Universidade de Aveiro Departamento de Educação e Psicologia
2018

LUCIA YENI WULANDARI SUHARMAN

RACIOCÍNIO ALGÉBRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES EM TIMOR-LESTE

Universidade de Aveiro Departamento de Educação e Psicologia
2018

LUCIA YENI WULANDARI SUHARMAN

RACIOCÍNIO ALGÉBRICO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES EM TIMOR-LESTE

A tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Educação, sob orientação científica da Professora Doutora Maria Teresa Bixirão Neto, professora auxiliar da Universidade de Aveiro - Portugal e coorientação científica do Professor Doutor Juan Diaz Godino, professor catedrático da Universidade de Granada - Espanha

Dedico este trabalho à minha família, o Fernando Hanjam e a Godeliva Christina Putri Jenilita Hanjam pela sua paciência, compreensão, coragem e apoio ao longo deste caminho.

o júri

Presidente

Doutor Carlos Fernandes da Silva
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Doutora Maria Del Carmen Batanero Bernabeu
Professora Catedrática da Universidade de Granada

Doutor José Antonio da Silva Fernandes
Professor Associado da Universidade do Minho

Doutor Juan Diaz Godino
Professor Catedrático Jubilado da Unversidade de Granada (coorientador)

Doutora Ana Paula Canavarro
Professora Auxiliar da Universidade de Évora

Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Aos meus orientadores, Doutora Maria Teresa Bixirão Neto e Doutor Juan Diaz Godino, pelos seus conhecimentos e sugestões transmitidos durante a elaboração da tese e pelas suas orientações. Fundamentalmente, pela valiosa e incansável paciência, os seus apoios na superação dos diversos obstáculos, correção e compreensão perante as dificuldades, e disponibilidade sempre demonstrada.

Ao meu governo, República Democrática de Timor-Leste, em particular Universidade Nacional Timor Lorosa'e, pela oportunidade para continuar meu estudo na Universidade de Aveiro, em Aveiro, Portugal.

A todos os docentes do Programa Doutoral do Departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro.

Aos estudantes participantes do curso da Licenciatura do Ensino da Matemática da Universidade Nacional Timor Lorosa'e pelas suas colaborações durante o percurso da investigação.

À colega Mariana Ribeiro Clemente, pela sua disponibilidade e colaboração na correção da língua portuguesa.

Aos meus colegas, cujo nome não vou especificar, pelo apoio, pela motivação, pela amizade durante a realização da minha investigação na Universidade de Aveiro.

palavras-chave raciocínio algébrico, conhecimento didático-matemático, formação inicial de professores, aprendizagem da álgebra, ação formativa

resumo

A principal finalidade deste trabalho é promover o desenvolvimento do raciocínio algébrico (RA) e do conhecimento didático-matemático (CDM) de futuros professores timorenses no âmbito de uma ação formativa em Álgebra.

A fundamentação teórica centra-se na aprendizagem da Álgebra e no desenvolvimento do conhecimento na formação inicial de professores do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Sobre a Álgebra envolve-se o RA e, também, erros e dificuldades na aprendizagem da Álgebra. Descrevem-se conceitos da teoria do Enfoque Ontossemiótico (EOS) do conhecimento e instrução da Matemática, ferramentas utilizadas neste estudo: o modelo do conhecimento didático – matemático (CDM) do professor; os níveis do RA nas atividades matemáticas.

A ação formativa em Álgebra decorreu na unidade curricular de Prática Pedagógica II, do curso de Licenciatura no Ensino da Matemática, da Universidade Nacional de Timor Lorosa'e, com estudantes do 4.º ano deste curso. Ao longo deste processo formativo desenvolveram-se e avaliaram-se os conhecimentos destes estudantes na resolução de tarefas algébricas e na identificação dos níveis de raciocínio algébrico envolvidos.

O estudo segue uma metodologia da natureza mista, assumindo um carácter fundamentalmente descritivo, onde a investigadora assume também o papel de formadora.

A recolha de dados foi realizada através da aplicação de dois questionários a um grupo de 24 estudantes, um antes e outro após a ação formativa. Foram também realizadas fichas de trabalho em grupo, durante a realização da ação formativa, e entrevistas clínicas a quatro grupos de alguns estudantes, tendo por base os resultados do questionário final.

As tarefas apresentadas visam uma articulação entre o conteúdo algébrico e didático e permitiram explorar o desenvolvimento do RA manifestado pela utilização de objetos algébricos, transformações e linguagem, e o conhecimento didático nas facetas epistémica, cognitiva e instrucional.

Na avaliação inicial, o estudo revela os significados pessoais dos futuros professores e as suas necessidades de formação para enfrentar as dificuldades de formas do raciocínio algébrico e do conhecimento didático. A falta de domínio da língua portuguesa dificulta os futuros professores na tradução da linguagem verbal para a linguagem algébrica, que teve implicações na compreensão relativamente à situação problemática das tarefas. A preocupação relativamente ao domínio do conhecimento didático-matemático, na construção ou modificação de uma tarefa refere-se à importância que os futuros professores devem ter sobre este tipo de conhecimento para ensinar os seus futuros alunos.

Os resultados da avaliação final mostram a evolução na sua capacidade de utilizar os objetos e processos algébricos, de generalizar e de expressar algebricamente essa generalização. Mesmo assim, ainda se encontraram dificuldades de alguns estudantes ao nível da: modelação matemática; da resolução de equações (envolvendo operações e propriedades com radicais); da construção de uma tarefa algébrica. A entrevista clínica revela ser um meio que, além de permitir recolher dados, também ajuda os estudantes a ultrapassar as dificuldades na aprendizagem da Álgebra.

Os resultados deste estudo mostram que existe necessidade dos futuros professores timorenses terem formação adequada que lhes permita desenvolver as capacidades didático-matemáticas em atividades que envolvem o raciocínio algébrico e promover, também, a capacidade de integrar o conhecimento dos conteúdos matemáticos e a especificidade de ensinar.

keywords algebraic reasoning, didactic - mathematics knowledge’s; pre - service teachers education; training course

Abstract

The main purpose of this work is to promote the development of algebraic reasoning (AR) and didactic-mathematical knowledge (DMK) of future Timorese teachers within the range of a formative action in Algebra.

The theoretical foundation focuses on the learning of Algebra and the development of knowledge in the pre-service teacher’s education of Primary Education and Secondary Education. In this study, Algebra includes the AR and also errors and difficulties in the learning of Algebra. Concepts such as the onto-semiotic approach (OSA) of mathematical knowledge and instruction will be further described as the main tools used in this study: the teacher's didactic-mathematical knowledge model (DMK) and the AR levels in mathematical activities.

The training course in Algebra was held in the Pedagogical Practice II course of the Mathematics Teaching Degree course of the National University of Timor Lorosa'e with students attending the 4th year. Throughout this formative process, the students' knowledge was developed and evaluated by solving algebraic tasks and by identifying the levels of algebraic reasoning involved.

The study follows a methodology of mixed nature, assuming a fundamentally descriptive character, where the researcher also assumes the role of trainer.

The data collection was performed through the application of two questionnaires to a group of 24 students, one before and another after the training course. Group work sheets were also carried out during the formative action. Moreover, based on the results of the final questionnaire, clinical interviews were given to four groups formed by some students.

The tasks were aimed at the articulation between the algebraic and didactic content that allowed exploring the development of the AR that manifests through the use of algebraic objects, transformations and language, and didactic knowledge in the epistemic, cognitive and instructional facets.

In the initial evaluation, the study reveals the personal meanings of future teachers and their training needs to face the difficulties of forms of algebraic reasoning and didactic knowledge. The lack of mastery of the Portuguese language makes it difficult for future teachers to translate verbal language into algebraic language, which implies understanding the problem situation of the task. The concern about the domain of didactic-mathematical knowledge of the type of construction or modification of a task refers to the attention that should be payed to this particular knowledge that future teachers should have to be able to teach their future students.

The results of the final evaluation show the evolution in its ability to use algebraic objects and processes, to generalize and to express algebraically this generalization. Even so, difficulties were still encountered by some students at the level of: mathematical modelling; solving equations (involving operations and properties with square root); the construction of an algebraic task. The clinical interview allows data collection and it also helps students to overcome the difficulties in learning Algebra.

The results of this study show that there is a need for future Timorense teachers to have adequate training which enables them to develop didactic-mathematical skills in activities involving algebraic reasoning and also to promote the ability to integrate knowledge of mathematical contents and to teach.

Índice

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Introdução

1. Contextualização e justificação de estudo

A didática da Matemática constitui-se como um campo de práticas de ensino e de aprendizagem de professores e de alunos e, hoje em dia, alarga-se o seu significado à área da investigação científica, onde se realiza trabalho de investigação e produção de novo conhecimento. Para além destas dimensões, a didática da Matemática ocupa-se também da área da formação de professores (inicial ou contínua) onde se transmite esse conhecimento específico aos futuros professores e aos professores que estão em serviço. Estes três campos de didática são conhecidos pelo *tríptico didático*, ideia preconizada por Alarcão (2006, p. 176), nomeadamente: a didática que se refere às práticas dos professores na sala de aula (didática da ação profissional); a didática que se ensina e se refere à formação curricular, inicial e/ou contínua (didática curricular); e a didática que se investiga ou diz respeito ao trabalho do investigador nesta disciplina (investigação em didática). Ainda no pensamento da autora, este tríptico didático contextualiza-se em momentos preferencialmente distintos, interligando-se entre si de modo a estabelecerem-se interfaces de conceptualização e de ação.

A didática da *ação profissional* refere-se ao conhecimento inicial que um professor deve ter em relação ao seu trabalho, nomeadamente: os conteúdos das disciplinas; os métodos de ensino e de aprendizagem; utilização das técnicas e recursos didáticos; e avaliação da aprendizagem. Na distinção da Alarção (2006), a didática profissional refere-se à atividade do professor em ação, no que diz respeito, a dimensão praxeológica, atuante, performativa, dialógica, interventiva direta da didática.

Relativamente à *didática curricular*, a didática que se ensina no curso de formação de professores, Alarção (2006) afirma que é: "(...) à didática curricular de ensino da mesma, (...), assumiu a responsabilidade de formar professores nas competências científica e pedagógica" (p. 268-269). Portanto, a didática curricular tem como finalidade a preparação do futuro professor para a sua atuação pedagógica que se inicia através do programa de estágio pedagógico.

A ideia da *investigação em didática* é promover a prática do professor na realização da investigação-ação. Ou seja, fomenta no professor o hábito de refletir, diariamente, sobre o seu trabalho com o objetivo de avaliar os pontos fortes e os pontos fracos, daí procura os meios para a melhoria do seu desempenho (o seu ensino) e melhoria, também, ao nível da aprendizagem dos alunos. Na conceção de de Saraiva e Ponte (2003), a reflexão é, desta forma, mais do que uma simples tomada de consciência duma experiência e dum conhecimento (reflexão sobre os conteúdos). Uma reflexão envolve, também, a crítica sobre o modo de: perceber, pensar, julgar e agir (reflexão sobre os processos), bem como sobre as razões do porquê termos feito o que fizemos (reflexão sobre as premissas). A reflexão utiliza-se quando queremos uma orientação para a negociação de um passo que envolve uma série de ações ou quando nos debatemos com uma dificuldade na compreensão de uma nova experiência.

Relativamente às investigações em educação Matemática, produzem-se novos conhecimentos relacionados com as aprendizagens dos alunos e com as práticas profissionais dos professores, tendo benefícios no âmbito da reestruturação e melhoria do processo de ensino e de aprendizagem. As orientações curriculares dos vários temas da Matemática (Ponte, Branco & Matos, 2009; NCTM, 2000; Ponte, 2005; Abrantes, 2005), os métodos e as técnicas de ensino (Kieran, 2006; Ponte & Chapman, 2006; Chapman, 2013); a avaliação da aprendizagem (Abrantes, 2001; Menino & Santos, 2004; Fernandes, 2008; Fernandes, Alves & Mechado, 2008; Alves & Flores, 2010); a utilização de materiais didáticos (Alves & Morais, 2006; Botas & Morreira, 2013); e a utilização de tecnologia da informação e comunicação - TIC (Ferrara, Pratt, & Robutti, 2006; Ricoy & Couto, 2011) são os temas que frequentemente constituem o foco da investigação em educação Matemática. Além disso, o tema da formação de professores, quer inicial quer contínua, é considerado muito pertinente para desenvolver as capacidades do professor e do futuro professor na sua prática profissional e na sua compreensão da Matemática (Ponte & Chapman, 2008; Branco & Ponte, 2012; Aké, 2013; Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014).

A formação inicial de professores de Matemática do Ensino Básico e do Ensino Secundário Geral foca-se num conjunto de preocupações que têm uma importância notória na determinação de qualidade da aprendizagem de Matemática dos alunos na escola. Estas preocupações são relativas ao currículo; aos materiais didáticos; aos métodos e às técnicas de ensino; aos fatores psicológicos dos alunos; à gestão na sala de aula; à avaliação da aprendizagem; e à sua compreensão no conteúdo de Matemática.

A formação inicial de professores de Matemática em Timor-Leste é realizada no curso de Licenciatura do Ensino de Matemática na Universidade Nacional de Timor Lorosa'e. Este curso tem como objetivo principal formar os professores de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário Geral. Este curso estabelece uma série de unidades curriculares que envolvem conteúdos Matemáticos e conteúdos pedagógicos. Mesmo assim, notam-se algumas limitações relativamente às disciplinas lecionadas neste curso. No curso de Licenciatura não existe a disciplina "Didática da Matemática" como um espaço de discussão e reflexão sobre aspetos fundamentais do ensino e aprendizagem da Matemática, em particular os aspetos que se encontram nos currículos das disciplinas de Matemática do 3.º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário Geral, tais como: programas de Matemática do 3.º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário; análise das tarefas matemáticas (tipos de tarefas, tarefas matematicamente válidas, diversificação de tarefas); exploração das tarefas para os temas curriculares (números e operações, geometria, álgebra, e organização e tratamento de dados).

A disciplina "Introdução à Aritmética e à Álgebra" é uma disciplina de 6 ECTS, sendo a única disciplina onde se leciona os conhecimentos algébricos básicos, tais como: operações algébricas; polinómios e equações polinomiais. Destaca-se a importância do conhecimento da Álgebra e de como raciocinar algebricamente para que os alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário desenvolvam o seu conhecimento de Matemática. Por estes motivos, esta disciplina deve ocupar um espaço importante na formação inicial dos professores de Matemática de modo a capacitá-los para ensinar a Álgebra.

Considera-se que a Álgebra é um tema importante no currículo de Matemática do 3.º ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, o que exige que os futuros professores tenham um conhecimento profundo sobre a Álgebra. No estudo que aqui se apresenta, pretende-se estudar o ensino e a aprendizagem na formação inicial de professores de Matemática em Álgebra, mais concretamente no que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio algébrico básico e avançado, como tem sido sugerido por vários investigadores no âmbito do ensino de Matemática (Aké, 2013; Blanton & Kaput, 2005; Branco & Ponte, 2011; Carraher & Schliemenn, 2007; Eugenio, Rojano & Puig, 2007; Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014). Estes investigadores manifestam preocupação e interesse na melhoria do ensino da Álgebra, em particular ao nível dos fenómenos de ensino, do domínio de conceitos e dos procedimentos algébricos. Além disso, a Álgebra tem uma grande presença como conteúdo Matemático em diferentes fases do sistema educativo, especialmente, a partir do Secundário e no Ensino Superior, embora nos últimos vinte anos tenham surgido propostas para incorporar certas questões do Pensamento Algébrico no Ensino Básico (Socas, 2011).

Na formação inicial de professores de Matemática, os futuros professores devem desenvolver uma melhor compreensão sobre os processos pelos quais se aprende a ensinar Matemática e se desenvolve a identidade profissional do professor. Esta formação deve promover a capacidade de integrar o conhecimento dos conteúdos e processos matemáticos bem como a especificidade de ensinar (Ponte & Chapman, 2008).

Considera-se a importância do desenvolvimento do raciocínio algébrico dos estudantes, futuros professores, para que eles valorizem o raciocínio dos seus futuros alunos e a importância de realizar uma seleção das tarefas que possam promover uma dinâmica de sala de aula conducentes ao desenvolvimento do raciocínio algébrico (Canavarro, 2007). Ao longo deste trabalho, procura-se estudar o raciocínio algébrico, relativamente à analise deste raciocínio baseada na categorização dos níveis de raciocínio algébrico para o Ensino Básico e para o Ensino Secundário desenvolvida por Godino, Neto, Wilhelmi, Ake, Etchegaray e Lasa (2015).

Assumindo a importância que o conhecimento de conteúdo e o conhecimento didático têm na formação dos futuros professores, Ponte e Branco (2011) sugerem que se proporcionem aos futuros professores várias experiências de aprendizagem que podem beneficiar da observação, da análise, e da reflexão de situações de ensino-aprendizagem, promovendo assim o conhecimento para ensinar este tema (Branco & Ponte, 2011). Portanto, este estudo debruça-se também sobre o conhecimento didático-matemático seguindo a perspectiva de Godino (2009).

Partindo das preocupações relacionadas com o ensino da Álgebra e com a formação inicial dos professores de Matemática nesta área, considera-se pertinente desenvolver um estudo que envolva a participação dos estudantes timorenses, futuros professores de

Matemática, e que tem como objetivo principal promover o ensino e a aprendizagem da Álgebra e, ao mesmo tempo, desenvolver a capacidade de raciocinar algebricamente através da promoção do conhecimento Matemático e do conhecimento didático adequado ao ensino deste tema.

2. Pertinência do estudo

Números e Álgebra são dois dos vários temas essenciais da Matemática e, na maioria dos países, representam uma parte fundamental do currículo. Os Números assumem um papel importante na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos de escolaridade e a Álgebra surge como um tema fundamental a partir dos anos intermédios (Ponte, 2006). Para este autor "quem não tiver uma capacidade razoável de trabalhar com números e suas operações e de entender e usar a linguagem abstracta da Álgebra fica *ipso facto* seriamente limitado nas suas opções escolares e profissionais e no seu exercício da cidadania democrática" (Ponte, 2006; p. 1). Na maioria dos países, estes dois temas são fundamentais no currículo de Matemática e merecedores de muita atenção na parte da investigação científica.

Em Timor-Leste, mesmo depois do estabelecimento do programa curricular para o Ensino Básico e para o Ensino Secundário Geral no ano 2010, os temas de Números e Álgebra ainda não têm merecido suficiente atenção no campo da investigação em Educação Matemática, pois ainda não existem, até ao momento, uma quantidade assinalável de dissertações de mestrado e de teses de doutoramento nesta área. Em Timor-Leste, torna-se necessário realizar uma reflexão mais profunda e sistemática sobre o papel dos Números e da Álgebra no currículo, sobre as causas do desempenho menos favorável dos alunos timorenses nestes campos e sobre o que se pode fazer para melhorar as respetivas aprendizagens, quer no Ensino Básico como no Ensino Secundário Geral.

Vários autores têm refletido, nas suas investigações, sobre os tópicos da Álgebra escolar que envolvem a compreensão e as características de Álgebra, as dificuldades que os alunos mostram nas suas aprendizagem de Álgebra e as capacidades que devem promover para a melhoria da aprendizagem dos alunos nos vários tópicos de Álgebra.

Kaput e Blanton (2001), na sua investigação sobre a experiência da algebrização da Matemática básica, identificam os cincos aspetos que interligam os conhecimentos algébricos e outras áreas da Matemática, nomeadamente generalização e formalização de padrões e aritmética generalizada; manipulação de formalismos guiada sintaticamente; estudo de estruturas e sistemas abstratos; estudo de funções, relações e variação; e linguagem na modelação Matemática e no controlo de fenómenos. Kaput (2008) apresenta dois aspetos importantes na Álgebra que são a generalização simbólica de regularidades, o raciocínio sintaticamente guiado e ações em generalizações expressas no sistema de símbolos convencional. Estes aspetos são integrados em três vertentes, a saber: 1. o estudo de estruturas e sistemas abstratos a partir de cálculos e relações decorrentes da Aritmética e de raciocínio quantitativo; 2. o estudo de funções, relações e variação; 3. a aplicação de um conjunto de linguagem de modelação, tanto dentro como fora da Matemática. Este autor desenvolve estes aspetos e vertentes da Álgebra na perspetiva da Matemática escolar, em particular, dos primeiros anos de escolaridade, enfatizando, de um modo geral, a importância do estabelecimento de conexões da Álgebra com toda a Matemática.

O National Council of Teachers of Mathematics - NCTM (2008) indica que todos os alunos devem aprender Álgebra desde os primeiros anos de escolaridade e o foco de estudo da Álgebra é a articulação entre a manipulação simbólica e a resolução de equações. Portanto, os alunos, nas suas aprendizagens, devem entender os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem as manipulações simbólicas e como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas. Mais do que isso, a compreensão de conceitos algébricos significa ser capaz de raciocinar algebricamente sobre objetos e processos algébricos na resolução de problemas. Segundo Arcavi (2006), o pensamento algébrico inclui a conceptualização e aplicação de generalidade, variabilidade e estrutura. O autor defende ainda que o estudo da Álgebra inclui, para além de lidar com o cálculo algébrico, a capacidade de trabalhar com muitas outras estruturas matemáticas e de as usar na análise e interpretação de resolução de problemas matemáticos ou de outras áreas. Mas esta atividade associada com a Álgebra envolve, necessariamente, a manipulação de símbolos que são um dos elementos do pensamento algébrico. Todavia, à semelhança do "sentido do símbolo" (Arcavi, 1994, 2006), ou seja, toda a atividade de interpretação e de uso criativo dos símbolos matemáticos para descrever uma situação ou resolver um problema. Desta forma, na atividade de interpretação algébrica que envolve pensamento algébrico é dada atenção não só aos objetos mas também às relações entre eles e, tanto quanto possível, de modo geral e abstrato.

Kieran (2004) reconhece a importância da utilização do símbolo nos primeiros anos de escolaridade, mesmo assim a autora sublinha a importância do envolvimento de diversos exemplos nas atividades matemáticas que podem promover o raciocínio algébrico. Para esta investigadora, o raciocínio algébrico nos primeiros anos de escolaridade envolve o desenvolvimento de maneiras de pensar em atividades em que o símbolo - letra da Álgebra pode ser usado como ferramenta, que não é exclusiva da Álgebra, e que pode ser utilizado igualmente para analisar relações entre quantidades, perceber estruturas, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar e prever.

Blanton e Kaput (2005) no seu estudo que carateriza as atividades na sala de aula que podem promover o raciocínio algébrico, referem que as atividades na sala de aula devem procurar que os alunos generalizem ideias matemáticas a partir de um conjunto particular de exemplos, estabeleçam generalizações através de um discurso argumentativo, e as expressem, cada vez mais, por caminhos formais e apropriados à idade. Godino (2012) sublinha que estes processos são como as técnicas usadas para modelar situações. Mais tarde, Godino et al. (2015) salientam o consenso, que parece haver em diferentes perspetivas, sobre o processo de generalização Matemática e o estudo de relações de equivalência e das suas propriedades como sendo características essenciais do raciocínio algébrico.

Assim, um dos grandes objetivos do estudo da Álgebra escolar é contribuir para o desenvolvimento do raciocínio algébrico. Este raciocínio, além de incluir a capacidade de manipulação de símbolos, também está relacionado com o estudo das estruturas, da simbolização, da modelação e do estudo da variação: "compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; analisar mudança em diversas situações" (NCTM, 2008, p. 40 - 43).

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009) existem três vertentes fundamentais no desenvolvimento do raciocínio algébrico que se articulam com o desenvolvimento das capacidades transversais identificadas no Programa da Matemática Portuguesa. Estes autores apresentam as referidas vertentes relativas ao trabalho realizado pelo aluno que têm, globalmente, o objetivo de promover o desenvolvimento do raciocínio algébrico, mais concretamente: 1. *representação*, diz respeito à capacidade do aluno usar diferentes sistemas de representação, nomeadamente sistemas cujos caracteres primitivos têm uma natureza simbólica; 2. *raciocínio* - raciocinar, tanto dedutiva como indutivamente –, assumem especial importância o relacionar (em particular, analisando propriedades de certos objetos matemáticos); e 3. *generalizar* (estabelecendo relações válidas para uma certa classe de objetos). Tal como nos outros campos da Matemática, um aspeto importante do raciocínio algébrico é a *resolução de problemas*. A resolução de problemas inclui modelar situações, ou seja, usar representações diversas de objetos algébricos para interpretar e resolver problemas matemáticos e de outros domínios.

Considera-se a importância do conhecimento da Álgebra e o desenvolvimento do RA para a construção dos outros conhecimentos matemáticos dos alunos desde inicio de escolaridade, portanto na formação inicial dos professores da Matemática timorenses deve ter atenção e trabalhar mais intensivo sobre este tema para capacitar aos futuros professores no conhecimento sobre Álgebra e como se ensinar este tema para os seus futuros alunos.

No conhecimento algébrico, os futuros professores devem ter o conhecimento sobre objetos e processos algébricos que se envolve na resolução de problema algébrica. Relativamente aos objetos algébricos, os futuros professores devem dominar significado de igualdade; interpretação da relação de igualdade; símbolos algébricos (incógnita, variável, parâmetro, etc.); equação; e função. Devem ser capazes de utilizar estes conceitos na resolução de problemas algébricos envolvendo vários processos de resolução, designadamente: operações da equação, operações com variáveis, operações com parâmetros, apresentação gráfica, entre outros.

Relativamente aos trabalhos científicos relacionados com a aprendizagem de Álgebra, encontram-se vários estudos sobre a interpretação da relação de igualdade e do sinal de igual como operador (como por exemplo, Kieran, 1992). Relativamente ao significado do sinal igual como operador, Cusi e Malara (2007) salientam que os alunos nos primeiros anos de escolaridade assumem o sinal igual como o significado de operador direcional, por exemplo, 4+6=10 significa "adicionei 4 a 6 e obtive 10" ou "4 mais seis dá 10". Esta compreensão pode criar obstáculos fortes à aprendizagem posterior da álgebra pois aqui o que está em jogo é a compreensão do significado relacional deste conceito. Assim, é importante que, desde cedo, os alunos compreendam também o significado da igualdade como uma relação.

Ainda no trabalho sobre a aprendizagem da Álgebra dos alunos nos primeiros anos de escolaridade, Kieran (2007) sugere que o estudo da Álgebra deve promover-se a partir das propriedades das operações com números, igualdades numéricas, mudança e regularidade e relações entre quantidades, envolvendo a utilização da língua e outras representações para expressar as ideias algébricas e sem utilizar a notação algébrica convencional.

Usiskin (1988) descreveu a Álgebra como *"the study of relationship among quantities"* (p. 10). Este autor referiu um aspeto importante da álgebra escolar como estudo de relações entre quantidades e variáveis como quantidades que têm variabilidade (o significado original do termo variável). Essa exploração da variação sistemática e a generalização do padrão podem constituir a base para o estudo posterior das funções e o uso de variáveis como argumentos ("valor do domínio de uma função") ou parâmetros ("um número do qual outros números dependem"). Fórmulas que descrevem um padrão entre variáveis, por exemplo $y = 3x + 5$, levam a uma notação de função $f(x) = 3x + 5$, onde x é a variável independente e $f(x)$ é variável dependente.

Relativamente ao raciocínio funcional, Smith (2008) definiu-o como um tipo de "raciocínio representacional" que se concentra na relação entre duas (ou mais) quantidades variáveis, especificamente os tipos de pensamento que resultam de relacionamentos específicos (incidências individuais) a generalizações dessa relação entre instâncias. Esta ideia envolve, também, a compreensão e o uso da noção de mudança e de quantidades variáveis (variáveis) que estão relacionadas entre si. Isso sustenta a compreensão do símbolo, letras, que é utilizada para representar as quantidades e para expressar diferentes tipos de relações, por exemplo, funções lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas. Mais tarde, Smith (2008) propôs uma estrutura para o raciocínio funcional em que o raciocínio algébrico ocorre quando o aluno inventa ou se apropria de sistemas representativos para representar generalizações de uma relação entre variáveis. O processo envolve o envolvimento de uma problemática dentro de uma situação funcional, criando um registo de valores correspondentes (por exemplo, icônico, tabular, gráfico) e daí procurar os padrões que podem ajudar a apoiar na criação de uma representação generalizada do relacionamento com base na Matemática.

Baseados na complexidade do tema da Álgebra escolar, no Ensino Básico e no Ensino Secundário, os investigadores Godino, Aké, Gonzato e Wilhelmi (2014) propõem um modelo para caracterizar o raciocínio algébrico elementar (RAE) para o Ensino Básico, onde se distinguem quatro níveis de Raciocínio Algébrico (RA) e três níveis para caracterizar os níveis de RA no Ensino Secundário. Relativamente à definição de níveis de RA esta baseia-se em distinções de natureza ontossemiótica: presença de objetos algébricos intensivos (ou seja, entidades de carácter geral ou indeterminado); transformações (operações) aplicadas a esses objetos, as quais são baseadas na aplicação de propriedades estruturais e tipo de linguagem utilizada.

Outros trabalhos científicos que se consideram também importantes para melhoria do ensino e da aprendizagem de Álgebra centram-se no estudo sobre as dificuldades dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra (Booth,1995; Rojano, 2002). Para estes autores estas dificuldades assumem várias formas, nomeadamente: dar sentido a uma expressão algébrica; não ver a letra como representando um número; atribuir significado concreto às letras; pensar uma variável com o significado de um número qualquer; passar informação da linguagem natural para a algébrica; compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos + e =; e não distinguir adição aritmética (3+5) da adição algébrica (x+3).

Relativamente às dificuldades do aluno sobre o conceito de variável, indicam-se as interpretações incorretas que o aluno tem relativamente a este conceito. Por exemplo: na atribuição de um valor numérico para um símbolo literal (mesmo nos casos em que deve ser interpretada como um número generalizado); e nas interpretações das letras como abreviatura para os nomes dos objetos (Chrysostomou & Christou, 2013). Esta realidade é proveniente do mal entendido relativamente ao conceito de "variável". Para estes alunos, o conceito de variável é equivalente ao conceito de "incógnita".

Uma "variável" significa algo que realmente varia, ou tem vários valores, enquanto uma "incógnita" é algo que tem valor fixo, mesmo que não seja conhecido. Por exemplo, na equação $x = -2x + 3$, à letra x chama-se incógnita que é utilizada como uma designação de um número especial que será revelada após o processo de resolução. Por outro lado, na expressão $f(x) = -2x + 3$, a letra x não se refere a um número específico (Wilhelmi, Godino & Lasa, 2014). Estes termos são, algumas vezes, utilizados informalmente nas aulas da Matemática como conceitos equivalentes (Barwell, 2013). Além disso, na realidade, o conceito de variável é raramente discutido num curso do ensino superior (Biehler & Kempen, 2013), pois já deve estar aprendido nos níveis anteriores. No caso de um aluno não ter um bom conhecimento sobre este conceito, consequentemente aquela ambiguidade condiciona a aprendizagem do aluno na universidade. A ambiguidade referida terá implicações fortes na interpretação dos alunos sobre os conceitos de equação e de função. Na aprendizagem de Álgebra, é importante que os alunos dominem fundamentos algébricos que lhes permitam utilizar uma letra com o significado de um elemento genérico de um conjunto ou qualquer número e não apenas incógnita, bem como representar e quantificar um valor que muda numa função. Assim, o aluno deve ser capaz de atribuir significado a estes conceitos no seu trabalho com variáveis (Ely & Adam, 2012).

Considera-se a importância de identificar as dificuldades dos alunos na Álgebra, uma vez que fornece informações sobre as suas interpretações e compreensões, bem como, sobre eventuais dificuldades de manipulação simbólica dos alunos e a partir destes diagnósticos pode-se avaliar as atuais abordagens e minimizar as dificuldades na aprendizagem dos alunos. Ponte (2006) apresentou as dificuldades comuns na aprendizagem da Álgebra, destacando o dar sentido a uma expressão algébrica; o não ver a letra como representando um número; o atribuir significado concreto às letras; o pensar uma variável como o significado de um número qualquer; o passar informação da linguagem natural para algébrica; o compreender as mudanças de significado, dos símbolos +, e, =, ...; e o não distinguir adição aritmética $(3 + 5)$ da adição algébrica (x+3).

A investigadora Kieran (1992), no estudo sobre os erros na simplificação de expressões e na resolução de equações, classifica os erros cometidos pelos alunos em três tipos: a) eliminação: produzidos por uma generalização excessiva de algumas operações matematicamente válidas em domínios mais restritos, um exemplo deste erro é simplificar $39x - 4$ como $35x$ ou $2xy - 2x$ como y; b) troca de membros: ao se considerar a equação $x + 37 = 150$, a resolução passa pela transformação em $x = 37 + 150$; c) redistribuição: na resolução da equação $x + 10 = 25$, os alunos subtraem 10 ao primeiro membro e adicionam 10 ao segundo, $x + 10 - 10 = 25 + 10$.

Hall (2002) além de reconhecer os erros referidos acima, observa novos erros, tais como: a) *omissions error* (omissão), ocorre quando um termo é deixado para trás na resolução de uma expressão aparentemente sem razão; b) *division error* (divisão), ocorre quando o aluno não efetua a divisão final para encontrar o valor da incógnita; c) *absence of structure error* (ausência de estrutura), surge quando o aluno não compreende a expressão "fazer o mesmo em ambos os membros"; d) *misuse of additive inverse error* (erro de inversão), surge quando se realiza um raciocínio semelhante ao que conduz ao erro de eliminação, por exemplo: $4x = 1$, então $x = 1 - 4$; e) *number line erro*, por exemplo, a simplificação de –3 +1, na resolução de equações, como -4; f) *transposing error* (erro por transposição), 7 por exemplo $x + \frac{5}{2} = 3$, obtendo $x + 5 = 6$; g) *exhaustion error* (erro de exaustão), por exemplo $\frac{x^2+5\,x+6}{x^2-2\,x-8} = \frac{(x+3)\,(x+2)}{(x-4)\,(x+2)} = \frac{x+3}{x-4} = \frac{3}{-4}$. Estes erros talvez tenham por base a prioridade que muitos alunos atribuem à operação entre os números.

Face ao exposto a formação inicial de professores de Matemática timorenses deve envolver formação que contempla, também, os aspetos relativos à tipologia de erro no âmbito do estudo da Álgebra.

Na formação inicial, além capacitar os futuros professores com o conhecimento da Matemática, é importante para capacitar estes futuros professores com o conhecimento didático (Pino-Fan, Godino e Moll, 2011). Godino (2009) reforça a compreensão do conhecimento didático com modelo de Conhecimento Didatico-Matemático (CDM) que permite categorizar e analisar estes conhecimentos. Este modelo baseia-se na teoria do Ontossemiótico e está categorizado em seguintes facetas:

- *Epistémica*, que envolve conhecimentos matemáticos relativos ao contexto institucional em que se realiza o processo de estudo e a distribuição no tempo das diversas componentes do conteúdo (problemas, linguagens, procedimentos, definições, propriedades, argumentos);
- *Cognitiva*, diz respeito aos conhecimentos pessoais dos alunos e progressão das aprendizagens;

- *Afetiva*, relativa a aspetos afetivos (atitudes, emoções, crenças, valores) de cada aluno em relação aos objetos matemáticos e ao processo de estudo seguido;
- *Mediacional*, refere-se a recursos tecnológicos e à atribuição do tempo às diferentes ações e processos;
- *Interacional*, identifica padrões de interação entre o professor e os alunos e a sua sequenciação orientada para a fixação e negociação dos significados;
- *Ecológica*, que se refere o sistema de relações com o ambiente social, político, económico,entre outros, que suporta e condiciona o processo de estudo.

No que respeita à formação de professores de Matemática, o Conselho NCTM (2008) afirma que os professores devem saber e compreender profundamente a Matemática que ensinam e ser capazes de utilizar os seus conhecimentos de forma flexível no decurso das suas atividades didáticas. Considera-se a importância de promover a capacidade de integrar o conhecimento dos conteúdos e processos matemáticos e a especificidade de ensinar. Ponte e Chapman (2008) sublinham que o desenvolvimento desse conhecimento surge integrando conteúdos e pedagogia e ensinando os futuros professores do mesmo modo que se espera que eles ensinem os seus alunos. Para reforçar esta estratégia educativa, Ponte e Chapman (2008) referem três vertentes a considerar na formação inicial de professores: 1. conhecimento da Matemática para ensinar; 2. conhecimento do ensino da Matemática ou didática; 3. identidade profissional, que se apoia tanto no conhecimento da Matemática e como do ensino da Matemática. Assim, na formação inicial de professores sobre Álgebra, estes componentes podem promover o desenvolvimento e a capacidade dos futuros professores para sincronizar entre o conhecimento dos objetos e processos algébricos, e o conhecimento como eles poderão ensinar a Álgebra aos seus futuros alunos.

3. Objetivos e questões de investigação

Considerando a pertinência da Álgebra escolar na formação dos professores de Matemática, nesta investigação propõe-se estudar o contributo de uma ação formativa na formação inicial de professores de Matemática timorenses, envolvendo vários tópicos: objetos e processos algébricos básicos; sequência e regularidade; sucessões; equações;

funções; resoluções de problemas e modelação Matemática. Será adoptada uma abordagem exploratória no estudo destes tópicos que se baseia também na articulação entre o conhecimento de conteúdo Matemático e o didático (pedagógico) com o objetivo de promover os conhecimentos dos estudantes, relativamente:

a) ao Raciocínio Algébrico (RA) baseada na distinção de diferentes de níveis de RA (processo de álgebra) da atividade de Matemática, no Ensino Básico como no Ensino Secundário Geral;

b) o modelo de "níveis de algebrização" que pode ser útil para os (futuros) professores de Matemática selecionarem e gerirem as atividades apropriadas para promover o desenvolvimento progressivo do RA dos seus alunos;

c) as dificuldades que os estudantes sobre Álgebra e didática de Álgebra;

d) o conhecimento didático-matemático (CDM);

Considera-se a importância de interligar o conhecimento Matemático, neste caso o conhecimento da Álgebra, com o conhecimento de como ensinar a Álgebra que, no estudo aqui apresentado, se reflete através da realização da ação formativa.

Este estudo propõe-se a responder às seguintes questões:

(i) Que conhecimentos algébricos têm futuros professores timorenses sobre o RA?

(ii) Quais as dificuldades na aprendizagem de Álgebra (tipologia de erros) que os futuros professores timorenses apresentam em relação aos procedimentos utilizados na resolução de tarefas algébricas?

(iii) Que conhecimentos didático-matemáticos têm futuros professores timorenses na sua formação inicial?

Até ao presente momento, ainda não existe nenhum estudo que envolva os (futuros) professores de Matemática timorenses no âmbito de Álgebra e que possa contribuir para o desenvolvimento dos seus conhecimentos em Álgebra e para o ensino de Álgebra. Portanto, espera-se que este estudo possa, de alguma forma, contribuir para a melhoria do conhecimento dos futuros professores da Matemática sobre o tema de Álgebra, nomeadamente através de estratégias de ensino deste tema.

Relativamente à metodologia seguida, este estudo segue uma metodologia mista, envolvendo a recolha e análise de dados quantitativos e qualitativos para responder às questões de investigação (Sampieri, Collado & Lucio, 2013; Sausa & Baptista, 2011), o que permitirá uma melhor compreensão do fenómeno em estudo (Coutinho, 2013; Ponte, 2006). Os dados são obtidos através de questionários de avaliação dos conhecimentos didático - matemáticos dos futuros professores sobre o RA (o questionário inicial - QI e o questionário final - QF), fichas de trabalho aplicados durante a ação formativa e entrevistas clínicas realizadas depois da avaliação final.

4. Organização do estudo

Apresenta-se primeiramente uma introdução ao estudo onde se inclui a contextualização, a justificação e a pertinência do estudo, bem como o problema de investigação que esteve na sua origem, os objetivos e as questões de investigação.

O Capítulo I, ocupa-se da fundamentação teórica e aborda os conceitos fundamentais envolvidos neste estudo, bem como algumas teorias sobre o RA que se baseia nos vários enfoques da Álgebra como processo de generalização, como processo de raciocínio baseado no enfoque ontossemiótico (EOS) sobre os significados pessoais e institucionais dos objetos matemáticos, configuração de objetos e processos matemáticos, e a adequação didática. O estudo ocupa-se sobre o raciocínio algébrico aliado ao modelo de categorização do nível do RA para o Ensino Básico e para o Secundário. De modo particular, aprofunda-se a discussão sobre a tipologia dos erros, centrando-se nas dificuldades na aprendizagem de Álgebra. Ainda neste capítulo I, debruçamo-nos sobre o modelo de Conhecimento Didático – Matemático (CDM).

No Capítulo II, justificam-se as opções metodológicas, referam-se os princípios orientadores, os objetivos de estudo, as principais características dos participantes, descrição do estudo, bem como os procedimentos utilizados na recolha e análise dos dados.

No capítulo III apresentam-se e discutem-se os resultados da avaliação diagnóstica envolvendo o questionários inicial (QI) relativamente às tarefas algébricas (estrutura, função e modelação) e ao conhecimento didático-matemático dos estudantes.

No Capítulo IV apresenta-se a ação formativa sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra para futuros professores de Matemática do Curso da Licenciatura do Ensino de Matemática, na Universidade Nacional de Timor Lorosa'e (UNTL). Depois da descrição sobre a ação formativa, apresentam-se e discutem-se os principais resultados das respostas dos estudantes no questionário final (QF) sobre o conhecimento algébrico e o conhecimento didático-matemático.

Por fim, no Capítulo V, apresenta-se uma reflexão pessoal sobre a investigação aqui realizada, onde é referido o contributo do estudo para o desenvolvimento pessoal e, também, possibilidades futuras de investigação, bem como outras questões que emergiram deste estudo, sendo também apresentadas algumas considerações finais sobre as limitações e as implicações resultantes deste trabalho.

Capítulo I – Enquadramento Teórico

Inicia-se este capítulo com a descrição de alguns aspetos relativos à aprendizagem da Álgebra, nomeadamente o Raciocínio Algébrico (RA), a aprendizagem da Álgebra no Ensino Básico e no Ensino Secundário e erros e dificuldades na aprendizagem da Álgebra.

De seguida, descrevem-se conceitos da teoria do Enfoque Ontossemiótico (EOS) do conhecimento e instrução da Matemática como ferramentas utilizadas neste estudo. Descreve-se também o modelo do conhecimento didático-matemático (CDM) do professor e os níveis do RA nas atividades matemáticas no Ensino Básico e no Ensino Secundário baseados no EOS.

No final do capítulo, apresentam-se aspetos relacionados com a formação inicial de professores de Matemática no âmbito da Álgebra, nomeadamente a importância do RA no contexto da aprendizagem da Álgebra.

1. 1 Raciocínio Algébrico (RA)

Nos vários estudos sobre esta temática encontram-se dois termos para designar a capacidade de pensar sobre a Álgebra: *Algebraic thinking* - pensamento algébrico (exemplo, Watson, 2007; Windsor, 2009; Kieran, 2007; Ponte, 2005); e Algebraic reasoning - raciocínio algébrico (exemplo, Kaput, 1995, 1999; Kaput & Blanton, 2005, 2011; Aké, 2013). Lins (1990, citado por Watson, 2007) menciona que:

> Algebraic thinking was an intentional shift from context (which could be 'real', or a particular mathematical case) to structure. Thus 'algebraic thinking arises when people are detecting and expressing structure, whether in the context of problem solving concerning numbers or some modelled situation, whether in the context of resolving a class of problems, or whether in the context of studying structure more generally (p.8).

Neste sentido, o pensamento algébrico é considerado como uma mudança deliberada do contexto para a estrutura. O contexto pode ser um problema real ou pode ser um determinado problema matemático. O pensamento algébrico surge quando se descobre e declara a estrutura, seja no contexto da resolução de problemas relacionados com números ou com algumas das situações modeladas, ou quer seja no contexto da resolução de problemas, ou ainda no contexto de um estudo mais geral das estruturas.

De acordo com Windsor (2009),

> Algebraic thinking promotes a particular way of interpreting the world. It employs and develops a variety of cognitive strategies necessary to understand increasingly complex mathematical concepts and builds upon students' formal and informal mathematical knowledge. Essentially students are using, communicating and making sense of the generalities and relationships inherent in mathematics, rather than just the identification of a single numeric answer or objective fact (p. 593).

Encontra-se também outros autores que nos seus estudos trabalham sobre o pensamento algébrico e apoiam a ação de "algebrizar" no currículo do Ensino Básico (Usiskin, 1988; Bednarz, Kieran & Lee, 1996; Kieran, 2007). Mesmo assim, Carraher e Schliemann (2007) afirmam que a maioria dos autores trabalhou em dimensões específicas de interesse e que relativamente poucos tentaram caracterizar o campo de forma exaustiva. Neste sentido, estes últimos autores referem:

> When they have so tried, the categorical structure occasionally exhibits in consistencies and overlaps. For example, a breakdown of algebra into generalizing, problem solving, modelling, and function mixes non-disjoint reasoning processes (generalizing and problem-solving) with a topic of mathematics (function) and another (modelling) (Bednarz, 1996) that can be understood either as a mathematical topics or a set of reasoning processes (Carraher & Schliemann, 2007, p.676).

Assim, na perspetiva destes autores, tampouco parece haver consenso de que um dos traços característicos do raciocínio algébrico seja a sua forma de abordar os processos de generalização matemática, ou seja, o estudo de situações em que se passa de considerar casos particulares de situações, conceitos, procedimentos de determinados objetos matemáticos) para classes ou tipos de tais objetos.

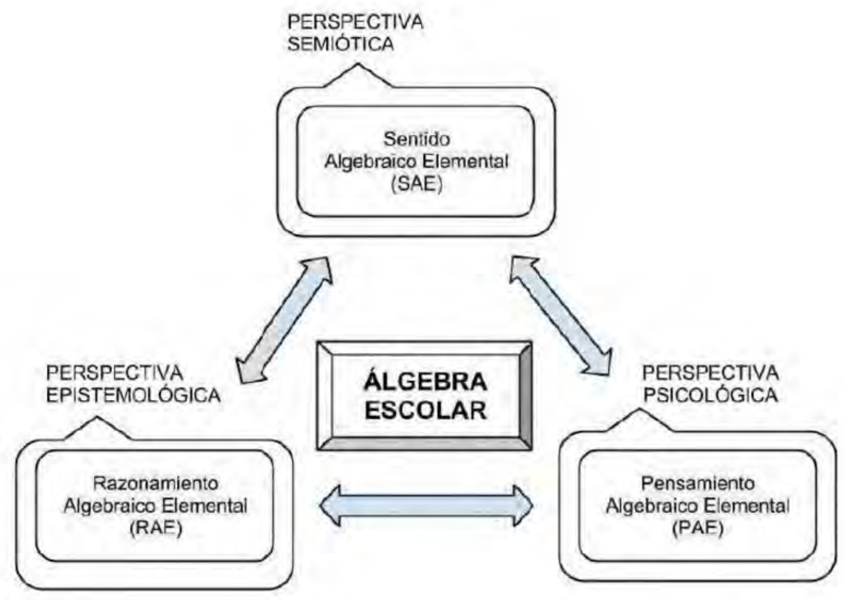
Aké (2013) considera que nalguns casos pode haver consenso, como nas atividades de formação e manipulação de expressões simbólico-literais. Noutras atividades como a resolução de problemas ou atividades típicas da Álgebra nos primeiros anos de escolaridade, nomeadamente equivalência de expressões aritméticas. Portanto, esta autora sublinha a pertinência de considerar que no processo de transição da Aritmética para a

Álgebra existe uma "zona de transição" na qual se admite que as tarefas matemáticas podem exibir objetos e processos algébricos de forma gradual e crescente.

Partindo desta preocupação, a investigadora Aké (2013) propõe um modelo compreensivo que pode ajudar de articular coerentemente o currículo de Matemática escolar dos diferentes níveis de ensino, e facilitar o desenho de atividades instrucionais que promovem a consolidação progressiva do RA. Neste sentido, a perspetiva pragmática, antropológica e semiótica da EOS (Godino, 2002; Godino, Batanero e Font, 2007) fornece ferramentas teóricas para analisar atividade matemática em geral e em particular, para o tipo de atividade que caracteriza Álgebra. Para esta autora, o EOS permite caracterizar a Álgebra em termos dos tipos de objetos e processos envolvidos na prática matemática. Neste sentido a atividade algébrica ocorre quando uma pessoa lida com a solução de certo tipo de problemas ou tarefas, realizando determinadas práticas operativas e discursivas. Estas práticas envolvem elementos de natureza diversa, em particular, meios de expressão, regras conceptuais, procedimentos, proposições e justificações. Consequentemente, a caracterização de uma prática, e pensamento que a acompanha, como uma natureza algébrica, terá que ser feita em termos da presença dos tipos de objetos e processos que intervêm na mesma.

Esta autora utiliza a expressão de "Razonamiento Algebraico Elemental" (RAE) para o estudo da Álgebra nos primeiros anos de escolaridade. No entanto, as características que se propõem para o RAE, em relação aos tipos de tarefas, objetos e processos algébricos envolvidos, permitem incluir nesta noção a Álgebra do nível do Ensino Secundário, reforçando assim uma visão integrada da Álgebra escolar. A autora considera que as expressões "raciocínio algébrico" da perspetiva epistémica, "sentido algébrico" da perspetiva semiótica e "pensamento algébrico" da perspetiva psicológica, como perspetivas equivalentes do mesmo objeto "Álgebra escolar" a partir de uma abordagem transdisciplinar, como se apresenta na próxima figura.

Figura 1.1 – Enfoque transdisciplinar da Álgebra escolar (Aké, 2013, p. 100)



Encontram-se outros autores que definem o conceito do RA como processo de generalização utilizando-se os exemplos particulares, argumentando-se e expressa-los em forma geral , por exemplo Kaput (1995, 1999) e Kaput e Blanton (2005). Estes autores afirmam que *"Algebraic reasoning is a process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular instances, establish those generalizations through the discourse of argumentation, and express them in increasingly formal and age-appropriate ways"* (p.99). Neste sentido, o aluno deve adquirir a capacidade de raciocinar algebricamente para compreender e resolver as tarefas relacionadas com a Álgebra. O RA, na perspectiva da aprendizagem do aluno, realiza-se através de processos de generalização de ideias matemáticas. A partir de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações através de um discurso argumentativo, e expressam-nas, cada vez mais, por caminhos formais e apropriados à ideia.

Kaput (1999) considera que o RA surge quando, através de processos de conjectura e argumentação, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base em situações aritméticas, geométricas, de modelação matemática e em quaisquer outras situações matemáticas leccionadas desde os primeiros anos de escolaridade. O autor propõe cinco facetas para caraterizar o pensamento algébrico: a generalização e formalização de padrões e restrições; a manipulação de formalismos, guiada sintacticamente; o estudo de estruturas abstractas; o estudo de funções, relações e de variação conjunta; a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos.

Na perspetiva da Kieran (2007), a Álgebra não é apenas percebida como um conjunto de procedimentos que envolvem símbolos em forma de letras, mas também como uma atividade de generalização e como um conjunto de ferramentas utilizadas na representação das relações matemáticas, dos padrões e de regras. Deste modo, a Álgebra, além de ser uma técnica, é também uma forma de pensamento e raciocínio sobre as situações matemáticas.

A generalização envolve a análise do que é comum entre várias situações consideradas e a análise de regularidades, procedimentos, estruturas e relações entre as situações as quais se tornam novos objetos, sendo que o foco já não são as situações particulares (Kaput, 1999). Blanton e Kaput (2011) reconhecem que as situações relativas ao RA como:

> Algebraic reasoning as an activity of generalizing mathematical ideas, using literal symbolic representations, and representing functional relationships, all implicit in this task, is no longer reserved for secondary grades and beyond, but is an increasingly common thread in the fabric of ideas that constitute mathematical thinking at the elementary grades (p.6).

