).

3.1.2. Edad Media

Posteriormente, en el periodo de la Edad Media se gestaron aspectos relacionados con la optimización, sobre todo con el tratamiento matemático que se le dio al término "cualidad".

En el siglo XIV encontramos ideas concernientes con los máximos y mínimos, en los trabajos desarrollados por el matemático Nicolás de Oresme (1323-1382), en torno a las variaciones de la intensidad de un fenómeno respecto al tiempo (González,1992). Oresme describe la variación de un fenómeno mediante un gráfico que denomina "la representación gráfica de las intensidades de las cualidades". Fijado un punto origen en una recta horizontal, considera el tiempo como nuestra abscisa y la intensidad del fenómeno en nuestra ordenada (Duran, 1996). Basándose en un razonamiento intuitivo mediante la observación de una gráfica, señala la propiedad de la constancia en la disminución de la variación en la proximidad de un extremo: en una figura curva construida sobre la "longitud" (eje de abscisas) cuando ésta asciende las "latitudes" (ordenadas) crecen rápidamente, por tanto, el grado de amplitud se hace muy pequeño cuando nos acercamos al máximo.

Esta idea será el germen de la condición necesaria de extremo en la gráfica de una función en términos actuales.

3.1.3. Siglos XVI y XVII

El desarrollo del conocimiento matemático durante el siglo XVII está caracterizado por la motivación de los científicos en buscar métodos generales para abordar diversos campos de problemas. Como indica Grattan Guinnes (1984), considerando la materia de la que tratan dichos campos de problemas se pueden clasificar en dos bloques. Por una parte, los problemas mecánico-físicos que requieran el estudio de los procesos de movimiento y, por otra parte, los problemas geométricos relacionados con el cálculo de las tangentes y áreas, longitudes o volúmenes, entre los que se encuentran los problemas de máximos y mínimos.

3.1.3.1. Método Algebraico

En la primera mitad del siglo XVII, Fermat (1601 – 1665) desarrolla los primeros métodos generales, en la historia de las matemáticas, para la determinación de extremos (González, 1992).

Para el desarrollo de su teoría se basó en los resultados de la Matemática clásica griega y en la teoría de Viète. En su obra “Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum” publicada en1629, también conocida esta memoria como “Methodus”, Fermat establece un procedimiento general para calcular máximos y mínimos (Tannery Y Henry, 1912). El método está basado en la idea de incrementar la cantidad de cierta magnitud utilizando la técnica de adigualdad ya utilizada por Diofanto de Alejandría, en su obra “Aritmética”. Como indica González (1992) el procedimiento es puramente algebraico, sin demostraciones, utilizando conceptos derivados de la teoría de ecuaciones de Viète en el método de la Syncrisis de su Arte Analítica. Fermat ilustra su método aplicándolo a una serie de ejemplos. Posteriormente, establece los fundamentos teóricos de este método en la obra “Analityca eiusdem methodi investigatio”. En esta obra explicita que el germen del método de máximos y mínimos provenía de estudiar la teoría de ecuaciones de Vieta y considerando los máximos y mínimos como “únicos y singulares” tal como consideraba Pappus (González ,1992). Por otra parte, en la carta a Pierre Brûlart, Fermat realiza un cierto desarrollo limitado en serie, mediante el cual le parecía posible determinar un extremo a partir de la ecuación que resultaba al anular el coeficiente del término de primer grado. Finalmente, en 1644, en la obra “Ad methodum de máxima et minima appendix” aplica el “Methodus” complementándolo con una extraordinaria mejora para eliminar expresiones racionales de las ecuaciones. Esto le permite abordar problemas más complejos como el problema de Arquímedes: “Encontrar el cono de superficie total máxima que se puede inscribir en una esfera dada”, así como el problema análogo correspondiente al cilindro.

El “Methodus” lo describe Fermat con el siguiente procedimiento:

“Toda la teoría de la Investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

1. Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).

2. Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos que pueden ser de cualquier grado.
3. Se sustituirá a continuación la incógnita original a por a + e, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a y e, en términos que pueden ser de cualquier grado.

   Se «adigualará», para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.
4. Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de e o de una de sus potencias.
5. Se dividirán todos los términos por e, o por alguna potencia superior de e, de modo que desaparecerá la e, de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.
6. Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la e o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.
7. La resolución de esta última ecuación dará el valor de a, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original" (González, 1992 p. 143).

Como podemos observar el procedimiento para hallar máximos y mínimos presentado por Fermat en el "Methodus", radica en la idea de incrementar una magnitud considerable a la variable independiente. No se basa en ningún concepto infinitesimal, sino en conceptos algebraicos puramente finitos, derivados de la teoría de ecuaciones de Vieta.

Un ejemplo de la aplicación del método a un problema de optimización de Física, lo encontramos en Bromberg y Rivaud (2001, pg. 59-71). Fermat afirma: "la luz al viajar de un punto a otro, atravesando uno o más medios ópticos, sigue la trayectoria que utiliza en su recorrido el menor tiempo posible", consecuencia del principio filosófico de Aristóteles que atribuye a la naturaleza un comportamiento optimizador. A partir de este principio prueba la Ley de Snell, planteando para ello un problema de mínimos al que aplica su método.

3.1.3.2. Cálculo Diferencial

En la segunda mitad del siglo XVII se origina un gran avance en la matemática, nace el cálculo infinitesimal. Gracias a las aportaciones de numerosos matemáticos, Newton y Leibniz desarrollan las técnicas de cálculo infinitesimal que surgen como respuesta para resolver diversos campos de problemas como los de cuadraturas, máximos y mínimos, tangentes, centros de gravedad, … Las técnicas de cálculo, las derivadas, las formularon en términos de fluxiones y de cocientes diferenciales diferencias infinitesimales, respectivamente. (Gaud et al, 1998). Por una parte, Newton se basa en la idea intuitiva del movimiento continuo, considerando la relación entre la cantidad que varía respecto al tiempo (fluente) y la velocidad de cambio respecto al tiempo (fluxión). Por otra parte, Leibniz dota a su trabajo de un cariz más simbólico y analítico fundamentándolo en las diferencias infinitesimales y en la suma de infinitamente pequeños (González, 1992).

Newton se basa en el Método de las tangentes de Descartes y en la regla de Hudde para el desarrollo de sus trabajos sobre las propiedades de las líneas curvas aplicándolo para determinar los extremos. Posteriormente, encauza su trabajo hacia una concepción mecánica. Aplicó los resultados sobre fluentes y fluxiones a los problemas de máximos y mínimos en su obra "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica".

La primera publicación de Leibniz sobre el cálculo de diferencias aparece en 1684, bajo el título "Nova methodus pro maximis et minimis, intemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur" ("Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, el cual puede también aplicarse a las cantidades fraccionarias e irracionales"). En esta obra, según Collette (1993), Leibniz introduce por primera vez la expresión cálculo diferencial y proporciona las fórmulas, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, todas éstas acompañadas de aplicaciones geométricas tales como la búsqueda de tangentes, máximos y mínimos, y de los puntos de inflexión. Tal como indica Castañeda (2006), Leibniz ofrece dos criterios distintos para el cálculo de máximos y mínimos fundamentándose en un argumento geométrico. En primer lugar, basándose en la comparación de estados afirma que el máximo será el que tenga mayor ordenada (donde precisa que el máximo queda determinado por la línea GF (Figura 3.2)) (distancia mayor). En segundo lugar, utilizando una condición geométrica para afirmar que la tangente en el punto máximo será horizontal

(Figura 3.2). Leibniz recurre a los trabajos de sus antecesores, Oresme y Descartes, para establecer la propiedad de la constancia en disminución de la variación.

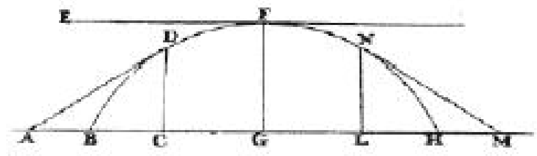


Figura 3.2: Tangente horizontal, Castañeda (2006)

Además de estos dos criterios, aborda una caracterización con argumentación algebraica identificando el signo de las diferencias en una región muy cercana al máximo.

Posteriormente, L'Hôpital y Agnesi retoman las ideas de Leibniz sobre máximos y mínimos y difunden los trabajos en sus obras "Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes" y "Instituzioni analitiche ad uso de lla gioventú italiana" (Castañeda, 2006).

En la sección III de la obra de L'Hôpital se puede apreciar tres caracterizaciones asociadas a la noción de máximo o mínimo. En primer lugar, considerando la noción de tamaño se centra en distinguir la ordenada más grande o más pequeña (Figura 3.3).

En segundo lugar, considerando el signo de las diferencias en un entorno del extremo, afirma que una diferencia no puede convertirse de positiva a negativa sino pasa por cero o infinito. Por tanto, el máximo se caracteriza como el punto en que las diferencias cambian de signo, Figura 3.3.

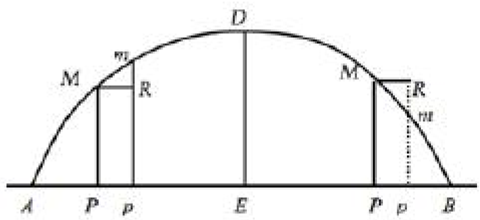


Figura 3.3: Máximo relativo, Castañeda (2006)

La tercera caracterización se fundamenta en las nociones de tangente y de diferencia (Figura 3.4). Mediante un discurso descriptivo se expone que cuando la variable (dependiente) aumenta, la diferencia es positiva, mientras que, si disminuye, la diferencia será negativa. Se concluye que para que la diferencia pase de positiva a negativa o viceversa la diferencia ha de ser cero o infinito. Por tanto, en los puntos máximos o mínimos la tangente a la curva es horizontal (González, 2011).

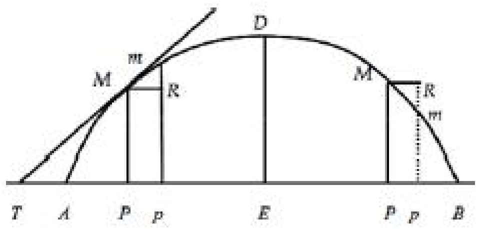


Figura 3.4: Diferencias y tangente, Castañeda (2006)

Al final de la sección, las situaciones-problemas que resuelve L'Hôpital son referentes a situaciones geométricas o fenómenos físicos-mecánicos. Se incluyen, por una parte, problemas de Geometría que recurren a curvas expresadas algebraicamente (Folium de Descartes o la parábola semicúbica de Neile) o bien de forma descriptivo-geométrica (la roulette Pascal) o haciendo referencia a diferentes figuras geométricas (segmentos, rectángulos, cono, paralelepípedos) y también problemas de aplicación a la Física (recorridos mínimos, refracción de la luz, poleas o cuestiones relativas a la geodesia) (Santiago, 2008).

En la obra de Agnesi aparecen cuatro caracterizaciones de la noción de máximo. En primer lugar, basándose en un reconocimiento geométrico considera que el máximo se alcanza en una curva cuando en una sucesión de ordenadas se alcanza la mayor y, para el mínimo, la menor. En segundo lugar, basándose en un argumento analítico considera el signo de las diferencias infinitesimales en el que se destaca que muy cerca del máximo las diferencias pasan de un signo a otro. En tercer lugar, considera la propiedad infinitesimal donde se explica que cerca del máximo ocurren las variaciones más pequeñas. Por último, considera la propiedad analítica en la que se explica una regla en la que en el máximo se determinan diferencias nulas o infinitas (Castañeda, 2004).

Un ejemplo de problema práctico sobre consideraciones de máximos y mínimos en el siglo XVII es el resuelto por Kepler sobre la capacidad de toneles para almacenar vino. Aplicó sus conocimientos para estudiar la forma geométrica de unos barriles para fabricarlos con la menor madera (menor superficie) pero conteniendo la mayor cantidad de vino posible (mayor volumen) (Tikhomirov, 1990). Kepler buscó el punto donde la variación en el volumen producida por una variación de las dimensiones fuera prácticamente nula, resolviéndolo por construcción geométrica. El interés en la resolución de este tipo de problemas de optimización de sólidos de revolución se plasma en su obra "Nova stereometria doliorum vinariorum".

3.1.4. Siglos XVIII y XIX

3.1.4.1. Fundamentación del cálculo diferencial

El siglo XVII dota a las matemáticas de un instrumento extraordinario como es el cálculo diferencial que permite abordar la resolución de numerosos tipos de problemas. Los matemáticos del siglo posterior siguen desarrollando los métodos iniciados tratando de dotar de rigurosidad a los trabajos de sus predecesores. La fundamentación del cálculo diferencial fue desarrollándose gradualmente durante los siglos XVIII y XIX a partir de lo establecido en los trabajos de Newton y Leibniz.

Uno de los matemáticos destacados de este periodo fue Leonhard Euler que perfeccionó el desarrollo de Leibniz. Las funciones hasta este momento eran consideradas magnitudes geométricas ligadas a curvas o al movimiento de un cuerpo. Uno de los grandes avances que aportó Euler fue definir una función como cualquier "expresión analítica" formada por una cantidad variable y constantes (incluye los polinomios, las series de potencias y las expresiones trigonométricas y logarítmicas). Con respecto a las derivadas, introduce un cambio en la idea de diferencial en el sentido de diferencia. En su obra "Institutiones calculi differentialis" considera el cálculo como un método para determinar el cociente $\frac{dy}{dx}$ cuando los incrementos se desvanecen, "cantidades evanescentes" (Durán, 1996). Aflora el cociente de incrementos $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ germen de la definición de derivada de una función. Además, obtiene desarrollos en serie de funciones elementales a partir de los cuales deduce los correspondientes diferenciales.

Otro criterio para el cálculo de extremos empieza a emerger en este periodo.

El matemático Brook Taylor en su obra "Methodus Incrementorum Directa et Inversa" presenta el desarrollo en una serie de una función de una variable, serie de Taylor, originada en parte para ayudar a resolver ecuaciones diferenciales. A partir de las propiedades de las diferencias finitas, escribió una ecuación expresando que es posible plantear $f(x+h)$ en términos de $f(x)$ y su cociente de diferencias de varios órdenes (Grabiner, 1983). Euler contribuye a la serie de Taylor identificando los coeficientes de los diferenciales de orden superior como las derivadas sucesivas de la función.

Esta idea fue usada por Lagrange quien afirmaba que toda función puede ser desarrollada en una serie de Taylor y que sus cocientes diferenciales (a los que llamaba "funciones derivadas") venían definidos por los coeficientes de la serie (Grattan-Guinness, 1984). Esto lo desarrolla en su libro sobre análisis "Théorie des fonctions analytiques" publicado en 1779 en el que introduce la expresión para el resto en la fórmula de Taylor que hoy conocemos como la expresión de Lagrange del resto. En esta obra presenta el Teorema del Valor Medio para funciones derivables, resultado a partir del cual se puede obtener información de los extremos relativos de una función por medio del conocimiento de su función derivada. A Lagrange también se debe el término de "función derivada" y la notación f' para denotar la derivada de la función f.

Para ilustrar cómo son tratados los problemas de optimización en este periodo, consideramos como ejemplo la obra de Etienne Bézout "Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine" (Santiago, 2008).

En el cuarto volumen incluye los problemas de máximos y mínimos en la sección dedicada al Cálculo Diferencial. Primero, expone el método para calcular máximos y mínimos de una función que denomina "Maximis & Minimis" y, a continuación, presenta cinco problemas resueltos. Son situaciones referentes a la aritmética, la geometría plana y la geometría espacial en los que se pretende optimizar áreas, volúmenes o productos. En la resolución comienza por identificar la situación mediante una expresión algebraica, luego calcula la derivada y calcula los ceros de ésta. Por último, presenta la respuesta al problema.

El siglo XVIII produjo un enorme desarrollo de los métodos del cálculo diferencial, aunque había falta de rigor en las demostraciones y de la vaguedad con que se explicaban los conceptos. Los trabajos del siglo XIX se caracterizan por la búsqueda de la formalización de los resultados obtenidos y dotar de rigor los métodos del cálculo diferencial. Así, matemáticos como Bolzano y Cauchy retoman la definición de derivada solventado las dificultades de los diferenciales de Leibnitz. Basándonos en el desarrollo de estos trabajos localizamos el criterio de las derivadas sucesivas para identificar los extremos relativos de una función. La fórmula infinitesimal del resto o también llamado el Teorema de Taylor ofrece una condición suficiente de extremo relativo de una función a partir de la información obtenida de las derivadas sucesivas.

En la obra de Serret se ilustra el tratamiento que se hace en esta época de los problemas de optimización (Santiago, 2008). Dicha obra "Cours de Calcul Differentiel et Integral" está constituida por dos tomos: el primero está dedicado a las reglas del Cálculo Diferencial y a las aplicaciones de este, y el segundo, al Cálculo Integral. El capítulo VI del primer tomo está dedicado a la teoría de máximos y mínimos de funciones de una sola variable independiente y podemos encontrar dos problemas de máximos y mínimos.

En el primero de ellos el autor pretende optimizar la distancia que recorre un objeto que se desplaza a dos velocidades distintas por dos medios diferentes. En su resolución surge la función a derivar como $f\ (x)$, luego calcula su derivada y respectivos ceros. El autor descompone la figura en triángulos rectángulos, utilizando después el Teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas para relacionar los lados de estos triángulos.

En el segundo problema, el autor pretende optimizar la distancia entre un punto y una curva dada. En la resolución utiliza la fórmula de la distancia entre dos puntos para identificar la situación con la expresión algebraica de una función. Posteriormente, trabaja con la ecuación de la derivada de la función igualada a cero y con la función de la curva para determinar la solución óptima. A continuación, aplica la segunda derivada para verificar si se trata de un máximo o de un mínimo. Al final del capítulo el autor presenta un conjunto de ejercicios de aplicación con la respectiva solución. Se abordan problemas de la Física, de Geometría Plana y de Geometría Espacial, donde se pretende optimizar distancias, áreas, volúmenes y tiempo.

3.1.4.2. Cálculo de variaciones

Después de que Newton y Leibniz sentaron las bases del cálculo, los matemáticos de la época continuaron los desarrollos teóricos y sobre todo las aplicaciones de las nuevas ideas. A partir del desarrollo del Cálculo Diferencial los matemáticos aplicaron las nuevas ideas a una gran cantidad de problemas.

En 1696, Johann Bernoulli propone a la comunidad científica el problema de la curva braquistócrona:

Sean dos puntos P y Q situados en el mismo plano vertical, P más alto que Q y no directamente sobre Q. Un punto material se mueve sin rozamiento a lo largo de una curva determinada que une P con Q, bajo la acción de la fuerza de la gravedad, que supondremos uniforme, y partiendo de P con velocidad inicial nula. De entre todas las curvas posibles que unen P con Q, ¿sobre cuál de ellas el tiempo que tarda la partícula en ir desde P hasta Q es el menor posible?

La solución que ofrece Jakob Bernoulli constituye el germen para la emergencia y desarrollo inicial del actual Cálculo de Variaciones, Boyer (1999). En el siglo XVIII la optimización vuelve a protagonizar un gran avance. Basándose en resolución publicada por Bernouilli, Euler generalizará y sistematizará la resolución de este tipo de problemas en el “Método para hallar curvas de máximo o de mínimo” publicado en 1744 en la obra “Methodus inveniendi lineas curvas”.

Euler aporta un método al que denomina “Método para hallar curvas de máximo o de mínimo” que permite tratar los problemas con varias variables y restricciones de igualdad abordando problemas donde el objeto optimizante fuese una función. Lagrange continúa con el trabajo de Euler e introduce el concepto de variación de una función desarrollándolo en la resolución de nuevos problemas mejorando el “Método de máximos y mínimos”. Ofrece una herramienta que permite resolver problemas de optimización con varias variables y restricciones de igualdad, siendo la solución óptima una función. Utiliza la técnica denominada “multiplicadores de Lagrange” para resolver problemas de cálculo de variaciones en su célebre tratado “Méchanique Analitique”.

Tras el recorrido histórico-epistemológico acerca de la optimización, observamos que los problemas de optimización ya se abordaban mucho antes de que surgiera el concepto de derivada. Vinculamos el origen de los problemas relacionados con los máximos y los mínimos en el periodo de la matemática griega. Éstos hacen referencia a situaciones-problemas de la geometría plana y espacial y son resueltos a partir de ideas intuitivas mediante construcciones geométricas y corroborando las suposiciones con la técnica de la demostración basada en la reducción al absurdo. Mas adelante, en la Edad Media se relacionan con situaciones en torno a las variaciones de la intensidad de un fenómeno respecto al tiempo y son abordados con ideas asociadas a la representación gráfica de las variaciones e intensidades. Posteriormente, en el siglo XVII encontramos problemas de optimización relacionados con figuras geométricas y con fenómenos físicos. Surge el primer método que sistematiza la resolución de los problemas de optimización: el método de adigualdades de Fermat. Por otra parte, con el origen del cálculo diferencial fueron asociados a las funciones, abordándolos desde una doble perspectiva: considerando los extremos relativos de las gráficas de las funciones y como aplicación del cálculo diferencial. Estos métodos se consolidan mediante argumentaciones y demostraciones en los siglos posteriores. Por último, para dar respuesta a los problemas de optimización cuyo objeto optimizante fuese una función surge el Cálculo de Variaciones.

3.2. Configuraciones epistémicas asociadas a los significados de la optimización

A continuación, describiremos las configuraciones epistémicas identificadas a lo largo del recorrido histórico de la optimización aplicando el EOS. Partiremos de los problemas de optimización abordados a lo largo de la historia teniendo como criterio de clasificación el procedimiento utilizado para su resolución.

Como podemos comprobar en el periodo de la matemática griega las situaciones-problemas que aparecen relativas a la optimización son referentes a la Geometría Plana y a la Geometría Espacial, en concreto, los problemas presentados son situaciones sobre máximos y mínimos de ángulos, áreas, y volúmenes, comparando y relacionando figuras geométricas. Los matemáticos de esta época los exponen como resultados o en forma de proposiciones y para demostrarlos utilizaban demostraciones que se basan en construcciones geométricas o en la técnica de la reducción al absurdo apoyándose en resultados sobre comparación entre medidas de ángulos, medida de lados o semejanza de triángulos entre otros.

En este periodo diferenciaremos dos configuraciones, por una parte, consideraremos como procedimiento de resolución de los problemas de optimización la construcción geométrica (basándose en la lógica que proporcionan las proposiciones de los libros de Euclides) y, por otra parte, usando la demostración basada en la técnica de la reducción al absurdo.

A continuación, ilustramos ambos casos con un problema prototípico.

3.2.1. Configuración epistémica de la construcción geométrica (CE-CG)

El siguiente problema de optimización pertenece a la obra de Euclides, "Los Elementos", incluida en el libro III de los trece de capítulos en los que se estructura. Euclides dedica este libro al estudio de la circunferencia, junto con sus arcos, cuerdas, tangentes, segmentos y sectores, y también los ángulos que se pueden definir sobre ella.

Proposición 15: "En un círculo, el diámetro es la recta mayor y de las demás, la más próxima al centro es siempre mayor que la más lejana".

En esta proposición aborda la relación entre las cuerdas de una misma circunferencia, en concreto considera que el diámetro es la mayor de ellas y además que comparando la longitud de dos cuerdas será mayor la que esté más cerca del centro. Es una *situación* característica de este periodo ya que los problemas que se abordaban por los matemáticos en este periodo pertenecían a la geometría plana o espacial.

Tal y como se extrae en Santiago (2008), para demostrar esta proposición, Euclides se basa en los siguientes resultados:

- En cualquier triángulo, dos lados tomados de cualquier modo que se desee, son mayores que el tercero.

- Si dos triángulos tienen dos lados iguales, y uno de los ángulos comprendidos por los lados iguales es mayor, y el otro es menor, la base que está opuesta al ángulo mayor será mayor que la otra base opuesta al ángulo menor.

- En todo el círculo, las rectas iguales distan igualmente del centro, y las que distan igualmente del centro son iguales.

Veamos cómo Euclides demuestra esta proposición (Figura 3.5).

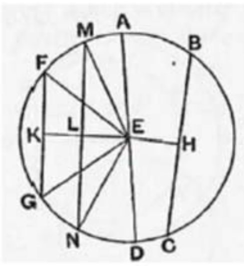


Figura 3.5: Representación sobre la que demuestra la proposición (Santiago, 2008)

Primera parte:

- Exposición (ékthesis)

Sea ABCD un círculo y sea AD su diámetro y el punto E el centro; y sea BC más cercana del diámetro AD, y FG más lejos;

- Determinación (diorismós)

Dije que AD es la mayo,r y que BC es mayor que FG.

- Construcción (kataskeue)

Por el centro E, tracemos EH, EK perpendiculares a BC, FG, y también los semi-diámetros EB, EC, EF.

- Demostración (apódexis)

Siendo AE igual a EB, y DE igual a EC, entonces AD es igual a las dos BE, EC tomadas juntas. Pero BE, EC son mayores que BC. Luego AD es mayor que BC. Como BC está más cerca del centro que FG, entonces EK es mayor que EH. Pero BC es el doble de BH, y FG es el doble de FK; y los cuadrados de EH, HB son igual a los cuadrados de EK, KF, de los cuales el cuadrado de EH es menor que el cuadrado de EK, pues EH es menor que EK.

- Conclusión (syumpérasma)

Luego, el cuadrado de BH será mayor que el cuadrado de FK, y así será BH mayor que FK y BC mayor que FG.

Segunda parte:

- Exposición (ékthesis)

Sea BC más grande que FG.

- Determinación (diorismós)

Digo, que la recta BC estará más cerca del centro que la recta FG, es decir, hecha la misma construcción, será EH menor que EK.

- Demostración (apódeis)

Porque siendo BC mayor que FG, será BH mayor que FK. Pero los cuadrados de BH, HE son igual a los cuadrados de FK, KE, de los cuales el cuadrado de BH es mayor que el cuadrado de FK, por ser BH mayor que FK.

- Conclusión (syumpérasma)

Luego, el cuadrado de EH será menor que el cuadrado de EK, y por consecuencia será EH menor que EK. Para concluir, como EH es menor que EK, por el teorema de Pitágoras se deduce que BH es mayor que FK y, por tanto, BC es mayor que FG.

En cuanto a la solución del problema ofrecida por Euclides, observamos que el *lenguaje* utilizado es característico de la geometría euclidiana. Los *conceptos* que intervienen son geométricos tales como círculo, diámetro, semidiámetro, centro, perpendicularidad, ángulos rectos, igualdad de ángulos. En la propia proposición define el concepto de diámetro como la recta mayor. Tenemos que considerar que Euclides denomina los segmentos de recta por rectas. Así, siempre que se lee línea recta, debemos leer segmento de recta.

Así mismo, en la proposición enuncia la *propiedad que* cuanto más próxima al centro esté una recta será mayor que otra que esté más lejos. En la resolución aparecen propiedades sobre los lados de triángulos semejantes, la igualdad de las cuerdas que distan lo mismo del centro y el teorema de Pitágoras. El *procedimiento* que utiliza para verificar el resultado es una construcción geométrica y para ello utiliza *proposiciones* previas fundamentalmente relacionadas con la igualdad de triángulos y relaciones entre los ángulos de un triángulo. Este tipo de demostración es característica de este periodo ya que no disponía de métodos generales para demostrar este tipo de resultados. Las *argumentaciones* son puramente sintéticas.

El ejemplo analizado nos permite extraer las características de la configuración epistémica de la construcción geométrica (CE-CG) que expresamos en la Tabla 3.1 siguiente:

Entidad	**CE-CG**
Situación-problema	Geometría plana: áreas, de distancias y de ángulos Geometría espacial: volúmenes
Elementos lingüísticos	Verbal escrito y geométrico
Procedimientos	Construcciones geométricas basándose en resultados sobre igualdad de triángulos y relaciones entre los ángulos de un triángulo
Conceptos	Los propios de los libros de Euclides
Propiedades	Las propias de los libros de Euclides
Argumentos	Sintéticas, utilizando la lógica y las construcciones geométricas auxiliares

Tabla 3.1: Resumen elementos de la configuración CE-CG

3.2.2. Configuración epistémica mediante reducción al absurdo (CE-RA)

El siguiente problema de optimización pertenece a la obra de Pappus de Alejandría, “Colección Matemática”, incluida en el libro V de los ocho que la componen. Pappus dedica este libro a estudiar las figuras geométricas con el mismo perímetro (en general, en este libro, se demuestra que de todos los polígonos regulares con el mismo perímetro tiene mayor área el de mayor número de lados).

Analizamos la demostración de la Proposición 10 de la obra de Pappus extraída de Santiago (2008) (Figura 3.6).

Proposición 10: "entre las figuras rectilíneas con el mismo perímetro y el mismo número de lados, la mayor es la que es equilibrada y equiangular".

Demostración:

Sea ΑΒΓΔΕ el mayor de los pluriláteros con el mismo perímetro y el mismo número de lados; yo digo que él es equilátero.

En efecto, supongamos que no lo es; pero que las rectas ΑΒ, ΒΓ son, si es posible, desiguales, y transportar la recta de unión ΑΓ para construir el triángulo isósceles ΑΖΓ, de forma que las rectas ΑΖ, ΖΓ sean igual a la suma de las rectas ΑΒ, ΒΓ. Así, como hemos señalado anteriormente que el triángulo isósceles es el mayor de los triángulos isoperimétricos construidos sobre la misma base, concluimos que el triángulo ΑΖΓ es mayor que el triángulo ΑΒΓ. Añada de una y otra parte el cuadrilátero ΑΓΔΕ; tenemos un área ΖΓΔΕΑ mayor que el área mayor ΑΒΓΔΕ, con el mismo perímetro que la otra y teniendo el mismo número de lados; lo que es imposible. En consecuencia, ΑΒΓΔΕ es equilibrado. Y queda claro que el plurilátero más equilibrado es continuado más grande.

Digo también que el plurilátero ΑΒΓΔΕ es también equiangular. En efecto, supongamos que no es verdad; pero que el ángulo Β es mayor que el ángulo Δ, si es posible. Así, la recta ΑΓ es también mayor que la recta ΓΒ. Así, la recta ΑΓ es también mayor que la recta ΓΕ (pues la suma de las rectas ΑΒ, ΒΓ es igual a la suma de las rectas ΓΔ, ΔΕ).

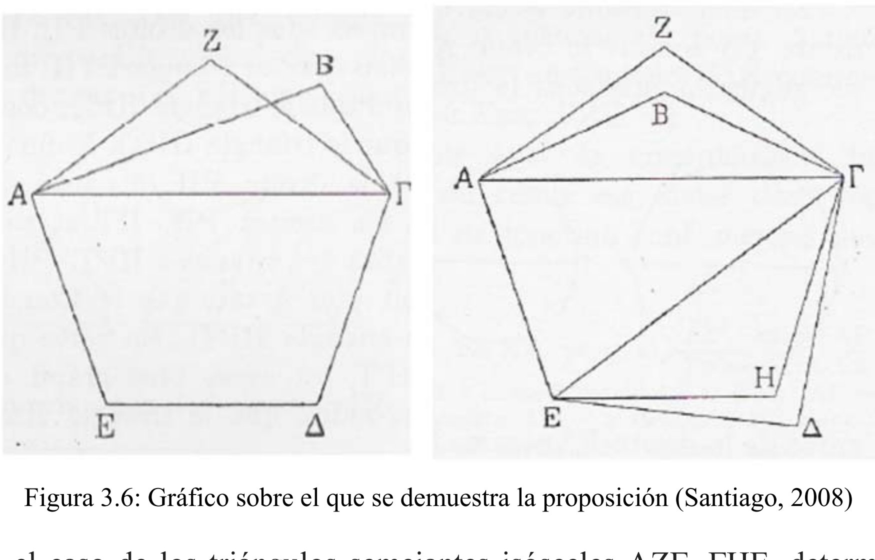


Figura 3.6: Gráfico sobre el que se demuestra la proposición (Santiago, 2008)

En el caso de los triángulos semejantes isósceles ΑΖΓ, ΓΗΕ, determinamos la suma de los lados ΑΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΕ igual a la suma de los lados ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, como lo demostramos en una proposición anterior. En consecuencia, la suma de los triángulos establecidos ΑΖΓ, ΓΗΕ será mayor que la de los triángulos primitivos ΑΒΓ, ΓΔΕ (resultado demostrado en proposiciones anteriores). Y si añadimos una y otra parte del triángulo ΑΓΕ, él se presentará de igual forma, lo que no puede ser; así el plurilátero ΑΖΓΗΕ será mayor que el mayor plurilátero ΑΒΓΔΕ teniendo el mismo perímetro que él. En consecuencia, el plurilátero ΑΒΓΔΕ es equiángular (Pero también es equilá- tico); así entre las figuras rectilíneas isoperimétricas y con el mismo número de lados, la mayor es equilateral y equiángular. Y es evidente que el círculo es la mayor de las figuras isoperimétricas, pues nosotros demostramos que es mayor que una figura regular, es decir, equilateral y equiángular.

Observamos que el autor enuncia la situación optimizadora como un resultado en forma de proposición. Esta situación es un problema de Geometría Plana, donde se pretende optimizar el área de un polígono dado su perímetro. Al igual que en la resolución del problema analizado anteriormente, Pappus utiliza un lenguaje propio de la geometría euclidiana y sus argumentaciones son puramente sintéticas. Los conceptos que utiliza son figuras rectilíneas, perímetro, lados, ángulo, triángulo, cuadrilátero, equilátero, equiangular, equilateral. El autor no hace la distinción entre rectas, semi-rectas o segmentos de recta y a todos denomina rectas. Utiliza propiedades sobre la comparación entre medidas de ángulos, medida de lados y semejanza de triángulos. El procedimiento para verificar el resultado la técnica de reducción al absurdo aplicando la descomposición de la figura en triángulos.

El ejemplo analizado nos permite extraer las características de la configuración epistémica CE-RA que expresamos mediante la Tabla 3.2:

Entidades	**CE-RA**
Situaciones-problemas	Geometría plana: áreas, de distancias y de ángulos Geometría espacial: volúmenes
Lenguajes	Verbal y geométrico
Procedimientos	Construcciones geométricas basándose en resultados sobre igualdad de triángulos y relaciones entre los ángulos de un triángulo
Conceptos	Los propios de los libros de Euclides
Propiedades	Las propias de los libros de Euclides
Argumentos	Técnica de reducción al absurdo con construcciones geométricas auxiliares

Tabla 3.2: Resumen elementos de la configuración CE-RA

Los dos ejemplos que hemos analizado nos ilustran las características de dos configuraciones epistémicas: la configuración epistémica mediante construcción geométrica (CE-CG) y la configuración epistémica mediante reducción al absurdo (CE-RA).

Para finalizar, destacar que ambas configuraciones presentan una dimensión extensiva, en cuanto a que las situaciones-problemas se encuentran enfocados a casos particulares. Los matemáticos griegos no tenían procedimientos generales para resolver los problemas, por lo que abordaban cada uno de ellos de manera única basando sus demostraciones en las construcciones geométricas o en la técnica de reducción al absurdo, por lo cual puede decirse que los procedimientos utilizados son una combinación de estas construcciones y las argumentaciones y lenguaje propios de la geometría sintética, basados en las definiciones y proposiciones.

Los matemáticos del siglo XVII, basándose en los trabajos de sus antecesores, comenzaron a desarrollar distintas técnicas para resolver diversas situaciones con la finalidad de encontrar métodos generales aplicables a determinados campos de problemas. Dichos métodos fueron concebidos desde distintos enfoques conceptuales-procedimentales dando lugar a tres configuraciones epistémicas.

3.2.3. Configuración epistémica del método de la adigualdad (CE-AD)

Basándose en obras de la antigüedad clásica griega y en la teoría de ecuaciones de Vieta, como vimos en la sección anterior, Fermat desarrolla un método general para la determinación de máximos y mínimos. Utilizando la técnica de adigualdad utilizada por Diofanto de Alejandría y los conceptos algebraicos derivados de la teoría de ecuaciones de Viète desarrolla un procedimiento basado en la idea de incrementar la cantidad de cierta magnitud. A continuación, describiremos la tercera configuración epistémica mediante el análisis de un problema incluido en la memoria titulada “Methodus ad disquirendam maximan et miniman”.

“Dividir una recta en dos trozos, de modo que el producto de las longitudes de éstos sea máximo” (Figura 3.7)

Desarrollamos la demostración extraída de González (1992).

Figura 3.7: Gráfico de la situación, extraído de González (1992)

1. Sea un segmento de longitud B, Se identifica con A la incógnita del problema.

2. La cantidad máxima es $A(B-A)$, la cual, desarrollada en potencias de A, da:

$$AB - A^2 \qquad (1)$$

3. Se sustituye A por$A+E$ en (1) que, desarrollada en potencias de A y E, da:

$$AB + BE - 2AE - A^2 - E^2 \,(2)$$

4. Se hacen "adiguales" las dos expresiones de la cantidad máxima, dadas en (1) y (2), así:$AB + BE - 2AE - A^2 - E^2 \sim AB - A^2$, donde el símbolo ~ representa la adigualdad.

5. Se eliminan los términos comunes y se obtiene:

$$BE - 2AE - E^2 \sim 0$$

6. Se dividen todos los términos por E para obtener:

$$B - 2A - E \sim 0$$

7. Se ignoran los términos que aún contengan E, lo que dará:

$$B - 2A \sim 0$$

Las cantidades restantes se hacen iguales para llegar a la expresión $B - 2A = 0$

8. La solución $A = \frac{B}{2}$

La *situación* que elige Fermat para ilustrar su método trata de dividir un segmento dado en dos partes de manera que el producto de las longitudes de éstas sea máximo.

Con respecto al *lenguaje* Fermat utiliza la notación del simbolismo literal introducido por Vieta en el que se hace un uso exclusivo de letras mayúsculas, en donde las vocales designan las incógnitas y las consonantes las cantidades conocidas, (De la Torre, Suescún y Alarcón, 2005).