Neste sentido, os autores sublinham que a atividade de generalização de ideias matemáticas, usando representações simbólicas literais, e a representação de relações funcionais devem integrar no trabalho dos alunos nos primeiros anos.

Considera-se a atividade da generalização ligada ao envolvimento dos símbolos, pois os símbolos servem para a generalização. Portanto, os investigadores Kaput, Blanton e Moreno (2008) sugerem que o RA deve cumprir a capacidade de *"generalizing; expressing generalizations, and using specialized systems of symbols to reason with the generalizations"* (p. 21). No mesmo sentido, Carpenter e Levi (2000) definem algebraic reasoning by identifying two central themes, namely *"making generalizations and [...] using symbols to represent mathematical ideas and to represent and solve problems"* (p. 2).

Kaput (2008) apresenta aspetos centrais do RA com base em duas características essenciais do RA (Lins & Kaput, 2004): (1) generalização simbólica de regularidades; (2)

raciocínio sintaticamente guiado e ações de generalizações expressas no sistema de símbolos convencional. Estes aspetos são integrados em três vertentes:

1) *Estudo de estruturas e sistemas* - diz respeito ao estudo de estruturas e sistemas obtidos de cálculos e relações, incluindo os decorrentes da Aritmética e do raciocínio quantitativo, que envolve a generalização de operações aritméticas e das suas propriedades e o raciocínio sobre relações mais gerais e as formas (por exemplo, propriedades do elemento neutro, comutatividade, relações inversas, etc). O conhecimento sobre estruturas matemáticas envolve o conhecimento dos objetos matemáticos, relações entre esses objetos e as propriedades desse objetos.

2) *Estudo de funções, relações e (co)variação* -. Nesta situação a "letra" surge como variável, ou seja, é um objeto cujo valor pode variar (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008). Os aspetos sintáticos surgem para (i) mudar a forma das expressões que representam regularidades, (ii) comparar expressões algébricas, verificando se são ou não equivalentes, (iii) determinar valores particulares que a função assume ou se a função verifica um dado valor (envolvendo a resolução de equações) (Kaput, 2008);

3) *Aplicação de linguagens de modelação, dentro e fora da Matemática* - é possível identificar três tipos de atividade algébrica baseados na concretização dos dois aspetos centrais da Álgebra (Kaput, 2008), sintetizados na seguinte tabela.

Tabela 1.1- Tipos de atividades algébricas segundo a proposta de Kaput (2008) (Adaptado de Branco, 2013)

Situação	**Interpretação algébrica**	**Variável**
Problemas aritméticos que requerem o uso de aspetos sintáticos da Álgebra	Equação ou sistema de equações do 1.º grau	Incógnita
Sequências e regularidades de situações ou fenómenos	Função	Uma ou mais variáveis
Situações de modelação de resposta única ou problemas de palavras aritméticos puros	Expressão algébrica para generalização de relações	Parâmetro

A 3ª vertente envolve, muitas vezes, a vertente 2. As suas diferentes formas distinguem-se relativamente aos aspetos centrais da Álgebra que refletem se as variáveis são tratadas como incógnitas, variáveis ou parâmetros. Esta 3.ª vertente, tal como a anterior, envolve a utilização de diferentes representações (Branco, 2013).

Godino, Fernandez, Lacasta, Neto, Wilhelmi, Contreras, Aké, Diaz, Estepa, Oliveira e Lasa (2015) admitem a importância destas três vertentes para categorizar o RA das atividades dos alunos. Os autores referidos consideram estas três categorias para analisar o conteúdo algébrico no trabalho dos alunos: 1. *Estruturas* (relação de equivalência, propriedades das operações, equações, ...); 2. *Funções* (padrões aritméticos, padrões geométricos, função linear, afim, quadrática, ...); 3. *Modelação* (problemas de contexto que são resolvidos através de equações ou de relações funcionais).

Outros estudos trabalharam especificamente a caracterização do RA dos alunos no nível básico (Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2013) e no nível secundário (Godino et. al., 2015) que se baseia no enfoque ontossemiótico (EOS). Esta caraterização será apresentada neste estudo depois da apresentação do conceito do EOS.

1.2 A aprendizagem da Álgebra no Ensino Básico e no Ensino Secundário

Números e Álgebra são dois dos vários temas essenciais da Matemática e na maioria dos países representa uma parte fundamental do currículo. A Álgebra surge como um tema fundamental a partir dos anos intermédios (Ponte, 2006). Considerando que a Aritmética trabalha com operações envolvendo números específicos, enquanto a Álgebra trabalha com os números generalizados, variáveis e funções, esta distância permite uma ordenação cuidadosa no tratamento do currículo ou programa de Matemática. Mesmo que distintas, o conhecimento da Aritmética é fundamental na construção do conhecimento Algébrico. Segundo Ponte (2006), "Quem não tiver uma capacidade razoável de trabalhar com números e suas operações e de entender e usar a linguagem abstracta da Álgebra fica *ipso facto* seriamente limitado nas suas opções escolares e profissionais e no seu exercício da cidadania democrática" (p. 2).

Partindo do conceito de número, desenvolvem-se diversas operações envolvendo as propriedades das operações dos números. Mendes e Delgado (2006) referem que a compreensão dos números, das ordens de grandeza e do significado das operações constitui a base do apelidado “sentido de número”. Além disso, os números e as operações constituem conjuntos com uma certa estrutura (algébrica) onde é possível estabelecer relações ou estudar determinadas propriedades. Todos estes aspetos estão, de uma forma ou de outra, integrados em qualquer currículo escolar com maior ou menor visibilidade e importância.

O documento do NCTM (2008, p. 34-38) refere que os números naturais e inteiros (no sentido de “naturais mais o zero”) e as suas operações são os temas que os alunos aprendem logo no 1.º ciclo do Ensino Básico. Neste ciclo os alunos começam a ter contacto com as propriedades das operações numéricas de adição e de substração. No 2.º ciclo, os alunos deverão saber que os números podem ser representados de várias maneiras de modo a compreenderem que ¼, 25 % e 0,25 são apenas designação diferentes do mesmo número. Neste ciclo, os alunos podem aprender e comparar números representados por fração em determinados contextos familiares, por exemplo ½ é metade; ¼ é inverso de “quatro vezes”. Relativamente às propriedades das operações, os alunos neste ciclo começam a trabalhar com a multiplicação e a divisão. O estudo dos racionais relativos é feito depois no 3.º ciclo (7.º ano). Os números reais surgem também no 3.º ciclo, mas um pouco mais tarde (9.º ano). No 3.º ciclo é considerado que os alunos adquiriram flexibilidade na conversão da fração em decimais e percentagem, e vice-inversa, e na ordenação e comparação de números racionais. Finalmente, do 9.º ano até 12.º ano, os alunos devem compreender o conceito de sistema numérico, a relação entre diferentes sistemas numéricos, e se as propriedades de um sistema numérico são aplicáveis noutros. Neste ciclo, os alunos devem familiarizar as diferentes formas de representação dos números, por exemplo 6,66666667 como o valor aproximado da divisão de 20 por 3.

Retomando a perspetiva de Kieran (2007) que mencionámos atrás, importa sublinhar que a Álgebra, além de ser um conjunto de procedimentos que envolve símbolos em forma de letras, mas como uma atividade de generalização e como um conjunto de ferramentas utilizadas na representação das relações matemáticas, dos padrões e de regras. Deste modo, a Álgebra, além de ser uma técnica é também uma forma de pensamento e raciocínio sobre as situações matemáticas.

Watson (2007) refere que a Álgebra é a forma de expressar generalizações sobre o número, quantidade, relações e funções. A Álgebra escolar pode ser entendida como:

> manipulation and transformation of symbolic statements; generalisations of laws about numbers and patterns; the study of structures and systems abstracted from computations and relations; rules for transforming and solving equations; learning about variables, functions and expressing change and relationships; modelling the mathematical structures of situations within and outside mathematics (Watson, p.8).

O autor menciona, ainda, a importância de que os alunos têm que aprender a reconhecer as diferentes naturezas e papéis das letras como: incógnitas, variáveis, constantes e parâmetros, e também os significados de igualdade. Esses significados nem sempre são distintos em Álgebra e por vezes relacionam-se de forma ambígua.

No mesmo sentido de Watson, Van Amorem (2003) apresenta outras perspetivas da Álgebra como: *"(1) algebra as a generalized arithmetic, (2) algebra as a problem solving tool, (3) algebra as the study of relationships, (4) and algebra as the study of structures*" (p.64). A autora refere, ainda, que um olhar mais atento às semelhanças e diferenças entre Álgebra e aritmética pode ajudar a entender alguns dos problemas que os alunos enfrentam na aprendizagem da Álgebra. Neste sentido, a Aritmética é entendida como cálculos com números conhecidos, enquanto a Álgebra requer raciocínio sobre quantidades desconhecidas ou variáveis, reconhecendo a diferença entre situações específicas e gerais.

Muitas das dificuldades experimentadas pelos alunos em Álgebra são derivadas de um conhecimento básico inadequado da aritmética. À maioria desses alunos não são dadas oportunidades de estabelecer conexões explícitas entre Aritmética e Álgebra, de modo que as experiências dos alunos com a Aritmética são obstáculos para aprender Álgebra. O uso de letras surge como uma forma abreviada de representação, como elemento para manipulações simbólicas, incógnitas e igualdade. Este facto implica que o sucesso dos alunos com a Álgebra está muito dependente das suas experiências com a Aritmética (Warren, 2003).

As dificuldades resultam duma ambiguidade de noções anteriores ou de conceitos prévios sobre Aritmética. Por exemplo o sinal "=" que na Aritmética tem significado de "resultado", mas na Álgebra significa "equivalente" (Kieran, 1981). Ponte (2005) dá outro exemplo da dificuldade dos alunos na compreensão das mudanças de significado, na

Aritmética e na Álgebra, dos símbolos + e =, bem como das convenções adotadas. Assim, em Aritmética, 23 tem um significado aditivo (20 + 3), enquanto que em Álgebra $2x$ tem um significado multiplicativo ($2 \times x$); em Aritmética 3 + 5 significa uma "operação para fazer" (cujo resultado é 8), mas em Álgebra $x + 3$ representa uma unidade irredutível (enquanto não se concretizar a variável x).

Kieran (2004), referindo-se às dificuldades dos alunos no início do estudo da Álgebra, afirmou que os alunos precisam de ajustamento no processo de compreensão da transição da aritmética para a Álgebra, mesmo que dominem a aritmética .

Devido à dificuldade da transição da Aritmética para a Álgebra, nas últimas décadas realizaram-se várias investigações que analisaram e promoveram a integração da Álgebra no currículo do ensino básico, com o objetivo de aprofundar a compreensão dos alunos sobre Matemática elementar para promover neles habilidades de generalização e justificação sistemática de generalizações matemáticas (Kaput & Blanton, 2001).

Carpenter e Levi (2000) utilizaram o termo de "Álgebra Primitiva", enquanto o Kaput (2000) utilizou " *Curriculum de algebrafying*" para designar a proposta curricular que propõe a introdução de modos algébricos de raciocínio na Matemática escolar desde os primeiros anos do Ensino Básico.

Schliemann, Carraher, Brizuela e Earnest (2006) apoiam a introdução de conceitos algébricos e notações no Ensino Básico com base no seguinte:

1) as dificuldades cognitivas com a Álgebra podem ser resultado das limitações do currículo de Matemática elementar a que as crianças têm acesso;
2) a compreensão Matemática é uma construção individual que transforma e se estende através da interação social, a experiência em vários contextos significativos, e o acesso a sistemas de símbolos matemáticos;
3) as crianças precisam de estar familiarizadas com os sistemas simbólicos e, neste sentido, os alunos devem ter oportunidades para fazerem as suas próprias representações intuitivas e gradualmente adotar representações convencionais como ferramentas para representar e compreender as relações matemáticas.

As dificuldades dos alunos na passagem da Aritmética para a Álgebra não são apenas sentidas pelos alunos do Ensino Básico mas também pelos alunos adolescentes. Neste caso, Carraher e Schliemann (2007) no seu estudo afirmam:

> Without denying that algebra moves toward increasingly abstract mathematical objects and relation and depend on ever more elaborate techniques and representation forms, an early algebra approach attributes difficulties exhibited by adolescents students of algebra as due in large part to shortcoming in how arithmetic and, more general, elementary mathematics are introduced (p.675).

Vários estudos tentaram interligar a Aritmética e a Álgebra. Vários autores como por exemplo, Filloy & Rojano, 1989, Herscovics & Kieran, 1980, Rojano, 1996, Sutherland & Rojano, 1993 e Kieran 1985, 2004) deram muita atenção à suposta transição entre a Aritmética e a Álgebra. Pensa-se que esta transição ocorre durante um período em que a Aritmética é a etapa "final" de estudo e a Álgebra é o "começo". A "*Pre-Álgebra*" ou "*Early Álgebra*" é uma tentativa para amenizar as tensões impostas por uma rígida separação entre a Aritmética e a Álgebra.

Assim, a transição da Aritmética para a Álgebra é um passo importante para alcançar ideias mais complexas dentro da Matemática escolar. Neste caso Butto e Rojano (2004) mencionam que a maioria dos adolescentes considera muito difícil de superar as dificuldades sentidas no estudo da Álgebra, considerando que o estudo deste tema é feito através da representação de quantidades e números com símbolos literais e operações com esses símbolos literais. Esta abordagem geralmente envolve o estudo de equações com incógnitas e representações de generalizações aritméticas com variáveis, dificilmente percebidas pelos alunos (Warren, 2003).

Considera-se também que um ponto-chave para o sucesso da transição da aritmética para a Álgebra, além de dar um significado algébrico às atividades matemáticas, é justamente o conhecimento da estrutura matemática, o que implica conhecimento sobre os objetos matemáticos, a relação entre eles e suas propriedades. Em particular, as estruturas matemáticas lidam com: relações entre quantidades (por exemplo, quantidades equivalentes, uma quantidade menor ou maior que outra); propriedades das operações (por exemplo, associativa e comutativa); relações entre operações (por exemplo, divisão e multiplicação); e relações através de quantidades (por exemplo, a transitividade de igualdade e desigualdade). Na abordagem tradicional da Álgebra, é assumido implicitamente que os alunos já estão familiarizados com esses conceitos no trabalho anterior com a Aritmética e também que, a partir de experiências repetidas em sala de aula com a Aritmética, os alunos entendem a estrutura da mesma por generalização indutiva, dando sentido às operações que realizam (Warren, 2003).

Relativamente à aprendizagem da Álgebra, nesta aprendizagem além de lidar com o cálculo algébrico, permite lidar também com a capacidade de trabalhar com muitas outras estruturas matemáticas e de as usar na análise e interpretação da resolução de problemas matemáticos ou de outras áreas. Mas a atividade associada à Álgebra envolve, necessariamente, a manipulação de símbolos que são elementos do pensamento algébrico mas, à semelhança do "sentido do símbolo" (Arcavi, 1994, 2006), ou seja, toda a atividade de interpretação e do uso criativo dos símbolos matemáticos para descrever uma situação ou resolver um problema. Desta forma, na atividade com a Álgebra, que envolve pensamento algébrico, é dada atenção não só aos objetos, mas também às relações entre eles e, tanto quanto possível, de modo geral e abstrato.

Ponte (2005) utiliza o termo do pensamento algébrico para designar o RA, afirma que a aprendizagem da Álgebra envolve, também, a capacidade para trabalhar com o cálculo algébrico e as funções, a capacidade para lidar com outras estruturas matemáticas e usar os símbolos na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. Este autor refere ainda que no pensamento algébrico dá-se atenção não apenas aos objetos, mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações.

Portanto, pode-se considerar que um dos grandes objectivos do estudo da Álgebra, a nível escolar, é o da contribuição para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Este pensamento, além de incluir a capacidade de manipulação de símbolos, está intimamente relacionado com o estudo das estruturas, da simbolização, da modelação e do estudo da variação (Borralho & Palhares, 2013).

O NCTM (2008) define pensamento algébrico como algo que diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação:

- Compreender padrões, relações e funções (Estudo das estruturas);
- Representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos (Simbolização);

- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (Modelação);
- Analisar mudança em diversos contextos (Estudo da variação) (p.39).

Assim, a aprendizagem da Álgebra requer a capacidade de compreender os símbolos, as operações e as regras, que são exploradas no RA, no qual contém as habilidades para entender padrões e fazer generalizações.

Na aprendizagem da Álgebra, como já se referiu anteriormente, os alunos do 1.º ciclo trabalham com classificações, padrões e relações, operações com números inteiros, exploração de função e através da progressão graduais. No trabalho deste tema, os alunos agrupam, classificam e ordenam os trabalho com padrões em formas geométricas e dados. Por exemplo, os alunos poderão descrever padrões como 2, 4, 6, 8, ..., determinando a forma de obter o número seguinte, neste caso adicionando um número 2. No 2.º e 3.º ciclos, os alunos deverão concentrar-se na compreensão das relação lineares, trabalham nas expressões equivalentes e resolver equações lineares. Deverão, também, ser capazes de compreender as relações entre tabelas, gráficos e símbolos, e de avaliar as vantagens e as desvantagens de cada forma de representação, consoante os objetivos em causa. No secundário, os alunos deverão desenvolver destreza nas operações com símbolos, através de cálculos mentais ou escritos, nos casos mais simples, através da utilização da tecnologia informática. Neste ciclo, os alunos ampliam o seu conhecimento sobre funções e as características dos diversos tipos de funções (NCTM, 2008, p. 39-42).

Na aprendizagem da Álgebra, o aluno deve adquirir a capacidade de raciocinar algebricamente para compreender e resolver as tarefas relacionadas com a Álgebra. O raciocínio algébrico (RA), na aprendizagem do aluno, realiza-se através de processos de generalização de ideias matemáticas. A partir de um conjunto particular de exemplos, os alunos estabelecem generalizações através de um discurso argumentativo, e expressam-nas, cada vez mais, por caminhos formais e apropriados à ideia (Blanton & Kaput, 2005).

Vários autores têm refletido sobre as características que caracterizam a Álgebra escolar e a importância de promover o desenvolvimento do RA nos alunos desde o início da escolaridade. Blanton e Kaput (2005) sugerem que na aprendizagem deve envolver-se uma situação em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações através de um discurso argumentativo, e expressam-nas, cada vez mais, por caminhos formais e apropriados à idade. Kieran (2004) reforça esta ideia e sublinha que seja proporcionado aos alunos algum trabalho com os símbolos nos primeiros anos e sugere diversos exemplos de atividades que podem ser desenvolvidas, nesses níveis de escolaridade, para promover o RA. Neste sentido, a autora defende que o RA nos primeiros anos de escolaridade deve envolver o desenvolvimento de maneiras de pensar em atividades em que o símbolo-letra da Álgebra pode ser usado como ferramenta, que não é exclusiva da Álgebra, e que podem ser realizadas sem usar qualquer símbolo-letra da Álgebra, tais como, analisar relações entre quantidades, perceber estruturas, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar e prever.

Kieran (2007) salienta, também, o estudo da Álgebra nos primeiros anos deve promover-se a partir das propriedades das operações com números, igualdades numéricas, mudança e regularidades e relações entre quantidades, dando ênfase ao uso da linguagem e outras representações para expressar as ideias algébricas e sem usar a notação algébrica convencional.

Por outro lado, Carraher e Schliemann (2007) mencionam que o RA se refere a um processo psicológico que envolve a resolução de problemas que podem ser expressos matematicamente com facilidade usando a notação algébrica.

Ponte, Branco e Matos (2009), no seu estudo sobre o Programa de Matemática em Portugal, sublinham a importância de aprofundar o desenvolvimento do pensamento algébrico em articulação com o desenvolvimento das capacidades transversais identificadas no Programa de Matemática, concretizam em três vertentes o trabalho a realizar com os alunos de modo a promover o desenvolvimento do pensamento algébrico: representação, raciocínio e resolução de problemas.

Outros estudos trabalharam especificamente a caracterização do RA dos alunos no nível básico e no nível secundário (Filloy, Puig & Rojano, 2008; Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2013).

Relativamente à aprendizagem da Álgebra para o 1.º, 2.º e 3.º ciclo do Ensino Básico Timor – Leste, neste estudo não se encontraram nenhuma legislação ou documentos legais que permitam explorar e caracterizar os focos da aprendizagem da Álgebra nestes ciclos. Esta realidade é preocupante , tanto para os professores como para os investigadores, para que estes possam designar as metas de aprendizagem dos alunos destes ciclos. Em Timor –

Leste existem manuais de Matemática para os alunos do 1.º, 2.º e 3.º ciclo do Ensino Básico onde se podem encontrar as matérias matemáticas lecionadas. Mesmo assim, considera-se que este tipo de recurso não é suficiente para orientar os trabalhos dos professores e, também, o dos investigadores.

No contexto da aprendizagem da Matemática do Ensino Secundário Geral em Timor-Leste, o Ministério da Educação de Timor – Leste coopera com a Universidade de Aveiro pelo projeto de "Reestruturação Curricular do Ensino Secundário Geral em Timor-Leste" estabeleceu o programa da disciplina de Matemática para nível do 10.º, 11.º e 12.º anos. Este programa designa as competências específicas da Matemática para desenvolver ao longo de todo o ensino secundário geral, em quatro grandes tópicos de ensino: Números e Álgebra; Geometria Analítica; Funções e Cálculo Diferencial; Organização e Tratamento de Dados (MEC – TL, 2013).

Relativamente à aprendizagem da Álgebra para os alunos do 10.º ano, aborda-se a resolução de sistemas de equações lineares introduzindo um novo método de resolução, a regra de Cramer. Trabalhar com equações do segundo grau, lembrando a fórmula resolvente e as condições do binómio discriminante para a existência ou não de zeros, resolver inequações de 1.º grau e resolver condições com módulos. No estudo de gráficos e funções, efetua-se o estudo das propriedades das funções reais de variável real através do estudo analítico e aos gráficos das funções algébricas racionais inteiras e fracionárias, nomeadamente, o estudo das funções polinomiais e fracionárias de referência e da função valor absoluto. Através da exploração deste tema é possível estabelecer intuitivamente a noção de limite de uma função num ponto para estudar o comportamento gráfico e assimptótico das funções racionais de referência (MEC – TL, 2013).

Os alunos do 11.º ano aprendem na unidade temática de Sucessões a analisar padrões e regularidades, abordando problemas históricos que ajudem a estabelecer o conceito de sucessão, estudando particularmente sucessões limitadas e convergentes. Para além disso, aprendem a estabelecer os conceitos de progressões aritméticas e geométricas, a determinar a soma dos "n" termos de uma progressão. Neste sentido, o tema permite de estabelecer a noção intuitiva de infinitésimo e infinitamente grande, através do limite de uma sucessão (MEC – TL, 2013).

Na unidade temática de gráficos e funções, os alunos do 11.º ano aprendem as propriedades gráficas e analíticas das funções de crescimento, designadamente, funções exponenciais e logarítmicas. Caracterização do limite de uma sucessão natural e definir limite de uma função num ponto. Fazer a interpretação gráfica e analítica do conceito de limite e da continuidade de uma função em qualquer ponto de acumulação do seu domínio. Relacionar o conceito de continuidade com a convergência de sucessões e funções limitadas (MEC – TL, 2013).

O "Calculo Diferencial e Integral" é única tema da Álgebra que leciona para os alunos do 12.º ano. Neste tema os alunos desenvolvem o conceito de derivada e primitiva de uma função. Nas aprendizagens deste ano, as derivadas desempenham um papel central em análise matemática ao serem usadas para descrever relações de vizinhança num lugar geométrico ou, na otimização de soluções através da pesquisa de máximos e mínimos de uma função de variável real, com inúmeras aplicações nos mais diversos domínios. Ao longo da aprendizagem deste tema, pretende-se os alunos saibam utilizar corretamente as regras da derivação e, por meio delas, aprofundar o estudo das funções reais de variável real, compreender o modo de utilização do cálculo integral na sua aplicação ao cálculo de comprimentos, áreas e volumes, e saber aplicar algumas destas técnicas (MEC – TL, 2013).

Considera-se a importância da aprendizagem destas temáticas da Álgebra para desenvolver os conhecimentos matemáticos dos alunos timorenses em relação ao desenvolvimento de capacidades tais como: raciocinar matematicamente, usar e comunicar em linguagem Matemática e resolver os problemas. Portanto, os professores devem ter em atenção a este desenvolvimento através da utilização dos vários métodos de ensino e da utilização da tecnologia na aprendizagem.

1.3 Erros e dificuldades na aprendizagem da Álgebra

Nesta parte discutem-se erros e dificuldades que se manifestam na aprendizagem da Álgebra e a importância de utilizar estes erros como o ponte para melhoria ensino e aprendizagem da Álgebra.

Vale, Ferreira e Santos (2011) referem a importância da reflexão para identificar os erros e melhoria da aprendizagem. As autoras sublinham que: "O erro, por si só, não conduz a nada se não for seguido de uma reflexão sobre a sua ocorrência, tendo em vista o modo de o ultrapassar" (p. 424).

Para os alunos, a reflexão sobre os seus próprios progressos de aprendizagem é importante para que possam identificar os erros cometidos e utilizarem-nos de modo a regular a sua aprendizagem (Martins, 1996). Para o professor é importante compreender as dificuldades dos seus alunos e a origem destas dificuldades. É através desta compreensão que o professor pode propor tarefas capazes de promover aprendizagens mais significativas e minorar as dificuldades dos alunos (Booth, 1998). Assim, a análise dos erros permitem aos professores compreender o raciocínio dos alunos e o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos. Baseando-se nesta análise, o professor pode analisar o seu próprio trabalho e modificar o ensino para melhorar a aprendizagem dos alunos.

Vários autores focaram os seus trabalhos nos erros e nas dificuldades dos alunos na aprendizagem da Álgebra (Ponte, Branco & Matos, 2009; Lima & Tall, 2008; Ponte, 2006; Kieran, 1985, 1992, 2006; Sajka, 2003; Hall, 2002; Socas, Mechado, Paralea & Hernandes, 1996; Booth, 1984, 1988).

Socas (1997) apresentou dificuldades na aprendizagem da Álgebra e as suas distintas origens. Estas dificuldades manifestam-se sob a forma de obstáculos cognitivos e, na prática, na forma de erros. O erro tem origens diferentes. Pode ser visto como resultante da presença de um processo cognitivo inadequado e não apenas como consequência de uma falta de conhecimentos específicos ou de uma distração. Ainda este autor categorizou os erros na aprendizagem da Álgebra em três categorias:

1) *Errores que tienen su origen en un obstáculo.*

   Nesta categoria dos erros com origem num obstáculo cognitivo. Estes erros são referidos como conhecimento adquirido, e não como uma falta de conhecimento, que provou ser eficaz em determinado contexto (Ruano, Socas & Palarea, 2003). Quando o aluno utiliza esse conhecimento fora de tal contexto, origina respostas inadequadas (por exemplos: erros na adição da Álgebra e vê como adição da Aritmética ($2 + 3x = 5x$); erros de concatenação, neste caso o erro devido à justaposição de dois ou mais símbolos (pede substituir 2 por x na expressão 3x, e o aluno pensa que o resultado seria 32).

2) *Errores que tienen su origen en ausência del sentido.*

Nesta categoria, os erros têm a sua origem numa ausência de sentido. O autor categorizou este tipo em três subcategorias:

a. *Errores del Álgebra que tienen su origen en la aritmética.* Para entender a generalização das relações e processos algébricos, é necessário que o aluno as tenha assimilado no contexto da Aritmética. Exemplos desses erros são aqueles cometidos por alunos que não dominam as operações com frações e apresentam resultados como: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2+3}$ e $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$

b. *Errores de procedimientos, el uso inapropiado de "fórmulas" o "reglas de procedimientos".* Neste caso os erros têm origem na utilização de fórmulas ou regras de procedimento de modo indevido, por exemplo:

- Extensão da propriedade distributiva de multiplicação em relação à adição (ou subtração) ao caso de multiplicação: $a\,(b+c)=\ a.b+a.c$ então $a\,(b\,.c)=a.b.a.c$
- Na estrutura $(a\,.\ b)^2=\ a^2\,.b^2$, os produtos podem estar relacionados, mas não se estende ao caso de adição, $(a+b)^2=\ a^2+\ b^2$.
- Erros de cancelamento: $\frac{x+y}{x+z}=\frac{y}{z}$ está entendido como $\frac{x\,.\,y}{x\,.\,z}=\frac{y}{z}$

c. *Errores de Álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.* Erros devido às características da linguagem algébrica, por exemplo: erros com origem na incompreensão do significado do sinal de igual em Álgebra ($4x-3=2x+7$ é apenas verdadeira quando $x=5$, mesmo assim há possibilidade em que o aluno pensa que $x=9$).

3) *Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.*

Nesta categoria, consideramos os erros com origem em atitudes afetivas ou emocionais (exemplo: falta de concentração, excesso de confiança, esquecimento, entre outros) (Socas, 1997, p.24).

O envolvimento do símbolo das letras em diversos contextos e com distintas interpretações são as preocupações principais na aprendizagem da Álgebra dos alunos.

Kieran (1992) e também Fernandes e Soares (2003), tendo por base do trabalho de Kuchemann, categorizaram a interpretação da letra em seguinte significado:

- Letra avaliada: é atribuído um valor numérico à letra logo no início, sem qualquer operação sobre ela, enquanto incógnita. Por exemplo, se $y = 3x - 2$ e $x = 1$, qual seria o valor de y? Neste caso requer apenas operação concreta;
- Letra não considerada: a letra é ignorada ou a sua existência é reconhecida mas não lhe é atribuído significado. Por exemplo, sendo $p + q = 10$ qual seria o valor de $p + q + 2$. Neste caso as letras de p e de q são ignoradas;
- Letra como objeto: a letra é vista como abreviatura para objetos ou como objetos concretos. Por exemplo, num triângulo retângulo o perímetro do cateto é h, portanto $2h$ pode-se interpretada como a dupla do perímetro do cateto;
- Letra como incógnita: a letra é entendida como um número específico, mas desconhecido. Por exemplo: múltipla $x - 2$ por 3, o resultado desta questão é $(x - 2)3 = 3x - 6$. Mesmo assim, pode acontecer que o aluno resolva esta expressão como equação. Neste caso $(x - 2)3 = 3x - 6 = 0$ então $x = \frac{6}{2} = 3$;
- Letra como número generalizado: a letra é entendida como uma representação de vários números. Por exemplo, se $a + b = 5$ e $a < b$, qual seria o valor de a? Neste caso, o valor de a pode ser visto como representativo dos várias valores ($a = \cdots, -1, 0, 1, 2$);
- Letra como variável: a letra é entendida como representativa de um conjunto de valores desconhecidos, representando também a existência de uma relação sistemática entre dois conjuntos de valores. Por exemplo: qual é maior $2n$ e $n + 2$? Neste caso deve saber qual é o domínio de n. Portanto, as letras poderão vistas como variáveis se pensar em números ou pares de números.

Considera-se que uma das dificuldades dos alunos na aprendizagem da Álgebra vem do uso de letras, sendo a exigência da sua manipulação "talvez a mais importante característica do pensamento algébrico" (Fernandes & Soares, 2003, p. 335). Para estes autores, esta transição é fundamental na aprendizagem da Álgebra, em particular na passagem da equação numérica para a equação algébrica.

Ponte (2006) mencionou que uma das dificuldades dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra está relacionada com o facto de se usar letras para representar variáveis e incógnitas, pois os alunos não conseguem ver uma letra como representativa de um número desconhecido e não percebem, assim, o sentido de uma expressão algébrica. Relacionado com a ideia referida, este autor categorizou as dificuldades nesta transição, baseando-se nos trabalhos realizados por Booth (1994) e Rojano (2002), no seguinte tipo de dificuldades:

Tabela 1.2 – Tipo de dificuldades dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra (Ponte, 2006, p.10)

Categorização	**Exemplos**
Dar sentido a uma expressão algébrica	27 = 20 + 7 7a = a + a + a + a + a + a + a
Não ver a letra como representando de um número	m = 3n + n ; n = 4 , indica o valor do m
Atribuir significado concreto às letras	Em aritmética "3m" lendo como " 3 metros" que significa também "300 centímetros"; em Álgebra "3m = m + m + m"
Pensar uma variável como o significado de um número qualquer	2 x + 3 y = 5 xy ; ou 5 x; ou 5y "2 apples plus 5 bananas" é um exemplo para justificar " $2a + 5b \neq 7ab$ "
Passar informação da linguagem natural para algébrica	Num triângulo retângulo isósceles, o quadrado do valor de hipotenusa é duplo do quadrado do valor do cateto. $c^2 = a^2 + a^2 = 2\,a^2$ Se a é o valor do lado de triângulo retângulo isósceles, o valor de hipotenusa é $a\sqrt{2}$.
Compreender as mudanças de significado, dos símbolos +, e, =, ...	Em aritmética, 27 tem um significado aditivo (20+7); em Álgebra 5x tem um significado multiplicativo 5 . x Em aritmética, 7 + 2 indica uma operação para fazer; em Álgebra x + 2 representa uma unidade irredutível (que não se fazer uma operação aditiva)
Não distinguir adição aritmética (3+5) da adição (*x*+3)	x + 3 ≠ 3x
Dar sentido a uma expressão algébrica	27 = 20 + 7 7a = a + a + a + a + a + a + a

Relativamente à resolução de equações, Ponte, Branco e Matos (2009) referem que as dificuldades surgem devido aos erros que cometem no trabalho com expressões algébricas, por não compreenderem o significado destas expressões ou as condições da sua equivalência.

Existem vários autores que centraram os seus estudos sobre erros e as dificuldades dos alunos na simplificação de expressões algébricas e na resolução de equações do 1.º grau

(Booth, 1984, 1988; Kieran 1985, 1992; Kuchemann, 1981; MacGregor e Stacey, 1997; Socas, Machado, Palarea & Hernandes, 1996; Lima & Tall, 2008; Vlassis, 2001). Baseando-se nesses estudos, Ponte, Branco e Matos (2009) sistematizaram os erros e dificuldades mais comuns que se apresentam na seguinte tabela:

Tabela 1.3 - Erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 1.º grau (Adaptado de Ponte, Branco & Matos, 2009)

Categorização	Exemplos	Autores
Adição de termos que não são semelhantes e interpretação dos sinais "+" e "=" como indicadores de uma ação.	$3+4n=7n$ $2a+5b=7ab$	Booth, 1984, 1988 Kieran, 1985, 1992 Kuchemann, 1981 MacGregor e Stacey, 1997
Interpretação incorreta de monómios de 1.º grau.	Interpretação $4y$ como: - quatro "y" s; - um número com quatro dezenas e um número desconhecido de unidades; - $4+\ y$ por analogia de $3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}$	Booth, 1984
Uso parêntesis.	$3(x+2)=7x \Leftrightarrow 3x+2=7x$	Kieran, 1992 Booth, 1988 Socas, Machado, Palarea e Hernandez, 1996
Não saber como começar a resolver uma equação.	$x^2-x+2=0$	Kieran, 1985
Não respeita convenção de que várias ocorrências da mesma incógnita representam o mesmo número		Kieran, 1985
Adição incorreta de termos semelhantes	$-2x+5x=8 \Leftrightarrow -7x=8$	Kieran, 2006
Adição incorreta de termos não semelhantes	$2x+5=x+8 \Leftrightarrow 7x=9$	Kieran, 1985
Transposição incorreta de termos.	a) $16x-215=265 \Leftrightarrow 16x=265-215$ b) $30=x+7 \Leftrightarrow 30+7=x$ c) $3x+5=2x \Leftrightarrow 3x=2x+5$ d) $7x=x+8 \Leftrightarrow 7-8=x+x$	Kieran, 1985, 1992; Hall, 2002
Redistribuição	$-2x+5=8 \Leftrightarrow -2x+5-5=8+5$	Kieran, 1992; Hall, 2002
Eliminação	$3x-3=2x-4 \Leftrightarrow x=2x-4$	Kieran 1992; Hall, 2002
Conclusão incorreta da resolução da equação	a) $6x=24 \Leftrightarrow 6+x=24$ b) $11x=9x=\frac{11}{9}$ c) $2x=4\,; então$ ➢ $x=4-2$	Kieran, 1985, 1992; Lima e Tall, 2008; Vlasis, 2001; Hall, 2002

	➢ $x = -\frac{4}{-2}$ ➢ $x = \frac{2}{4}$ d) $-x = -17 \Leftrightarrow ??$ e) $-x = 4 \Leftrightarrow ??$	

Hall (2002) além de mencionar os tipos de erros referidos na tabela anterior (Transposição incorreta de termos; Redistribuição; Eliminação; Conclusão incorreta da resolução da equação), identificou dois outros tipos de erros que são: *exhaustion error,* por exemplo: $\frac{2x^2+10x+11}{x^2+3x+2} = \frac{10+11}{3} = 7$ (neste caso, elimina-se "$2x^2$" com "x^2" e "2"); e *absence of structure*, por exemplo $5x + x + 2 = 3x + 12 \Leftrightarrow 3 + 2 = 3x - 8$.

Relativamente às dificuldades dos alunos do Ensino Secundário na compreensão de funções, os investigadores Ponte, Branco e Matos (2009) sublinham que os alunos sentem dificuldade em fixar a terminologia própria do tema funções (domínio, contradomínio, objeto, imagem), defendendo por isso, que o seu estudo deve ser realizado com situações da realidade. Os alunos mostram dificuldade em lidar eficazmente com a simbologia $x, y, f(x)$. Por vezes, compreendem perfeitamente do que se está a falar quando se diz que "a imagem de 5 é 3", mas não conseguem entender a expressão $f(5) = 3$. Os alunos têm igualmente dificuldade em determinar um objecto que corresponda a uma imagem dada em situações contextualizadas (Ponte et al., 2009).

Sajka (2003) mencionou, também, a dificuldade dos alunos relativamente à notação de função. Neste caso, por exemplo, a função $f(x) = x + 3$ pode ser vista como um processo de cálculo, os alunos calculam o valor da função para determinar o valor de x. Além disso, na notação $f(x) = y$, em que f designa o nome da função, $f(x)$ representa os valores da função que estão dependendo do valor de x, neste caso é igual a y. Assim, este autor sublinhou que as dificuldades dos alunos na aprendizagem das funções estão muito relacionadas com a ambiguidade intrínseca do simbolismo matemático, com o contexto restrito no qual os símbolos são ensinados, bem como com o tipo limitado de tarefas, e, ainda, com a própria interpretação que o aluno faz delas.

Além disso, Sajka (2003) mencionou que o aluno tem dificuldade em aceitar que $f(x) = 0$ é uma função. Esta realidade provavelmente prova da sua associação a que zero é representativo de "nada", neste caso a compreensão deste aluno baseia-se na sua compreensão do conceito de número. Ainda no seu estudo, o autor identificou também dificuldades na propriedade da operação da função $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$. Por exemplo, na função $f(x+y) = (x^2 - 2x + 3) + (x^2 + 5)$ o aluno interpreta esta função como uma fórmula de uma função e isto não acontece por mera coincidência. Para este aluno, uma equação é provavelmente duas expressões algébricas contendo letras x ou y conectadas pelo sinal de igual, não permitindo uma situação em que haveria f em ambos os lados da equação. Neste caso o aluno identificou o conceito de uma fórmula de uma função com o conceito de equação.

O aluno também tem a dificuldade na compreensão do conceito de função constante. Esta dificuldade tem origem na compreensão do conceito de função que se associa ao conceito de variação. No caso da função constante $y = k$, o valor de y é único e não envolve a variável x (Akkoç & Tall, 2002).

Chazan e Yerushalmy (2003) referem que, geralmente, as funções são conceituadas como um tipo especial de relação. Neste contexto pode criar-se uma confusão, nos alunos, na identificação de que, por exemplo $2x + y = -1$ é uma equação com infinitas soluções ou é uma função.

Outra das dificuldades da aprendizagem do conceito de função é referente à memorização sem compreensão que os alunos fazem. Focando algumas conclusões de um estudo a alunos do 11.º ano de escolaridade, Saraiva e Teixeira (2009) referem que a definição de função foi memorizada por alguns alunos, mas a maior parte deles não foi capaz de associar as palavras que escreveram, como "(…) a um objeto corresponde uma e só uma imagem" (…), com a representação gráfica de uma função –, escolhendo representações gráficas que não representavam uma função, contradizendo a afirmação que haviam escrito anteriormente. Estes alunos associaram o conceito da função à representação analítica e, como afirma Sajka (2003), a capacidade dos alunos para manipular os símbolos, e operar com eles, não é suficiente para a sua compreensão estrutural de uma função.

Saraiva e Teixeira (2009) afirmam, também, que algumas das dificuldades que os alunos enfrentam quando tentam compreender o conceito de função estão relacionadas com o uso do conjunto de símbolos relacionados com ele. Estes autores referem ainda que o interesse dos alunos é estimulado pelas tarefas matemáticas selecionadas pelo professor e pelas situações e contextos que ele promove na aula, nomeadamente o da resolução de problemas e o da apresentação de tarefas de exploração e investigação. Assim, e para Saraiva e Teixeira (2009), a resolução de tarefas matemáticas daquela natureza pode promover nos alunos o desenvolvimento do seu próprio pensamento algébrico, da sua capacidade de interpretar e de manipular os símbolos matemáticos, e as relações existentes entre eles, bem como desenvolver a sua capacidade em lidar com as estruturas algébricas, representando e raciocinando de uma forma progressivamente mais abstrata.

Relativamente às dificuldades dos alunos nas representações de funções em forma de tabelas, gráficos e expressão algébrica, Ponte et al. (2009) consideram que a maioria dos alunos sente muitas dificuldades no pensamento abstrato, em particular no trabalho com gráficos cartesianos, recorrendo frequentemente a estratégias e processos de raciocínio numéricos. Porém, é nas expressões algébricas que os alunos têm um maior contacto com o simbolismo matemático. Por exemplo, nas duas funções $y = 4x$ e $y = 3x + 200$, onde cada uma pode representar a distância percorrida por um indivíduo ao longo do tempo, verifica-se que a primeira traduz uma função linear numa relação de proporcionalidade direta. Para determinar a distância percorrida pelo respetivo indivíduo ao fim de um certo tempo os alunos podem utilizar diversas estratégias, porém, muitas das que os alunos estão habituados a utilizar para resolver problemas deixam de funcionar, como se verifica se for utilizada a proporcionalidade direta na segunda função (Ponte et.al., 2009).

1. 4 Enfoque Ontossemiótico (EOS) do conhecimento e da instrução Matemática

O enfoque ontossemiótico (EOS) é um marco teórico que pretende articular diferentes pontos de vista e noções teóricas sobre o conhecimento matemático, seu ensino e aprendizagem. Além disso, também, é um sistema teórico para a investigação em educação em matemática, cujos conceitos deste sistema teórico se podem utilizar como ferramentas para identificar e classificar os conhecimentos requeridos para o ensino da matemática e, portanto, para analisar os conhecimentos postos em jogo pelo professor (Godino, 2009).

Este enfoque, segundo Godino (2009), compõe-se de vários modelos: um modelo epistemológico sobre a Matemática, baseado em pressupostos antropológicos/

socioculturais (Bloor, 1983; Chevallard, 1992; Radford, 2006); um modelo de cognição matemática sobre bases semióticas (Eco, 1976; Hjelmslev, 1943; Peirce, 1931); um modelo instrucional sobre bases socioconstrutivistas (Ernest, 1998; Brousseau, 1998); e um modelo sistémico-ecológico (Morin, 1977) que relaciona as dimensões anteriores entre si com o fundo biológico, material e sociocultural (Maturana & Varela, 1984), em que tem lugar a atividade de estudo e comunicação matemática.

Na ideia de Godino, Batanero e Font (2008), no EOS trata-se da formulação duma ontologia de objetos matemáticos que contemple o triplo aspeto de Matemática como: atividade socialmente compartilhada de resolução de problemas; linguagem simbólica; e sistema conceitual logicamente organizado. Tomando como noção primitiva a de situação-problema, definem-se os conceitos teóricos de prática, objeto (pessoal e institucional) e significado, com a finalidade de tornar evidente e operativo, por um lado, o triplo caráter da Matemática que mencionei, e, por outro, a gênese pessoal e institucional do conhecimento matemático, assim como sua interdependência.

Baseados nos vários estudos realizados no EOS (D'Amore, Font & Godino, 2007; Font & Contreras, 2008; Godino, Font, Wilhelmi & Castro, 2009), Font, Plana e Godino (2010) apresentam um conjunto de noções teóricas que atualmente compõem o EOS, são classificadas em cinco grupos, cada um dos quais permite analisar aspetos complementares dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática: sistema de prática; configurações de objetos e processos; configuração didática; dimensão normativa; e idoneidade didática, como se apresenta na seguinte figura:

Figura 1.2- Organização em níveis de análise do EOS (Font, Planas & Godino, 2010, p.92)

Font, Plana e Godino (2010) consideram que os quatro primeiros níveis de análise (análise dos tipos de problemas e sistemas de práticas, elaboração das configurações de objetos e processos matemáticos, análise das trajetórias e interações didáticas e identificação do sistema de normas e meta normas) são ferramentas para uma didática descritivo-explicativa, enquanto o quinto nível de análise (avaliação da idoneidade didática do processo de ensino e aprendizagem) se baseia nos quatro níveis iniciais e constitui uma síntese orientada para avaliar se as atividades implementadas, em sala de aula, são 'idôneas' ou adequadas, visando à identificação de potenciais melhoras do processo de ensino e aprendizagem.

No primeiro nível, análise dos tipos de problemas e sistemas de práticas, é necessário para examinar as práticas matemáticas realizadas no processo de estudo que está analisado, como afirmação do segundo Godino, Batanero e Font (2008):

> A realização duma prática é algo complexo que mobiliza diferentes elementos, a saber, um agente (instituição ou pessoa) que realiza a prática, um meio em que se realiza a prática (nesse meio pode haver outros agentes, objetos, etc.). Posto que o agente realiza uma sequência de ações orientadas para a resolução de um tipo de situações-problema, é necessário considerar, também, entre outros aspetos, fins, intenções, valores, objetos e processos matemáticos (p.25).

Assim, os autores consideram que este primeiro nível apenas realiza a análise epistémica e cognitiva. Portanto, não se deve interpretar apenas as entidades conceptuais, mas também as situações problemáticas e os meios expressivos e argumentativos que desencadeiam os processos interpretativos (Godino, Batanero e Font, 2008, p.10).

Relativamente ao segunda nível, esta análise centra-se nos objetos e processos que intervêm na realização das práticas, e também os que emergem delas. A intenção de análise deste nível é descobrir e descrever a complexidade ontossemiótica das práticas matemáticas como fator explicativo dos conflitos semióticos que se produzem em sua realização (Godino, Batanero e Font, 2008, p. 25).

Os autores consideram, também, que o estudo da Matemática deveria envolver um professor que direcione e interaja entre e com os alunos. Por isso, os autores salientam que: a análise didática deveria progredir desde a situação-problema e das práticas matemáticas necessárias para sua resolução (análise 1) às configurações de objetos (epistêmicas e cognitivas) e processos matemáticos que possibilitam essas práticas (análise 2) para o estudo das configurações didáticas e para sua articulação em trajetórias didáticas (Godino, Batanero e Font, 2008, p. 25).

O tipo de análise didática orientada, nível três, sobretudo à descrição de padrões de interação (entre o professor, alunos e objeto) que tem a relação com as aprendizagens dos alunos. As trajetórias cognitivas, segundo D'Amore, Font e Godino (2007), são condicionadas e suportadas pelas normas que não só regulam a dimensão epistêmica dos processos de estudo (níveis 1 e 2 de análise), mas também regulam outras dimensões dos processos de estudo (cognitiva, afetiva, etc.).

No quarto nível de análise, pretende-se analisar todo esse processo e dando suporte e condicionando os participantes (o professor, os alunos, o objeto) que estão envolvidos nos processos de estudo. Para o segundo Godino, Batanero e Font (2008) este nível é o resultado da consideração de fenômenos de índole social que acontecem nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Os quatro níveis apresentados anteriormente, são as ferramentas para uma didática descritiva-explicativa, que servem para compreender e responder a pergunta: "que está acontecendo aqui e por quê?". Godino, Batanero e Font (2008) sublinham que

> A Didática da Matemática não deveria limitar-se a uma mera descrição que deixa tudo como estava, mas deveria aspirar à melhora do funcionamento dos processos de estudo. Portanto, são necessários critérios de "idoneidade" ou adequação que permitam avaliar os processos de ensino efetivamente realizados e "guiar" sua melhoria (p. 26).

Consequentemente, o quinto nível de análise é a idoneidade ou adequação didática que se baseia nas quatro análises anteriores e se constitui em uma " Síntese final orientada a identificação de potenciais melhoras do processo de estudo em novas implementações" (Godino, Batanero & Font, 2008, p. 26).

Apresenta-se, em síntese, os cinco níveis de análise do EOS que constituem uma extensão progressiva da capacidade de análise dos processos de estudo matemático. Assim, temos:

1. *Sistema de práticas* - Identifica-se pela planificação e implementação de um processo de estudo de uma noção, conceito ou conteúdo matemático, bem como as

práticas relacionadas a esse processo;
2. *Configuração de objetos e processos* - Centrado nos objetos matemáticos e nos processos que intervêm na realização das práticas e o que emerge delas. Tem a finalidade de descrever a complexidade das práticas como fator explicativo dos conflitos semióticos produzidos em sua realização;
3. *Trajetórias didáticas* - Considera as interações entre professor e estudantes. Objetiva a identificação e descrição das interações, relacionando-as com a aprendizagem dos estudantes (trajetória cognitiva);
4. *Dimensão normativa* - Referem-se ao sistema de normas referentes a convenções, hábitos, costumes, leis, diretrizes curriculares que regulam o processo de ensino e aprendizagem e que condicionam as configurações e trajetórias didáticas;
5. *Idoneidade (Adequação) didática* - Necessita da reconstrução de um significado de referência para os objetos matemáticos e didáticos pretendidos. Essa noção é envolvida em seis dimensões, devendo ser tomados como referência, resultados de investigações didáticas relativas às diferentes dimensões que compõem esse nível.(Godino, Font & Wilhelmi, 2007, p. 4 - 5)

Godino, Font e Wilhelmi (2007) consideram que esses níveis de análise, de acordo com o momento do processo de instrução que está sendo considerado, têm um foco diferente. Por exemplo, o primeiro e o segundo nível de análise são fundamentais no desenho curricular e no planeamento do processo instrucional. O terceiro e quarto níveis são particularmente utiliza no estudo da implementação realizada. O quinto nível deve ser levado em consideração tanto na fase de planeamento como na avaliação dos processos de treinamento.

Seguidamente, descrevem-se ferramentas do EOS que estão utilizadas neste trabalho, nomeadamente: Sistema de práticas e objetos matemáticos (significados pessoais e significados institucionais); Configuração (Trajetória) dos objetos e processos; Idoneidade (adequação) didática e Conhecimento Didático – Matemático (CDM) do professor.

1.4.1 Sistema de práticas e objetos matemáticos

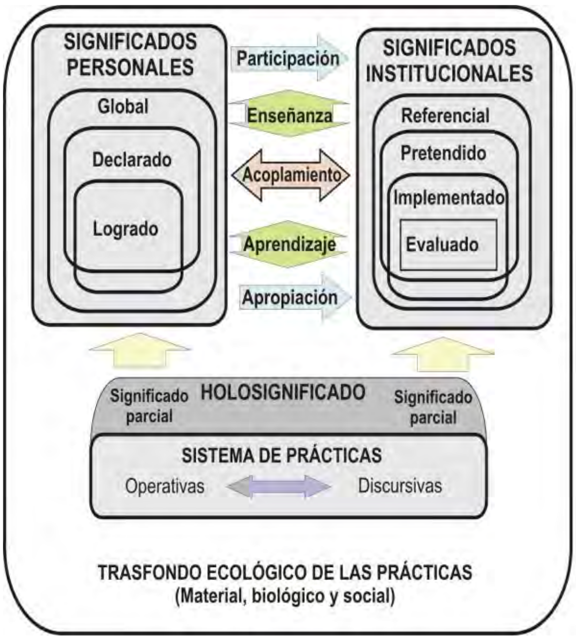
Considerando-se a prática matemática, os investigadores Godino e Batanero (1994), Font, Planas e Godino (2010) definem o conceito de prática como qualquer ação/performance ou manifestação (verbal, gráfica, gestual) utilizada na resolução de problemas matemáticos e na comunicação das soluções obtidas, a fim de validá-las ou generalizá-las a outros contextos e problemas.

Godino, Contreras e Font (2007) sublinham que nas práticas matemáticas, intervêm objetos não ostensivos (conceitos, proposições, etc.,) que evocamos ao fazer Matemática, os quais são representados em formas ostensiva, isto é, textuais, orais, gráficas ou mesmo gestuais. Através dos sistemas de práticas matemáticas operacionais e discursivas aparecem novos objetos que dão conta da sua organização e estrutura (tipos de problema, linguagem, procedimentos, definições, proposições e argumentações). Neste sentido, os investigadores Godino, Batanero e Font (2007) afirmam que se os sistemas de práticas são compartilhados dentro de uma instituição, os objetos emergentes são considerados "objetos institucionais", ao passo que se tais sistemas correspondem a uma pessoa, nós os consideramos como "objetos pessoais".

O sistema de práticas e objetos matemáticos baseia-se na aplicação das noções de prática matemática ligadas à solução de um tipo de problema, objetos emergentes (e intervenientes), significados sistêmicos institucionais e pessoais (Godino & Batanero, 1994, 1998; Godino & Font, 2007).

Godino, Batanero e Font (2007) identificam-se uma tipologia de significados pessoais e institucionais como se apresenta na figura 1.4.

Figura 1.3 - Tipos de significados institucional e pessoal (Godino, Batanero & Font, 2007, p. 6)



Para estes mesmos autores os significados pessoais propostos podem ser:

- Globais: Corresponde à totalidade do sistema de práticas pessoais que é capaz de manifestar potencialmente o sujeito (assunto) em relação a um objeto matemático.

- Declarados: Apresenta as práticas efetivamente expressadas em relação aos testes de avaliação propostos, incluindo tanto os corretos como os incorretos do ponto de vista institucional.

- Alcançados: Corresponde às práticas manifestadas que estão de acordo com as diretrizes institucionais estabelecidas. Na análise da mudança de significados pessoais que tem lugar em um processo de estudo, será interessante ter em conta os significados iniciais ou prévios dos alunos e dos emergentes (p. 5).

Relativamente aos significados institucionais propostos podem ser:

- Referenciais: Sistema de práticas que se usa como referência para elaborar o significado pretendido. Numa instituição de ensino concreta, esse significado de referência será uma parte do significado holístico (Wilhelmi, Godino & Lacasta, 2007) do objeto matemático. A determinação referencial do significado global exige um estudo histórico e epistemológico sobre a origem e evolução do objeto considerado, bem como a consideração da diversidade de contextos de uso em que se manifesta o dito objeto.

- Pretendidos: Sistema de práticas incluídas no planeamento do processo de estudo.

- Implementados: Sistema de práticas efetivamente implementadas pelo professor em um processo de estudo específico.

- Avaliados: Subsistema de práticas utilizadas pelo professor para avaliar a aprendizagem (p. 5).

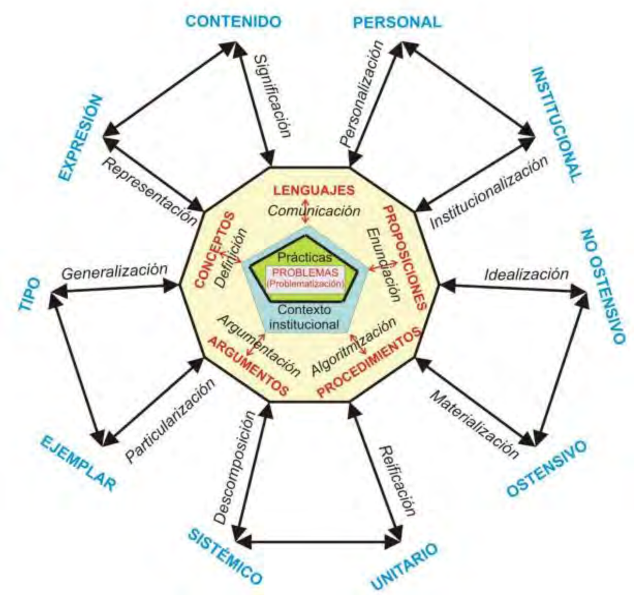
Relativamente à relação entre os significados pessoais e institucionais, Godino e Batanero (1994) sublinham que os significados aprendidos pelos estudantes dependem, fundamentalmente, dos institucionais, ou seja, dos significados pretendidos associados aos sistemas de práticas planificados por um processo particular de instrução, bem como os efetivamente utilizados na instrução e daqueles que são avaliados. Ou seja os significados pessoais e institucionais interligam o processo de ensino e aprendizagem através de um determinado objeto matemático. Ainda neste sentido, Godino, Batanero e Font (2007) afirmam que o ensino implica a participação do estudante na comunidade de práticas que suporta os significados institucionais; a aprendizagem, em última instância, supõe a apropriação, pelo estudante, dos referidos significados.

1.4.2 Configuração dos objetos e processos

Relativamente aos objetos matemáticos, Godino e Batanero (1994) definem-se como a descrição de problemas ou situações problemáticas, representações simbólicas, definições de objetos, enunciados de proposições e procedimentos, que são invariantes características do campo de ação, e argumentação que estão ligados com as práticas matemáticas.

Na realização de prática matemática realizada na aprendizagem da Álgebra, por exemplo, e a interpretação dos seus resultados consideram-se os componentes do conhecimento que possibilitam a realização e avaliação dessa prática. Para facilitar esta realização e avaliação da prática matemática, Godino, Batanero e Font (2008, p. 14) estabeleceram uma tipologia de objetos e processos que intervêm na aprendizagem matemática.

Figura 1.4 - Objetos e processos que intervêm em práticas matemáticas (Godino et al., 2007, p. 130).



Godino, Batanero e Font (2007) na sua teoria enfatizam que o objeto e processo configuração é considerada uma base importante na descrição e análise da atividade matemática:

- *Situações problemáticas*, são aplicações matemáticas extras, tarefas, exercícios, problemas de onde emergem os objetos, ações que induzem uma atividade matemática (por exemplo: tarefa algébrica sobre padrão e sequência apresentada pelas imagens);
- *Elementos linguísticos,* envolve termos como expressões, notações, gráficos, etc. que se usam para representar os dados de problemas dos vários registos: escritos, orais, gestual, etc. (por exemplo: apresentação dos dados do padrão e sequência numa figura e registadas os números de elementos numa tabela);
- *Conceitos / definições*, são introduzidos por definições ou descrições e definições (por exemplo: conceito de padrão e de progressão aritmética);
- *Propriedades / proposições,* são enunciados sobre relação ou propriedades dos conceitos que se utiliza na resolução de problemas (por exemplo: na progressão aritmética as diferenças entre dois termos sucessivos são iguais);
- *Procedimentos*, são algoritmos, operações, técnicas de cálculo, etc. que se aplicam para resolver o problema (por exemplo: a fórmula da progressão aritmética para determinar a quantidade do elemento do n, termo da progressão aritmética, neste caso $U_n = a + (n-1)b$);
- *Argumentos,* são enunciados que se utilizam para validar ou explicar proposições e procedimentos, que podem ser dedutivos, indutivos, formais ou informais.

Todos os objetos estão relacionados por meio de funções semióticas, referenciais e operacionais, formando configuração ontossemiótico de práticas, objetos e processos.

Neste presente estudo, os objetos e processos que estão envolvidos na prática matemática são considerados como um critério de avaliação do conhecimento matemático, neste caso é conhecimento da Álgebra dos estudantes.

Considera-se que os objetos matemáticos que intervêm na prática matemática são o centro do EOS. Para Font, Planas e Godino (2010) os objetos matemáticos são alicerçados por cinco dimensões duais: pessoal-institucional, expressão-conteúdo, sistêmico-unitário, não ostensivo- ostensivo e intensivo-extensivo. Os autores referidos apresentam um exemplo de uso dessas dualidades que pode ser expresso acerca do objeto matemático primário "definições" em relação ao conteúdo de funções. A definição de função, por exemplo, tem, entre outras, uma dimensão institucional (a definição Matemática) e uma pessoal (a definição adotada, socialmente construída por um aluno em determinado momento). De acordo com Godino, Batanero e Font (2008), essas dimensões duais referem-se a atributos, que passam a ser explicitados. Estas dimensões são:

- *Pessoal-institucional.* Se os sistemas de práticas são específicos de uma pessoa, são considerados "objetos pessoais" (concepções, esquemas, representações pessoais); mas, se são compartilhados no âmbito de uma instituição, os objetos emergentes são considerados institucionais (Godino & Batanero, 1994, p. 338);
- *Ostensivo – não ostensivo*. Entende-se por ostensivo qualquer objeto que é público e que, portanto, pode ser mostrado ao outro. Os objetos institucionais e pessoais têm uma natureza não ostensiva (não perceptíveis por si mesmos), no entanto, são utilizados em práticas públicas por meio de seus ostensivos associados (notações, símbolos, gráficos). Essa classificação entre ostensivo e não ostensivo é relativa ao jogo de linguagem do qual participam, porque um objeto ostensivo pode ser também pensado, imaginado por um sujeito ou estar implícito em um discurso matemático (por exemplo, o sinal de divisão em uma notação algébrica);
- *Expressão-conteúdo*. Antecedente e consequente da função semiótica. A atividade matemática e os processos de construção e uso dos objetos matemáticos se caracterizam por serem essencialmente relacionais. A relação que se estabelece por meio de funções semióticas, entendidas como "uma relação entre um antecedente (expressão, significante) e um consequente (conteúdo, significado) estabelecida por um sujeito (pessoa ou instituição), de acordo com certo critério ou código de correspondência" (Godino, Batanero & Font, 2008, p. 17);
- *Extensivo-intensivo*. Essa dualidade trata da dialética entre o particular e o geral, sendo utilizada para explicar uma das características básicas da atividade matemática, o uso de elementos genéricos, que se refere a um objeto que intervém num jogo de linguagem, como um caso particular de uma classe mais geral. Por exemplo, no estudo das funções, $y = 2x + 1$, seria uma função particular pertencente à classe ou tipo de funções lineares $y = mx + n$; a última expressão é um objeto *intensivo* (Godino, Batanero & Font, 2007).

Porém, segundo os autores, os termos *extensivo* e *intensivo* não são aqui considerados sinônimos, respectivamente, de geral e particular; recebem essa denominação para ressaltar o caráter situado que possuem, uma vez que um mesmo objeto pode ser considerado *intensivo* em determinada situação e *extensivo* em outra. No exemplo anterior, conforme apontado por Godino, Batanero e Font (2007), a função y = mx + n pode ser classificada como um objeto *extensivo*, se considerar-se o estudo das funções polinomiais. A classe das funções polinomiais seria classificada como *intensivo*. Também a função particular y = 2x + 1, considerada um exemplo de *extensivo* anteriormente, pode ser considerada um *intensivo*, se for utilizada como expressão que permite obter o enésimo termo de determinada sequência;

- *Unitário-sistêmico.* Refere-se à participação dos objetos como entidades unitárias (que supostamente são conhecidas previamente) ou como sistemas que devem ser decompostos para seu estudo (entidade sistêmica). Por exemplo, no estudo da adição e subtração, nos últimos anos do Ensino Básico, o sistema de numeração decimal (dezenas, centenas) é considerado entidade unitária (por se tratar de algo conhecido). Esses mesmos objetos são, no entanto, considerados sistêmicos no primeiro ano desse mesmo curso.

Godino, Batanero e Font (2008) referem, ainda, que os objetos matemáticos que intervêm nas práticas matemáticas (situações-problemas, linguagem, definições, proposições, procedimentos argumentos) e "los procesos de donde emergen os seus emergentes" (p.9) (comunicação, problematização, definição, enunciação, elaboração de procedimento – algoritmatização, argumentação) podem ser analisados segundo as dimensões duais. Posteriormente, os autores mencionam as dualidades que ocorrem nos seguintes processos cognitivo-epistêmicos: institucionalização - personalização; generalização - particularização; decomposição - reificação; materialização - idealização; representação - significação.

1.4.3 Modelo de conhecimento didático-matemático do professor

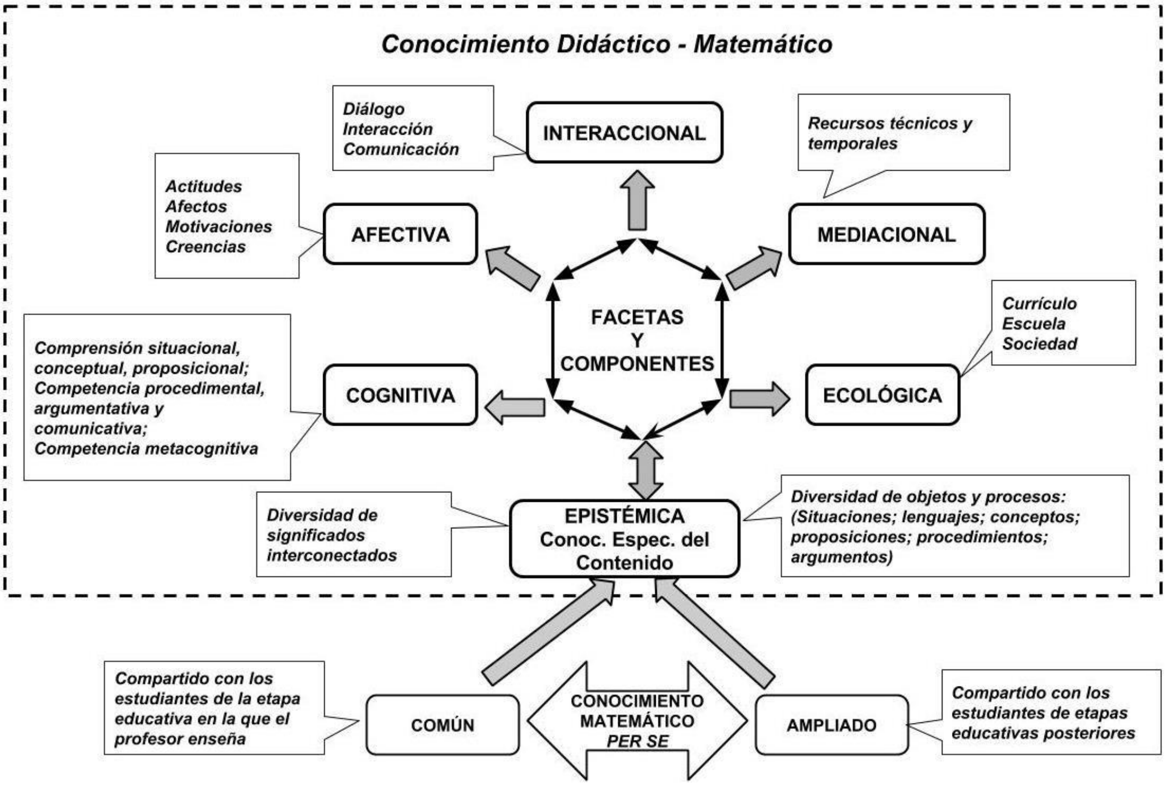
O modelo de CDM é uma ferramenta que propõe um sistema de categorias para a análise do conhecimento de matemática e didática do professor que envolve algumas das categorias dos modelos descritos acima (didático-matemático), que são complementadas e desenvolvidas com elementos da EOS (Godino, 2009). Estas ferramentas permitem uma análise mais detalhada do conhecimento didático - matemático do professor, tendo em conta todos os componentes ou facetas (epistêmica, cognitivo, afetivo, interacional, mediacional e ecológica) envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem que um professor deve colocar em jogo para ensinar um tema particular.

O eixo central da EOS é a modelagem do conhecimento matemático, em seus aspetos dual epistêmico (institucional) e cognitivo (pessoal), baseado numa abordagem antropológica (matemática como atividade humana) e ontossemiótica (em que as noções de objeto e significado são centrais). Essa modelação fornece as categorias primárias do conhecimento didático-matemático (Godino, 2009; Pino-Fan & Godino, 2015).

Considera-se o professor de Matemática tem que conhecer a matemática escolar do nível educacional onde ele ensina, mas também deve ser capaz de articular esse conhecimento com o conhecimento sobre as estratégias de ensino (conhecimento didático). Este conhecimento constitui o "conhecimento do conteúdo matemático *per se*" (Scheiner, 2015), que no modelo proposto da EOS é constituído pelo conhecimento comum (correspondente ao nível em que é ensinado) e pelo avançado (relacionado a níveis mais altos) (Godino, Batanero, Font & Giacomone, 2016).

Godino, Batanero, Font e Giacomone (2016) mencionam que o conhecimento puramente matemático não é suficiente para o professor organizar, implementar e avaliar os processos de ensino e aprendizagem. Os fatores que influenciam esses processos são complexos, e é necessário ter, também, um conhecimento mais profundo da matemática e de seu ensino, diferente daquele adquirido pelos alunos, que chamaremos de conhecimento didático-matemático. Estes autores mencionam o modelo de conhecimento didático-matemático que se sobrepõe ao conhecimento matemático per se (comum e avançado), como se apresenta na seguinte figura:

Figura 1.5 - Facetas e componentes do conhecimento do professor (Godino, Batanero, Font & Giacomone, 2016, p. 292)



Neste modelo do CDM os autores propõem uma reestruturação dos componentes do Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) que revela o vínculo e a interação entre eles e as seis facetas envolvidas nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática (epistémica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica). Este modelo respeita a proposta de Pino-Fan, Godino e Font (2013) sobre três categorias globais de conhecimento sobre o conteúdo matemático do professor:

1) *Conocimiento común del contenido* (CCC): conhecimento matemático, não necessariamente orientado ao ensino, que deve ser colocado em jogo para resolver problemas de um tema matemático (faceta epistêmica);

2) *Conocimiento ampliado del contenido* (CAC): conhecimento avançado desse tema, sendo capaz de estabelecer conexões com temas mais avançados do currículo, com os quais o aluno se encontrará posteriormente (faceta epistêmica);

3) Conocimiento Especializado (CE): conhecimento que o diferencia de outras pessoas que sabem matemática, mas que não são professores. Inclui a pluralidade de significados do

objeto, a diversidade de configurações de objetos e processos inerentes a tais significados e as articulações entre eles (faceta epistêmica).

Relativamente ao conhecimento especializado, este conhecimento envolve quatro subcategorias:

1) *Conocimiento del contenido especializado* (CCE): identificação dos conhecimentos propostos em jogo (elementos linguísticos, conceitos, propriedades, procedimentos e argumentos) na resolução de problema (faceta epistêmica);

2) *Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes* (CCRE): reflexão sistemática sobre a aprendizagem, que implica a capacidade de descrever as configurações cognitivas e os conflitos de aprendizagem dos alunos na resolução de um problema, formular perguntas que expliquem os seus significados pessoais na resolução de problemas e descrever estratégias para promover para promover que eles se envolvam na resolução de problemas ou no estudo de um tema (faceta cognitiva e afetiva);

3) *Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza* (CCREN): reflexão sistemática sobre as relações de ensino-aprendizagem e a identificação das consequências que podem ter na aprendizagem dos modelos de gestão de classes (faceta interacional e mediacional);

4) *Conocimiento del contenido en relación con el currículo* (CCRC): contexto em que se desenvolve a prática de ensino e aprendizagem (faceta ecológica) (Pino-Fan, Godino & Font, 2013).

Godino, Batanero, Font e Giacomone (2016) sublinha que todas essas facetas fazem parte do conhecimento especializado do professor de Matemática na medida em que tais processos colocam em jogo algum conteúdo matemático, seja ele comum ou avançado. Para estes autores, todas estas facetas estão relacionados entre si. Por exemplo, na tarefa matemática, o professor deve ser capaz de mobilizar a diversidade de significados que são colocados em jogo (faceta epistêmica) e também deve ser capaz de resolver a tarefa, envolvendo procedimentos diferentes, mostrando diferentes justificativas e explicações, ou variando-a e adaptá-la aos conhecimentos dos alunos (facetas instrucionais e cognitivas).

Godino (2009) apresenta, também, um guião relativamente o CDM para o professor de

Matemática. Este guião utiliza-se para:

(1) a avaliação de situações introdutórias em processos formativos para o desenvolvimento de competências profissionais;
(2) como "questionário" de autoavaliação e reflexão do professor sobre aspetos relevantes da sua própria prática;
(3) como instrumento de um avaliador externo para avaliar um processo de estudo implementado (p.25).

Relativamente à formação inicial de professores, o autor sublinha que esta estratégia de refletir e de avaliar são aspetos importantes para os futuros professores, no sentido de fazer reflexão pelas suas práticas e levar a melhorar cada vez mais a idoneidade didática. Assim, a noção de idoneidade didática "pode ser o ponto de partida de uma teoria da instrução Matemática orientada para a melhoria progressiva do ensino" (Godino, 2011, p. 1).

O modelo de CDM do professor de Matemática é considerado como o modelo para a formação do professor de Matemática. Neste sentido, Godino, Batanero, Font e Giacomone (2016) afirmam que este conhecimento se refere a um processo de estudo matemático no qual o professor está envolvido e, portanto, a faceta cognitiva e afetiva referem-se aos estudantes (futuros professores) de Matemática. No caso do professor formador, trata-se de um processo de estudo da didática da Matemática, em que os estudantes são professores de Matemática em formação, a quem se referem as facetas afetiva e cognitiva. Na primeira dessas facetas, as crenças são levadas em conta e, na segunda, os processos meta-cognitivos do professor de Matemática, que devem ser conhecidos e levados em consideração pelo formador. A formação dos professores também deve ter em consideração o conhecimento matemático per se, uma vez que o conhecimento didático também envolve o conteúdo matemático.

1.5 Definição dos níveis do RA na atividade da Matemática no Ensino Básico e no Ensino Secundário

Descreve-se, nesta parte, as características das práticas realizadas na resolução de tarefas matemáticas do Ensino Básico e do Ensino Secundário, que permitem definir diferentes níveis de Raciocínio Algébrico Elementar (RAE).

O referencial teórico EOS propõe uma caracterização do RAE envolvendo a distinção de três níveis para a atividade matemática do ensino Básico, baseada: nos tipos de representações utilizadas; nos processos de generalização envolvidos; e no cálculo analítico que corresponde à atividade matemática. Esta teoria amplia-se, também, em três níveis mais avançados que se aplicam na análise da atividade matemática ao nível do Ensino Secundário, nomeadamente: a utilização e tratamento de parâmetros para representar famílias de equações e funções; e o estudo das estruturas algébricas, suas definições e propriedades (Godino et al., 2013).

Os trabalhos realizados pelos seguintes autores: Aké, Godino, Gonzato e Wilhelmi (2013); Godino, Aké, Gonzato e Wilhelmi (2014) propõem um modelo do RA para o Ensino Básico que distingue três níveis do RA, estabelecendo também critérios para identificar a atividade matemática puramente Aritmética (nível 0 do RA). Os critérios para delimitar os diferentes níveis baseiam-se no tipo de objetos e processos matemáticos envolvidos na atividade matemática, de acordo com a abordagem Ontossemiótica (EOS). Godino, Neto e Wilhelmi (2017) desenvolvem estes níveis em mais três níveis de RA para caracterizar os níveis de RA para o Ensino Secundário.

Os níveis do RA são atribuídos à atividade matemática realizada pelo aluno na resolução de tarefas matemáticas e não às tarefas em si, que podem ser resolvidas de maneiras diferentes, podendo colocar em jogo uma atividade algébrica diferente. Isto não significa que não existam tarefas intrinsecamente algébricas; isso ocorre quando objetos algébricos (incógnitas, equações, variáveis, parâmetros, funções ou estruturas algébricas) são colocados em ação na própria instrução de tarefa.

Relativamente à definição de níveis de RA, tanto para o Ensino Básico como para o Ensino Secundário, esta baseia-se em distinções de natureza ontossemiótica:

- Presença de objetos algébricos intensivos (ou seja, entidades de carácter geral ou indeterminado);
- Transformações (operações) aplicadas a esses objetos, as quais são baseadas na aplicação de propriedades;
- Tipo de linguagem utilizada.

Seguidamente apresenta-se as descrições de cada um dos níveis do RA com exemplos de atividades de natureza algébrica, como proposta de Godino et al. (2015), envolvendo Estrutura, Função e Modelação.

1.5.1 Níveis do RA da atividade matemáticas no Ensino Básico

Os níveis apresentados a seguir constam do trabalho de vários autores (por exemplo, Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014).

1. *Nível 0 do RA* (ausência de raciocínio algébrico).

Consideradas, neste nível, as respostas que não incluem características algébricas e onde são apenas realizadas *operações* com objetos particulares. Nestas respostas intervêm os *objetos* extensivos cuja *linguagem* usada é natural, numérica, podendo conter imagens. Podem intervir símbolos que se referem a um valor desconhecido, mas esse valor é obtido como resultado de operações em objetos específicos. Em tarefas funcionais, o reconhecimento da relação de um termo para o outro não implica a determinação de uma regra recursiva que generaliza a relação de casos particulares.

<u>Exemplo 1</u>: Faça as seguintes operações e compare os resultados:

a) 24.386 + 6.035   6.035 + 24.386

b) 24.386 + 6.035 + 715   6.035 + 715 + 24386

(Adaptado de Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014, p.9)

Esta tarefa não envolveu objetos intensivos e apenas se utilizou uma linguagem numérica. Na resolução desta tarefa, se um aluno apenas realizar as operações numéricas e comparar os resultados (os resultados são iguais) então as atividades realizas não implicam nenhum nível do RA. Portanto, categoriza-se no nível 0.

<u>Exemplo 2</u>: O ministério da agricultura planta no início de um período 25 caixas de cafeeiros. Cada caixa tem 20 cafeeiros. Depois de alguns dias de seca morreram 100 cafeeiros. Quantos cafeeiros restaram?

Um aluno pode resolver esta tarefa envolvendo o seguinte raciocínio:

25 caixas com 20 cafeeiros por caixa, então as 25 caixas têm 500 cafeeiro. Se morreram 100, então ficam só 400 cafeeiros.

A resolução do exemplo 2 envolve números particulares, operações aritméticas aplicadas a esses números e igualdade como resultado da operação. Para resolver esta tarefa o aluno deve reconhecer e aplicar os conceitos (objetos intensivos) de multiplicação e subtração de números naturais, além do conceito de número natural aplicado como cardinal de coleções discretas. Esses processos de particularização não se consideram como características do RA: as regras que definem as situações de uso de tais conceitos não são explicitadas na realização da tarefa. Portanto, esta solução tal como a anterior está categorizada no nível 0 do RA.

2. ***Nível 1 do RA*** **(Nível incipiente do RA).**

As respostas de *nível 1* são aquelas em que apenas se recorre às *propriedades* de estruturas algébricas num conjunto numérico. A igualdade é usada como equivalência de expressões e intervêm *objetos* intensivos cuja generalidade recorre a uma *linguagem* natural, numérica, simbólica, podendo recorrer a imagens. Em tarefas estruturais, podem aparecer dados desconhecidos, expressos em forma de símbolos, e serem aplicadas relações e propriedades de operações. Em tarefas funcionais, recorre-se ao cálculo com objetos extensivos.

Exemplo 3: Determine o valor em falta em cada uma das seguintes expressões:

a) 5+11=11+__ ; b) 10+ □ =15+15; c) 3× ... = 672

(Adaptado de Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014, p.10)

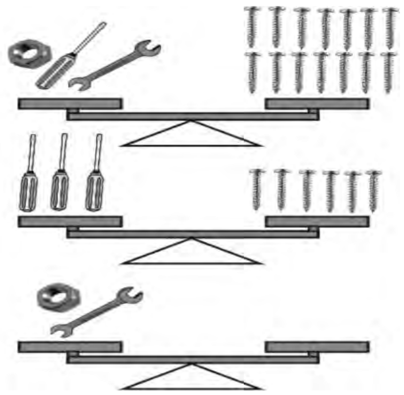
Na resolução da questão a) pode não envolve nenhuma operação numérica e apenas aplicar-se a propriedade comutativa da adição dos números naturais. Relativamente à questão b), pode-se resolver pela descomposição e aplica-se a propriedade associativa, como se mostra na seguinte solução:

10 + □ = (10 + 5) + 15 = 10 + (5 + 15) = 10 + 20. Assim o valor em falta é 20.

Para resolver a questão c), pode envolver-se a propriedade da divisão como a operação inversa de uma multiplicação. Mesmo assim, há uma possibilidade de um aluno resolver a questão c) por tentativa de erro, procurando alguns números e multiplica-se por 3 até chegar o resultado da operação (produto) é 672. Neste caso, a solução será de nível 0.

<u>Exemplo 4</u>: *Balança de parafusos.* Quantos parafusos têm que colocar na 3.ª balança para manter o equilíbrio?

Figura 1.6 - Balança de parafusos. Exemplo 4 de nível 1 do RA. (Adaptado de Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014, p.11)



Um aluno pode resolver esta tarefa com o seguinte raciocínio:

A segunda balança indica que 3 chaves de fendas (todas iguais) pesam o mesmo que 6 parafusos (também todos iguais); então 1 chave de fendas pesa o mesmo que 2 parafusos. Na primeira balança há 14 parafusos na placa à direita; Se tiramos uma chave de fenda, será necessário remover 2 parafusos para que a balança se mantenha equilibrada. Então, na 3.ª balança, temos que colocar 14 - 2 = 12; 12 (parafusos).

Nesta solução aplicam-se propriedades estruturais (ℕ, +, ×), utilizando uma linguagem natural. Portanto esta tipo da resposta categoriza-se no nível 1 do RA.

3. *Nível 2 do RA* (Nível intermédio do RA).

Neste nível são categorizadas as respostas que são constituídas por representações alfanuméricas de funções e equações. As variáveis são representadas através de uma linguagem simbólica e literal mencionando os objetos intensivos relacionados com a informação do contexto espacial ou temporal. Nas tarefas estruturais, são as equações lineares da forma $Ax \pm B = C$. E nas tarefas funcionais reconhece-se a generalidade, mas não se opera com as variáveis para obter formas canónicas de expressões algébricas.

Exemplo 5: Uma caixa mágica dobra o número de moedas que se coloca nela, mas depois é usada cada vez que você tem que pagar 4 moedas. O João tentou e colocou as suas moedas na caixa e elas efetivamente dobraram. Ele pagou 4 moedas e tentou novamente. Novamente eles dobraram, mas ao pagar as 4 moedas, ele ficou sem dinheiro. Quantas moedas tinha o João no começo?

(Adaptado de Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014, p.12)

Seguidamente, apresentam-se dois tipos de solução ilustrativas de diferentes níveis do RA.

Solução 1: Se o João tivesse 2 moedas, ele poderia jogar; quando colocasse na máquina as 2 moedas ganharia 4 e teria 0, então o João não poderia jogar novamente. Se o João tivesse 3 moedas, quando as colocasse na máquina, ganharia 6, quando pagasse 4, ficaria com 2. Poderia colocar as 2 novamente na máquina e receberia 4; ao pagar 4 ele ficaria sem dinheiro. Então o João tinha 3 moedas no começo.

Esta solução não envolve nenhum símbolo algébrico e apenas envolve os valores particulares e operações numéricas. Portanto, categoriza-se no nível 0 do RA.

Solução 2: Se o João começa com x moedas (quantia desconhecida); ao colocá-las na máquina, ele recebe 2 x; paga 4 e fica com 2 x - 4. Introduziu 2 x - 4 na máquina e ganha o dobro, ou seja, 2 (2 x - 4). Ao pagar 4 então fica sem dinheiro, isto é 2 (2 x - 4) - 4 = 0; 4 x - 8 - 4 = 0; 4 x - 12 = 0; x = 3

Esta solução envolve: a quantidade desconhecida x ,como incógnita, e uma equação do tipo $Ax \pm B = C$. Tendo por base estas características, a solução referida é categorizada no nível 2 do RA.

Exemplo 6: Quantos palitos são necessários para formar a 4.ª figura? E para formar a figura que estiver na posição 20? Quantos palitos serão necessários para construir a figura que estiver na posição 100?

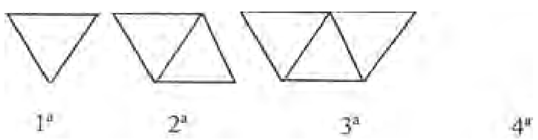


Figura 1.7 - Padrão e progressão dos palitos. Exemplo 6 de nível 2 do RA.

(Adaptado de Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014, p.12)

Para resolver esta tarefa, o aluno precisa de observar a sequência das três figuras de palitos envolvendo triângulos.

Cada triângulo precisa de 3 palitos, então a figura na posição n precisa $3n$ palitos. Mas a colocação dos dois triângulos juntos implica eliminar um palito. Portanto na 2ª figura, elimina-se 1 palito, na 3ª, 2 são eliminados, na 4ª, 3 são eliminados, ou seja, na posição n serão eliminados $3n$ - (n - 1). Para a figura 50, são necessários 101 palitos e para a figura número100, 201 palitos.

Esta solução envolve uma generalização do tipo misto, contexto e simbólico, considerando que a regra que fornece o número de palitos em qualquer posição está relacionada com a forma e a posição ordinal da figura. A fórmula dada não é transformada por operações para obter a forma canônica de expressão, 2 n + 1. Portanto esta solução está categorizada no nível 2 do RA.

4. *Nível 3 do RA* (Nível consolidação do RA).

As soluções de nível 3 são aquelas em que os estudantes trabalham com incógnitas e variáveis, utilizando propriedades estruturais (tais como, na resolução de sistemas o método de redução ou o método de substituição). As expressões usadas sofrem alterações a nível simbólico, no entanto há sempre preservação da equivalência. São resolvidas equações do tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$. Os objetos intensivos que surgem são apresentados de forma simbólica e literal, efetuando-se operações analíticas com eles. Utilizando a mesma tarefa de balança dos parafusos (exemplo 4) apresenta-se, de seguida, outro tipo de resolução que manifesta o nível 3 do RA.

Inicia-se a solução com a tradução da situação apresentada na figura para linguagem algébrica. Sendo que p designa uma peça; d designa a chave de fendas; l designa a chave inglesa; e t designa um parafuso, a situação da segunda balança pode traduzir-se por,$3d = 6t$ (3 chaves de fendas têm o mesmo peso que6 parafusos); dividindo por 3 nos ambos dos membros da equação teremos $d = 2t$. Além disso, na primeira balança, $p + d + l = 14t$. Então, se retirarmos uma chave de fendas no prato esquerdo, para a balança manter o equilíbrio retiramos também 2 parafusos no prato direito. Logo, teremos 12 parafusos no prato direito.

A resolução envolve uma linguagem simbólico-literal , neste caso: $p =$ peça; $d =$ chave da fendas; $l =$ chave inglesa; e $t =$ parafuso. Na resolução do sistema, modelo da situação colocada, a estrutura da tarefa transforma-se na forma de Ax ± B = Cx ± D. Portanto, a resolução desta tarefa categoriza-se no nível 3 do RA.

Exemplo 7: Um aluno fez a seguinte conjetura: "Adiciono três números naturais consecutivos. Se eu dividir o resultado por três, obtenho sempre o segundo número". Esta afirmação é válida para todos os números naturais? Justifique?

Esta tarefa pode resolver-se de maneiras diferentes, envolvendo diferentes níveis do RA, como se apresentam nas seguintes soluções:

Solução 1: Se de 3 números consecutivos subtraímos uma unidade ao maior e acrescentamos uma unidade ao menor, os 3 números são iguais ao segundo número; se somarmos os três números e dividirmos a soma por 3, isso nos dá o segundo número.

Esta solução não envolve nenhum símbolo algébrico. A atividade matemática manifesta o estabelecimento de uma regra geral, traduzida por linguagem natural. Portanto esta solução categoriza-se no nível 1 do RA.

Solução 2: A conjetura é correta e válida para todos os números naturais. Considere-se a expressão geral de três números naturais consecutivos, por exemplo n, n + 1, n + 2, sendo n representativo de um número natural qualquer.

Então podemos escrever,

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3\,(n + 1)$$

$$3\,(n + 1) / 3 = n + 1,$$

Sendo n + 1, a expressão representativa do segundo número natural

Esta tarefa pretende provar que "A média aritmética de três números naturais consecutivos é igual ao número intermediário". Nesta solução, a representação de um número natural por uma letra que pode tomar qualquer número natural como valor (variável n como um número generalizado), envolvendo: tradução de linguagem natural para linguagem literal simbólica; transformação de expressões algébricas (variável n como inscrição sintática). Esta solução é considerada de nível 3 do RA pelos: envolvimento do símbolo algébrico (neste caso é n); realização da operação algébrica (neste caso é em forma geral); e envolvimento da Álgebra estrutura do tipo Ax ± B = Cx ± D.

1.5. 2 Níveis do RA das atividades matemática no Ensino Secundário

A utilização de parâmetros e seu tratamento pode ser um critério para delimitar níveis do RA mais avançados, pois está ligada à presença de famílias de equações e funções e, portanto, implica novos graus de generalidade (Radford, 2011).

O nível 4 é o primeiro encontro com os parâmetros, neste nível trata-se da utilização de parâmetros e de variáveis. No nível 5 realizam-se cálculos com parâmetros e variáveis. O nível 6 é o estudo de estruturas algébricas específicas da atividade matemática (por exemplo, espaço vetorial ou grupo).

5. *Nível 4 do RA* (utilização de parâmetros).

No nível 4 do RA está envolvida a utilização de parâmetros para expressar famílias de equações e funções. Neste nível é um primeiro encontro com parâmetros e coeficientes de variáveis que implicam a indicação do domínio e alcance da função paramétrica. A cada valor do parâmetro de uma função ou equação específica. Ely e Adams (2012, p.22) afirmam: "*A significant conceptual shift must occur in order for students to be comfortable using placeholders in algebraic expressions rather than just numbers*" (Uma mudança conceptual significativa deve ocorrer para que os alunos se sintam confortáveis usando parâmetros em expressões algébricas, em vez de apenas números).

Assim, as atividades matemáticas que envolvem o nível 4 são, por exemplo, o estudo de uma família de funções ou equações tendo em conta os seus parâmetros.

Exemplo 8: Considere a família das funções quadráticas definida pela expressão $y = ax^2$.

Analise o comportamento das funções para os seguintes casos, $a > 0$; $a < 0$; $0 < a < 1$; e $a > 1$; e explica os efeitos dos diferentes valores do parâmetro *a* nos gráficos das várias funções obtidas.

Solução: Se $a > 0$, por exemplo $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 5x^2$; $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = \frac{1}{5}x^2$, os gráficos de várias funções da família da função estão representados na figura seguinte:

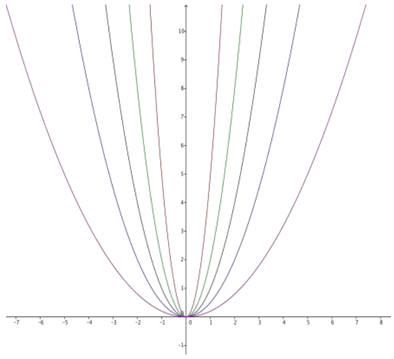


Figura 1.8 - Gráficos de várias funções da família $y = ax^2$ com $a > 0$

Se $a < 0$, por exemplo $y = -x^2$; $y = -2x^2$; $y = -5x^2$; $y = -\frac{1}{2}x^2$; $y = -\frac{1}{5}x^2$, os gráficos da família destas funções:

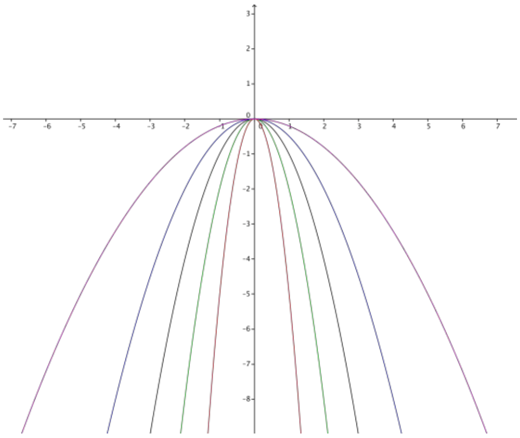


Figura 1. 9 - Família da funções quadráticas $y = ax^2$ com $a < 0$

Nesta tarefa, o valor do parâmetro a determina se parábola está mais aberta ou mais fechada. O valor absoluto de a influencia a abertura da parábola; quanto maior é o valor absoluto de a, menor a abertura da parábola. Todas as parábolas têm o vértice no ponto (0, 0) e o eixo de simetria é a reta de equação $x = 0$, independente do valor que seja atribuído ao parâmetro a.

A atividade requer a interpretação do papel do parâmetro a para identificar propriedades da família de funções, mas não requer cálculos com o parâmetro para produzir outros objetos ou relacionamentos. Portanto, nesta solução pode-se Nível 4 do RA.

Exemplo 9: Um negociante de carros precisa de saber se ele pode viajar entre diferentes cidades com uma determinada quantidade de gasolina, tendo em conta o consumo por 100 km. Para facilitar o cálculo, quer encontrar uma fórmula que permita calcular os quilômetros que um carro pode percorrer se tiver um consumo conhecido a cada 100 quilômetros e a quantidade de gasolina disponível. Qual seria a expressão que deveria usar?

(Adaptado de Burgos, Giacomone, Beltrán – Pellicer & Godino, 2017, p. 7)

A resolução desta tarefa assume-se uma correspondência de proporcionalidade direta entre as grandezas, distância percorrida e quantidade de gasolina (em litros) disponível, x. Assume-se também que o consumo é de k litros por 100 quilómetros (km) Portanto, temos a seguinte proporção: $\frac{k}{100} = \frac{x}{y}$. Consequentemente, a expressão $y = \frac{100\,x}{k}$ expressa os quilómetros que um carro consome k litros de gasolina por 100 km com x litros pode viajar.

Na resolução referida, obtém-se uma fórmula que envolve um parâmetro (k) e a distância de viagem é dada por uma expressão dependendo do valor destes dois parâmetros. Esta tarefa 9 é um exemplo da utilização de parâmetros, e não de operações com parâmetros. Neste caso, esta atividade categoriza-se no nível 4 do RA.

6. *Nível 5 do RA* (tratamento de parâmetros).

Considera-se o nível 5, um nível mais elevado do RA que pode estar ligado à atividade matemática de implementar e executar cálculos analíticos (sintáticos), envolvendo um ou mais parâmetros, juntamente com outras variáveis. As operações com parâmetros e o estabelecimento de relações entre eles implicam um nível mais elevado de complexidade semiótica, dado que os objetos intervenientes e emergentes desses sistemas de práticas colocam em jogo os objetos algébricos do nível anterior (família de equações, família de funções).

Assim, as respostas que estão categorizadas no nível 5 são aquelas em que é realizado um tratamento de incógnitas, variáveis e parâmetros, apresentando a estrutura da solução que resulta desse tratamento. O estudo de um ou mais parâmetros é realizado de modo analítico.

Exemplo 10: Escrever a expressão geral das soluções da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, com forma $a \neq 0$ e a, b e c representam números reais.

(Adaptado de Godino, Neto & Wilhelmi, 2016, p.13)

Para obter a expressão geral das soluções da equação referida, realizamos operações algébricas, envolvendo parâmetros e asumindo que $a \neq 0$, caso contrário a equação não seria quadrática.

A expressão $ax^2 + bx$ pode também escrever-se na forma $a(x^2 + \frac{b}{a}x)$. A expressão que está dentro de parêntesis inclui dois primeiros termos do desenvolvimento de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. De maneira a obtermos o quadrado do binómio, ou seja a expressão anterior, adicionamos e subtraímos o termo $\frac{b^2}{4a^2}$. Transforma-se a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ do seguinte modo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \iff x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \iff x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

então $x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Neste caso a expressão geral das soluções de uma equação do 2.º grau escreve-se em função dos coeficientes a, b e c, ligados através de várias operações racionais (adição, substração, multiplicação e divisão) e envolve também o cálculo de raízes quadradas. De acordo com a característica do envolvimento de operações com parâmetros, esta atividade categoriza-se no nível 5 do RA.

7. *Nível 6 do RA*

Segundo os mesmos autores, considera-se que o nível 6 envolve soluções mais complexas, envolvendo o estudo de estruturas algébricas envolvendo definições e propriedades estruturais. Um exemplo, dessas estruturas, poderá ser a estrutura de espaço vetorial. O estudo deste tema, constitui o primeiro contacto com vetores e com as operações com vetores e respetivas propriedades. Alguns exemplos dessas estruturas algébricas poderão recorrer a vetores espaciais, bem como ao estudo das operações com vetores, adição, subtração e multiplicação escalar.

Para apoiar a generalização, pode-se a partir do exemplo concreto seguinte:

<u>Exemplo 11</u>: Sendo um triângulo $[PQR]$ com os seguintes pontos coordenadas: P(3, 1, - 4); Q(3, - 4, 6); R (- 1, 5, 4). E sendo, também, dois escalares $a = -2$ e $b = 3$. O vetor $\overrightarrow{PQ}$ representado por $\vec{u}$, o vetor $\overrightarrow{QR}$ representado por $\vec{v}$, e o vetor $\overrightarrow{RP}$ representado por $\vec{w}$. Verifique as seguintes propriedades:

.

a. Observe os seguintes afirmação e explique a sua conclusão
   1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
   2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
   3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
   4. $-\vec{v} + \vec{v} = \vec{o}$
   5. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$
   6. $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$
   7. $(a \cdot b) \cdot \vec{u} = a \cdot (b \cdot \vec{u})$

b. Se um ponto T está no vetor $\overrightarrow{PQ}$ e $\|\overrightarrow{PT}\| : \|\overrightarrow{TQ}\| = 3 : 2$, determine o vetor $\overrightarrow{RT}$!

c. Qual é a projeção do vetor ortogonal de vetor $\vec{u}$ no vetor $\vec{w}$?

A estrutura desta tarefa é operações com vetores, envolve-se um triângulo que um de cada seus lados apresenta-se como um vetor. Envolve-se, também, dois números representadas das duas escalas (a e b). Esta tarefa envolve implicitamente vetor posição de cada lado do triângulo. O vetor $\overrightarrow{PQ}$ apresentado por $\vec{u}$, o vetor $\overrightarrow{QR}$ apresentado por $\vec{v}$, e o vetor $\overrightarrow{RP}$ apresentado por $\vec{w}$. Portanto, antes de resolver esta tarefa, precisa de determinar os vetores posições de $\vec{u}$, $\vec{v}$, e $\vec{w}$. Nesta parte, precisa de um cuidado para que o vetor não representa diretamente o ponto ($\vec{u} \neq ponto\ P$).

No item a , pretende-se verificar as propriedades de operações com vetores. Neste caso, a utilização de casos particulares de vetores pode ajudar de perceber as propriedades de operações com vetores.

No item b, envolve-se o conhecimento sobre: o rácio; a coordenada dum ponto que está em mesmo lado de dois pontos; e o vetor posição de dois pontos. Relativamente a coordenada dum ponto, entre dois pontos, obtido pela seguinte formula: $P = \frac{m\,.\,B + n\,.\,A}{m+n}$, ilustrado por seguinte figura:

No item c, introduzida a compreensão sobre a projeção do vetor ortogonal de vetor $\vec{u}$ no vetor $\vec{w}$, e também a compreensão sobre o norma de um vetor. A projeção do vetor ortogonal obtida pela seguinte formula: $\vec{p} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \cdot \vec{w}$

Solução

a. Antes de observar as afirmações, precisa de determinar o vetor posição de: vetor $\vec{u}$, vetor $\vec{v}$ e vetor $\vec{w}$.

O vetor $\vec{u}$ representa o vetor $\overrightarrow{PQ}$, então $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

O vetor $\vec{v}$ representa o vetor $\overrightarrow{QR}$, então $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$

O vetor $\vec{w}$ representa o vetor $\overrightarrow{RP}$, então $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

.	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$	A propriedade comutativa da adição dos vetores
.	$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$	A propriedade associativa da adição dos vetores

	$\left(\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\9\\-2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}4\\-4\\0\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}-4\\9\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-4\\0\end{pmatrix}\right)$ $\begin{pmatrix}-4\\4\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$	
.	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ $0\cdot(-4)+(-5)\cdot 9+10\cdot(-2)$ $=(-4)\cdot 0+9\cdot(-5)+(-2)\cdot 10$ 0 + (-45) + (-20) = 0 + (-45) + (-20) - 65 = - 65	O produto interno da multiplicação dos vetores é um escalar
.	$-\vec{v}+\vec{v}=\vec{o}$ $-\begin{pmatrix}-4\\9\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\9\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\-9\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\9\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$	A adição dos dois vetores que são opostos é vetor nulo
.	$a(\vec{u}+\vec{v})=a\,\vec{u}+a\,\vec{v}$ $-2\left(\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\9\\-2\end{pmatrix}\right)$ $=-2\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}-4\\9\\-2\end{pmatrix}$ $-2\begin{pmatrix}-4\\4\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\10\\-20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\-18\\4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}8\\-8\\-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-8\\-16\end{pmatrix}$	A propriedade distributiva do produto de multiplicação dum escalar com dois vetores
.	$(a+b)\cdot\vec{u}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{u}$ $(-2+3)\cdot\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}$	A propriedade distributiva do produto de multiplicação de dois escalar com um vetor

	$$1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix}$$ $$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$	
.	$$(a \cdot b) \cdot \vec{u} = a \cdot (b \cdot \vec{u})$$ $$(-2 \cdot 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = -2 \cdot \left(3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \right)$$ $$(-6) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix}$$ $$\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ -60 \end{pmatrix}$$	A propriedade associativa do produto de duas escalar e um vetor

b. Para resolver esta pergunta precisa de, no inicio, procura-se o ponto T que está no lado PQ deste triângulo.

$$T = \frac{3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}}{5} = \frac{\begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}}{5} = \frac{\begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Assim, as coordenadas do ponto T são (3, - 2, 2)

O vetor posição da $\overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix}$

c. A projeção do vetor ortogonal de vetor $\vec{u}$ no vetor $\vec{w}$, chamando por $\vec{p}$

$$\vec{p} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{p} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}{(\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 0^2}\,)^2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{0 \cdot 4 + (-5) \cdot (-4) + 10 \cdot 0}{16 + 16 + 0} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim, a projeção do vetor ortogonal de vetor $\vec{u}$ no vetor $\vec{w}$ é $\vec{p} = \frac{5}{2}\,\underline{i} - \frac{5}{2}\,\underline{j} + 0\,\underline{k}$ ou seja $\vec{p} = \frac{5}{2}\,\underline{i} - \frac{5}{2}\,\underline{j}$.

Baseados na descrição de todos níveis do RA, pode considerar-se que os níveis do RA são basicamente níveis de generalidade, combinados com o uso de vários registos de representação semiótica (RSR), seus tratamentos e conversões (Duval, 1995). Com o envolvimento do EOS, estes níveis podem ser caracterizados pela presença de diferentes tipos de configurações sobre representações semióticas (Godino, Font, Wilhelmi e Lurduy, 2011) que envolvem práticas, objetos e processos que implicam novos níveis de cálculo geral ou sintático, apoiados por representações simbólicas dos objetos correspondentes. Isto implica ainda a intervenção dos processos de unificação/reificação, materialização/idealização envolvidos nos processos de generalização/particularização (Godino et al., 2014).