Los *conceptos* usados son: segmentos, máximo en sentido de cantidades, división de un segmento, incógnita, magnitud, incremento de una magnitud, operaciones algebraicas.

El *procedimiento* se basa en expresar mediante una expresión algebraica la cantidad a maximizar o minimizar en términos de a y sustituir la incógnita original por $a + e$. A continuación, emplear la técnica de hacer “adigualdades” y eliminar los términos comunes. Posteriormente, dividir todos los términos por e, o por alguna potencia superior de e, de modo que desaparecerá la e, de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros. Por último, suprimir todos los términos donde aparece la e para igualar lo que queda. El valor máximo o mínimo se haya resolviendo la ecuación que dará el valor de a.

Propiedades, ignorar o suprimir aquellos términos que contengan a e, que equivale al recurso actual de hacer $e = 0$, permite obtener una expresión válida matemáticamente que facilita el cálculo del máximo.

Argumentos, de tipo analítico.

El procedimiento para calcular máximos y mínimos se basa en la teoría de ecuaciones de Viéte y considera como Pappus los máximos y mínimos “únicos y singulares”.

El ejemplo analizado nos permite ver, de manera global, las características de la configuración epistémica del método de la adigualdad (CE-AD)

Fermat aplicó el método a varios campos de *situaciones-problemas*, como a diversas situaciones geométricas, a la determinación de los centros de gravedad de diferentes figuras geométricas, a la construcción de la tangente a una curva en un punto dado de esta o situaciones físicas como determinar el camino en el que la luz emplea el mínimo tiempo.

Los *conceptos* que utiliza provienen de la teoría de ecuaciones de Diofanto y de Viéte.

El método ofrece la *propiedad* de la condición necesaria para los máximos y mínimos, pero esa condición no es suficiente y tampoco permite distinguir un máximo de un mínimo.

El *procedimiento* es puramente algebraico y algorítmico, no geométrico.

En algunos ejemplos, resueltos por Fermat, la cantidad a maximizar o minimizar contenía una raíz cuadrada. En este caso, Fermat elevaba al cuadrado la adigualdad antes de aplicar etapa 6, dividía todos los términos por una misma potencia de E, escogiendo ésta de manera que al menos uno de los términos resultantes no contuviera E.

La idea de "hacer adiguales" dos expresiones, como las mencionadas en la etapa 4 de la regla anterior, proviene de Diofanto.

En la etapa 5 y 7 Fermat utilizaba el verbo latino evanescere, que toma el significado de desaparecer, eliminar, suprimir…

Fermat expone en su obra la base de su método, aunque está desprovisto de todo fundamento *argumentativo.*

El ejemplo analizado nos permite extraer las características de la configuración epistémica CE-AD que expresamos mediante la Tabla 3.3:

Entidades	**CE-AD**
Situaciones-problemas	Geometría plana y espacial
Lenguajes	Algebraico
Conceptos	Pertenecientes a la teoría de ecuaciones de Diofanto y de Viéte
Procedimientos	Método de adigualdad
Propiedades	Suprimir aquellos términos que contengan a e mantienen la expresión equivalente
Argumentos	Analíticos

Tabla 3.3: Resumen elementos de la configuración CE-AD

En la segunda mitad del siglo XVII el desarrollo del cálculo infinitesimal supuso un gran avance para el conocimiento matemático. Las aportaciones de los matemáticos a lo largo de la historia sobre argumentos infinitesimales culminaron en este periodo con el descubrimiento y desarrollo del cálculo diferencial.

El tipo de problemas que se abordaron en este periodo son situaciones de la Geométrica plana y espacial, y fenómenos físicos-mecánicos tales como recorridos mínimos, refracción de la luz, poleas, …

En este periodo identificamos tres configuraciones epistémicas para la optimización.

La primera de ellas, la configuración epistémica de la ordenada (CE-O) se fundamenta en la comparación de estados y afirma que el máximo será el que tenga mayor ordenada en su entorno (distancia mayor) y el mínimo tendrá la menor de las ordenadas de su entorno, lo que hemos considerado como significado de la ordenada mayor o menor.

La segunda de ellas, la configuración epistémica de la tangente (CE-T) se fundamenta en una condición geométrica y se caracteriza por identificar los puntos de la curva con tangente horizontal.

La tercera, la configuración epistémica de la primera derivada (CE-1D) se basa en un argumento analítico, y se fundamenta en el cambio de signo de las diferencias infinitesimales en un entorno quedando caracterizada por el uso de la primera derivada.

Para construir cada una de estas tres configuraciones utilizamos situaciones-problemas de la obra de L'Hôpital "Analyse des infiniment petits" (París, 1696).

3.2.4. Configuración epistémica de la ordenada (CE-O)

A continuación, describimos las entidades primarias de la configuración epistémica CE-O que se ponen en juego en la siguiente situación problema (Figura 3.8).

"Soit une ligne courbe MDM dont les appliquées PM, ED, PM soient paralleles entr'elles, & qui soit telle que la coupée AP croissant continüellement, l'appliquée PM croisse aussi jusqu'à un certain point E, aprés lequel elle diminuë; ou au contraire qu'elle diminüe jusqu'à un certain point E, aprés lequel elle croisse. La ligne ED sera nommée El plus grande, ou la moindre appliquée" (González 2011, p. 91).

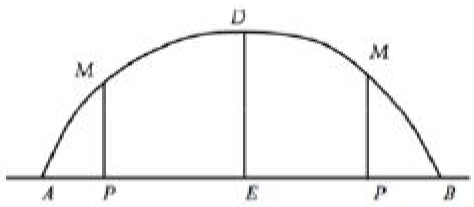


Figura 3.8: Máximo relativo (Castañeda, 2006)

Las *situaciones-problemas* son geométricas o fenómenos físicos-mecánicos.

E***l lenguaje*** utilizado es el verbal y gráfico.

Con respecto a las *definiciones* que se ofrece de puntos máximos y mínimos es una descripción del comportamiento de la curva en el entorno de estos puntos. Hace referencia a la concepción de curva como traza, considerándola dinámica. A partir de la construcción de una curva, se observa la concepción de L'Hôpital como ordenadas que crecen o decrecen continuamente en función de las abscisas, con lo que tiene un carácter fundamentalmente geométrico-dinámico.

En términos actuales, el máximo será el que tenga mayor ordenada en su entorno (distancia mayor) y el mínimo tendrá la menor de las ordenadas de su entorno.

El *procedimiento* se basa en discriminar la ordenada mayor o menor mediante la comparación de longitudes de las ordenadas.

Se basa en la *propiedad* de la constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo basándose en las investigaciones de Fermat y Oresme (González, 1992).

El *argumento*, es de tipo intuitivo en base a comparación de valores numéricos o mediante la representación de las ordenadas.

A continuación, expresamos la configuración CE-O mediante la Tabla 3.4:

Entidades	**CE-O**
Situaciones-problemas	Intramatemáticas: funciones
Lenguajes	Gráfico y numérico
Conceptos	Tamaño, distancia
Procedimientos	Discriminar la ordenada mayor o menor
Propiedades	Si la función es continua, las ordenadas antes del máximo crecen y después decrecen. Antes del mínimo decrecen y después crecen
Argumentos	Geométrico. Comparación de estados

Tabla 3.4: Resumen elementos de la configuración CE-O

3.2.5. Configuración epistémica de la tangente (CE-T)

A continuación, presentamos la situación problema que vamos a analizar (Figura 3.9).

"C'est-porquoy pour aider l'imagination, soient entenduës des tangents aux points M, D, M; il est clair dans les courbes où la tangent en D est parallele à l'axe AB, que la soutangente PT augmente continüellement à mesure que les points M, P approchent des points D, E; & que le point M tombant en D, elle devient infinie; & qu'enfin lorsque AP surpasse AE, la soutangente PT devient negative de positive qu'elle étoit, ou au contraire" (González 2011. p. 92).

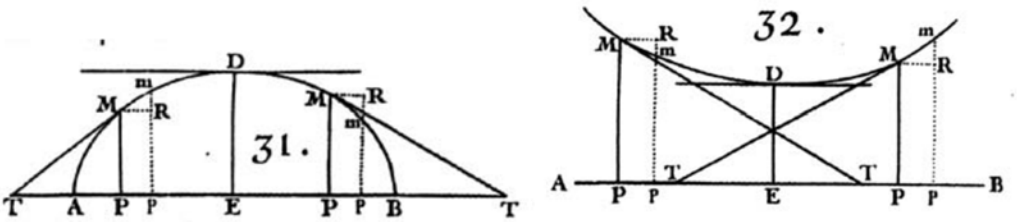


Figura 3.9: Extremos relativos (González, 2011)

Las *situaciones-problemas* son geométricas o fenómenos físicos-mecánicos.

La *definició*n que se ofrece de puntos máximos y mínimos es una descripción del comportamiento de la curva en el entorno de estos puntos. Se consideran las curvas como formadas por segmentos rectos infinitamente pequeños que determinan, por medio de los ángulos que forman unos con otros, la curvatura de la curva, de esta forma se expresa simplemente la manera en que concebían los matemáticos de aquella época las curvas, como la traza de un punto que la recorre.

El *procedimiento* consiste en determinar en la curva puntos con tangente paralela al eje de abscisas.

Los puntos en los que la diferencia de L'Hôpital es cero presentan la *propiedad* de que en ellos la tangente a la curva es horizontal.

El procedimiento de esta configuración se basa en la consideración de que cuando la variable (dependiente) aumenta, la diferencia es positiva (crecimiento de la función), mientras que, si disminuye la diferencia será negativa (decrecimiento de la función) y para que la diferencia pase de positiva a negativa o viceversa la diferencia ha de ser cero o infinito. Se fundamenta en la variación de las formas introduciendo la idea de la constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo, (González, 1992). Por la concepción que se tiene de curva, segmentos rectos infinitamente pequeños, a través de una *argumentación* geométrica, se considera que la tangente sobre la curva en el punto máximo es paralela al eje de las abscisas.

A continuación, expresamos la configuración CE-T mediante la Tabla 3.5:

Entidad primaria	**CE-T**
Situaciones- problemas	Intramatemáticas: funciones
Lenguaje	Gráfico
Conceptos	Tangente

Procedimientos	Determinar en la gráfica de la función puntos con tangente horizontal
Propiedades	La tangente de gráfica de función en extremo es horizontal
Argumentos	Geométricos: comportamiento variacional de la gráfica

Tabla 3.5: Resumen elementos de la configuración CE-T

A medida que los problemas se fueron haciendo más complicados y el manejo de las fórmulas más tediosos, el origen geométrico de las resoluciones se fue haciendo más remoto, y así el cálculo fue cambiando hasta convertirse en una disciplina que se ocupaba simplemente de las fórmulas con lo que se fue algebraizando (González, 2011), encaminándonos así hacia las dos siguientes configuraciones.

3.2.6. Configuración epistémica de la primera derivada (CE-1D)

Para describir detalladamente la configuración epistémica CE-1D asociada al significado de la derivada primera, partimos del análisis de un ejemplo de problema prototípico.

El siguiente problema es el ejemplo IV de la sección III del libro "Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes" de L'Hôpital (1696, p. 44): "Couper la ligne donnée AB en un point E, en sorte que le produit du quarré de l'une des parties AE par l'autre EB, soit le plus grand de tous les autres produits formés de la même maniere".

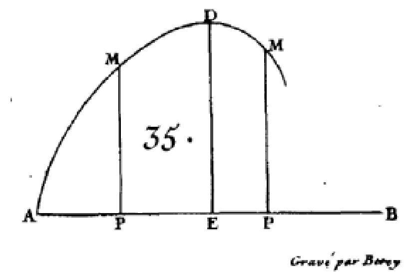


Figura 3.10: Esquema correspondiente al ejemplo IV sección III de la obra de L'Hôpital

La resolución con base en la Figura 3.10 que, de acuerdo con Santiago (2008), realiza L'Hôpital es la siguiente: Siendo $\overline{AE} = x$ y $\overline{AB} = a$, de forma que $\overline{AE}^2 x\, \overline{AB} = \mathrm{ax}^2 - \mathrm{x}^3$sea máximo. En la línea curva MDM, la relación de aplicar $MP(y)$ al corte $AP(x)$ se expresa por la ecuación $y = \frac{axx - x^3}{aa}$ por lo que hay que buscar un punto E tal que ED sea el mayor de todos los semejantes a PM. Se calcula $dy = \frac{2axdx-3xxdx}{aa} = 0$ obteniendo el punto AE(x) $= \frac{x}{3}$.

Para la resolución retoma la caracterización de Leibniz a través del método de las diferencias, fundamentada en identificar el signo de las diferencias en una región muy cercana al máximo o mínimo bajo un carácter geométrico-analítico. L'Hôpital considera que una diferencia no puede convertirse de positiva a negativa si no se hace pasar por cero, o por infinito (Castañeda, 2006).

A continuación, describiremos las entidades primarias que componen esta configuración:

La *situación* problema planteada está en un contexto geométrico trabajando con magnitudes, y de acuerdo con González (2011) por la herencia griega, se sigue manteniendo la norma de configuración de este tipo de expresiones. Otro tipo de situaciones que se abordan en este periodo son problemas de máximos y mínimos referentes a la geometría plana, espacial, aritméticos, aplicaciones a la Física y a la Astronomía aplicando el Cálculo Diferencial a funciones de una variable (Santiago, 2008).

En la solución se utiliza un *lenguaje* propio de la geometría euclidiana y simbólico (denota con dy y dx a las diferenciales de las variables x e y respectivamente, es decir, diferencias infinitamente pequeñas de x e y). El gráfico utilizado para ilustrar la situación representa el concepto que se quiere analizar junto con ciertos elementos gráficos.

Las *definiciones* utilizadas son las curvas (formadas por segmentos rectos infinitamente pequeños) y las diferencias (partes infinitamente pequeñas en que aumentan o disminuyen las variables creciendo o decreciendo de manera continua) y de acuerdo con González (2011) la definición de puntos máximos y mínimos es totalmente dinámica.

Como *proposiciones* consideramos las fórmulas para derivar productos, cocientes y potencias.

El *procedimiento* utilizado se configura a partir de un discurso descriptivo y la noción de diferencia. El razonamiento está basado en el aumento de la variable (dependiente) y diferencia positiva, mientras que la disminución implica diferencia negativa. Para que la diferencia pase de positiva a negativa o viceversa ésta ha de ser cero o infinito.

En términos actuales esta configuración se caracteriza por el siguiente procedimiento: Sea f una función continua en un intervalo I, y sean a, b y c puntos de I, tales que $a < b < c$ y c un valor crítico de f ($f'(c) = 0$, o $f'(c)$ no existe). Entonces: a) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \epsilon (a,c)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c,b)$, $f(c)$ es un máximo relativo; b) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \epsilon (a,c)$ y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c,b)$, $f(c)$ es un mínimo relativo.

Las *argumentaciones*, tal y como señala Pino, Godino y Font (2011), son puramente sintéticas.

A continuación, expresamos la configuración CE-1D mediante la Tabla 3.6.

Entidad	**CE-1D**
Situaciones-problemas	Problema de contexto geométrico-funcional en el que se busca una solución óptima
Lenguajes	Algebraico, numérico y verbal Símbolos y fórmulas, $y = f(x), dy/dx = f'(x)$
Conceptos	Función, continuidad, función derivada, intervalo
Procedimientos	Dividir la recta real en intervalos, considerando los puntos críticos y los puntos de discontinuidad de f Evaluar el signo de f' en cada intervalo. Si f' cambia de signo en el entorno del punto, entonces f posee extremo relativo en ese punto Evaluar f en los puntos donde hay extremo
Propiedades	Sea f, $Dom(f) = I, a, b \in I$, / $a < c < b$ y c un valor crítico de f ($f'(c) = 0$, o $f'(c)$ no existe). Si $f'(x) > 0 \; \forall \; x \; en \; (a,c)$ y $f'(x) < 0 \; \forall x \; en \; (c,b)$, entonces f presenta un máximo relativo en c
Argumentos	Deductivos

Tabla 3.6: Resumen elementos de la configuración CE-1D

3.2.7. Configuración epistémica de la segunda derivada (CE-2D)

Para tener criterios de máximos y mínimos basados en derivadas de orden superior a uno, hubo que esperar a Taylor (1685-1731) quien en su obra Methodus Incrementorum Directa et Inversa (Boyer,1999), que trató el cálculo en diferencias finitas, derivó el teorema que lleva su nombre y que permitió dar criterios sobre máximos y mínimos.

Seleccionamos la obra de Serret para ilustrar el tratamiento que se hace en esta época de los problemas de optimización.

Ilustramos esta configuración mediante un problema prototípico. Hemos seleccionado de la obra de Serret "*Cours de Calcul Differentiel et Integral*" el ejemplo IV del capítulo VI del primer tomo que está dedicado a la teoría de máximos y mínimos de funciones de una sola variable independiente.

Analizamos la demostración extraída de Santiago (2008).

"Determinar los máximos y mínimos de la distancia de un punto dado a una curva dada"

Resolución:

Designemos por x_o y y_0 las coordenadas del punto dado relativas a los ejes r, por x y y las coordenadas de la curva dada. La ordenada y es una función

dada de x, y el cuadrado de la distancia del punto del punto (x_o, y_0) al punto (x, y) y

(1) $V = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$

Se pretende calcular los valores máximo y mínimo de la función de x representada por V

Se tiene que

$$(2)\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{dV}{dx} = (x - x_0) + (y - y_0)\frac{dy}{dx} \\ \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2} = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + (y - y_0)\frac{dy^2}{dx^2} \end{cases}$$

La condición $\frac{dV}{dx} = 0$ del máximo o mínimo es

$$(3)\ (x - x_0) + (y - y_0)\frac{dy}{dx} = 0$$

de donde

$$\frac{y - y_0}{x - x_0}\frac{dy}{dx} = -1$$

$\frac{y-y_0}{x-x_0}$ es el coeficiente de inclinación de la recta que une el punto dado M_0 con el punto buscado M de la curva dada, $\frac{dy}{dx}$ es el coeficiente de inclinación de la tangente en M a

la misma curva. Así la ecuación precedente expresa que la recta que junta el punto

dado al punto buscado es normal a la curva. Sea M uno de los puntos así determinados por la ecuación (3); este punto corresponderá a un mínimo o a un máximo, de conformidad $\frac{d^2V}{dx^2}$ será positivo o negativo.

Pero si $\frac{d^2V}{dx^2}$ es nula, deberemos recorrer las derivadas de orden superior para decidir si tenemos un máximo o un mínimo, o si no es ni uno ni otro. Este último caso se presenta en particular si, $\frac{d^2V}{dx^2}$ se anula en el punto M y el valor de $\frac{d^3V}{dx^3}$ es distinto de cero.

La recta M_0M se colocará, suponiendo que el punto dado M_0 toma todas las las posiciones posibles sobre esta normalidad, existirá una posición M' del punto M_0 para el cual la derivada $\frac{d^2V}{dx^2}$ sea nula; consecuentemente tomaremos x' , y' coordenadas de M' teniendo

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)+(y-y')\frac{dy^2}{dx^2}=0$$

y la ecuación (2) puede escribirse

$$\frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2}=\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{y-y_0}{y-y'}$$

Esta muestra que el valor de M_0M será un mínimo o un máximo, dependiendo de que

y_0-y' e $y-y'$ estén en la misma línea o en líneas contrarias. En otros términos, existirá un mínimo cuando el punto dado M_0 esté situado entre M' y M, habrá un máximo en caso contrario. El punto M' es, como veremos más adelante, lo que designamos por centro de la curvatura de la curva dada en el punto M.

En base al enunciado y demostración describimos los elementos de la configuración:

La *situación problema* aborda la optimización de la distancia entre un punto y una curva dada. Otro tipo de situaciones son de Geometría Plana y de Geometría Espacial, donde se pretende optimizar distancias, áreas, volúmenes, tiempo y problemas de la Física.

El *lenguaje* utilizado es el escrito y el algebraico.

Entre los *conceptos* utilizados, punto crítico, máximo, mínimo, fórmula de la distancia entre dos puntos.

El p*rocedimiento* para la resolución comienza con identificar la situación con la expresión algebraica de una función. Posteriormente, trabaja con la ecuación de la derivada de la función igualada a cero y con la función de la curva para determinar la solución óptima. A continuación, aplica la segunda derivada para verificar si se trata de un máximo o de un mínimo.

Las propiedades son las condiciones suficientes de extremo relativo:

Si $f: [a, b] \rightarrow R$ tiene derivadas continuas de orden n en (a, b) y c $\in (a, b)$

Si $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^n(c) = 0$ y $f(c) > 0$, entonces mínimo en c;

Si $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^n(c) = 0$ y $f(c) < 0$, entonces máximo en c;

La argumentación es de tipo deductivo basada en el Teorema de Taylor.

El ejemplo analizado nos permite ver, de manera global, las características de la configuración epistémica de la segunda derivada en la Tabla 3.7.

Entidad	**CE-2D**
Situaciónes-problemas	Problema de contexto geométrico-funcional en el que se busca una solución óptima
Lenguajes	Algebraico, numérico y verbal
Conceptos	Continuidad, intervalo, radio de un entorno, derivadas sucesivas de una función
Procedimientos	Determinar los puntos críticos y los puntos de discontinuidad de f Evaluar el signo de las derivadas sucesivas en cada punto crítico Evaluar f en los puntos donde hay extremo
Propiedades	Derivadas de orden par distinto de cero implica existencia de extremo
Argumentos	Teorema de Taylor Deductivos

Tabla 3.7: Resumen elementos de la configuración CE-2D

3.2.8. Configuración epistémica de los multiplicadores de Lagrange (CE-ML)

A continuación, introducimos tres ejemplos clásicos del Cálculo de Variaciones, en los que se muestran los elementos fundamentales del problema.

El problema de la braquistócrona: Entre todas las curvas que unen los puntos *A* y *B*, se desea hallar aquella a lo largo de la cual un punto material, moviéndose bajo la fuerza de la gravedad desde *A* llega al punto *B* en el menor tiempo.

El problema de las geodésicas. Las geodésicas son aquellas curvas contenidas en una superficie regular que minimizan la distancia entre dos puntos de la misma.

El problema isoperimétrico. De entre todas las curvas de longitud dada, que unen el origen con un punto variable encontrar aquella que, junto con el eje *OX*, encierra una superficie máxima.

El tipo de situaciones-problemas que trata el Cálculo de Variaciones son referentes a optimizar una función bajo unas restricciones. Existen dos aproximaciones fundamentales a la resolución de los problemas variacionales: métodos indirectos y métodos directos. Los primeros son los que provienen de los métodos de minimización de funciones vía el cálculo diferencial. Este método proporciona condiciones necesarias y condiciones suficientes que dan lugar a una base metodológica para la resolución de problemas variacionales, la cual está íntimamente ligada a la teoría de ecuaciones diferenciales. Los segundos se sustentan en la extensión del teorema de Weierstrass a funciones definidas en espacios de dimensión infinita.

Esta configuración no la incluimos en esta Memoria ya que excede de los conocimientos del nivel al que va dirigido nuestro estudio de investigación.

3.3. Reconstrucción del significado institucional de referencia de la optimización

La finalidad del estudio histórico-epistemológico que hemos presentado es el de presentar una propuesta de reconstrucción del significado holístico de referencia para la optimización. El análisis del recorrido histórico referente a cómo han sido abordados los problemas de optimización por la comunidad matemática pone de manifiesto que se han ido sucediendo diferentes puntos de vista sobre los mismos que, en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados. El objeto optimización, a lo largo de la historia, emerge de una serie de prácticas matemáticas que han sido realizadas para resolver problemas relacionados con encontrar el máximo o el mínimo. A través de situaciones-problemas abordados por los matemáticos de la época, hemos descrito las características de las prácticas desarrolladas en diversos momentos históricos, los cuales contribuyeron al surgimiento y formalización de la optimización como objeto matemático. Desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático una de las maneras de entender el significado de un concepto es, desde la perspectiva pragmatista, en términos de los sistemas de prácticas en que dicho objeto interviene (significado sistémico). Tales sistemas de prácticas están ligados a tipos de situaciones-problemas, de donde se deriva la posibilidad de distinguir distintos significados cuando se abordan problemas diferentes. Para el análisis de las prácticas matemáticas desarrolladas, utilizamos algunas de las herramientas que nos proporciona el EOS. Realizando un análisis por medio de las entidades primarias de la actividad matemática hemos identificado ocho configuraciones epistémicas (CE), asociadas a los sistemas de prácticas, las hemos denominado: 1) *CE de la construcción geométrica* (CE-CG); 2) *CE mediante reducción al absurdo* (CE-RA); 3) *CE del método de la adigualdad* (CE-AD); 4) *CE de la ordenada* (CE-O); 5) *CE de la tangente* (CE-T); 6) *CE de la primera derivada* (CE-1D); 7) *CE de la segunda derivada* (CE-2D); 8) *CE de los multiplicadores de Lagrange* (CE-ML).

Estas configuraciones epistémicas nos han permitido identificar y caracterizar ocho significados parciales para la optimización, los cuales conforman el significado holístico. Hemos asociado a cada CE un significado parcial de la siguiente manera: significado de la construcción geométrica (CE-CG), caracterizado por encontrar la solución utilizando una construcción geométrica; significado mediante reducción al absurdo (CE-RA) caracterizado por demostrar una situación mediante la técnica de la reducción al absurdo; significado de la adigualdad (CE-AD), que se caracteriza por el método de adigualdad con la utilización de métodos puramente algebraicos; significado de la ordenada (CE-O), caracterizado porque los puntos máximos y mínimos presentan la mayor o menor de las ordenadas en un entorno centrado en ellos; significado de la tangente (CE-T), caracterizado porque en los extremos relativos la representación gráfica de una función presenta recta tangente horizontal; significado de la primera derivada (CE-1D), se distingue porque el cambio de signo de f’ en el entorno de un punto, indica la existencia de extremo relativo en ese punto; significado de la derivada de orden superior a uno (CE-2D), que está relacionada con el hecho de tener que calcular la segunda derivada (y sucesivas si es necesario) de la función en los puntos críticos para poder decidir si existe máximo o mínimo en el punto y por último, el significado de los multiplicadores de Lagrange (CE-ML).

A continuación, presentamos en la Tabla 3.8 la correspondencia entre la entidad procedimiento que caracteriza a cada una de las configuraciones epistémicas y el significado que emana de cada una de ellas reconstruyendo el significado institucional de referencia de la optimización.

Procedimiento	Configuraciones epistémicas	Significados
Encontrar la solución utilizando una construcción geométrica	CE-CG	Construcción geométrica
Demostrar una situación mediante la técnica de la reducción al absurdo	CE-RA	Reducción al absurdo
Aplicación del método de adigualdad	CE-AD	Adigualdad
Puntos máximos y mínimos presentan la mayor o menor de las ordenadas en un entorno centrado en ellos	CE-O	Ordenada
Recta tangente horizontal en un máximo o mínimo	CE-T	Tangente
Cambio de signo de f’ en el entorno del punto crítico	CE-1D	Primera derivada
Evaluación de las derivadas sucesivas en el punto crítico	CE-2D	Segunda derivada
Aplicación de la técnica del Método de Lagrange	CE-ML	Multiplicadores Lagrange

Tabla 3.8: Resumen de configuración epistémicas y significados

En el estudio realizado se han obtenido ocho configuraciones epistémicas como significado de referencia de la optimización. En los significados institucionales pretendido e implementado se contratará la presencia, o no, de las configuraciones extraídas. Asimismo, también se observará qué tipos de configuraciones muestran los alumnos en sus respuestas al cuestionario.

Capítulo 4

Significado institucional pretendido

4.1. Introducción a la investigación sobre los libros de texto de Matemáticas

Una vez que el significado de referencia de la optimización ha sido determinado, en este capítulo nos vamos a interesar por la adaptación que se produce en dicho significado para ser enseñado en la institución escolar.

La investigación en didáctica de la matemática muestra el creciente interés de la comunidad educativa por la indagación de los libros de texto como recurso en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Muestra de ello, es el estudio realizado por Fan, Zhu y Miao (2013) en el que se revela el importante avance realizado en las últimas décadas en la investigación de libros de texto de Matemáticas.

Como indican Thomson y Fleming (2004) un amplio colectivo del profesorado de matemáticas utiliza los libros de texto prescritos cuando planifican e implementan su enseñanza en el aula, por lo que para los estudiantes es el principal recurso para su aprendizaje.

Tal y como señalan Zhu y Fan (2006), los libros de texto son un componente clave del significado pretendido y en cierta manera transmiten la filosofía educativa y pedagógica de los escritores y de los tomadores de decisiones de la selección de éstos, teniendo una influencia sustancial en la enseñanza de los profesores y el aprendizaje de los alumnos.

En el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico, el significado de un objeto se refiere al conjunto de prácticas matemáticas vinculadas al campo de problemas de donde surge dicho objeto y que puede variar según las instituciones. Por tanto, los recursos utilizados en la enseñanza, como son los libros de texto, influyen de manera vinculante en la construcción del significado personal ya que dirigen el quehacer matemático del estudiante. Por tanto, el análisis de los manuales utilizados en el proceso de instrucción es una herramienta fundamental para obtener información sobre los significados institucionales pretendidos de los objetos matemáticos (Contreras, Ordoñez y Wilhelmi, 2010). En el EOS se han realizado diversas investigaciones relacionadas con el significado institucional pretendido de objetos matemáticos. (Contreras, et al. (2005); Godino, Font y Wilhelmi, 2006; Malaspina, 2008; Contreras y García, 2011; Ordóñez, 2011; Gea, López-Martín y Roa, 2017; Del Pino y Estepa, 2017; Parra y Pino-Fan, 2017). De éstas tendremos en cuenta fundamentalmente las que están relacionadas con el Análisis.

La investigación de Contreras et al. (2005) aporta una técnica de análisis de textos matemáticos de tipo ontológicosemiótico ilustrada mediante el análisis de un manual acerca de la función derivada, en la cual se utiliza la función semiótica como herramienta para mostrar la complejidad ontosemiótica del objeto derivada.

En Contreras y García (2011) se construyó el significado institucional pretendido del objeto límite de una función en 1º de Bachillerato. Para el análisis ontosemiótico de los significados presentes en el libro de texto, se utilizó la idea de configuración semiótica de cara a poder visualizar los elementos de la actividad matemática relacionados entre sí.

En Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010), se mostraron los significados de la integral definida de una muestra de libros de texto de 2º de Bachillerato, según las entidades primarias de la actividad matemática y los conflictos semióticos.

Ordóñez (2011), describió el significado institucional de la integral definida en 2º de Bachillerato utilizando las normativas del MEC y la Consejería de Educación, en cuanto a la elección del contenido, comparando éste con los objetivos que se pretendían. Asimismo, se analizó los significados que emanaban de las pruebas de acceso a la universidad.

Parra y Pino-Fan (2017) realizaron un análisis ontológicosemiótico del tratamiento del concepto de función en libros de texto chilenos. Para la determinación del significado pretendido se adoptó una metodología que establecía cuatro criterios para la caracterización de los significados: representatividad de los campos de problemas propuestos; tipos de representaciones activadas en el planteamiento y solución de las tareas; representatividad de los elementos regulativos y argumentativos; y representatividad de los significados pretendidos por el libro de texto respecto del significado global de referencia.

En este capítulo caracterizamos el significado institucional pretendido de la optimización en el currículo de 2º de Bachillerato a partir de las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel.

Para ello, como elemento innovador en la investigación acerca de la optimización, se utilizarán las herramientas del EOS y de la TRRS buscando elementos complementarios, unificadores y explicativos de estas teorías en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de dicho concepto.

En primer lugar, se analiza la optimización en el currículo de 2º de Bachillerato y se mostrarán las histórico-epistémicas detectadas. En segundo lugar, se efectúa el análisis de dicho concepto en libros de texto de dicho nivel en dos fases. En la primera fase se estudian de manera global las configuraciones asociadas a las prácticas propuestas, así como los posibles conflictos semióticos potenciales. La segunda fase consiste en el análisis ontosemiótico de problemas resueltos incluidos en los manuales, considerando un primer nivel para identificar los registros de representación semiótica y los objetos matemáticos que conforman las configuraciones y un segundo nivel para estudiar los procesos matemáticos, identificando los conflictos semióticos potenciales.

4. 2. La optimización en el currículo de Bachillerato

4.2.1. Análisis del currículo establecido en la legislación que rige el sistema educativo de Bachillerato

El actual plan de estudios del sistema educativo español se rige por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE), estableciéndose el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato concretados por la Comunidad Autónoma de Andalucía en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre. Sin embargo, las experiencias de investigación realizadas en esta Memoria corresponden a etapas anteriores a 2016, es decir en etapas donde aún no se había aplicado la LOMCE en 2º de Bachillerato, por tanto, la ley a aplicar es la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE).

La legislación a tener en cuenta es la propia LOE, el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, de enseñanzas mínimas de la educación secundaria obligatoria y el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. En la Comunidad Autónoma Andaluza, el Decreto 231/2007, de 31 de julio, de ordenación de las enseñanzas de la Educación Secundaria Obligatoria, la Orden de 10 de agosto de 2007 de desarrollo de las enseñanzas de la Educación Secundaria Obligatoria, el Decreto 416/2008, de 22 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes al Bachillerato y la Orden de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato.

En el artículo 1 de la LOE, Principios de la Ley, apartado m, se dice textualmente: “La consideración de la función docente como factor esencial de la calidad de la educación, el reconocimiento social del profesorado y el apoyo a su tarea”. Es decir, en este principio se reconoce la labor del profesor como determinante de la calidad de la educación. Por tanto, desde esta óptica, todo lo que se investigue en educación matemática, con referencia a la enseñanza y aprendizaje de conceptos tales como la optimización, está de acuerdo con lo que propone dicha ley.

Posteriormente, en el capítulo III de currículo y distribución de competencias, se entiende por currículo la regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas. El currículo estará integrado por los siguientes elementos: objetivos, competencias, contenidos, metodología didáctica, estándares y criterios de evaluación. Destacamos la metodología didáctica, que comprende tanto la descripción de las prácticas docentes como la organización del trabajo de los docentes ya que resalta la noción de práctica como mecanismo fundamental para el desarrollo del currículo y es un elemento clave en nuestra investigación.

El artículo 34 de la Ley organiza las enseñanzas del Bachillerato en tres modalidades, siendo Ciencias la primera de ellas. Las matemáticas están en el bloque de asignaturas troncales y se denomina Matemáticas II.

En el Real Decreto 1467/2007, se fijan las enseñanzas mínimas del Bachillerato y se disponen los objetivos, contenidos y criterios de evaluación. La asignatura

Matemáticas II se divide en varios bloques de contenidos, en el tercero correspondiente a Análisis, se dice textualmente: “Función derivada. Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. Problemas de optimización”. Es decir, la optimización aparece como una aplicación del concepto de derivada de una función. Asimismo, en el criterio 5º de evaluación puede leerse textualmente: “Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización”. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. En concreto, se pretende comprobar la capacidad de extraer conclusiones detalladas y precisas sobre su comportamiento local o global, traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y encontrar valores que optimicen algún criterio establecido”. En este caso se da a la optimización un valor didáctico importante ya que se presenta clave a la hora de la interpretación de fenómenos de la vida real.

En el Decreto 416/2008 de la Junta de Andalucía se organizan las enseñanzas de Bachillerato en tres modalidades, siendo la segunda la de Ciencias y Tecnología. Las Matemáticas II corresponden a segundo curso.

En la Orden de 5 de agosto de 2008 de la Junta de Andalucía por la que se desarrolla el currículo, además de considerar los objetivos, contenidos y criterios de evaluación propuestos en el Real Decreto 1467/2007, incluye principios para el desarrollo de los contenidos y orientaciones metodológicas.

Aportaciones específicas para Matemáticas II:

Relevancia y sentido educativo. El papel que desempeña el estudio de las Matemáticas en Bachillerato es principalmente estratégico y se manifiesta en tres aspectos: como base conceptual, como instrumento esencial de desarrollo de la Ciencia y la Tecnología y como valor inherente a la propia cultura. Además de todo eso, el alumnado de Bachillerato debe aprender a apreciar la utilidad de las matemáticas, una utilidad relacionada con su capacidad para dar respuesta a la mayoría de las necesidades humanas. Para unos, las matemáticas son útiles porque enseñan a pensar y razonar con precisión; para otros, porque llevan a la percepción y creación de la belleza visual, o porque permiten escapar de las realidades de la vida cotidiana, o porque son parte esencial del lenguaje de la ciencia.

Para hacer posibles esos objetivos, es necesario que los procesos de enseñanza y aprendizaje se basen en tres pilares fundamentales: la resolución de problemas; la génesis y evolución de los propios conceptos y técnicas matemáticas y, finalmente, los modelos, métodos y fundamentos matemáticos. Estos tres aspectos deben constituir la base del diseño curricular de Matemáticas para una enseñanza y aprendizaje adecuados.

Núcleos temáticos. En la línea de lo expuesto, las Matemáticas II de Bachillerato de Ciencias y Tecnología incluye el estudio de cuatro núcleos temáticos que no deben considerarse compartimentos estancos que deben abordarse de forma cíclica, gradual y con atención a todos los bloques. Esos núcleos temáticos son:

1. La resolución de problemas.
2. Aprender de y con la Historia de las Matemáticas.
3. Introducción a los métodos y fundamentos matemáticos.
4. Modelización matemática.

En esta tesis, dado la fuerte presencia de análisis didácticos acerca de la resolución de problemas de optimización, estamos interesados fundamentalmente en los núcleos de resolución de problemas y de modelización matemática.

Resolución de problemas. Es el elemento básico de la actividad matemática misma. Permite que el alumnado desarrolle una visión amplia y científica de la realidad, estimula la creatividad y la valoración de las ideas ajenas, facilita la habilidad para expresar las ideas propias con argumentos adecuados y el reconocimiento de los posibles errores cometidos. La resolución de problemas constituye en sí misma la esencia del aprendizaje y debe estar presente en todos los núcleos temáticos de esta materia.

Desde esta perspectiva, la introducción de nuevos conceptos a través de situaciones-problema permite poner de manifiesto su interés práctico y funcional, facilitando la profundización en su conocimiento, manejo y propiedades.

Aprender de y con la Historia de las Matemáticas. El conocimiento de la génesis y evolución de los conceptos facilita el entendimiento de los mismos y, sobre todo, pone de manifiesto los objetivos con los que fueron desarrollados y la presencia que las Matemáticas tienen en la cultura de nuestra sociedad. En la observación de la evolución histórica de un concepto o una técnica, el alumnado encontrará que las Matemáticas no son fijas y definitivas y descubrirá su contribución al desarrollo social y humano, permitiendo, a lo largo de la historia, resolver problemas y desarrollar aspectos de todas las ciencias y ámbitos del conocimiento, lo que le otorga un valor cultural e interdisciplinar inherente a la propia matemática.

Modelización matemática. Puede entenderse en dos vertientes: por una parte la construcción de modelos y por otra, el uso de modelos para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La construcción de modelos es de difícil compresión para quienes no tienen suficientes conocimientos matemáticos, tecnológicos y físicos, pero por otro lado, la construcción de modelos sencillos es útil en algunos contextos para la enseñanza pues refuerza la práctica de resolución de problemas como una componente creativa para la formación del alumnado: diversas estrategias, cálculos, elementos imprescindibles para un futuro usuario de las matemáticas y para su futuro profesional.

En cuanto a los contenidos previos, hay que tener en cuenta que en la Enseñanza Secundaria Obligatoria se incluyen contenidos relacionados con la optimización en los que no se precisan las herramientas del Cálculo Infinitesimal.

En el Real Decreto 1631/2006 de enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, en el nivel 1º de ESO se incluye, en el bloque 2 de Números, el contenido: múltiplos y divisores comunes a varios números, donde obviamente se incluyen el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

Además, en el nivel de 2º, en el bloque 5 de funciones y gráficas, se incluye de modo explícito: “Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos”.

Por último, en el nivel de 3º, en el bloque 5 de funciones y gráficas, se incluye de modo explícito: Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte.

4.2.2. Configuraciones epistémicas detectadas en el currículo de Bachillerato

Si contrastamos la información descrita en el apartado anterior con las configuraciones epistémicas del significado de referencia determinadas en el capítulo 3, observamos en el nivel de 1º de la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria se incluyen situaciones relacionadas con los máximos y mínimos referentes a la aritmética.

Observamos que el significado de los máximos y mínimos en el nivel de 2º de la educación secundaria obligatoria se identifica con el de las configuraciones CE-T y CE-O ya que las situaciones-problemas que se consideran son relativas a la identificación de los extremos relativos de las gráficas de funciones. El procedimiento que caracteriza a CE-T es identificar los puntos con tangente horizontal de la gráfica de una función, lo que se puede construir por paralelismo con el eje de abscisas, mientras el que caracteriza a CE-O es identificar los puntos con mayor o menor ordenada en su entorno, pudiendo obtener esta información a partir de datos numéricos o considerando gráficamente la secuencia de las ordenadas en un entorno de un extremo relativo.

En el nivel de 3º de la Educación Secundaria Obligatoria cuando la situación problema sea relativa a los extremos relativos se identifican las configuraciones descritas para el nivel inferior, sin embargo, cuando sean relativas a los extremos absolutos, se corresponde solo con la configuración CE-O.

Centrándonos en la asignatura Matemáticas II, donde se focaliza nuestro trabajo de investigación, los problemas de optimización son incluidos con el cálculo y aplicación de las derivadas y en el criterio de evaluación se establece aplicar el concepto y cálculo de derivadas a la resolución de problemas de optimización. Así, las situaciones-problemas estarán ligadas situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico y el procedimiento para resolverlas procede de las herramientas del cálculo diferencial. Por ello, en este nivel identificamos las configuraciones CE-1D y CE-2D.

Por tanto, las configuraciones epistémicas del significado de referencia de la optimización detectadas directamente en el currículo de Bachillerato son la configuración de la primera derivada (CE-1D) y la configuración de la segunda derivada (CE-2D). Sin embargo, consideramos que las configuraciones de la ordenada (CE-O) y de la tangente (CE-T) deben también incluirse por estar presentes en los contenidos previos a este nivel.

Por el contrario, no están presentes en el currículo las configuraciones histórico-epistémicas de la construcción geométrica (CE-CG), mediante reducción al absurdo (CE-RA) y del método de adigualdad (CE-AD). La configuración de los multiplicadores de Lagrange (CE-ML) consideramos que excede de los conocimientos del alumnado 2º de Bachillerato por lo que no será considerada en este estudio.

El hecho de que la optimización apenas se aborde en los primeros años de la educación secundaria ocurre de manera similar en los planes de estudios de otros países, tal y como señala Villers (1997). Sin embargo, considera que es posible tratar situaciones relacionadas con la optimización en los inicios de las matemáticas escolares dotando a las Matemáticas de un carácter más realista ya que la optimización permite acercar al alumno a las matemáticas utilizando experiencias de su entorno. En la línea de esta investigación Malaspina y Font (2010) consideran factible incluir problemas de optimización en el currículo de educación básica. Esta inclusión potenciaría la intuición optimizadora del individuo desde los primeros cursos de las matemáticas escolares, sin descuidar el rigor, como parte de una formación científica integral. Así, se contribuye a que los alumnos adquieran las destrezas necesarias para abordar situaciones de la vida real como el desarrollo de la capacidad para la toma de decisiones.

Tal como se constata en las investigaciones de González y Sierra (2004) y de González (2004) la aplicación de las derivadas a la resolución de problemas de optimización en la enseñanza secundaria del sistema educativo español un hecho socialmente admitido ya desde finales del siglo XX. Sin embargo, Moreno y Cuevas (2004) indican que resolver este tipo de problemas de manera rutinaria, induce a los estudiantes a interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos, incluso contradiciendo su propia intuición.

Los problemas de optimización pueden abordarse independizándolos del cálculo diferencial. En este sentido, Contreras, Luque y Ordóñez (2004) ofrecen métodos que aportan soluciones a los problemas de máximos en los que el cálculo diferencial no puede hacerlo. Consideran que el resolver este tipo de problemas aplicando diversas estrategias dota de sentido al concepto de optimización independizándola del cálculo diferencial. En esta dirección la investigación de Karelin, Rondero y Tarasenko (2007) utiliza la noción de máximo y mínimo para calcular funciones derivadas aplicando la relación existente entre los máximos, los mínimos y la recta tangente. Se muestra la conexión entre la búsqueda de los máximos y mínimos de una función y el cálculo de la derivada en un punto dado, en base a la interpretación geométrica del concepto y la aplicación de desigualdades. Este método permite profundizar en nociones fundamentales del cálculo y ayudar en los diferentes niveles educativos a consolidar métodos de análisis sobre las características gráficas de las funciones.

Consideramos que el hecho de no incluir las configuraciones CE-RA, CE-CG, CE-AD impide que se muestre al alumno que la forma de abordar los problemas de optimización ha ido evolucionando a lo largo del desarrollo de la historia científica. Además, considerar estos problemas como meras aplicaciones de las derivadas puede llevar al alumno a confusión, ya que fueron uno de los campos de problemas que dieron origen al Cálculo Diferencial.

Por otra parte, el dirigir la resolución de problemas con un solo tipo de estrategia contradice el hecho de que un problema es una situación para la que a priori no existe un camino evidente de resolver, tal como se recoge en las orientaciones metodológicas del currículo, no fomentando el pensamiento crítico del estudiante. Además, evita que la optimización pueda relacionarse con otros contenidos tales como, por ejemplo, con la interpretación geométrica de la derivada o la aplicación de desigualdades.

Es por todo lo anterior que consideramos que el significado de la optimización que emerge de las configuraciones identificadas en el currículo es parcial con respecto al significado institucional de referencia.

4. 3. La optimización en los libros de texto de Bachillerato

En esta sección se describe el significado institucional pretendido de la optimización en los libros de texto de 2º de Bachillerato, indicando los tipos de prácticas operativas y discursivas, las configuraciones de objetos, procesos puestos en juego en los sistemas de prácticas y los conflictos semióticos potenciales.

Para la identificación del significado pretendido de la optimización, dado que se trata de un contenido incluido en el currículo de segundo curso de Bachillerato en la Modalidad de Ciencias y Tecnología, se ha seleccionado una muestra formada por dos libros de texto, considerando el criterio de analizar las editoriales con mayor difusión en la provincia de Jaén (España). Al tratarse de una investigación cualitativa, la muestra utilizada es intencional cuya finalidad es que sea comprehensiva para capturar la mayor riqueza posible de la realidad analizada (Martínez, 2006).

En la Tabla 4.1 se muestra la distribución de la frecuencia del uso de las diferentes editoriales de Matemáticas en el curso que nos compete en esta investigación a partir de un censo realizado con la información facilitada por los cincuenta y cinco centros públicos de educación jiennenses con la modalidad de Ciencias y Tecnología.

Editorial	%
Anaya	65,45
Santillana	9,12
Resto de manuales	19,96
No utiliza manual	5,47

Tabla 4.1: Porcentaje de los centros públicos jiennenses que utilizan cada editorial en segundo de Bachillerato modalidad Ciencias y Tecnología

A partir de estos datos hemos seleccionado la muestra de los libros de texto que vamos a analizar que son utilizados como recurso didáctico por el 74,57 % de los centros esta modalidad de Bachillerato, Tabla 4.2.

Código	Referencia
T1	Colera J. et al. (2009). *Matemáticas II.* Madrid, España: Anaya
T2	Escoredo A. et al. (2009) *Matemáticas II.* Madrid, España: Santillana

Tabla 4.2: Referencia bibliográfica de los libros seleccionados para la muestra

Sobre estos dos manuales se ha realizado un análisis en dos fases que asume que un texto puede dividirse en segmentos que pueden clasificarse en un número reducido de categorías en función de variables subyacentes y que permiten realizar inferencias sobre su contenido (Noguero, 2002), que a continuación describimos.

En la primera fase se efectúa el estudio del desarrollo de la optimización en cada uno de los textos, identificando los capítulos correspondientes a la optimización; dividiéndolos en unidades de análisis, según las situaciones-problemas detectadas y observando las entidades primarias: lenguaje, conceptos, propiedades procedimientos y argumentos, (Godino, Batanero y Font, 2007). En la temática que nos ocupa la importancia del lenguaje es fundamental ya que representa las entidades conceptuales, proposicionales y procedimentales y sirven de herramienta para la realización de algoritmos y la elaboración de argumentos justificativos. Por tanto, ampliamos esta entidad utilizando los registros de representación semiótica de Duval (1995; 2006), teniendo en cuenta algunas investigaciones del EOS (Pino-Fan et al. 2015 y Godino et al. 2016) sobre la articulación de la TRRS y el EOS donde se revela el potencial de la complementariedad del análisis epistémico y cognitivo de ambas teorías. Para cada una de las entidades se realiza un estudio detallado de su presentación y el uso que se hace a lo largo del capítulo. Posteriormente, se obtienen las configuraciones epistémicas de cada uno de los textos analizados con la finalidad de identificar los posibles conflictos semióticos asociados.

En la segunda fase, se realiza un análisis ontosemiótico del enunciado y de la resolución de una situación problema incluida en los manuales aplicando dos niveles de análisis. El primer nivel consiste en la identificación de los registros de representación semiótica y el resto de las entidades primarias que componen la configuración de los objetos matemáticos de cada una de las prácticas elementales en las que se ha segmentado el enunciado y la solución de la situación problema. El segundo nivel consiste en la identificación de los procesos matemáticos realizados en las prácticas elementales. Aplicamos estos dos niveles para describir la configuración ontosemiótica de la situación problema resuelta con la finalidad de identificar los posibles conflictos semióticos que pueden ser inducidos por los libros de texto analizados (Giacomone, 2017).

4.3.1. Primera fase: Análisis epistemológico de los libros de texto

Una vez descritas en el capítulo 3 las configuraciones epistémicas de referencia en la institución, hemos analizado cómo se presenta la noción de optimización en la muestra de libros de texto presentada en la Tabla 4.2 realizando un análisis epistemológico de cada uno de ellos en el que se identifican las entidades primarias según describimos a continuación (Balcaza, Contreras y Font, 2017).

- Situaciones-problemas, según los tipos de situaciones de enseñanza que se utilicen en el texto. Se distinguen:
    a. Situaciones que se usan para fundamentar la matemática a enseñar según el tipo de fenómenos que se gestionan (de la propia Matemática, de otras ciencias o una situación de la realidad).
    b. Ejemplos y problema resueltos que se utilizan para facilitar la comprensión del discurso matemático. Se observará el lugar dónde incluye, la funcionalidad y cómo se resuelven.
- Registros de representación semiótica (RRS), clasificados en la lengua natural (oral, escrita), representaciones numéricas (entera, fraccionaria, decimal),

representaciones figurales o gráficas (lineales, planas o espaciales) y representaciones alfanuméricas (algebraicas).

- Conceptos, en la que se considera la definición que se da de los extremos de las funciones, los puntos singulares y los problemas de optimización. Se observará si hay una única definición y si ésta es formal o intuitiva.
- Propiedades, en la que se considera el modo en que se exponen las propiedades de la optimización. Se tendrán en cuenta los siguientes tipos:

  a. Si la exposición que se realiza de las propiedades es formal o intuitiva.
  b. Si se demuestran o justifican o solamente se exponen.

- Procedimientos, planteándose cómo son los procedimientos utilizados en las actividades distinguiendo:

  a. Si se emplean uno o varios procedimientos para resolver las situaciones.
  b. Si los procedimientos que se utilizan se justifican.

- Argumentos.

A partir del análisis de las entidades primarias se obtendrán las configuraciones asociadas a las prácticas propuestas en cada uno de los libros de texto. Tal y como se pone de manifiesto en Font y Godino (2006), mediante este constructo, describiremos el significado institucional pretendido del contenido optimización, lo que nos permitirá comparar textos de distintas orientaciones epistemológicas.

Posteriormente, analizaremos la presencia de posibles conflictos semióticos explícitos o implícitos en los libros de texto considerados. La importancia de su identificación es que dichos conflictos podrían reproducirse posteriormente en los estudiantes que utilizan estos manuales como recurso didáctico y, por tanto, causar errores en su aprendizaje.

4.3.1.1. Configuraciones epistémicas y conflictos semióticos potenciales asociados al libro de texto de la editorial Anaya

A continuación, presentamos el análisis epistemológico realizado del manual perteneciente a la editorial Anaya (T1) considerando los objetos matemáticos en cuanto a su distribución y el papel que se les asigna. La optimización se incluye en la unidad número diez, titulada “Aplicaciones de las derivadas” la cual está divida en los siguientes epígrafes: reflexiona y resuelve (relación del crecimiento con el signo de la primera derivada y relación de la curvatura con el signo de la segunda derivada); recta tangente a una curva en uno de sus puntos, información extraída de la primera derivada, información extraída de la segunda derivada; optimización de funciones; la derivación para el cálculo de límites: regla de L'Hôpital; dos teoremas importantes: Teorema de Rolle y Teorema del valor medio, aplicaciones teóricas del Teorema del valor medio; ejercicios y problemas resueltos y ejercicios y problemas propuestos.

A continuación, describimos los elementos de la configuración epistémica:

- Situaciones– problemas

La unidad comienza con una introducción histórica sobre las situaciones-problema que originaron la noción de derivada, destacando la obtención de la tangente a una curva en uno de sus puntos y el cálculo de la velocidad instantánea de un móvil. Sin embargo, destaca que fueron los problemas de optimización los que impulsaron la búsqueda de una teoría para generalizar los problemas planteados hasta el momento.

Se incluyen dos situaciones introductorias contextualizadas que motivan el estudio de la optimización. La primera de ellas hace referencia a una reseña histórica de la matemática griega, citado en la sección primera del capítulo 3, sobre la propiedad de la reflexión de la luz de recorrer el camino más corto (Figura 4.1).

> óptimo en tales circunstancias". Muchos de los problemas de máximos y mínimos ya fueron abordados por los griegos, como, por ejemplo, el camino que recorre la luz para llegar de un punto a otro mediante reflexión (**Herón**, siglo I a.C.). Antes de la invención del cálculo diferencial, cada uno de tales problemas se abordaba mediante un procedimiento específico, no generalizable a los demás. Actualmente, muchos de esos problemas son simples aplicaciones de las derivadas.

Figura 4.1: Reseña histórica de los problemas de optimización

La otra situación hace referencia a la mínima superficie de la cubierta de un estadio para equilibrar la tensión superficial.

A lo largo de la unidad didáctica se incluyen once situaciones-problema de optimización resueltos con la finalidad de ejemplificar los procedimientos y las propiedades introducidas. Tres de ellos están ubicados después del desarrollo teórico ilustrando el procedimiento para identificar los extremos relativos de una función y el método para la resolución de un problema de optimización; los otros siete están situados en la última sección para la consolidación del aprendizaje. Teniendo como criterio de clasificación el tipo de situación que describe el enunciado, diez tratan situaciones intramatemáticas (geometría plana y espacial, aritmética y funciones) y, uno de ellos, relacionado con fenómenos físicos.

Además, se proponen cuarenta y cinco situaciones-problema contextualizados y no contextualizados con la finalidad de la ejercitación y aplicación de los objetos matemáticos introducidos, de los cuales uno hace referencia a una situación de la vida cotidiana, dos son referentes a la economía y el resto describen situaciones intramatemáticas (geometría plana y espacial, aritmética y funciones). En la Figura 4.2 se ilustra algunos de los problemas propuestos.

1. Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.

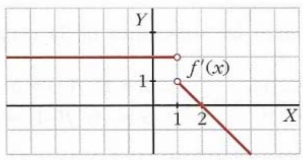
2. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.

3. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?

4. Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible la hojalata.

Figura 4.2: Algunos de los problemas propuestos

Como indica González (2002) los problemas relacionados con la física prácticamente han desaparecido de los libros de texto con respecto a los periodos correspondientes a los planes de estudio anteriores. También coincide con una de las características del periodo educativo anterior, al incluir problemas que permiten la relación entre los conceptos matemáticos y sus formas de representación (Figura 4.3).



Esta es la gráfica de la función derivada de una función f continua en ℝ.

a) Di si f es derivable en todo ℝ y por qué.

b) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de f y explica si tiene algún extremo relativo.

Figura 4.3: Relación del extremo relativo en la gráfica de la función derivada

Además, incluye problemas dotándolos de un contexto que justifica su planteamiento en relación con estos conceptos (Figura 4.4).

39 Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral, usamos un determinado material, pero para la base, debemos emplear un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.

Figura 4.4: Situación problema que contextualiza la optimización de la vida cotidiana

También considera problemas del plano euclídeo, pero considerándolos en el plano cartesiano dotándoles de un carácter más algebraico (Figura 4.5).

s33 El punto $P(x, y)$ recorre la elipse de ecuación:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Deduce las posiciones del punto P para las que su distancia al punto (0, 0) es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.

Figura 4. 5: Situación problema de figura geométrica en sistema de referencia cartesiano

Basándonos en la categorización del enunciado de Camacho y González (1998) clasificamos las cincuenta y seis situaciones-problemas de optimización que aparecen en la unidad didáctica que se distribuyen según se indica en la Tabla 4.3.

Tipo de problema	**Fr**	**%**
números	4	7,14
ángulos	2	3,57
del nadador	1	1,79
inscribir/circunscribir unas figuras a otras	5	8,93
construcción de figuras minimizando el coste de material	16	28,57
distancia de puntos a funciones	2	3,57
de la valla	1	1,79
enunciados varios	3	5,36
encontrar los extremos relativos de una función	11	19,64
relación entre conceptos y propiedades matemáticos y formas de representación	11	19,64
	56	

Tabla 4.3: Frecuencia absoluta y relativa de las situaciones-problema del manual T1 según enunciado

El enunciado más frecuente es el del tipo construcción de figuras minimizando el coste de material, en esta categoría se incluyen figuras geométricas planas en las que se tiene que minimizar el perímetro o maximizar área y figuras geométricas tridimensionales en las que se tiene que minimizar área o maximizar volumen. Después aparecen dos categorías que hemos añadido, uno es del tipo de encontrar los extremos relativos de funciones dadas por su expresión analítica y el otro de aplicar conceptos y propiedades para descubrir la expresión analítica de la función o alguna de sus características. En la categoría de enunciados varios hemos incluido situaciones que tratan de buscar puntos de gráficas de funciones con pendiente de la recta tangente máxima, situaciones donde la expresión analítica describe un modelo económico para maximizar beneficios y construcciones de figuras geométricas que cumplan ciertas restricciones.

- Registros de representación semiótica

Los RRS que prevalecen son el lenguaje natural y el algebraico. Así, se utilizan expresiones del tipo: “que es lo óptimo en tales circunstancias”, “vale más que todos los puntos que lo rodean”. Se utilizan las representaciones numéricas y figurales como apoyo para facilitar la compresión del discurso. En la siguiente Figura 4.6 se explica el procedimiento para identificar un punto singular mediante el RRS lenguaje natural y es apoyado por el RRS gráfico para su esquematización.

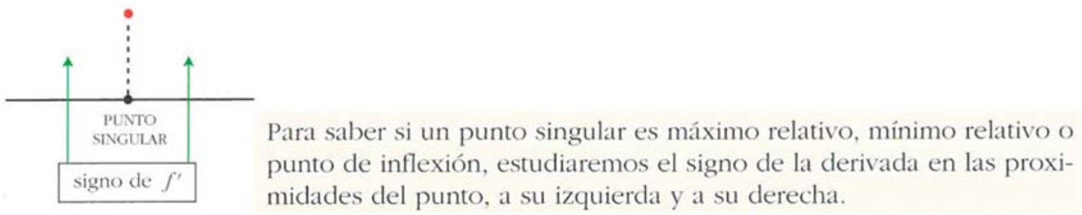


Figura 4.6: Procedimiento para clasificar un punto singular según CE-1D

- Conceptos

Se define el concepto de punto singular o también llamado punto crítico utilizando la configuración CE-T y CE-1D combinando el RRS lengua natural y el RRS algebraico (Figura 4.7).

PUNTOS SINGULARES

Los puntos de tangente horizontal, es decir, aquellos donde $f'(x) = 0$, se llaman **puntos singulares** o **puntos críticos**.

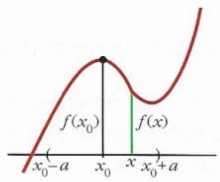
Un punto singular puede ser un máximo o mínimo relativo o un punto de inflexión.

Figura 4.7: Definición punto singular o punto crítico

También se define el máximo y el mínimo relativo utilizando la configuración CE-O. Para ello se utilizan diferentes formas de representación, la lengua natural, la representación algebraica y la gráfica, esperando que el alumno establezca las conexiones oportunas desde una situación más intuitiva a otra más formal facilitando la comprensión (Figura 4.8).

Máximos y mínimos relativos. Definición

La idea de máximo relativo en un punto es que la función, en ese punto, vale más que en los puntos que lo rodean. Veamos una definición más operativa:



f tiene un **máximo relativo** en el punto de abscisa x_0	$\Leftrightarrow$	Existe un número a tal que si $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$, entonces $f(x) < f(x_0)$

Análogamente, se define **mínimo relativo** en x_0.

Figura 4.8: Definición de extremo relativo según CE-O utilizando tres RRS

- Propiedades

Con respecto a la existencia de extremo relativo en funciones derivables se considera la condición necesaria utilizando la configuración CE-1D y, para la condición suficiente, se utiliza la configuración CE-2D (Figura 4.9). Ambas se exponen de manera formal y se demuestran.

Si $f'(x_0) = 0$ y existe $f''(x_0)$, entonces:

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en x_0

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en x_0

(La demostración se verá en la página 297).

Figura 4.9: Condición suficiente de extremo relativo según CE-2D

- Procedimientos

Se abordan procedimientos para la identificación de extremos relativos y para la resolución de los problemas de optimización.

Para la identificación de extremos relativos se propone los procedimientos correspondientes a las configuraciones CE-1D, CE-T y CE-2D. En el manual se incluye un ejemplo que ilustra el procedimiento para identificar extremos relativos de una función derivable utilizando dos configuraciones. Primeramente, mediante la configuración CE-1D evaluando la función derivada en un entorno de los puntos singulares (Figura 4.10).

Por ejemplo, para la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ averiguamos que su derivada, $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$, se anula en $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

Para averiguar cómo es cada uno de esos puntos singulares, podemos proceder así:

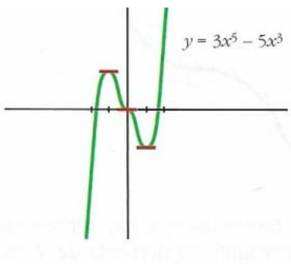
$$\left.\begin{array}{l} f'(-1{,}01) = 0{,}307 > 0 \\ f'(-0{,}99) = -0{,}292 < 0 \end{array}\right\} \text{En } -1 \text{ hay un máximo relativo.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) = -0{,}0015 < 0 \\ f'(0{,}01) = -0{,}0015 < 0 \end{array}\right\} \text{En } 0 \text{ hay un punto de inflexión.}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0{,}99) = -0{,}292 < 0 \\ f'(1{,}01) = 0{,}307 > 0 \end{array}\right\} \text{En } 1 \text{ hay un mínimo relativo.}$$

Figura 4.10: Ejemplo donde se calculan los extremos relativos según CE-1D

Posteriormente, considerando los puntos singulares y aquellos puntos de la gráfica de la función con tangente horizontal (CE-T), y discriminado mediante observación los extremos relativos (Figura 4.11).

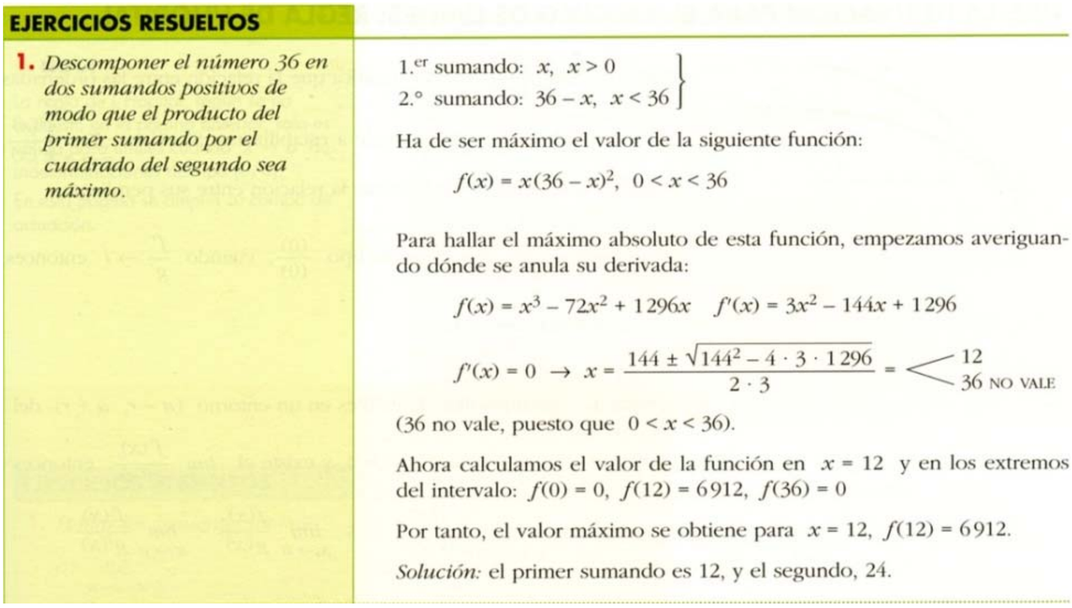


Por ejemplo, en la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ obtenemos los puntos singulares $(-1, 2)$, $(0, 0)$ y $(1, -2)$. Están todos ellos en el intervalo $[-2, 2]$ donde la función es derivable: $f(-2) = -56$, $f(2) = 56$.

Representamos los cinco puntos y los unimos cuidando de que en los puntos singulares haya tangente horizontal, y de que no la haya en ningún otro punto. De este modo se aprecia de forma indudable que en $(-1, 2)$ hay máximo relativo; en $(0, 0)$, inflexión, y en $(1, -2)$, mínimo relativo.

Figura 4.11: Ejemplo donde se identifican los extremos relativos según CE-T

El procedimiento para la resolución de los problemas de optimización se reduce a encontrar la expresión analítica de la función que describa la situación problemática, junto con el dominio de definición que vendrá dado por la condición del problema, y optimizar la función calculando los extremos absolutos en un intervalo cerrado y acotado. En el caso de ser una función derivable en el entorno, se indica a nivel teórico, que los extremos absolutos se identificarán de entre los puntos singulares y los extremos del intervalo calculando sus imágenes. Para identificar los extremos relativos se ilustra mediante ejemplos en los que se utilizan los resultados correspondientes a las configuraciones CE-O, CE-1D y CE-2D, considerándose, por tanto, tres procedimientos para abordar la resolución de los problemas según las características que verifique la función. Si la función no es derivable en algún punto del intervalo, aunque sí continua, se calculará también la imagen de ese punto. Si la función es discontinua en algún punto del intervalo se estudiará el comportamiento en un entorno de dicho punto.



EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Descomponer el número 36 en dos sumandos positivos de modo que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo.*

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{er} \text{ sumando: } x,\ x > 0 \\ 2.^{o} \text{ sumando: } 36 - x,\ x < 36 \end{array}\right\}$$

Ha de ser máximo el valor de la siguiente función:

$$f(x) = x(36 - x)^2,\ 0 < x < 36$$

Para hallar el máximo absoluto de esta función, empezamos averiguando dónde se anula su derivada:

$$f(x) = x^3 - 72x^2 + 1296x \qquad f'(x) = 3x^2 - 144x + 1296$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{144 \pm \sqrt{144^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1296}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} 12 \\ 36 \text{ NO VALE} \end{cases}$$

(36 no vale, puesto que $0 < x < 36$).

Ahora calculamos el valor de la función en $x = 12$ y en los extremos del intervalo: $f(0) = 0$, $f(12) = 6912$, $f(36) = 0$

Por tanto, el valor máximo se obtiene para $x = 12$, $f(12) = 6912$.

Solución: el primer sumando es 12, y el segundo, 24.

Figura 4.12: Resolución de una situación problema mediante procedimiento CE-O

La Figura 4.12 corresponde a un problema de optimización donde se busca una solución máxima, es de tipo intramatemático y contexto aritmético y se enuncia mediante el lenguaje verbal. El procedimiento que se utiliza para la resolución corresponde a la configuración CE-O, se evalúan los puntos singulares y los extremos del intervalo de definición seleccionando el valor máximo.

- Argumentos

Para la argumentación de la no suficiencia de la condición necesaria de extremo relativo en funciones derivables se utiliza un contraejemplo basándose en la configuración CE-T expresado en el registro gráfico (Figura 4.13).

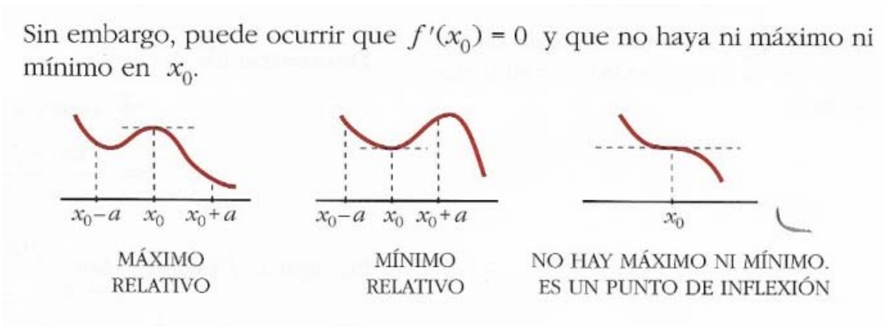
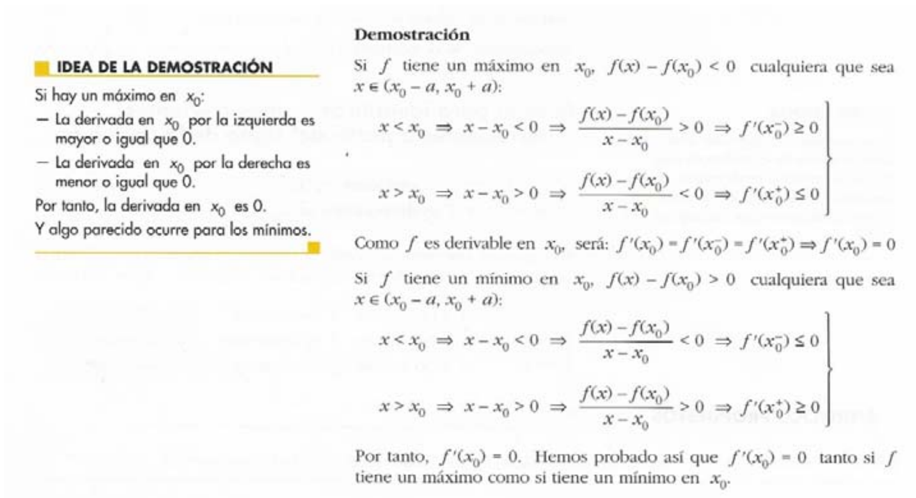


Figura 4.13: Clasificación puntos críticos según CE-T

Se demuestra la condición necesaria y suficiente de la existencia de extremo relativo en funciones derivables con una línea de argumentación deductiva utilizando el registro de representación algebraico, Figura 4.14.



IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN

Si hay un máximo en x_0:

— La derivada en x_0 por la izquierda es mayor o igual que 0.

— La derivada en x_0 por la derecha es menor o igual que 0.

Por tanto, la derivada en x_0 es 0.

Y algo parecido ocurre para los mínimos.

Demostración

Si f tiene un máximo en x_0, $f(x) - f(x_0) < 0$ cualquiera que sea $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$:

$$\left.\begin{array}{l} x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow f'(x_0^-) \geq 0 \\ x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \Rightarrow f'(x_0^+) \leq 0 \end{array}\right\}$$

Como f es derivable en x_0, será: $f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Si f tiene un mínimo en x_0, $f(x) - f(x_0) > 0$ cualquiera que sea $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$:

$$\left.\begin{array}{l} x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \Rightarrow f'(x_0^-) \leq 0 \\ x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow f'(x_0^+) \geq 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto, $f'(x_0) = 0$. Hemos probado así que $f'(x_0) = 0$ tanto si f tiene un máximo como si tiene un mínimo en x_0.

Figura 4.14: Una argumentación intuitiva con otra formal.

La Figura 4.15 resume los principales elementos de la configuración formada por el sistema de objetos y las relaciones implicadas asociada a la optimización en el libro de texto T1.

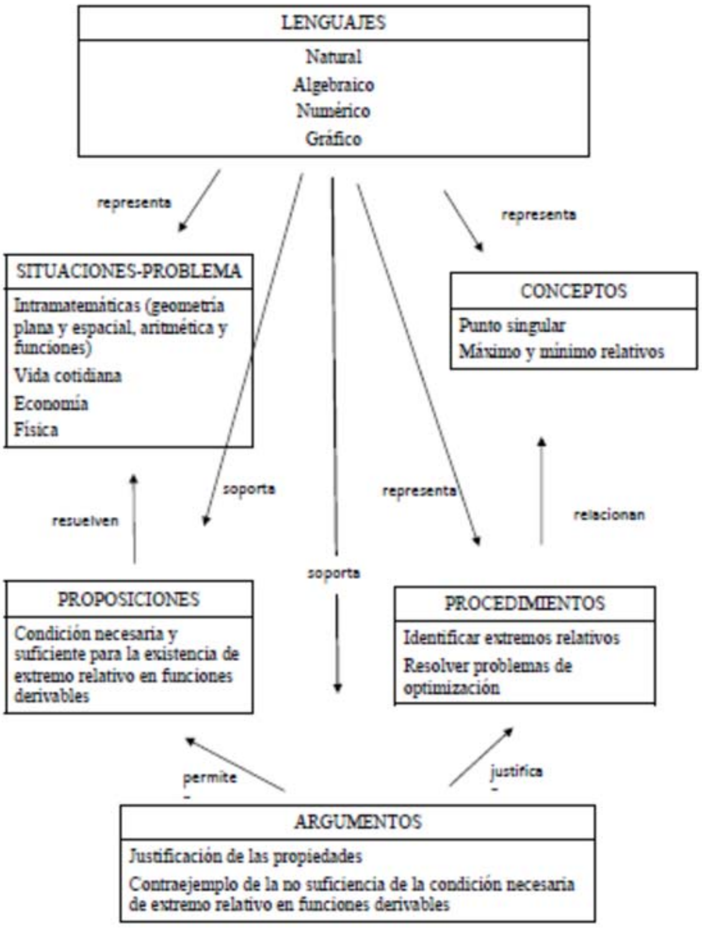


Figura 4.15: Configuración epistémica de la optimización del libro de texto T1
Inspirada en Godino, Font y Wilhelmi (2006)

Una vez realizada la configuración epistémica de la optimización en la unidad didáctica, proseguimos con el análisis identificando las posibles dificultades que puede presentar el alumnado en el proceso del aprendizaje. A continuación, describimos los conflictos semióticos potenciales asociados a las prácticas propuestas en el libro de texto de la editorial Anaya (T1) agrupándolos en base a la entidad con la que se relacionan.

- Conflictos potenciales ligados a las situaciones-problemas

Consideramos que la situación introductoria utilizada para fundamentar la enseñanza de la optimización, no es adecuada para los alumnos de este nivel ya que no han adquirido los conocimientos necesarios para comprenderla, al tratar de superficies mínimas para equilibrar la tensión superficial (Figura 4.16). Por tanto, se trata de un conflicto semiótico potencial debido a un problema ontológico (lo que Brousseau denomina obstáculo ontogenético).