A proposta da categorização dos níveis de algébricos da atividade matemática pode ajudar a aumentar a conscientização de lacunas ou descontinuidades dentro da sequência de configurações em trajetórias epistêmicas dos correspondentes processos de estudo matemático (Godino, Contreras & Font, 2006). Essas lacunas se referem ao uso de diferentes registros de representação semiótica, seu tratamento e conversão, bem como intervenção e estabelecimento de relações entre objetos conceituais, proposicionais, processuais e argumentativos de maior generalidade (objetos intensivos emergentes de outros intensivos). Em outras palavras, essas lacunas podem ser explicadas analisando como, numérica-icônica e analítica - as configurações algébricas sobre-semióticas envolvidas são articuladas, e não apenas para o tratamento ou conversão de RSR (Godino et. al., 2014).

Godino et al. (2014) referem ainda que o reconhecimento dos níveis do RA pode ser útil para analisar a articulação dessas configurações onto-semióticas. A identificação de objetos, processos e significados que envolvem o acesso a diferentes níveis do RA permite o desenho de práticas operativas, normativas e discursivas voltadas para a progressão da aprendizagem. Essa progressão envolverá o enfrentamento de descontinuidades nos níveis de generalidade, representação, cálculo e construção de objetos algébricos em diferentes instituições educacionais.

1.6 A formação inicial de professores de Matemática no âmbito da Álgebra

A formação inicial dos professores de Matemática é uma preocupação grande para o Novo País, Timor – Leste, no sentido de formar professores de boa qualidade e daí permitir desenvolver o ensino e a aprendizagem da Matemática no País. Considerando que em Timor-Leste não existem trabalhos de investigação na área do ensino e aprendizagem da Álgebra, neste trabalho procurou-se as referências teóricas de outros países nomeadamente, Branco e Ponte (2011), Ponte e Chapman (2008), NCTM (2000), Godino, Giacomone, Batanero e Font (2017).

Branco e Ponte (2008) consideram que na formação inicial, os futuros professores devem desenvolver um conhecimento profundo da Matemática que vão ensinar e do modo como se processa o seu ensino, em articulação com o desenvolvimento da sua identidade profissional.

Ponte e Chapman (2008) referem três vertentes que se devem ter em consideração na formação inicial de professores: Conhecimento da Matemática para ensinar; Conhecimento do ensino da Matemática ou didática; e Identidade profissional, que se apoia tanto no conhecimento da Matemática como do ensino da Matemática. Para estes autores, esta articulação referida tem como objetivo promover o desenvolvimento da capacidade dos futuros professores de integrarem o conhecimento dos conteúdos e processos matemáticos e o conhecimento dos alunos a ensinar, de acordo com a sua escolaridade e as orientações curriculares. Os futuros professores precisam de desenvolver o seu conhecimento sobre o ensino da Matemática, nomeadamente, sobre as tarefas a propor, o trabalho de sala de aula, os processos de aprendizagem dos alunos e as orientações curriculares.

NCTM (2000) realça a natureza do conhecimento do professor de Matemática e a importância de articular o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico pois "os professores devem saber e compreender profundamente a Matemática que ensinam e ser capazes de utilizar os seus conhecimentos de forma flexível no decurso das suas atividades didáticas" (p. 16). A formação inicial constitui uma base fundamental para o desenvolvimento profissional do futuro professor (NCTM, 2000), e a formação de professores deve "proporcionar aos futuros professores oportunidades que lhes permitam compreender, apreciar e abraçar a complexidade da sua prática como uma base para o estudo em curso" (Ponte & Chapman, 2008, p. 256).

Os futuros professores devem depois usar este conhecimento integrado para perspectivar a sua prática futura, nomeadamente identificando e integrando diversos recursos e construindo tarefas adequadas ao desenvolvimento de objectivos específicos de aprendizagem.

Godino et al. (2017) apresentam um modelo de conhecimento didático-matemático (CDM) para o professor (como já foi apresentado no subcapítulo 1.5.3), propõem que os futuros professores, na sua formação, desenvolvam o CDM e as competências a seguir mencionadas:

1. Competência de análise de significados globais.

Essa competência é necessária para quando o professor tenta responder às perguntas relativamente aos significados dos objetos matemáticos envolvidos no estudo do conteúdo pretendido e como eles se articulam entre si. Neste sentido, o professor deve ser capaz de caracterizar tanto as práticas institucionais (diferentes significados institucionais das frações, por exemplo, como razão, proporção, parte-tudo etc.), tendo em conta os diferentes contextos de uso onde tais problemas se apresentam, bem como as práticas pessoais esperadas do aluno (significados pessoais que os alunos podem adquirir sobre frações)

2. Competência de análise ontossemiótica de práticas matemáticas.

Nesta competência permite ao professor identificar os objetos e processos envolvidos em práticas matemáticas para compreender a progressão da aprendizagem, gerenciar os processos necessários de institucionalização e avaliar habilidades matemáticas dos alunos. O professor deve compreender: as configurações de objetos e processos matemáticos envolvidos nas práticas que constituem os vários significados dos conteúdos pretendidos (configurações epistémicas); e as configurações de objetos e processos colocados em jogo pelos alunos na resolução de problemas (configurações cognitivas). Neste sentido, o professor de Matemática deve conhecer e compreender a ideia de configuração de objetos e processos e ser capaz de usá-lo com competência nos processos de *design* didático.

3. Competência de análise e gestão de configurações didáticas.

O professor de Matemática deve conhecer e compreender a noção de configuração didática (Godino, Contreras & Font, 2006), como uma ferramenta para a análise de interações pessoais e materiais nos processos de estudo matemático. Neste sentido, o professor deve conhecer os diferentes tipos de configurações didáticas que podem ser implementadas e seus efeitos na aprendizagem do aluno. O professor deve ser capaz de analisar os tipos de interações entre pessoas e recursos que estão implementados nos processos instrucionais e as suas consequências na aprendizagem e, também, de gerir as interações para otimizar a aprendizagem.

4. Competência de análise normativa.

O professor de Matemática deve conhecer, compreender e avaliar a dimensão normativa e utilizá-la de maneira competente, sendo necessário, portanto, desenhar ações formativas para um uso instrumental da mesma. Neste sentido, o professor deve desenvolver a competência da análise normativa dos processos de estudo matemático relativamente: aos padrões que determinam o desenvolvimento de processos instrucionais; as regras estabelecidas; as alterações que podem ser realizados para otimizar a aprendizagem matemática.

5. Competência de análise e avaliação da idoneidade didática.

A idoneidade (adequação) didática de um processo instrucional é definida como o grau em que tal processo (ou parte dele) possui certas características que lhe permitem ser qualificado como adequado (ótimo ou adequado) para alcançar a adaptação entre os significados pessoais alcançados pelos alunos (aprendizagem) e os significados institucionais pretendidos ou implementados (ensino), levando em consideração as circunstâncias e os recursos disponíveis (meio ambiente). Nesta competência, o professor deve compreender: o grau de idoneidade didática do processo de ensino-aprendizagem implementado num tema da Matemática; e as mudanças que devem ser introduzidas no desenho e implementação do processo de estudo para aumentar a sua idoneidade didática. Neste sentido, a noção de idoneidade didática constitui uma ferramenta de apoio à reflexão global sobre a prática didática, sua avaliação e aperfeiçoamento progressivo. O professor de Matemática deve conhecer, entender e valorizar essa ferramenta e adquirir competência para seu uso relevante. Trata da competência de análise da idoneidade didática dos processos de estudo matemático.

6. Competência geral de análise e intervenção didática e conhecimentos didáticos.

As competências referidas apresentadas podem ser consideradas como sub-competências da competência de análise e intervenção didática, como se apresenta na Figura 1.10:

Figura 1.10 - Componentes da competência de análise e intervenção didática (Godino, Batanero, Font & Giacomone, 2016, p. 295)

As práticas matemáticas e didáticas são entendidas como ações do sujeito orientadas para o fim de resolver um problema ou realizar uma tarefa (não são meros comportamentos). Essas práticas podem ser do tipo declarativo-discursivo, indicando a posse do conhecimento, ou operativo-processual, indicando a posse de uma capacidade ou competência.

No âmbito da Álgebra, formação inicial de professores deve ter oportunidade de conhecer os aspetos fundamentais relativos ao ensino deste tema para os mobilizar na sua prática futura com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos seus alunos (Branco & Ponte, 2008). Portanto, a formação inicial em Álgebra deve procurar articular os diversos conhecimentos que contribuem para o desenvolvimento profissional do futuro professor, bem como proporcionar aos formandos um conjunto diversificado de experiências de aprendizagem sobre Álgebra e sobre o ensino da Álgebra.

Relativamente à formação inicial de professores em Álgebra, Doerr (2004) salienta a importância da formação inicial, construir-se a partir das experiências dos formandos e ao mesmo tempo quebrar o modelo que acompanha essas experiências. Os formandos têm uma longa experiência de observação do que faz o professor de Matemática na sala de aula. Na formação inicial, devem refletir sobre as suas próprias experiências e observações de ensino. No que se refere ao pensamento algébrico, os formandos que frequentam agora a formação inicial têm experiências prévias muito diversificadas e quando forem lecionar serão colocados perante desafios e exigências que, na sua maioria, não experimentaram enquanto alunos. Stump e Bishop (2001) sugerem que a formação inicial em Álgebra contemple a aprendizagem sobre generalização, resolução de problemas, modelação e funções. Os formandos devem, ainda, discutir o que envolve o ensino da Álgebra em cada nível de ensino e observar, analisar e refletir sobre situações particulares de ensino-aprendizagem protagonizadas por professores nas suas salas de aula.

Na formação inicial, é fundamental que os futuros professores e educadores desenvolvam uma perspetiva ampla da Álgebra, compreendendo os conceitos envolvidos, e que conheçam os aspetos fundamentais respeitantes ao ensino deste tema. Para que, como professores, possam promover o desenvolvimento dos diferentes aspetos do pensamento algébrico nos seus alunos, os formandos devem ter experiências de aprendizagem na formação inicial que lhes proporcionem o seu próprio desenvolvimento neste domínio (Branco & Ponte, 2011; Magiera, van den Kieboom, & Moyer, 2011).

Relativamente às investigações científicas sobre a formação professores de Matemática no âmbito da Álgebra, Kieran (1992) salienta que a comunidade científica sabe muito pouco sobre como os professores ensinam Álgebra, isso não significa a investigação considerável que tem havido em novas abordagens para o ensino da Álgebra. A autora salienta, ainda, que esta realidade vem de fato que há investigações que abordam a prática e a formação de professores nessa área da Matemática. Por um lado, a pesquisa que foi realizada no contexto da formação professores sobre a Álgebra se concentrou em duas áreas em particular: a integração de novos currículos; e métodos de ensino que envolvem a utilização da tecnologia na sala de aula de Álgebra, bem como a natureza do conhecimento do conteúdo da Álgebra e crenças dos professores.

Relativamente à investigação sobre a formação inicial de professores de Matemática em Álgebra, Kieran (1992) afirma que embora ainda seja uma área de investigação relativamente pouco desenvolvida, vem crescendo de forma constante. A autora salienta que a complexidade do processo para educar os estudantes (futuros professores de Matemática) é refletida em programas que não simplesmente tentam comunicar métodos de instrução, mas também para enfatizar a participação dos futuros professores num processo conducente à construção do conhecimento. Portanto, a investigação que trabalha sobre a natureza dessa complexidade na formação inicial ainda é bastante rara, especialmente no que diz respeito ao ensino de Álgebra.

A maioria das investigações sobre o professor de Álgebra que foram realizadas recentemente baseia-se na proposta de Shulman (1986) sobre o conhecimento do professor (Kieran 2007). A proposta de Shulman e as diversas investigações que se enquadram na mesmo tema (Ball, 2000; Hill, Ball e Schilling, 2008; Godino, 2009) resultam os avanços na categorização e caracterização do conhecimento do professor. Neste sentido, Kieran (2007) salienta que desde o início dos anos noventa, a investigação em educação matemática tem tentado caracterizar os componentes do conhecimento professor, conhecimento do conteúdo principalmente pedagógica em várias áreas da Matemática, incluindo Álgebra. No entanto, a maior parte destes trabalhos tem-se concentrado em tópicos relacionados com a relação dos futuros professores com o conhecimento do conteúdo do assunto, crenças e atitudes.

Relativamente aos trabalhos de investigação no âmbito do raciocínio algébrico (RA) na formação inicial de professores, por exemplo, Aké (2013) sublinha a importância de uma formação que contemple o desenvolvimento do RA, com o objetivo de dar oportunidade aos futuros professores de desenvolverem as competências de análise da identificação dos objetos e processos algébricos na atividade matemática escolar. Branco (2013) no seu trabalho, além de dar importância à articulação entre conteúdo e pedagogia na formação inicial de professores, sublinha a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico dos futuros professores e a análise de situações de aprendizagem que podem contribuir para que estes comecem a perspetivar o modo como podem promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos seus futuros alunos (p. 426).

Considera-se a importância do RA na aprendizagem da Álgebra dos alunos, portanto este aspeto deveria ser alvo de muita atenção na formação inicial de professores da Matemática. Neste sentido, Carraher e Schliemann (2007) mencionam que é necessário é que os professores em todos os níveis da educação primária sejam capazes de promover o pensamento algébrico com o objetivo de facilitar a aprendizagem da Álgebra e encorajar a aprendizagem com compreensão, introduzindo o caráter algébrico na matemática elementar. Os autores sublinham, ainda, que este fato implica em grandes mudanças em relação ao modo de conceber o ensino e a aprendizagem da Álgebra e sua inserção no ensino fundamental.

Considera-se os professores, no seu ensino, devem introduzir o RA nas atividades matemáticas dos seus alunos, bem como o desenho de atividades que expressam um processo de generalização e que também pode ser resolvido tanto de maneira aritmética como de forma algébrica. Relativamente à importância do RA na aprendizagem da Álgebra, Blanton e Kaput (2003) salientam que o raciocínio algébrico é um processo que exige a generalização de ideias matemáticas, estabelecendo generalizações através do discurso da argumentação e expressando-as com termos mais formais, fato que requer atenção à estrutura e às relações entre objetos matemáticos.

Assim, é necessário fornecer aos professores da Matemática as ferramentas que lhes permitam desenvolver ideias algébricas dos seus alunos. Portanto, a formação inicial dos professores da Matemática deve integrar na promoção do raciocínio algébrico, uma vez que essa formação vai selecionar tarefas e preparar e gerir o trabalho de crianças, fornecendo uma sala de aula dinâmica que promove generalizações, estratégias e conexões entre ideias matemáticas. Neste sentido, Branco e Ponte (2013) afirmam que os futuros professores devem ter um conhecimento de Álgebra e conhecimento sobre o que envolve ensinar Álgebra na escola para serem capazes de mobilizar mais tarde esses conhecimentos nas suas práticas, criando situações de ensino orientadas para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos seus alunos.

Capítulo II – Metodologia

Na primeira parte deste capítulo apresenta-se o enquadramento e opções metodológicas inerentes a este estudo, dando destaque à metodologia mista, qualitativa - quantitativa. De seguida, apresenta-se a justificação do método de investigação privilegiado, que se inscreve no método misto. Descrevem-se também nesta secção as principais características dos participantes e apresentam-se as razões da escolha destes participantes, descrevendo-se ainda as etapas realizadas durante a investigação, os instrumentos de recolha de dados e a técnica de análise dos dados.

Numa segunda parte deste capítulo, descrevem-se as etapas realizadas nesta investigação, tais como, a avaliação inicial do conhecimento dos estudantes sobre o RA e o CDM, o desenvolvimento do RA e do CDM, envolvendo uma ação formativa, e uma avaliação final sobre o conhecimento dos estudantes sobre o RA e o CDM.

Seguidamente, apresentam-se os instrumentos de recolha de dados, nomeadamente, os dois questionários (inicial e final), as fichas de trabalho e as entrevistas clínicas. Os dados recolhidos pelos três instrumentos referidos serão analisados recorrendo a técnicas de análise de dados qualitativos e quantitativos. Ainda nesta parte, apresenta-se o processo de construção do Questionário Inicial (QI) como um teste diagnóstico do conhecimento prévio de participantes sobre o RA; as Fichas de Trabalho (FT) aplicadas durante a realização da ação formativa, do Questionário Final (QF) como uma avaliação de conhecimento depois de ação formativa. A categorização das tarefas e os tipos das questões apresentadas nos questionários e nas fichas de trabalho também são esclarecidos nesta parte.

No final deste capítulo, apresenta-se uma descrição sobre os métodos adotados na análise dos dados, bem como os critérios de categorização na análise dos dados, critérios esses baseados no enquadramento teórico adotado.

2.1 Escolha da metodologia

Nesta primeira parte procura-se deixar algumas considerações relativamente à opção por um estudo de natureza mista, conciliando características das metodologias quantitativas e qualitativas.

Assim, considerando os objetivos pretendidos com esta investigação, adotou-se uma metodologia do tipo misto (Sampieri, Collado & Lucio, 2013).

Inicia-se esta parte com uma análise dos pressupostos, das vantagens e das limitações das diferentes perspetivas metodológicas no campo da Educação, procurando apontar possibilidades de utilização simultânea das metodologias quantitativa e qualitativa. Com base nessa análise, e com referência aos objetivos da presente investigação, apresentam-se as opções metodológicas do estudo.

2.1.1 Metodologia qualitativa

A abordagem qualitativa ou o enfoque qualitativo de investigação, tendo por base a teoria de Sampieri, Collado e Lucio (2013), é utilizada sobretudo para descobrir e refinar as questões da pesquisa. Com frequência, o enfoque qualitativo está baseado na recolha de dados mas sem utilizar uma medição numérica, onde frequentemente se recorre à Estatística. Este enfoque dá mais importância às descrições e às observações. As questões e hipóteses surgem como parte do processo de pesquisa, que é flexível e pode ser mudado com base no desenvolvimento do estudo e interpretações, respostas dos respondentes ou desenvolvimento da teoria.

De acordo com Bogdan e Biklen (2006), a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, recolhidos no contacto direto do investigador com a situação onde os fenómenos ocorrem naturalmente e onde são influenciados pelo contexto. Para estes autores, as cinco principais características da investigação qualitativa são: (1) a recolha de dados em "ambiente natural", sendo o investigador o "instrumento principal" dessa recolha; (2) a natureza descritiva dos dados recolhidos; (3) a preferência pelos processos e e não pelos resultados ou produtos; (4) a análise indutiva dos dados e (5) a importância das perspetivas dos participantes, que são *vitais* (pp.47-51).

Para Merriam (1998), nas metodologias qualitativas, os intervenientes da investigação não são reduzidos apenas a variáveis isoladas, mas são vistos como parte de um todo no seu contexto natural. É de salientar que, quando se reduz pessoas a dados estatísticos, ignoram-se determinadas características do comportamento humano. A mesma autora refere que, para se conhecer melhor os seres humanos, no âmbito do seu pensamento, deverá utilizar-se para esse fim dados descritivos, derivados dos registos e anotações pessoais de comportamentos observados. Nesta perspetiva, e de acordo com esse método, Bogdan e Taylor (2000) consideram que o investigador deve estar completamente envolvido no campo de ação dos investigados, uma vez que, na sua essência, este método de investigação se baseia principalmente em conversar, ouvir e permitir a expressão livre dos participantes.

Na mesma linha de pensamento, os autores, acima referidos, acrescentam que a investigação qualitativa, por permitir a subjetividade do investigador na procura do conhecimento, implica a existência de uma maior diversidade nos procedimentos metodológicos utilizados na investigação.

Na abordagem qualitativa, o investigador deve assumir diferentes papéis no decurso de uma investigação científica, nomeadamente: (1) *instrumento/meio,* fundamental na recolha de dados; (2) *inquiridor*, o estudo depende da capacidade que ele tem para fazer as perguntas certas no momento certo; (3) *ouvinte*, deve ouvir em todo o lado, mas em certos momentos ouvir os participantes com especial atenção; (4) *observador*, deve registar os comportamentos e acontecimentos à medida que vão ocorrendo; (5) *explorador*, no decurso de um estudo de caso pode surgir a necessidade de realizar alterações, até mesmo ao próprio caso; (6) *intérprete*, deve interpretar todos os sinais apresentando os factos como legítimos e adequados para quem está por dentro; (7) *negociador*, recorrendo à negociação para ter acesso a determinados ambientes e fontes de informação; (7) *avaliador*, deve realizar uma avaliação contínua dos participantes; (9) *comunicador-narrador*, tem de ser capaz de comunicar o que aprendeu, relatando no relatório da investigação uma grande parte de descrição e narração (Matos & Carreira, 1994).

Segundo Godoy (1995) as características da investigação qualitativa são: o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento fundamental; tem caráter descritivo e enfoque indutivo. O mesmo autor sublinha o papel importante do investigador, afirmando que o investigador deve aprender a usar-se a si próprio como "instrumento mais confiável de observação, seleção, análise e interpretação dos dados coletados" (p.62). Refere, ainda, o seguinte:

> A preocupação essencial dos pesquisadores qualitativos é a compreensão dos fenômenos a partir da perspetiva dos participantes. Isso não os dispensa, entretanto, do esforço de procurar captar, com o máximo de fidelidade, o ponto de vista dos participantes, seja confirmando junto aos próprios informantes o acerto das suas percepções, seja confrontando-as com a de outros pesquisadores (p.63).

Na mesma perspetiva, Brogdan e Taylor (2000) sublinham a importância de papel do investigador. Para estes autores o investigador deve estar completamente envolvido no campo de ação dos investigados, uma vez que, na sua essência, este método de investigação se baseia principalmente no conversar, ouvir e permitir a expressão livre dos participantes. Mesmo assim, os autores referidos acrescentam que há uma tendência de subjetividade pelo investigador na procura de conhecimento. Este "ponto fraco" abre uma possibilidade de envolver outros procedimentos metodológicos.

No que respeita aos papéis de investigador nas referidas teorias, o investigador nesta investigação assume um duplo papel: o de investigador e o de professor, que é envolvido diretamente em todo percurso desta investigação. O investigador tem o papel de professor durante a realização da ação formativa, como por exemplo, apresentar matérias, gerir atividades na sala de aula, moderar discussões na sala de aula, motivar aos estudantes, entre outros.

A investigação qualitativa centra-se na compreensão dos problemas analisados, dos comportamentos, das atitudes ou os valores (Sousa & Baptista, 2011). Neste tipo de investigação não existem preocupações com a amostra nem com a análise estatística e não se fazem generalizações de resultados. As ideias e os entendimentos desta investigação surgem a partir de padrões encontradas nos dados, muitas vezes recolhidos para fazer uma comparação entre conceitos ou teorias.

Serapioni (2000) menciona as características dos métodos qualitativos, tais como: analisam o comportamento humano, do ponto de vista do ator, utilizando a observação naturalista e não controlada; recaem na subjetividade (perspetiva de dentro, como *insider*); exploratórios, descritivos e indutivos; são conduzidos numa lógica de orientação para o processo e assumem uma realidade dinâmica; são holísticos e não generalizáveis.

Apresenta-se, na tabela 2.1, uma síntese relativamente os pontes fortes e fracos da metodologia qualitativa, tendo em conta as propostas de Sampieri, Collado e Lucio (2013).

Tabela 2.1 – Pontos fortes e fracos da metodologia qualitativa

Pontos fortes	Pontos fracos
Elevada validade interna	Imprecisão dos dados
Acesso à complexidade e contextualização	Nem todos os sectores da comunidade científica aceitam
Voltado para as experiências dos participantes	Por limitação técnicas da sua própria natureza não se adequada à generalização de resultados
Descrição, análise e desenvolvimento de temas	Lida com um número pequeno de casos
Interpretação	
	Subjetividade devido ao investigador como meio de investigação

Na investigação qualitativa, o investigador estuda os fenómenos no seu contexto natural, procurando interpretar esses fenómenos, relativamente aos significados que as pessoas lhes atribuem. Requer, assim, a recolha de materiais que descrevem momentos da vida dos indivíduos – descrições ricas do mundo social – que são interpretados na tentativa de aumentar a compreensão sobre o alvo de estudo (Denzin & Lincoln, 2000). A metodologia qualitativa permite aceder à complexidade e diversidade da realidade em estudo de forma contextualizada e enriquecida pelos significados que lhe são atribuídos pelos participantes (Marques, 2005), o que lhe confere uma elevada validade interna, já que focalizam as especificidades dos grupos sociais estudados (Minayo & Sanches, 1993).

2.1.2 Metodologia quantitativa

O estudo quantitativo admite que tudo pode ser quantificável, ou seja, é possível traduzir em números as informações (dados) e, seguidamente, estes podem ser classificados e analisados com vários recursos e técnicas estatísticas. Neste sentido, Vilelas (2013) refere que a abordagem quantitativa visa a representação e a manipulação numérica de observação com vista à descrição e à explicação do fenómeno sobre o qual recai a observação.

Sampieri, Collado e Lucio (2013) afirmam que

> A abordagem quantitativa ou o enfoque quantitativo é uma abordagem que utiliza a coleta e a análise dos dados para responder às questões da pesquisa e testar as hipóteses estabelecidas previamente e confia na medição numérica na contagem e frequentemente no uso estatística para estabelecer com exatidão os padrões de comportamento de uma população (p.5).

Os autores sublinham, ainda, que os estudos quantitativos se associam a experiências, a investigações com questões fechadas ou aos estudos em que se empregam instrumentos de medição padronizados. A investigação quantitativa pretende generalizar os resultados de seus estudos mediante amostras representativas.

Relativamente às características da metodologia quantitativa, segundo autores como Sampieri, Collado e Lucio (2013), Vilelas (2009) e Serapioni (2000), destacam-se aspetos como:

(1) a formulação do problema da investigação que é delimitado e concreto e visa gerar medidas precisas e confiáveis que permitam uma análise estatística;

(2) utilização de investigações anteriores e conhecimento teórico para escolha das variáveis;

(3) a elaboração de um teste de hipótese é uma parte central desta investigação;

(4) a recolha de dados é fundamentada na medição (medir-se as variáveis ou os conceitos contidos na hipótese);

(5) utiliza tanto dados primários quanto secundários, envolvendo vários instrumentos para coleta de dados. Neste caso, um investigador deverá escolher o instrumento de acordo com o estudo;

(6) os dados obtidos são produtos de uma medição, representados por números, devem ser analisados com métodos estatísticos;

(7) as analises quantitativas são interpretadas de acordo com as previsões anteriores (hipótese) e os estudos anteriores (teoria);

(8) orienta-se na verificação, tendência hipotético-dedutiva, pretende-se uma generalização dos resultados obtidos em amostra para uma coletividade maior (população ou universo);

(9) necessita, no final do estudo, de uma explicação que prevê os fenómenos investigados, procurando regularidade e relação entre os elementos em causa.

Soares (2003) afirma que a abordagem quantitativa está relacionada à quantificação de dados obtidos mediante pesquisa. O autor salienta, ainda, que para o emprego dessa abordagem são necessários recursos e técnicas estatísticas, os quais podem variam em termos de complexidade, que vai desde a mais simples, como percentagem, média, mediana e desvio padrão, até as de uso mais complexo, como coeficiente de correlação, análise de regressão, etc.

A investigação quantitativa permite encontrar explicações, predizer e controlar o fenómeno, procurando regularidades e leis através da objetividade dos procedimentos e da quantificação das medidas (Almeida & Freire, 2004). Na investigação quantitativa a utilização da linguagem matemática permite a sistematização das observações do mundo astronómico e físico, trabalhando-as de modo a construir novo conhecimento o que leva a descrições e modelos direcionados a uma construção abstrata que nem sempre traduz as situações observadas ou apenas as traduz parcialmente (Minayo & Sanches, 1993).

Lanksheare Knobel (2008) sublinham que a pesquisa quantitativa depende de três condições existentes em uma situação de pesquisa: (1) ser possível medir variáveis, de maneira que elas possam ser representadas por números (isto é, quantificadas); (2) ser possível ter teorias ou hipóteses anteriores à implementação do estudo e, subsequentemente, testá-las; (3) recolher amostras suficientemente grandes que podem ser obtidas para possibilitar a sua medição e para chegar a inferências que possam ser generalizadas para populações maiores (uma amostra com cerca de 30 participantes é "suficientemente grande" para grande parte dos estudos quantitativos).

Apesar de ter várias caraterísticas, a natureza quantitativa apresenta algumas limitações, das quais se destacam: a inadequação para análise de alguns tipos de dados (por exemplo, dados de entrevistas); a metodologia preferência pela formulação de hipóteses prévias e técnicas de verificação, no modo de explicar as causas dos fenómenos estudados, eliminando os fatores de confusão e preocupando-se com a validade e a fiabilidade. Neste sentido, Deslandes e Assis (2002) referem que na utilização de métodos estatísticos, a pesquisa quantitativa tem, pois, como objetivo trazer à luz dados, indicadores e tendências observáveis, gerando medidas fiáveis, generalizáveis e sem viesses.

A tabela 2.2 seguinte apresenta as ideias de Sampieri, Collado e Lucio (2013) relativamente pontos fortes e fracos da metodologia quantitativa.

Tabela 2.2 – Pontos fortes e fracos da metodologia quantitativa

Pontos fortes	Pontos fracos
Elevada validade externa	Baixa validade interna
Replicabilidade	Não atende à perspetiva do sujeito
Possibilidade de generalização	Não atende à subjetividade do investigador
Recorre a procedimentos que facilitam a sua aceitação pelos pares	
Abrange maior número de casos	

Apresenta-se, na tabela 2.3, uma tabela elaborada por Sampieri, Collado e Lucio (2013, p. 36–39) sobre as características fundamentais dos paradigmas quantitativo e qualitativo.

Tabela 2.3 – Enfoque quantitativo e enfoque qualitativo de investigação

Definição (dimensão)	Enfoque quantitativo	Enfoque qualitativo
Marcos referenciais gerais básicos.	Positivo, neopositivismo e pós positivismo.	Fenomenologia, construtivismo, naturalismo, interpretativismo.
Ponte de partida.	Existe uma realidade a se conhecer.	Existe uma realidade a descobrir, construir e interpretar.
Realidade a ser estudada.	Existe uma realidade objetiva única.	Existem várias realidades subjetivas construídas na pesquisa, que variam em forma e conteúdo entre indivíduos ou grupos.
Natureza da realidade.	A realidade não muda por causa das observações e medições realizadas.	A realidade muda devido às observações e medições realizadas.
Objetividade.	Procura ser objetivo.	Admite subjetividade.
Metas de pesquisa.	Descrever, explicar e prever os fenómenos (causalidade). Gerar e comparar as teorias.	Descrever, compreender e interpretar os fenómenos por meio das percepções e dos significados produzidos pelas experiências dos participantes.
Lógica.	Dedutiva – de geral ao particular.	Indutiva – de particular ao geral.
Posição pessoal de pesquisador.	Neutra. A posição é para assegurar procedimentos de recolha e de análise dos dados.	Explícita. O investigador reconhece os seus próprios valores e crença, que são, inclusive, parte do estudo.
Interação física e psicológica entre o investigador e o	Distanciamento, neutra, sem envolvimento.	Próxima, costuma haver contacto, envolvimento.

fenómeno.		
Formulação de problema	Delimitado, demarcado, específico. Pouco flexível.	Aberto, livre, não é delimitado ou marcado. Muito flexível.
Uso da teoria.	A teoria utilizada para ajustar os seus postulados ao mundo empírico.	A teoria é um marco referencial.
Desenho da investigação.	Estruturado e predeterminado.	Aberto, flexível, construído durante o trabalho de campo ou realização do estudo.
População - amostra	O objetivo é generalizar os dados de uma amostra para uma população.	Geralmente, a pretensão não é generalizar os resultados obtidos na amostra para uma população.
Amostra	Muitos participantes.	Poucos participantes.
Recolha de dados.	Baseia-se em instrumentos padronizados e uniformizados para todos os casos.	O objetivo da recolha de dados é proporcionar um entendimento maior sobre os significados e as experiências das pessoas.
Características de análise dos dados.	Sistemática. Intensa utilização da estatística. Baseada em variáveis. Impessoal. Posterior à recolha de dados.	A análise varia, dependendo de como os dados foram coletados. Fundamentada na indução analítica. Uso moderado de estatística (contagem, algumas operações aritméticas). Baseada em casos ou pessoas e nas suas manifestações A recolha de dados. A análise consiste em descrever informações e desenvolver temas.
Perspetiva do investigador na análise dos dados.	Externa. O investigador não envolve os seus antecedentes e as suas experiências na análise.	Interna. O investigador envolve os seus antecedentes e as suas experiências na analise, assim como sua relação com os participantes do estudo.
Finalidade de análise dos dados.	Descrever as variáveis e explicar as suas mudanças e movimentos.	Compreender as pessoas e os seus contextos.

A utilização destas duas metodológias no mesmo estudo pode dar vantagens nas orientações, nos processos e no melhor de resultado de investigação, ou seja as metodologias referidas são complementares uma da outra. No mesmo sentido, Sampieri, Collado e Lucio (2013) referem que as duas perspetivas metodológicas possuem virtualidades inegáveis, mas também aspetos de menor valia, pelo que é através do recurso ambas as metodologias que se podem ultrapassar barreiras epistemológicas em prol de uma integração metodológica, que permite encontrar a chave para um desenho metodológico cujas fraquezas de um método são contrabalanças pelas forças de outro, numa simbiose e complementaridade que conduz a melhores resultados, aproximando-se do conhecimento mais cabal de realidade em estudo.

2.1.3 Metodologia mista

A dualidade quantitativo-qualitativa adota novas formas e progressivamente a abordagem é possível, através de uma terceira via que contempla para ambas as posições como compatível e complementar (Gomes, 2015). Neste sentido, Anguera (2008, 2010) citado por Gomes (2015), afirma que "O uso conjunto da metodologia qualitativa e quantitativa, dado que está interessada no processo e no resultado, reforça o reforço mútuo dos dois tipos de procedimentos e facilita a triangulação através de operações convergentes" (p. 24). Delgado (2014) reforça esta ideia e sublinha que a metodologia qualitativa-quantitativa combina entre o rigor formal (do quantitativo) e da criatividade e flexibilidade (do qualitativo); não é uma justaposição, mas uma combinação flexível em etapas da investigação dos componentes quantitativo - qualitativo; a recolha e análise quantitativo - qualitativo têm como objetivo integrar resultados e fazer uma discussão conjunta que permite fazer inferências (meta-inferências) para compreender melhor e ter uma visão mais ampla do fenômeno estudado.

Outros autores designam a metodologia qualitativa–qualitativa como a metodologia mista ou métodos mistos e definem-na como "A pesquisa de métodos mistos é uma abordagem da investigação que combina ou associa as formas qualitativa e quantitativa." (Creswell, 2010, p.27). Com efeito, e de acordo com Sampieri, Collado e Lucio (2013, p. 548), "A meta da pesquisa mista não é substituir a pesquisa quantitativa nem a pesquisa qualitativa, mas utilizar os pontos fortes de ambos os tipos, combinando-os e tentando minimizar seus potenciais pontos fracos".

Deste modo, as duas perspetivas metodológicas assumidas na investigação possuem um papel complementar mútuo, pelo que é através do recurso a ambas as metodologias que se podem ultrapassar barreiras epistemológicas em prol de uma integração metodológica, permitindo encontrar a chave para um desenho metodológico cujas fraquezas de um método são contrabalançados pelas forças de outro, numa simbiose e complementaridade que conduz a melhor resultados, aproximando-se de conhecimento mais cabal da realidade em estudo (Sampieri, Collado & Lucio, 2013).

O conceito de misturar diferentes métodos originou-se em 1959, quando Campbell e Fisk utilizaram múltiplos métodos para estudar a validade de traços psicológicos. Isso estimulou outros a combinarem os métodos, e logo abordagens associadas aos métodos de campo, como observações e entrevistas (dados qualitativos), foram combinadas aos levantamentos tradicionais (dados quantitativos; Sieber, 1973) (Creswell, 2010, p. 38).

Sampieri, Collado e Lucio (2013) apresentam cinco etapas orientadoras da realização da metodologia mista numa investigação, nomeadamente:

(1) Realizam uma observação e avaliação de fenómenos;

(2) Estabelecem pressupostos ou ideias como consequência da observação e avaliação realizadas;

(3) Testam e demonstram o grau em que as suposições ou ideias têm fundamentos;

(4) Revisam tais suposições ou ideias sobre a base dos testes ou da análise;

(5) Propõem novas observações e avaliações para esclarecer, modificar e/ou fundamentar as suposições e ideias; ou mesmo gerar outras.

Relativamente às vantagens da utilização da metodologia mista, Gomes (2015) descreve que estas vantagens se evidenciam através dos seguintes aspetos:

1) Triangulação, que é uma corroboração entre qualitativa – quantitativa;

2) Complementação, que consiste na clarificação dos resultados de um método com base nos dos outros;

3) Visão holística, que se define por ser uma abordagem completa e integral;

4) Desenvolvimento, os resultados de um método como suporte para os processos do outro (amostragem, coleta, análise de dados, novas hipóteses, etc.);

5) Iniciação, que se caracteriza pela tentativa de descobrir contradições, novos quadros de referência, modificar abordagens originais com os resultados do outro método;

6) Expansão, que consiste num método para alargar o conhecimento obtido pelo outro;

7) Compensação, ou seja, as fraquezas de um método podem ser remediadas pelo outro

8) Diversidade, implicando diferentes visões do problema;

9) Clareza visualiza elementos não detetados por um único método;

10) Credibilidade e melhoria, pretendendo reforçar argumentos, resultados e procedimentos de ambos os métodos.

Considerando as vantagens da metodologia mista, é importante para os investigadores ter em consideração a afirmação do Minayo e Sanches (1993) de que nenhuma das duas metodologias (qualitativa e quantitativa), porém, é boa, no sentido de ser suficiente para a compreensão completa dessa realidade. Para estes autores, um bom método será sempre aquele, que permitindo uma construção correta dos dados, ajude a refletir sobre a dinâmica da teoria. Portanto, além de apropriado ao objeto da investigação e de oferecer elementos teóricos para a análise, o método tem que ser operacionalmente exequível.

2.2 Opções metodológicas do estudo e sua justificação

Considerando as características, os pontos fortes e os pontos fracos das várias metodologias de investigação e atendendo, também, às questões da investigação, adota-se uma metodologia mista nesta investigação.

Na presente investigação, as características típicas de um enfoque qualitativo, aberto e flexível (Sampieri, Collado & Lucio, 2013) desenvolvem-se durante a implementação do estudo de campo nos seguintes momentos:

(1) avaliação inicial, com a participação de 24 estudantes, futuros professores, onde se aplicou o QI sobre as tarefas de conteúdo algébrico e de conteúdo didático, cujos dados resultaram das respostas destes estudantes a este instrumento para caraterizar os objetos e processos envolvidos nas suas respostas, categorizando ainda os níveis do RA;

(2) ação formativa, realizou-se numa sala de aula com os mesmos 24 estudantes no local onde decorreu a intervenção do ensino. Os dados recolhidos nesta formação são os resultados das soluções, realizadas nos grupos, relativamente às três fichas de trabalho (FT);

(3) avaliação final, realizada no final da ação formativa com a participação dos mesmos estudantes. Envolveu-se a aplicação do QF sobre as tarefas do conteúdo algébrico e do conteúdo didático. As respostas dos estudantes nestas tarefas são os dados que foram analisados com o método qualitativo relativamente à categorização dos objetos e dos processos envolvidos na resolução, e também categorizar o seu nível do RA;

(4) entrevistas clínicas realizadas depois da avaliação final.

No sentido de conhecer as realidades concretas nas dimensões reais e temporais, o aqui e o agora no contexto social (Serrano, 2004), nesta investigação a investigadora assume um duplo papeis como investigadora e formadora. O desempenhar destes dois papéis, resulta na criação da oportunidade para realizar uma interação direita com os fenómenos e com os participantes, em particular nos momentos ocorridos na sala de aula. Estas interações ocorreram em diferentes momentos, que identificamos de seguida: aplicações de dois questionários; sessões de intervenção durante a ação formativa (leccionamento, pergunta e resposta durante a sessão, discussões); aplicação das fichas de trabalho, nos momentos em que os estudantes trabalham em grupo e a formadora acompanha e explica as dúvidas; e realização de entrevistas clínicas nos pequenos grupos de alguns estudantes. Note-se, ainda, que as interações realizadas durante a ação formativa e durante a entrevista clínica permitiram que a investigadora compreendesse mais em detalhe o que os estudantes pensam e quais as suas dificuldades nas temáticas exploradas.

A flexibilidade da metodologia qualitativa permite à investigadora redesenhar a atividade da ação formativa dependendo do tempo que os estudantes precisam para compreender e das matérias que eles consideram difíceis e precisam mais exemplos e mais explicação.

O objetivo deste estudo é compreender os conhecimentos algébricos e os conhecimentos didático-matemático dos estudantes (futuros professores de Matemática) e, também, compreender quais as principais dificuldades destes estudantes nos conhecimentos referidos. Deste modo, interessará verificar o que os estudantes conseguem fazer durante o percurso desta investigação, nomeadamente as produções realizadas: antes, durante e depois de realizarem a ação formativa. Interessará, também, compreender as dúvidas que os estudantes foram colocando durante o processo formativo, os avanços e recuos presentes neste processo, os erros cometidos e as dificuldades apresentadas durante todo este processo.

Atendendo ao carácter qualitativo, uma das metodologias adotadas neste estudo, análise de conteúdo de tipo exploratório, foi realizada em três diferentes fases (Bardin, 2013): a pré-análise (a avaliação inicial, através do QI); a exploração do material (durante a ação formativa, através de fichas dos trabalhos); e o tratamento dos resultados (a avaliação final, através do QF), tendo como consideração obter-se uma caracterização o mais completa possível da situação em estudo e uma melhor compreensão da mesma, para atingir os objetivos do mesmo. Neste estudo, a análise de conteúdo permite a obtenção de uma descrição qualitativa do conteúdo das respostas dos estudantes através da categorização das respostas, neste caso uma categorização adaptada do EOS (Godino et. al., 2015) sobre as questões do conteúdo algébrico e do conteúdo didático. Deste modo foi possível obter informações sobre os conhecimentos algébricos e didáticos dos futuros professores nos diferentes momentos, ao longo deste estudo.

De modo a evidenciar a complexidade do desenvolvimento do RA e do CDM, dos futuros professores, neste estudo envolve-se, também, a análise do conteúdo das entrevistas (através da transcrição dos diálogos ocorridos nas entrevistas clínicas). De acordo com Bardin (2013): "Um conjunto de análise das comunicações, visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens" (p. 44).

A intenção de procurar uma abordagem mais objetiva e de posicionar a investigadora num lugar neutro com objetivo de diminuir a subjetividade são as razões de adoção da metodologia quantitativa desta investigação. Neste sentido, o envolvimento do enfoque quantitativo na investigação permite assegurar que a perspetiva da investigadora é, em alguns momentos, distante (externa) no processo de análise de dados. Nesta investigação, o envolvimento da metodologia qualitativa na análise dos dados de dois questionários, através de análise das percentagens das várias categorias de respostas, tem o objetivo de reforçar a análise dos dados qualitativos e de diminuir a interferência da subjetividade trazida pelo olhar da investigadora.

Assim, neste estudo os instrumentos e os métodos de análise dos dados foram variados, reforçando as características do enfoque qualitativo. Ainda assim envolveu-se também a análise sistemática dos dados, utilizando as categorias determinadas pelo enquadramento teórico (característica do enfoque quantitativo). O envolvimento dos dois enfoques mostrou-se, também, na finalidade de análise dos dados uma vez que se pretendeu compreender os estudantes e os seus contextos (neste caso, os conhecimentos didáticos-matemáticos) e descrever as variáveis (várias categorias de respostas) e explicar as suas mudanças antes e depois da ação formativa. De referir que, neste estudo não é objetivo realizar uma análise pré-teste e pós-teste. Nesta investigação, os dados quantitativos, obtidos através dos dois questionários (QI e QF), são utilizados para reforçar os resultados de dados qualitativos obtidos.

2.3 Participantes no estudo

Neste estudo participaram 24 estudantes do 4.º ano do Curso da Licenciatura em Matemática, do Departamento do Ensino da Matemática da Universidade de Timor Lorosa'e. A escolha destes estudantes teve em consideração os seguintes fatores:

(1) O curso referido é o único curso de formação inicial de professores de Matemática em Timor – Leste;

(2) Os estudantes do 4.º ano deste curso já tinham frequentado as unidades curriculares relacionadas com conhecimentos matemáticos e pedagógicos;

(3) Os estudantes participantes estavam a frequentar a unidade curricular Prática Pedagógica I (Micro ensino), durante a implementação do estudo piloto, e estavam na fase de preparação das suas práticas de ensino nas escolas, durante a implementação da ação formativa e da avaliação final.

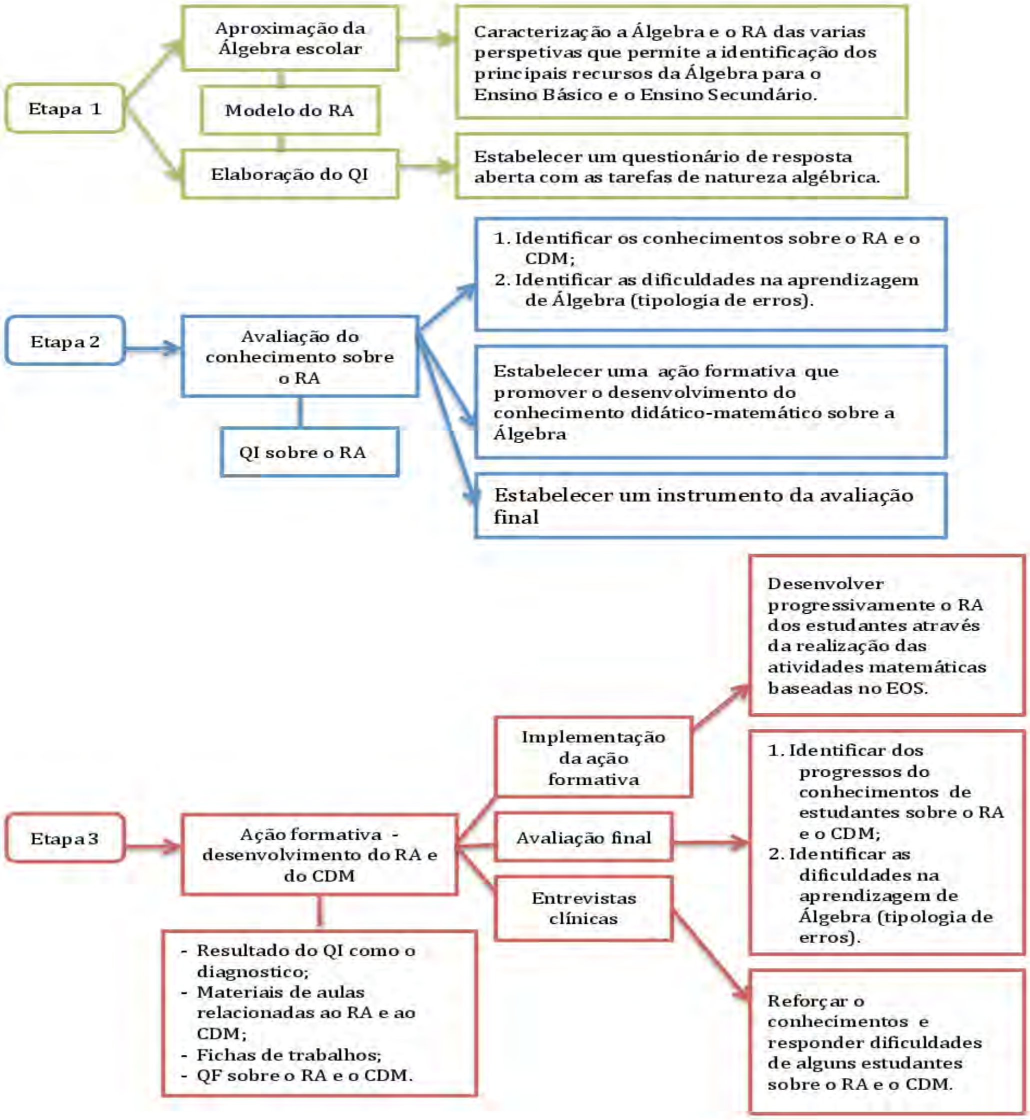
Relativamente às características dos participantes, dos 24 estudantes, 18 são masculinos e 6 femininos, com idades compreendidas entre os 22 e os 26 anos. Estes estudantes, nos seus percursos académicos, tinham frequentado todas as unidades curriculares matemáticas relacionadas com: o conhecimento algébrico (como por exemplo: Álgebra Linear 1 e 2; Álgebra 1 e 2; Análise Variáveis Reais e Complexas; Cálculo Diferencial e Integral 1 e 2; Cálculo Numérico; Cálculo Vectorial e Geometria Analítica 1 e 2), e o conhecimento pedagógico (por exemplo: Orientação e Aconselhamento; Gestão e administração escolar; Metodologia do Ensino da Matemática; Psicologia da Educação; Psicologia da Educação; Estudo do Currículo da Matemática; Introdução à Pedagogia; Sociologia da Educação).

Os estudantes ainda não tinham tido nenhuma experiência de ensino, nem como professor a tempo parcial nem como voluntário numa escola. Portanto, as experiências de ensinar na aula do “Micro de ensino” e nas escolas, como estagiários, eram novas para estes estudantes.

2.4 Etapas do estudo

Considerando os objetivos do estudo, adotou-se uma abordagem de investigação de natureza mista (Johnson & Onwuegbuzie, 2004, Creswell, 2010). Segundo Aké (2013), citando Sampieri, Fernández & Baptista (2013), a abordagem mista é um processo que recolhe, analisa e liga dados quantitativos e qualitativos num único estudo para responder a diferentes questões de pesquisa sobre determinado problema. Neste trabalho, recolhem-se os dados através da aplicação de questionários e de entrevistas. São apresentados elementos típicos das duas abordagens, tanto qualitativas quanto quantitativas, e que são envolvidos ao longo das 3 etapas que podem ser vistas na figura 2.1, e que representam, de alguma forma, as diretrizes, de acordo com os objetivos da investigação estabelecida.

Figura 2.1 – Etapas da investigação



Iniciou-se, na **primeira etapa**, um estudo sobre o modelo do RA para o Ensino Básico e o Ensino Secundário, tendo por base os trabalhos desenvolvidos no EOS (como por exemplo, Godino, Batanero & Font, 2008; Aké, 2013) e noutros trabalhos de referência (tais como, Kieran, 2004; Blanton & Kaput, 2011). Na fase do desenho do Questionário Inicial (QI), procurou-se encontrar exemplos de tarefas de vários investigadores que já tinham realizado estudos relacionados com este tema. Adotaram-se algumas destas tarefas e criaram-se outras sob consulta dos orientadores que são, também, os autores referenciais do quadro teórico adotado neste trabalho.

Na **segunda etapa** realizou-se uma avaliação inicial com o objetivo de diagnosticar os conhecimentos dos estudantes, futuros professores, sobre o RA. Aplicou-se o QI aos 24 estudantes numa sessão presencial da disciplina de Micro Ensino, em Dili, Timor - Leste, no dia 10 de Agosto de 2015. Os estudantes colaboraram na resposta a este questionário. Neste estudo sublinhaou que, os próprios estudantes ficaram surpreendidos com o questionário. Esta realidade foi visível nos comentários dos mesmos e nas questões colocadas, como por exemplo: "Professora, este é questionário?"; "É teste, professora?"; "Aih ... não há opção de escolha múltipla". Estas questões dão indicação de que os estudantes não tinham tido experiência em responder a este tipo de questionário. Mais tarde, depois do trabalho com o QI, os estudantes fizeram as seguintes afirmações: "Foi a primeira vez que respondi a este tipo de questionário, tive experiência de responder um questionário mas tem opções: concordo, concordo totalmente, não concordo, ... mas este foi diferente"; "Eu também penso que este é um teste não é um questionário". As expressões destes estudantes indicaram que as experiências tidas sobre o conhecimento matemático resultaram apenas do contacto com os questionários das questões com respostas fechadas, numa escala de ordenação (por exemplo, a escala de Likert). Esta realidade pode-se perceber pelo facto de que, até à data, em Timor - Leste ainda não se ter encontrado nenhum estudo que envolvesse tarefas que questionem sobre o conhecimento matemático.