La cubierta del Estadio Olímpico de Munich utiliza superficies mínimas: minimizan la superficie (y, por tanto, el peso) además de equilibrar la tensión superficial.

Figura 4.16: Ejemplo de aplicación de la optimización

Los ejemplos que se utilizan para facilitar la compresión del discurso son escasos, quedando sin ilustrar el criterio de la segunda derivada. En la resolución de los problemas de optimización no se incluyen casos que muestren cómo abordar la situación cuando la función presente puntos no derivables o discontinuidades, siendo probablemente estas cuestiones las que mayores dificultades presenten para los alumnos.

- Conflictos potenciales ligados a los registros de representación semiótica

En cuanto a los lenguajes utilizados apenas aparece el uso del lenguaje numérico, lo cual obliga al lector a realizar razonamientos sobre las figuras que, al no estar apoyadas por valores numéricos, pueden conducir a conclusiones falsas.

- Conflictos potenciales ligados a los conceptos

Por una parte, no se definen los extremos absolutos. La expresión extremo se utiliza para referirse tanto a los absolutos como a los relativos, pero en ocasiones se utiliza cuando únicamente se refiere a extremos relativos. Puede llevar a confusión a la hora de entender propiedades o procedimientos.

Por otra parte, observamos que en el texto se justifica la importancia de los problemas de optimización por la frecuencia en la que aparecen en múltiples ámbitos de la ciencia y de la vida cotidiana, sin embargo, no se presenta la definición explícita del mismo, que sería necesaria para aclaración del lector.

- Conflictos potenciales ligados a las propiedades

No se expone ninguna propiedad que justifique el uso del procedimiento relativo a la configuración CE-O para identificar los extremos relativos y en cambio sí se exponen y se demuestran para la configuración de la primera derivada y de la segunda derivada.

Observamos que el texto describe la propiedad que verifican los extremos con respecto a la primera derivada. Sin embargo, consideramos que debe indicar que solo se verifica para los extremos relativos (Figura 4.17), esto puede confundir al estudiante ya que puede aplicar esta propiedad a los extremos absolutos.

Condición necesaria de máximo o mínimo relativo en funciones derivables

Si $f(x)$ es derivable en x_0 y tiene un máximo o un mínimo en él, entonces $f'(x_0) = 0$. Es decir:

$$f(x) \text{ máximo o mínimo en } x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Figura 4.17: Condición necesaria de extremo relativo

- Conflictos potenciales ligados a los procedimientos

Para identificar los extremos relativos, a partir de los puntos singulares en funciones derivables, se presentan tres procedimientos correspondientes a las configuraciones CE-1D, CE-2D y CE-O. Sin embargo, no se explicitan ni las ventajas ni los inconvenientes de utilizar cada uno de ellos ni tampoco se ofrece un procedimiento para abordar situaciones donde las funciones no sean derivables.

Además, el procedimiento de la configuración CE-2D no se generaliza para derivadas sucesivas, pudiendo generar un conflicto en el estudiante en el caso en que tanto la segunda derivada como la tercera derivada en el punto singular fuesen cero.

Por otra parte, el procedimiento que se propone para la resolución de los problemas de optimización se centra en calcular los extremos absolutos de la función que describa la situación a optimizar, el criterio que se ofrece no se justifica, sino que se aplica de manera rutinaria. No se ofrece criterio para el caso de una función discontinua. Tampoco hay procedimiento para el encontrar la expresión analítica que describa el enunciado de la situación que se ha de optimizar considerándolo como dificultad para el estudiante.

- Conflictos potenciales ligados a los argumentos

Ausencia de justificación en la selección de un procedimiento con respecto a otro para identificar extremos relativos o resolver los problemas de optimización, por lo que alumno puede tener un conflicto para seleccionar el más apropiado para resolver cada situación concreta.

En ninguno de los ejemplos ni problemas resueltos se comprueba que la función cumpla las propiedades requeridas para poder aplicar correctamente los criterios. Sin embargo, se proponen dos situaciones en las cuales sí es necesario verificar la derivabilidad de la función para una correcta resolución (Figura 4.18).

26 Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y los mínimos de la función dada por:

$$y = |x^2 + 2x - 3|$$

27 Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.

Figura 4.18: Situaciones problemas donde la función no es derivable

En las situaciones en las que el dominio de definición de la función no es todo el conjunto de los números reales, no se argumenta la razón por la cual deben ser evaluados los extremos del intervalo del dominio de definición. Lo consideramos una dificultad ya que el Teorema de Weierstrass podría dotar de rigor al procedimiento y ayudar a que el alumno comprenda el proceso (Figura 4.19).

Cálculo de los extremos de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$

En los problemas de optimización, lo que interesa no son los extremos relativos de la función sino los absolutos. Veamos algunas reglas para obtenerlos:

a) Si $f(x)$ es derivable en $[a, b]$, los máximos y los mínimos absolutos están entre los puntos singulares y los correspondientes a los extremos del intervalo:

Por tanto, para hallarlos:

- Se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$.
- Se seleccionan las raíces $x_1, x_2, x_3, \ldots$ que están entre a y b.
- Se calcula $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots$ y $f(b)$.

Con estos valores se verá cuál es el máximo y cuál el mínimo.

Figura 4.19: Procedimiento para calcular los extremos absolutos

Algunas de las demostraciones son realizadas formalmente, sin una exposición intuitiva o gráfica, lo que dificultará la compresión del desarrollo de la misma por parte del alumno. Las consecuencias didácticas negativas para el estudiante de estas ausencias, en el caso de la derivada, ya se han descrito en el marco del EOS (Contreras et al., 2005 y Contreras, 2008).

Se utiliza una heurística general para abordar los problemas, Polya (1979), sin realizar interpretaciones ni reflexiones acerca de los resultados obtenidos lo que puede suponer una dificultad al alumno si comete un error procedimental o de cálculo y obtiene una solución que contradiga su intuición.

4.3.1.2. Configuraciones epistémicas y conflictos semióticos potenciales asociados al libro de texto de la editorial Santillana

A continuación, presentamos el análisis epistemológico del libro de texto de la editorial Santillana, el manual T2 de la muestra seleccionada en la Tabla 4.2, considerando las entidades primarias de la actividad matemática en cuanto a su distribución y el papel que se les asigna en el desarrollo de la optimización que está incluida en la unidad número nueve, titulada “Aplicaciones de la derivada”. Esta unidad está dividida en los siguientes epígrafes: antes de comenzar… recuerda (crecimiento y decrecimiento de una función, extremos relativos y absolutos, indeterminaciones en el cálculo de límites); crecimiento y decrecimiento; máximos y mínimos relativos; concavidad y convexidad; puntos de inflexión; optimización de funciones; Teorema de Rolle; Teorema del valor medio; Teorema del valor medio generalizado; regla de L’Hôpital, problemas resueltos; actividades y prepara tu selectividad.

A continuación, describimos los elementos de la configuración epistémica.

- Situaciones - problemas

En el manual se incluyen dos situaciones de optimización introductorias, una de ellas relacionada con la vida cotidiana y la otra una situación intramatemática. La primera hace alusión a una lectura en la que se pretende utilizar el menor número de ladrillos en la construcción de una habitación (Figura 4.20).

Resuelve el «problema de Charlie»: Se quiere adosar a una casa una habitación rectangular de 18 m^2. ¿Qué dimensiones debe tener para que su perímetro sea mínimo y utilizar el menor número de ladrillos posible?

Figura 4.20: Situación problema introductoria

La segunda situación corresponde a la gráfica de una función en la que se identifican extremos relativos y absolutos (Figura 4.21).

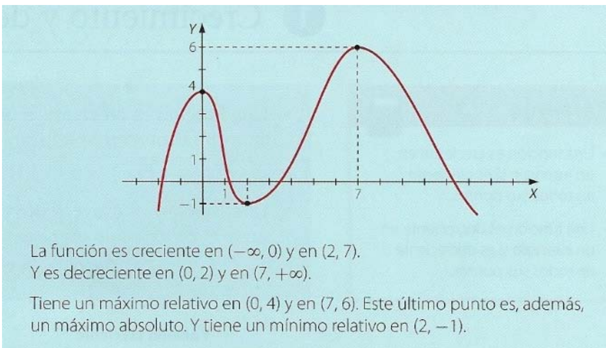


Figura 4.21: Situación problema introductoria

También se incluyen diez situaciones-problemas resueltos que ejemplifican los procedimientos y las propiedades introducidas, de los cuales, ocho hacen referencia a situaciones intramatemáticas (funciones, geometría plana y geometría espacial), uno hace referencia a fenómenos físicos relacionando la velocidad de un móvil con el consumo de carburante, y otro hace referencia a una situación de la vida cotidiana en la que se ha de diseñar un cartel cuyos márgenes cumplan ciertas condiciones para la impresión. De estas situaciones resueltas, siete están ubicadas después de los desarrollos teóricos para ilustrarlos. En concreto, se utilizan como ejemplo del procedimiento para hallar los extremos de una función mediante la primera derivada y la segunda derivada, para la condición suficiente y no suficiente de extremo y para la resolución de problemas de optimización, si la función es conocida dependiente de dos variables y con la función desconocida. El resto se ubica al final de la unidad para que el alumno consolide el aprendizaje.

Además, se proponen sesenta y siete situaciones-problemas contextualizados y no contextualizados para la ejercitación y aplicación de los objetos matemáticos introducidos, de los cuales cinco hacen referencia a situaciones de la vida cotidiana, tres referentes a aplicaciones de la economía, dos son aplicaciones de la física y el resto hacen referencia a situaciones intramatemáticas (geometría plana y espacial, aritmética y funciones). En la Figura 4.22 se ilustra algunos de los problemas propuestos.

13 Si el número de visitantes a un museo se obtiene mediante $f(x) = \dfrac{300x}{x^3+2}$, siendo x la hora desde su apertura, ¿cuándo recibe mayor número de visitantes?

14 Halla el número real x que minimiza esta función.
$$D(x) = (a-x)^2 + (b-x)^2 + (c-x)^2 \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

15 La capacidad de concentración de una saltadora de altura, en una competición de atletismo de tres horas de duración, viene dada por la función:
$$f(t) = 300t(3-t)$$
donde t mide el tiempo en horas. ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?

Figura 4.22: Algunos de los problemas propuestos

Como afirma González (2004), se incluyen problemas clásicos dotándolos de un contexto que justifica su relación con esta temática (Figura 4.23).

3 Se quieren fabricar latas de refresco cilíndricas de 500 cm^3, de manera que el coste de la chapa sea mínimo. Halla las dimensiones de la lata, sabiendo que su superficie lateral viene dada por la función $S(x, h) = 2\pi x^2 + 2\pi xh$.

Figura 4.23: Situación problema contextualizada

Considerando el enunciado de los problemas de optimización contextualizados que aparecen en este manual y basándonos en la categorización que se hace de éstos en Camacho y González (1998), se distribuyen tal y como se presenta en la Tabla 4.4.

Tipo de problema	**Fr**	**%**
números	3	3,90
ángulos	0	0
del nadador	1	1,30
inscribir/circunscribir unas figuras a otras	8	10,39
construcción de figuras minimizando el coste de material	17	22,08
distancia de puntos a funciones	6	7,79
de la valla	2	2,60
enunciados varios	9	11,69
encontrar los extremos relativos de una función	21	27,27
relación entre conceptos y propiedades matemáticos y formas de representación	10	12,99
	77	

Tabla 4.4: Frecuencia absoluta y relativa de las situaciones problema del manual T2 según enunciado

En primer lugar, el enunciado más frecuente pertenece a una categoría que hemos añadido: encontrar los extremos relativos de funciones dadas por su expresión analítica. En segundo lugar, el enunciado vinculado a la construcción de figuras minimizando el coste de material. En esta categoría se incluyen figuras geométricas planas en las que se tiene que minimizar el perímetro o maximizar área y figuras geométricas tridimensionales en las que se tiene que minimizar área o maximizar volumen. En tercer lugar, situaciones intramatemáticas en las que hay que aplicar conceptos y propiedades para descubrir la expresión analítica de la función o alguna de sus características. En la categoría de enunciados varios hemos incluido situaciones que tratan de buscar puntos de gráficas de funciones con pendiente de la recta tangente máxima, situaciones donde la expresión analítica describe un modelo económico para maximizar beneficios, diseñar un cartel rectangular que cumpla ciertas condiciones para minimizar el material y construcciones de figuras geométricas que cumplan ciertas restricciones.

- Registros de representación semiótica

Los RRS que prevalecen son el lenguaje natural y el algebraico. Se utilizan las representaciones numéricas desarrollando cálculos aritméticos y la representación gráfica como apoyo para facilitar la compresión del discurso.

- Conceptos

Al comienzo de la unidad se definen tanto los extremos relativos, o también llamados locales, como los extremos absolutos de una función utilizando la configuración de la ordenada, CE-O, utilizando el lenguaje natural (Figura 4.24). Sin embargo, en el resto de la unidad se hace referencia a los máximos y mínimos considerando exclusivamente extremos relativos sin explicitar esta precisión. Se define punto crítico como el punto donde se anula la primera derivada. Se incluye la definición de optimizar un proceso en el sentido de conseguir que una magnitud sea lo mayor o lo menor posible sujeta a unas condiciones.

f presenta un **máximo relativo** en x_0 si, en ese punto, la función pasa de ser creciente a decreciente, y un **mínimo relativo** si pasa de ser decreciente a creciente.

f presenta un **máximo absoluto** en x_0 si $f(x_0)$ es el mayor valor que toma la función, y un **mínimo absoluto** si $f(x_0)$ es el menor valor que toma la función.

Figura 4.24: Definición de extremos relativos y absolutos

- Propiedades

Se incluyen las propiedades siguientes: la condición necesaria de extremo relativo en funciones derivables utilizando las configuraciones de la tangente CE-T y de la primera derivada CE-1D, la condición suficiente para la existencia de extremo relativo utilizando la configuración CE-2D. No se demuestra ninguna de las proposiciones. La Figura 4.25 ilustra la conversión entre el RRS verbal y el gráfico para representación de la propiedad.

Si f presenta un máximo o un mínimo en un punto de abscisa x_0, la recta tangente en ese punto es horizontal y, por tanto, su pendiente es cero, es decir, $f'(x_0) = 0$.

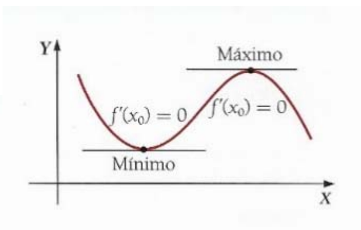


Figura 4.25: Extremo relativo según CE-T

- Procedimientos

Se abordan procedimientos para identificar extremos relativos y para la resolución de los problemas de optimización.

Para la identificación de extremos relativos de una función se propone el uso de las configuraciones CE-1D y CE-2D. La Figura 4.26 muestra uno de los procedimientos que se exponen en el manual para la identificación de los extremos relativos.

Cuando se anulan las dos primeras derivadas en un punto x_0, para decidir si en x_0 hay un punto de inflexión, un máximo o un mínimo tenemos que analizar la primera derivada no nula en dicho punto.

- Si esta derivada es de orden par: $\begin{cases} f^{n)}(x_0) < 0 \rightarrow x_0 \text{ máximo} \\ f^{n)}(x_0) > 0 \rightarrow x_0 \text{ mínimo} \end{cases}$
- Si es de orden impar: $f^{n)}(x_0) \neq 0 \rightarrow x_0$ punto de inflexión

Figura 4.26: Procedimiento para la identificación de los extremos relativos mediante CE-2D

El procedimiento para la resolución de los problemas de optimización se reduce a encontrar el máximo o el mínimo de una función. Se diferencian tres casos: que la función sea conocida, que dependa de dos variables y que la función sea desconocida.

En el primer caso el procedimiento a seguir consiste en hallar la derivada de la función y determinar los valores en los que se anula, clasificar el punto crítico en máximo o mínimo y por último interpretar la solución. En el segundo caso se propone expresarla en función de una de ellas para remitirnos al primero caso. En el tercero se propone identificar los datos para expresar, en función de las variables, la magnitud que tenemos que optimizar remitiéndonos al primer caso.

- Argumentos

Para justificar que todos los puntos críticos no son extremos relativos se utiliza un contraejemplo con registro de representación gráfico (Figura 4.27). No se argumentan ni las proposiciones ni los procedimientos.

Ejemplo

1 Decide si la función $f(x) = x^3$ tiene algún máximo o mínimo.

$f'(x) = 3x^2 \rightarrow 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = 6x \rightarrow f''(0) = 0$

Observa que, al representar la gráfica de la función, $f(x)$ es creciente a la izquierda de 0 y también a la derecha.

Por tanto, en esta función $f'(0) = 0$, y no es un máximo ni un mínimo.

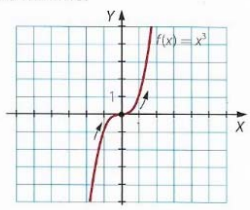


Figura 4.27: Punto de inflexión

La Figura 4.28 sintetiza los principales componentes de la configuración epistémica, formada por el sistema de objetos y las relaciones implicadas asociada a la optimización descrita en el libro de texto T2.

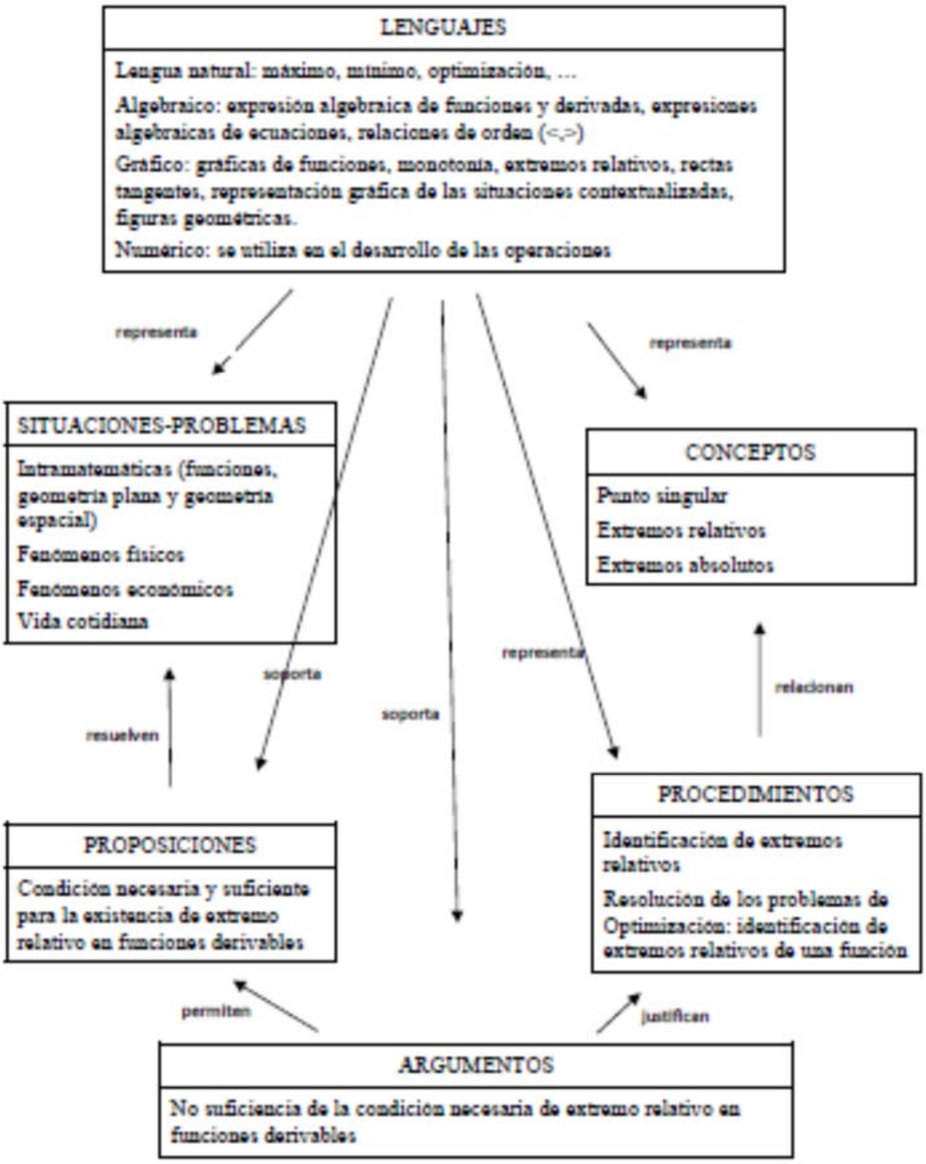


Figura: 4.28: Configuración epistémica de la optimización del libro de texto T2. Inspirada en Godino, Font y Wilhelmi (2006)

Una vez realizada la configuración epistémica de la optimización en la unidad didáctica, proseguimos con el análisis, identificando las posibles dificultades que puede presentar el alumnado en el proceso del aprendizaje de la optimización. A continuación, describimos los conflictos semióticos potenciales asociadas a las prácticas propuestas en el libro de texto de la editorial Santillana (T2) identificados para cada uno de los tipos de objetos matemáticos considerados en nuestro estudio.

- Conflictos potenciales ligados a las situaciones-problemas

La situación introductoria utilizada para fundamentar la enseñanza de la optimización consideramos que es poco motivadora para los alumnos de este nivel ya que está alejada de sus intereses.

Los ejemplos que se utilizan para facilitar la compresión del lector están en consonancia con el discurso teórico. No se abordan situaciones en las que la función presente puntos no derivables o discontinuidades, siendo probablemente estas cuestiones las que mayores dificultades presenten para los alumnos.

Tal como indica González (2002), como consecuencia de buscar contextos que doten de sentido a la optimización, se plantea una situación en la que la función definida es discreta (Figura 4.29).


13 Si el número de visitantes a un museo se obtiene mediante $f(x) = \dfrac{300x}{x^3+2}$, siendo x la hora desde su apertura, ¿cuándo recibe mayor número de visitantes?

Figura 4.29: Situación-problema aplicada a la economía

- Conflictos potenciales ligados a los registros de representación semiótica

En cuanto a los registros de representación se prioriza el lenguaje simbólico, se recurre al numérico en el desarrollo de los procesos de los ejemplos, pero el gráfico apenas se utiliza, aunque podría clarificar los desarrollos teóricos.

- Conflictos potenciales ligados a los conceptos

Los conceptos tanto de los extremos relativos como de los extremos absolutos solo se presentan al alumno de manera intuitiva restringiendo su significado. Tal como indica Moreno y Cuevas (2004), los errores cometidos por los estudiantes al enfrentarse a problemas no rutinarios de cálculo diferencial, están asociados a aspectos conceptuales que carecen de significado.

Se utiliza la noción de extremo para referirse a los extremos relativos, consideramos que puede crear confusión en el alumno a la hora de tener que distinguirlos en procedimientos o propiedades (Figura 4.30).

Se restringe el concepto de la optimización considerándola como un proceso para conseguir que una magnitud sea lo mayor o lo menor posible sujeta a unas condiciones. Esto puede conllevar a que el alumno no adquiera el significado global.

- Conflictos potenciales ligados a las proposiciones

Consideramos como conflicto que, en propiedad es como la que se muestra en la Figura 5.31, exclusivas de extremos relativos se utiliza la noción de extremo ya que puede que el alumno también lo aplique en extremos absoluto.

- Una función $f(x)$ tiene un **máximo** en $x = x_0$ si la derivada primera se anula y la derivada segunda es negativa en dicho punto.

  $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0 \rightarrow f(x)$ tiene un máximo en $x = x_0$.
- Una función $f(x)$ tiene un **mínimo** en $x = x_0$ si la derivada primera se anula y la derivada segunda es positiva en dicho punto.

  $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0 \rightarrow f(x)$ tiene un mínimo en $x = x_0$.

Figura 4.30: Definición extremo según CE-2D

- Conflictos potenciales ligados a los procedimientos

Solo se consideran dos tipos de procesos para identificar los extremos relativos a partir de los puntos singulares en funciones derivables: el criterio de la primera derivada y el criterio de la segunda derivada. El procedimiento para resolver problemas de optimización se simplifica a encontrar el extremo relativo de una función que describa la situación y en todos los casos dicho extremo coincide con el absoluto. No se resuelve ningún problema donde la función esté definida en un intervalo cerrado y acotado y el extremo relativo no sea el absoluto. Esto puede suponer una dificultad en el alumno si no es capaz por sí mismo de advertir la diferencia.

No se considera una situación que esté delimitada por unas condiciones en las que haya que considerar la función en un intervalo cerrado y acotado, teniendo en cuenta los extremos absolutos. No se ofrece criterio para el caso de una función no derivable ni discontinua.

- Conflictos potenciales ligados a los argumentos

No se argumentan las ventajas e inconvenientes que cada procedimiento presenta sobre los otros para identificar los extremos relativos, por tanto, al alumno no se le dota de criterio para la elección adecuada en cada caso. Además, no se comprueba que la función cumpla las propiedades necesarias para poder aplicar correctamente los criterios.

Se utiliza una heurística general para abordar los problemas, que consiste en aplicar de manera sistemática estos cuatro pasos, Polya (1979): análisis del enunciado e identificación de términos, diseño de resolución, resolución y valoración, aunque no se hacen interpretaciones ni reflexiones acerca de los resultados obtenidos. Tanto la fase del diseño como la de la resolución son muy guiadas, lo que puede suponer una dificultad al alumno a la hora de abordar otro tipo de situaciones de optimización que no se resuelvan con la secuencia aprendida.

Una vez realizado el análisis epistémico de los libros de texto T1 y T2, observamos que las configuraciones epistémicas que predominan son las vinculadas al cálculo diferencial: CE-1D y CE-2D aunque también aparecen las configuraciones CE-O y CE-T para conectar con los conocimientos previos del alumnado.

Con respecto a las situaciones-problemas incluidas en ambos manuales se presentan con mayor frecuencia la construcción de figuras minimizando el coste y en los que se relacionan conceptos y propiedades de la optimización. El manual T2 incluye más situaciones de aplicación a economía y a la vida cotidiana que el manual T1.

En cuanto a los registros de representación semiótica, una diferencia destacable entre ambos manuales es que T1 utiliza un lenguaje más formal priorizando el registro algebraico, mientras que T2 recurre a descripciones verbales para facilitar al lector la comprensión del lenguaje algebraica.

Los dos manuales ofrecen las herramientas del cálculo diferencial para la resolución de problemas. Sin embargo, para el criterio de la segunda derivada el manual T2 generaliza la condición suficiente para orden n de la derivada.

El manual T2 enuncia las propiedades, pero no las demuestra, mientras que T1 las demuestra formalmente dotando de rigor a la Matemática.

En ambos textos la entidad procedimental prevalece sobre la argumentativa.

4.3.2. Segunda fase: Análisis ontosemiótico de problemas resueltos

Es reconocido de manera general en Didáctica de las Matemáticas, que la resolución de problemas es una temática de una gran importancia en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Esto se refleja en la sección 1 de este capítulo, que habla de la optimización en el currículo de Bachillerato. Así, la Orden de 5 agosto de la Junta de Andalucía reconoce la incidencia positiva de la resolución de problemas al señalar: "Es el elemento básico de la actividad matemática misma. La resolución de problemas constituye en sí misma la esencia del aprendizaje y debe estar presente en todos los núcleos temáticos de esta materia".

Sin embargo, de las buenas intenciones de una Orden educativa a la realidad del aula hay un camino didáctico de dificultades. ¿Qué hace el profesor en su clase? Resolver muchos problemas y aclarárselos a sus alumnos, en espera que pudiera haber una interiorización por parte de éstos. Pero nuestra experiencia en el aula, al enseñar la optimización, nos dice que la realidad es muy distinta. ¿Cómo es posible que alumnos que vieron muy claro un modelo gráfico para resolver un problema, cuando se ven ante otro distinto fracasan en su intento de buscar un modelo que les ayude en la solución? Achacarle, como hace el modelo cognitivo ya conocido, a las deficiencias intelectuales de esos alumnos es desolador. ¿Qué hago, esperar a que madure el alumno y supere esas supuestas deficiencias intelectuales? Puede que se me pase el curso.

Creemos que es lo idóneo buscar salidas de tipo didáctico, proponiendo situaciones-problema cuya elaboración esté basada en un marco teórico eminentemente pragmático, en el que el análisis de la actividad matemática tenga suficientes herramientas para poder obtener éxito en la propuesta de dichas situaciones de enseñanza.

Teniendo en cuenta los discursos anteriores, se ha elaborado esta segunda fase del análisis que busca profundizar en la complejidad ontosemiótica del objeto matemático optimización en segundo de Bachillerato.

Para comprender las dificultades y conflictos de aprendizaje de los estudiantes, es necesario analizar las tareas matemáticas y los diversos modos de abordarlas. En la actividad práctica de analizar un problema, el lenguaje es fundamental ya que representa las entidades conceptuales, proposicionales y procedimentales y sirven de herramienta para la realización de algoritmos y la elaboración de argumentos justificativos. El lenguaje puede dirigir la solución que se aporte al problema.

En este apartado aplicamos dos herramientas teóricas diferentes: las nociones de registro de representación semiótica de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y la configuración ontosemiótica del Enfoque Ontosemiótico para analizar la actividad matemática implicada en la resolución de problemas de optimización incluidos en los dos manuales que estamos analizando. Consideramos los resultados de la investigación de Pino-Fan et al. (2015), Godino et al. (2016) y Giacomone (2017) sobre la articulación de la TRRS y el EOS donde se revela el potencial de la complementariedad del análisis epistémico y cognitivo de ambas teorías.

La resolución de los problemas de optimización articula diversos recursos operatorios lingüísticos, conceptuales, proposicionales y argumentativos que deben ser dominados para lograr competencia en dicha resolución (Godino, Font y Wilhelmi, 2006). Para analizarlo, describiremos tanto las prácticas matemáticas, como los registros de representación semiótica, los objetos y los procesos implicados en la resolución. El análisis ontológico-semiótico propuesto por el EOS ofrece un instrumento para reflejar las relaciones entre objetos matemáticos (función semiótica) y los procesos interpretativos en las prácticas matemáticas (Godino, 2002; Godino et al., 2007).

La finalidad es identificar las posibles dificultades de los estudiantes en el aprendizaje matemático, conflictos semióticos potenciales, al revelar la trama de objetos que intervienen en la actividad matemática y las relaciones sinérgicas entre los mismos.

A continuación, describimos el análisis ontosemiótico realizado a un problema resuelto en uno de los manuales. Hemos segmentado el enunciado y la solución de la situación-problema en prácticas elementales. En un primer nivel nos centramos en identificar los registros de representación semiótica, los objetos matemáticos y la intencionalidad de las prácticas elementales y en el segundo en el reconocimiento de los procesos que se ponen en juego y los conflictos semióticos potenciales.

4.3.2.1. Primer nivel de análisis: Registros de representación semiótica y configuración epistémica

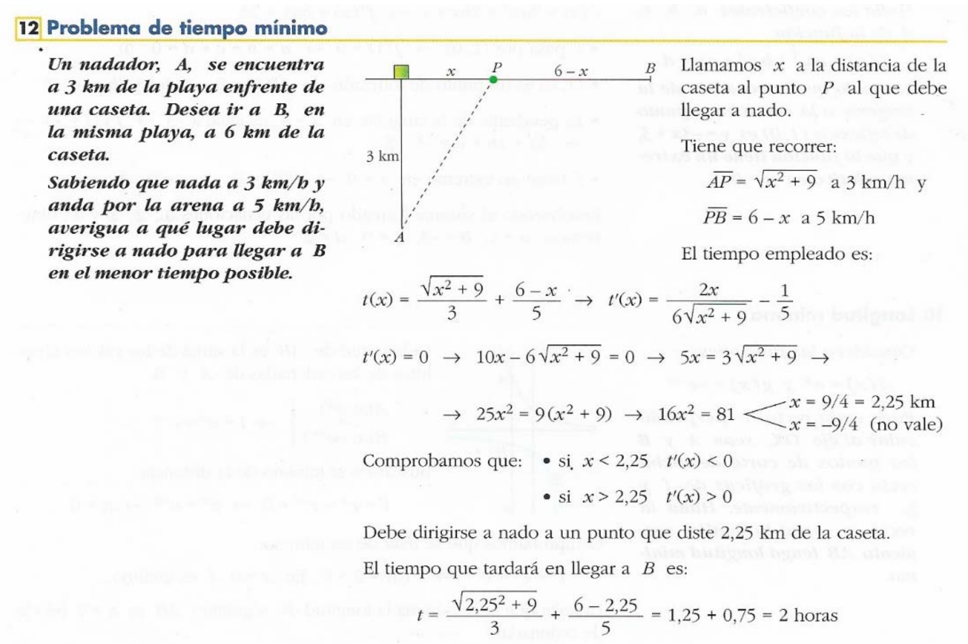
En este punto vamos a analizar el enunciado y la solución de una situación-problema resuelto (ofrecidos por los libros de texto) aplicando herramientas teóricas de la TRRS y del EOS. Para ello, descomponemos el enunciado y su resolución de cada tarea en unidades de análisis correspondientes a la secuencia de prácticas matemáticas operativas y discursivas. Esta descomposición permite realizar análisis más detallados de la actividad matemática que se pone en juego en la resolución del problema. De cada práctica matemática analizamos el papel, rol o función, que desempeña en el proceso resolutivo, así como su intencionalidad, los registros de representación semiótica y los objetos puestos en juego en las prácticas.

Sintetizamos el análisis ontosemiótico descrito anteriormente, donde indicamos cada práctica elemental en la que hemos dividido las prácticas matemáticas del enunciado y resolución de la situación problema (PRi) y la secuenciación de estas. Para cada práctica PRi identificaremos tres aspectos: la función o la intencionalidad que desempeña en el proceso resolutivo (F), los registros de representación semiótica (RRS), lenguaje natural (RRL), numérico (RRN), algebraico (RRA), figural (RRF) y gráfico (RRG), y los objetos (OBJ): conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos. La información se presenta en una tabla donde las filas contendrán cada uno de los aspectos descritos de la siguiente manera (Tabla 4.5).

PRi	**Práctica elemental**
F	Función o intencionalidad que desempeña en el proceso resolutiva
RRS	Registros de representación semiótica: lenguaje natural (RRL), numérico (RRN), algebraico (RRA), figural (RRF) y gráfico (RRG)
OBJ	Conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos

Tabla 4.5: Modelo de análisis de las prácticas elementales

En la Figura 4.31 se muestra el enunciado y la resolución de la situación problema que hemos seleccionado para aplicar el análisis, perteneciente al manual T1 e ilustra el modo de resolver un problema de optimización.



12 Problema de tiempo mínimo

Un nadador, A, se encuentra a 3 km de la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B, en la misma playa, a 6 km de la caseta.

Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, averigua a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.

Llamamos x a la distancia de la caseta al punto P al que debe llegar a nado.

Tiene que recorrer:

$\overline{AP} = \sqrt{x^2+9}$ a 3 km/h y

$\overline{PB} = 6 - x$ a 5 km/h

El tiempo empleado es:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5} \rightarrow t'(x) = \frac{2x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}$$

$$t'(x) = 0 \rightarrow 10x - 6\sqrt{x^2+9} = 0 \rightarrow 5x = 3\sqrt{x^2+9} \rightarrow$$

$$\rightarrow 25x^2 = 9(x^2+9) \rightarrow 16x^2 = 81 \begin{cases} x = 9/4 = 2{,}25 \text{ km} \\ x = -9/4 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

Comprobamos que:
- si $x < 2{,}25$ $t'(x) < 0$
- si $x > 2{,}25$ $t'(x) > 0$

Debe dirigirse a nado a un punto que diste 2,25 km de la caseta.

El tiempo que tardará en llegar a B es:

$$t = \frac{\sqrt{2{,}25^2+9}}{3} + \frac{6-2{,}25}{5} = 1{,}25 + 0{,}75 = 2 \text{ horas}$$

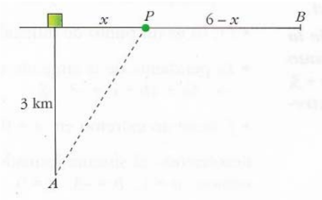
Figura 4.31: Enunciado y solución de la situación-problema

Resaltar que este tipo de problema fue incluido por L'Hôpital en su obra "Analyse des infiniments petits, pour l'intelligence des lignes courbe" resolviéndolo por el criterio de la primera derivada (Santiago,2008). El tipo de situación corresponde a la categoría del problema del nadador (velocidades distintas en medios distintos) presentada en la investigación de Camacho y González (1998) y está considerado como uno de los tipos de problemas que se incluyen de forma general en los libros de texto.

En la Tabla 4.6 y en la Tabla 4.7 sintetizamos el análisis del enunciado y su resolución, descompuesta en las unidades correspondientes a las prácticas elementales identificando la funcionalidad, los registros de representación semiótico y las entidades primarias: conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos.