Durante o período de Setembro de 2015 até Dezembro de 2015 (Tabela 2.1), foi realizada a análise das respostas dos estudantes relativamente ao QI. Esta análise mostrou que o maior número de respostas apresentadas foram respostas erradas ou mesmo a ausência de resposta. O Capítulo III desta tese apresenta essa descrição detalhada.

Tabela 2.4 - Momentos das atividades durante a investigação

Datas	Atividades	Resultados
Janeiro de 2015 – Julho de 2015	Elaboração do QI	QI
10 de Agosto de 2015	Aplicação do QI	Dados das respostas dos estudantes relativamente ao QI
Setembro de 2015 – Dezembro de 2015	Análise dos dados do QI	Resultados de análise do QI
Janeiro de 2016	Elaboração da ação formativa; fichas de trabalho; QF	- Plano da ação formativa; - Materiais de atividades; - Fichas de trabalho; - QF.
Fevereiro de 2016 – Abril de 2016	Implementação da ação formativa	- Dados de atividades; - Dados das respostas dos

		estudantes relativamente às fichas de trabalhos.
7 de Abril de 2016	Aplicação do QF	Dados das respostas dos estudantes relativamente ao QF
13, 20, 21 de Abril de 2016	Realização das entrevistas clínicas	Gravações áudios durante as entrevistas clínicas.
Maio de 2016 – Maio de 2017	Análise dos dados da ação formativa e do QF	Resultados de análise dos dados da ação formativa e do QF.

Durante do mês de Janeiro de 2016, e com o objetivo de melhor compreender os resultados do QI, realizou-se um estágio científico com o coorientador desta investigação, o Professor Doutor Juan Diaz Godino, na Universidade de Granada. Nesta estadia científica foi possível desenhar uma ação formativa, visando responder às necessidades dos estudantes, participantes no estudo, necessidades essas reveladas nas respostas dos estudantes ao QI. Pela ação formativa, pretende-se também promover as competências dos estudantes no RA e no CDM.

O desenho da formação envolveu, igualmente, a preparação de instrumentos de avaliação para aplicar durante e depois ação formativa. Foram elaboradas três fichas de trabalho que foram implementadas em 3 momentos distintos durante a realização da formação e um Questionário Final, este último para avaliar os conhecimentos dos estudantes depois de terem a formação.

Na **terceira etapa** do trabalho, no período entre fevereiro de 2016 e abril de 2016, realizou-se uma ação formativa, com os estudantes do Curso de Licenciatura do Ensino da Matemática em Díli, Timor – Leste. Esta formação envolveu 12 sessões (2 horas cada sessão) com diferentes atividades:

- apresentação do programa de intervenção e contextualização do tema da Álgebra (1 sessão);
- apresentação de conteúdos (6 sessões);
- atividades práticas (3 sessões);
- exercícios e discussões sobre as tarefas que envolvem o RA para o Ensino Básico e o Ensino Secundário (2 sessões).

Realizaram-se, ainda, as seguintes sessões de trabalho:

- sessão de avaliação final (1 sessão);
- sessões de entrevistas a pequenos grupos de estudantes (4 sessões);
- sessão de enceramento, com a participação de todas as estudantes, com o objetivo de refletir sobre todas as atividades realizadas na ação formativa. Na atividade de encerramento, os estudantes apresentaram os seus comentários e as sugestões relativamente a este estudo (1 sessão).

Ainda nesta etapa, entre Maio de 2016 até Maio de 2017, realizou-se a análise dos dados do QF. Durante este período, além desta análise, ocorreu também produção dos artigos científicos que foram apresentados em duas conferências internacionais: *Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (Granada, 23 a 26 de Março de 2017) e *7th Annual International Conference on Education & e-Learning (EeL). Global Science and Technology Forum* (Singapure, 25 a 26 de Setembro de 2017).

2.5 Instrumentos de recolha de dados

Nesta secção apresentam-se os instrumentos de recolha de dados utilizados, nomeadamente: questionários, fichas de trabalho e entrevistas clínicas. A utilização dos vários instrumentos de recolha de dados tem como objetivo recolher dados de fontes diversas e necessárias à investigação. Bogdan e Biklen, (2006) salientam que alguns estudos qualitativos se baseiam exclusivamente num tipo de dados (por exemplo: transcrições de entrevistas), mas a maior parte dos estudos utiliza uma variedade maior de fontes de dados. Embora se discutam diferentes tipos de dados separadamente, é importante salientar que eles raramente se encontram isolados na pesquisa.

Além de se utilizarem os instrumentos referidos para recolha de dados, durante a ação formativa desta investigação utilizaram-se, também, as gravações de áudio e as notas de campo. A utilização destes últimos instrumentos serviu apenas para registar situações que ocorreram durante a ação formativa e serviu de base a alterações no plano das sessões de formação.

2.5.1 Questionários e fichas de trabalho

Neste estudo, de acordo com o referido anteriormente, utilizaram-se vários tipos de instrumentos de recolha de dados, nomeadamente: dois questionários - QI e QF (Anexo II e Anexo VI); três fichas de trabalho - FT1, FT2 e FT3 (Anexo III, IV, V); e entrevistas clínicas. A função do QI foi de avaliação diagnóstica, enquanto o QF foi o instrumento para avaliação de conhecimentos, tendo em conta a sua realização ter sido após da ação formativa. As três fichas de trabalho aplicadas durante a ação formativa tiveram a função de avaliação formativa. A descrição detalhada sobre a construção do QI, as tarefas envolvidas no QI e a análise epistémica das soluções previstas são apresentadas no capítulo III. Relativamente à descrição detalhada sobre a construção do QF, as tarefas envolvidas no QF e a análise epistémica das soluções previstas, esta é apresentada no capítulo IV.

Todas as questões dos questionários e fichas de trabalho são questões de resposta aberta. A escolha por este tipo de questão relaciona-se com o facto de este tipo de questões proporcionar respostas com maior profundidade, ou seja, dá liberdade aos estudantes de escolheram os processos de resolução e expressarem as soluções livremente. Relativamente às perguntas abertas, Hill e Hill (2005) referem algumas vantagens da utilização deste tipo de perguntas, nomeadamente: (1) proporcionam mais informações; (2) permitem dar informações mais ricas e detalhadas; (3) e, por vezes, dão informações inesperadas.

Na aplicação dos dois questionários, os estudantes responderam individualmente. Foram realizados em sala de aula, tendo o seu preenchimento a duração de 120 minutos para cada um dos questionários. Relativamente às fichas de trabalho, os estudantes responderam a estas fichas em grupos constituídos por 4 a 5 elementos. A escolha pelo trabalho do grupo resulta da consideração pelas vantagens que a dinâmica de grupo pode revelar. Veloso (1993) afirma que o trabalho de grupo deverá ocupar um lugar de relevo na aprendizagem da Matemática. O trabalho de grupo ajuda a desenvolver capacidades fundamentais, tais como a argumentação, a construção de justificações assentes nos seus pontos de vista, a fundamentação da crítica às opiniões dos colegas, e claro, a ouvir, a compreender, a respeitar e a aproveitar as sugestões dos outros.

O NCTM (2008), no seu documento sobre os Princípios e Normas para a Matemática Escolar, também sublinha a importância de que as atividades nas aulas de Matemática devem proporcionar aos alunos (aos estudantes) mais oportunidades para trabalharem em pequeno ou grande grupo. Desta forma, proporciona-se aos estudantes a possibilidade de interagirem, confrontando, sem medos, as suas opiniões, refletindo e partilhando entre si pontos de vista, e desenvolvendo a capacidade de trabalho em equipa, indispensável na sociedade atual.

2.5.2 Entrevista

Realizaram-se, nesta investigação, entrevistas, do tipo clínico, como outro instrumento de recolha de dados.

Na perspetiva de Bogdan e Biklen (2006), a grande vantagem da entrevista é o permitir captar imediatamente a informação desejada sobre assuntos diferenciados. Para além disso, permite aprofundar e esclarecer as questões levantadas por outras técnicas de recolha de dados, como por exemplo, as observações e os questionários.

Em relação à entrevista, Bogdan e Biklen (2006) referem que esta permite a recolha de dados descritivos, na linguagem própria do sujeito entrevistado, o que permite ao entrevistador desenvolver de forma intuitiva uma ideia sobre a forma como cada sujeito interpreta aspetos do mundo. Segundo os mesmos autores, existe a necessidade de alguma flexibilidade dos entrevistadores no uso de diferentes técnicas e procedimentos adotados durante a entrevista. Para Bogdan e Biklen (2006), o ser flexível permite responder à situação de forma imediata, ao seu interlocutor sentado à sua frente, sem a preocupação de apresentar um conjunto de procedimentos ou estereótipos previamente determinados. Deste modo, compete ao entrevistador compreender os diversos pontos de vista dos participantes, bem como os seus estereótipos particulares. As características pessoais de cada um, como raça, sexo, idade ou outras, podem atuar sobre o tipo de relação entre entrevistador e entrevistado, e devem ser tidas em conta, pelo que se decidiu que o principal entrevistador seria o único elemento do sexo masculino, embora todos poderiam intervir sempre que fosse pertinente.

Segundo Ghiglione e Matalon (2005), a linguagem utilizada deve ser acessível para o entrevistado e constituir um suporte com sentido para este, para que se sinta motivado a responder; para o entrevistador a informação recolhida deve ser alargada, o mais possível. Nas entrevistas clínicas realizadas nesta investigação, utilizaram-se duas línguas, Português e Tétum. A investigadora questionou e explicou com a língua portuguesa e os estudantes responderam com a língua portuguesa ou Tétum. De mencionar que, várias vezes aconteceu que os estudantes não compreenderam as questões ou as explicações, e, nestes casos, a formadora repetiu e utilizou a língua Tetum.

Para Stake (2000), numa entrevista, mais importante do que registar é ouvir, para poderem fazer-se os registos necessários, e, sobretudo, pedir esclarecimentos.

2.5.2.1 Entrevista clinica

Do ponto de vista da psicologia, a entrevista clínica é entendida como um conjunto de técnicas de investigação, com delimitação do tempo, com objetivo de descrever e avaliar aspectos pessoais (relacionados ou sistêmicos) num processo que visa fazer recomendações, encaminhamentos ou propor algum tipo de intervenção com benefícios das pessoas entrevistadas (Tavares, 2000). Nas entrevistas clínicas realizadas nesta investigação, a investigadora utilizou as respostas erradas dos estudantes e durante entrevista colocou perguntas que estimularam (neste sentido foram auxiliar o caminho) os estudantes para, no fim, eles próprios encontrarem autonomamente a resposta correta.

A realização de entrevistas clínicas permite descrever e avaliar os aspetos relacionados com os fenómenos, visa fazer recomendações, orientações ou propor algum tipo de intervenção em benefício das pessoas entrevistadas (Tavares, 2000). Esta técnica permite estudar todo um grupo, colocando a cada um dos seus elementos questões relativas à problemática de interesse (Ponte, 2006). Realizaram-se entrevistas clínicas nos 4 grupos de estudantes, com 3 a 4 estudantes em cada grupo, com diferentes temas dependendo das suas dificuldades: tradução da linguagem natural para linguagem algébrica e modelação Matemática; Função Linear; Operações e propriedades da radiciação; Enunciação da tarefa algébrica.

Bénony e Chahraoui (2002) apresentam as características do envolvimento da entrevista clínica numa investigação: (1) o seu objetivo é aumentar o conhecimento do entrevistado, escolhido pelo investigador; (2) corresponde um plano do trabalho previamente fixado pelo investigador, ou seja, a entrevista visa responder o hipóteses de investigação precisas; (3) é realizada por iniciativa do investigador (ao contrário da entrevista clínica na terapêutica psicológica em que há, à partida, um pedido por parte de entrevistado). Isto significa que o interesse, para o entrevistando, não é imediato, mesmo que a investigação o possa beneficiar.

Neste estudo, a realização da entrevista clínica tem um duplo objetivo: por um lado, aprofundar as informações sobre o raciocínio ou argumentos dos estudantes, sobre as suas soluções das tarefas (questões); por outro, promover a discussão entre a investigadora e os estudantes, sendo que durante a entrevista investigadora pode orientar (explicar, dar exemplos, etc.) os estudantes e promover o alcance de solução correta de tarefa. Nesta investigação, as entrevistas tiveram lugar depois da correção do QF. As questões colocadas na entrevista clínica foram baseadas nas dificuldades ou erros manifestados pela maioria dos estudantes relativamente às tarefas do QF e que se classificam em 4 dificuldades (ver a tabela 2.5).

As entrevistas tiveram uma duração média de 90 minutos e realizaram-se em pequenos grupos, dependendo das classificação das dificuldades, como se apresenta na seguinte tabela:

Tabela 2.5 – Grupos dos estudantes participantes nas entrevistas clínicas

Grupo	Data da entrevista	Dificuldade	Número de participante
1	13/04/2016	Tradução da linguagem natural para linguagem algébrica; modelação Matemática	4
2	20/04/2016	Função linear	3
3	20/04/2016	Operações e propriedades da radiciação.	4
4	21/04/2016	Enunciação da tarefa algébrica	4

Durante a realização desta entrevista, além de se utilizarem as respostas destes estudantes no QF, a investigadora apresentou outros exemplos para reforçar o conhecimento destes estudantes. Inicialmente, cada um dos estudantes respondeu individualmente e depois realizou uma discussão em pequeno grupo.

2.5.3 Gravações áudio

Todas as sessões de trabalho realizadas na ação formativa foram gravadas em áudio. Nas gravações áudio conseguiu-se captar todos os diálogos das intervenções. No entanto, não se conseguiu gravar todos os diálogos ao mesmo tempo durante a realização da discussão dos grupos nas atividades práticas. As gravações foram obtidas no momento em que a formadora estava presente num grupo.

Todas as gravações foram analisadas. Em algumas situações, a análise ajudou a refletir sobre as atividades das sessões de trabalho, em particular, sobre as perguntas e as respostas apresentadas pelos estudantes durante a sessão. Com estes dados, a investigadora pôde reconstruir ou melhorar, o que era possível, para a sessão seguinte.

Realizaram-se, também, as gravações durante a realização de entrevistas clínicas. Mais tarde, transcreveram-se as entrevistas, transcrições estas que foram validadas pelos entrevistados. Os dados destas entrevistas serviram para reforçar ou cruzar os dados obtidos relativamente às respostas dos estudantes no QF.

2.5.4 Notas de campo

Bogdan e Biklen (2006) referem que as notas de campo são o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha, refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo.

As observações constantes do professor/investigador no ambiente natural dos estudantes na sala de aula contribuíram muito para a compreensão das ações (quase sempre espontâneas) por eles levadas a cabo aquando da realização das tarefas. No entanto, o investigador, tendo sempre presente as afirmações de Tuckman (2000), observou atentamente os sujeitos no sentido de apreender tanto quanto possível o que estava a acontecer, sem influenciar o decorrer normal dos acontecimentos. Este autor, refere ainda que a observação, ou esse "olhar", pode significar, por vezes, uma tentativa de confirmar, ou não, as várias interpretações que emergem das entrevistas ou dos relatórios.

A atuação do investigador na sala de aula baseou-se, essencialmente, na observação dos estudantes em estudo e no registo (sob o formato de notas de campo) das atitudes e reações manifestadas pelos estudantes durante a realização das sessões do trabalho.

Nesta investigação, após cada sessão de trabalho, a investigadora fez uma descrição escrita sobre todos os acontecimentos, atividades e diálogos (perguntas e respostas) realizadas na sala de aula. Além disto, fez o registo das ideias, estratégias adoptadas e reflexões. Estas notas de campo foram sendo complementadas com as informações obtidas através de gravação áudio.

2.6 Análise dos dados

A análise de dados nesta investigação foi realizada tendo em conta as categorias propostas do Godino et al. (2015) sobre o conteúdo algébrico e o conteúdo didático.

2.6.1 Análise do conteúdo algébrico

Para avaliar o conteúdo algébrico das respostas dos estudantes, inicialmente categorizou-se o tipo de tarefas apresentadas nos questionários de acordo com:

(1) *Estruturas* (relação da equivalência, propriedades das operações, equações, ...);

(2) *Funções* (padrões aritméticos, padrões geométricos, função linear, afim, quadrática, …);

(3) *Modelação* (problemas de contexto que se resolvem através de equações ou de relações funcionais).

Adaptou-se a categorização da configuração do objetos e processos matemáticos do EOS (Godino, Batanero & Font, 2007) para analisar as respostas das questões algébricas:

- *Situações-problemas*, são problemas mais ou menos abertos, aplicações extra matemáticas, exercícios, tarefas que induzem uma atividade matemática;
- *Elementos linguísticos – Linguagens*, são termos e expressões matemáticas; símbolos; representações gráficas; os objetos matemáticos que se utilizam e a solução encontrada em seus diversos registos, como: escrito, oral e gestual;

- *Conceitos e definições*, são formulações introduzidas mediante descrições e definidas (número, progressão, equação, função, ...);
- *Propriedades / Proposições*, são enunciados sobre relações ou propriedades dos conceitos que se utilizam para resolver problemas matemáticos;
- *Procedimentos*, são algoritmos, operações, técnicas de cálculo que se envolvem na resolução de um problema;
- *Argumentos*, são enunciados usados para justificar ou explicar as proposições e procedimentos aplicados na resolução de um problema.

Relativamente à análise do RA dos estudantes, neste estudo segue-se a categorização de Godino et al. (2015), que propõem um modelo para caracterizar o raciocínio algébrico elementar (RAE) para o ensino básico onde se distinguem quatro níveis de RA, tendo em conta os objetos e processos que intervêm na atividade matemática. Os autores desenvolvem estes níveis em mais três níveis de RA para caracterizá-los no ensino secundário. Relativamente à definição de níveis de RA, esta baseia-se em distinções de natureza ontossemiótica:

- Presença de objetos algébricos intensivos (ou seja, entidades de carácter geral ou indeterminado);
- Transformações (operações) aplicadas a esses objetos, as quais são baseadas na aplicação de propriedades estruturais;
- Tipo de linguagem utilizada.

Resumidamente, na tabela 2.6, apresenta-se a proposta de Godino et al. (2015) sobre os níveis de RA:

Tabela 2.6 - Níveis do RA para o Ensino Básico e o Ensino Secundário

	Nível	Objetos	Transformações	Linguagem
Raciocínio Algébrico Elementar (RAE) para Ensino Básico	0	- Não envolve objetos intensivos. - Nas tarefas estruturais podem envolver-se dados desconhecidos.	Opera-se com objetos extensivos.	Natural, numérica, icónica, gestual, podendo envolver símbolos que se referem aos objetos extensivos, os dados desconhecidos.
	1	- Nas tarefas estruturais podem	- Nas tarefas estruturais aplicam-	Natural, numérica, icónica gestual,

		envolver-se dados desconhecidos. - Nas tarefas funcionais reconhecem-se os intensivos.	se relações e propriedades das operações. - Nas tarefas funcionais opera-se com objetos intensivos.	podendo envolver símbolos que referem aos objetos intensivos conhecidos.
	2	Envolve objetos indeterminados ou variáveis.	- Nas tarefas estruturadas as equações são da forma $Ax \pm B = C$ - Nas tarefas funcionais a generalidade é reconhecida mas não se opera com variáveis para obter a forma canónica de expressões algébricas.	Simbólica – literal, utilizada para referir os intensivos reconhecidos, ligados às informações do contexto espacial e temporal
	3	Envolve objetos indeterminados ou variáveis. Envolve objetos indeterminados ou variáveis.	- Nas tarefas estruturadas, as equações são da forma $Ax \pm B = Cx \pm D$ - Opera-se com objetos indeterminados ou variáveis.	Simbólica – literal, os símbolos são usados analiticamente, sem referências às informações do contexto.
Raciocínio Algébrico (RA) para Ensino Secundário	4	Variáveis, incógnitas e parâmetros; Famílias de equações e funções (Objetos intensivos com um maior grau de generalidade).	Ocorrem operações com variáveis, mas não com parâmetros.	Simbólica - literal; os símbolos são usados analiticamente, sem se referir a informações contextuais.
	5	- Variáveis, incógnitas e parâmetros; - Famílias de equações e funções (Objetos intensivos com um maior grau de generalidade).	Existem operações com os parâmetros e, portanto, com objetos com um maior grau de generalidade.	Simbólica - literal; símbolos são usados analiticamente, sem se referir a informações contextuais.
	6	Estruturas algébricas; envolve objetos abstractos (espaços vetoriais, grupos, anéis, ...). Relações	Existem operações com objetos abstratos que formam partes das estruturas algébricas.	Simbólico - literal; os símbolos são usados analiticamente sem se referirem a informações contextuais.

		binárias.Gerais e as suas propriedades (Objetos intensivo com quarto grau de generalidade)		

Considera-se que a análise didática centrada no reconhecimento de objetos e processos do pensamento algébrico, pode ajudar a identificar características de práticas matemáticas que podem contribuir para aumentar gradualmente o nível de RA da atividade matemática dos estudantes, futuros professores.

2.6.2 Análise do conteúdo didático

Na análise dos dados de conteúdo didático, neste estudo, seguiu-se a categorização de análise do conteúdo didático, segundo Contreras, Ordoñez e Wilhelmi (2010) que se refere ao modelo da adequação didática de Godino (2009). Como vimos anteriormente no Capítulo I, de forma mais detalhada, nesta categorização propõe-se um sistema de categorização da adequação didática em três grandes dimensões articuladas: faceta epistémica, faceta cognitiva e faceta instrucional.

Neste modelo, são consideradas como dimensões-chave de análise do processo de ensino e aprendizagem, as dimensões epistémica e cognitiva, prevendo para cada uma delas um ponto de vista antropológico e semiótico, isto é, a Matemática é entendida como uma atividade humana que adquire um significado mediante a ação das pessoas perante situações-problema específicas, as quais dão relevância às outras facetas uma vez que também condicionam a aprendizagem (Godino, 2009).

Além disso, para Contreras, Ordoñez e Wilhelmi (2010), estas dimensões podem constituir-se como um guião para o desenho, para a *implementação* e para a avaliação do plano de formação dos professores e ainda para a reflexão e investigação dos futuros professores sobre a sua própria prática.

Capítulo III – Avaliação do conhecimento sobre o raciocínio algébrico dos futuros professores timorenses: um estudo piloto

Neste capítulo apresentam-se os resultados da e análise de um estudo piloto efetuado em concordância com as fundamentações teóricas e metodológicas que foram apresentadas nos capítulos anteriores. A descrição e análise centrar-se-á no estudo piloto onde se obtiveram dados através de um questionário designado por questionário inicial (QI: Anexo II).

A aplicação do QI teve como objetivo diagnosticar o conhecimento algébrico e o conhecimento didático dos estudantes, futuros professores de Matemática, que estão a frequentar a sua formação inicial. A realização desta análise tem o objetivo de responder às seguintes questões de investigação:

(i) *Que conhecimentos algébricos têm futuros professores sobre o RA?*

(ii) *Quais as dificuldades na aprendizagem da Álgebra (tipologia de erros) que futuros professores apresentam em relação aos procedimentos utilizados na resolução de tarefas algébricas?*

(iii) *Que conhecimentos didático-matemáticos têm futuros professores sobre o RA?*

Para esse efeito, este capítulo apresenta a descrição dos resultados e as conclusões tiradas a partir de análise do estudo piloto, nomeadamente:

1. Processo de construção do questionário inicial (QI);
2. Descrição das tarefas (estruturas, funções e modelação) que envolve:

    a). Construção das soluções previstas das tarefas;

    b). Descrição dos níveis do RA envolvidos nas soluções previstas;

    c). Descrição epistémica relacionada com as soluções previstas.

3. Análise dos resultados obtidos, focando-se nas seguintes categorias:

    a). O conhecimento algébrico;

    b). Erros algébricos e dificuldades na aprendizagem da Álgebra;

    c). O CDM que visa às varias facetas: epistémica, cognitiva e instrucional.

4. Discussão dos resultados anteriores envolvendo uma caraterização psicométrica do QI.

3.1 Construção do QI sobre o RA e o CDM

No sentido de responder às questões desta investigação, num primeiro momento procuraram-se vários exemplos de tarefas das várias investigações. O objetivo desta leitura de estudos, previamente realizados, foi o de sustentar a construção e a seleção das tarefas que se podem utilizar para avaliar o conteúdo algébrico e o conteúdo didático dos estudantes. A construção destas tarefas foi inspirada pelas várias tarefas propostas pelas investigações realizadas por Godino et al. (2014).

As tarefas algébricas escolhidas para este questionário foram consideradas, sobretudo, pelas características do modelo da avaliação do RA baseado no EOS proposto por Godino (2009), onde a natureza algébrica se percebe como uma visão mais ampla que permite analisar os vários tipos das atividades Matemáticas e os diferentes níveis do RA.

Com o QI procurou-se obter dados relativos às 8 tarefas da natureza algébrica. Estas tarefas foram categorizadas de acordo com a classificação do conteúdo algébrico, segundo Godino et al. (2015), sobre:

a) *estruturas* ("Balança de sumo" e "Sistema de equações lineares com duas incógnitas");

b) *funções* ("Padrão e sequência de *lafatik"* e "Família de funções quadráticas");

c) *modelação* ("Custo do almoço", "Identificação das expressões algébricas", "Movimento do *kayak*" e "Taxa de imposto").

Além de avaliar o conhecimento do conteúdo algébrico, este questionário permitiu explorar o CDM dos estudantes, tal como sugerem a proposta de Godino et al. (2015) e do Godino (2011). A avaliação do conteúdo didático foi considerada na seguinte categorização:

a) *Faceta epistémica*, relacionada com a identificação dos objetos e processos algébricos (representações, conceitos, procedimentos, propriedades, generalização, modelação) e a identificação de níveis de RA;
b) *Faceta cognitiva*, tendo em conta os significados pessoais dos alunos (conhecimento, compreensão e competência sobre os conteúdos algébricos elementais) e conflitos de aprendizagem sobre os objetos e processos algébricos;
c) *Faceta instrucional*, tem relação com os recursos para o ensino de Álgebra (situações – problema, meios técnicos) e a sua adequação ao currículo escolar. Porém, neste questionário não foram avaliados as respostas dos estudantes em todas as categorias propostas no modelo CDM.

Note-se que não foi avaliada a faceta afectiva, relacionada com atitudes, motivações, emoções. Da mesma forma, não foi avaliada a faceta ecológica, envolvendo aspetos do currículo ou materiais didáticos na aprendizagem da Álgebra. Assim, neste estudo apenas focou-se nas facetas (epistémica, cognitiva e instrucional) que tem relação diretamente com os trabalhos escritos dos estudantes.

"A identificação do conhecimento algébrico que está envolvido na resolução da tarefa" (item c da tarefa 5) e "o procedimento que é utilizado na resolução da tarefa" (item b e item c da tarefa 3) foram dois tipos de questões colocadas para avaliar a faceta epistémica. Para apurar dados relativos à faceta cognitiva, colocaram-se questões sobre: a "interpretação do conceito de equilíbrio"(item b, tarefa 1); a "identificação dos conhecimentos algébricos que se pode utilizar para a resolução da tarefa" (item b da tarefa 7; item d da tarefa 2); e a "consideração de que a tarefa é adequada para ser proposta aos alunos" (item c da tarefa 8). Relativamente à faceta instrucional, questionou-se sobre: a "enunciação das tarefas relacionadas com as tarefas propostas" (item c da tarefa 7; item b da tarefa 4; item b e item c da tarefa 6), e a "modificação do enunciado das tarefas propostas" (item c da tarefa 2).

3.2 Descrição e análise das tarefas do QI

Neste subcapítulo apresenta-se a descrição das tarefas do QI que envolvem as soluções previstas pelos vários níveis do RA e a análise epistémica relacionada com as soluções previstas das tarefas.

Na nossa análise, pretende-se identificar os objetos matemáticos envolvidos e os processos utilizados na resolução das tarefas, permitindo descrever a complexidade e natureza algébrica, tendo por base os níveis do referencial do EOS (Godino, 2009) que se categorizam segundo três tipos de tarefa: 1. tarefa sobre estruturas; 2. tarefa sobre funções; e 3. tarefa sobre modelação.

Relativamente à análise epistémica sobre as soluções das tarefas, esta baseia-se na configuração dos objetos e processos algébricos que intervêm em práticas matemáticas, como refere a proposta de Godino et al, (2007, p.121):

- *Linguagens* (termos, expressões, notações, gráficos) em seus diversos registos (escritos, orais, gestuais, etc.);
- *Situações-problema* (aplicações intra ou extra-matemáticas, exercícios).
- *Definição de conceitos* (introduzida por definições ou descrições, por exemplo: linha, ponto, número, média, função, ...);
- *Proposições* (afirmações sobre conceitos);
- *Procedimentos* (algoritmos, operações, técnicas de cálculo);
- *Argumentos* (declarações utilizadas para justificar ou explicar proposições e procedimentos dedutivos ou não).

3.2.1 Descrição das tarefas sobre Estruturas

As duas tarefas apresentadas seguidamente são as tarefas sobre estruturas, envolvendo vários conhecimentos algébricos e vários níveis de RA. A primeira tarefa é uma tarefa sobre o equilíbrio de uma balança, que serve para avaliar os conhecimentos algébricos do

Ensino Básico. A segunda tarefa envolve os conhecimentos sobre sistemas e equações lineares com duas incógnitas, sendo uma tarefa sobre estruturas algébricas para o Ensino Secundário.

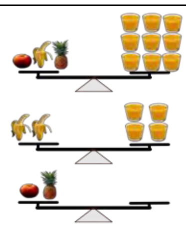
***Tarefa 1*: Balança do sumo**

A tarefa 1 foi inspirada na tarefa da balança dos parafusos (Godino et al., 2014), onde se aplicam as propriedades estruturais de: números naturais ℕ, de substração e de divisão. Envolve-se aqui a noção conceptual incorporada na noção de "balança". Se tirar um elemento do prato do lado esquerdo da balança, como consequência, a balança não terá equilíbrio, sendo necessário fazer-se o mesmo no prato da direita para se manter o equilíbrio, como se pode observar na Figura 3.1 seguinte (QI, tarefa 1, Anexo II).

Figura 3.1 – Tarefa 1 “Balança de sumo”

Observa a figura do lado:

a. Quantos copos de sumo tem que se colocar na terceira balança, para ficar equilibrada?
b. Que interpretação do “equilíbrio” está associado ao conhecimento matemático?



Esta tarefa pretende familiarizar os estudantes com uma situação-problema que envolve o conhecimento básico matemático sobre o conceito da equivalência, da equação linear e da solução do sistema das equações lineares com três incógnitas. Espera-se, pois, com a tarefa 1, que os estudantes possam manifestar as várias soluções que envolvem a utilização do RA.

Soluções previstas relativamente à tarefa 1.

O objetivo desta tarefa é encontrar a solução que envolve a utilização de símbolos e processos algébricos que manifestam o nível 3 do RA. Considera-se também a possibilidade de encontrar outros tipos de resolução e de outros tipos e níveis de RA.

Seguidamente, descrevem-se na tabela 3.1 as possibilidades de resolução do item a da tarefa 1, comportando diferentes nível de RA.

Tabela 3.1 - Soluções previstas e análise do RA relativamente à tarefa 1 do QI

item a	
Solução 1 A segunda balança indica que duas bananas correspondem a 4 copos de sumo; assim, uma banana associa-se a 2 copos de sumo. Na primeira balança há 9 copos de sumo na placa à direita; se tirar uma banana terá que tirar também os 2 copos de sumo para que o equilíbrio seja mantido. Portanto, na terceira balança deve ser colocado 9 – 2 = 7, ou seja 7 copos de sumo.	Nível 0 - Não envolve símbolos algébricos nem soluções algébricas; - Utiliza-se uma linguagem natural; - O sinal "=" utiliza-se apenas para mostrar a equivalência de ambos os lados *A configuração da resposta é de operação numérica.*
Solução 2 Sendo que uma maçã é x , uma banana é y, e uma ananás é z, então: 1.º balança: $x + y + z = 9$ 2.º balança: $2\,y = 4 \;\rightarrow y = 2$ 3.º balança: $x + 2 + z = 9$ assim, $x + z = 9 - 2 = 7$ Então, para a terceira balança ficará em equilíbrio deverá colocar 7 copos de sumo no prato direito.	Nível 3 -Envolve-se os símbolos como incógnitas (simbólica láteral) - Utilizam-se operações algébricas - A estrutura da tarefa é a equação de forma $Ax \pm B = Cx \pm D$ - O sinal "=" tem significado como equivalência. *A configuração da resposta é de álgebra estrutural.*
item b	
O conceito de "equilíbrio" nesta tarefa associa-se ao uso da igualdade como equivalência desta expressão.	

Análise epistémica relacionada com a tarefa 1 e as suas soluções previstas

Desenvolve-se, nesta parte, uma análise sobre os tipos de objetos e processos algébricos envolvidos nas resoluções desta tarefa, baseando-nos na proposta de Godino et al. (2007) sobre elementos linguísticos, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos.

Na tarefa 1 apresenta-se uma situação-problema envolvendo três balanças diferentes em que cada uma delas é constituída por um conjunto das frutas que resultam quantidade dos copos de sumo. No item a identificam-se *os elementos linguísticos* diferentes entre as duas soluções definidas acima: relação entre linguagem natural e a apresentação das figuras (solução 1); e relação entre linguagem simbólica (x, y e z) e a apresentação das figuras (solução 2). Na solução 1, a linguagem natural ocupa grande parte da estratégia de resolução do problema, envolvendo a propriedade da substração e divisão do cálculo numérico. Na solução 2 é feita a tradução para linguagem algébrica, utilizando-se os símbolos como incógnitas. Se a maçã, a banana e o ananás são simbolizados por x, y e z, então cada uma das balanças é associada a equações o que facilita a resolução desta tarefa.

As duas soluções envolvem o *conceito* de equilíbrio de balança como o conceito básico para compreender o problema. A utilização dos símbolos, na solução 2, permite uma solução que envolve o conceito da equação linear como uma tradução do conceito de balança. Se a cada uma das balanças for traduzida numa equação linear, logo, para resolver as situações de três balanças é necessário um conceito de resolução de um sistema linear com três incógnitas e o seu método de resolução.

A solução 1 utiliza a observação das balanças como *procedimento* de resolução. Na observação da segunda balança, o prato da esquerda tem duas bananas e está em equilíbrio com quatro copos de sumo. Portanto, segundo a propriedade da divisão, uma banana associa-se a dois copos de sumo. O resultado desta associação permite resolver esta tarefa. Na solução 2 inicia-se o *procedimento* de resolução com uma tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica e relaciona-se as situações das três balanças. Na tradução da segunda balança mostra-se uma equação linear $2\,y = 4$ que pode resolver-se diretamente através da propriedade da divisão. Na teoria de Vlasis (2002), esta equação é categorizada como sendo do 1.º tipo de equações lineares com uma incógnita, atendendo a que tem incógnitas só num lado. Na etapa seguinte, utiliza-se a propriedade da substituição, ou seja substitui-se o valor de $y = 2$ na equação da primeira balança para determinar a solução.

Relativamente ao CDM, a questão do <u>item b</u> é uma questão que pertence à *faceta cognitiva* onde se procura perceber a compreensão dos estudantes relativamente ao significado de “equilíbrio” da balança que, neste caso, se associa ao uso da igualdade como equivalência da expressão.

***<u>Tarefa 7</u>*: Sistema das equações lineares com duas incógnitas**

A tarefa 7 envolve um sistema de equações lineares com duas incógnitas, na forma geral, envolvendo duas variáveis (x e y) e uma constante c. O objetivo desta tarefa é encontrar o valor de x e o valor de y em forma canónica, permitindo vários métodos de resolução. Não se pretende uma solução baseada em exemplos particulares do sistema de equações lineares e que faça uma generalização através dos exemplos escolhidos.

Figura 3.2 – Tarefa 7 "Sistema das equações lineares com duas incógnitas"

Sendo a forma geral de um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas dada por $\begin{cases} a_1\, x + b_1\, y = c_1 \\ a_2\, x + b_2\, y = c_2 \end{cases}$, com $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ são reais.

a. Indique a expressão geral x e y da solução do sistema, ou seja os valores de x e de y.
b. Identifique os conhecimentos algébricos se podem utilizar para resolver esta tarefa.
c. Enuncie dois problemas que se possam propor aos alunos do 10º ano cujam sistema das equações lineares com duas incógnitas!

Nesta tarefa promovem-se algumas possibilidades de resolução relativamente ao método da eliminação ou da substituição ou misto, à regra de Cramer e ao método de matriz inversa.

Soluções previstas relativamente à tarefa 7.

Apresentam-se agora as possibilidades de soluções que poderiam responder à tarefa 7, com vários métodos de resolução de problema, utilizando-se os objetos e os processos algébricos de forma geral. Relativamente aos níveis do RA, nesta tarefa pretende-se encontrar a solução do nível 5 do RA que envolve: os objetos indeterminados ou variáveis e parametros; os símbolos algébricos, neste caso representado pela forma geral da equação linear; e o tratamento do sistema das equações bem como a estrutura da solução a partir do seu processamento.

Tabela 3.2 - Soluções previstas e análise do RA relativamente à tarefa 7 do QI

item a
<u>Solução 1</u> - Pelo método da eliminação $a_1\, x + b_1\, y = c_1\ (multiplica\ com\ b_2\ )$ $a_2\, x + b_2\, y = c_2\ (multiplica\ com\ b_1)$

$$\frac{\begin{matrix} a_1\ b_2x + b_1b_2\ y = b_2c_1 \\ a_2\ b_1x + b_1b_2\ y = b_1c_2 \end{matrix}}{(\ a_1\ b_2 - a_2\ b_1\ )\ x = b_2c_1 - b_1c_2}\ - \text{; então } x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1}$$

Com a mesma analogia encontramos

$$a_1\ x + \ b_1\ y = \ c_1\ (multiplica\ com\ a_2\ )$$
$$a_2\ x + \ b_2\ y = \ c_2\ (multiplica\ com\ a_1)$$

$$\frac{\begin{matrix} a_1\ a_2x + a_2b_1\ y = a_2c_1 \\ a_1\ a_2x + a_1b_2\ y = a_1c_2 \end{matrix}}{(\ a_2b_1 - a_1b_2\ )\ y = a_2c_1 - a_1c_2}\ - \text{; então}$$

$$y = \frac{a_2c_1 - \ a_1c_2}{a_2b_1 - \ a_1b_2} = \frac{-\ (\ a_1c_2 - a_2c_1\ )}{-(a_1b_2 - \ a_2b_1\ )} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - \ a_2b_1}$$

<u>Solução 2</u> - Pela regra de Cramer

$$x_j = \frac{\|\ A_j\ \|}{\|\ A\ \|} = \frac{\det(\ A_j\ )}{\det(\ A\ )}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$x = \frac{\begin{Vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix}} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1}\ \text{; e }\ y = \frac{\begin{Vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1}$$

<u>Solução 3</u> - Pelo método de matriz inversa

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}\ \underset{P}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}\ \text{; portanto } P = \ A^{-1}.B$$

$$P = \frac{1}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1} \begin{bmatrix} b_2 & -\ b_1 \\ -\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1} \begin{bmatrix} b_2\ c_1 - \ b_1c_2 \\ -\ a_2\ c_1 + \ a_1\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{a_1\ b_2 - \ a_2\ b_1} \begin{bmatrix} b_2\ c_1 - \ b_1c_2 \\ a_1\ c_2 - \ a_2\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_2\ c_1 - \ b_1c_2}{a_1\ b_2 - \ a_2\ b_1} \\ \dfrac{a_1\ c_2 - \ a_2\ c_1}{a_1\ b_2 - \ a_2\ b_1} \end{bmatrix}$$

Assim, $x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1}$ e $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

item b

Os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa são: sistema das equações lineares com duas incógnitas; o procedimento da eliminação (Solução 1), o procedimento da substituição, o procedimento misto (eliminação e substituição); as propriedades da operação numérica (adição, substração, multiplicação, divisão); o conceito da regra de Cramer (Solução 2); o conceito de matriz (determinante, inversa e matriz adjunta) e conceito da equação de matriz (Solução 3).

item c

Exemplos da tarefa do tipo da resolução do problema sobre a sistema da equações com duas incógnitas:

- No estacionamento há 21 veículos que são compostos por carros e motos. O número total das rodas são 60. Quantos são os carros que estão no

estacionamento?
- Sendo a equação linear, $y = ax + b$, os pontos de $A(3,8)$ e de $B(-2,-7)$ estão nesta linha. Enuncie esta equação linear.

Análise epistémica relacionada à tarefa 7 e as suas soluções previstas

Na enunciação desta tarefa pode-se identificar os símbolos literais dos coeficientes $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ e das incógnitas x, y como os *elementos linguísticos* que estão envolvidos nesta tarefa. A solução do item a envolve vários *conceitos*, que também foram questionados no item b desta tarefa, nomeadamente: o sistema das equações lineares com duas incógnitas; o procedimento da eliminação (Solução 1), o procedimento da substituição, o procedimento misto (eliminação e substituição); as propriedades da operação numérica (adição, substração, multiplicação, divisão); o conceito da regra de Cramer (Solução 2); o conceito de matriz (determinante de uma matriz, inversa e matriz adjunta) (Solução 3).

Na solução 1, utiliza-se o *procedimento* da resolução com o método da eliminação, que consiste em eliminar uma incógnita numa equação e substituí-la na outra equação do sistema dado até se encontrar uma equação do 1.º grau com uma única incógnita. Para resolver este sistema com o *procedimento* da regra de Cramer (solução 2), é necessário ter-se conhecimento sobre o determinante de um matriz e a matriz adjunta. O valor da variável obtém-se pela divisão do determinante da matriz adjunta por determinante do matriz inicial. Na solução pelo *procedimento* da matriz inversa, além de se envolver o conhecimento relativo à matriz inversa, aplica-se também o conhecimento relacionado com o conceito da equação matriz em forma de $A \times P = B,\ donde\ P = A^{-1} \times B$. Envolve-se, igualmente, o conceito de determinante de uma matriz.

Assim, tendo por base os vários métodos de resolução para o item a, pode-se, portanto, apresentar o *argumento* que as soluções de um sistema das equações lineares com duas incógnitas são o valor de x e de y, obtidos por qualquer tipo de procedimento de resolução.

Relativamente ao item c, este item apresentou uma questão do CDM da *faceta instrucional*. Nesta questão solicitou-se aos estudantes que construíssem um exemplo de uma tarefa algébrica que estimule o RA dos alunos. Considera-se que este tipo de exercício é muito importante para que os futuros professores possam praticar a construção de exemplos ou de tarefas para a sua prática profissional no futuro.

3.2.2 Descrição das tarefas sobre Funções

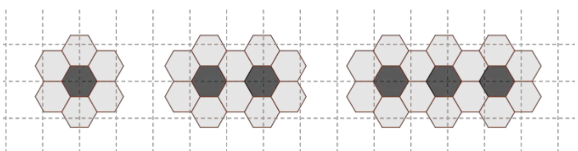
Apresentam-se, em seguida, duas tarefas sobre funções que envolvem vários conhecimentos algébricos e vários níveis de RA. A primeira destas tarefas, a tarefa 2, trata-de identificar um padrão e tem o propósito de avaliar o conhecimento sobre a função no Ensino Básico. A segunda tarefa é uma tarefa da família de funções quadráticas. Esta tarefa envolve a utilização de conhecimentos sobre a função quadrática e as suas representações gráficas. Serve, por isso, para desenvolver o conhecimento algébrico funcional no Ensino Secundário.

***Tarefa 2*: Padrão e sequência de lafatik**

A tarefa 2, deste trabalho, apoia-se na utilização da figura decorativa presente em bandejas timorenses e que tem uma forma hexagonal. Essa figura designa-se por "*lafatik*" (esta tarefa foi adaptada da tarefa "Pulseira das flores" de Barbosa, Palhares & Vale, 2007, p.5). Além da sua forma hexagonal, o "*lafatik*" também é constituído pelo conjunto de *tali tahan* que se forma, também, em hexágono. Antigamente, o "*lafatik*" era formado apenas com *tali tahan* de cor natural de palma, mas atualmente foi modernizado, sendo formado pelo *tali tahan* de várias cores. De seguida, apresenta-se o enunciado da tarefa:

Figura 3.3 – Tarefa 2 "Padrão e sequência de *lafatik*"

A figura abaixo, mostra o padrão de um *lafatik* que é composto por *tali tahan* branco e *tali tahan* preto. A primeira flor é formada por 6 *tali tahan* branco e 1 *tali tahan* preto, a segunda por 10 *tali tahan* branco e 2 *tali tahan* preto, e assim sucessivamente.



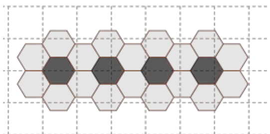
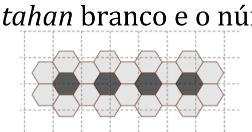
a. Quantos são os tali *tahan* brancos e *tali tahan* pretos necessários para formar 4 flores?
b. Quantas flores se poderiam construir com 37 *tali tahan*?
c. Como modificaria o enunciado da tarefa para introduzir algum procedimento de resolução que ponha em jogo conhecimentos algébricos?
d. Quais seriam tais conhecimentos algébricos?

Nesta tarefa recorre-se a várias incógnitas; as relações entre o icónico, a aritmética e a representação algébrica de um padrão. O foco desta segunda tarefa é o de expressar a quantidade de componentes de cada flor, através de identificação de um padrão como uma função de variável natural.

Soluções previstas relativamente à tarefa 2.

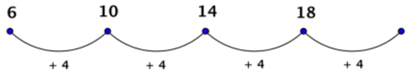
Com a tarefa 2 pretende-se encontrar uma solução que manifeste o nível 3 do RA que se centra na utilização dos símbolos literais e das operações algébricas nas suas resoluções. Note-se que há a possibilidade de encontrar outras soluções resultantes de métodos variados e de baixos níveis do RA, como se mostra na solução 1 e na solução 2 da seguinte tabela:

Tabela 3.3 - Soluções previstas e análise do RA relativamente à tarefa 2 do QI

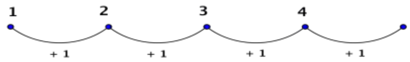
<table>
<tr>
<td>
<u>Solução 1</u>
Construindo o seguinte figura com 4 flores, e calculado o número da tali tahan branco e o número da tali tahan preto

O resultado do cálculo mostra que a 4.ª flor constituída de 18 tali tahan brancos e de 4 tali tahan pretos.
a. Com o mesmo modo, construi-se as flores sucessivamente e regista-se na seguinte tabela:
<table>
<tr><th>Flor</th><th>tali tahan branco</th><th>tali tahan preto</th><th>Total de tali tahan</th></tr>
<tr><td>1.ª</td><td>6</td><td>1</td><td>7</td></tr>
<tr><td>2.ª</td><td>10</td><td>2</td><td>12</td></tr>
<tr><td>3.ª</td><td>14</td><td>3</td><td>17</td></tr>
<tr><td>4.ª</td><td>18</td><td>4</td><td>22</td></tr>
<tr><td>5.ª</td><td>22</td><td>5</td><td>27</td></tr>
<tr><td>6.ª</td><td>26</td><td>6</td><td>32</td></tr>
<tr><td>7.ª</td><td>30</td><td>7</td><td>37</td></tr>
</table>
b. Baseia-se na tabela anterior, os 37 tali tahan pode construir em 7 flores.
</td>
<td>
<u>Nível 0</u>
- Não envolve símbolos algébricos nem soluções algébricas;
- Utiliza-se uma representação de uma figura e/ou tabela;
- Realiza-se a contagem para determinar a quantidade de tali tahan.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
<u>Solução 2</u>
a. Construindo o seguinte figura com 4 flores, e calculado o número da tali tahan branco e o número da tali tahan preto

</td>
<td>
<u>Nível 1</u>
-Utiliza a linguagem numérica
-Envolve as propriedades de adição e de
</td>
</tr>
</table>

O resultado do cálculo, mostra que a 4.ª flor constituída de 18 *tali tahan* brancos e de 4 *tali tahan* pretos.

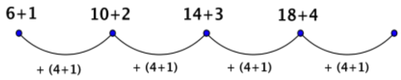
b. Os números de cada tali tahan indica os padrões da progressão aritmética. Por isso, observa-se as seguintes análises:
A quantidade de *tali tahan* branco ilustrada pela seguinte progressão:



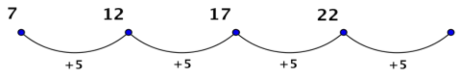
E a progressão da quantidade de *tali tahan* preto ilustrada na seguinte figura:



Baseia-se nas duas progressões anteriores, permite construir um conjunto de progressão de dois tipos de *tali tahan*, como apresentadas nas seguintes figuras:



Ou seja,



E a seguir sucessivamente até encontrar as 37 do conjunto de dois tipos de *tali tahan*, que se pode construir em 7 flores.

substração da operação numérica

Solução 3

Tendo por base na observação de três primeiras flores, regista-se em seguinte tabela:

Flor	*tali tahan* branco	*tali tahan* preto	Conjunto de *tali tahan*
1ª	$6 = 6 + 4 \cdot 0$	1	7
2ª	$10 = 6 + 4 \cdot 1$	2	12
3ª	$14 = 6 + 4 \cdot 2$	3	17
...	...	...	...
n	$U_n = 6 + 4 \cdot (n-1)$ $U_n = 4n + 2$	$U_n = n$	$U_n = (4n+2) + n$ $U_n = 5n + 2$

a. $U_4 = ?$

- *Tali tahan* branco $\longrightarrow U_n = 4n + 2$

$$U_4 = 4 \cdot 4 + 2 = 18$$

- *Tali tahan* preto $\longrightarrow U_n = n$

$$U_4 = 4$$

Assim, a 4.ª flor constituídas por 18 *tali tahan* brancos e 4 *tali tahan* pretos.

b. $U_n = 37 \longrightarrow n = ?$ $U_n = 5n + 2$

$37 = 5n + 2$

Nível 3

- A linguagem utilizada é simbólica;
- Envolve-se objetos indeterminados ou variáveis
- As fórmulas dadas $6 + 4 \cdot (n-1)$ e n sofrem transformações por obter a fórmula canónica $5n + 2$

$35 = 5n \longrightarrow n = 7$ A flor que têm 37 *tali tahan* é 7.ª flor.	

item c
Exemplos de enunciação da tarefa: - Quantos são *tali tahan* branco e *tali tahan* preto para formar a 5.ª flor? - Quantos flores pode-seconstruir de 30 *tali tahan* branco?

item d
Os conhecimentos algébricos utilizados: Sequência e regularidade; Representação algébrica de um padrão; Progressão aritmética.

Análise epistémica relacionada com a tarefa 7 e as suas soluções previstas

As situações-problema que se manifestam na tarefa 7 são a identificação de números de *tali tahan* e a identificação do número de flores que se pode construir com o *tali tahan*. Utiliza-se o registo dos dados na tabela (solução 1 e 3) e os termos sucessivos (solução2) como representações das *linguagens*.

No item a e no item b desta tarefa pretende-se encontrar as soluções que manifestam a utilização de alfanumérica de equação e o tratamento da expressão geral na tarefa de progressão. Mesmo assim, há uma possibilidade em que os estudantes utilizaram a tabela para registar os números de *tali tahan* e aplicam um cálculo numérico como os *procedimentos* de resolução (solução 1). Considera-se que não é fácil resolver a questão do item b seguindo este método, contagem numérica,, devido à grande quantidade de *tali tahan*, uma vez que envolve uma generalização. Além disso, o processo da interpretação do padrão desta tarefa é uma atividade que procura estudar as relações aritméticas e funcionais, sendo de nível algébrico mais avançado. É um processo de modelação em termos da relevância da qualidade do padrão; que, por sua vez, incide na relação entre as representações esquemáticas e, em termos de fórmulas, nas sequências (Stromskag, 2015).

Na solução 2 do item a, utiliza-se a construção de 4.ª flor e a contagem de números de *tali tahan* como procedimentos de resolução. No item b, o procedimento da resolução está baseado na identificação da razão (diferença) entre dois termos sucessivos, neste caso opera-se a propriedade de subtração para obter as razões de *tali tahan* branco e de *tali tahan* preto da 1.ª e da 2.ª flor, com o mesmo modo para a 2.ª e a 3.ª flor, e também para a 3.ª e a 4.ª flor. Através deste procedimento mostra-se um *argumento* em que os termos sucessivos têm o mesmo razão. A solução obtida passa por fazer uma continuação de sequência de dois tipos de *tali tahan.* Há também a possibilidade de resolver o item b através de uma análise de sequência de um conjunto de *tali tahan* branco e de um *tali tahan* preto. A solução obtida pela continuação desta sequência e identificação de termo geral da sequência permite determinar o número de flores.

A solução 3, na sua *linguagem*, recorre a uma tabela de registo e aos símbolos literais para representar os números de *tali tahan.* Envolvem-se ainda os *conceitos* de padrão e de progressão aritmética e uma *proposição,* fórmula da progressão aritmética $U_n = a + (n-1)b$, sendo $a = U_1$ = 1.º termo da progressão e $b = U_n - U_{n-1}$ = razão entre dois termos sucessivos. Neste caso, a expressão $U_n = 6 + 4 \cdot (n-1)$ para os *tali tahan* branco e a expressão $U_n = n$ para os *tali tahan* preto.

Relativamente ao CDM, o item a e o item b desta tarefa pretendem avaliar a *faceta cognitiva* do conteúdo algébrico de tipo funcional. O item c envolve a *faceta instrucional* no seu conhecimento de modificar o enunciado da tarefa que promove a utilização do RA (ver a resposta do item c, na tabela anterior). No item d é solicitado aos futuros professores uma reflexão epistémica sobre os tipos de conhecimentos algébricos que envolveram nesta tarefa. Na solução 1 é difícil de identificar os conhecimentos algébricos envolvidos na tarefa 7. Esta dificuldade resulta do facto de não se envolver na solução nenhum símbolo algébrico e apenas se realizar o cálculo numérico e registar os dados numa tabela. Na solução 2 pode-se identificar o envolvimento do conhecimento algébrico, sendo neste caso o padrão e a sequência. A razão (diferença entre dois termos sucessivos), o padrão e sequência, e a progressão aritmética são os conhecimentos algébricos identificados na solução 3.

***Tarefa 5*: Família de funções quadráticas**

A quinta tarefa é uma tarefa da família de funções quadráticas, onde intervêm parâmetros; coeficientes de função e variáveis. A atividade requer a interpretação do papel do parâmetro para identificar propriedades da família das funções, mas não requer cálculos com o parâmetro para produzir outros objetos ou relações.

Figura 3.4 – Tarefa 5 “Família de funções quadráticas”

Considera uma função real de variável, de forma geral, definida por $y = ax^2$.

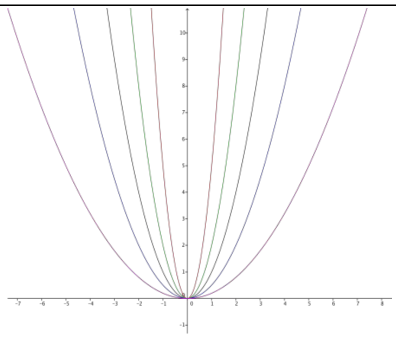
a. Observe os gráficos desta função para: $a > 0$; $a < 0$; $0 < a < 1$; $e\ a > 1$
b. Explique os efeitos do parâmetro a nos gráficos da função anterior.
c. Identifique os conhecimentos algébricos que se envolvem na resolução desta tarefa.

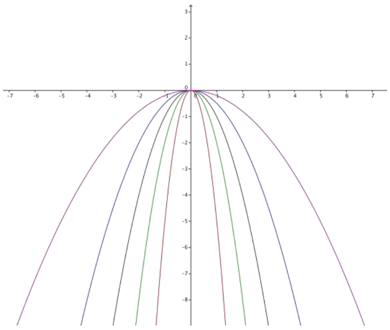
Tendo por base o objetivo desta tarefa – interpretar e fazer uma generalização dos efeitos do parâmetro a na família de funções quadráticas – espera-se encontrar outras generalizações, como por exemplo a relação do parâmetro a com o vértice da parábola e com o eixo simetria.

Soluções previstas relativamente à tarefa 5.

Apresenta-se, na seguinte tabela, as soluções da tarefa 5 envolvendo o método de resolução e da análise de nível do RA. Pretende-se que os estudantes desenhem um esboço do gráfico para lhes facilitar a observação da mudança do gráfico pelas diferenças de valor do parâmetro a. O objetivo desta tarefa é encontrar uma solução de nível 4 do RA, considerando que a resolução desta tarefa é uma atividade da família de funções que envolve a utilização dos símbolos algébricos e não se opera com parâmetros. Neste caso, a diversidade de valor do parâmetro facilita a identificação das propriedades da família de funções.

Tabela 3.4 - Soluções previstas relativamente à tarefa 5 do QI

Item a Se $a > 0$, por exemplo $y = x^2$ $y = 2x^2$ $y = 5x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $y = \frac{1}{5}x^2$		<u>Nível 4</u> - Utiliza-se a linguagem simbólica x e y; - Utiliza-se as representações gráficas da família das funções quadráticas; - Envolve-se os vários valores representados o parâmetro a; - A atividade requer a interpretação do papel do

Se $a < 0$, por exemplo $y = -x^2$ $y = -2x^2$ $y = -5x^2$ $y = -\frac{1}{2}x^2$ $y = -\frac{1}{5}x^2$		parâmetro para identificar propriedades da família de funções, mas não requer cálculos com o parâmetro para produzir outros objetos ou relacionamentos.

Item b

A atividade envolve uma família de funções quadráticas expressas pelo parâmetro $\boldsymbol{a}$.

- O sinal do parâmetro determina se a parábola tem concavidade a cima ou a baixo;
- O valor absoluto do parâmetro influencia a maior ou menor abertura da parábola;
- Todas as parábolas têm o vértice no ponto (0, 0) e o eixo de simetria é a reta de equação x = 0, da qual resulta que são independentes de a.

Os símbolos de letras x, y intervêm como valores de mudança em R (números reais).

A letra (parâmetro) atua primeiro como marcador de valores particulares; também leva vários valores possíveis em R, então, nessa prática, ele também age como variável.

O sinal = intervém com o significado da especificação, ou definição de funções quadráticas, e também na especificação do eixo de simetria das parábolas, x = 0.

item c

Os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa são: função quadrática; família de funções quadráticas; representação gráfica duma função quadrática; efeitos do parâmetro a;

generalização da família de funções quadráticas baseada no acontecimento do gráfico relativo ao parâmetro a.

Análise epistémica relacionada com a tarefa 5 e as suas soluções previstas

A tarefa 5 assume uma natureza exploratória e investigativa, pede o estabelecimento de relação entre representações gráficas e representações algébricas de uma *situação-problema* relacionada à identificação das propriedades da família de funções quadráticas. O item a desta tarefa envolve uma relação entre *linguagem* simbólica e representação gráfica. O *procedimento* de resolução com a apresentação gráfica possibilita aos futuros professores a atribuição de alguns valores (positivos e negativos) ao parâmetro a e que façam o esboço das representações gráficas e uma análise às relações entre elas com as variações do parâmetro a. Quanto ao *procedimento* da resolução do item b, esta tarefa dá uma oportunidade para se relacionarem corretamente as representações gráficas das funções da família de funções, indicando resumidamente qual o "papel" do parâmetro a.

Ou seja, a generalização das observações gráficas resulta da compreensão sobre o *conceito* das propriedades da família de funções quadráticas.

O item b e o item c da tarefa 5 são as questões relacionadas com a faceta cognitiva do CDM. Todos os processos realizados na solução do item b facilitam a identificação dos conhecimentos algébricos envolvidos nesta solução e que são: função quadrática; família de funções quadráticas; representação gráfica duma função quadrática; efeitos do parâmetro a.

3.2.3 Descrição das tarefas sobre Modelação

Apresentam-se, em seguida, quatro tarefas envolvendo o conhecimento algébrico sobre modelação, para o Ensino Secundário. A primeira tarefa envolve o conhecimento algébrico sobre a equação linear, utilizando um problema do custo do almoço de um aluno relativamente à cobrança do almoço e o dinheiro que foi recebido dos pais. A segunda tarefa envolve três expressões algébricas sobre: equação; função afim; e fórmula de uma função com duas variáveis diferentes. Na terceira tarefa pretende-se avaliar o conhecimento algébrico relativamente à equação linear que se utiliza no problema de movimento do *kayak* num rio. Por fim, a quarta tarefa é uma tarefa sobre a taxa do imposto do salário dos funcionários públicos que envolve os conhecimentos sobre o limite e a continuidade de uma função.

***Tarefa 3*: Custo do almoço**

A presente tarefa foi adotada da tarefa de modelação (tarefa 7), da investigação realizada por Godino et al. (2015), com o objetivo de avaliar o conhecimento e o processo algébrico envolvido na resolução. Nesta tarefa pretende-se encontrar a resposta que se recorre ao RA e ao conceito de equação linear, existindo a possibilidade de resolução recorrendo ao procedimento aritmético e envolvendo o cálculo numérico.

Figura 3.5 – Tarefa 3 “Custo do almoço” (Godino et.al., 2015, p. 139)

Um estudante recebeu dos seus pais uma certa quantia de dinheiro para se alimentar durante 40 dias. No entanto, ele encontrou lugares onde pode poupar 4 dólares por dia em comida. Assim, o orçamento inicial durou 60 dias.

a. Quanto dinheiro ele recebeu dos pais?
b. Pode resolver-se a tarefa com procedimentos exclusivamente aritméticos? De que maneira?
c. Pode resolver-se a tarefa com procedimentos exclusivamente algébricos? De que maneira?

Soluções previstas relativamente à tarefa 3.

A seguinte tabela apresenta dois exemplos de soluções. A solução 1 é uma solução que envolve os procedimentos aritméticos, como referido no item b. Nesta solução não se envolve nenhum processo algébrico, portanto categoriza-se no nível 1 do RA. Relativamente à solução 2, é exemplo dado na resposta do item c que envolve os procedimentos algébricos. A solução 2 envolve assim a resolução de uma equação linear da forma $Ax \pm B = Cx \pm D$, sendo que este tipo de resolução está categorizada no nível 3 do RA.

Tabela 3.5 - Soluções previstas e análise do RA relativamente à tarefa 3 do QI

Solução 1 O gasto de \$ 4.00 por dia durante 40 dias previstos, então o total de poupança é \$ 4.00 x 40 dias = \$ 160.00. Com esta quantidade poderia comer durante 20 dias. O custo real diária é $\frac{\$\,160.00}{20\ dias} = \$\ 8.00\ /\ dia$ Como o dinheiro dado pelos pais dura 60 dias, então o total de dinheiro que recebe dos pais é 60 dias x \$ 8.00 = \$ 480.00	Nível 1 - Não envolve objetos algébricos - Não envolve a operação algébrica - Utiliza-se apenas o cálculo numérico
Solução 2 Sabendo que: P = o total de dinheiro que recebe x = o gasto para comer durante 40 dias Então $x = \frac{P}{40} \rightarrow P = 40x$ Se y é o gasto diário que permite para comer durante 60 dias, Então $y = \frac{P}{40} \rightarrow P = 60\,y$ Portanto $40x = 60\,y$, além de $y = x - 4$ $40x = 60\,(x-4)$ $40x = 60\,x - 240$ $20x = 240 \rightarrow x = 12$ Assim, o dinheiro que recebe: $P = 40x = 40\ \cdot 12 = \$\,480.00$	Nível 3 - Envolve-se os objetos algébricos como incógnita - Envolve as operações algébricas - Envolve-se um sistema equações lineares com duas incógnitas - Envolve-se uma equação linear da forma $Ax \pm B = Cx \pm D$

Análise epistémica relacionada com a tarefa 3 e soluções previstas

A presente tarefa de modelação envolve uma *situação-problema* real inspirada numa estratégia de poupança de dinheiro para se alimentar durante um mês, tendo um valor desconhecido do dinheiro previamente recebido. Na resolução deste problema, a solução 1 envolve *linguagem* verbal enquanto a solução 2 envolve os símbolos algébricos para apresentar os processos de resolução.

A solução 1 envolve o *procedimento* do calculo numérico com a propriedade da divisão e da multiplicação na resolução do problema. No *procedimento* da resolução apresentada na solução 2, mostra-se o envolvimento do *conceito* da proporcionalidade inversa de $x = \frac{k}{y} \Leftrightarrow x.y = k$ e da equação linear do tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$. Envolve-se, ainda na solução 2, a propriedade da distributiva $40x = 60\ (x-4) \Leftrightarrow 40x = 60\ x - 240$ no processo de resolução.

<u>Tarefa 4</u>: Identificação das expressões algébricas

Nesta tarefa, os conceitos de equação e de função estão envolvidos num contexto de modelação. Os símbolos de letras (variáveis) desempenham papéis diferentes em diferentes expressões: quantidades desconhecidas e variáveis. O sinal de igual é usado como equação condicional ($4x + 5 = 25$) e uma especificação ou definição ($y = 2x + 1$; $P = 2c + 2l$).

Figura 3.6 – Tarefa 4 "Identificação das expressões algébricas" (Godino et.al., 2015, p. 140)

Analise as seguintes expressões: 1). $4x + 5 = 25$; 2). $y = 2x + 1$; 3). $P = 2c + 2l$

a. Descreva a interpretação que faz de cada uma das expressões acima.
b. Enuncie três problemas que se possam propor aos alunos do secundário cuja solução implique a utilização destas expressões.

Soluções previstas relativamente à tarefa 4.

Relativamente ao <u>item a</u>, à 1.ª expressão, espera-se que os estudantes reconheçam uma equação linear com uma incógnita. Para a 2.ª expressão, espera-se que identifiquem uma função afim que permita encontrar o valor da variável y em função da variável x. Ou seja, uma função f: R→R , definida por $y = f(x) = ax + b$, quando existem constantes a, b que pertencem ao conjunto dos reais tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in$

$\mathbb{R}$. Relativamente à 3.ª expressão, espera-se que reconheçam uma função P com duas variáveis independentes ou a fórmula do perímetro do retângulo. Regista-se esta identificação na seguinte tabela:

Tabela 3.6 - Solução prevista relativamente à tarefa 4 do QI

Expressão	Identificação
$4x + 5 = 25$	Equação linear ou equação do 1º grau com uma incógnita
$y = 2x + 1$	Função afim
$P = 2c + 2l$	Função P com duas variáveis independentes c e l ou fórmula do perímetro do retângulo

Apresenta-se um exemplo para a expressão da equação linear poderá ser: "Para a compra bilhete do cinema de 4 pessoas e alguns refrigerantes pagamos no total 25 €. Se os refrigerantes custam 5 €, quanto custa cada bilhete?". Na segunda expressão, pode dar-se como exemplo: "Um taxista cobra \$ 1.00 do valor fixo e mais \$ 2.00 por quilómetro de viagem. Determine o valor a ser pagado por uma viagem de 18 quilómetros". Note-se que se podem construir outros exemplos que manifestam o envolvimento da fórmula do perímetro de um retângulo com o comprimento c e a largura l.

Relativamente ao nível do RA, esta tarefa pretende encontrar soluções que manifestam o nível 2 de RA através dos seguintes aspetos: utilização da linguagem alfanumérica na enunciação destas expressões; envolvimento da interpretação destas expressões sem, no entanto, realizar qualquer tipo de cálculo algébrico.

Análise epistémica relacionada com a tarefa 4 e soluções previstas

A realização desta tarefa implica uma análise da *situação-problema* onde se pede para identificar as 3 expressões, utilizando as *linguagens* simbólicas dadas na tarefa. Na solução do item a desta tarefa não se envolve nenhum *procedimento* ou *argumento*, apenas o conhecimento de definição dos conceitos algébricos: equação do 1.º grau, função afim, fórmula de uma função com duas variáveis independentes, fórmula do perímetro do retângulo.

A identificação das expressões no item a desta tarefa é uma atividade matemática relacionada com a faceta cognitiva do CDM. Para responder a estas questões, os estudantes devem ter conhecimento sobre os objetos algébricos relacionados com as expressões (equação do 1.º grau, função afim, fórmula do perímetro do retângulo).

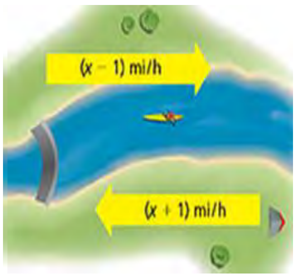
O item b desta tarefa é uma questão associada à faceta instrucional do CDM, relacionado com a enunciação de situações-problema. Nesta questão pretende-se que os estudantes construam uma tarefa ou uma questão relacionada com as 3 expressões dadas. Considera-se que esta atividade é importante para que os futuros professores desenvolvam competências de construção de tarefas.

Tarefa 6*: Movimento do *kayak

Esta tarefa surge no âmbito da discussão e evolução desta investigação, tendo sido desenvolvida e apresentada por Godino e Neto (2016) no Congresso Internacional de Educação da Matemática em Hamburgo, ICME 13.

A tarefa 6 está relacionada com o conceito de uma equação linear que se envolve no problema do movimento do *kayak* num rio. Esta tarefa envolve vários conhecimentos, nomeadamente: a distância entre dois pontos; a velocidade do *kayak*; a velocidade do rio; e a expressão do tempo (t) relativamente à distância (d) e à velocidade (v), que é $t = \frac{d}{v}$.

Figura 3.7 – Tarefa 6 "Movimento do *kayak*"



Supõe que moves um *kayak* num percurso de 5 milhas favorável ao movimento do rio desde o teu acampamento até uma barragem e, seguidamente regressas ao acampamento. A velocidade constante a que se move em toda a viagem é de x milhas por hora, e a velocidade de movimento atual do rio é de 1 milha por hora.

a. Escreva uma expressão que permite calcular o tempo total de viagem.
b. Enuncie uma variação desta tarefa cuja solução implique apenas os conhecimentos aritméticos. Resolva este problema.
c. Enuncie uma variação do problema cuja solução implique o uso de parâmetros. Escreva a expressão correspondente.

Soluções previstas relativamente à tarefa 6.

No item a pretende-se calcular o tempo total da viagem do *kayak* do ponto A para o ponto B, e seguidamente regressar do ponto B para o ponto A.

Tabela 3.7 - Solução prevista relativamente à tarefa 6 do QI

item a	
Se a velocidade do *kayak* do ponto A para o ponto B é (x – 1) mil/hora, então o tempo assumido pelo *kayak* do ponto A para o ponto B é $t_1 = \frac{d}{v_1} = \frac{5}{(x-1)}$. Se a velocidade do *kayak* do ponto B para o ponto A é (x + 1) mil/hora, consequentemente o tempo assumido pelo *kayak* do ponto B para o ponto A é $t_2 = \frac{d}{v_2} = \frac{5}{(x+1)}$. Portanto, o total de tempo é $t = t_1 + t_2 = \frac{5}{(x-1)} + \frac{5}{(x+1)} = \frac{5\,(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{5\,(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{10\,x}{(x+1)(x-1)}$.	Nível 3 - Envolve uma tradução da linguagem corrente para a linguagem algébrica; - Envolve as operações algébricas; - Utiliza-se uma equação linear do tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$

item b
Podemos fornecer como dados a velocidade de *kayak* (por exemplo, 4 milhas por hora) e solicitar o tempo que a viagem demora; neste caso, é necessário apenas fazer cálculos aritméticos (nível 0).

item c
A distância até ao acampamento pode ser considerada variável, assim como a velocidade do fluxo do rio. Neste caso, a expressão funcional deve envolver o uso de dois parâmetros (nível 4). Considerando-se valores para o tempo de viagem e questionando a velocidade do fluxo do rio, ou a distância até ao acampamento, então será necessário encontrar estes parâmetros (nível 5).

Análise epistémica relacionada com a tarefa 6 e solução prevista

A *situação-problema* apresentada da tarefa 6 relaciona-se com a Álgebra de modelação que envolve o conceito da Física sobre a relação entre a distância, a velocidade e o tempo. Na resolução do item a utiliza-se uma tradução da *linguagem* verbal para a *linguagem* simbólica apresentada pelos símbolos algébricos. Envolve-se os *conceitos* de uma relação $t = \frac{d}{v}$, sendo que t é o tempo (horas), d é a distância (milhas) e v é a velocidade (milhas/horas). No *procedimento* da resolução, opera-se algebricamente com a propriedade da substituição dos valores dados na enunciação da expressão $t = \frac{d}{v}$, da viagem do *kayak* do ponto A para o ponto B e no seu regresso do ponto B para o ponto A.

A expressão algébrica encontrada é como um critério para uma função que envolve a variável independente e dependente e que assume valores no conjunto de números reais positivos. Esta expressão opera com uma variável independente para uma expressão canônica e categoriza-se no nível 3 do RA. As letras x e t representam quantidades variáveis e também intervêm como símbolos sintáticos ao operar com elas. A igualdade intervém com significado relacional, modalidade de identidade contextual numa fórmula.

Relativamente ao CDM, o item a categoriza-se no conteúdo didático do tipo de conteúdo algébrico mais avançado por envolver o conhecimento algébrico sobre a aplicação (a modelação) dos conceitos que estão trabalhados na atividade da Matemática para o Ensino Secundário: distância; velocidade; e tempo.

O item b é uma questão que está categorizada na *faceta instrucional* do tipo da tarefa modelação para o Ensino Básico devido ao envolvimento o conhecimento aritmética na sua solução. Por outro lado, o item c está categorizado na *faceta instrucional* do tipo de tarefa modelação para o Ensino Secundário por envolver o conceito do parâmetro na sua solução.

***Tarefa 8*: Taxa de imposto**

A tarefa 8 é uma tarefa de modelação que, na sua resolução, envolve os conhecimentos sobre limite e continuidade de uma função. Espera-se encontrar uma solução que manifesta o nível de RA mais avançado (neste caso, o nível 5) que envolve a operação de parâmetro. Mesmo assim, esta tarefa ainda se pode resolver com modo de tentativa (nível 0 de RA), que apenas envolve o cálculo numérico.

Figura 3.8 – Tarefa 8 “Taxa de imposto”

A taxa do imposto do salário dos funcionários públicos em Timor-Leste é de 12% nos primeiros $ 200 e 16 % no restante, como se apresenta na seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} a + 0.12\,x\,; se\ 0 < x \leq 200 \\ b + 0.16\,(x - 200); se\ x > 200 \end{cases}$$

a. Para que a f seja contínua, se o João recebe $ 554, qual é o salário dele antes de se retirar o imposto?
b. Quais são os conhecimentos algébricos que se utilizam para resolver esta tarefa?
c. Considera que esta tarefa é adequada para ser proposta aos alunos do Ensino Secundário? Se concorda, indique em que ano de escolaridade e justifique a sua resposta.

Soluções previstas relativamente à tarefa 8.

As duas opções que estão apresentadas abaixo manifestam as diferentes possibilidades de resolução, uma seguindo o raciocínio aritmético que se baseia no cálculo numérico e outra utilizando o RA.

Tabela 3.8 - Soluções previstas e análise do RA relativamente à tarefa 8 do QI

item a

Solução 1

Resposta dada através da tentativa de substituir os vários valores de salário na função, como se apresenta na seguinte tabela:

x	Taxa 12%	Taxa 16%	Total Taxa	Total Salário recebido
0	0		0	0
100	12% (100) = 12		12	100 -12 = 88
200	12% (200) = 24		24	200 – 24 = 176
250	12% (200) = 24	16% (250 -200) = 16% (50) = 8	32	250 – 32 = 218
300	12% (200) = 24	16% (300 -200) = 16% (100) = 16	40	300 – 40 = 260
450	12% (200) = 24	16% (450 -200) = 16% (250) = 40	64	450 – 40 = 410
650	12% (200) = 24	16% (650 -200) = 16% (450) = 72	96	650 – 72 = 554

Através da observação da tabela, para o salário de $0 < x \leq 200$, o valor de taxa varia. Para o salário $x > 200$, há um valor igual ao da taxa $x = 200$ e valores diferentes no restante de x. Assim, conclui-se que o valor de $a = 0$ e o valor de $b = 24$. E a função $f(x)$ é

$$f(x) = \begin{cases} 0.12\,x\,;\ se\ 0 < x \leq 200 \\ 0.12\,(200) + 0.16\,(x - 200);\ se\ x > 200 \end{cases}$$

A tabela mostra que se o João receber \$ 554 por mês, então o seu salário antes de substração de taxa são \$ 650.

Nível 0

- Envolve a linguagem numérica;
- Não envolve nenhum símbolo algébrico;
- Faz-se uma tentativa com vários valores de salário (x) e substitui-os na função;
- Realizou-se os cálculos numéricos e regista-se os dados numa tabela.

Solução 2

Para uma outra solução, com o objetivo de tratar a continuidade de uma função num ponto, poderia pedir-se aos estudantes a análise da continuidade da função, nos pontos 0 e 200, considerando o domínio da função, modelo da situação, o conjunto $\mathbb{R}$. Portanto a função $f(x)$ a considerar seria:

$$f(x) = \begin{cases} 0\,;\ se\ x \leq 0 \\ a + 0.12\,x\,;\ se\ 0 < x \leq 200 \\ 24 + 0.16\,(x - 200);\ se\ x > 200 \end{cases}$$

Se $f(x)$ é continua no $\mathbb{R}$, então o limite lateral à esquerda é igual ao limite lateral à direita.

Continuidade da função $f(x)$ no ponto 0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (a + 0.12\,x) = a$$

Nível 5

- Envolve-se a linguagem simbólica literal;
- Envolve-se os objetos algébricos: variáveis e parâmetros;
- Realiza-se uma operação algébrica para determinar os valores do parâmetro a e do parâmetro b.

Assim, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$ Então $a = 0$ Continuidade da função $f(x)$ no ponto 200 $\lim_{x \to 200^-} f(x) = \lim_{x \to 200^-} (a + 0.12x) = a + 0.12\,(200) = a + 24$ $\lim_{x \to 200^+} f(x) = \lim_{x \to 200^+} (b + 0.16\,(x - 200))$ $= b + 0.16\,(200 - 200) = b$ Assim, $\lim_{x \to 200^-} f(x) = \lim_{x \to 200^+} f(x)$ Então $a + 24 = b$, substitui-se o valor de $a = 0$, e conclui-se que o valor de $b = 24$ Portanto a função $f(x)$ seria: $f(x) = \begin{cases} 0\,; se\ x \leq 0 \\ 0.12\,x\,; se\ 0 < x \leq 200 \\ 24 + 0.16\,(x - 200); se\ x > 200 \end{cases}$ O valor do salário do João é obtido pela lógica em que o salário inicial é a soma do salário depois de substração do imposto e o valor do imposto. Ou seja Salário = Salário recebido + Taxa $x = 554 + (24 + 0.16\,(x - 200))$ $x = 554 + 24 + 0.16\,x + 0.16\,(-200)$ $x = 578 + 0.16\,x - 32$ $x = 546 + 0.16\,x$ $x - 0.16\,x = 546$ $0.84\,x = 546$ $x = 650$ Assim, o salário do João antes da substração de taxa é \$ 650. Esta solução terá como objetivo o trabalho sobre o conceito da continuidade de uma função no ponto.	

item b

Os conhecimentos algébricos envolvidos na resolução desta tarefa são os conceitos de: função; limite duma função num ponto; o limite duma função num intervalo; o limite lateral; e a continuidade duma função.

item c

Esta tarefa considera-se para avaliar o conhecimento sobre o limite e a continuidade para os alunos do 11º do ensino secundário.

Análise epistémica relacionada à tarefa 8 e soluções previstas

A tarefa 8 é uma *situação-problema* de uma função incompleta representada na taxa de imposto do salário. Nesta tarefa envolvem-se os conceitos de limite e da continuidade para identificar os valores da variável a e da variável b.

Relativamente à *linguagem* utilizada, a solução 1 utiliza o formato de registo dos dados numa tabela, enquanto que a solução 2 utiliza números na resolução do problema.

Na solução 1 indica-se uma solução seguindo um *procedimento* aritmético e envolvendo o cálculo numérico, registando-se os valores numa tabela. O recurso ao cálculo numérico implica a obtenção de uma solução sem o envolvimento de *conceitos* ou *proposições* matemáticos.

Refere-se a primeira afirmação, em que o funcionário deve pagar o imposto equivalente a 12 % do rendimento se tiver o salário de \$ 200. Ou seja, a função de $f_1(x) = 0.12\,x\,;\ se\ 0 < x \leq 200.$ Escolhem-se vários valores, como por exemplo: 100 e 200, e substitui-as na função $f_1(x) = 0.12\,x$. Relativamente a quem tem salário superior a \$ 200, o pagamento do imposto baseia-se na segunda afirmação, ou seja, associa-se em função $f_2\,(x) = 0.12\,(200) + 0.16\,(x - 200);\ se\ x > 200$. Por isso, substitui-se vários valores superiores a 200 à função $f_2\,(x) = 0.12\,(200) + 0.16\,(x - 200)$.

Na solução 2, utiliza-se a função enunciada na tarefa e resolve-se algebricamente, utilizando-se o conceito de limite de uma função num ponto e a continuidade de uma função num ponto para obter o valor de a e o valor de b. Mais tarde, o valor de b (\$ 24) considerado como função constante na função de imposto para rendimento maior do que \$ 200, ou seja, para função de $f_2\,(x) = 24 + 0.16\,(x - 200); se\ x > 200$. Para resolver o item a, é necessário calcular o salário antes da subtração do imposto. Sabendo que o salário é superior a \$ 200, então para obter o valor x, substitui-se o valor do rendimento depois da subtração do imposto na função $f_2\,(x)$.

Relativamente ao CDM desta tarefa, o item a categoriza-se dentro do conteúdo didático do tipo de conteúdo algébrico mais avançado devido ao envolvimento do conhecimento algébrico sobre a aplicação (a modelação) do conceito de limite e de continuidade de uma função que estão trabalhados nas atividades de Matemática para o Ensino Secundário ou o Ensino Superior.

O item b e o item c são questões que dizem respeito à faceta cognitiva do CDM. O item b considera uma identificação dos conhecimentos algébricos envolvidos na solução do item a, que neste caso são: função; limite de uma função num ponto; o limite de uma função num intervalo; o limite lateral; e a continuidade de uma função. O item c pretende que os estudantes reflitam sobre os temas matemáticos lecionados aos alunos do 11.º ano do Ensino Secundário Geral em Timor-Leste.

3.3 Aplicação do QI sobre o RA para os estudantes, futuros dos professores de Matemática

3.3.1 Metodologia de aplicação do QI

O QI foi aplicado aos estudantes do curso da licenciatura do Ensino da Matemática, da Faculdade da Educação, Arte e Humanidade da Universidade Nacional de Timor Lorosa'e que estão a frequentar a unidade curricular Prática Pedagógica I.

Esta atividade contou com a participação dos 24 estudantes do 4.º ano do referido curso. A escolha destes sujeitos teve em consideração facto de serem alunos finalistas do curso e que já tinham frequentado as várias unidades curriculares lecionadas ao longo do curso, tanto disciplinas Matemáticas como disciplinas pedagógicas. Considerou-se, também, que a disciplina da Prática Pedagógica I é uma disciplina que permite aos estudantes praticarem os conhecimentos didáticos e aplicarem os conhecimentos matemáticos nas suas futuras práticas. Assim, é importante que estes estudantes tenham uma oportunidade para refletir seus conhecimentos através das respostas ao questionário.

A aplicação deste QI foi realizado fora do horário da aula desta disciplina, tendo sido respondido de forma individual. A aplicação do questionário realizou-se no dia 10 de Agosto de 2015, numa sala de aula, e teve a duração de 120 minutos. Solicitou-se aos estudantes para seguirem as instruções enunciadas no questionário e para responder com a maior sinceridade possível, baseando-se nos seus conhecimentos e evitando as respostas em branco.

3.3.2 Descrição de variáveis e valores para a análise das respostas ao QI

No sentido de responder às preocupações desta investigação, considera-se importante descrever a categorização e os valores que apoiam a análise das resoluções dos problemas realizadas pelos estudantes, nomeadamente o método de resolução e o desenvolvimento apresentado na soluções das tarefas.

Na primeira etapa de análise apresenta-se uma análise quantitativa das respostas obtidas do QI, tendo em conta respostas corretas ou erradas (ou em branco). A partir desta primeira codificação realizou-se uma segunda categorização das respostas, codificando variáveis e valores, adaptando-se categorias da Aké (2013): respostas corretas, incorretas, parcialmente corretas e respostas em branco na resolução do problema; diferentes métodos de resolução definidos de acordo com o modelo de níveis do RA; tipos de conhecimento identificados; e estratégias de ensino sugeridas. A partir desta última categorização, realizou-se uma análise de frequência a cada uma das seguintes variáveis:

1. Frequência do grau de correção de acordo com as seguintes categorias: tarefa correta, errada, ou em branco (não apresenta nenhum método de resolução, apenas o resultado final) na resolução de problema;
2. Frequência do método de resolução utilizado na solução de acordo com o modelo de níveis do RA (tendência algébrica; tendência aritmética; tabela; gráfico; relação; tentativa e erro; em branco, isto é não apresenta nenhum método de resolução, apenas o resultado final);
3. Frequência das diferentes estratégias de ensino sugeridas (verbal; utilização de casos particulares; utiliza da representação);
4. Níveis do RA (a designação de nível do RA dependendo da característica epistémica de tarefa).

A designação de valores para cada uma das variáveis realizou-se de acordo com os elementos considerados no modelo de análise dos níveis do RA. Apresentam-se, de seguida, as categorizações das variáveis e dos valores classificadas no QI.

Tabela 3.9 - Variáveis e valores adotados para a análise das respostas do QI sobre o conteúdo algébrico

Itens	Variáveis	valores
1a, 2a, 2b, 3a, 4a, 5b, 6a, 7a, 8a, 8b	Grau de correção	Resposta correta
		Resposta errada
		Em branco (não responde)
1a, 2a, 2b, 3a, 4a, 5b, 6a, 7a, 8a, 8b	Método de solução	Tendência algébrica
		Tendência aritmética
		Gráfico
		Tabela
		Observação figura
		Em branco (apenas apresenta o resultado final)
1a, 7a	Tipos de estratégias utilizadas	Verbal
		Exemplo particulares
		Representação
		Em branco (apenas apresenta o

		resultado final)
1a, 2a, 2b, 3a, 4a, 5b, 6a, 7a, 8a, 8b	Níveis do RA	Nível 6
		Nível 5
		Nível 4
		Nível 3
		Nível 2
		Nível 1
		Nível 0
		Não identificado

À luz da análise qualitativa, na segunda etapa realizou-se uma análise de conteúdo relativamente às respostas dos alunos que manifestam o desenvolvimento do RA na sua resolução do problema. Nesta análise utiliza-se a distinção do nível de RA, segundo critérios de Godino et al. (2014), tendo por base a configuração epistémica envolvida em cada uma das soluções das tarefas:

a. Presença de objetos algébricos intensivos (ou seja, entidades de carácter geral ou indeterminado);
b. Transformações (operações) aplicadas a esses objetos, as quais são baseadas na aplicação de propriedades estruturais;
c. Tipo de linguagem utilizada.

Analisou-se, também, os erros algébricos que se manifestam nas respostas dos estudantes. Nesta análise utilizaram-se várias categorizações dos tipos de erros algébricos, seguindo as categorizações já propostas por vários investigadores, nomeadamente: Ponte, Branco e Matos (2009); Saraiva e Teixeira (2008); Ponte (2006); Kieran (1992, 2006); Sajka (2003), Hall (2002); Akkoç e Tall (2002).

Relativamente à análise de respostas das questões sobre o CDM aplica-se, como guião de análise do conteúdo didático, a proposta do Godino et al. (2015) em torno das facetas epistémica, cognitiva e instrucional. Porém, neste trabalho não foram avaliadas as respostas dos estudantes em todas as categorias propostas no modelo CDM. Como já se mencionou atrás, não foi avaliada a faceta afectiva, relacionada com atitudes, motivações, emoções. Também não se avaliou a faceta ecológica, envolvendo aspetos do currículo ou materiais didáticos de apoio à aprendizagem da Álgebra.

3.4 Análise dos resultados das tarefas do QI

3.4.1 Análise dos resultados das tarefas do QI relativamente ao conhecimento algébrico e aos erros algébricos

Neste subcapítulo faz-se a análise das respostas ao QI, apresentando-se simultaneamente a análise ao conhecimento algébrico e aos erros algébricos manifestados pelos estudantes. Utiliza-se o modelo de categorização do RA para analisar o conhecimento algébrico que consta na proposta do Godino et al. (2015) e caracteriza-se o nível de RA através da linguagem utilizada e do processo envolvido nas respostas dos estudantes.

3.4.1.1 Análise dos resultados das tarefas do QI sobre a estrutura

***Tarefa 1*: Balança do sumo**

A tarefa 1 pretende dar evidencia do modo como os estudantes abordam conhecimentos para desenvolver o ensino da Álgebra no Ensino Básico, tais como o significado de equilíbrio e a equação. Na tabela seguinte mostra-se a categorização das respostas de acordo com o grau de correção e o método de solução da tarefa 1, item a.

Tabela 3.10 - Grau de correção e método de solução da tarefa 1, item a.

Grau de correção	item a		Método de solução	item a	
	Frequência	%		Frequência	%
Correta	16	66,7	Tendência algébrica	2	8,3
Errada	8	33,3	Tendência aritmética	8	33,3
Em branco	0	0	Em branco	14	58,3
Total	24	100	Total	24	100

Considera-se que o item a desta tarefa é uma tarefa simples, mesmo assim apenas 16 de 24 estudantes responderam corretamente a esta questão. Apenas 2 estudantes utilizaram uma operação algébrica e os 8 estudantes utilizaram uma operação numérica para resolver o problema. De notar que 14 estudantes não utilizaram nenhuma operação apenas apresentando o resultado final sem argumentos.

Todos os estudantes que respondem erradamente nesta tarefa deixaram a resposta em branco ou não apresentaram nenhuma justificação de resposta. Neste caso, apenas determinaram o resultado final, por exemplo: “Na terceira balança deve colocar 6 copos” ou “Preciso de 2 copos de sumo para colocar na terceira balança para ficar equilibrada”.

Verificou-se que 6 estudantes responderam corretamente, mas não justificaram as razões que utilizaram para resolver a tarefa 1. Existe a possibilidade de terem efetuado uma tentativa para resolver o problema ou apenas observaram o diagrama. Nesta análise, encontra-se somente 1 único estudante que respondeu corretamente à tarefa 1, tendo utilizado o raciocínio diagramático na forma de observação da figura para resolver esta tarefa (Solução A, t_1, QI). Neste caso, o estudante fez uma detecção (identificação), construção e estabelecimento de regularidades e relações entre os objetos (Rivera, 2010), ou seja, estabeleceu uma relação entre os objetos das três balanças. Foram apenas 8 estudantes que nas suas respostas corretas utilizaram a notação algébrica e resolveram a tarefa com o, envolvimento do processo algébrico (por exemplo Solução B, t_1, QI).

Na seguinte tabela apresenta-se a categorização do nível de RA relativamente ao item a da tarefa 1.

Tabela 3.11 - Nível do RA em respostas corretas e erradas da tarefa 1, item a.

Nível do RA de resposta correta	item a		Nível do RA de resposta errada	item a	
	Frequência	%		Frequência	%
3	2	8,3	3	0	0
1	4	16,7	1	0	0
0	4	16,7	0	0	0
Em branco	6	25	Em branco	8	33,3
Total : 24 (100 %)					

As 16 respostas corretas podem categorizar-se da seguinte forma quanto ao RA: 4 respostas são do nível 0, 4 respostas do nível 1 e 2 respostas do nível 3 do RA. Encontrou-se 6 respostas corretas e 8 respostas erradas que apenas apresentam o resultado final. Nestes casos não é categorizado nenhum nível do RA, pois não apresentam os processos que levaram à resposta.

Em seguida, apresentam-se alguns exemplos da resolução correta dadas pelos estudantes e a sua análise relativamente ao nível de RA.

Tabela 3.12 – Exemplos de resoluções corretas e análise dos níveis de RA relativamente à tarefa 1 do QI

Situação-problema da tarefa: três balanças diferentes, cada uma tem nos seus pratos um conjunto de frutas e de copos de sumo; identificação da quantidade de copos de sumo na terceira balança para esta ficar em equilíbrio quando no outro prato estão uma maçã e uma ananás.

Resposta A

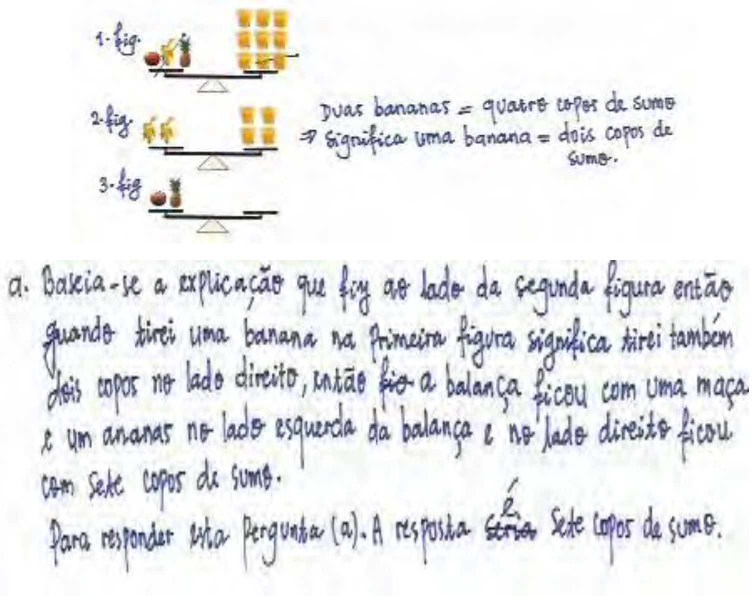


Figura 3.9 – Exemplo da resposta de nível 0 do RA relativamente à tarefa 1 do QI

<u>Elementos linguísticos:</u> relação entre linguagem natural e apresentação figura; convenções assumidas para identificar equivalência da terceira balança.

<u>Conceitos:</u> equilíbrio da balança.

<u>Proposição:</u> o peso do prato esquerdo é igual ao peso do prato direto.

<u>Procedimentos:</u> - representar e relacionar as figuras;
- igualdade de razões

<u>Argumentos:</u> baseia-se no conceito de equilíbrio da balança

<u>Nível de RA:</u> **nível 0**

- não envolvendo símbolos algébricos nem soluções algébricas;
- utiliza-se uma linguagem natural;
- a configuração da resposta traduz o conceito da igualdade como equivalência.

Resposta B

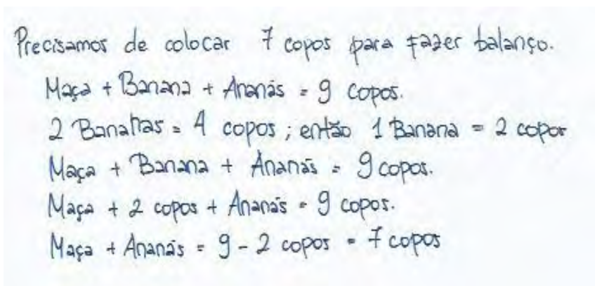


Figura 3.10 – Exemplo da resposta de nível 1 do RA relativamente à tarefa 1 do QI

<u>Elementos linguísticos:</u> relação entre linguagem natural e números; convenções assumidas para identificar equivalência da terceira balança.

<u>Conceitos:</u> equilíbrio da balança.

<u>Proposição:</u> maçã + banana + ananás = 9 copos
2 bananas = 4 copos

Procedimentos:
- traduzir a linguagem natural para linguagem numérica;
- representar e relacionar as figuras;
- igualdade de razões.

Argumentos: baseia-se a substituição, de uma banana é igual a 2 copos, na terceira balança resolve o problema.

Nível de RA: **nível 1**
- utiliza uma linguagem natural e numérica;
- envolve símbolo da operação numérica;
- aplicam-se as relações de equilíbrio;
- a configuração da resposta traduz uma prática da Álgebra operacional.

Resposta C

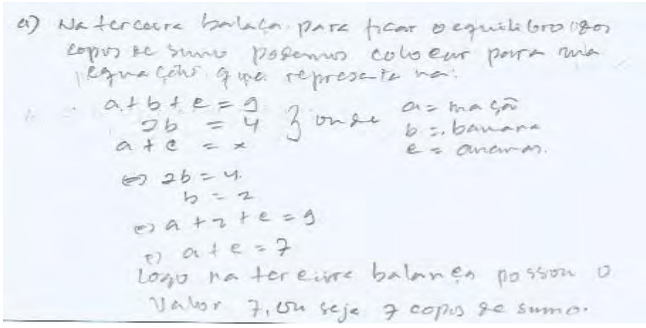


Figura 3.11 – Exemplo da resposta de nível 3 do RA relativamente à tarefa 1 do QI

Elementos linguísticos: relação entre linguagem simbólica; convenções assumidas para identificar equivalência da terceira balança.

Conceitos: equação linear; sistema equações lineares.

Proposição: $a + b + c = 9$; $2b = 4$; $a + c = 7$

Procedimentos:
- traduzir a linguagem natural para linguagem simbólica;
- representar e relacionar as balanças como um sistema das equações lineares;
- resolver o sistema das equações lineares pelo método da substituição.

Argumentos: baseada na resolução do sistema das equações lineares.

Nível de RA: **nível 3**
- utilizam-se símbolos como incógnitas (simbólica literal);
- utilizam-se operações algébricas;
- a configuração da resposta é da Álgebra estrutural.

As três respostas (resposta A, B e C) apresentadas manifestam uma contextualização correta de problema e esta realidade é um passo importante para resolver o problema. A resposta A e a resposta B recorrem à linguagem natural e numérica, enquanto a resposta C envolve linguagem simbólica com representação das incógnitas. O conceito do equilíbrio da balança é manifestado nas duas primeiras respostas. Enquanto já na resposta C envolvem-se os conceitos de equação linear e de sistema das equações lineares. Consequentemente, a utilização de diferentes conceitos tem implicações nos procedimentos e nos argumentos que são utilizados na resolução do problema.

Relativamente ao nível de RA, a resposta A está categorizada no nível 0 por nenhum envolvimento do símbolo e nem de soluções algébricas. A utilização do número e da operação numérica na resposta B implica uma categorização no nível 1 do RA. A resposta C manifesta a utilização do símbolo como representação das incógnitas, envolve uma operação algébrica e, ao mesmo tempo, apresenta uma configuração de resposta correta de uma tarefa de Álgebra estrutural. Por estas razões, a resposta C está categorizada no nível 3 de RA.

***Tarefa 7*: Sistema das equações lineares com duas incógnitas**

No item a desta tarefa, verificou-se que 22 estudantes responderam e que 2 estudantes deixaram as suas respostas em branco. Apenas um estudante apresenta uma resposta em forma geral, mesmo assim não conseguiu responder corretamente a esta tarefa. Os 21 estudantes não apresentaram uma solução em forma geral, tendo utilizado exemplos particulares para resolver a tarefa.

Tabela 3.13 - Frequência do tipo de estratégias utilizadas na tarefa 7, item a.

Tipo de estratégia	item a	
	Frequência	%
Exemplo particular	21	87,5
Em forma geral	1	4,2
Verbal	0	0
Em branco	2	8,3
Total	24	100

Na tabela 3.14 apresenta-se o grau de correção de todas as respostas manifestadas pelos estudantes. São 15 estudantes têm respostas corretas e 7 estudantes têm respostas erradas. Baseia-se nas respostas destes estudantes, manifesta-se uma tendência algébrica nos seus métodos de soluções pelo facto do envolvimento dos vários métodos de solução de um sistema das equações lineares com duas incógnitas.

Tabela 3.14 - Grau de correção das respostas com exemplos particulares (24 respostas) e método de solução da tarefa 7, item a

Grau de correção	item a Frequência	%	Método de solução	item a Frequência	%
Correta	15	62,5	Tendência algébrica	22	91,7
Errada	7	29,2	Tendência aritmética	0	0
Em branco	2	8,3	Em branco	2	8,3
Total	24	100	Total	24	100

Na tabela 3.15 apresenta-se a categorização das respostas (correta e errada) de acordo com os métodos de resolução utilizados.

Tabela 3.15 - Grau de correção e método de solução de sistema das equações lineares com duas incógnita da tarefa 7, item a.

Grau de correção	Método de solução	item a Frequência	%
Correta	Eliminação	3	12,5
	Substituição	1	4,2
	Misto	11	45,8
Errada	Eliminação	2	8,3
	Substituição	3	12,5
	Misto	2	8,3
Em branco		2	8,3
Total		24	100

Uma leitura a esta tabela indica que, no grau de correção "correta", o método misto foi o método mais utilizado na solução dos estudantes com 45,8%, ainda nesta categoria, o método da substituição foi o método menos utilizado, sendo também este o método que os estudantes consideraram mais difícil, conclusão retirada pelo facto de aqui se ter verificado um maior número de respostas erradas.

Relativamente ao nível do RA das 15 respostas corretas e das 7 respostas erradas, todas as respostas estão categorizadas no nível 3 do RA devido ao envolvimento dos símbolos algébricos nas estruturas de equação e na realização da operação com estes símbolos.

Tabela 3.16 - Nível do RA de respostas corretas e erradas da tarefa 7, item a.

Nível do RA de resposta correta	item a		Nível do RA de resposta errada	item a	
	Frequência	%		Frequência	%
3	15	62,5	3	7	29,2
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0
Em branco	0	0	Em branco	2	8,3
Total : 24 (100%)					

Na tabela 3.17 evidenciam-se alguns exemplos das resoluções corretas apresentadas pelos estudantes.

Tabela 3.17 – Exemplos de soluções corretas e análise dos níveis de RA relativamente à tarefa 7 do QI

Situação-problema: identificação da expressão geral do valor x e y, solução de um sistema lineares com duas incógnitas.

Duas respostas (A e B) são exemplos das respostas de mesma análise da configuração do objetos e processos e da mesma categorização do nível de RA. Apresentou-se estes dois exemplo para mostram a diferencias do método da resolução, neste caso o método da eliminação e do misto.

Elementos linguísticos: relação entre linguagem simbólica em forma geral.
Conceitos: sistema das equações lineares com duas incógnitas.
Proposição: vários métodos de resolução (substituição, eliminação, misto, etc.).

Resposta A **–** resolução com o método de eliminação

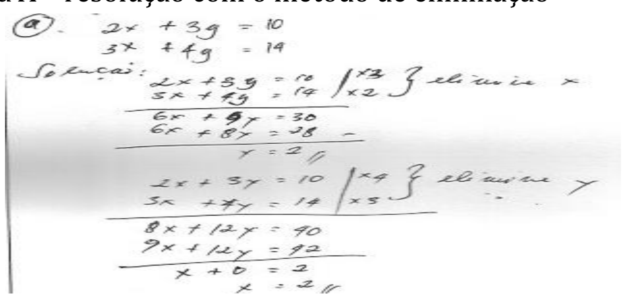


Figura 3.12 – Exemplo da resposta correta com método de eliminação, relativamente à tarefa 7 do QI

Resposta B **–** resolução com o método do misto

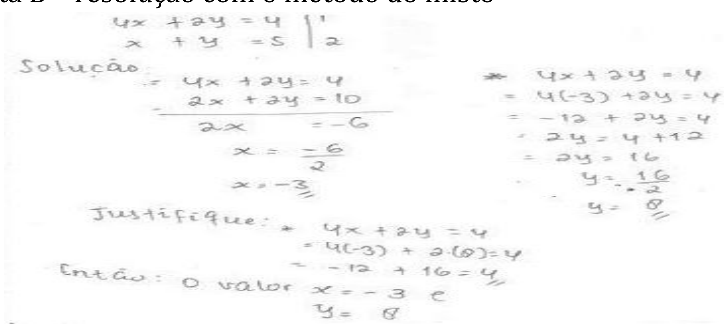


Figura 3.13 – Exemplo da resposta correta com o método de misto, relativamente à tarefa 7 do QI

Procedimentos:

Por exemplo, resposta B :

- eliminar uma incógnita para determinar o valor de outra incógnita;
- substituir o valor da incógnita em qualquer das equações para determinar o valor da outra incógnita.