Enunciado de la situación-problema	
PR1	*Un nadador, A, se encuentra a 3 km de la playa enfrente de una caseta. Desea ir a B, en la misma playa, a 6 km de la caseta.* *Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h,*
F	Contextualizar el problema; presentar los datos
RRS	RRL, RRN, RRA Relación entre lenguaje natural y notación simbólica para delimitar posición inicial y final 3 km, 6 Km Medidas de cantidades de la magnitud longitud, cantidades extensivas
OBJ	Concepto: distancia
PR2	*averigua a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a B en el menor tiempo posible.*
F	Presentar la situación problemática que se pretende resolver
RRS	RRL, RRN, RRA 3 Km/h, 5 Km/h, Medidas de cantidades de la magnitud velocidad, cantidades intensivas
OBJ	Conceptos: velocidad, menor tiempo Propiedad: relación de la velocidad en distintos medios y el tiempo

Tabla 4.6: Análisis conjunto de las prácticas elementales del enunciado

Solución de la situación-problema realizada en el libro de texto	
PR3	
F	Presentar esquema gráfico de la situación problema
RRS	RRF, RRA
OBJ	Procedimiento: Transformar la situación enunciada en un esquema gráfico interpretando las condiciones
PR4	Llamamos x a la distancia de la caseta al punto P al que debe llegar a nado.
F	Asociar una variable a la cantidad de la magnitud que se pide minimizar
RRS	RRL, RRA "x" representa el valor de la distancia de la caseta al punto de cambio de medio "P" representa el punto donde se cambia de medio
OBJ	Definición: distancia Procedimientos: Identificar la variable
PR5	Tiene que recorrer: $\overline{AP} = \sqrt{x^2+9}$ a 3 km/h y $\overline{PB} = 6 - x$ a 5 km/h
F	Formular las distancias con respecto al punto de cambio de medio
RRS	RRA, RRL $\overline{\text{AP}}$, $\overline{\text{PB}}$, Distancia del segmento de extremos A y P , P y B "=" Representa la igualdad entre dos expresiones
OBJ	Procedimiento: Calcular la longitud de un segmento Argumento: de tipo deductivo basada en la definición de distancia entre puntos
PR6	El tiempo empleado es: $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{6-x}{5} \rightarrow t'(x) = \frac{2x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{5}$
F	Definir la función que formaliza la situación problema
RRS	RRA, RRL

	$t(x)$ función expresada analíticamente
OBJ	Concepto: velocidad Procedimiento: definir el tiempo a minimizar en función de la distancia Propiedad: suma de funciones Argumento: de tipo deductivo a partir de los datos
PR7	$t'(x) = \dfrac{2x}{6\sqrt{x^2+9}} - \dfrac{1}{5}$ $t'(x) = 0 \rightarrow 10x - 6\sqrt{x^2+9} = 0 \rightarrow 5x = 3\sqrt{x^2+9} \rightarrow$ $\rightarrow 25x^2 = 9(x^2+9) \rightarrow 16x^2 = 81 \rightarrow \begin{cases} x = 9/4 = 2{,}25 \text{ km} \\ x = -9/4 \text{ (no vale)} \end{cases}$
F	Identificar puntos singulares interpretando las condiciones del problema
RRS	RRA, RRN $t'(x)$ función derivada
OBJ	Procedimientos: calcular la primera derivada, resolver la ecuación de la derivada igualada a 0 y descartar posibles soluciones según las condiciones del problema Propiedades: derivación de la suma y composición de funciones, naturaleza de la magnitud distancia Argumento: de tipo deductivo a partir de los datos
PR8	Comprobamos que: • si $x < 2{,}25$ $t'(x) < 0$ • si $x > 2{,}25$ $t'(x) > 0$
F	Identificar mínimo relativo mediante el criterio de la primera derivada
RRS	RRN, RRA, RRL “$<, >$” Orden “menor que” ,“mayor que”
OBJ	Procedimiento: Evaluar t' en el entorno del posible extremo Propiedad: Condición de mínimo Argumento: basada en cálculos aritméticos
PR9	Debe dirigirse a nado a un punto que diste 2,25 km de la caseta. El tiempo que tardará en llegar a B es: $t = \dfrac{\sqrt{2{,}25^2+9}}{3} + \dfrac{6-2{,}25}{5} = 1{,}25 + 0{,}75 = 2$ horas
F	Interpretar la solución obtenida
RRS	RRL, RRA, RRN
OBJ	Procedimiento: evaluar la función en el mínimo Argumento: de tipo deductivo basado en cálculos aritméticos

Tabla 4.7: Análisis conjunto de las prácticas elementales de la solución

El enunciado de la situación problema ha sido divido en dos prácticas elementales, PR1 y PR2, y la resolución ha sido secuenciada en siete prácticas numeradas desde PR3 hasta PR9. El análisis profundo que hemos realizado describe la función que desempeña de cada práctica elemental en el proceso resolutivo, así como identificar de manera pormenorizada los registros de representación semiótica y objetos matemáticos involucrados. Esta herramienta nos permite proporcionar una explicación de las posibles causas de las dificultadas que pueden experimentar los estudiantes a propósito de este problema. Complementamos esta descripción con el segundo nivel de análisis.

4.3.2.2. Segundo nivel de análisis: Procesos matemáticos y conflictos semióticos potenciales

En este punto nos centramos en identificar los procesos matemáticos que intervienen en la solución del problema, aunque antes de esto es necesario clarificar los procesos en el EOS que intervienen en nuestro trabajo y sus relaciones con la función semiótica. Font y Rubio (2017), indican que un proceso matemático es una secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea matemática (entrada).

En Giacomone (2017) se realiza un análisis ontosemiótico de una tarea matemática en que se destacan las relaciones entre algunos procesos matemáticos y las funciones semióticas. Se considera que el profesor de matemáticas debe conocer y comprender la idea de configuración de objetos y procesos, y usarla de manera competente para la elección de las tareas.

Las prácticas y objetos de la resolución de cada tarea que realiza implícitamente el sujeto epistémico ponen de manifiesto procesos de representación y significación que identificaremos mediante funciones semióticas, en las cuales, las prácticas elementales serán la expresión o antecedente, y los objetos, los contenidos o significados. En particular, se pueden analizar estas transformaciones según funciones semióticas, tratamientos y conversiones entre registros de representación semiótica. De este modo es posible explicar los posibles conflictos y no congruencias que tienen lugar en tales transformaciones.

Para Font y Contreras (2008) los procesos de materialización-idealización están asociados a la dualidad ostensivo-no ostensivo. Los objetos matemáticos son, en general, no perceptibles, sin embargo, son usados en las prácticas públicas a través de sus ostensivos asociados (notaciones, signos, gráficos, etc.).

Los procesos de particularización-generalización están asociados a la dualidad extensivo-intensivo. Un objeto extensivo es usado como un caso particular, mientras que un intensivo es una clase.

La dualidad unitario-sistémico está ligada a los procesos de reificación (constitución de objetos como una totalidad) y descomposición (inversa).

A partir de la Tabla 4.6 y la Tabla 4.7 se discute, a continuación, el papel que algunos de los procesos juegan en la aparición de los objetos implicados, tanto en el enunciado como en la construcción de la solución de la Figura 4.31.

- Procesos de representación-significación:

Primero describimos los tratamientos y conversiones que se han sucedido a lo largo del enunciado y resolución de la situación-problema según la secuencia de las prácticas elementales numeradas.

Se inicia el problema con el enunciado (PR1 y PR2). Aparecen los RRS siguientes: el RRS natural escrito, aunque hay alusión al RRS numérico (datos de distancia y velocidades) y, de manera implícita, al RRS algebraico (denotar posiciones).

La solución del problema comienza en la práctica PR3 donde se efectúa de manera implícita una conversión no congruente del RRS del lenguaje natural escrito al RRS figural, mediante un esquema de situación (la no congruencia se basa en que la posición del punto P no está explícitamente indicada en el enunciado no cumpliéndose la univocidad semántica). Paralelamente, en las prácticas PR4 y PR5 se efectúa una conversión congruente del RRS del lenguaje natural escrito al RRS algebraico, denotando las posiciones del individuo y las fórmulas de las distancias que debe recorrer. Esta última conversión congruente, según la teoría de registros, no es causa de errores por parte de los alumnos, pero la experiencia nos dice que esto, con frecuencia no es cierto, ya que los estudiantes suelen quedarse bloqueados. Es decir, la Teoría de Registros no puede dar explicaciones para ciertos errores.

Sin embargo, si recurrimos al Enfoque Ontosemiótico, en concreto a las funciones semióticas, vemos que, para una solución correcta, el alumno debe realizar primeramente una función semiótica (de antecedente, el lenguaje figural correspondiente a la recta AP, y de consecuente, la proposición del teorema de Pitágoras); una segunda función semiótica (de antecedente, el lenguaje figural correspondiente a la recta BP, y de consecuente el lenguaje algebraico). Por último, otra función semiótica, que nos dará la función distancia, (de antecedente, las dos funciones semióticas anteriores, y de consecuente, el lenguaje algebraico y el concepto de función suma).

Dado que el alumno no suele realizar, de modo secuencial, estas funciones semióticas, podemos encontrarnos con conversiones congruentes (no conflictivas para Duval), pero que llevan al fracaso al alumno. Con la aplicación del constructo del EOS "función semiótica", vemos que hay una explicación a tal fracaso.

Posteriormente, en PR6 y PR7 se realiza un tratamiento dentro del registro algebraico para definir y derivar la función, expresar y resolver la ecuación obteniendo los puntos singulares. Se realiza otra conversión al sistema algebraico de las ecuaciones y, por último, se resuelve el problema en el registro discursivo y aritmético. En PR8 mediante el RRS algebraico y numérico se obtiene la solución y en PR9 mediante RRS algebraico, numérico y natural se contextualiza.

A continuación, explicamos en la Tabla 4.8 los conflictos semióticos potenciales asociados a las entidades que hemos identificado en cada práctica elemental.

Prácticas elementales	**Posibles conflictos semióticos**
PR3	Propiedad: no relacionar la longitud del segmento PB con la distancia total y la distancia de la caseta al punto P Procedimiento: realizar incorrectamente el diagrama que representa la situación problema
PR4	Procedimiento: error en la identificación de la incógnita
PR5	Concepto: no conocer la fórmula de la distancia entre dos puntos
PR6	RRA: uso incorrecto de la notación $t(x)$ Conceptos: no conocer la fórmula de la velocidad Procedimientos: no formular correctamente la situación-problema mediante una función en forma analítica
PR7	RRA: uso incorrecto de la notación $t'(x)$ Procedimientos: no calcular correctamente la primera derivada, no resolver correctamente la ecuación radical Argumento: no discriminar soluciones por la naturaleza de la magnitud
PR8	Propiedad: no conocer el criterio de la primera derivada Procedimiento: no evaluar correctamente en la función $t'(x)$
PR9	Argumento: No interpretar el resultado obtenido

Tabla 4.8: Posibles conflictos semióticos asociados a las practicas

- Procesos de materialización-idealización:

En el caso del procedimiento de la práctica PR3, se trata de determinar un lugar idealizado, lo cual implica el reconocimiento de ciertos objetos no ostensivos, se utiliza la representación gráfica para materializar una situación ideal.

Otro ejemplo son las prácticas PR6 y PR7, las cuales movilizan una serie de objetos no ostensivos, como es la función irracional, variables dependientes, independientes..., que son necesarios para el trabajo matemático.

- Procesos de particularización-generalización:

En la práctica PR3 se considera el gráfico como ejemplar de un cierto tipo de situación. Se espera que el alumno transforme de lo general a lo particular a (punto P).

En la práctica PR5 la expresión $t(x)$ es un ejemplar del tipo tiempo invertido en función de la distancia. Se utilizan fórmulas generales y se aplican a los casos particulares del problema. Las fórmulas referidas a la distancia entre puntos están particularizadas a los datos del problema.

- Procesos de descomposición-reificación:

La dualidad unitario-sistémico está ligada a los procesos de reificación (constitución de objetos como una totalidad) y descomposición (inversa). En este caso, se trata de un gráfico presentado ostensivamente, que interviene como un todo unitario que debe ser descompuesto en diferentes elementos: distancia de la caseta a un punto P genérico, sumas de distancias, …

Con estos dos niveles queda mostrada la complejidad ontosemiótica de esta tarea matemática. El aporte de la herramienta de los registros de representación semiótica de Duval, con los tratamientos y conversiones, nos permite ahondar en el análisis de los elementos lingüísticos considerados como entidad primaria en el EOS. Por otra parte, la noción de configuración de objetos y procesos nos han facilitado la profundización en los conocimientos implicados en las transformaciones que debe realizar un sujeto para resolver con éxito la tarea. Esto ayuda a que el profesor identifique cuáles son los conflictos de significado con las que se puede encontrar el alumno y así diseñar una estrategia metodológica adecuada para abordar dichos conflictos en el aula. La finalidad es lograr que el objeto matemático optimización emerja en el alumno y este sea capaz de abordar la realización de las prácticas para resolver este tipo de problemas.

Capítulo 5

Significado institucional implementado

5.1. Introducción a la investigación sobre los apuntes de clase de Matemáticas

Como señalan Arce, Conejo y Ortega (2016), existen numerosos estudios sobre la toma de apuntes en alumnos en las clases de Matemáticas. Es decir, no se trata de un asunto baladí, sino un proceso de alto nivel cognitivo, que se relaciona con la comprensión y la síntesis de la información que el profesor presenta ante el estudiante. Para desarrollar su investigación acerca de la trascripción, por parte de los alumnos, del contenido matemático expuesto por los profesores, estos investigadores utilizan como marco teórico el análisis de contenido, que es una etapa del análisis didáctico. El análisis de contenido se define como un conjunto de procedimientos estrictos y sistemáticos para el análisis riguroso, el examen y verificación de los contenidos de datos escritos (Cohen, Manion y Morrison, 2001), y puede ayudar a los profesores a descubrir patrones en el discurso, contrastar una hipótesis previa o inferir significados interpretativos en el texto.

En su investigación, Arce et al. diferencian tres dimensiones en el análisis de contenido: la estructura conceptual (sistema organizado de conceptos y de procedimientos, junto con las relaciones existentes entre ellos, sus propiedades y criterios de veracidad, que dan lugar a la estructura matemática que los organiza y justifica), la fenomenología (incluye aquellas situaciones, contextos o problemas que dan origen a la estructura conceptual) y los sistemas de representación (todas aquellas expresiones, signos, símbolos o gráficos a través de los cuales se hace presente un contenido matemático, de modo que permiten la comunicación de ideas matemáticas). En los análisis efectuados se observaron tres patrones de comportamiento de los estudiantes en la toma de apuntes: exhaustivo, si el alumno recoge todos los ejemplos expuestos en clase por el profesor; selectivo-estratégico, si recoge al menos un ejemplo; y ausencia de relaciones, si no utiliza ningún ejemplo.

Aunque en este trabajo se persiguieron objetivos que son distintos a los de mi Memoria, interesa resaltar algunos resultados y conclusiones del mismo de cara a utilizar algunos aspectos interesantes que sí tienen que ver con mi propia investigación. Por una parte, en los apuntes de los alumnos predomina un enfoque procedimental y simbólico, influido por la pizarra, unido a una transcripción muy baja de los elementos de naturaleza relacional presentes en el discurso oral. Es decir, las justificaciones, que permiten relacionar enunciados y sistematizar de forma lógica su desarrollo, son generalmente poco transcritas por los estudiantes. Sin embargo, los alumnos de gran nivel de comprensión matemática sí aportan transcripciones bastante completas en cuanto a los elementos de naturaleza relacional, es decir, tienen muy en cuenta la naturaleza e importancia del contenido presentado por el profesor.

La repercusión del trabajo de Arce et al. en mi investigación es doble; por un lado, dado que estos investigadores han mostrado que los alumnos de gran nivel de comprensión matemática aportan transcripciones bastante completas del contenido de la clase, en mi investigación utilizo alumnos considerados buenos en Matemáticas como muestra del significado implementado en clase; por otro, a estos estudiantes se les dio la consigna de que tuvieran un comportamiento exhaustivo en cuanto a recoger en sus apuntes todos los ejemplos propuestos en la clase.

Por otra parte, como se indica en Fried y Amit (2003), el que el profesor revise el material que los estudiantes recogen en sus apuntes de clase puede ser perjudicial de cara a la objetividad de dichos apuntes. Por tanto, en la investigación se han analizado los apuntes de los alumnos sin ningún tipo de intermediación del profesor.

En cuanto al significado implementado, Nogueira (2005) realizó una investigación sobre la toma de apuntes de alumnos universitarios de primer año, que no habían tenido en la escuela secundaria un entrenamiento en lectura y escritura satisfactorios en relación a las demandas de la universidad. Se reconocieron diversos estilos y distintos tipos de apuntes, distinguiendo entre los verbatim, que tratan de copiar toda la clase -como si ella fuera un dictado-, de los que seleccionan enunciados docentes y los registran en un texto bien organizado que integra sus diversas fuentes, orales o escritas. Por tanto, en nuestra investigación se les dio instrucciones a los alumnos que tomaron los apuntes de clase para que siguieran la segunda línea de actuación, de cara a que lograran unos apuntes lo más cercanos posible al significado institucional implementado. En el mismo sentido de tratar de huir del modelo de la toma de apuntes como el de absorber todo lo que se dice, Teng (2011) describe la organización como la mejor estrategia de la toma de apuntes, que es como un explorador que marca un rastro en una expedición. El instructor es la guía de los oyentes en un viaje, y tienen que marcar el seguir lo más claramente posible para que puedan volver sobre su camino más tarde.

Respecto a que los apuntes puedan reflejar las estrategias de enseñanza del profesor, en Salgado-Horta y Maz-Machado (2013) se señala que el dilema referido a la mejor manera de enseñar procedimientos de anotación no debería seguir centrándose en la dicotomía codificación vs. almacenamiento, sino que convendría reorientar la enseñanza en otra dirección: asegurar que el estudiante actúe estratégicamente cuando toma notas en clase, es decir que seleccione y aplique intencionalmente unos procedimientos de anotación en función de unos objetivos de aprendizaje y de las condiciones de la situación educativa que se plantea, siendo la estrategia de enseñanza que utiliza el profesor una de las condiciones más relevantes. En este sentido, a los alumnos de nuestra investigación se les informó para que los apuntes que tomaran realizaran, a ser posible, una mirada hacia el comportamiento didáctico del profesor en el aula.

Dentro del enfoque ontosemiótico han sido muy pocos los trabajos que han utilizado los apuntes de aula de los alumnos de cara a la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Siguiendo la línea de investigación en Didáctica del Análisis basada en el EOS, los trabajos de referencia son los de Contreras y Ordóñez (2005) y Ordóñez (2011).

En el primero de ellos se trazaron las dimensiones del análisis de manuales, basados en el EOS, referido a conceptos del Análisis Matemático, que posteriormente sirvió para analizar los apuntes de clase de los alumnos como herramienta para el estudio del significado institucional implementado.

En el segundo trabajo, es decir, en la tesis de la Dra. Lourdes Ordóñez, se abordó el análisis de los apuntes de clase de los estudiantes basándose en el trabajo anterior, en cuanto a las dimensiones de análisis. El estudio conjeturaba que la descripción de dichos apuntes nos podía dar una buena aproximación del significado implementado en cada grupo en cuanto a las configuraciones epistémicas que trabajaba y los modos en que lo hacía. Es decir, se planteó el estudio de las cuatro trayectorias epistémicas de los grupos de alumnos para aproximar el significado implementado para compararlo con el significado de referencia de la integral definida.

En el primer trabajo citado, Contreras y Ordóñez (2006), la primera dimensión de análisis considerada es el análisis semiótico, que corresponde al estudio que se realice según las entidades primarias que componen la actividad matemática. Básicamente se profundizó en las situaciones-problema (según el tipo de fenómenos que han de gestionar, los ejemplos y los ejercicios, los cuales se clasificaron en: de cálculo algorítmico, de búsqueda, de aplicación de una definición, de aplicación de propiedades, de demostración y de la vida real), en los lenguajes y en los conceptos (en cuanto a la definición formal o intuitiva y al modo de uso, es decir, como útil o como objeto de conocimiento). La segunda dimensión, es el *análisis didáctico* que corresponde al estudio del texto que se realice, según las funciones de dirección del estudio presentes, el cual consta de las subdimensiones: planificación (selección de objetivos, contenidos… a estudiar), motivación (conexión con ideas previas y contextualización histórica del concepto) y tipo de enseñanza desarrollada en la clase (trasmisión, programada, por descubrimiento, constructivista y a-didáctica). Por último, la tercera dimensión es el análisis epistemológico-cognitivo, el cual corresponde al estudio que se efectúe según los significados epistémicos institucionales, los conflictos semióticos inducidos y las capacidades a desarrollar; consta de tres subdimensiones: significados institucionales globales de referencia, conflictos semióticos potenciales y capacidades que se intentan desarrollar en el lector (de acuerdo al tipo de enseñanza desarrollada).

En el segundo trabajo de Ordóñez (2011), al análisis semiótico anterior se añadieron las entidades primarias: procedimentales, proposicionales y argumentativas. En cuanto al análisis epistemológico-cognitivo, únicamente se trató la subdimensión de significados de referencia aunque con el avance de tratar algunas configuraciones epistémicas de referencia.

En la tesis que nos ocupa, los objetivos que se persiguen con el análisis didáctico de los apuntes de clase son: realizar un acercamiento al significado institucional implementado; conocer las configuraciones que surgen de dicho análisis y compararlas con las configuraciones epistémicas-históricas de referencia; conocer los posibles conflictos de significado por medio de los tratamientos, conversiones y funciones semióticas que se detecten.

Teniendo en cuenta los objetivos anteriores y las últimas actualizaciones del EOS, del análisis realizado en Ordóñez (2011) no se tratará la dimensión de análisis didáctico para evitar confusiones con este término, de tal forma que, en nuestro caso, se denominará análisis didáctico a todo el que se realice a lo largo del análisis de los apuntes de clase. La dimensión semiótica se abordará sin cambios respecto a los trabajos anteriores, es decir, se centrará en las seis entidades primarias presentes en la actividad matemática. Por último, la dimensión epistemológica-cognitiva quedará dividida en una epistemológica, que corresponde a las configuraciones que surjan al analizar los apuntes de clase y que contrastarán con las configuraciones epistémicas-históricas de referencia, y en otra dimensión interaccional potencial, que corresponde a conflictos de significado, tratamientos, conversiones y funciones semióticas que se puedan inducir potencialmente de los apuntes y que habrá que contrastar con los significados personales de los estudiantes.

Es evidente que, en esta tesis, se profundiza de modo práctico en las interrelaciones entre la TRRS y el EOS. Por tanto, queremos dejar nuestra posición sobre esta temática tan importante de intentar avanzar, de modo práctico (en este caso utilizando el concepto de optimización), en la armonizar marcos teóricos de la Didáctica de las Matemáticas, lo cual creemos que ya de por si supone una aportación innovadora al campo de investigación en Didáctica de las Matemáticas.

En el seno del EOS se han publicado algunos trabajos acerca de esta problemática (Contreras, 2002; Pino, Guzmán, Duval y Font, 2015; Godino et al., 2016) en los que se pone de manifiesto la relevancia didáctica de ciertos términos de la Teoría de Registros, tales como tratamiento, conversión y conversión no congruente, y sus relaciones con la idea de función semiótica del EOS.

En el trabajo de Contreras (2002), presentado en el XVIII Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas celebrado en Castellón, utilizando el objeto límite de una función, se abordó la comparación entre tres marcos teóricos: la teoría APOS, la teoría de registros y la teoría de las funciones semióticas, en cuanto a la modelización que estas teorías daban al concepto. La hipótesis que se formuló fue: se da la emergencia del objeto matemático cuando se utilizan las diferentes representaciones ostensivas y las traducciones entre ellas, y esto se efectúa de modo coordinado, siendo las funciones semióticas el instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de las representaciones ostensivas (dominio de lo público) y de las no ostensivas (dominio de lo privado). Algunas conclusiones de interés fueron: Podemos observar que las modelizaciones de la teoría de Duval y de la TFS son más completas que la obtenida para la teoría del APOS. En nuestra opinión la mayor potencia de las dos primeras se explica en parte porque no presuponen que la noesis dirige de manera mecánica la semiosis, en términos de Duval: "no hay noesis sin semiosis, es decir, es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad de la noesis", y buscan herramientas para analizar simultáneamente la semiosis y la noesis (en la terminología de Duval) o la manipulación de representaciones ostensivas y el pensamiento que las acompañan (en términos de la TFS). Además, en la teoría TFS las funciones semióticas relacionan dos objetos que pueden ser materiales o mentales. En nuestra opinión, la interpretación de las funciones semióticas que aquí se propone, generaliza de manera radical la noción de representación usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática que en muchos casos entienden la representación básicamente en términos de Saussure (una imagen mental que se relaciona con un concepto en la mente del sujeto).

En Pino et al. (2015) se analiza la labor de un futuro maestro de escuela secundaria en una tarea relacionada con el diferenciabilidad de la función de valor absoluto, desde las perspectivas de la TRRS y del EOS. Como resultado de este estudio, las complementariedades entre estas dos perspectivas teóricas podrían permitir evidentemente un análisis más completo y detallado de la actividad matemática de los estudiantes. Es decir, los resultados de la comparación del análisis muestran que entre estas dos perspectivas teóricas hay complementariedades que permitirían realizar un trabajo más preciso y un análisis cognitivo "más fino", de las producciones de los sujetos. De esta manera, es plausible proporcionar mejores explicaciones sobre los aspectos que hacen posible o imposible de comprender las nociones matemáticas. Mientras que el análisis del EOS enfoca las prácticas matemáticas de los sujetos, y los objetos matemáticos, procesos y sus significados, que surgen de tales prácticas, la TRRS centra su análisis principalmente en los registros de representación que el sujeto se moviliza en sus producciones.

La metodología propuesta por la TRRS puede considerarse como más "global", en el sentido de que la actividad cognitiva de los sujetos es analizada sin realizar valoraciones desde un punto de vista matemático, que sí se consigue con las herramientas del EOS, ya que éste proporciona un nivel de análisis de la actividad cognitiva que muestra objetos matemáticos que están involucrados en los procesos de tratamiento y conversión entre registros de representación semiótica, esto es, el EOS enriquece y complementa al TRRS. Por otra parte, está claro que los registros de representación están implícitamente involucrados en funciones semióticas, aunque estos enfatizan el contenido matemático de la representación. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que dentro del EOS no existe sistematización para el análisis de elementos lingüísticos. Como parte de la metodología propuestos por el EOS, los signos de lenguaje pueden identificarse, pero estos diferentes lenguajes podrían hacer referencia tanto al registro de representación semiótica como a los sistemas semióticos. La TRRS sí que hace una clara distinción entre registro de representación semiótica representación y sistema semiótico. Por lo tanto, la noción de registro de representación semiótica de TRRS, complementa y enriquece también la noción de elementos lingüísticos del EOS, haciendo una distinción muy clara entre registro y sistema semiótico, y sistematiza el análisis de tales registros. Estas complementariedades entre TRRS y EOS nos muestran pautas para crear una metodología para realizar análisis cognitivos más comprensivos y profundos, lo cual es el paso pendiente en la investigación.

En Godino et al. (2016), se profundiza en las complementariedades entre la TRRS y el EOS, de tal manera que se critica la afirmación de Duval, respecto al postulado de la TRRS, de que es necesario para el acceso a un objeto que el sujeto disponga de al menos dos registros diferentes para representarlo, no es general. Por ejemplo, cuando un niño en el aula de tres años de Educación Infantil recibe un conjunto de triángulos, cuadrados y círculos de diferentes tamaños, colores y grosores y, dado un ejemplar cualquiera de cada figura, se le solicita “coge todos los que tienen la misma forma”, el niño realiza una clasificación del conjunto, que es una abstracción de las propiedades de las figuras. Aquí el niño no dispone de otro registro de representación de las figuras, que no sea el material-manipulable (como representante de la clase “cuadrado”, “triángulo” y “círculo”). De hecho, el niño puede no saber nombrar las figuras en lenguaje natural y, en todo caso, lo figural está condicionado por la psicomotricidad fina. Sin embargo, es capaz de apresar características suficientes de los objetos, abstrayendo otras características físicas, para realizar la tarea de clasificación. Es pues necesario para describir este aprendizaje un análisis que excede el cambio de registros (p. 95).

Posteriormente, al analizar una tarea visual-algebraica, elabora una tabla de análisis conjunto de las prácticas matemáticas en la que figuran tres columnas: registros de representación semiótica (tratamientos y conversiones); prácticas operativas y discursivas textualizadas y objetos no ostensivos (conceptos, procedimientos, propiedades y argumentaciones). Es decir, se propone una metodología práctica muy interesante para conectar la TRRS y el EOS. Además, se completa el análisis con las tramas de funciones semióticas de algunas de las prácticas. Como señalan los autores, la noción de función semiótica amplía la noción de representación. La semiótica pragmatista/antropológica asumida por el EOS propone que los objetos que se ponen en correspondencia en las funciones semióticas (funtivos) no son solamente objetos lingüísticos ostensivos (palabras, símbolos, expresiones, diagramas), sino que los conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, incluso las situaciones, pueden ser también antecedentes de las funciones semióticas. Los funtivos también pueden ser entidades unitarias o sistémicas, particulares o generales, materiales o inmateriales, personales o institucionales (p. 106). Además, se pueden explicar los conflictos potenciales o efectivos que tienen lugar en tales transformaciones semióticas en términos de los conocimientos matemáticos específicos requeridos en cada caso (p. 107).

Como podemos ver el uso de la función semiótica, junto con los tratamientos y conversiones, pueden enriquecer el análisis didáctico de la actividad matemática y la explicación de posibles conflictos semióticos. En esta tesis tratamos de aportar conocimiento a la investigación en Didáctica de las Matemáticas, haciendo ver que en la didáctica de la optimización algunos tratamientos y conversiones congruentes, que la TRRS ve como no problemáticos en cuanto a posibles dificultades de los alumnos, originan errores en los alumnos que pueden ser explicados utilizando la noción de función semiótica del EOS.

5.2. Análisis de la optimización en los apuntes de clase

Una vez descritas en el capítulo anterior las configuraciones epistémicas que constituyen el significado institucional pretendido de la optimización, analizaremos cómo se presenta la noción de optimización en los apuntes de clase para visibilizar el significado institucional implementado.

Para ellos hemos tomamos una muestra intencional de dos centros en los que se imparte 2º curso de Bachillerato de la modalidad del de Ciencias y Tecnología y cuyo profesor planifica la instrucción utilizando como recurso didáctico alguno de los libros de texto pertenecientes a las editoriales Anaya (T1) y Santillana (T2), cuyos análisis se han realizado en la sección 2 y en la sección 3 del capítulo anterior. Hemos escogido a un alumno de cada grupo para que nos facilitase los apuntes que había elaborado durante el proceso de la instrucción de la optimización. Para elegir a dichos alumnos se les preguntó a los profesores por aquellos estudiantes que tomaban los apuntes más fielmente a lo que ellos habían realizado en clase. Por ello estimamos que dichos apuntes nos pueden dar una buena aproximación del significado implementado en cada grupo en cuanto a las configuraciones epistémicas que el profesor selecciona y los modos en que lo hace.

El análisis de cada uno de los apuntes consta de dos fases. La primera fase consiste en un análisis epistemológico en el que se determinarán las configuraciones que describen el desarrollo del objeto optimización dividiendo cada uno de los documentos en unidades de análisis, según las situaciones-problemas detectadas y observando las entidades primarias: lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. Para ello nos basaremos en la descripción detallada en Balcaza, Contreras y Font (2017) y utilizada anteriormente en el apartado 1 de la sección 3 del capítulo 4. A partir del análisis de las entidades primarias se obtendrán las configuraciones asociadas a las prácticas realizadas en la instrucción guiada por el profesor y tal como se pone de manifiesto en Font y Godino (2006), mediante este constructo, describiremos el significado institucional implementado de la optimización lo que nos permitirá comparar diversos procesos de enseñanza. Posteriormente, analizaremos la presencia de posibles conflictos semióticos explícitos o implícitos en los documentos. La importancia de su detección radica en que permite advertir al docente de las dificultades que quizás tengan los estudiantes en el aprendizaje de la optimización.

La segunda fase corresponde a un análisis pormenorizado de los problemas resueltos en los que aplicamos dos niveles de análisis: el primer nivel consiste en la identificación de los registros de representación semiótica y las configuraciones ontosemióticas de los sistemas de prácticas manifestadas en los mismos; y el segundo nivel consiste en la tipificación de los procesos matemáticos con la finalidad de identificar los posibles conflictos semióticos que pueden ser inducidos en el proceso de resolución.

5.2.1. Primera fase: Análisis epistemológico de los apuntes de clase

5.2.1.1. Configuraciones epistémicas y conflictos semióticos potenciales asociados a los apuntes de clase correspondientes al libro de texto de la editorial Anaya

A continuación, describimos los elementos de la configuración epistémica del análisis realizado a los apuntes pertenecientes al grupo de clase que utiliza el manual T1.

- Situaciones – problemas

Para introducir los problemas de optimización el profesor comienza la instrucción con ejemplos de situaciones de optimización relacionadas con la vida cotidiana y con la geometría. Con respecto a los problemas resueltos se incluyen trece, cuyo fin es ejemplificar las técnicas y las propiedades introducidas a lo largo de la unidad y que los alumnos sistematicen los procedimientos. El primero de ellos hace referencia a una situación referente a figuras isoperimétricas que sirve para ilustrar los diferentes métodos que se enseñan para resolver este tipo de problemas. Los doce restantes tienen la finalidad de que el alumno aprenda las técnicas que se han de aplicar en los procedimientos. Considerando las situaciones a las que hacen referencia, once tratan situaciones intramatemáticas (geometría plana y espacial, aritmética, funciones y geometría), y dos están relacionadas con situaciones económicas. De las trece situaciones-problemas, ocho están incluidas en la sección ejercicios y problemas resueltos del libro de texto y cinco son cuestiones externas.

Observamos cómo alguna de las situaciones-problemas están dotadas de un contexto que justifica su planteamiento en relación con los conceptos de optimización (Figura 5.1).

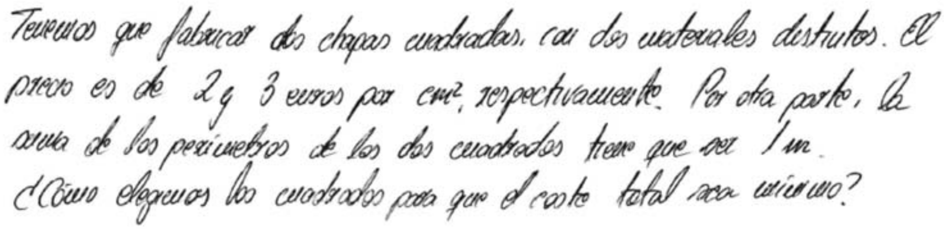

Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio es de 2 y 3 euros por cm², respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 m. ¿Cómo elegimos los cuadrados para que el coste total sea mínimo?

Figura 5.1: Situación problema contextualizada

Considerando como criterio de clasificación el enunciado de las situaciones-problemas y basándonos en la categorización que se hace de éstos en Camacho y González (1998), se distribuyen como se indica en la Tabla 5.1.

Tipo de problema	Fr	%
números	2	15,38
ángulos	0	0
del nadador	0	0
inscribir/circunscribir unas figuras a otras	0	0
construcción de figuras minimizando el coste de material	6	46,15
distancia de puntos a funciones	0	0
de la valla	0	0
enunciado vario	2	15,38
encontrar los extremos relativos de una función	2	15,38
relación entre conceptos y propiedades matemáticos y formas de representación	1	7,69
	13	

Tabla 5.1: Frecuencia absoluta y relativa de la clasificación de las situaciones-problema de los apuntes del manual T1

Se observa que la categoría con mayor número frecuencia es la construcción de figuras minimizando el coste de material al igual que sucede en el libro de texto que utiliza como recurso didáctico tal y como indicamos en el punto 4.3.1.1. del capítulo anterior.

En la categoría de enunciado vario hemos incluido situaciones relacionadas con la economía (Figura 5.2) y otras dos propias de las matemáticas (Figura 5.2b).

37- El valor, en millares de euros de una empresa viene dado por: $f(t)=9-(t-2)^2$, $0\leq t\leq 4'5$. Deduce en qué valor de t alcanzó su máx valor y en qué valor de t alcanzó su valor mínimo.

Figura 5.2a: Situación problema de aplicación a la economía

35. Dada la función $f:[1,e]\rightarrow R$ definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.

Figura 5.2b: Situación problema relativa a las funciones

- Registros de representación semiótica

Los RRS que prevalecen son el lenguaje natural (expresiones del tipo: camino más corto, mínima superficie, máximo volumen…) y el algebraico. Se utiliza la representación figural como apoyo para facilitar la compresión del discurso y las representaciones numéricas para el desarrollo de las operaciones.

- Conceptos

Se define el concepto de puntos singulares o críticos considerando las configuraciones CE-1D y CE-T. Además, se definen los extremos relativos utilizando la entidad correspondiente a la configuración CE-O utilizando el lenguaje algebraico y gráfico (Figura 5.3). No se define el concepto de extremo absoluto.

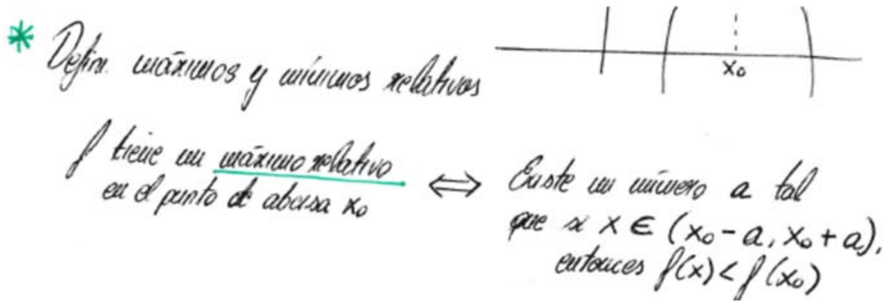


Figura 5.3: Definición extremo relativo CE-O

Se define los problemas de optimización relacionándolos con situaciones donde el objetivo es encontrar el valor máximo o mínimos de una variable bajo ciertas condiciones.

- Procedimientos

El profesor utiliza la técnica de ensayo y error para resolver la situación problema introductoria siendo el RRS numérico en este caso el prioritario (Figura 5.4).