Argumentos: baseia-se no conceito de resolução de um sistema de equações lineares com duas incógnitas.

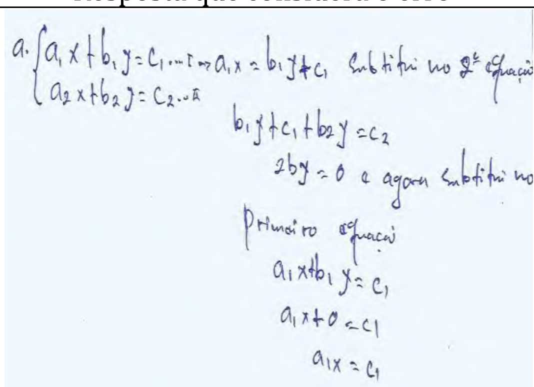
Nível de RA: **nível 3**

- utilizam-se símbolos como incógnitas (simbólica literal);
- utilizam-se operações algébricas, aplicando as propriedades da eliminação (resposta A) ou do misto (resposta B).
- a configuração da resposta é da Álgebra estrutural

De uma forma geral, os dois exemplos das respostas relativas à tarefa 7 manifestam a dificuldade dos estudantes na resolução deste problema. Por isso, eles criam exemplos particulares, envolvendo os vários coeficientes e resolvendo-os através de vários métodos de resolução de um sistema equações lineares. Neste caso, as respostas estão categorizadas no nível 3 de RA que apenas envolve os objetos indeterminados (coeficientes) nas suas operações algébricas. Esta realidade indica um insucesso do cumprimento do objetivo desta tarefa que é encontrar a solução que envolve a operação com os parâmetros e com um maior grau de generalidade (o nível 5 de RA).

Nas respostas a esta tarefa, encontraram-se alguns erros algébricos manifestados pelos estudantes, como por exemplo:

Tabela 3. 18 - Exemplos dos erros algébricos nas respostas da tarefa 7 do QI

Resposta	Resposta que considera o erro	Análise
A	 a. $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \ldots \to a_1x=b_1y+c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \ldots \end{cases}$ Substitui no 2ª equação $b_1y+c_1+b_2y=c_2$ $2by=0$ e agora substitui no Primeiro equação $a_1x+b_1y=c_1$ $a_1x+0=c_1$ $a_1x=c_1$ Figura 3.14 – Exemplo A da resposta errada relativamente à dificuldade do estudantes na tarefa 7 do QI	Neste caso, o estudante pensou que o variável b_1 igual ao variável b_2. $\boldsymbol{b_1\,y+\,c_1\,+\,b_2\,y=\,c_2}$ $\boldsymbol{2b\,y=o}$ *Tipologia de erro:* - Pensar uma variável como o significado de um número qualquer (Booth, 1988; Ponte, 2006). - Adição incorreta de termos não semelhantes (Kieran,1985; Ponte, Branco & Matos, 2009).

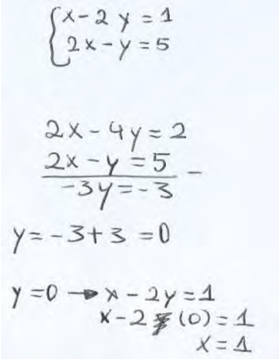
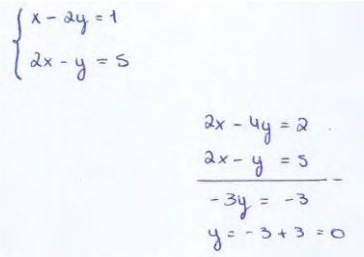
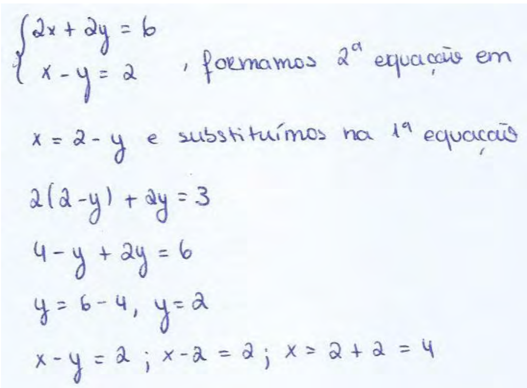
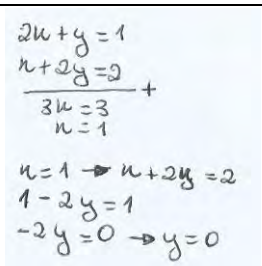
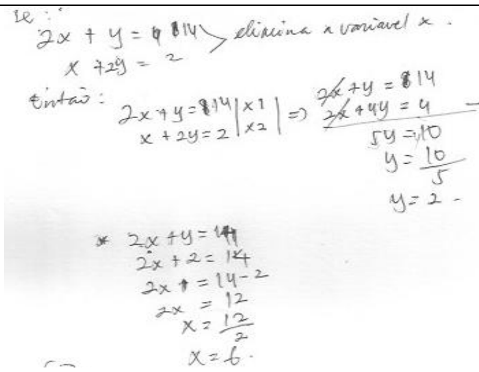
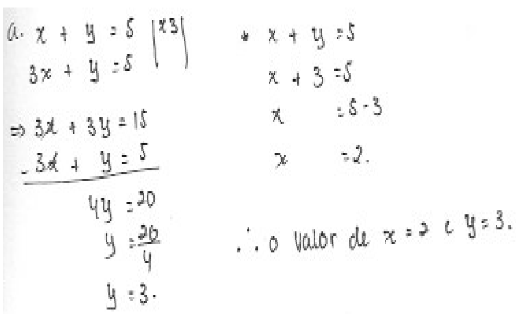
B	 Figura 3.15 – Exemplo B da resposta errada relativamente à dificuldade do estudantes na tarefa 7 do QI	$\boldsymbol{-3y = -3}$ $\boldsymbol{y = -3 + 3 = 0}$ O estudante considerou $-3y = -3 + y$. Embora em Aritmética 27 significa 20+7, mas na Álgebra $3y = y + y + y = 3 \times y$ *Tipologia de erro:* - Interpretação incorreta de Monomíos do 1.º grau (Booth, 1984; Ponte, Branco & Matos, 2009) - Erro na atribuição concreto às letras (Booth, 1988; Ponte, 2006).
C	  Figura 3.16 – Exemplo C da resposta errada relativamente à dificuldade do estudantes na tarefa 7 do QI	O estudante não compreendeu o significado de trocar do membro. $x - \boldsymbol{y} = 2$ $x = 2 - \boldsymbol{y}$ *Tipologia de erro:* Erro no processo de trocar de termos dos membros (Kieran, 1992). O estudante não compreendeu a propriedade da distribuição ou como se opera com os membros que estão nos parêntesis. $2(2 - y) + 2y = 3$ $4 - \boldsymbol{y} + 2y = 6$ *Tipologia de erro:* Erro no uso de parêntesis (Ponte, Branco & Matos, 2009; Kieran, 1992; Booth, 1988; Socas, Machado, Palarea & Hernandes, 1996) No caso que o aluno pretendeu multiplicar (2-y) por 2, o erro cometido mostra que o aluno não aplicou corretamente a propriedade distributiva. $2(2 - y) + \boldsymbol{2y} = 3$ $4 - y + \boldsymbol{2y} = 6$ *Tipologia de erro:* Erro na transposição (Hall, 2002)
D		Implicitamente o estudante pretendeu multiplicar os dois lados da primeira equação com 2 e eliminou a incógnita y. $4x + 2y = 2$ $x + 2y = 2$ + $\boldsymbol{3x = 3}$ Neste processo mostrou os erros

	Figura 3.17 – Exemplo D da resposta errada relativamente à dificuldade do estudantes na tarefa 7 do QI	em: - sinal de eliminação; - produto da substração de números; - produto da substração de termos com incógnita x. *Tipologia de erro:* - Adição incorreta de termos semelhanças (Kieran, 2006; Ponte, Branco & Matos, 2009). - erro na propriedades da eliminação.
E	 Figura 3.18 – Exemplo E da resposta errada relativamente à dificuldade do estudantes na tarefa 7 do QI	O estudante cometeu um erro na eliminação de termos com incógnita y. $\begin{array}{r} 2x + y = 14 \\ 2x + 4y = 4 \\ \hline \mathbf{5y = 10} \\ \mathbf{y = 2} \end{array} -$ *Tipologia de erro:* Erro na eliminação de termos semelhantes (Kieran, 1992; Ponte, Branco & Matos, 2009).
F	 Figura 3.19 – Exemplo F da resposta errada relativamente à dificuldade do estudantes na tarefa 7 do QI	Verificaram-se dois erros na resposta deste aluno: - erro na substração de números 15 – 5 (15 – 5 = 20); - erro no procedimento da distribuição. O estudante múltipla por – 1 na equação $3x + y = 5$ para aplica o método da eliminação $3x$. Neste caso, $-1\ (3x + y = 5)$ $-3x + y = 5$ *Tipologia de erro:* - Erro na eliminação de termos semelhanças (Kieran, 1992; Ponte, Branco & Matos, 2009). - Erro no uso de parêntesis (distribuição) (Kieran, 1992; Socas, Mechado, Palarea e Hernandez, 1996)

Considera-se a solução do sistema das equações lineares (neste caso com o exemplo particular) é uma solução que pode resolver com vários métodos de solução. Mesmo assim ainda se encontram vários erros algébricos no processo de resolução que manifestados pelos estudantes, por exemplo: pensar uma variável como o significado de um número qualquer $(b_1 + b_2 = b)$; interpretação incorreta de Monomíos do 1.º grau $(-3y = -3 + y)$; erro no uso de parêntesis $(2(2 - y) = 4 - y)$; erro na eliminação de termos semelhanças $y - 4y = 5y$, e entre outros. Esta realidade é preocupante, considerando que estes estudantes são finalistas deste curso e vão realizar estágios dentro de pouco tempo.

3.4.1.2. Análise dos resultados das tarefas do QI sobre funções

***Tarefa 2*: Padrão e sequência de lafatik**

Todos os estudantes responderam ao item a e ao item b desta tarefa. A análise aos resultados baseia-se na categorização do grau de correção, tendo-se identificado, no item a, 16 repostas corretas e 8 respostas erradas. No item b identificaram-se os mesmos números de respostas corretas e erradas, como se apresenta na tabela 3.19.

Tabela 3.19 - Grau de correção da tarefa 2, item a.

Grau de correção	item a		item b	
	Frequência	%	Frequência	%
Correta	16	66,7	12	50
Errada	8	33,3	12	50
Em branco	0	0	0	0
Total	24	100	24	100

Apresenta-se seguidamente a tabela 3.20 onde se mostram os números das respostas de todos os estudantes com os seus métodos de soluções.

Tabela 3.20 - Grau de correção e método de solução da tarefa 2, item a e item b.

Grau de correção	Método de solução	item a		item b	
		Frequência	%	Frequência	%
Correta	Tendência algébrica	1	4,2	1	4,2
	Tendência aritmética	1	4,2	1	4,2
	Observação figura	14	58,3	10	41,7
Errada	Tendência algébrica	0	0	0	0
	Tendência aritmética	2	8,3	1	4,2
	Observação figura	6	25	11	45,8
	Total	24	100	24	100

Nesta tabela, registam-se os 14 estudantes que têm respostas corretas no item a, que não utilizaram o RA nas suas resoluções, mas foram desenhar a 4.ª flor e realizaram uma contagem do número de *tali tahan*. Um estudante manifesta a tendência aritmética na sua solução. Este estudante utilizou uma ilustração da progressão de *tali tahan* branco e de *tali tahan* preto, e depois fez uma contagem do número de *tali tahan* na 4ª flor (por exemplo: resposta B da tabela 3.21). Houve apenas um estudante que conseguiu raciocinar algebricamente, com ajuda de uma tabela, conseguiu observar o padrão de *tali tahan* e resolveu o problema recorrendo à fórmula da progressão aritmética $U_n = a + (n+1)\ b$ (por exemplo: resposta C da tabela 3.21).

Relativamente ao item b, dos 12 estudantes que responderam corretamente, 10 deles realizam uma contagem numérica ou um registo dos números de *tali tahan* numa tabela para encontrarem a solução. O estudante que utilizou o progressão de *tali tahan* e o estudante que utilizou a fórmula da Progressão Aritmética também conseguiram apresentar soluções corretas na questão do item b. O estudante que fez uma ilustração da progressão no item a, continuou a sua resposta no item b com uma ilustração de conjunto de *tali tahan* branco e de *tali tahan* preto até chega à conclusão que a partir de 37 *tali tahan* se podem construir 7 flores. O estudante que manifestou a utilização do RA, baseou-se no padrão da progressão encontrada no item a e conseguiu determinar o número de flores que tinha questionado no item b.

Relativamente à categorização de nível do RA, tabela 3.21 mostra-se poucas respostas que manifestam a utilização dos símbolos e das operações algébricas (do nível 3 do RA). A maioria destas respostas esteve baseada na observação da figura e da contagem numérica. Esta realidade é uma das indicações de baixo nível do RA dos estudantes.

Tabela 3.21 - Nível do RA de respostas corretas e erradas da tarefa 2, item a e item b.

Nível do RA de resposta correta	item a		item b		Nível do RA de resposta errada	item a		item b	
	F	%	F	%		F	%	F	%
3	1	4,2	1	4,2	3	0	0	0	0
1	1	4,2	1	4,2	1	2	8,3	1	4,2
0	14	58,3	10	41,7	0	6	25	11	45,8
Total: 24 (100 %)									

F: frequência

Em seguida, apresenta-se a tabela 3.22 com exemplos das respostas dadas pelos estudantes e respetiva análise de níveis do RA.

Tabela 3.22 – Exemplos de resoluções corretas e análise dos níveis de RA relativamente à tarefa 2 do QI

Situações-problemas: identificação do número de *tali tahan* branco e de *tali tahan* preto na construção de 4 flores (item a); identificação o número de flores de um conjunto de *tali tahan* branco e de *tali tahan* preto.

Resposta A

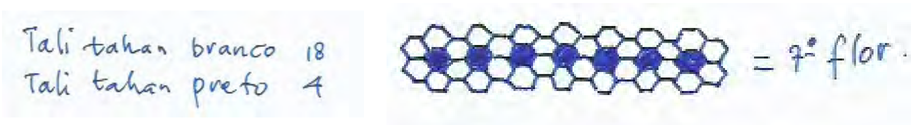


Figura 3.20 – Exemplo A da resposta correta relativamente à tarefa 2 do QI

Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e da representação figura; convenções assumidas para identificar os números de *tali tahan*.
Proposição: padrão e sequência.
Procedimentos: desenhar as flores sucessivamente e contar os números de cada cor de *tali tahan*.
Argumentos: baseia-se na contagem de número de *tali tahan*.
Nível de RA: **nível 0**
- não envolve nenhuma letra ou símbolo;
- não realiza nenhuma operação algébrica;
- utiliza a observação de um diagrama;
- a configuração da resposta é raciocínio visual.

Resposta B

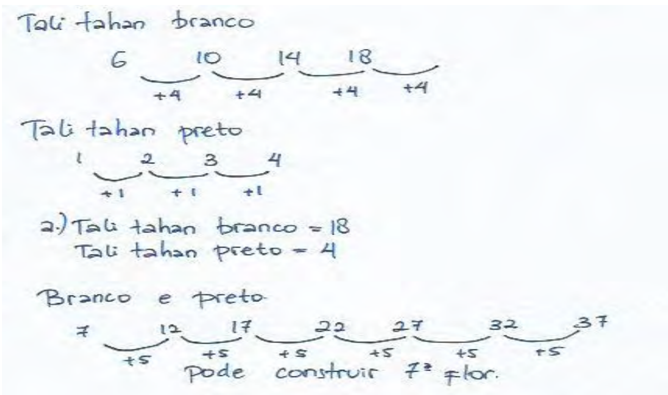


Figura 3.21 – Exemplo B da resposta correta relativamente tarefa 2 do QI

Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e a representação da figura.
Conceitos: padrão e sequencia
Proposição: A diferença entre dois termos sucessivos é sempre constante ($b = U_n - U_{n-1}, n \in \mathbb{N}$).
Procedimentos:
- determinar a diferença entre dois termos sucessivos;
- identifica que cada termo da sequência obtém-se pela adição do termo anterior com 4 unidades ($U_n - U_{n-1} = 4, n \in \mathbb{N}$).

Argumentos: baseia-se na contagem de número de *tali tahan*.

Nível de RA: **nível 1**
- utiliza linguagem numérica, envolvendo a operação de adição e substração;
- identifica a relação entre dois elementos sucessivos de sequência;
- a configuração da resposta é Álgebra operacional.

Resposta C

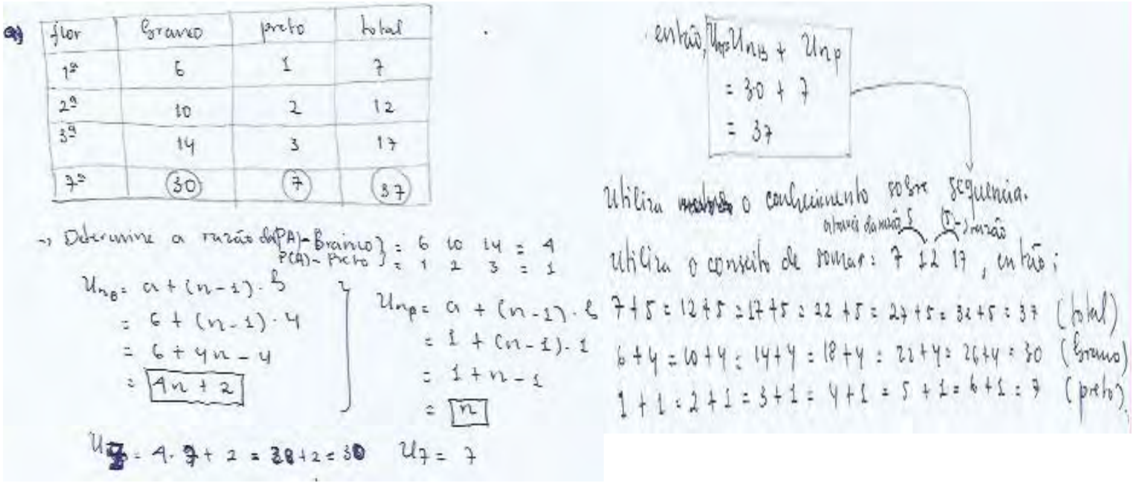


Figura 3.22 – Exemplo C da resposta correta relativamente tarefa 2 do QI

Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e a representação de figura.
Conceitos: padrão e regularidade e a progressão aritmética.
Proposição:
- propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica.
- diferença entre dois termos sucessivos $b = U_n - U_{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}$
- a fórmula da progressão aritmética $U_n = a + (n-1)b$, sendo a o primeiro termo de sequência (U_1) e b a razão de progressão aritmética.

Procedimentos:
- identificar a diferença entre dois termos sucessivos;
- identificar o termo geral de progressão aritmética;
- Substituir os valores na fórmula da progressão aritmética.

Argumentos: baseia-se na progressão aritmética.
Nível de RA: **nível 3**
- utiliza letras, para representar números;
- opera algebricamente e chega a expressão canónica da progressão aritmética;
- a configuração da resposta é Álgebra funcional.

Dos três exemplos diferentes que representam as respostas dos estudantes nesta tarefa (tabela 3. 22), a resposta A foi um exemplo de resposta com construção de figura e contagem de números de *tali tahan* para obter a solução, sem o envolvimento de RA. A resposta B manifesta a utilização da linguagem numérica envolvendo a Álgebra operacional pelas propriedades de adição e de substração. Mesmo assim, não se encontrou nenhum envolvimento do RA. O envolvimento do símbolo algébrico e da operação algébrica manifestam-se na resposta C. O domínio do conceito de progressão aritmética ajuda a resolver esta problema pela identificação da diferença entre os dois termos sucessivos e o envolvimento da fórmula do termo geral da progressão aritmética.

O resultado da análise desta tarefa 2, mostra as dificuldades dos estudantes sobre a identificação da expressão algébrica que traduz a relação entre os termos da sequência da tarefa, envolvendo padrão e sequência. Ou seja, os estudantes tiveram dificuldades em encontrar a fórmula do padrão. Considera-se, pois, que a atividade de generalização é um processo que é difícil para muitos estudantes. Os estudantes têm tendência para desenhar as figuras e fazer uma contagem numérica, sem pensaram no padrão da sequência. Esta realidade, no que respeita a uma abordagem recursiva, pode ser um sério obstáculo para a descoberta da regra geral ou da fórmula do padrão (Tall, 1992). Assim, os estudantes demonstram dificuldades ao nível de generalização.

Tarefa 5*: *Família de funções quadráticas

No item a, 22 estudantes (91,7 %) fizerem esboços de representações gráficas para observar os efeitos de parâmetro $\boldsymbol{a}$ e 2 (8,3 %) estudantes deixaram as suas respostas em branco.

Tabela 3.23 - Frequência do método de resolução envolvido na tarefa 5, item b.

Método de resolução	item a	
	Frequência	%
Tendência algébrica	0	0
Tendência aritmética	0	0
gráfica	22	91,7
Em branco	2	8,3
Total	24	100

No item b, os 16 estudantes identificaram os efeitos de parâmetro a, no caso $a > 0$ e $a < 0$ e não identificaram os efeitos de parâmetro a para $0 < a < 1$ e $a > 1$ (tabela 3.24). Os 11 de 16 destes estudantes apenas fizeram referência ao sentido da parábola, por exemplo: “A parábola é para cima se a maior do que zero e a parábola é para baixo se a menor do que zero”. Portanto, de acordo com a categorização do RA, estas 16 respostas não estão categorizados em nenhum nível do RA, considerando que não são apresentadas justificações (tabela 3.25).

Tabela 3.24 - Grau de correção e método de solução da tarefa 5, item b.

Grau de correção	$a > 0$		$a < 0$		$0 < a < 1$		$a > 1$	
	F	%	F	%	F	%	F	%
Correta	16	66,7	16	66,7	2	8,3	2	8,3
Errada	2	8,3	2	8,3	3	12,5	3	12,5
Em branco	6	25	6	25	19	79,2	19	79,2
Total	24	100	24	100	24	100	24	100

F: frequência

Existem 2 estudantes que não conseguiram tirar as conclusões, mas conseguiram indicar, pelos gráficos, a diferença entre todos os efeitos do parâmetro a (por exemplo: solução A da tabela 3.27). Por isso, estas respostas são categorizadas no nível 0 do RA. Houve apenas um aluno que conseguiu resolver esta tarefa com o envolvimento da apresentação gráfica e tirou a conclusão sobre os efeitos do parâmetro a (por exemplo: solução B da tabela 3.27). As conclusões apresentadas por este estudante não são todas corretas, particularmente no que diz respeito aos efeitos do parâmetro a para $0 < a < 1$ e para $a > 1$. Mesmo assim, considera-se que esta resposta está no nível 4 do RA.

Verificou-se, na tabela 2.26, que 2 estudantes, para além de terem a conclusão correta para os efeitos do parâmetro a no caso $a < 0$ e $a > 0$, tentaram explicar os efeitos do $0 < a < 1$; e $a > 1$, para eles "Se $0 < a < 1$, então aberta para direita e se $a > 1$, então aberta para esquerda" e "Os efeitos do parâmetro a nos gráficos da função anterior, para determinar o maior da parábola ou o menor da parábola, e para colocar ou determinar o parábola abre para cima ou para baixo, para esquerda ou para direita". As soluções destes dois estudantes também se inserem no nível 4 do RA.

Tabela 3.25 - Nível do RA de respostas da tarefa 5, item b (para $a > 0$ e $a < 0$)

Nível do RA de resposta correta	$a > 0$		$a < 0$		Nível do RA de resposta errada	$a > 0$		$a < 0$	
	F	%	F	%		F	%	F	%
4	3	12,5	3	12,5	3	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	2	8,3	2	8,3	0	2	8,3	2	8,3
Em branco	11	45,8	11	45,8	Em branco	6	25	6	25
Total: 24 (100 %)									

F: frequência

Tabela 3.26 - Nível do RA de respostas da tarefa 5, item b (para $0 < a < 1$ e de $a > 1$)

Nível do RA de resposta correta	$0 < a < 1$		$a > 1$		Nível do RA de resposta errada	$0 < a < 1$		$a > 1$	
	F	%	F	%		F	%	F	%
4	2	8,3	2	8,3	4	1	4,2	1	4,2
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	2	8,3	2	8,3
Em branco	0	0	0	0	Em branco	19	79,2	19	79,2
Total: 24 (100 %)									

F: frequência

Apresentam-se, na tabela 3.27, dois exemplos de soluções manifestadas pelos estudantes e a respetiva análise quanto ao RA.

Tabela 3.27 – Exemplos de resoluções corretas e análise dos níveis de RA relativamente à tarefa 5 do QI

Situações-problemas: identificação dos efeitos de parâmetro a em várias situações.

Resposta A : O aluno fez apresentações gráficas com o valor de $a = 1$ (1.ª gráfica); $a = -1$ (2.ª gráfica); $a = 1, 2, \frac{1}{2}$ (3.ªgráfica).

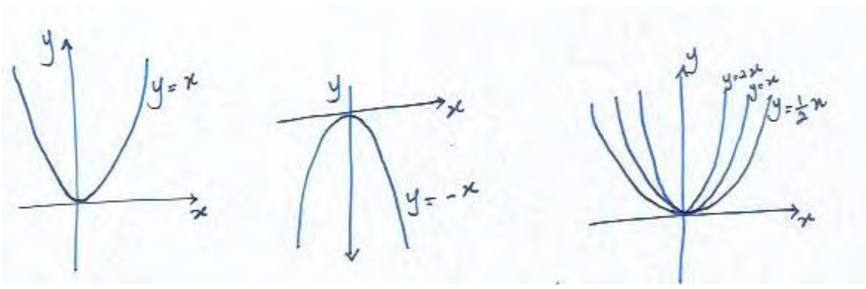


Figura 3.23 – Exemplo A da resposta correta relativamente à tarefa 5 do QI

Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e a representação gráfica.

Conceitos: O parâmetro a influencia o sentido da concavidade da parábola; o valor absoluto de parâmetro influencia a abertura da parábola.

Procedimentos: desenhar as parábolas com vários valores de a

Nível de RA: 0

A atividade envolve a construção de gráficas na interpretação do papel do parâmetro para identificar as propriedades da família de funções.

- não opera com o parâmetro e não envolve uma generalização;
- a configuração da resposta é Álgebra funcional envolvendo-se o raciocínio diagramático.

Resposta B

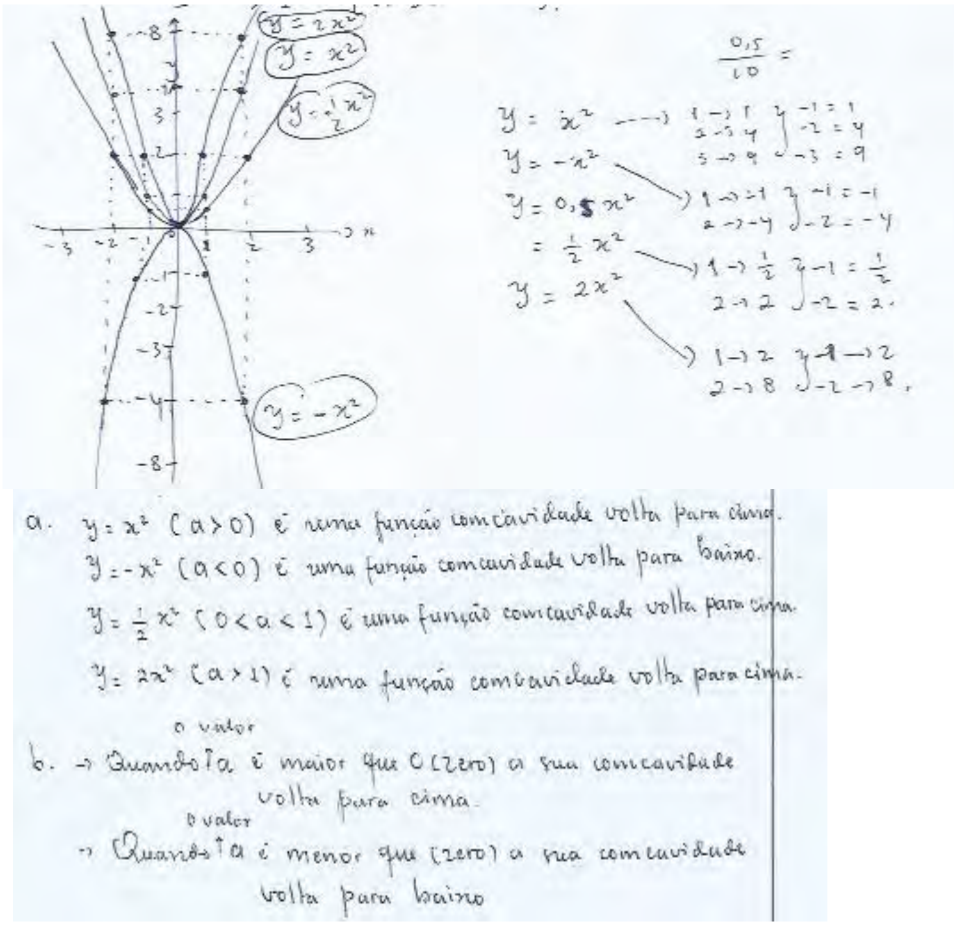


Figura 3.24 – Exemplo B da resposta correta relativamente tarefa 5 do QI

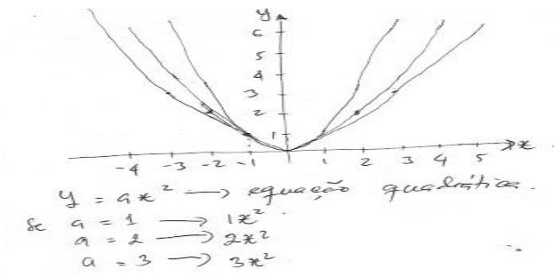
<u>Elementos linguísticos:</u> relação entre linguagem natural e a representação gráfica.
<u>Conceitos:</u> O sinal de parâmetro influencia o sentido da concavidade da parábola; o valor absoluto de parâmetro influencia a abertura da parábola.
<u>Proposição:</u>
- Se $a > 0$, o gráfico tem a concavidade a cima e, pelo contrário, tem a concavidade abaixo se $a < 0$.
- Se $|a| > 1$, a parábola tem maior a abertura e tem menor a abertura se e $|a| < 1$

<u>Procedimentos:</u>
- desenhar as parábolas com vários valores de a;
- observar os efeitos de parâmetro a em várias situações;
- Fazer uma generalização dos efeitos de parâmetro a

<u>Argumentos:</u> baseia-se na observação gráfica.
<u>Nível de RA:</u> **Nível 4**
- utiliza o símbolo literal e apresentação gráfica;
- envolve a atividade com a família de funções;
- envolve o parâmetro a;
- não opera com o parâmetro;
- o estudante tirou conclusões sobre a influência do sinal do parâmetro a sobre a concavidade de parábola;
- a configuração da resposta é Álgebra funcional envolvendo-se o raciocínio algébrico e diagramático.

A dificuldade dos estudantes na generalização também esteve presente nas respostas da tarefa sobre a família de funções quadráticas. A maioria dos estudantes conseguem fazer o esboço dos gráficos mas tem dificuldades na interpretação do papel do parâmetro a nas propriedades da família da função, como se constante no exemplo seguinte:

Figura 3.25 - exemplo da dificuldade dos estudantes no processo de generalização



O aluno, nesta resposta, conseguiu construir os gráficos para os valores de $a > 0$, mas não conseguiu tirar a conclusão em que com o aumento do valor a consequentemente o gráfico fica mais aberto.

3.4.1.3. Análise dos resultados das tarefas do QI sobre modelação

***Tarefa 3*: Custo do almoço**

Esta tarefa foi uma tarefa difícil de realizar para os estudantes. Esta conclusão resulta do facto de se ter identificado que nenhum dos 21 estudantes respondeu corretamente ou nem sequer apresentaram resposta à tarefa, como foi o caso de 3 estudantes. Encontraram-se dois estudantes que têm respostas erradas e apresentaram uma operação numérica nas suas soluções. Há dois estudantes que utilizaram o raciocínio algébrico e tentaram resolver a questão através da função linear. Mesmo assim os resultados foram errados. Estas situações implicaram uma categorização de nível do RA, como se apresenta na tabela 3.29.

Tabela 3.28 - Grau de correção e método de solução da tarefa 3, item a.

Grau de correção	item a	
	Frequência	%
Correta	0	0
Errada	21	87,5
Em branco	3	12,5
Total	24	100

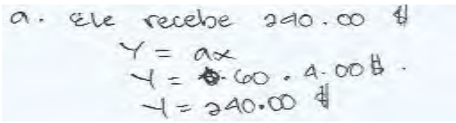
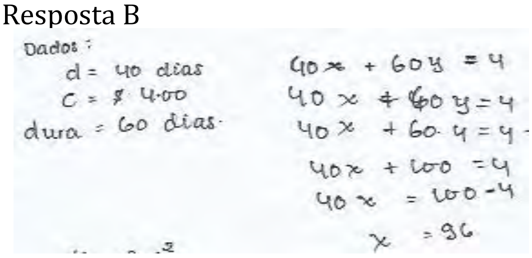
Método de solução	item a	
	Frequência	%
Tendência algébrica	2	8,3
Tendência aritmética	2	8,3
Em branco	20	83,3
Total	24	100

Tabela 3.29 - Nível do RA de respostas corretas e erradas da tarefa 3, item a.

Nível do RA de resposta correta	item a		Nível do RA de resposta errada	item a	
	Frequência	%		Frequência	%
3	0	0	3	2	8,3
1	0	0	1	2	8,3
0	0	0	0	0	0
não identificado	0	0	não identificado	20	83,3
Total: 24 (100 %)					

Na tabela 3.30 apresentam-se dois exemplos das respostas dos estudantes que envolvem objetos e processos algébricos. O estudante A associou a situação - problema desta tarefa ao conceito da função linear, enquanto o estudante B tentou traduzir as informações dadas numa equação linear com duas incógnitas.

Tabela 3.30 – Exemplos de resoluções erradas e análise do tipo de erros relativamente à tarefa 3 do QI

Resposta A -  Figura 3.26 - exemplo A da resposta errada relativamente à tarefa 3	- Erro na tradução da linguagem verbal para a linguagem algébrica; - Dificuldade na identificação dos símbolos (por exemplo: y é o total de dinheiro que recebeu; x é o gasto de comer; a é número de dias do gasto); - Erro na interpretação do conceito de proporcionalidade direta $y = ax \iff x = \frac{y}{a}$
Resposta B  Figura 3.27 - exemplo B da resposta errada relativamente à tarefa 3	- Erro na tradução da linguagem verbal para a linguagem algébrica; - Não identificou o significado dos símbolos (por exemplo: d é números dias do gasto; c é montante de poupança por dia); - Não identificou quais são os significados de incógnitas x e y.

Esta análise baseia-se nos dois exemplos apresentados na tabela 3.30 onde se podem identificar as duas principais dificuldades destes estudantes ao nível da: tradução da linguagem verbal para a linguagem algébrica que implica na sua compreensão de situação - problema da tarefa; e da identificação e interpretação dos símbolos como representações das informações dadas na tarefa.

<u>Tarefa 4</u>: *Identificação das expressões*

No registo que se segue apresentam-se os resultados dos 24 estudantes em relação à identificação da tarefa 4. Pela tabela 3.31 identifica-se as respostas (correta, errada e em branco) de cada uma das expressões .

Tabela 3.31 - Grau de correção e método de solução da tarefa 4, <u>item a</u>.

Grau de correção	Expressão					
	$4x + 5 = 25$		$y = 2x + 1$		$P = 2c + 2l$	
	Frequência	%	Frequência	%	Frequência	%
Correta	21	87,5	11	45,8	2	8,3
Errada	2	8,3	10	41,7	20	83,3
Em branco	1	4,2	3	12,5	2	8,3
Total	24	100	24	100	24	100

Os 21 estudantes conseguiram identificar corretamente a primeira expressão. Para estes estudantes, a primeira expressão é uma equação linear ou equação do primeiro grau. Na segunda expressão, dos 11 estudantes que têm respostas corretas, 3 estudantes identificaram esta expressão como uma função linear e 8 estudantes especificaram como uma função afim. Dois dos 11 estudantes que responderam corretamente na segunda expressão, conseguiram associar os elementos desta função. De acordo com estes estudantes: "O x é variável independente, porque obriga-nos de procurar o valor da variável x" e "O x é variável independente; o y é variável dependente do valor x (o valor y dependendo do valor x) ".

A realização da tarefa sobre a identificação das expressões algébricas representou uma oportunidade para os estudantes desenvolverem novos conhecimentos. Na realidade, tratou-se de uma situação nova, pois estes estudantes estavam familiarizados com a resolução de expressões algébricas e não com o que eles poderiam traduzir (modelação). Nesta tarefa verificou-se um número reduzido de respostas corretas em particular nas expressões $y = 2x + 1$ e $P = 2c + 2l$. Encontram-se erros de interpretação destas expressões por exemplo: na expressão $y = 2x + 1$, os estudantes interpretam como "expressão algébrica", "equação algébrica" ou "equação do segundo grau"; e na expressão $P = 2c + 2l$ os estudantes interpretam como "expressão trigonometria", "perímetro triângulo" ou "expressão do conceito algébrico".

No resultado desta tarefa foi identificado, também, a falta de conhecimentos básicos dos estudantes relativamente: resolução de sistemas de equações lineares (em forma geral); família de funções quadráticas; e identificação de expressões algébricas. Este facto é manifestado pelas muitas respostas erradas ou em branco e também pela confusão dos conceitos em língua portuguesa, por exemplo: o conceito da "linear" e "2.º grau" e utiliza-se em conjunto para identificar a segunda expressão, "2.ª expressão é a equação linear do 2º grau". Em relação à terceira expressão, apenas 2 respondentes tiveram resposta correta. Para eles a expressão dada representa o perímetro do retângulo, neste caso os estudantes fizeram confusão entre o conceito de retângulo na Geometria Plana (2D) e o conceito de paralelepípedo na Geometria Tridimensional (3D).

Tarefa 6*: Movimento do *kayak

Esta tarefa revelou ser uma tarefa muito difícil para os estudantes. Esta dificuldade foi identificada pelo facto de não existirem respostas corretas e pelo elevado número de respostas em branco, como se apresenta na tabela 3.32.

Tabela 3.32 - Grau de correção e método de solução da tarefa 6, item a.

Grau de correção	item a		Método de solução	item a	
	Frequência	%		Frequência	%
Correta	0	0	Tendência algébrica	3	12,5
Errada	4	16,7	Tendência aritmética	1	4,2
Em branco	20	83,3	Em branco	20	83,3
Total	24	100	Total	24	100

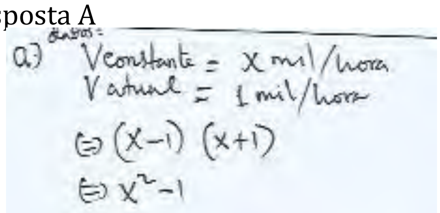
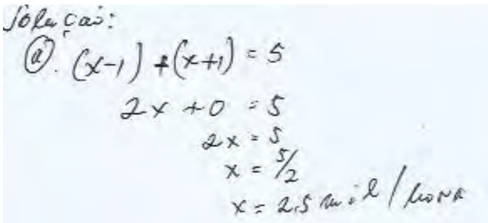
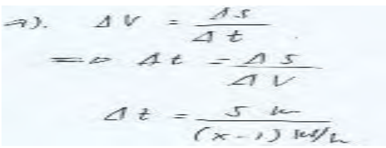
Os estudantes não conseguiram resolver esta tarefa. Tal como foram indicados de expressões orais dos mesmos, estes não tinham habituados a este tipo de tarefas. Dos 4 estudantes que tentaram resolver esta tarefa, 3 deles envolveram os símbolos e operação algébrica, da equação do tipo $Ax \pm B = C$ (características de nível 2 do RA) e 1 estudante resolveu o problema sem utilização do símbolo e operação algébrica (características de nível 0 do RA).

Tabela 3.33 - Nível do RA de respostas corretas e erradas da tarefa 6, item a.

Nível do RA de resposta correta	item a Frequência	item a %	Nível do RA de resposta errada	item a Frequência	item a %
3	0	0	2	3	12,5
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	4,2
não identificado	0	0	não identificado	20	83,3
Total: 24 (100 %)					

Na seguinte tabela, apresenta-se uma análise das respostas erradas manifestadas pelos estudantes.

Tabela 3.34 – Exemplos de resoluções erradas e análise do tipo do RA relativamente à tarefa 6 do QI

Resposta A  Figura 3.28 - exemplo A da resposta errada relativamente à tarefa 6	- O estudante utilizou informações dadas na enunciação da tarefa e tentou resolver a tarefa com a operação algébrica; - Envolve a equação da forma $Ax \pm B = C$; - Não conseguiu de resolver o problema. - Categorização do nível do RA : nível 2
Resposta B  Figura 3.29 - exemplo B da resposta errada relativamente à tarefa 6	- O estudante utilizou informações dadas na enunciação da tarefa e tentou resolver a tarefa com a operação algébrica; - Erro na identificação da distância total da viagem (5 milhas de A para B e 5 milhas de regresso); - Não conseguiu identificar a relação entre distância, tempo e velocidade; - Envolve a equação da forma $Ax \pm B = C$; - Não conseguiu de resolver o problema. - Categorização do nível do RA : nível 2
Resposta C  Figura 3.30 - exemplo C da resposta errada relativamente à tarefa 6	- O estudante utilizou as informações dadas na enunciação de tarefa; - Conseguiu relacionar o problema com o conceitos de: distância; tempo; e velocidade; - Não envolveu operação algébrica; - Não conseguiu de resolver problema; - Categorização do nível do RA : nível 2

Dos três exemplos de respostas apresentadas na tabela 3.34, identificam-se dificuldades dos estudantes relativamente à associação do problema da Física na modelação Matemática, ou seja, quanto à relação entre a distância, o tempo e a velocidade.

O objetivo desta tarefa é encontrar as soluções que envolvem a variável independente (x) e a variável dependente (t) numa expressão canônica da função e operá-las sintaticamente (nível 3 do RA), considerando que não está atingido pelo facto de não se encontrar nenhuma solução que manifeste estas características.

Tarefa 8: ***Taxa de imposto***

Esta tarefa, que envolve o conhecimento do limite e da continuidade, considerada também foi uma tarefa muito complicada para os estudantes. Por isso, não se encontrou nenhuma resposta correta para esta tarefa e a maioria destes estudantes deixaram as suas respostas (do item a e do item b) em branco.

Tabela 3.35 - Grau de correção da tarefa 8, item a e item b

Grau de correção	item a		item b	
	Frequência	%	Frequência	%
Correta	0	0	0	0
Errada	3	12,5	0	0
Em branco	21	87,5	24	100
Total	24	100	24	100

Dos estudantes que responderam erradamente nesta tarefa: 1 estudante não apresentou nenhum método de resolução e apenas apresentou resultado final; 1 estudante utilizou a operação numérica sem utilizar os símbolos (exemplo A da tabela 3.38), estando assim categorizado no nível 0 do RA; 1 estudante tentou resolver o problema com operação numérica com o envolvimento das propriedades da operação e dos dados desconhecidos (exemplo B da tabela 3.38), categorizando-se esta resposta no nível 1 do RA.

Tabela 3.36 - Grau de correção e método de solução da tarefa 8, item a e item b.

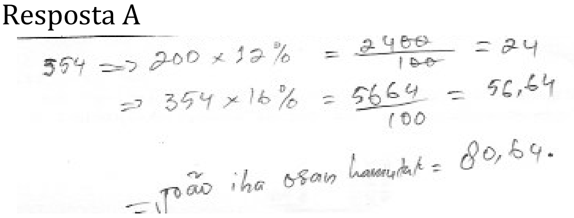
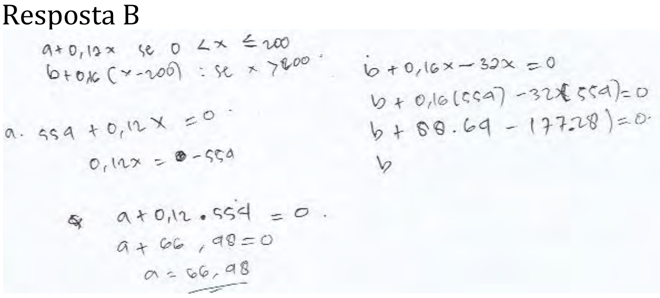
Grau de correção	Método de solução	item a		item b	
		Frequência	%	Frequência	%
Correta	Tendência algébrica	0	0	0	0
	Tendência aritmética	0	0	0	0
	Em branco	0	0	0	0
Errada	Tendência algébrica	1	4,2	0	0
	Tendência aritmética	2	8,2	0	0
	Em branco	21	87,5	24	100
Total		24	100	24	100

Tabela 3.37 - Nível do RA de respostas corretas e erradas da tarefa 8, item a e item b.

Nível do RA de resposta correta	item a F	item a %	item b F	item b %	Nível do RA de resposta errada	item a F	item a %	item b Frequência	item b %
3	0	0	0	0	3	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	4,2	0	0
0	0	0	0	0	0	1	8,3	0	0
em branco	0	0	0	0	em branco	22	87,5	24	100
Total: 24 (100%)									

F: frequência

Tabela 3.38 – Exemplos de resoluções erradas e análise do RA relativamente à tarefa 8 do QI

Resposta A  Figura 3.31 - exemplo A da resposta errada relativamente à tarefa 8	O estudante apresentou uma resolução utilizando linguagem numérica e operou numericamente para obter a solução. Nível do RA: 0
Resposta B  Figura 3.32 - exemplo B da resposta errada relativamente à tarefa 8	O estudante apresentou uma resolução utilizando linguagem numérica; Envolve os dados desconhecidos, neste caso são a e b; Aplicou as propriedades das operações numéricas: substituição e multiplicação; Nível do RA: 1

Relativamente à tarefa 8, sobre modelação, considera-se que esta tarefa foi muito complicada para os estudantes. Nenhum estudante conseguiu resolver as perguntas. Segundo os estudantes, eles não têm os conhecimentos suficientes sobre estas tarefas ou não estão habituados porque as tarefas dadas pelos professores não são de aplicação. Nas respostas destas tarefas, encontra-se uma maior dificuldade por parte dos estudantes na tradução da linguagem verbal para a linguagem algébrica. Esta dificuldade como referem Ponte, Branco e Matos (2009) tem uma múltipla origem, nomeadamente: a falta de compreensão dos enunciados em linguagem natural; o desconhecimento das regras de sintaxe da linguagem algébrica; o estabelecimento de relações incorretas entre as duas linguagens; e a simples distração ou o foco em pistas enganadoras.

Além disso, as dificuldades dos estudantes na língua portuguesa também foi um problema fundamental para a compreensão dos enunciados por parte dos estudantes e esta realidade, consequentemente, tinha afetada na capacidade de traduzir das linguagens verbais para as linguagens Matemáticas.

3.4.2. Análise dos resultados das tarefas do QI relativamente ao CDM

Nesta parte apresenta-se um análise retrospectiva das respostas dos estudantes no QI relativamente o CDM. Aplica-se, como guião de análise do conteúdo didático, segundo proposta de Godino et al. (2015), as facetas: epistémica, cognitiva e instrucional. Porém, neste trabalho não foram avaliadas as respostas dos estudantes em todas as categorias propostas no modelo CDM. Não foi avaliada a faceta afectiva, relacionada com atitudes, motivações, emoções. Não foi avaliada também a faceta ecológica, envolvendo aspetos do currículo ou materiais didáticos de apoio à aprendizagem da Álgebra.

Para os efeitos de análise, pretende-se categorizar todas as questões relativamente ao CDM, referindo-se a proposta do Godino et al. (2015) sobre o CDM.

Tabela 3.39 - Análise das respostas do QI relativamente às questões sobre o CDM

Facetas	Tarefa	Questão
Faceta epistémica	*Família da função quadrática*	5c.Identifique os conhecimentos algébricos que se envolvem na resolução desta tarefa
	Custo do almoço	3b.Pode-se resolver a tarefa com procedimentos exclusivamente aritméticos? De que maneira?
		3c. Pode se resolver a tarefa com procedimentos exclusivamente algébricos? De que maneira?
Faceta cognitiva	*Balança do sumo*	1b.Que interpretação do "equilíbrio" está associada ao conhecimento matemático?
	Sistema das equações lineares com duas incógnitas	7b.Identifique os conhecimentos algébricos que se podem utilizar para resolver esta tarefa.
	Padrão e sequência de lafatik	2d.Quais seriam tais conhecimentos algébricos?
	Taxa de imposto	8b.Quais são os conhecimentos algébricos que se utilizam para resolver esta tarefa?
		8c.Considera que esta tarefa é adequada para ser proposta a alunos do Ensino secundário? Se

		concorda, indique em que ano e justifique a sua resposta.
Faceta instrucional	*Sistema das equações lineares com duas incógnitas*	7c.Enuncie dois problemas que se possam propor aos alunos do 10º ano cuja solução envolve sistema das equações lineares com duas incógnitas.
	Padrão e sequência de lafatik	2c.Como modificaria o enunciado da tarefa para introduzir algum procedimento de resolução que ponha em jogo conhecimentos algébricos?
	Identificação das expressões	4b.Enuncie três problemas que se possa propor aos alunos do secundário cuja solução implique a utilização destas expressões.
	Movimento do kayak	6b.Enuncie uma variação desta tarefa cuja solução que implica apenas os conhecimentos aritméticos. Resolva este problema.
		6c.Enuncie uma variação de problema cuja solução que implica o uso de parâmetro. Escreva a expressão correspondentes.

Faceta Epistémica

A avaliação desta faceta pretende verificar o conhecimento dos estudantes relacionado com a identificação de objetos e processos algébricos nos diversos componentes propostos no RA (representações, conceitos, procedimentos, propriedades, generalização, modelação) e a identificação de níveis de RA.

Para analisar os conhecimentos dos estudantes sobre esta faceta foram apresentados três itens no QI de diferentes tarefas:

- Identificação dos conhecimentos algébricos que se envolvem na resolução da tarefa sobre a família da função quadrática(5c);
- Possibilidade de resolver a tarefa do custo do almoço com procedimentos exclusivamente aritméticos (3b);
- e Possibilidade de resolver a tarefa do custo do almoço com procedimentos exclusivamente algébricos (3c).

Na identificação dos conhecimentos algébricos da família da função quadrática, apenas 10 de 24 estudantes responderam corretamente a esta questão. Para estes estudantes os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa são: conceito de funções quadráticas e representação gráfica de função quadrática (gráfico da parábola). Relativamente às possibilidade resolver a tarefa do custo do almoço com procedimentos exclusivamente aritméticos ou algébricos, nenhum estudante conseguiu responder corretamente. Neste caso, identificou-se que os estudantes não têm o conhecimento sobre quais os procedimentos algébricos e os procedimentos aritméticos, e quais as diferenças entre eles. Os estudantes associaram os procedimentos aritmético com “uma maneira de racionalização” ou “uma maneira de probabilidade (fazer várias tentativas até chegar à resposta)”.