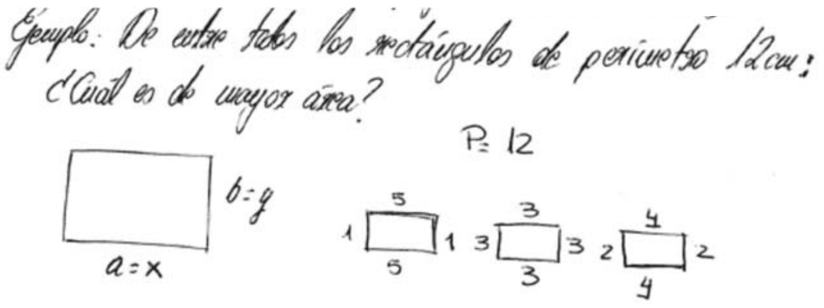


Figura 5.4: Resolución situación problema

Enseña procedimientos para identificar posibles extremos relativos y para resolver problemas de optimización. En el primer caso, selecciona las técnicas correspondientes de las configuraciones CE-1D y CE-T. Para resolver un problema de optimización se busca la expresión analítica de una función de una variable real que describa la situación-problema y, teniendo en cuenta las restricciones del problema se aplican los procedimientos correspondientes a las configuraciones CE-1D y CE-2D.

- Propiedades

Se explicita que la condición de punto crítico no es suficiente para ser extremo relativo mediante el RRS gráfico (Figura 5.5).

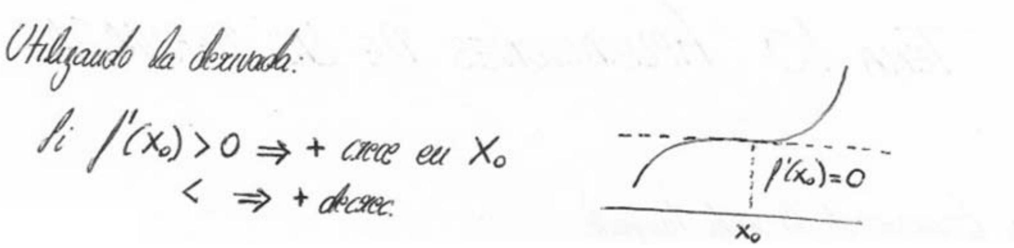


Figura 5.5: Condición necesaria extremo relativo

- Argumentos

Se explican los pasos a seguir en los procedimientos, pero no se justifica el uso del procedimiento.

Una vez descrito las entidades de la configuración de la optimización en los apuntes de clase observamos que aparecen las mismas configuraciones histórico-epistémicas que las incluidas por el manual T1.

Proseguimos con el análisis identificando las posibles dificultades que puede presentar el alumnado en el proceso del aprendizaje de la optimización. A continuación, describimos los conflictos semióticos potenciales asociados a las prácticas propuestas de los apuntes correspondientes al libro de texto de la editorial Anaya (T1) agrupándolos en base a la entidad con la que se relacionan.

- Conflictos potenciales ligados a las situaciones-problemas

Escasa diversidad de los contextos de por lo que se muestra al alumno un campo muy reducido de situaciones acerca de la optimización.

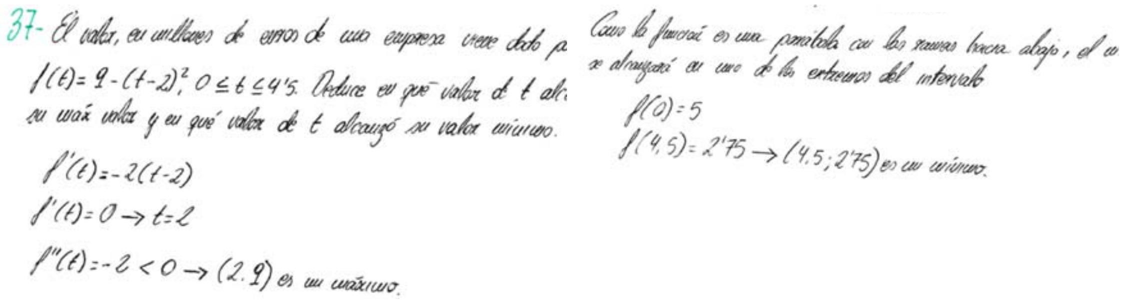
- Conflictos potenciales ligados a los RRS

Las gráficas de las funciones realizadas a mano alzada presentan imperfecciones que conllevan errores.

- Conflictos potenciales ligados a los conceptos

Al asociar el concepto del problema de optimización a la fenomenología se restringe su significado.

Se utiliza, sin especificar, extremos, extremos relativos y extremos absolutos. Puede ser una dificultad para el alumno cuando las condiciones del problema conlleven restricciones en el dominio y halla que distinguir entre ambos (Figura 5.6).


37- El valor, en millones de euros de una empresa viene dado p

$f(t) = 9-(t-2)^2,\ 0 \leq t \leq 4'5$. Deduce en qué valor de t alc

su máx valor y en qué valor de t alcanzó su valor mínimo.

$f'(t) = -2(t-2)$

$f'(t) = 0 \rightarrow t = 2$

$f''(t) = -2 < 0 \rightarrow (2.9)$ es un máximo.

Como la función es una parábola con las ramas hacia abajo, el m

se alcanzará en uno de los extremos del intervalo

$f(0) = 5$

$f(4,5) = 2'75 \rightarrow (4,5;2'75)$ es un mínimo.

Figura 5.6: Situación problema de aplicación económica

- Conflictos potenciales ligados a los procedimientos

Al identificar extremos relativos con el criterio de la configuración CE-2D se aplica hasta orden cuarto, pero no se generaliza a orden n-ésimo.

Los procedimientos para abordar los problemas de resolución se aplican de manera rutinaria y no se comprueba que las funciones cumplan las condiciones requeridas. Esto puede suponer para el alumno una dificultad si tiene que abordar situaciones en las que las funciones no sean las adecuadas.

En la resolución de problemas donde la función está definida en un intervalo cerrado y acotado no se especifica que haya que considerar los extremos del intervalo del dominio.

- Conflictos potenciales ligados a las propiedades

Ausencia de la propiedad de los extremos relativos con el criterio de la segunda derivada.

- Conflictos potenciales ligados a los argumentos

No se justifican los procedimientos. No se ofrece una argumentación para que el alumno seleccione de manera adecuada el criterio de la primera derivada o el de la segunda derivada para resolver un problema.

Una vez descritos los conflictos semióticos de la instrucción, se abordan algunos de los conflictos semióticos potenciales que detectábamos en el manual T1. Así, por ejemplo, aunque en el libro de texto no se define problema de optimización en los apuntes sí se hace referencia. Además, se utiliza la técnica de ensayo y error para resolver uno de los problemas. Esto permite mostrar al estudiante que las herramientas del cálculo diferencial no son las únicas que se pueden utilizar para abordar este tipo de problemas. A pesar de que en el manual el procedimiento de la configuración CE-2D no se generaliza para derivadas sucesivas, en los apuntes se considera hasta la derivada de cuarto orden, aunque no se generaliza para orden n.

5.2.1.2. Configuraciones epistémicas y conflictos semióticos potenciales asociadas a los apuntes de clase correspondientes al libro de texto de la editorial Santillana

A continuación, mostramos el análisis de los apuntes de clase correspondientes la editorial Santillana (T2) describiendo las entidades primarias asociadas a las prácticas.

- Situaciones – problemas

El proceso de instrucción que se plasma en los apuntes selecciona diecisiete situaciones-problemas, todas referentes a la propia matemática (funciones, números, geometría plana y espacial). La primera de ellas es una situación referente a figuras isoperimétricas que se considera como ejemplo para ilustrar el procedimiento para calcular los extremos absolutos de las funciones, y el resto son problemas resueltos cuya finalidad es que los alumnos sistematicen las técnicas del procedimiento y utilicen las propiedades introducidas a lo largo de la unidad.

De las diecisiete situaciones-problemas, nueve pertenecen al libro de texto y siete han sido incluidas por el profesor.

Se incluyen problemas dotándolos de un contexto que justifica su planteamiento en relación con estos conceptos (Figura 5.7).

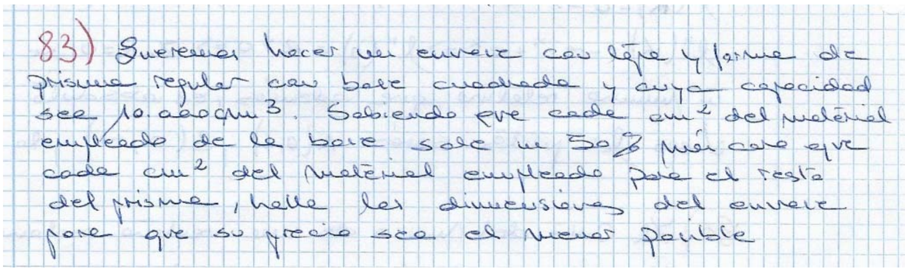

83) Queremos hacer un envase con forma de prisma regular con base cuadrada y cuya capacidad sea 10.000 cm^3. Sabiendo que cada cm^2 del material empleado de la base sale un 50% más caro que cada cm^2 del material empleado para el resto del prisma, halla las dimensiones del envase para que su precio sea el menor posible

Figura 5.7: Situación-problema contextualizada

También incluye problemas relacionados con el plano euclídeo, pero considerándolos en el plano cartesiano transformándolos más algebraicos (Figura 5.8).

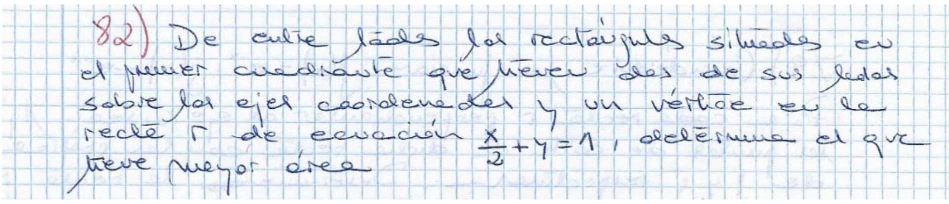

82) De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $\frac{x}{2}+y=1$, determina el que tiene mayor área

Figura 5.8: Situación-problema en coordenadas cartesianas

Considerando como criterio de clasificación el enunciado de las situaciones-problemas de optimización y basándonos en la categorización que se hace de éstos en Camacho y González (1998), se distribuyen según se presenta en la Tabla 5.2.

Tipo de problema	**Fr**	**%**
números	1	5,88
ángulos	1	5,88
del nadador	0	0
inscribir/circunscribir unas figuras a otras	4	23,53
construcción de figuras minimizando el coste de material	5	29,41
distancia de puntos a funciones	2	11,76
de la valla	1	5,88
enunciados varios	1	5,88
encontrar los extremos de una función	0	0
relación entre conceptos y propiedades matemáticos y formas de representación	2	11,76
	17	

Tabla 5.2: Frecuencia absoluta y relativa de la clasificación de las situaciones-problema de los apuntes del manual T2

Se observa que la categoría con mayor número frecuencia es la vinculada con la construcción de figuras minimizando el coste de material, en segundo lugar, situaciones relacionadas con inscribir o circunscribir unas figuras en otras y a continuación situaciones sobre distancias y situaciones intramatemáticas donde hay que relacionar conceptos y propiedades matemáticos y formas de representación de funciones. Sin embargo, esta distribución no se corresponde a la descrita para el libro de texto que utiliza como recurso didáctico tal y como indicamos en el punto 4.3.1.2. del capítulo anterior.

- Registros de representación semiótica

Los RRS que prevalecen son el lenguaje natural y el algebraico. Se utiliza la representación figural como apoyo para facilitar la compresión del discurso y las representaciones numéricas para el desarrollo de las operaciones.

- Conceptos

Se define los conceptos de extremos relativos utilizando dos configuraciones, CE-O y CE-T, aunque consideramos que se destaca la configuración de la ordena ya que se presenta utilizando tanto el registro verbal como el gráfico mientras que para en la configuración de la tangente se hace alusión solo en el registro gráfico, Figura 5.9.

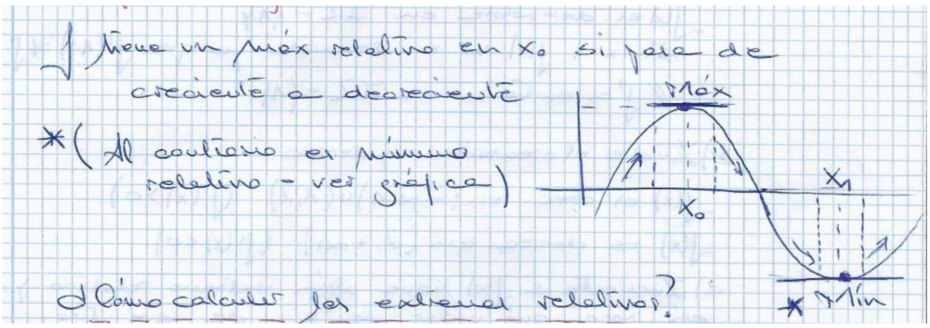


Figura 5.9: Definición extremo relativo

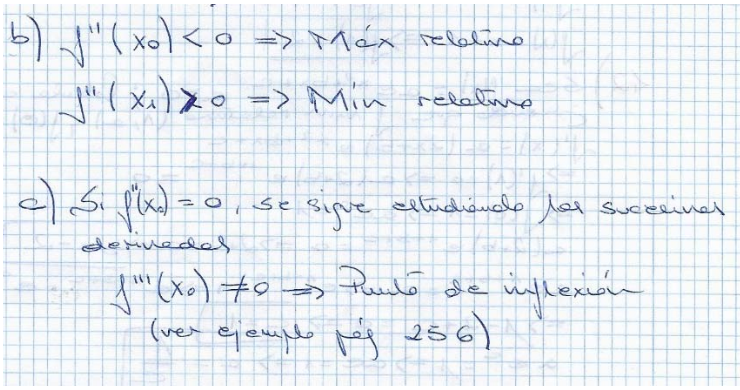
Se define el concepto de puntos crítico considerando la entidad de la configuración CE-1D.

No se definen los problemas de optimización.

- Procedimientos

El profesor enseña procedimientos para calcular extremos relativos y para la optimización de funciones. En el primer caso, selecciona las técnicas correspondientes a las configuraciones CE-1D y CE-2D generalizándola a las sucesivas derivadas (Figura

5.10). En el segundo caso, se centra en el cálculo de extremos de una función continua en un intervalo cerrado y acotado. Para ello, se calculan los extremos relativos que pertenezcan al intervalo y, posteriormente, evaluándolos junto con los extremos del intervalo y los puntos, si existiesen, donde la función no fuese derivable. Inmediatamente después se ilustra la técnica con un problema referente a una situación de optimizar el área de rectángulos isoperimétricos.


b) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Máx relativo
$f''(x_1) > 0 \Rightarrow$ Mín relativo

c) Si $f''(x_0) = 0$, se sigue estudiando las sucesivas derivadas
$f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión
(ver ejemplo pág 256)

Figura 5.10: Criterio de la segunda derivada para clasificar puntos singulares

- Argumentos

No se justifican ni las propiedades ni los procedimientos utilizados.

Una vez descritos las entidades de la configuración de la optimización en los apuntes de clase observamos que aparecen las mismas configuraciones histórico-epistémicas que las incluidas por el manual T2.

Proseguimos con el análisis identificando las posibles dificultades que puede presentar el alumnado en el proceso del aprendizaje de la optimización. A continuación, describimos los conflictos semióticos potenciales asociadas a las prácticas propuestas de los apuntes correspondientes al libro de texto de la editorial Santillana (T2) agrupándolos en base a la entidad con la que se relacionan.

- Conflictos potenciales ligados a la situación-problema

Se muestra al alumno una escasa variedad de situaciones que pueden estar relacionadas con la optimización, por lo que la enseñanza influye para la construcción de un significado parcial.

- Conflictos potenciales ligados a los registros de representación semiótica

A pesar de la presencia del registro numérico para el cálculo, hay una ausencia del lenguaje numérico como vehículo de aproximación.

- Conflictos potenciales ligados a los conceptos

No se definen los problemas de optimización.

- Conflictos potenciales ligados a los procedimientos

Se aplican de manera rutinaria y no se comprueban si cumplen las condiciones para ser aplicados. En todos los problemas, los extremos relativos coinciden con los absolutos, puede ser una dificultad para el alumno el no estar ejemplificado el caso contrario. Tampoco se aborda una situación donde la función no sea derivable, aunque esta situación sí está contemplada en la casuística de la técnica del proceso.

- Conflictos potenciales ligados a las propiedades

Ausencia de las propiedades de los puntos singulares con respecto a su clasificación como extremo relativo o punto de inflexión.

- Conflictos potenciales ligados a los argumentos

No se justifica ni el uso de los procedimientos ni se ofrece una argumentación para seleccionar adecuadamente el criterio de la primera derivada o el de la segunda derivada para resolver un problema.

Una vez finalizado el análisis epistémico de los apuntes comprobamos que no se aborda ninguno de los conflictos semióticos potenciales que hemos detectado al analizar el manual T2. Esto conlleva que debe ser el alumno, de manera autónoma, capaz de solventar las dificultades en el proceso de enseñanza.

Con respecto al significado implementado construido a partir del análisis de los apuntes de clase de los dos grupos, observamos que los significados subyacentes siguen desarrollos muy similares a los detectados en los libros de texto T1 y T2.

Hay muy poca diversidad con respecto a las situaciones acerca de la optimización que se presentan al alumno, a pesar de que tales situaciones permiten la contextualización de los conocimientos pretendidos y crean las condiciones para la exploración personal del estudiante. Ambos comienzan con una situación problema acerca del estudio de las figuras planas isoperimétricas con áreas máximas. Tal como indica Contreras, Luque y Ordoñez (2004) este conjunto de problemas permite un juego de contextos (geométrico, numérico algebraico e infinitesimal) y cambios entre sistemas de representación semiótica que dotan a la optimización de sentido y permite independizarla del cálculo diferencial.

De los cuatro sistemas de representación semiótica el estudiante mayoritariamente ha utilizado el registro de representación algebraico, no cumpliéndose a hipótesis de que "aprender un objeto matemático significa coordinar los sistemas de representación semiótico del mismo", (Duval, 2000).

Se pone el énfasis en la aplicación de las reglas de cálculo de máximos y mínimos. Predomina el criterio de poner a disposición del alumnado problemas tipo para preparar las evaluaciones, adquiriendo práctica en el uso de algoritmos, y no en el criterio de usar los problemas para desarrollar el pensamiento matemático.

En ambos procesos de instrucción se hace énfasis en la resolución de problemas, pero exclusivamente como cálculo algorítmico practicando dos métodos para abordar situaciones tipo. Se prioriza los procedimientos sobre el resto de las entidades. La enseñanza se caracteriza por tener una fuerte carga operativa, en detrimento de la parte conceptual. Como indica Moreno y Cuevas (2004) puede conllevar a que el estudiante no sea capaz de afrontar con éxito un problema cuya resolución no siga el esquema que se le enseñó dando soluciones que incluso contradigan su intuición. No se justifican los procedimientos propuestos.

Presentan con menos rigor los conceptos, no se demuestran las propiedades y apenas hay justificaciones ni argumentaciones. Para evitar conflictos al alumno habría que facilitarle argumentos, así por ejemplo, si una función es continua en intervalo abierto los extremos absolutos se encontrarán entre los relativos si los hubiera y el Teorema de Weierstrass (toda función continua en intervalo compacto alcanza su valor máximo y mínimo).

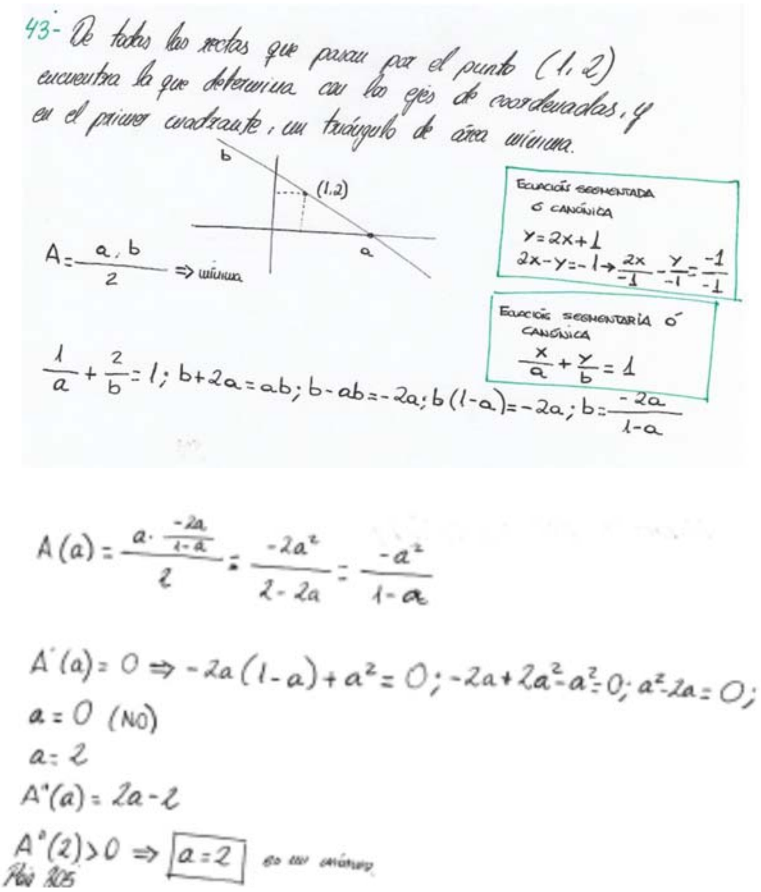
El tipo de actividad que se espera del alumno es la aplicación rutinaria de la regla a ejercicios tipo, que coincide con lo establecido en los libros de texto, por tanto, la línea editorial marca el estilo de enseñanza. No se introducen técnicas de indagación y descubrimiento contradiciendo las orientaciones metodológicas del currículo en el bloque de resolución de problemas.

5.2.2. Segunda fase: Análisis ontosemiótico de problemas resueltos

En este apartado analizamos la actividad matemática implicada en la resolución de problemas de optimización incluidos en los dos manuales. Utilizamos las nociones de registro de representación semiótica y de configuración ontosemiótica que ya han sido descritas en el apartado 4.3.2. del capítulo anterior.

A continuación, describimos el análisis ontosemiótico realizado a un problema resuelto plasmado en uno de los apuntes de clase. Se ha dividido en dos niveles, el primero se centra en identificar los registros de representación semiótica, los objetos matemáticos y la intencionalidad de las prácticas elementales en las que hemos divido el enunciado y resolución de la situación problema. El segundo nivel se centra en el reconocimiento de los procesos que se ponen en juego y los conflictos semióticos potenciales.

La Figura 5.11 se corresponde con el enunciado de una situación-problema que está propuesto en el manual T1 y la resuelve el profesor. Se trata de una situación propia de la matemática, en la que se pretende minimizar el área de un triángulo. Es un problema de geometría planteado en relación con el plano cartesiano, característica general de los manuales del periodo que estamos analizando. Como indica González (2004) los problemas planteados en relación con el plano euclídeo se transforman al plano cartesiano dotándoles de un carácter más algebraico, aunque se procura mantener el carácter intuitivo que se podría disipar al hacer dicho cambio.



43- De todas las rectas que pasan por el punto (1, 2) encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.

$A = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow$ mínima

Ecuación segmentada ó canónica

$y = 2x + 1$

$2x - y = -1 \rightarrow \frac{2x}{-1} - \frac{y}{-1} = \frac{-1}{-1}$

Ecuación segmentaria ó canónica

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1;\ b + 2a = ab;\ b - ab = -2a;\ b(1-a) = -2a;\ b = \frac{-2a}{1-a}$

$A(a) = \frac{a \cdot \frac{-2a}{1-a}}{2} = \frac{-2a^2}{2-2a} = \frac{-a^2}{1-a}$

$A'(a) = 0 \Rightarrow -2a(1-a) + a^2 = 0;\ -2a + 2a^2 - a^2 = 0;\ a^2 - 2a = 0;$

$a = 0$ (NO)

$a = 2$

$A''(a) = 2a - 2$

$A''(2) > 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$ es un mínimo

Pág 205

Figura 5.11: Situación problema resulta por el profesor

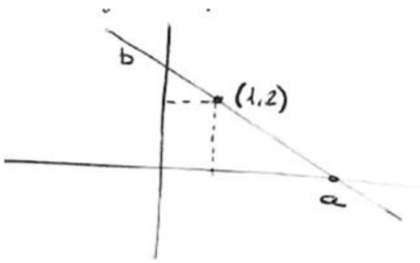
5.2.2.1. Primer nivel de análisis: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica

Sintetizamos el análisis ontosemiótico descrito en el apartado 4.3.2.1. del capítulo anterior, donde indicamos cada práctica elemental en la que hemos dividido las prácticas matemáticas del enunciado y resolución de la situación problema (PRi) y la secuenciación de estas. Para cada práctica PRi identificaremos tres aspectos: la función o la intencionalidad que desempeña en el proceso resolutivo (F), los registros de representación semiótica (RRS), lenguaje natural (RRL), numérico (RRN), algebraico (RRA) o figural (RRF) y gráfico (RRG), y los objetos (OBJ): conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.

En la Tabla 5.3 y en la Tabla 5.4 sintetizamos el análisis del enunciado y su resolución, descompuesta en las unidades correspondientes a las prácticas elementales identificando la funcionalidad, los registros de representación semiótica y las entidades primarias: conceptos, procedimientos, propiedades, y argumentos.

Enunciado de la situación problema	
PR1	43- De todas las rectas que pasan por el punto (1,2)
F	Contextualizar el problema y presentar los datos
RRS	RRL, RRN Mediante el lenguaje natural se contextualiza la situación problema y se indica las coordenadas de un punto mediante notación numérica
OBJ	Conceptos: rectas, punto
PR2	encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.
F	Presentar la situación problemática que se pretende resolver
RRS	RRL
OBJ	Conceptos: ejes cartesianos, primer cuadrante, triángulo, área mínima

Tabla 5.3: Análisis conjunto de las prácticas elementales del enunciado

Solución de la situación problema realizada en los apuntes de clase	
PR3	
F	Presentar esquema gráfico de la situación problema
RRS	RRF, RRN (1,2) son las coordenadas del punto en el sistema de referencia a, b denota la distancia desde el origen de coordenadas a los puntos de corte de una recta con los ejes cartesianos
OBJ	Procedimiento: Transformar la situación enunciada en un esquema gráfico interpretando las condiciones

PR4	ECUACIÓN SEGMENTARIA Ó CANÓNICA $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ECUACIÓN SEGMENTADA Ó CANÓNICA $y=2x+1$ $2x-y=-1 \to \frac{2x}{-1}-\frac{y}{-1}=\frac{-1}{-1}$
F	Dotar de herramientas para relacionar las magnitudes según las restricciones
RRS	RRA, RRL x, y variables; a,b parámetros
OBJ	Concepto: ecuación de la recta en forma segmentaria o canónica Procedimiento: transformar la ecuación explícita de una recta en la ecuación canónica Argumento: de tipo deductivo*
PR5	$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1;\ b+2a=ab;\ b-ab=-2a;\ b(1-a)=-2a;\ b=\frac{-2b}{1-a}$
F	Relacionar las magnitudes considerando las restricciones de la situación
RRS	RRA
OBJ	Procedimiento: transformar una expresión algebraica Propiedad: ecuaciones equivalentes
PR6	$A: \frac{a\cdot b}{2} \Rightarrow$ mínima
F	Definir la función que formaliza la situación problema con respecto a dos variables
RRS	RRL, RRA relación entre lenguaje natural y notación simbólica
OBJ	Definición: fórmula del área de un triángulo Procedimiento: Identificar la expresión que se ha de minimizar
PR7	$A(a)=\frac{a\cdot\frac{-2a}{1-a}}{2}=\frac{-2a^2}{2-2a}=\frac{-a^2}{1-a}$
F	Transformar una función de dos variables en otra que dependa de una de ellas
RRS	RRA A(a) función expresada analíticamente del área de un triángulo en función de la base: a
OBJ	Procedimiento: definir el área a minimizar en función de la base del triángulo Propiedad: operaciones de fracciones Argumento: de tipo deductivo a partir de los datos

PR8	$A'(a) = 0 \Rightarrow -2a(1-a) + a^2 = 0; -2a + 2a^2 - a^2 = 0; a^2 - 2a = 0;$
F	Identificar puntos singulares interpretando las condiciones del problema
RRS	RRA, RRN, RRL A'(a) función derivada
OBJ	Procedimientos: calcular la primera derivada, resolver la ecuación de la derivada igualada a 0 Propiedades: Derivación de la suma y composición de funciones Argumento: de tipo deductivo a partir de los datos
PR9	$a = 0$ (NO) $a = 2$
F	Descartar puntos singulares como posibles soluciones interpretando las condiciones del problema
RRS	RRN, RRL
OBJ	Procedimiento: seleccionar valor numérico de la variable
PR10	$A''(a) = 2a - 2$ $A''(2) > 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$ es un mínimo
F	Identificar el punto singular mediante el criterio de la segunda derivada
RRS	RRN, RRA, RRL $>$ Orden "mayor que"
OBJ	Procedimiento: Evaluar A'' en el posible extremo Propiedad: Condición de mínimo Argumento: basada en cálculos aritméticos

Tabla 5.4: Análisis conjunto de las prácticas elementales del enunciado

El enunciado de la situación problema ha sido divido en dos prácticas elementales, PR1 y PR2, y la resolución ha sido secuenciada en ocho prácticas numeradas desde PR3 hasta PR10. El análisis profundo que hemos realizado describe la función de cada práctica elemental en el proceso resolutivo, así como identifica de manera pormenorizada los registros de representación semiótica y objetos matemáticos involucrados. Esta herramienta nos permite proporcionar una explicación de las posibles causas de las dificultades que pueden experimentar los estudiantes a propósito de este problema. Complementamos esta descripción con el segundo nivel de análisis.

5.2.2.2. Segundo nivel de análisis: Procesos matemáticos y conflictos semióticos potenciales

En este punto nos centramos en identificar los procesos matemáticos que intervienen en la solución del problema. La metodología que vamos a aplicar ha sido citada en el punto 4.3.2.2. del anterior capítulo.

A partir de la Tabla 5.3 y la Tabla 5.4 se discute, a continuación, el papel que algunos de los procesos juegan en la aparición de los objetos implicados, tanto en el enunciado de la situación problema como en la construcción de la solución (Figura 5.11).

- Procesos de significación-representación:

Primero describimos los tratamientos y conversiones que se han sucedido a lo largo del enunciado y resolución de la situación problema según la secuencia de las prácticas elementales numeradas en la Tabla 5.3 y en la Tabla 5.4.

Los tratamientos y conversiones dentro y entre sistemas de representación son continuos y están dirigidos por el razonamiento que se utiliza al resolver el problema planteado tal y como exponemos a continuación. Se enuncia el problema con el RRS natural (vernáculo), aunque hay una alusión al RRS numérico (coordenadas de un punto), correspondiente a las prácticas PR1 y PR2.

En PR3 se efectúa de manera implícita, una conversión del RRS natural al RRG no congruente ya que no se cumple la univocidad semántica al no estar considerados los puntos de corte en RRL y sí en RRG. A continuación, en la práctica PR4 se realiza una conversión congruente al RRS algebraico considerando la ecuación de una recta dada en forma canónica. De la práctica PR5 a la práctica PR8 se suceden tratamientos del registro RRA.

En las transformaciones del RRA de la práctica PR8 la notación del primer miembro de la primera ecuación no coincide con la expresión de la segunda ecuación. A pesar de no ser una no congruencia creemos que puede presentar dificultad al alumno si hubiese error al calcular la derivada. Posteriormente, en la práctica PR9 se efectúa una conversión al sistema RRN y finalmente en la práctica PR10 se sucede una conversión no congruente del RRN al RRL por el orden entre las unidades de los ambos registros (la relación de mayor que > se corresponde con el mínimo)

A continuación, explicamos en la Tabla 5.5 los conflictos semióticos potenciales asociados a las entidades que hemos identificado en cada práctica elemental.

Prácticas elementales	Posibles conflictos semióticos
PR3	Propiedad: identificar la abscisa del punto del eje X y la ordenada del eje Y con la longitud de los catetos del triángulo
PR5	Concepto: para convertir la situación problema expresada por el gráfico en una expresión algebraica es necesario que el alumno haya memorizado previamente la ecuación canónica de la recta, sin embargo se puede facilitar la conversión entre registros considerando otro razonamiento más intuitivo a partir del registro de representación gráfico: los puntos de corte con los ejes cartesianos y el punto dado deben estar alineados por lo que las coordenadas de los vectores son proporcionales y transformando la expresión resultante se obtiene la ecuación pretendida.
PR7	Propiedad: transformar la expresión analítica de una función con propiedades de ecuaciones equivalentes.
PR8	Propiedad: se transforma la expresión de la función como si se tratase de ecuaciones: “dividir por cero”, distintos denominadores según cada expresión
PR9	Argumento: no justificar el discriminar una de las soluciones
PR10	Argumentos: No interpretar el resultado obtenido, no argumentar que el mínimo relativo que coincide con absoluto por dominio de definición

Tabla 5.5: Posibles conflictos semióticos asociados a las practicas

- Procesos de materialización-idealización:

En el caso de la práctica PR3 se trata de construir un triángulo a partir de una situación idealizada, lo cual implica el reconocimiento de ciertos objetos no ostensivos. Para ello se utiliza la representación gráfica en un sistema de coordenadas para materializarla situación ideal.

Otro ejemplo es la práctica PR7, la cual moviliza una serie de objetos no ostensivos, como es la función racional, variables dependientes, independientes..., que son necesarios para el trabajo matemático.

- Procesos de particularización-generalización:

Se considera la recta representada en los ejes cartesianos como un ejemplar de las todas las que pasa por el punto (1,2) y se interseca con estos en el primer cuadrante, por extensión a y b también son un ejemplar. Por tanto, se espera que el lector pase de lo general a lo particular.

Otro ejemplo es la expresión del área de los triángulos $A = \frac{a \cdot b}{2}$ como caso particular de los triángulos rectángulos donde a y b son las longitudes de dos de los lados, en este caso los catetos. La expresión *A(a)* es un ejemplar del tipo área de un triángulo en función de uno de sus lados particularizada a los datos del problema y al tipo de figura geométrica.

- Procesos de descomposición-reificación:

Consideramos la dualidad unitario-sistémico de los objetos. En un sentido, la figura geométrica considerada se construye a partir de un proceso de reificación (los vértices del triángulo son la intersección de una recta con los ejes cartesianos que delimitan el primer cuadrante y los lados son segmentos de la recta y de los ejes positivos). En otro sentido, para la formulación del área, el triángulo se descompone en sus elementos.

Capítulo 6

Significados personales

En este capítulo nos dedicamos a la construcción del significado personal de la optimización en los alumnos de 2º de Bachillerato. Una vez que hemos analizado los significados implementados en el proceso de instrucción basados en los libros de texto nos planteamos analizar cómo influye en el aprendizaje del estudiante.

La articulación de las herramientas de la TRRS y las del EOS permite realizar un análisis cognitivo muy preciso por lo que contribuye a comprender en profundidad los procesos de aprendizaje. Según la TRRS, un sujeto comprende un objeto matemático si dispone de, al menos, dos registros diferentes para representarlo y puede pasar de manera natural de un registro a otro. Cuando esto no ocurre, la representación y el objeto representado se confunde. La comprensión en el EOS conlleva además que sea usado de manera competente en diversas prácticas y puede ser detectada mediante las funciones semióticas que el sujeto puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego el objeto matemático como contenido, Godino, Wilhelmi, Blanco, Contreras y Giacomone (2016).

Para evaluar la comprensión de la optimización observaremos el conjunto de prácticas manifestadas por el estudiante según el significado de referencia determinado, esto es, nos centraremos en el significado personal declarado para detectar las causas de naturaleza ontosemiótica de las dificultades mostradas por los alumnos respecto a los problemas de optimización. Para ello analizaremos las respuestas de los alumnos mediante la configuración cognitiva aplicando las herramientas configuración ontosemiótica y registros de representación semiótica. Podremos explicar cuáles son las carencias del conocimiento del estudiante buscando los conflictos semióticos presentes, así como los procesos de conversión, y las no congruencias asociadas entre registros semióticos.

6.1. Instrumentos utilizados

Para construir el significado personal declarado hemos realizado un estudio empírico en los dos grupos de estudiantes sobre los que se ha realizado el proceso de instrucción para examinar la comprensión sobre la optimización mediante la resolución de problemas.

El instrumento considerado para este estudio consta de dos cuestiones, uno para cada grupo, que fueron incluidos en las pruebas de evaluación aplicadas a los estudiantes por el profesor de cada grupo.

La elaboración y selección de los problemas que se proponen se hizo en colaboración con los profesores ya que se pretende que el estudio refleje el nivel de aprendizaje logrado por el grupo de estudiantes con las prácticas establecidas y con los criterios acordados por el Departamento de Matemáticas de cada centro (la institución de referencia) en el proceso de instrucción.

Una vez realizadas las pruebas, primeramente, el profesor correspondiente corrigió cada una de las respuestas y posteriormente las analizamos para extraer los significados personales declarados buscando los conflictos semióticos presentes, así como los procesos de conversión, y las no congruencias asociadas, entre registros semióticos.

La primera fase del análisis consiste en realizar el análisis epistémico sobre una resolución de la cuestión planteada (solución experta), con el fin de explicitar de manera completa las practicas institucionales requeridas. El análisis se segmenta en prácticas elementales según la estructura de la Tabla 6.1. Además, se describen los procesos significación-representación, materialización-idealización y descomposición-reificación que intervienen en la realización de las prácticas matemáticas que permiten detectar y explicar conflictos semióticos.

PRi	Práctica elemental
F	Papel, rol o función, que desempeña en el proceso
RRS	Registros de representación semiótica: lenguaje natural (RRL), numérico (RRN), algebraico (RRA) o figural (RRF) y gráfico (RRG)
OBJ	Conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos

Tabla 6.1: Tabla de modelización de las prácticas elementales

En la segunda fase se realiza un análisis cognitivo de las respuestas de todos los alumnos, aplicando de manera sistemática la noción de función semiótica al análisis epistémico para comprender e interpretar la solución dada por el estudiante identificando los conflictos semióticos y las no congruencias entre registros. Hemos descrito y codificado los conflictos semióticos y las no congruencias entre registros según cada práctica elemental (CSPRi), asociándolos a las funciones semióticas que aparecen en las respuestas de los alumnos.

Una vez verificado este análisis cualitativo realizamos uno cuantitativo para describir de forma general el significado personal del grupo de alumnos que interviene en nuestro estudio. Para ello cuantificamos los conflictos semióticos y las no congruencias entre registros de representación semiótica detectados en las respuestas de todos los alumnos obteniendo regularidades en cada cuestión, caracterizando así la respuesta grupal lo que nos permite extraer consecuencias a cerca de los significados personales de los grupos estudiados. El análisis se presenta en la Tabla 6.2 en la que en la primera columna se codifican los conflictos semióticos y las no congruencia asociándolos a las prácticas elementales (CSPRi) descritas en la Tabla 6.1 correspondiente a la solución experta, en la segunda columna se describe el conflicto semiótico y la no congruencia vinculándolos a las entidades primarias y a los registros, y en la tercera columna se incluye la cuantificación de las veces que ha sido detectado medida según la frecuencia relativa.

CSPRi	Descripción de los conflictos semióticos y no congruencias asociados a las prácticas elementales	Fr	%

Tabla 6.2: Tabla de modelización de los conflictos y no congruencias

6.2. Análisis ontosemiótico de las cuestiones planteadas

6.2.1. Cuestión 1

La siguiente cuestión pertenece al primer examen donde plantemos a los alumnos que usan como recurso el libro de texto de la editorial Anaya (T1) una pregunta relacionada con los problemas de optimización:

"La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo?"

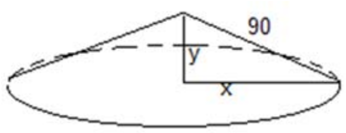
La situación-problema planteada a los alumnos se refiere a un contexto geométrico y se vincula la geometría plana y la geometría espacial y se trata de maximizar el volumen de un cono.

Según se ha desarrollado el proceso de instrucción se espera que el alumno lo resuelva considerando una función objetivo que exprese las condiciones de la situación problema, identificando los puntos singulares y clasificándolos según los extremos relativos, argumentando que serán absolutos por la naturaleza de las magnitudes.

A continuación, se realiza el análisis ontosemiótico del enunciado de la situación-problema y la solución experta, dividido en prácticas elementales, que se presenta en la Tabla 6.3 y en la Tabla 6.4 respectivamente según la estructura descrita con anterioridad en la Tabla 6.1 y los procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas que permiten detectar y explicar conflictos semióticos.

Enunciado: situación-problema	
PR1	La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono.
F	Contextualizar el problema y presentar los datos
RRS	RRL, RRN
OBJ	Conceptos: triángulo rectángulo y sus lados (hipotenusa y catetos), cono (cuerpo de revolución)
PR2	¿Qué dimensiones han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo?
F	Presentar la situación problemática que se pretende resolver
RRS	RRL
OBJ	Conceptos: dimensiones (medidas), volumen, máximo

Tabla 6.3: Análisis de la situación problema

Solución experta	
PR3	
F	Presentar esquema gráfico de la situación problema identificando las variables y datos
RRS	RRF

OBJ	Procedimiento: generar un cono como cuerpo de revolución a partir de un triángulo rectángulo. Identificar las variables.		
PR4	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$		
F	Expresar la fórmula del volumen de cono		
RRS	RRA		
OBJ	Conceptos: volumen de un cono, área círculo		
PR5	$V(x, y) = \frac{1}{3}\pi x^2 y$		
F	Definir la función que formaliza la situación problema con respecto a dos variables		
RRS	RRA		
OBJ	Procedimiento: transformar la expresión del volumen de la superficie considerada en función de las variables identificadas.		
PR6	Aplicando el T de Pitágoras en el triángulo rectángulo obtenemos: $x^2 + y^2 = 90^2$		
F	Relacionar el radio y la altura del cono considerando las condiciones de la situación		
RRS	RRA		
OBJ	Propiedad: relación lados triángulo rectángulo Argumento: Teorema de Pitágoras		
PR7	Despejando el cuadrado del radio, obtenemos $x^2 = 90^2 - y^2$ Consideramos $x^2 = 1800 - y^2$	**PR7'.1**	Despejando la altura obtenemos $y^2 = 90^2 - x^2$ Las posibles expresiones de y son $y = \pm\sqrt{8100 - x^2}$
F	Expresar el cuadrado del radio en función de la altura	F	Expresar la altura en función del radio
RRS	RRA		
OBJ	Procedimiento: despejar una incógnita de ecuación cuadrática	OBJ	Procedimientos: despejar una incógnita de ecuación cuadrática Propiedades: transformaciones equivalentes de ecuaciones
		PR7'.2	Consideramos la expresión positiva $y = \sqrt{8100 - x^2}$

		F	Seleccionar una solución interpretando las condiciones del problema
		RRS	RRA
		OBJ	Procedimiento: discriminar soluciones Propiedades: transformaciones equivalentes de ecuaciones, naturaleza de la magnitud longitud Argumentación: de tipo deductivo a partir de los datos
PR8	Función a maximizar $V(y) = \frac{\pi}{3}\, y(8100 - y^2) = \frac{\pi}{3}\,(8100y - y^3)$	**PR8’**	Función a maximizar $V(x) = \frac{\pi}{3}\, x^2\sqrt{8100 - x^2}$
F	Expresar la función a maximizar con una sola variable		
RRS	RRA		
OBJ	Procedimiento: transformar la expresión analítica de una función de dos variables en otra que dependa solo de una de ellas		
PR9	Cálculo de puntos singulares de $V(y)$	**PR9’**	Cálculo de puntos singulares de $V(x)$
PR9.1	Derivamos $V(y)$ $V'(y) = \frac{1}{3}\pi(8100 - 3y^2)$	**PR9’.1**	Derivamos $V(x)$ $V'(x) = \frac{2\pi}{3}\, x\sqrt{8100 - x^2} - \frac{\frac{\pi}{3}x^3}{\sqrt{8100 - x^2}}$
F	Hallar la función derivada de la función objetivo		
RRS	RRA		
OBJ	Procedimiento: calcular la derivada aplicando las reglas de derivación		
PR9.2	Resolvemos la ecuación $V'(x) = 0$; $\frac{1}{3}\pi(8100 - 3y^2) = 0$; $8100 - 3y^2 = 0$ Las soluciones de la ecuación son $y = \pm\sqrt{\frac{8100}{3}} = \pm\sqrt{2700}$	**PR9’.2**	Resolvemos la ecuación $V'(x) = 0$, tenemos $\frac{2\pi}{3}\, x\sqrt{8100 - x^2} = \frac{\frac{\pi}{3}x^3}{\sqrt{8100 - x^2}}$ es decir $\frac{2\pi}{3}\, x(8100 - x^2) = \frac{\pi}{3}x^3$ por tanto $3x^3 - 16200x = 0$; $x(3x^2 - 16200) = 0$ Las soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{5400}$

F	Resolver la ecuación de los puntos singulares		
RRS	RRA		
OBJ	Concepto: punto singular Procedimiento: resolver ecuación Propiedad: condición necesaria de extremos relativo		
PR10	Como "y" es una longitud entonces consideramos y = $\sqrt{2700}$ Como "x" es una longitud entonces consideramos x $= \sqrt{5400}$		
F	Seleccionar posibles extremos interpretando las condiciones de la situación		
OBJ	Procedimiento: discriminar soluciones Propiedad: Naturaleza de la magnitud longitud Argumentación: de tipo deductivo a partir de los datos		
PR11	Consideramos y = $\sqrt{2700} = 30\sqrt{3}$ Consideramos x $= \sqrt{5400} = 30\sqrt{6}$		
F	Simplificar expresión radical		
RRS	RRN		
OBJ	Procedimiento: extraer factores de un radical Propiedad: radicales equivalentes		
PR12	Clasificación puntos singulares		
PR12-1D	Evaluamos V’ en un entorno del punto crítico $y < 30\sqrt{3} \rightarrow V'(y) < 0$ $y > 30\sqrt{3} \rightarrow V'(y) > 0$ Entonces el valor $30\sqrt{3}$ es un máximo relativo	**PR12’-1D**	Evaluamos V’ en un entorno del punto crítico $x < 30\sqrt{6} \rightarrow V'(x) < 0$ $x > 30\sqrt{6} \rightarrow V'(x) > 0$ Entonces el valor $30\sqrt{6}$ es un máximo relativo
F	Clasificar puntos singulares aplicando el criterio de la primera derivada		
RRS	RRN, RRL		
OBJ	Procedimientos: evaluar la función derivada en entorno del punto singular Propiedad: Si la función derivada cambia de signo negativo a positivo en entorno del punto singular, es un máximo relativo. Argumento: deductivo a partir de los datos numéricos		
PR12-2D	Clasificación puntos singulares mediante el criterio de la segunda derivada para $V(y)$	**PR12’-2D**	Clasificación puntos singulares mediante el criterio de la segunda derivada para $V(x)$
PR12.1-2D	Calculamos la segunda derivada	**PR12’.1-2D**	Calculamos la segunda derivada

	$V''(y) = \frac{1}{3}\pi(-6y)$		$V''(x) = \frac{2\pi}{3}\sqrt{8100 - x^2} - \frac{\frac{2\pi}{3}x^2}{\sqrt{8100 - x^2}} - \frac{\pi}{3(8100 - x^2)} \cdot \left(3x^2\sqrt{8100 - x^2} + \frac{x^4}{\sqrt{8100 - x^2}}\right)$
F	Calcular la derivada segunda de la función objetivo		
RRS	RRA		
OBJ	Procedimiento: calcular la segunda derivada		
PR12.2-2D	Evaluando el punto singular en $V''(y)$ y simplificando obtenemos $V''(30\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi(-180\sqrt{3}) < 0$, luego y = $30\sqrt{3}$ es un máximo	**PR12’.2-2D**	Evaluando el punto singular en $V''(x)$ y simplificando obtenemos $V''(30\sqrt{6}) = \frac{\pi}{3}(\sqrt{2} - 420\sqrt{3}) < 0,$ luego x = $30\sqrt{6}$ es un máximo
F	Identificar el punto singular mediante el criterio de la segunda derivada		
RRS	RRN, RRL		
OBJ	Propiedad: Si V’(a) = 0 y V’’(a) < 0, x = a es un máximo de V(x) Argumento: deductivo		
PR13.1	Sustituyendo el valor de y en la expresión $x^2 = 8100 - y^2$ $x = \pm\sqrt{8100 - (30\sqrt{3})^2}$ $x = \pm\sqrt{5400}$	**PR13’**	Sustituyendo el valor de x en la expresión $y = \sqrt{8100 - x^2}$ y = $\sqrt{2700}$
F	Calcular las coordenadas del punto máximo		
RRS	RRN		
OBJ	Procedimientos: despejar una incógnita de ecuación cuadrática y discriminar soluciones Propiedades: transformaciones equivalentes de ecuaciones, naturaleza de la magnitud longitud	OBJ	Procedimientos: sustituir y realizar cálculos numéricos

	Argumentación: de tipo deductivo a partir de los datos
PR13.2	Consideramos $x = \sqrt{5400}$
F	Seleccionar solución interpretando las condiciones del contexto
RRS	RRN
OBJ	Procedimiento: discriminar soluciones Propiedad: la distancia es una magnitud positiva Argumento: naturaleza de la magnitud
PR14	$V(0) = 0$; $V(90) = 0$;
F	Identificar extremo absoluto
RRS	RRN
OBJ	Procedimiento: evaluar la función en extremos del dominio de definición y en extremo relativo Argumento: Teorema de Weierstrass
PR15	$x = \sqrt{5400} = 30\sqrt{6}$ y $=\sqrt{2700} = 30\sqrt{3}$
F	Simplificar expresiones radicales
RRS	RRN
OBJ	Procedimiento: extraer factores del radical Propiedad: radicales equivalentes
PR16	Las dimensiones de los catetos son: $x = 30\sqrt{6}$ cm, $y = 30\sqrt{3}$ cm
F	Contextualizar solución
RRS	RRL, RRN
OBJ	Concepto: unidades de longitud

Tabla 6.4: Análisis de la solución experta

La función objetivo considerada depende de dos variables, el radio y altura del cono, que será transformada en una función de una variable considerando la ligadura entre las dos variables. Es por ello por lo que se consideran dos funciones factibles, una de ellas corresponderá al volumen en función del radio del cono y la otra corresponderá al volumen en función de la altura del cono procedimientos vinculados con las prácticas enumeradas PR7 – PR8 y PR7’.1, PR7’.2 – PR8’, respectivamente. Además, para la clasificación de los puntos singulares en los dos casos descritos anteriormente se podrá utilizar los procedimientos correspondientes tanto a la configuración de la primera derivada como a la de la segunda. Para distinguirlos hemos considerado la siguiente notación: PR12-1D (en función de la altura, procedimiento correspondiente a la configuración de la primera derivada), PR12-2D (en función de la altura, procedimiento correspondiente a la configuración de la segunda derivada), PR12’-1D (en función del radio, procedimiento correspondiente a la configuración de la primera derivada) y PR12’-2D (en función del radio, procedimiento correspondiente a la configuración de la segunda derivada).

Procesos identificados en el enunciado de la situación-problema y en la resolución:

- Procesos de significación-representación:

Se enuncia el problema con el RRS natural (vernáculo), aunque hay una alusión al RRS numérico (dimensión de la hipotenusa del triángulo) y de manera implícita, se efectúa una conversión al RRS gráfico mediante un esquema de situación. A continuación, se realiza una conversión al RRS algebraico considerando la función objetivo que se ha de maximizar, el volumen de un cono dependiendo de la longitud de los catetos del triángulo. Mediante tratamientos y considerando los condicionantes de la situación problema se transforma la función considerada en una función que dependa de una variable (la altura o el radio del cono, según PR9 o PR9’). Utilizando el RRS numérico se identifican los puntos críticos para clasificarlos según el criterio de la configuración de la primera derivada o el criterio de la configuración de la segunda derivada. Por último, mediante el RRS verbal se interpreta la solución obtenida según el contexto de la situación problema.

En la Tabla 6.4. no aparecen conflictos semióticos del experto, pero la solución que aporta suministra un conjunto de elementos matemáticos que pueden dar lugar a conflictos semióticos.

- Procesos de materialización-idealización:

En el caso de la práctica PR3 se trata de construir un cono a partir de una situación idealizada, lo cual implica el reconocimiento de ciertos objetos no ostensivos. Para ello se utiliza la representación gráfica en un sistema de coordenadas para materializar la situación ideal.

Otros ejemplos son las prácticas PR8 y PR8', las cuales movilizan una serie de objetos no ostensivos, como son las ecuaciones polinómicas, la función irracional, variables dependientes, independientes..., que son necesarios para el trabajo matemático.

- Procesos de particularización-generalización:

La figura representa un ejemplar de los conos cuya generatriz mide 90 cm, por extensión x e y también son un ejemplar.

Tanto la expresión *V(x)* y *V(y)* son ejemplares del tipo volumen de un cono en función del radio de la base o de la altura particularizada a los datos del problema

- Procesos de descomposición-reificación:

Consideramos la dualidad unitario-sistémico de los objetos. En un sentido, la figura geométrica se construye a partir de un proceso de reificación. El cono se obtiene girando un triángulo rectángulo alrededor un eje (uno de sus catetos). Tiene una sola base en forma de círculo y una cara lateral curva que finaliza en un punto llamado vértice. La generatriz es el segmento que va desde cualquier punto de la circunferencia de la base al vértice (la hipotenusa del triángulo) (Figura 6.1).

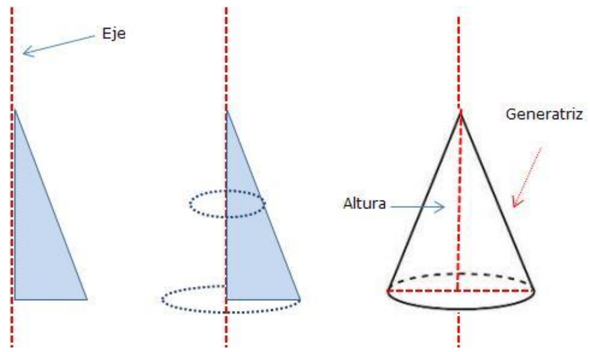


Figura 6.1: Cono de revolución

En otro sentido, para la formulación del volumen del cono se descompone en sus elementos, área de la base y altura.

A continuación, se realiza la corrección de las repuestas de veintitrés alumnos detectando las dificultades y los errores cometidos. En la siguiente Tabla 6.5 se presentan los conflictos semióticos y las no congruencias entre registros de representación semiótica encontrados en el desarrollo de la solución experta asociándolos a las funciones semióticas de las prácticas elementales descritas en la Tabla 6.4 correspondiente al análisis ontosemiótico de la solución experta.

CSPRi	Conflictos semióticos y no congruencias asociados a las prácticas elementales.	Fr	%
CSPR3 RRS	Ausencia de la función semiótica que relaciona el triángulo con el cono. Conversión del RRL al RRG.	5	21,74
CSPR4 concepto	Error fórmula área círculo	7	30,43
CSPR4 concepto	Error fórmula volumen cono	2	8,70
CSPR6 propiedad	Enuncia erróneamente el Teorema de Pitágoras	3	13,04
CSPR6 argumento	No se justifica el uso de la relación	15	65,22
CSPR7'.1 procedimiento	Despeja incorrectamente variable de ecuación cuadrática	2	8,70
CSPR7'.1 procedimiento	Error cálculo numérico	1	4,35
CSPR7'.2 argumento	No se justifica seleccionar la expresión positiva	10	43,48
CSPR8 procedimiento	Ausencia de la función semiótica que relaciona una función de dos variables con otra de una aplicando la relación entre dichas variables.	1	4,35
CSPR8 RRS	Error notación función	8	34,78
CSPR9.1 procedimiento	Error al derivar función polinómica	1	4,35
CSPR9.1 procedimiento	Error cálculos numéricos	1	4,35
CSPR9'.1 procedimiento	Error al derivar función radical e irracional	4	17,39
CSPR9'.2 procedimiento	Error al resolver ecuación irracional	2	8,70
CSPR10 argumento	Ausencia de la función semiótica mediante la que se selecciona valor de la solución de ecuación positivo. El error que conlleva es considerar más soluciones de las correctas.	9	39,13
CSPR11 RRS	Ausencia de la función semiótica que relaciona radicales en RRN para simplificar la expresión numérica.	10	43,48
CSPR12 argumento	Ausencia de la función semiótica cuyo antecedente son los puntos críticos y contenido los extremos relativos, lo que conlleva que no se argumente que el punto singular sea máximo relativo.	7	30,43

CSPR12-1D argumento	Se realizan los cálculos numéricos, pero no se clasifica el extremo relativo. Se produce una No congruencia entre RRN y RRL (no hay concordancia lógica entre los registros).	5	21,74
CSPR12-2D argumento	Se realizan los cálculos numéricos, pero no se clasifica el extremo relativo. Se produce una No congruencia entre RRN y RRL (no hay concordancia lógica entre los registros).	1	4,35
CSPR12'.1-2D procedimiento	Error cálculo segunda derivada	6	26,09
CSPR13.1 procedimiento	Error al calcular las coordenadas del punto máximo	2	8,70
CSPR14 argumento	Ausencia de la función semiótica que vincula el máximo relativo con el máximo absoluto de la función, por lo que no se comprueba que el extremo relativo sea absoluto.	14	60,87
CSPR15 procedimiento	Ausencia de la función semiótica que relaciona radicales equivalentes.	5	21,74
CSPR15 RRS	Utilizar RRS numérico decimal (decimal exacto) como aproximación de un número irracional.	9	39,13
CSPR16 argumento	Ausencia de la función semiótica cuya expresión son las soluciones de la ecuación y contenido las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo, por tanto, no se contextualiza la solución obtenida en el proceso.	7	30,43

Tabla 6.5: Conflictos semióticos y no congruencias

En la práctica PR3 el triángulo se relaciona con el cono mediante una función semiótica con un proceso de reificación en el cual a partir de la rotación de un elemento se genera un todo.

En la representación se trata de construir un cono a partir de una situación idealizada, lo cual implica el reconocimiento de ciertos objetos no ostensivos mediante un proceso de materialización-idealización. El no utilizar la representación gráfica para materializar la situación ideal puede dificultar la identificación variable o encontrar la ligadura entre las variables de la situación problema (CSPR3).

Que los estudiantes conozcan las fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de figuras geométricas es uno de los conflictos que caracteriza a este tipo de problemas, Camacho y González (1998). En este caso, el conflicto CSPR4 se detecta con una frecuencia relativa del 39,13 %.

Con respecto a los conflictos semióticos relacionados directamente con la optimización, el más frecuente es el considerar el máximo relativo como absoluto sin evaluar los extremos del dominio de definición, este conflicto se identificó como potencial en el libro de texto y no fue abordado en el proceso de instrucción. Otro error frecuente se produce al calcular las derivadas por aplicar mal las reglas de derivación, práctica que conlleva no poder terminar con éxito la resolución. En concreto, la elección de la variable independiente de la función objetivo la consideramos clave para aumentar la probabilidad del alumno de responder correctamente ya que la función de PR8 es polinómica mientras que la función de PR8'es irracional presentando más dificultad para los alumnos al derivar y realizar operaciones (CSPR9'.1 y CSPR9'.2). Además, el no argumentar cuándo utilizar el criterio de la primera derivada o el de la segunda para clasificar los extremos es un conflicto semiótico potencial que no ha sido abordado ni por el libro de texto ni en los apuntes. En este problema el cálculo de la segunda derivada de PR12' es muy tedioso propiciando muchos de los errores que los estudiantes cometen para clasificar el punto singular (CSPR12'.1-2D).

Hay un alto porcentaje de conflictos semióticos relacionados con la argumentación, hecho que manifiesta que en el contrato didáctico para abordar este tipo de situaciones se priorizan unas entidades primarias sobre otras, destacando los procedimientos en detrimento de los argumentos. Este hecho lo corrobora el análisis de las respuestas de los alumnos que han obtenido alta puntuación [1,5-2] (la puntuación máxima es 2 puntos), ya que identificamos conflictos semióticos relacionados con la ausencia de la entidad argumento en las prácticas elementales (CSPR6, CSPR7'.2, CSPR12, CSPR12-1D, y CSPR14)

Con respecto a conflictos semióticos no relacionados con la optimización destacamos las prácticas donde intervienen expresiones radicales. Se realiza entre RRN un tratamiento de la expresión radical a número decimal no considerando que es una aproximación, lo que conlleva un error de cálculo.

6.2.2. Cuestión 2

La siguiente cuestión pertenece al examen donde plantemos a los alumnos que usan como recurso el libro de texto de la editorial Santillana (T2) una pregunta relacionada con los problemas de optimización:

“Sea $f\,:[1,+\infty) \rightarrow R$ la función definida por $f\,(x) = \sqrt{x-1}$. Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2{,}0)$. ¿Cuál es esa distancia?”

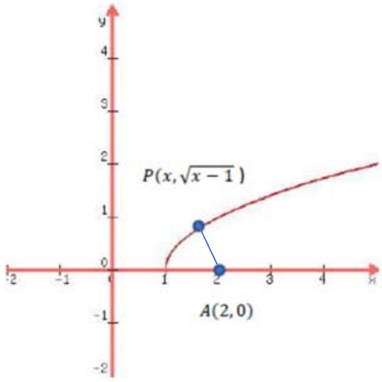
La situación-problema se refiere a un contexto funcional y se trata de minimizar una distancia entre dos puntos.

Según se ha desarrollado el proceso de instrucción, se espera que el alumno lo resuelva considerando una función objetivo que exprese las condiciones de la situación problema, identificando los puntos singulares y clasificándolos según los extremos relativos, argumentando que serán absolutos por la naturaleza de las magnitudes.

A continuación, se realiza el análisis ontosemiótico del enunciado de la situación-problema y la solución experta, que hemos divido en prácticas elementales y lo presentamos en la Tabla 6.6 y en la Tabla 6.7 según la estructura descrita con anterioridad en la Tabla 6.1 y los procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas que permiten detectar y explicar conflictos semióticos.

Enunciado: situación problema	
PR1	Sea $f\,:[1,+\infty) \rightarrow R$ la función definida por $f\,(x) = \sqrt{x-1}$.
F	Contextualizar el problema y presentar los datos
RRS	RRL, RRA Mediante el lenguaje natural se contextualiza la situación problema y se indica en el lenguaje algebraico la expresión algebraica de la función y el dominio y recorrido
OBJ	Conceptos: función irracional, intervalo semiabierto, el conjunto de los números reales
PR2	Determina el punto P de la gráfica de f que se encuentra a menor distancia del punto $A(2{,}0)$. ¿Cuál es esa distancia?
F	Presentar la situación problemática que se pretende resolver
RRS	RRL, RRN
OBJ	Conceptos: punto, distancia mínima

Tabla 6.6: Análisis de la situación problema

Enunciado: situación-problema	
PR3	
F	Presentar esquema gráfico de la situación problema e identificar la variable
RRS	RRA Representación gráfica de la función $A(2,0)$ situado en los ejes cartesianos P denota un punto genérico de la gráfica cuya abscisa se identifica con la variable
OBJ	Concepto: punto genérico Procedimientos: representar gráficamente la función, transformar la situación enunciada en un esquema gráfico interpretando las condiciones Propiedad: relación de las coordenadas del punto por pertenecer a la función
PR4	La función a minimizar es la distancia entre los puntos $A(2,0)$ y $P\ (x, \sqrt{x-1})$ que la expresamos en la forma analítica: $d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(\sqrt{x-1} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 - 3x + 3}\ \ , x\ \in [1, +\infty)$ que coincide con el módulo del vector $\overrightarrow{AP}$
F	Definir la función que formaliza la situación problema que se ha de minimizar
RRS	RRA, RRL $d(x)$: distancia de la gráfica al punto A en función de la abscisa de un punto genérico.
OBJ	Concepto: fórmula de la distancia entre dos puntos Procedimiento: expresión analítica de la función distancia entre dos puntos Propiedad: el módulo de un vector es la distancia entre su origen y extremo Argumento: de tipo deductivo a partir de los datos
PR5	$d'(x) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}$
F	Derivar la función para obtener el primer miembro de la ecuación para hallar los puntos singulares
RRS	RRA, RRL

	d'(x) función derivada
OBJ	Procedimientos: Calcular la primera derivada Propiedades: derivación de composición de funciones irracional y polinómica Argumentación: de tipo deductivo a partir de los datos
PR6	$d'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}} = 0\,; 2x-3=0;\; x=\frac{3}{2}$ (posible mínimo)
F	Identificar las soluciones de la ecuación con los puntos singulares
RRS	RRA, RRL
OBJ	Concepto: punto singular Procedimiento: resolver ecuación Propiedades: transformaciones de ecuaciones equivalentes Argumento: condición necesaria para la existencia de extremos relativo
PR7-1D	$x < \frac{3}{2} \rightarrow d'(x) < 0$ y $x > \frac{3}{2} \rightarrow d'(x) > 0$, por tanto, en $x = \frac{3}{2}$ hay un mínimo relativo
F	Clasificación del punto singular mediante el criterio de la primera derivada
RRS	RRL, RRA, RRN Conversión de registro numérico a registro verbal <,>,: Orden "menor que" "mayor que"
OBJ	Procedimiento: evaluar función derivada en entorno del punto singular Propiedad:el punto singular es mínimo relativo si el signo de la función derivada pasa de negativo a positivo en entorno Argumento: condición suficiente de extremo relativo basada en cálculos aritméticos
PR7-2D	Clasificación del punto singular mediante el criterio de la segunda derivada
PR7.1-2D	$d''(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{2\sqrt{x^2-3x+3}-(2x-3)\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}}{x^2-3x+3}\right] = \frac{3}{2(x^2-3x+3)\sqrt{x^2-3x+3}}$
F	Calcular derivada segunda
RRS	RRA $d''(x)$: derivada segunda
OBJ	Procedimiento: derivar la función derivada Propiedades: derivadas del cociente y composición de funciones Argumento: de tipo deductivo a partir de los datos
PR7.2-2D	$d''\left(\frac{3}{2}\right) > 0$, entonces $x = \frac{3}{2}$ es un mínimo relativo.
F	Clasificación del punto singular mediante el criterio de la primera derivada

RRS	RRN, RRL Conversión de registro numérico a registro verbal >: Orden "mayor que"
OBJ	Procedimientos: evaluar la segunda derivada en el punto singular Propiedad: el punto singular es mínimo relativo si el signo de la segunda derivada es positivo en entorno Argumento: condición suficiente de extremo relativo basada en cálculos aritméticos
PR8	Se calcula el mínimo absoluto teniendo en cuenta el dominio de definición de la función y el punto singular: $$d(1) = \sqrt{1^2 - 3\cdot 1 + 3} = 1$$ $$d\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{2} + 3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ Por tanto, es mínimo relativo es absoluto El mínimo se alcanza en $y = \sqrt{\frac{3}{2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ racionalizando.
F	Identificar extremo absoluto
RRS	RRN, RRL
OBJ	Concepto: mínimo absoluto Procedimiento: evaluar extremos del dominio de definición y mínimo relativo Propiedad: en función continua el mínimo absoluto se alcanza en los extremos del intervalo o extremos relativos Argumentación: Teorema Weierstrass
PR9	El mínimo se alcanza en $y = \sqrt{\frac{3}{2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ racionalizando El punto que se encuentra a menor distancia es $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y la distancia mínima es $\frac{\sqrt{3}}{2}\ u$
F	Contextualizar la solución
RRS	RRN, RRL
OBJ	Procedimientos: hallar la imagen del mínimo relativo y racionalizar Propiedad: fracciones equivalentes Argumento: reflexión sobre la solución del proceso interpretando las condiciones de la situación problema

Tabla 6.7: Análisis de la solución experta

La función considerada depende de la abscisa del punto genérico. Para la clasificación de los puntos singulares se podrá utilizar los procedimientos correspondientes tanto a la configuración de la primera derivada, PR7-1D, como al de la segunda, PR7'.1-2D y PR7'.2-2D.

En la Tabla 6.7 no aparecen conflictos semióticos del experto, pero la solución que aporta suministra un conjunto de elementos matemáticos que pueden dar lugar a conflictos semióticos.

Procesos identificados en el enunciado de la situación-problema y en la resolución:

- Procesos de significación-representación:

Se enuncia el problema con el RRS natural (vernáculo) y RRS algebraico de funciones, y de manera implícita, se efectúa una conversión al RRS gráfico representado la función en los ejes cartesianos junto con el punto dato y un punto genérico teniendo en cuenta la relación existente entre sus coordenadas. A continuación, se realiza una conversión al RRS algebraico considerando la función objetivo que se ha de maximizar, distancia de dos puntos en función de la abscisa. Mediante tratamientos en el RRS algebraico de ecuaciones se obtiene un punto singular que será clasificado en RRS numérico mediante una conversión al RRS natural. Se calcula el mínimo absoluto mediante RRS numérico y, por último, mediante el RRS natural se interpreta la solución obtenida.

- Procesos de materialización-idealización:

En el caso de la práctica PR3 se trata de construir una representación gráfica a partir de una situación idealizada, lo cual implica el reconocimiento de ciertos objetos no ostensivos. Para ello se utiliza un sistema de referencia para materializarla situación ideal.

- Procesos de particularización-generalización:

El punto P representa un ejemplar de los puntos de la curva.

La expresión *d(x)* es un ejemplar del tipo distancia entre dos puntos particularizada a los datos del problema.

- Procesos de descomposición-reificación:

Consideramos la dualidad unitario-sistémico de los objetos. En un sentido, la figura geométrica que representa el segmento del cual se pretende minimizar la distancia, se construye a partir de un proceso de reificación. En otro sentido, para la formulación de la distancia descomponen los puntos en sus coordenadas.

A continuación, se realiza la corrección de las repuestas de quince alumnos detectando las dificultades y los errores cometidos. En la siguiente tabla 6.8 se presentan los conflictos semióticos y las no congruencias entre registros de representación semiótica encontrados asociándolos a las funciones semióticas de las prácticas elementales descritas en la Tabla 6.7 correspondiente al análisis ontosemiótico de la solución experta.

CSPRi	**Descripción de los conflictos semióticos y no congruencias asociados a las prácticas elementales**	**Fr**	**%**
CSPR3 RRS	Función mediante un proceso reificación a partir de los distintos elementos. La ausencia de la función semiótica que vincula la descripción de la situación problema con el esquema gráfico dificulta la identificación de las variables o la relación entre ellas. Conversión RRL al RRG	2	13,33
CSPR3 concepto	Error al identificar punto genérico, lo considera particular	2	13,33
CSPR3 propiedad	El Punto A lo considera perteneciente a la función	1	6,67
CSPR3 propiedad	No relaciona las dos variables: coordenadas del punto que pertenece a la función	2	13,33
CSPR4 RRS	Ausencia de la función semiótica que relaciona la distancia con su expresión algebraica	1	6,67
CSPR4 RRS	No denota la función	1	6,67
CSPR4 concepto	Fórmula distancia	4	26,67
CSPR6 procedimiento	Error en la resolución ecuación	2	13,33
CSPR7-1D procedimiento	Error cálculo numérico	1	6,67
CSPR7.1-2D procedimiento	Error cálculo segunda derivada	5	33,33
CSPR7.2-2D procedimiento	Error cálculo numérico	2	13,33
CSPR8 argumento	Ausencia función semiótica que relaciona al mínimo relativo con el absoluto	10	66,67
CSPR8 procedimiento	Error cálculo numérico	1	6,67
CSPR9 argumento	No contextualiza solución	5	33,33

CSPR9 procedimiento	No se racionaliza la expresión radical	7	46,67
CSPR9 RRS	Considerar las expresiones radicales con RRS numérico decimal	5	33,33

Tabla 6.8: Conflictos semióticos y no congruencias

A continuación, describimos los conflictos semióticos y las no congruencias identificados de la Tabla 6.8.

En la práctica PR3 se representa gráficamente la situación-problema realizando una conversión del RRL al RRG, en la función se sitúa el punto genérico mediante proceso de particularización y el segmento que corresponde a la distancia a minimizar mediante un proceso de materialización. Para formular la distancia entre dos puntos, a partir del esquema gráfico, se lleva a cabo un proceso de descomposición. El no utilizar la representación gráfica para materializar la situación ideal puede dificultar la compresión de la situación problema lo que conlleva cometer errores a lo largo del proceso de resolución (CSPR3).

Tal como indica Camacho y González (1998) en los problemas de distancias los alumnos presentan dificultades al plantear la ecuación de la distancia en función de los datos iniciales. En este caso, los conflictos relacionados con la fórmula de la práctica PR4 se detecta con una frecuencia del 26,67%. Una manera de simplificar los cálculos es considerar como función a optimizar la distancia al cuadrado.

Con respecto a los conflictos semióticos relacionados directamente con la optimización detectamos con más frecuencia CSPR8 que conlleva no comprobar que el mínimo relativo sea absoluto. Además, en este caso es más ventajoso utilizar el criterio de la primera derivada por la dificultad del cálculo de la segunda derivada de una función irracional, siendo la frecuencia relativa de CSPR7-1D el 6,67 % y la frecuencia del CSPR7.1-2D es del 33,33 %. El no argumentar en qué circunstancias debe ser seleccionado cada criterio es un conflicto semiótico potencial que no fue abordado ni por el libro de texto ni en los apuntes. Se detecta que el 66,67 % de las respuestas no justifican que el mínimo relativo sea absoluto, consideramos que el conflicto CSPR8 está asociado al contrato didáctico ya que alumnos con alta puntuación también lo presentan.

Relacionado con el RRS numérico se detecta el conflicto CSPR9 donde se realiza un tratamiento en el registro numérico, pero considerando el número irracional de la expresión radical como un número decimal exacto.

Una vez mostrado el análisis ontosemiótico que hemos realizado de cada una de las dos cuestiones que se les plantearon a los alumnos, presentamos las siguientes conclusiones:

En primer lugar, la configuración cognitiva construida de acuerdo con el EOS es una herramienta que junto a la clasificación de los registros semióticos permite estructurar y visualizar la red de objetos intervinientes en el sistema de prácticas matemáticas que realiza el alumno. Mediante la comparación de la configuración cognitiva y la configuración epistémica del sistema de prácticas que se considera correcto en la institución para resolver exitosamente el problema, afloran los conflictos semióticos detectados en las respuestas del alumnado. Los procesos que intervienen en el desarrollo de las prácticas, junto con los tratamientos y conversiones entre registros de representación, nos permiten describir las causas de estos conflictos. Esta información es fundamental para el profesorado porque conociendo el origen de los errores cometidos por el alumnado se podrá diseñar una metodología adecuada para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la optimización.

El grado de detalle que proporcionan las configuraciones que hemos realizado de las cuatro situaciones-problemas permite caracterizar el significado personal de los alumnos. Presentamos las observaciones extraídas de la comparación del significado personal con respecto al significado pretendido como al implementado organizándolas según las fases de resolución de un problema (Polya, 1979).

Por una parte, detectamos dificultad por parte de los alumnos para afrontar con éxito la fase del diseño de la resolución. Sin embargo, es vital para proseguir realizando la resolución. En concreto, en relación directa con la optimización se observa dificultades para identificar y expresar adecuadamente la función a optimizar. Este hecho está relacionado con el conflicto potencial que se detecta en el significado pretendido descrito en el capítulo 4 de esta Memoria, acerca de reducir la resolución de problemas de optimización a encontrar el extremo relativo de una función, no incidiendo en procesos para aprender a describir la situación. Este conflicto potencial tampoco era abordado en el significado implementado de ambos grupos tal y como se describe el en capítulo 5.

En la fase de resolución, observamos una priorización procedimental en la realización de las prácticas en detrimento de la argumentación. Esto conlleva que el alumno no elija el criterio adecuado para la clasificación del punto singular según el tipo de función. En muchas ocasiones provoca errores en procedimientos de cálculo de derivadas y de resoluciones de ecuaciones que podrían haberse evitado. La ausencia de esta función semiótica la hicimos patente en los conflictos potenciales del significado pretendido y también en el significado implementado. También observamos que la ausencia de argumentación para justificar que los extremos relativos calculados sean los extremos absolutos que se buscan y este hecho se hace evidente en el bajo porcentaje de alumnos que realizaron las prácticas relacionadas. Este error lo vinculamos al conflicto potencial que detectamos tanto en el significado pretendidos como en el implementado al no haber introducido situaciones-problemas en donde la función esté definida en un intervalo cerrado y acotado y el extremo relativo no coincida con el absoluto teniendo que usar el Teorema de Weierstrass.

En la fase de valoración detectamos un alto porcentaje de alumnado que no contextualiza las soluciones obtenidas en el proceso de resolución e incluso detectamos conflicto cuando realizan la función semiótica. Sin embargo, no fue detectada esta dificultad como posible en los significados pretendido ni implementado.

La construcción del significado personal es de gran importancia para la labor del profesorado ya que visibilizar el entramado de las prácticas matemáticas que realiza el alumno le permite evaluar detalladamente el conocimiento, detectando discrepancias de significados. Esto facilita diseñar secuencias didácticas que contemplen las complejidades y conflictos detectados.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta Memoria se ha presentado un estudio teórico y experimental sobre la enseñanza de la optimización en 2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología basado en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos y en la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Los marcos teóricos han permitido analizar sistemáticamente el significado de referencia de la optimización como objeto matemático y comparar el significado institucional pretendido con el implementado por el profesor. También se ha analizado el significado personal evaluado de los estudiantes comparándolo con el significado implementado.

A continuación, se expondrán las principales conclusiones obtenidas en los diferentes capítulos considerando el grado de consecución de los objetivos planteados y discutiendo las hipótesis que formulamos en el capítulo 2. Además, hacemos una valoración del proceso de enseñanza-aprendizaje que hemos estudiado en términos de idoneidad didáctica según el EOS, (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007).

Por último, se presentan unas reflexiones sobre las implicaciones de los resultados de esta Memoria para la enseñanza de la optimización y su alcance para futuras líneas de investigación.

7.1. Conclusiones respecto a los objetivos e hipótesis

En el capítulo 2 de esta Memoria se planteó el siguiente objetivo general: *identificar, describir y explicar los factores relacionados con los fenómenos didácticos que surgen en la enseñanza y el aprendizaje de las nociones matemáticas asociadas a los* *problemas de optimización que se resuelven con las herramientas del Cálculo Diferencial, utilizando los instrumentos teóricos que facilitan el Enfoque Ontosemiótico y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica.*

Este objetivo general se concretó en cinco objetivos específicos cuyo grado de consecución analizamos a continuación.

Consideramos a continuación el primer objetivo relacionado con el significado institucional de referencia.

Objetivo 1: *Realizar un análisis epistemológico de la evolución histórica de la optimización a fin de detectar el significado institucional de referencia, para poder caracterizar la emergencia de dicho objeto a través de las prácticas ligadas a los diversos campos de problemas.*

En el capítulo 3 realizamos este estudio histórico-epistemológico de la optimización lo que nos permitió detectar las situaciones que dieron origen al concepto y el progreso que se realizó en las siguientes épocas. En este análisis identificamos ocho configuraciones epistémicas en los diferentes periodos, lo que nos permitió establecer los significados parciales de la optimización en el desarrollo de la historia de las Matemáticas.

En el periodo de la matemática griega clásica (IV a. C- IV d. C.) diferenciaremos dos significados: significado de la construcción geométrica asociado a la configuración CE-CG, caracterizado por encontrar la solución utilizando una construcción geométrica, y el significado mediante reducción al absurdo asociado a la configuración CE-RA, caracterizado por demostrar una situación mediante la técnica de la reducción al absurdo. En la primera mitad del siglo XVII distinguimos el significado de la adigualdad asociado a la configuración CE-AD, que se caracteriza por el método de adigualdad con la utilización de métodos puramente algebraicos. En la segunda mitad de este siglo diferenciamos los significados siguientes: el significado de la ordenada mayor o menor asociado a la configuración CE-O, caracterizado porque los puntos máximos y mínimos presentan la mayor o menor de las ordenadas en un entorno centrado en ellos; el significado de la tangente asociado a la configuración CE-T, caracterizado porque en los extremos relativos la representación gráfica de una función presenta recta tangente horizontal; y el significado de la primera derivada asociado a la configuración CE-1D, caracterizado por el cambio de signo de la primera derivada en el entorno de un punto.

En el siglo XVIII y XIX surgen dos significados: el significado de la derivada de orden superior a uno asociado a la configuración CE-2D, que está relacionada con el hecho de tener que calcular la segunda derivada (y sucesivas si es necesario) de la función en los puntos críticos para poder decidir si existe máximo o mínimo en el punto y, por último, el significado de los multiplicadores de Lagrange asociado a la configuración CE-ML, caracterizado por la aplicación de la técnica del Método de Lagrange.

A partir de estos significados parciales reconstruimos el significado institucional de referencia de la optimización logrando el primer objetivo. Mediante el análisis epistemológico de la evolución histórica del concepto de optimización se detectan diferentes configuraciones epistémicas que establecen el significado institucional de referencia de dicho objeto matemático. Esto es clave para lograr el resto de los objetivos ya que con este significado compararemos los demás significados y consideraremos si se cumplen las idoneidades que nos propusimos valorar en el capítulo 2.

Consideramos a continuación el objetivo dos que está relacionado con el significado institucional pretendido: *Analizar los libros de texto de segundo de Bachillerato, estudiando las situaciones-problemas presentes en dichos libros de texto, los lenguajes utilizados, los procedimientos puestos en juego, los conceptos que se utilizan, las propiedades y las argumentaciones realizadas como soporte del discurso matemático, así como las no congruencias de las conversiones entre registros de representación semiótica, a fin de detectar el significado institucional pretendido.*

Para lograr este objetivo, primero se analizó el currículo establecido en la legislación del sistema de educación de la comunidad autónoma andaluza que se desarrolló en la primera sección del capítulo 4.

Pusimos de manifiesto que en la asignatura de Matemáticas II de Bachillerato la técnica que se indica para abordar la resolución de los problemas de optimización es la aplicación de las herramientas del Cálculo Diferencial, que corresponden a los procedimientos identificados en las configuraciones CE-1D y CE-2D. Consideramos que las configuraciones epistémicas CE-T y CE-O están incluidas de manera implícita ya que se consideran en la etapa de la Educación Secundaria Obligatoria y por tanto forman parte de los contenidos previos.

Comparando con el significado institucional de referencia que hemos establecido las configuraciones epistémicas CE-CG, CE-RA, CE-AD y CE-ML no están presentes en el currículo.

En segundo lugar, realizamos un estudio de la optimización en una muestra de libros de texto que se indican en la Tabla 4.2 y representan el 74,57% de las editoriales utilizadas en la provincia de Jaén. En la primera fase se usaron las configuraciones epistémicas para analizar globalmente la forma en la que es tratada la optimización en los manuales de la muestra describiendo las entidades primarias. Esto nos permitió identificar los conflictos semióticos potenciales de la optimización en los dos manuales clasificándolos según cada una de las entidades anteriormente mencionadas. Según el análisis realizado del tratamiento de los objetos matemáticos por los libros de texto analizados concluimos que la faceta general predomina sobre la particular. La segunda fase del estudio consistió en un análisis ontosemiótico de un problema resuelto construyendo la configuración ontosemiótica junto a los registros de representación y procesos puestos en juego en las prácticas matemáticas realizadas. Se logró identificar las posibles dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la optimización, conflictos semióticos potenciales y no congruencias entre registros de representación, al revelar la trama de objetos que intervienen en la actividad matemática y las relaciones sinérgicas entre los mismos.

Por tanto, se verifica la primera hipótesis: *Los significados institucionales de los problemas de optimización que aparecen en los libros de texto presentan una trayectoria didáctica constituida por las entidades primarias de la actividad matemática: lenguaje, procedimientos, conceptos, propiedades, argumentaciones y conversiones entre registros de representación semiótica, donde la faceta general es predominante sobre la particular, apareciendo conflictos semióticos potenciales y no congruencias en las conversiones entre registros de representación semiótica.*

A continuación consideramos el tercer objetivo relacionado con el significado institucional implementado: *Estudiar y extraer el significado institucional implementado de los problemas de optimización que se proponen en el desarrollo de la instrucción, mediante las configuraciones epistémicas asociadas, a nivel de segundo curso de Bachillerato, utilizando los apuntes de clase, por medio del análisis de las entidades primarias de la actividad matemática ya citadas: situaciones-problema, lenguajes* *utilizados, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentaciones, así como las no congruencias de las conversiones entre registros de representación semiótica.*

El capítulo 5 está dedicado al análisis de los apuntes de clase de la instrucción llevado a cabo por el profesor. Nos centramos en los tipos de problemas y sistemas de prácticas y en la elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos para hacer visible el significado institucional implementado. En la primera parte del capítulo argumentamos mediante múltiples investigaciones didácticas que el significado implementado de un profesor se puede visibilizar mediante los apuntes que sus alumnos tomen de la clase. En la segunda parte se selecciona una muestra de dos grupos de 2º de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología cuyos profesores utilizaban como recurso didáctico uno de los dos manuales de la muestra de la Tabla 4.2. Analizamos los apuntes de clase seleccionando un alumno de cada grupo que los tomase fielmente a como se habia desarrollado las clases de la optimización.

En la primera fase se usaron las configuraciones epistémicas para analizar globalmente la forma en la que el profesor enseña la optimización describiendo las entidades primarias. Esto nos permitió identificar los conflictos semióticos potenciales de la optimización en los dos grupos clasificándolos según cada una de las entidades anteriormente mencionadas. Tal como se muestra en el análisis realizado la faceta particular predomina sobre la general de los objetos matemáticos en el desarrollo de las clases. La segunda fase del estudio consistió en un análisis ontosemiótico de un problema resuelto, construyendo la configuración ontosemiótica junto a los registros de representación y procesos puestos en juego en las prácticas matemáticas realizadas. Se logró identificar las posibles dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la optimización, conflictos semióticos potenciales y no congruencias entre registros de representación, al revelar la trama de objetos que intervienen en la actividad matemática y las relaciones sinérgicas entre los mismos.

Por tanto, se verifica la segunda hipótesis: *Los significados institucionales de los problemas de optimización que proponen los profesores a sus alumnos presentan una trayectoria didáctica constituida por las entidades primarias de la actividad matemática: lenguaje, procedimientos, conceptos, propiedades, argumentaciones y conversiones entre registros de representación semiótica, donde la faceta particular es predominante sobre la general, apareciendo conflictos semióticos potenciales, así como no congruencias en las conversiones entre registros de representación semiótica.*

A continuación, consideramos el cuarto objetivo relacionado con el significado personal: *Por una parte, extraer y analizar los significados personales de los estudiantes de Bachillerato respecto de su experiencia en el aula sobre máximos y mínimos; por otra, analizar dichos significados personales teniendo en cuenta la evaluación de las respuestas de los estudiantes a los problemas relacionados con la optimización, buscando los conflictos semióticos presentes en sus respuestas así como los procesos de conversión, y las no congruencias asociadas, entre registros semióticos.*

Una vez que se implementó la enseñanza, nos propusimos conocer aquellos significados que el alumno verdaderamente han asimilado, dedicando el capítulo 6 a esta cuestión. Para ello se evaluó a cada grupo con una cuestión relativa a situaciones-problemas de optimización realizando un análisis ontosemiótico centrado en las entidades y procesos de las prácticas realizadas por los alumnos que contestaron. Hemos utilizado las funciones semióticas lo que nos ha facilitado realizar un análisis microscópico de las respuestas y hemos podido detectar los conflictos semióticos manifestados por el estudiante.

Entre estos conflictos semióticos destacan, por su relevancia, aquellos que identificamos en el estudio como conflictos semióticos potenciales que no fueron abordados en los libros de texto, ni por el profesor en el proceso de instrucción. Constatamos que dejar a cargo del alumno la realización de determinadas funciones semióticas básicas para la correcta interpretación de proceso de estudio, conlleva dificultades para abordar con éxito la resolución de las situaciones-problemas que les hemos propuesto. La codificación realizada sobre los conflictos semióticos nos ha permitido distinguir los más relevantes que están relacionados con tratamientos y conversiones entre registros semióticos y con las técnicas de cálculo. Estas nos llevan a verificar la tercera hipótesis: *Los alumnos muestran unos conflictos semióticos relacionados con los conflictos semióticos potenciales, tanto del proceso de instrucción como de los libros de texto. Además, también aparecen conflictos semióticos relacionados con la no congruencia de las conversiones entre registros semióticos y con los instrumentos de cálculo utilizados.*

Del análisis ontosemiótico realizado se desprende que los alumnos tienen dificultades en la conversión entre el registro del lenguaje natural y el gráfico. La representación gráfica lleva implícitamente el proceso de generalización a particularización que no es trivial para el alumno. Este conflicto semiótico conlleva que al alumno no pueda continuar la resolución de la cuestión. También observamos dificultad en la conversión entre el registro gráfico y el algebraico para identificar las funciones que optimizan y las relaciones entre las variables. Centrándonos en los tratamientos numéricos observamos en repetidas ocasiones que los números irracionales sean representados mediante una expresión decimal exacta sin considerarla una aproximación. Con respecto a los conceptos contrastamos que los alumnos muestran dificultades con conceptos previos como las fórmulas de las áreas y volúmenes de figuras geométricas lo que deriva en un conflicto en la expresión algebraica de la función a optimizar. Constatamos la influencia procedimental que hemos detectado a lo largo del proceso de instrucción para la resolución de los problemas en detrimento de los argumentos. Muchos de los conflictos semióticos relacionados con los procedimientos sobre las técnicas de derivación y cálculo podrían haberse evitado si el alumno hubiese sido capaz de elegir el criterio adecuado para la clasificación de los puntos singulares. Con mucha frecuencia el alumno no comprueba la solución obtenida en el contexto o si se ajusta a los datos del planteamiento del problema. En muchos casos comprobamos que el alumno no argumenta la elección del extremo absoluto a pesar de que el profesor considera que ha resuelto con éxito la situación problema. Por los conflictos semióticos que hemos observado relacionados con los argumentos consideramos que los alumnos pueden presentar dificultades para realizar un análisis crítico del proceso seguido tal y como se le requiere a este nivel de formación.

En el siguiente apartado tratamos la conclusión respecto al quinto objetivo sobre la idoneidad didáctica.

7.2. Valoración de la idoneidad didáctica (epistémica, cognitiva y ecológica)

Dedicamos esta sección a la valoración de la idoneidad didáctica de la actividad matemática del proceso de enseñanza y aprendizaje sobre la optimización en segundo de Bachillerato, quinto objetivo de nuestra investigación. Teniendo presente el foco de atención del estudio de investigación presentado en esta Memoria, centrada en la faceta epistémica, cognitiva e interaccional, valoraremos tres de las idoneidades parciales.

En este apartado valoramos el grado de representatividad del diseño del proceso de instrucción según el significado pretendido y el significado implementado con respecto al significado de referencia.

7.2.1. Idoneidad epistémica

En primer lugar, comprobamos que las configuraciones que componen el significado pretendido restringen el significado de la optimización ya que no incluye a las que construyen el significado de referencia como desarrollamos en el capítulo 3 de esta Memoria.

En segundo lugar, en el currículo se da a la optimización un valor importante a la hora de la interpretación de fenómenos de la vida real. Tal como recoge el criterio 5º de evaluación: "Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. En concreto, se pretende comprobar la capacidad de extraer conclusiones detalladas y precisas sobre su comportamiento local o global, traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y encontrar valores que optimicen algún criterio establecido". Con respecto a las situaciones-problemas seleccionadas en los dos manuales analizados encontramos que, en general, predominan los problemas propuestos y observamos que no son representativas de situaciones reales del entorno del alumno, a pesar de ser una orientación metodológica, sin embargo, en investigaciones didácticas citadas en el capítulo 1 se aboga por la posibilidad de introducirlas en el proceso de instrucción: es factible utilizar situaciones cercanas al alumno donde intervenga la intuición optimizadora para despertar su interés hacia el tema a tratar. En cuanto al lenguaje, no hay suficiente diversidad de registros de representación semióticos relacionados, lo que consideramos que puede ser un impedimento para que el alumno comprenda la situación-problema. Apenas se utiliza el registro de representación semiótica numérico dificultando la comprensión del discurso matemático y se considera que el alumno es capaz de entender conversiones entre registros sin facilitar unas orientaciones. Una diferencia destacable entre ambos manuales es que el manual T1 utiliza un lenguaje más formal, priorizando el registro algebraico, mientras que el manual T2 recurre a descripciones verbales para facilitar al lector la comprensión del lenguaje formal.

En ambos textos la entidad procedimental prevalece sobre la argumentativa mermando la posibilidad de desarrollar la capacidad de crítica del alumno. Los dos ofrecen las mismas técnicas de resolución, criterio de la primera derivada y el criterio de la segunda derivada. Sin embargo, destacamos una diferencia entre ambos: el manual T2 generaliza a orden n la propiedad de la condición suficiente del criterio de la segunda derivada, mientras que el manual T1 solo lo expone para orden 2. Otra diferencia es que el manual T2 enuncia las propiedades, pero no las demuestra, mientras que el manual T1 las demuestra formalmente dotando de rigor a la Matemática.

Con respecto al significado implementado construido a partir del análisis de los apuntes de clase, observamos que merman en la variedad de situaciones-problemas, presentan con menos rigor los conceptos, no se demuestran las propiedades y apenas hay justificaciones ni argumentaciones. Se pone el énfasis en la aplicación de las reglas de cálculo de máximos y mínimos. Predomina el criterio de poner a disposición del alumnado problemas tipo para preparar las evaluaciones, adquiriendo práctica en el uso de algoritmos, y no en el criterio de usar los problemas para desarrollar el pensamiento matemático.

Por todo ello, consideramos que es baja la idoneidad epistémica.

7.2.2. Idoneidad cognitiva

A continuación, valoramos el grado en que los contenidos implementados en los libros de texto y pretendidos en los apuntes son adecuados para los alumnos.

Las situaciones introductorias incluidas en los manuales no son adecuadas para el alumnado. La perteneciente al texto T1 está lejos de los conocimientos previos del alumnado y la presentada en el texto T2 es poco atractiva para los intereses del estudiante, por tanto, no serán motivadoras para el aprendizaje del nuevo contenido. Las situaciones-problemas se ordenan en los libros por orden de dificultad considerado como actividades de refuerzo las que aparecen en los primeros puestos y como actividades de ampliación las incluidas al final de cada unidad.

Sin embargo, las utilizadas en los dos apuntes tratan sobre rectángulos isoperimétricos y la consideramos adecuadas porque permiten ser abordadas de manera manipulativa utilizando la técnica de ensayo y error facilitando la conexión con los conocimientos previos.

Con respecto a los conflictos semióticos potenciales que hemos detectado en el significado pretendido observamos que en los apuntes del proceso de instrucción del manual T1 se abordan alguno de ellos, pero, por el contrario, en los apuntes pertenecientes a T2, ninguno, lo que puede suponer una gran dificultad para el aprendizaje del alumno tal y como se muestra en la evaluación.

La evaluación ha detectado una gran dificultad para comprender e interpretar las situaciones-problemas presentadas en el registro de representación verbal. En las repuestas hay un gran peso de la competencia procedimental en detrimento de la argumentativa. A lo largo de la Memoria de Investigación hemos indicado trabajos de investigación acerca de la aplicación de algoritmos para resolver problemas de manera mecánica por parte del alumno, que avalan que éstos consideran como ciertas respuestas imposibles que, incluso, contradicen a la solución intuitiva. Además, la ausencia de argumentos para elegir adecuadamente el criterio para clasificar los máximos y mínimos puede suponer un obstáculo a la hora del cálculo de derivadas, ya que hay tipos de funciones cuyas derivadas sucesivas son tediosas de calcular, sin embargo, es fundamental para resolver con éxito la solución-problema.

Por todo ello, consideramos que es baja la idoneidad cognitiva.

7.2.3. Idoneidad ecológica

En este apartado valoramos la idoneidad ecológica en cuanto al grado en que el plan diseñado en los libros de texto y en los apuntes de clase para aprender la optimización, resulta adecuado dentro del entorno del estudiante de Bachillerato.

En primer lugar, en cuanto a la adaptación al currículo los libros analizados ponen el énfasis en la aplicación de las reglas de cálculo de máximos y mínimos a pesar de las indicaciones establecidas en el currículo: “la resolución de problemas debe servir para que el alumnado desarrolle una visión amplia y científica de la realidad, para estimular la creatividad y la valoración de las ideas ajenas, la habilidad para expresar las ideas propias con argumentos adecuados y el reconocimiento de los posibles errores cometidos”. Sin embargo, la resolución de los problemas de optimización en los manuales revisados sigue un esquema predeterminado aplicando procedimientos de manera rutinaria en detrimento de los conceptos, propiedades y argumentaciones. Predomina el criterio de poner a disposición del alumno muchos problemas tipo, adquiriendo práctica en el uso de los algoritmos, y no el criterio de usar los problemas para desarrollar la capacidad de análisis, la creatividad y el pensamiento crítico. La secuencia que presentan los manuales para la exposición de contenidos sigue la siguiente pauta: muestra de ejemplos, realización de ejercicios sencillos, finalizando con la resolución de problemas relacionados. Esto contradice la directriz curricular de aprender a resolver problemas, ya que anula la esencia de que un problema es una situación para la cual no existe, a priori, un camino evidente para resolverla. Con respecto a las situaciones-problemas seleccionadas en los manuales, encontramos que, en general predominan los problemas propuestos y observamos que no son representativas de situaciones reales del entorno del alumno a pesar de ser una orientación metodológica, sin embargo, en investigaciones didácticas citadas se aboga por la posibilidad de introducirlas en el proceso de instrucción.

Los apuntes analizados siguen las mismas pautas que los libros de texto en cuanto a las directrices del currículo. Basándonos en la selección de las situaciones – problemas, el tipo de actividad que se propone para el aprendizaje del alumno es la resolución de los problemas de manera rutinaria aplicando procedimientos en detrimento de los conceptos, propiedades y argumentaciones a pesar de las indicaciones establecidas en el currículo.

En segundo lugar, observamos que no aparece la integración de las nuevas tecnologías, ni en los manuales ni en los apuntes, aunque el proyecto educativo indica que deben ser integradas. En esta Memoria aparecen trabajos de investigación en los que se realizan propuestas para usar las calculadoras gráficas en el proceso de instrucción, lo que supondría un magnifico recurso didáctico para que el alumno construya su propio conocimiento.

En tercer lugar, la optimización es un contenido que contribuye a la adaptación socio-profesional del alumnado ya que le permite afrontar conocimientos superiores que tengan relación con el Cálculo Diferencial y además le dota de herramientas para abordar situaciones de la vida cotidiana que estén relacionadas con este contenido.

Por todo ello, consideramos que es baja la idoneidad ecológica.

7.3. Limitaciones y sugerencias para otras investigaciones

Una de las limitaciones de esta investigación es el número de alumnos que forman la muestra intencional, con los que hemos realizado el estudio lo que no permite generalizar los resultados. Otra de las dificultades encontrada es la excepcionalidad del curso de 2º de Bachillerato en sentido de que el proceso de instrucción está influenciado por las pruebas de nivel externas. Esto condiciona la planificación del profesorado y conlleva organización rígida del tiempo, por lo que la intervención exterior debe ser mínima.

Algunos aspectos concretos en los que la investigación podría continuarse para completar este estudio son los siguientes:

Para solventar las limitaciones debido a los procesos de muestreo (tipo y número de estudiantes, tiempo limitado de enseñanza, tipo de problemas evaluados) consideramos necesario réplicas de la investigación donde se pueda contrastar los resultados obtenidos aumentando el tamaño muestral.

Como indicamos en el capítulo 1 de esta Memoria existen numerosas investigaciones que consideran necesario incorporar el uso de las nuevas tecnologías en el proceso de instrucción para contribuir al desarrollo del aprendizaje de los estudiantes. Teniendo en cuenta las actividades descritas, (González, 2006; Díaz, 2014 y Navarro et al., 2016), creemos que es posible que la tecnología pueda contribuir a mejorar la idoneidad didáctica de la optimización. Por tanto, consideramos necesario una investigación a fondo en el futuro acerca de la implementación de los recursos tecnológicos en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la optimización en Bachillerato.

Ampliar posibles concordancias y complementariedades con otros marcos teóricos distintos de la TRRS pero que son cercanos a los fundamentos del EOS, es decir, se trata de realizar trabajos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la optimización comparando el EOS y la TRRS con otros modelos didácticos como la Teoría de Situaciones didácticas de Brousseau (1998) o el modelo cognitivo APOS de Dubinsky (1996).

Profundizar teóricamente en la naturaleza de los conflictos semióticos de los alumnos en cuanto a la optimización, utilizando diversos sistemas de representación semiótica, junto a las conversiones y tratamientos, y proponiendo una red de funciones semióticas que puedan justificar y completar la hipótesis de Duval, por la cual, para que el conocimiento emerja es necesario el uso de varios registros y los cambios entre ellos.

7.4. Principales aportaciones de la investigación

El trabajo presentado a lo largo de esta Memoria presenta algunas contribuciones a la Didáctica del Análisis a nivel de Bachillerato y, en particular, al estudio de la enseñanza y aprendizaje de la optimización.

En primer lugar, para poder explorar los fenómenos didácticos sobre la optimización comenzamos realizando un estudio histórico-epistemológico, que nos permitió a partir de la identificación de las configuraciones epistémicas movilizados en los sistemas de prácticas, asociar los significados parciales que constituyen el significado institucional de referencia. Esta reconstrucción es de interés puesto que los significados de la optimización pretendidos por una institución o profesor deben ser representativos de este significado global y las ausencias de significado o entidades primarias explican dificultades en el aprendizaje.

En segundo lugar, al estudiar el significado institucional pretendido mediante el análisis didáctico de dos manuales se ha obtenido un conjunto de conflictos semióticos potenciales respecto de la optimización, lo cual además de una aportación original supone un apoyo a la enseñanza del concepto.

Una aportación que yo considero de las más importantes es la utilización de la TRRS y del EOS al análisis de la resolución de problemas de optimización utilizando las herramientas de los tratamientos, conversiones y funciones semióticas, ya que ha permitido dar explicación a ciertos fenómenos didácticos y también ha contribuido a profundizar en la complementariedad y armonización de los dos marcos teóricos respecto de la optimización.

Referencias

Referencias

Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2016) ¿Cómo son los apuntes de matemáticas de un estudiante? Influencia de los elementos matemáticos y sus relaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 34 (1), pp. 149-172.

Baccelli, S. Anchorena, E. G., Moler, M.A. y Aznar, G. (2013) Análisis exploratorio de las dificultades de alumnado de Ingeniería en la resolución de problemas de optimización. *Números,* 84, pp. 99-113.

Balcaza, T., Contreras, A. y Font, V. (2017) Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato. *Bolema*, Rio Claro (SP), 31 (59), pp. 1061-1081.

Bessot, D., Lanier, D., Le Goff, J.P., Levard, M., Trotoux, D. (1999) Aux origines du calcul infinitésimal. Comprendre les mathématiques par les textes historiques. *IREM. Histoire des Mathématiques*.

Boyer, C. B. (1999) *Historia de la matemática* [A history of mathematics] (M. Martínez Trad.). Madrid: Ed. Alianza Editorial.

Bromberg, S. y Rivaud, J,J, (2001) Fermat y el Cálculo Diferencial e Integral. *Miscelanea Matemática,* 34. pp. 59–71.

Brousseau, G. (1998) Théorie des Situations Didactiques. *Grenoble, La Pensée Sauvage*.

Camacho, M. y González, A. (1998) Una aproximación a los problemas de optimización en libros de Bachillerato y su resolución con la TI-92. *Revista de Pedagogía de la Universidad de Salamanca*, Salamanca, 10, pp. 137-152.

Campos, M. A., y Estrada, J. (1999) Representaciones matemáticas de estudiantes preuniversitarios en la resolución de un problema de optimización. *Educación Matemática*, 11 (2), pp. 30-50.

Castañeda, A. (2006) Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y Maria G. Agnesi. *Relime,* 9 (2), pp. 253-265.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011) Research Methods in Education. Routledge, London. UK.

Colera J. et al. (2009). Matemáticas II. Madrid, España: Anaya

Collette, J. (1993) *Historia de las matemáticas II* (3ª ed. en castellano). Madrid: Ed. Siglo XXI.

Contreras, A. (2002) ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? *Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. XVIII Jornadas del SI-ID),* Castellón, pp. 1-23.

Contreras, A. y García, M. (2011) Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14 (3), pp. 277-310.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006) Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1), pp. 65-84.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordoñez, L. (2005) Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherche en Didactique de Matematiques*, 25 (2), pp. 151-186.

Contreras, A., Luque, L. y Ordóñez, L. (2004) Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo. *Educación Matemática,* 16, (1), pp. 59-87.

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M.R. (2010) Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 28 (3), pp. 367-384.

D' Alexandrie, P., Eecke, P.V (1933) *La collection mathématique*. Paris: Ed. Desclée de Brouwer.

De la Torre C.A., Suescún A. C. M. y Alarcón V.S. A. (2005) El método de máximos y mínimos de Fermat. *Revista Lasallista de investigación*, 2 (2), pp.31-27.

Del Pino-Ruiz, J. Estepa, A. (2017) Análisis del tratamiento de la dispersión en libros de texto de 3º y 4º de la Educación Secundaria Obligatoria. *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico.* Congreso CIVEOS.

Díaz, J. L. (2014) Simulación y modelación de problemas de optimización del cálculo diferencial con la hoja de cálculo. *Universidad de Sonora, Epistemus*, 16, pp.48-54.

Driscoll, P., Kobylski, G. (2002) A method for developing student intuition in nonlinear optimization. *PRIMUS,* 12 (3), pp. 277–286.

Dubinsky, E. (1996) El aprendizaje de los conceptos abstractos de la matemática avanzada. *Memorias de la X REUNIÓN CENTROAMERICANA Y DEL CARIBE sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa.* San Juan Bautista de Puerto Rico: Universidad de Puerto Rico, pp. 1-9.

Durán, A. (1996) *Historia con personajes de los conceptos del cálculo*. Madrid: Ed. Alianza Editorial.

Duval, R. (1995) *Sémiosis et pensée*: *registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Editeur: Peter Lang Berne. Suisse Collection: Exploration.

Duval, R. (2006) A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, 61 (1), (2), pp. 103-131.

Duval, R. (2009) Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Ed. Livraria da Física.

Escoredo A. et al.(2009) Matemáticas II. Madrid, España: Santillana

Duval, R. (2011) *Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: Proem.

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013) Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education,* 45 (5), pp. 633–646.

Font V. (2009) Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función f(x)= x^2 sin usar la definición por límites. *Unión: Revista iberoamericana de educación matemática*, 18, pp. 12-28.

Font, V. y Godino, J. D. (2006) *La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores.* São Paulo: Ed. Educação Matemática Pesquisa, 8 (1), pp. 67-98.

Font, V. y Rubio, N. V. (2017) Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Fried, M. y Amit, M. (2003) Some reflections on mathematics classroom notebooks and their relationship to the public and private nature of student practices. *Educational Studies in Mathematics,* 53(2), pp. 91-112.

Furinghetti, F. (2004) History and mathematics education: A look around de world with particular reference to Italy. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1-2), pp. 1-19.

Gaud, D., Guichard, J., Sicre, J.P. y Chretien, C. (1998) *Des tangents aux infiniment petits*. Paris: Ed. Irem.

Gea, M. M., Fernandes, J. A., López-Martín, M. M. y Arteaga, P. (2017) Conflictos semióticos relacionados con la organización de datos bidimensionales en libros de texto de Bachillerato. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Ghiglione, R. y Mataron, B. (1989) *Las encuestas sociológicas: teorías y prácticas*. México: Ed. Trillas.

Giacomone, B. (2017) Análisis ontosemiótico de una tarea de modelización matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

Godino, J. D. (2002) Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 22 (2-3), pp. 237-284.

Godino, J. D. (2011) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência interamericana de educação matemática – CIAEM-IACME,* Recife (Brasil).

Godino, J. D. (2017) Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007) The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, V. 39 (1-2): 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* 27 (2), pp. 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006) Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 26 (1), pp. 39-88.

Godino, J. D. y Font, V. (2010) The theory of representations as viewed from the ontosemiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *9*(1), pp. 189-210.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, SpecialIs sueon Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, pp. 131-155.

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A., & Giacomone, B. (2016) Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, pp. 91-110.

González P. (1992) *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII.* Madrid: Ed. Alianza Univ, n.º 716.

González, M.T. (2002) Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos. *Tesis doctoral.* Universidad de Salamanca.

González, M.T. (2004) Los problemas de optimización en la enseñanza secundaria en España. Un paseo a través de reformas, orientaciones y libros de texto. *XIII Encontro de Investigaçao en educaçao Matemática. Historia do Ensino de Matemática en Portugal. Sociedade Portuguesa de Ciencias da Educação*, pp. 33-58.

González, M.T. (2006) Solución de problemas de optimización usando geometría dinámica. *Conferencia en el III Congreso Iberoamericano de Cabri*. Bogotá (Colombia).

González, M.T. (2011) Revisitando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de L'Hôpital. *Epsilon: Revista de Educación Matemática*, 28(1), pp. 83-97.

González, M.T. y Sierra, M. (2004) Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (3), pp. 389-408.

Grattan-Guinnes, I. (1984) *Del cálculo a la teoría de conjuntos.* Madrid: Ed. Alianza Editorial.

Heath, T. L. (Trad) (1956) The thirteen books of Euclid's Elements. New York: Ed. Dover publications.

Karelin, O., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2007) Propuesta didáctica sobre la construcción de la recta tangente sin el uso de la derivada. En: Martínez, G. (ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, pp.386-391. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C: México.

Kindt. M. (1995) Problemas antiguos y la calculadora gráfica. *Uno*, 4, pp. 41-52.

Kline, M. (1992) *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Madrid: Ed. Alianza Universidad, (1).

Lacasta, E., Malaspina, U., Pascual, J.R. y Wilhelmi, M.R. (2009) Análisis a priori de una situación de optimización en segundo de educación primaria. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (eds.) *Investigación en educación matemática XIII*, Santander: Ed. SEIEM, pp. 259-271.

Lagrange, J.B, Artigue, M., Laborde, C. y Trouche. L. (2001) A meta study on IC Technology in education. Towards a multidimensional framework to tackle their integration. *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Freudenthal Institute. Proceedings of the PME 25, Utrecht (Netherlands), pp.111-122.

Ligero S. (2017) Dos veces por la ciencia y la razón. *Mètode,* 93, pp. 33-37.

Lowther, M. (1999) Optimization: A Project in Mathematics and Communication. *The Mathematics Teacher*. 92 (9), pp. 764-67, 812.

Malaspina, U. (2008) Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. *Tesis doctoral*. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Malaspina, U. y Font, V. (2010) The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht (Netherland), 75, (1), pp. 107-130.

Martínez, M. (2006) La investigación cualitativa (síntesis conceptual). *Revista de Mathematical Society*. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), pp. 103-131.

Moreno, S. y Cuevas, C. (2004) Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. *Educación Matemática*, 16 (002), pp. 93-104.

Navarro L. A., Robles A. D., Ansaldo J. C. y Castro F. J. (2016) Secuencia didáctica apoyada en tecnología para la construcción del concepto derivada en problemas de optimización. *UNION,* 46, p. 171.

Nogueira, S. (2005) Efectos del uso de la pizarra en la toma de apuntes de estudiantes universitarios. *Cultura y Educación*, 17(4), pp. 373-385.

Noguero, F. L. (2002) El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación*, 4, pp.167-180.

Ordóñez, L. (2011) Restricciones institucionales en las Matemáticas de 2º de Bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida. *Tesis doctoral. Universidad de Jaén.*

Parra, Y. y Pino-Fan, L. (2017) Análisis Ontosemiótico de los libros de texto chilenos: el caso de la noción de función. *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico.* Congreso CIVEOS.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011) Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática. Pesquisa*, São Paulo, 13 (1) pp. 141-178.

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Duval, R. y Font, V. (2015) The theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: linking looks for the study of mathematical understanding. *En Beswick, K., Muir, T. & Wells, J. (Eds.), Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 33-40. Hobart, Australia: Ed. PME Group.

Polya, G. (1975) How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method. ed. Princeton: University Press.

Salgado-Horta, D. y Maz-Machado, A. (2013) Toma de apuntes y aprendizaje en estudiantes de Educación Superior. *Revista Complutense de Educación*, 24(2), pp. 341-358.

Santiago, A. (2008) Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI. *Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.*

Tall, D. (1997) *Functions and Calculus*. ed. Dordrecht: Kluwer. *Mathematics Education Research Centre.* University of Warwick.

Tannery, P., Henry, CH. y Fermat, P. (1912) *Oeuvres de Fermat*. ed. París: Ed. P, Gauthier-Villars.

Teng, H. C. (2011) Exploring note-taking strategies of EFL listenerst. *Procedia. Social and Behavioral Sciences*, 15, pp. 480-484.

Thomson, S., Fleming, N. (2004) *Summing it up: Mathematics achievement in Australian schools in TIMMS 2002*. TIMSS Australia monograph (6).

Tikhomirov, V. M. (1986) *Stories About Maxima and Minima*. Rhode Island: American.

Villegas, J.L., Castro, E. y Gutiérrez, J. (2009) Representaciones en resolución de problemas: un estudio de caso con problemas de optimización. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), pp. 279-308.

Villers, C. (1997) Optimisation des les premieres annees du secondaire. *Mathematique et Pedagogie*, 112, pp. 31-43.

Zhu, Y. y Fan, L. (2006) Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4 (4), pp. 609-626.