Faceta Cognitiva

Na análise desta faceta pretende-se identificar os significados pessoais dos estudantes (conhecimento, compreensão e competência sobre os conteúdos algébricos básicos) e conflitos de aprendizagem sobre os objetos e processos algébricos. Além das questões do conteúdo algébrico que estão categorizados nesta faceta (e que foram analisados anteriormente), apresentam-se outras questões, de diferentes tarefas, relacionadas com a faceta cognitiva:

- Interpretação do “equilíbrio” que está associada ao conhecimento matemático da tarefa da balança de sumo (1b);
- Identificação do conhecimento algébrico que se pode utilizar para resolver a tarefa do sistema das equações lineares com duas incógnitas (7b);
- Identificação dos conhecimentos algébricos que seriam de utilizar na resolução da tarefa sobre o padrão e sequência de *lafatik* (2d);
- Identificação do conhecimento algébrico que se utiliza para resolver a tarefa sobre a taxa do imposto (8b);
- verificação da opinião dos estudantes sobre a adequação da tarefa da taxa do imposto a estudantes do Ensino Secundário e a indicação do ano do ensino relacionado com aprendizagem deste tema da tarefa (8c).

Tendo por base a análise da questão 1b, apenas 9 de 24 dos estudantes apresentam respostas corretas e conseguiram associar o conceito de balança com o conceito de “igualdade” ou “equação”. Nenhum estudante conseguiu associar o “equilíbrio” com o conceito de “igualdade como equivalência de expressões”. Este facto manifesta a falta de domínio dos estudantes relativamente a aspetos básicos de Matemática.

Todos dos estudantes conseguiram identificar os métodos utilizados na resolução do problema de sistemas de equações lineares com duas incógnitas. Dos 24 estudantes, 7 %

identificaram o método gráfico; 17 % apresentaram o método misto (conjunto da eliminação e da substituição); 38 % identificaram o método de substituição; e 38 % identificaram o método de eliminação, como o método utilizado na resolução do sistema. Nenhum estudante resolveu o sistema por outro método (por exemplo com: a regra de Cramer ou o método de matriz adjunta).

Apenas 50 % dos estudantes conseguiram identificar os conhecimentos algébricos que seriam envolvidos na resolução das tarefas sobre o padrão e sequência de *lafatik* (questão 2d). Para estes estudantes, os conhecimentos indicados são: progressão e sucessão; padrão; e sequência.

Relativamente às duas últimas questões desta faceta, nenhum estudante conseguiu identificar os conhecimentos algébricos que se utilizam para resolver a tarefa sobre a taxa do imposto e nem apresentaram a sua opinião sobre se esta tarefa seria adequada, ou não, para ser proposta aos alunos do Ensino Secundário. A falta de conhecimento sobre o limite e a continuidade dificultam os estudantes na tentativa de responder a esta tarefa. Os estudantes também têm menor conhecimento relativo ao currículo ou aos temas matemáticos que são ensinados no nível do Ensino Secundário. Esta realidade é uma indicação da pouca atenção dada na formação inicial à interligação entre as disciplinas aprendidas na formação de professores e os temas no currículo no Ensino Secundário.

Faceta Instrucional

A faceta instrucional relaciona-se com os recursos para o ensino da Álgebra (situações-problemas, meios técnicos) e a sua adequação ao currículo escolar. No QI foram apresentadas cinco questões relativamente à enunciação ou à modificação da tarefa, que podem ser propostas a alunos do Ensino Secundário, que envolvem apenas o conhecimento algébrico ou o conhecimento aritmético.

Na enunciação da tarefa sobre o sistema das equações lineares com duas incógnitas (7c), a maioria dos estudantes (20) apresentam uma tarefa do tipo do cálculo algébrico, por exemplo, "Resolve : $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$", dois deles envolveram um gráfico na instrução da tarefa, por exemplo: "Com o método gráfico, resolve o sistema das equações seguinte: $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$". Apenas um aluno conseguiu construir a tarefa do tipo de resolução-problema simples: “Preço de um livro e um lápis é $ 4.00. Preço de um lápis é $ 1.00. Qual é o preço de um livro?”.

Relativamente à modificação da tarefa sobre o padrão e a sequência de *lafatik* (2c), 14 estudantes apenas repetem as questões da tarefa e não conseguiram modificar com a sua própria ideia, por exemplo: “Baseia-se a figura em cima, precisam quantas *tali tahan* para formar 10 flores?”. Verificou-se que 5 estudantes conseguiram enunciar as tarefas do tipo de resolução - problema, por exemplo: “Uma triângulo precisa de 3 palitos, 4 triângulo precisa de 9 palitos. Quantos palitos são necessários para construir 5 triângulos?”.

Neste estudo encontraram-se dificuldades dos estudantes relativamente à enunciação de três problemas acerca das expressões dadas na tarefa 4b. A maioria deles não conseguiu associar expressões aos exemplos de problema algébrica. Apenas 3 estudantes conseguiram associar, no mínimo uma, destas expressões, por exemplo: a primeira expressão pode-se traduzir na situação - problema, por exemplo: “Sabendo uma balança equilibrada, no prato esquerdo tem quatro caixas e peso de 5 quilogramas e no prato direito tem peso 25 quilogramas. Quanto peso de cada caixa?”. O exemplo da situação - problema que permite traduzir a segunda expressão ($y = 2x + 1$) é “Um tomateiro cresce 2 cm por dia. Se o Tiago plantou um tomateiro de 1cm no 1.º dia, calcula a altura da tomateiro depois de 20 dias”. E “Um pão é composto por 2 gramas de açúcar e 2 gramas de trigo. Expressa a formula geral do peso de pão” é o exemplo para a terceira expressão ($P = 2c + 2l$).

Relativamente à enunciação da tarefa que se basea na tarefa de movimento do *kayak* (Tarefa 6b e 6c), ninguém conseguiu resolver esta questão, o que é uma consequência de os estudantes não terem sido familiarizados com este tipo de tarefa sobre modelação.

A falta do CDM implica dificuldades nas construções ou nas modificações das tarefas. Esta realidade demonstra a importância que durante a formação dos futuros professores se deve atribuir ao desenvolvimento do conhecimento sobre como construir exemplos ou tarefas de Matemática.

O facto de os respondentes estarem habituados com tarefas do tipo de cálculo algébrico, eles têm dificuldade em responder as tarefas do tipo de resolução de problema, como acontece nas suas respostas das tarefas 3, 6 e 8. Além disso, dificulta também a identificação dos vários conhecimentos algébricos que estão envolvidos.

Assim, baseando-nos na realidade que se encontrou durante a realização do estudo piloto, identifica-se a necessidade de os estudantes terem uma intervenção sobre o RA e o CDM, em particular sobre a modelação Matemática. Importa também reforçar os conhecimentos dos estudantes relativamente aos conceitos matemáticos sobre sequência e regularidade, equação e função.

3.5 Discussão dos resultados relativamente à caraterização psicométrica das tarefas do QI

Apresentam-se, nesta seção, algumas características psicométricas do QI que foi implementado no estudo piloto. Esta análise ocupa-se das características sobre: os conteúdos avaliados por cada item de questionário; a estimação de índice de dificuldade dos itens de questionário; e a categorização das respostas obtidas baseada na categorização do nível de RA.

Na próxima tabela, apresentam-se as classificações de todos os itens do questionário baseadas nas categorias do CDM sobre o RA para o Ensino Básico e para o Ensino Secundário. Em cada fila e coluna desta tabela apresenta-se a categorização do CDM que é considerado também como análise de validação do conteúdo deste instrumento.

Tabela 3.40 - Conteúdos avaliados por cada item do QI

CONTEÚDO DIDÁTICO	**CONTEÚDO ALGÉBRICO**					
	Estruturas		Funções		Modelação	
	Básica	Secundária	Básica	Secundária	Básica	Secundária
Epistémico (níveis de RA)				5c		3b; 3c
Cognitivo (Significados pessoais)	1a; 1b	7a; 7b	2a; 2b; 2d	5b		3a; 8b; 8c
Instrucional (situações e recursos)		7c	2c		6b	4b; 6c
Conteúdo algébrico (apenas conhecimento comum ou avançado)					4a	6a; 8a

As questões que estão envolvidas no QI são compostas por três categorias do conteúdo algébrico: Estruturas (5 itens); Funções (6 itens); e Modelação (11 itens), e todas as questões estão distribuídos em 36 % (8 itens) para o Ensino Básico e 64 % (14 itens) para o Ensino Secundário.

Relativamente ao conteúdo didático, a maioria destas questões é da faceta cognitiva (11 itens) que serve para avaliar o conhecimento sobre os conteúdos algébricos. Neste caso são de: igualdade, padrão, sequência e regularidade, função linear, família de funções quadráticas, sistema de equações lineares com duas incógnitas, limite da função num ponto e continuidade. Mostra-se, ainda, um maior número de questões da faceta instrucional (5 itens) que estimulam os futuros professores a construírem ou modificarem as tarefas que podem promover a utilização do RA nos seus futuros alunos. Questiona-se, também, em 3 itens da faceta epistémica, os procedimentos utilizados nas resoluções dos problemas e a identificação dos conhecimentos algébricos que se envolveram na resolução da tarefa.

Considera-se a importância de completar a classificação do conteúdo didático, que foi construído por Contreras, Ordoñez e Wilhelmi (2010), adaptando-se mais uma faceta do "conteúdo algébrico que são o conhecimento comum ou avançado" (Godino et al., 2015). Nesta faceta, questiona-se: 1 item sobre o conhecimento comum da Álgebra básica (na interpretação da expressão algébricas sobre equação linear com uma incógnita); e 2 itens do conteúdo algébrico mais avançado que são a aplicação dos conceitos da mecânica clássica (a distância, o tempo e a velocidade) e a aplicação do conceito de limite e continuidade.

Apoiando-nos na apresentação anterior, conclui-se que a configuração das tarefas deste questionário está baseada em todas as categorias do conteúdo algébrico (estrutura; funcional; e modelação), e em todas as categorias do conteúdo didático: faceta epistémica, como reconhecimento algébrico e resolução com procedimentos exclusivos aritmético ou algébrico; faceta cognitiva, como resolução de problema; faceta instrucional, como construção ou modificação da tarefa; faceta conteúdo algébrico (apenas conhecimento comum ou avançado), tendo em conta a proposta do CDM de Godino et al. (2015).

Apresenta-se em seguida, na tabela 3.40, os índices de dificuldades de cada item do QI. Utiliza-se um grau de correção das resposta, em que se categoriza o valor 0 para uma resposta errada e o valor 1 para uma resposta correta. Em seguida calcula-se a média de pontuação de cada item (por exemplo, no caso 1.a, temos respostas certas 16; resposta errada 8; índice de dificuldade, 16/24). Baseando - se na média de pontuação de cada item, transforma-se estas pontuações em intervalo $[0 - 100]$. Interpreta-se depois um valor de 100 como sendo um indicador de que um item é muito fácil e um valor 0 é considerado como indicador para um item muito difícil.

Tabela 3.41 - Índice de dificuldade dos itens de QI

Item	**Índice de dificuldade**
1a. Igualdade de balança de sumo. Resolução	66,7
1b. Igualdade de balança de sumo. Interpretação	37,5
2a. Padrão e sequência de *lafatik*. Resolução	66,7
2b. Padrão e sequência de *lafatik*. Resolução	50
2c. Padrão e sequência de *lafatik*. Enunciação da tarefa	58,3
2d. Padrão e sequência de *lafatik*. Reconhecimento Álgebra	50
3a. Equação linear do custo do almoço. Resolução	0
3b. Equação linear do custo do almoço. Solução aritmética	0
3c. Equação linear do custo do almoço. Solução algébrica	0
4a. Identificação de 1ª expressão	87,5
Identificação de 2ª expressão	45,8
Identificação de 3ª expressão	8,3
4b. Enunciação de problema	12,5
5a. Família da função quadrática. Observação gráfica	91,7
5b. Família da função quadrática. Análise dos efeitos do parâmetro $a > 0$	66,7
Família da função quadrática. Análise dos efeitos do parâmetro $a < 0$	66,7
Família da função quadrática. Análise dos efeitos do parâmetro $0 < a < 1$	8,3
Família da função quadrática. Análise dos efeitos do parâmetro $a > 1$	8,3
5c. Família da função quadrática. Reconhecimento Álgebra	41,7
6a. Sistema das equações lineares do movimento do *kayak*. Resolução	0
6b. Sistema das equações lineares do movimento do *kayak*. Enunciação da tarefa aritmética	0
6c. Sistema das equações lineares do movimento do *kayak*. Enunciação da tarefa algébrica	0
7a. Sistema das equações lineares com a forma geral. Resolução	0
7b. Sistema das equações lineares com a forma geral. Reconhecimento Álgebra	100
7c. Sistema das equações lineares com a forma geral. Enunciação da tarefa algébrica	87,5
8a. Limite e continuidade da taxa do imposto do salário. Solução algébrica	0
8b.Limite e continuidade da taxa do imposto do salário. Reconhecimento Álgebra	0
8c. Limite e continuidade da taxa do imposto do salário. Justificação	0

As tarefas de modelação são consideradas muito difíceis com índice de dificuldade 0 (tarefa 3 - custo do almoço; tarefa 6 - o movimento do *kayak*; e tarefa 8 - a taxa imposto do salário). A maioria destas dificuldades vem da realidade de que os estudantes, futuros professores, não conseguem traduzir da linguagem natural para linguagem Matemática.

Os estudantes têm maior dificuldade na resolução de um sistema de equações com duas incógnitas de um modo geral (tarefa 7a), eles utilizaram um exemplo particular para resolver, utilizaram o método de eliminação ou de substituição ou o método de misto. Manifestaram também uma grande dificuldade relativamente à análise dos efeitos do parâmetro a de uma função quadrática (tarefa 5b) nos casos de $0 < a < 1$ (índice 8,3) e de $a > 1$ (índice 8,3); e a interpretação da expressão de uma fórmula para calcular o valor do variável P com base do variável c e do variável l (índice 8,3), no item 4a da 3ª expressão.

Os itens considerados mais fáceis (índice de dificuldade 66,7) são as tarefas relacionadas com a igualdade da balança (tarefa 1a) e o termo de uma sequência (tarefa 2a). Encontra-se uma maior percentagem de respostas corretas relativamente ao reconhecimento algébrico, como se revela no índice de dificuldade nas tarefas sobre: padrão, sequência e regularidade de *lafatik* (índice 50); família da função quadrática (índice 41,7); e sistema das equações lineares (índice 100).

No enunciado das tarefas (construção de uma tarefa), mostra-se um elevado índice de dificuldade relativamente às tarefas estruturais que é de 58,3 na tarefa do padrão, sequência e regularidade de *lafatik* e de 87,5 na tarefa do sistema das equações lineares.

A tabela seguinte apresenta a categorização dos níveis de RA das respostas dos estudantes relativamente aos itens das questões sobre o conhecimento algébrico.

Tabela 3.42 - Categorização das respostas do QI baseia-se na categorização do nível de RA (Godino et al., 2015)

Tarefa	RC								RE
	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6	EB	
1a	4	4		2				6	8
2a	14	1		1					8
2b	10	1		1					12
3a									24
4a, 1ª expressão			21						3
4a, 2ª expressão			11						13
4a, 3ª expressão			2						22
5b ($a > o$)	2				3			11	8
5b ($a < o$)	2				3			11	8
5b ($0 < a < o$)					2				22
5b ($a > 1$)					2				22
6a									24
7a				15					9
8a									24
Total	32	6	34	19	10	0	0	28	207

RC: Resposta Correta; RE: Resposta Errada; EB: Em Branco

Na tabela acima, as 61,61% respostas são incorretas (207 respostas) e as 38,39% (129 respostas) são corretas. A maioria das respostas incorretas são: as das tarefas de modelação (custo do almoço - 24 respostas; identificação da 3ª expressão – 22 respostas; movimento do *kayak* - 24 respostas; e taxa do salário - 24 respostas); e a da tarefa sobre os efeitos do parâmetro a (para $0 < a < 0$ - 22 respostas; e para $a > 1$ - 22 respostas).

Das 129 respostas corretas: 10 respostas estão categorizadas no nível 4 de RA; 19 respostas estão categorizadas no nível 3 de RA; 34 respostas estão categorizadas no nível 2 de RA; 6 respostas são do nível 1; e 32 respostas do nível 0 do RA. Das vinte e oito respostas que foram categorizados "em branco", pelo facto de apresentarem apenas o resultado final sem argumentos, portanto não foram categorizados em nenhum nível do RA, 6 são da tarefa 1a; 11 são da tarefa 5b no caso $0 < a < 0$; e 11 são da tarefa 5b no caso $a > 1$)

Identifica-se também, na tabela 3.42, um elevado número de soluções que manifestam o nível 0 de RA, o que está indicado pela utilização da linguagem natural e sem realização de operações algébricas (tarefa da balança do sumo); e utilização de uma observação da figura e realização de uma contagem dos objetos para responder (tarefa do padrão e sequência de *lafatik*).

Na tarefa 7 não se encontraram as soluções de forma geral. Os futuros professores construíram exemplos particulares e resolveram-nos com vários métodos de resolução. Mesmo assim, estas soluções estão categorizados no nível 3 pelas utilizações dos símbolos e pelas operações algébricas.

Identifica-se, também, uma manifestação do nível de RA mais avançado na tarefa 5b sobre os efeitos do parâmetro a nos gráficos da função quadrática. As 3 soluções estão categorizados no nível 4 que indicam, pela observação gráfica, os efeitos do parâmetro a e sem envolvimento da operação com este parâmetro.

Neste trabalho, identificou-se a dificuldade dos estudantes nas tarefas de modelação. Esta dificuldade revela a falta de envolvimento dos processos matemáticos importantes, tais como: traduzir da linguagem natural para linguagem Matemática, descrever uma situação - problema, resolver o problema, interpretar e representar relações quantitativas. Por isso, considera-se a necessidade dos estudantes terem, no seu curso, uma disciplina sobre a Modelação Matemática. Além disso, também para aumentar os seus conhecimentos sobre os conceitos de sequência e regularidade, equação e função.

Identificou-se, também, algumas dificuldades dos estudantes sobre o RA. Estas dificuldades manifestaram-se sob a forma de uma grande percentagem de respostas incorretas e o envolvimento da operação numérica ou aritmética, indicando-se um baixo nível de RA.

Com base neste estudo, o resultado do QI mostra que há uma necessidade de os estudantes terem formação adequada que lhes permita desenvolver as habilidades didático-matemáticos em atividades que envolvem o raciocínio algébrico básico e secundário. Através de uma formação adequada, espera-se que os estudantes sejam capazes de promover a capacidade de integrar o conhecimento dos conteúdos e processos matemáticos; a especificidade de ensinar. Este desenvolvimento do conhecimento algébrico deve integrar conteúdos e pedagogia e ensinando os futuros professores do mesmo modo que se espera que eles ensinem os seus alunos (Ponte & Chapman, 2008).

Considerou-se as dificuldades encontradas nas respostas dos estudantes no QI, é necessário que estes estudantes familiarizam com os processos de desenvolvimento das ideias algébricas, tendo em conta os objetos e os processos algébricos envolvidos nas atividades matemáticas (Aké, 2013). Para responder estas necessidades, na seguinte etapa deste estudo vai realizar o desenho, a implementação e a avaliação de uma ação formativa sobre o RA e o CDM para estes estudantes.

Capítulo IV – O desenvolvimento do conhecimento didático-matemático dos futuros professores na formação

A ação formativa sobre Álgebra que foi realizada na formação inicial de professores de Matemática, envolvendo a colaboração dos estudantes do 4.º Ano do curso da Licenciatura do Ensino da Matemática da Universidade Nacional de Timor Lorosa'e (UNTL) é uma parte importante desta investigação. Esta ação formativa teve como objetivos: desenvolver o raciocínio algébrico (RA) dos estudantes, futuros professores, e o seu Conhecimento Didático-Matemático, duas vertentes que estão interligadas. Nesta ação formativa assumiu-se uma abordagem exploratória que foi implementada na unidade curricular de Prática Pedagógica II. Neste capítulo, apresentam-se o contexto da formação inicial de professores de Matemática em Timor-Leste; a abordagem exploratória realizada na ação formativa; a experiência de formação que envolve o programa de intervenção da ação formativa e descrição das atividades realizadas nas sessões da ação formativa; e, por fim, a avaliação da ação formativa.

4.1 Contexto da formação inicial de professores de Matemática em Timor – Leste

A ação formativa desenvolvida nesta investigação foi realizada no âmbito da unidade curricular Prática Pedagógica II, do 8.º semestre do curso de Licenciatura do Ensino da Matemática da Universidade Nacional de Timor Lorosa'e (UNTL), no ano letivo 2015 – 2016. Esta licenciatura foi criada para responder às visíveis necessidades de Timor-Leste em oferecer formação para professores de Matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Básico e o Ensino Secundário Geral. A finalidade do curso não se limita, pois, ao suprimento de conteúdos, mas passa também por desenvolver no aluno um conjunto de capacidades que o vão valorizar como profissional e cidadão e de ampliar o seu raciocínio lógico e espírito de observação e organização (Plano do curso Licenciatura em Educação - Ensino de Matemática, 2015, p.4).

Os estudantes da referida Licenciatura têm na sua formação quatro componentes, de 240 créditos no total, que se distribuem por: unidades curriculares de conteúdo institucional (36 créditos); unidades curriculares de base (18 créditos); unidades curriculares de especialização (122 créditos); unidades curriculares de profissionais (53 créditos); e unidades opcionais (11 créditos). A componente institucional estabelece um conjunto de unidades curriculares transversais no primeiro ano da Licenciatura, cujo objetivo é desenvolver competências linguísticas, pensamento lógico e crítico e valores cívicos. Para atingir este objetivo, todos os estudantes que iniciam o seu percurso académico frequentam as seguintes unidades curriculares institucionais: Língua Portuguesa, Língua Inglesa, Língua Tétum, Matemática Básica e Educação Cívica, Ética e Moral.

As unidades curriculares de base tratam os conteúdos que dão conhecimentos teóricos básicos que servirão de base para os anos seguintes da Licenciatura. Essas unidades são: Tecnologia Multimédia; Introdução à Aritmética e à Álgebra; Trigonometria. Estas duas últimas unidades curriculares são consideradas como base do conhecimento para a construção de outros conhecimentos matemáticos. Relativamente à unidade curricular Introdução à Aritmética e à Álgebra, com 6 créditos, os estudantes aprendem conceitos básicos do conhecimento algébrico, nomeadamente: os conjuntos numéricos (na parte da Aritmética) e as operações algébricas, polinómios e equações polinomiais (na parte da Álgebra). Esta unidade curricular é a única, neste curso, que estuda a Álgebra Básica que será útil para o desenvolvimento do conhecimento mais avançado da Álgebra.

No que respeita às unidades curriculares de especialização de Matemática, os estudantes frequentam vinte unidades curriculares distribuídos pelos oito semestres, como se apresenta na tabela 4.1.

Tabela 4.1 - Unidades curriculares de especialização de Matemática do Departamento da Matemática da UNTL

Ano	Semestre	Unidade Curricular	Área Científica
1.º	1.º	Álgebra Linear I	Ciências exatas
	2.º	Álgebra Linear II	Ciências exatas
2.º	1.º	Álgebra I	Ciências exatas
		Cálculo Diferencial e Integral I	Ciências exatas
	2.º	Álgebra II	Ciências exatas
		Cálculo Diferencial e Integral II	Ciências exatas

		Estatística I	Ciências exatas
3.º	1.º	Cálculo Vectorial e Geometria Analítica I	Ciências exatas
		Estatística II	Ciências exatas
		Metodologia da Pesquisa de Educação	Ciências investigações
		Seminário do projeto da Matemática	Ciências investigações
	2.º	Cálculo Numérico	Ciências exatas
		Cálculo Vectorial e Geometria Analítica II	Ciências exatas
		Matemática Financeiro	Ciências aplicadas
		Programação Linear	Ciências aplicadas
4.º	1.º	Análise Variáveis Reais e Complexas	Ciências exatas
		Geometria Plana e Espacial	Ciências exatas
		Laboratório de Matemática	Ciências aplicadas
		Matemática Computacional	Ciências aplicadas
	2.º	Monografia de Licenciatura	Pedagogia e educação

As unidades curriculares da tabela 4.1 contêm conteúdos específicos para aumentar o conhecimento matemático. O tema da Álgebra envolvido nas quatro unidades curriculares, são: Álgebra Linear I que se envolve os tópicos sobre: Representações de Uma Matriz, Sistemas Lineares, Espaços e Subespaços vetoriais; Álgebra Linear II, onde se estuda sobre Transformações, Projeção, Reflexões e Rotações no Plano, Auto valores e Auto Vetores, Diagonalização, Forma quadrática e as suas classificações; Álgebra I, envolve o tópico sobre Notação do Sistema de Numeração, Conjunto dos Números, Expressões Numéricas, Razões e Proporções, Operações dos Conjuntos Numéricos, Divisibilidade, Factorização, Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Múltiplo Comum (MMC), Congruências, Indução Matemática; Álgebra II, onde se estuda sobre Relações, Operações Internas e Externas, Estruturas Algébricas, Estrutura de Grupo, Anéis.

No que se refere às unidades curriculares de especialização de Matemática, o curso oferece as quatro unidades curriculares das disciplinas opcionais: Equação Diferencial; Introdução à Topologia; Matemática Discreta; e Matemática Finita.

A componente do conhecimento profissional é considerada uma componente importante na capacitação pedagógica dos futuros professores. As unidades desta componente apresentadas na tabela 4.2, perfazem 53 créditos.

Tabela 4.2 - Unidades curriculares de profissionais do Departamento de Matemática da UNTL

Ano	Semestre	Unidade Curricular	Área Científica
2.º	1.º	Psicologia da Educação	Desenvolvimento profissional
		Estudo Currículo de Matemática	Desenvolvimento profissional
		Introdução à Pedagogia	Desenvolvimento profissional
		Sociologia da Educação	Desenvolvimento profissional
	2.º	Orientação e Aconselhamento	Desenvolvimento profissional
		Gestão e Administração Escolar	Desenvolvimento profissional
3.º	2.º	Metodologia do Ensino da Matemática	Desenvolvimento profissional
4.º	1.º	Prática Pedagógica I – Micro do Ensino	Estágio profissional
	2.º	Prática Pedagógica II – Estágio pedagógico	Estágio profissional

Considera-se que as unidades curriculares de Prática Pedagógica I e II, do 4º Ano do Curso, são fundamentais para a preparação de situações de ensino para a prática profissional. A unidade curricular Prática Pedagógica I, considerada como uma disciplina de Micro Ensino, tem como principal objetivo compreender o conhecimento teórico e prático sobre as atividades de ensino antes dos estudantes se deslocarem às escolas. Esta disciplina decorre na sala de aula com a orientação de um professor. Cada um dos estudantes, que está a frequentar esta unidade, deve: planificar atividades de ensino e aprendizagem de um tema de Matemática do programa do currículo para o Ensino Básico ou Ensino Secundário Geral; praticar atividades de ensino sobre um subtema escolhido na aula com os colegas, desempenhando estes últimos o papel de alunos. O professor desta disciplina tem como obrigação orientar os estudantes na escolha do tema de modo a que haja diversidade de temas entre os estudantes na construção do plano do ensino, na escolha de tarefas e, por fim, na realização da prática de ensino na sala de aula.

Relativamente à unidade curricular Prática Pedagógica II, esta unidade curricular decorre nas escolas, tanto do 3.º Ciclo do Ensino Básico como do Ensino Secundário Geral. A Prática Pedagógica possibilita aos estudantes, futuros professores, enfrentarem situações reais nas escolas e assumirem o papel de professores (professores estagiários). Este estágio realiza-se ao longo de um semestre inteiro e com este período de experiência pretende-se promover essencialmente:

a) o desenvolvimento das capacidades dos estudantes nas atividades básicas de estágio nas escolas previstas como local do estágio;
b) ações e interações com os alunos, professores e gestores da escola;
c) a utilização de métodos de ensino adequados na implementação pedagógica

No curso realiza-se, também, uma semana de preparação antes dos estudantes se deslocarem às escolas. Esta preparação tem como objetivo apoiar e preparar os estudantes, futuros professores, na sua integração nos contextos, proporcionando o aprofundamento do conhecimento sobre: o contexto de estágio, os alunos; as práticas de ensino; e postura ética que os estudantes devem assumir como estagiários nas escolas.

A ação formativa realizada nesta investigação, em colaboração com o Departamento do Ensino de Matemática, serviu para renovar e reforçar os conhecimentos que os estudantes precisam, considerou-se importante para preparar os estudantes para o estágio. Esta ação formativa representou, também, uma oportunidade para os estudantes esclarecerem as suas dúvidas relativamente aos conteúdos matemáticos e didáticos.

4.2 Abordagem exploratória realizada na ação formativa

Propõe-se, nesta ação formativa, uma abordagem exploratória envolvendo os estudantes na resolução e discussão de tarefas para aprofundarem os seus conhecimentos sobre Álgebra e o ensino da Álgebra.

A ideia de variedade das atividades que os estudantes realizam com vista a promover uma exploração adequada e rica de tarefas algébricas promove, também, uma comunicação Matemática através de partilha e discussão entre os estudantes. A abordagem exploratória possibilita aos estudantes tem "a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática" (Canavarro, 2011; p.11).

O recurso a tarefas, como a resolução de problemas, é considerado adequado para concretizar trabalho de investigação e de exploração. Uma tarefa de investigação e exploração não é de resolução imediata, requerendo do estudante um esforço de compreensão aprofundado, a formulação de uma estratégia de resolução, a concretização desta estratégia e uma reflexão sobre os resultados obtidos. Estas tarefas contêm um elemento de indefinição ou de abertura, requerendo uma atenção especial à sua formulação, por parte de quem as resolve (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). Têm a característica distintiva de exigirem sempre um trabalho atento de interpretação da situação, a precisar ou reformular as questões a investigar e a construir representações apropriadas. Mais do que um contexto para aplicar conceitos já aprendidos, estas tarefas servem principalmente para promover o desenvolvimento de novos conceitos e para aprender novas representações e procedimentos matemáticos (Ponte, Quaresma & Branco, 2012). Além disso, as explorações e investigações têm muito de modelação – criar uma representação que sirva de base a um modelo matemático da situação dada. Mas também têm uma vertente importante de trabalho matemático como: trabalhar com definições, classificar objetos, relacionar propriedades (Ponte, Quaresma & Branco, 2012).

O trabalho na aula exploratória, nesta ação formativa, realizou-se com recurso ao dois tipos de estratégia: trabalho de grupo, com acompanhamento da formadora; e a discussão coletiva, envolvendo uma apresentação do trabalho e uma discussão das várias resoluções apresentadas.

A estrutura do trabalho exploratório neste estudo baseou-se em três fases, tal como sugerem Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), citado por Canavarro, Menezes e Oliveira (2012), a fase de "lançamento" da tarefa, a fase de "exploração" pelos estudantes, e a fase de "discussão e sintetização". Na primeira fase, em particular nas primeiras sessões, a formadora fez uma introdução às tarefas e apoio na tradução da linguagem natural para a linguagem matemática.

A formadora acompanhou os estudantes no respetivo trabalho de "exploração" das tarefas em pequenos grupos e procurou garantir que todos participassem de forma produtiva. O acompanhamento da formadora foi apenas para esclarecer as questões e/ou orientar o caminho na resolução, mas não para resolver as tarefas. É importante que os comentários e as respostas do professor às eventuais dúvidas dos alunos não reduzam o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein & Smith, 1998) e não uniformizem as estratégias de resolução, a fim de não frustrar a hipótese de em seguida promover uma discussão matemática interessante e desafiante para cada estudante (Canavarro, Menezes & Oliveira, 2012).

Neste contexto, foi importante criar um momento de interação coletiva em que os estudantes apresentaram e discutiram as suas ideias e estratégias, seguida de uma sistematização. Para Ponte (2005), além do envolvimento dos estudantes na realização das tarefas propostas, estes envolvem-se também num segundo momento que visa a discussão e a clarificação do que aprenderam. Além disso, este mesmo autor sublinha que os trabalhos dos estudantes desenvolvidos com uma abordagem exploratória devem proporcionar a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas.

Considera-se, também, que a sintetização que está realizada no final da discussão é um momento importante desta aprendizagem, que todos os estudantes devem reconhecer e partilhar, no qual tanto podem surgir novos conceitos ou procedimentos emergentes da discussão da tarefa como serem revistos e aperfeiçoados conceitos e procedimentos já conhecidos e aplicados (Canavarro, 2011; Stein et al., 2008). Adicionalmente, podem ser estabelecidas conexões com situações anteriores, e/ou reforçados aspetos fundamentais dos processos matemáticos transversais como a representação, a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação Matemática (Canavarro, 2011; Stein et al., 2008).

4.3 Experiência da ação formativa

A ação formativa realizada teve em consideração os princípios orientadores da Educação em Timor - Leste: a Reforma Curricular do Ensino Básico - Princípios Orientadores e Planos de Desenvolvimento (ME-TL, 2009); e o Plano Curricular do Ensino Secundário Geral - Reestruturação Curricular do Ensino Secundário Geral em Timor-Leste (ME-TL, 2011). No que respeita às competências a desenvolver pelos alunos e à exploração pelos docentes na área de Matemática, o ME-TL (2011) sublinha que "Os alunos devem ainda desenvolver raciocínio matemático e compreender o papel que a Matemática desempenha nas sociedades, para serem capazes de elaborar juízos de valor matemático bem fundamentado" (p. 9). A ação formativa realizada neste estudo baseou-se nestas orientações, tentando interligar os temas da ação formativa com situações do quotidiano, do contexto de Timor - Leste. As práticas realizadas na ação formativa tiveram como preocupação, motivar os alunos na construção do conhecimento com base em situações do quotidiano timorense.

A aprendizagem da Álgebra é uma parte importante do currículo de Matemática, em Timor – Leste, e faz a articulação com as capacidades transversais, tais como: o *raciocínio* *matemático*, que envolve a construção de séries de argumentações, pelas simples justificações de passos e evoluindo progressivamente para argumentações mais complexas; a *comunicação matemática,* que envolve as vertentes oral e escrita, incluindo o domínio da linguagem simbólica própria da Matemática; e finalmente a *resolução de problemas,* entendida como a capacidade matemática fundamental onde os alunos devem adquirir e lidar com problemas relativos ao contexto quotidiano e de outras áreas do conhecimento (NCTM, 2008) .

O NCTM nas suas orientações no estudo da Álgebra sugere uma articulação entre o tema da Álgebra e o tema dos Números e Operações, considerando a interligação de *Early Algebra*, partindo da Aritmética para a Álgebra. Neste documento define-se, também, os objetivos gerais para a aprendizagem de Matemática para todos os anos de escolaridade, nomeadamente:

- Compreender padrões, relações e funções;
- Representar e analisar situações Matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos;
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
- Analisar a mudança em vários contextos (NCTM, 2008: p.262).

A experiência de formação realizada nesta investigação procurou responder às necessidades dos estudantes, futuros professores, contribuindo para estes refletirem e aprofundarem o seu conhecimento sobre a Álgebra e, ao mesmo tempo, procurou promover o desenvolvimento do RA. Considerou-se que os estudantes, deste curso, deveriam ter conhecimento profundo sobre a Matemática que vão ensinar, informação que reforça a importância de se ensinar estes futuros professores do mesmo modo que se espera que eles ensinem os seus alunos (Ponte & Chapman, 2008).

Deste modo, além do conhecimento matemático da Álgebra, nesta ação formativa promoveu-se o conhecimento didático-matemático. A integração destes dois conhecimentos é fundamental para que os estudantes compreendam como transformar um conteúdo algébrico num conteúdo para ser ensinado (Godino et. al., 2014).

A ação formativa referida tem por base o desenvolvimento do RA dos estudantes. Acrescentando a este aspeto, a ação de formação possibilitou: a introdução do conhecimento sobre o RA, baseada nos objetos e processos algébricos que estão envolvidos na Matemática quer do Ensino Básico quer do Ensino Secundário Geral; o conhecimento do modelo de "níveis de RA", permitindo selecionar e gerir na sala de aula atividades apropriadas para promover o desenvolvimento progressivo do RA dos alunos; e o desenho de exemplos de tarefas algébricas que envolvam soluções que implicam mudanças nos níveis de RA.

De modo a responder aos diversos objetivos, esta ação formativa envolveu várias atividades de ensino e de aprendizagem da Álgebra, visando o aprofundamento do CDM. As aulas realizadas nesta ação formativa têm como objetivo :

a) refletir e reforçar os conhecimentos algébricos que os estudantes já tinham aprendido;
b) introduzir os novos conhecimentos sobre o RA e o CDM;
c) aprofundar o conhecimento sobre resolução da tarefa do tipo de modelação Matemática.

Durante a realização das aulas de intervenção da ação formativa, realizaram-se também discussões com o objetivo de partilhar ideias e dialogar (pergunta-resposta) sobre os temas. As atividades práticas realizadas em trabalho de grupo, com 4 a 5 estudantes em cada grupo, depois da apresentação do tema. A análise de situações das aulas de intervenção e das atividades práticas realizadas serviram para: analisar o conhecimento que os estudantes revelaram naquele momento; analisar o raciocínio efetuado pelos estudantes para resolver as tarefas; observar os tipos de representações envolvidas na resolução de tarefas; identificar os erros e as dificuldades que se manifestaram nas respostas dos estudantes.

A programação inicial da ação formativa envolveu 9 sessões presenciais :

1.ª sessão: apresentação do programa;
2.ª sessão: objetos e processos algébricos;
3.ª sessão: atividade prática 1;
4.ª sessão: modelo do RA para o Ensino Básico;
5.ª sessão: atividade prática 2;
6.ª sessão: modelo do RA para o Ensino Secundário;
7.ª sessão: atividade prática 3;
8.ª sessão: aplicação do questionário final;
9.ª sessão: entrevista clínica a alguns estudantes.

Esta programação inicial sofreu alterações, considerando as dificuldades manifestadas pelos estudantes ao longo da ação formativa. As dificuldades foram sentidas sobretudo ao nível da identificação de objetos e processos algébricos, de conhecimentos sobre alguns tópicos matemáticos (e. g, a modelação Matemática; estudo de funções).

A tabela 4.3 apresenta a estrutura da ação formativa já com as alterações ao plano inicial. Ou seja, as necessidades dos estudantes determinaram a realização da ação formativa de uma forma mais flexível, dependendo também do tempo que os estudantes necessitaram para compreender as matérias. O programa da ação formativa realizou-se entre 18 de fevereiro de 2016 e 27 de abril de 2016, antes da deslocação dos estudantes para as escolas para realizar o seu estágio profissional. A ação formativa distribuiu-se em 12 sessões com a duração de 2 horas (em média) por sessão, realizando-se dois dias por semana, na quarta-feira e na quinta-feira. Além destas sessões , realizaram-se 3 sessões de entrevistas clínicas (13, 20 e 21 de abril de 2016) a alguns estudantes, com duração de 1 hora por sessão. No dia 27 de abril de 2016 teve lugar uma atividade de encerramento, com duração de 90 minutos, tendo como objetivo refletir sobre todas as atividades desenvolvidas.

Tabela 4.3 - Programa da ação formativa realizada neste estudo

Datas	Seções	Tópicos
18/02/2016	Introdução	- Apresentação do programa de intervenção; - Contextualização da Álgebra.
24/02/2016	Letiva	Objetos e processos algébricos básicos.
25/02/2016	Letiva	
02/03/2016	Letiva	Modelação Matemática à luz do RA.
03/03/2016	Letiva	Estudo de uma função real de variável real, com as suas características (sobrejetiva, injetiva, bijetiva)
09/03/2016	Atividade prática 1 e discussão	- Resolução de tarefas, envolvendo a identificação dos objetos e processos algébricos básicos; - Discussão sobre as soluções das tarefas nesta atividade prática.
10/03/2016	Letiva	Modelo do RA para o Ensino Básico.
16/03/2016	Exercícios e discussão	- Resolução dos exercícios sobre as tarefas que envolvem o RA para o Ensino Básico; - Discussão sobre as soluções das tarefas dos exercícios.
17/03/2016	Atividade prática 2 e discussão	- Reflexão sobre as características do RA para o Ensino Básico; - Discussão sobre as soluções das tarefas nesta atividade prática.
23/03/2016	Letiva	Modelo do RA para o Ensino Secundário.
24/03/2016	Exercícios e discussão	- Resolução dos exercícios sobre as tarefas que envolvem o RA para o Ensino Secundário; - Discussão sobre as soluções das tarefas dos exercícios.
30/03/2016	Atividade prática 3 e discussão	- Reflexão sobre as características do RA para o Ensino Secundário; - Discussão sobre as soluções das tarefas nesta atividade prática.

Outra alteração do programa da ação formativa vinha, também, da necessidade dos estudantes de compreender e de ter mais exemplos das tarefas que manifestam as soluções de vários níveis do RA. Portanto, acrescentaram-se duas sessões de "Exercícios e discussão", uma sessão depois da apresentação do "Modelo do RA para o Ensino Básico" e outra sessão depois da apresentação do "Modelo do RA para o Ensino Secundário".

Considerou-se a necessidade dos estudantes de ter mais tempo para resolverem as tarefas e para realizarem as discussões nas salas de aulas durante a atividade prática 2 e a atividade prática 3, portanto estas duas atividades tiveram um prolongamento relativamente ao tempo previsto e passaram a ter a duração de 3 horas.

4.3.1 Descrição das atividades das sessões da ação formativa

Considera-se importante descrever as atividades realizadas nas sessões da ação formativa para dar uma "imagem" sobre a formação desenvolvida. Nas sessões das atividades práticas (sessão 6, sessão 9 e sessão 12), além de se apresentarem as tarefas e as soluções previstas, apresentou-se também a análise das respostas dos grupos de estudantes onde se identificou o seu conhecimento algébrico, os erros algébricos que manifestaram nas suas respostas e o seu CDM.

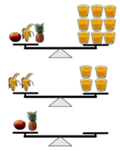
Sessão 1*- Apresentação do programa de intervenção e contextualização da Álgebra*

A apresentação do programa de intervenção e investigação em educação de Matemática foi a primeira atividade desta sessão formativa. Nesta sessão apresentou-se o programa de intervenção: os objetivos; os tópicos; as atividades envolvidas; e o cronograma. Apresentou-se, também, uma contextualização sobre: a Álgebra; o ensino de Álgebra; a diferença entre Aritmética e Álgebra; características da resolução de problema com o método aritmético e com o método algébrico. Esta contextualização serviu, também, para identificar conhecimentos dos estudantes sobre Álgebra.

De modo a fazer a introdução aos estudantes do conceito de Álgebra e a mostrar a diferença entre este conceito e a Aritmética, apresentou-se um exemplo do questionário inicial, a tarefa 1 do QI. (ver anexo II). Esta tarefa 1 teve como objetivo corrigir e apresentar a resolução correta.

Figura 4.1 – Tarefa 1 do QI "Balança de sumo"

Vamos analisar as respostas manifestadas pelos alunos relativamente à tarefa da balança de sumo



Quantos copos de sumo tem que se colocar na terceira balança, para ficar equilibrada?

Deram-se dois exemplos diferentes de respostas apresentadas por dois estudantes na realização desta tarefa.

Tabela 4.4 – Dois exemplos de respostas apresentados dos estudantes relativamente à tarefa 1 do QI.

Estudante A	*Estudante B*
Na 2.ª balança: 2 banana = 4 copos, então 1 banana = 2 copos Na 1.ª balança: 1 maçã, 1 banana, 1 ananás = 9 copos Se eu tiro 1 banana, tiro também 2 copos. É igual da 3.ª balança. Para ficar equilibrada precisa 7 copos de sumo.	Sendo M: maçã, B: banana, A: ananás, e C: copo , então na 2.ª balança podemos traduzir em 2B = 4C, B = 2C Na 1.ª balança: M + B + A = 9C Substituímos B = 2C na equação da 1.ª balança, M + 2C + A = 9C M + A = 9C – 2C M + A = 7C Então, colocamos 7 copos na terceira balança.

Partindo-se destes exemplos, pediu-se aos estudantes para observarem e identificarem as características das duas respostas com a reflexão sobre estes dois tipos de respostas, pretendeu-se que os estudantes identificassem se existe ou não: o envolvimento de símbolo algébrico; e da operação algébrica. Baseados nesta identificação, os estudantes podem tirar conclusões sobre o tipo das respostas: *aritmética* (solução do estudante A), não envolve nenhum símbolo algébrico e opera-se diretamente com os números; ou *algébrica (solução do estudante B)* que envolve os símbolos algébricos e aplica operações com estes símbolos.

__Sessão 2__ - Objetos e processos algébricos básicos

Nesta sessão abordaram-se vários conceitos básicos de Matemática, nomeadamente: a igualdade; a variável; o parâmetro; a equação; e a função. O domínio do conceito da igualdade ou o significado do sinal "=" (igual) é uma compreensão fundamental na aprendizagem da Matemática e, portanto, deve ser trabalhando desde o inicio da escolaridade. Ponte, Matos e Branco (2009) referem a importância de assumir a noção de igualdade desde o início de escolaridade. De acordo com estes autores, nos primeiros anos de escolaridade, os alunos devem descrever e representar as relações que identificam usando linguagem natural e, progressivamente, usar também alguns símbolos matemáticos. Já no 2.º ciclo do Ensino Básico, procura-se que os alunos desenvolvam a capacidade de identificar relações e de as descrever recorrendo a linguagem simbólica.

Nesta intervenção, pretendeu-se verificar se os estudantes têm conhecimento sobre diferentes tipos e significados de igualdade, no que respeita a teoria do Godino e Font (2003):

- Se na igualdade aparecem variáveis e a igualdade é verdadeira para quaisquer valores das variáveis, isto é uma *identidade*. Por exemplo, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Se a igualdade é verdadeira apenas para certos valores das variáveis, isto é uma *equação*. Por exemplo, $a + 3 = 7$.
- A igualdade também é utilizada para expressar a relação de dependência entre duas ou mais variáveis, uma *fórmula*. Por exemplo, $E = 1 / 2gt^2$.

Além da distinção apresentada, considera-se também que os estudantes devem compreender os diferentes significados da igualdade, como se apresenta na tabela 4.5.

Tabela 4.5 - Significados da sinal de igualdade

Significado	**Descrição**	**Exemplos**
Significado operacional	Operação igual a resposta	$24 : 6 - 3 = 1$
Significado relacional	Identidade aritmética simétrica	$5 + 7 = 7 + 5$ $19 = 10^2 - 9^2$
	Equivalência formal que descreve térmos equivalentes	$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
	Equação condicional que carateriza incógnitas	Resolve, $x^2 = -x + 6$
	Identidades contextuais em fórmula (dependência	Fórmula de volume de um cilindro:

	funcional)	$V = \pi r^2 h$ Teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$
Especificação	Definição dos conceitos da assinação de uma nome a um objeto matemático	$m := \frac{1}{2}(a+b)$ $y := 2x + 52$

Godino e Font (2003) apresenta quatro significados principais de variável em Matemática, nomeadamente:

1) *variável como incógnita,* quando se utiliza para representar números (ou outros objetos), a incógnita envolve objeto matemático desconhecido que se manipula como se fosse conhecido;
2) *variável como valor indeterminado ou expressão de padrões gerais*, quando a variável se utiliza em situações que são verdadeiras para todos os números (ou elementos do conjunto que está em causa/questão);
3) *variáveis para expressar quantidades de variáveis conjuntamente*, quando existe uma relação de dependência entre variáveis ocorre quando a mudança de uma variável determina a alteração na outra;
4) *variáveis como constante ou parâmetros*, por exemplo no caso da letra "a" na fórmula da função de proporcionalidade da $y = ax$, na primeira atribui-se um valor ao parâmetro a, obtém-se uma função de proporcionalidade direta. Na segunda, deve-se considerar que "a" pode variar e assumir qualquer valor. Por isso, obtemos a família das funções da proporcionalidade.

Com o objetivo de aprofundar a compreensão sobre parâmetro, apresentaram-se quatro significados de parâmetro tendo por base Drijvers (2003):

1) *Parâmetro como placeholder*, o parâmetro é visto como uma posição, um espaço vazio em que os valores numéricos podem ser inseridos e a partir do qual pode ser recuperado. O valor na "caixa vazia" é um valor fixo, conhecido ou desconhecido. Neste sentido, o foco não está em encontrar o valor desconhecido;
2) *Parâmetro como a quantidade duma mudança*, neste caso o parâmetro adquire um carácter dinâmico. Esta variação afeta a situação completa, a fórmula, o gráfico global, ao passo que a variação de uma "ordinária" variável só age localmente. O conceito de parâmetro como uma quantidade de uma mudança está relacionada com a reificação de gráficos e fórmulas;

3) *Parâmetro como termo generalizador*, é utilizado para generalizar sobre classes de situações, de casos concretos, de expressões, fórmulas e soluções. Ao fazê-lo, o "parâmetro de família" representa essas classes. Neste sentido, o parâmetro não é um número específico, mas representa um exemplar de números ou um conjunto de números. A representação genérica permite vendo o geral no particular, para resolver as categorias de problemas e para a formulação de soluções ao nível geral;
4) *Parâmetro como uma incógnita*, o parâmetro adquire o papel de um valor desconhecido que deve ser encontrado, ou seja uma incógnita. Normalmente, para os estudantes, a variável desempenha um papel de incógnita, deste modo o parâmetro toma, também, o papel de valor desconhecido e é entendido.

A equação linear foi o último tema a ser lecionado nesta sessão. Iniciou-se com o conceito básico de equação linear com uma incógnita e equações equivalentes. No final desta sessão, apresentou-se uma tarefa para os estudantes refletirem, em casa, relativamente aos seus conhecimentos sobre a forma de resolução da equação linear com duas incógnitas. Esta tarefa tornou-se também num meio para introduzir o tema da função linear que será discutido na próxima sessão.

Sessão 3 - *Objetos e processos algébricos básicos (continuação)*

Iniciou-se a sessão 3 com uma discussão sobre a tarefa que tinha sido apresentada no final da sessão 2.

Figura 4.2 – Exemplo da tarefa "Padaria"

Todos os dias a padaria "*Dader Diak*" produz dois tipos de pão, o pão redondo e o pão caixote. Para fazer um pão redondo precisa-se de 20 gramas de farinha. São necessários 30 gramas de farinha para fazer um pão caixote. Cada dia o cozinheiro prepara 5 quilogramas de farinha. Para ganhar mais dinheiro, o cozinheiro deve utilizar todas farinhas.

a. É possível fazer 100 pães redondos e 100 pães caixotes?
b. É possível fazer 175 pães redondos e 50 pães caixotes?
c. Há outras possibilidades de quantidades de cada pão?

Começou-se a solução com o processo de conversão da medida da farinha em gramas para produzir os pães, o que significa que 1 quilogramas é igual à 1000 gramas. Aritmeticamente é possível fazer os pães com as quantidades que estão indicadas no item a e no item b. Para além disso, ainda há outra possibilidade de confecionar os pães com outras quantidades para cada tipo de pão, por exemplo: os 25 pães redondos e os 150 pães caixotes. Realizou-se uma discussão sobre a resolução algébrica de problema. Se x representa o número de pães redondos e y representa o número de pães caixote, então a equação $20x + 30y = 5000$ representa o fabrico diário de pão. Os pares de $x = 100$ e $y = 100$ e de $x = 175$ e $y = 50$ são soluções da equação. E também $x = 25$ e $y = 150$ é solução desta equação. Baseados nestes exemplos, os estudantes podem compreender que há mais do que uma solução para resolver esta situação e fazem uma generalização, recorrendo a uma equação linear com duas incógnitas. Mesmo assim, sublinhou-se que os estudantes devem ser cuidado com a resolução de um problema de contexto real. Por exemplo, da mesma tarefa, $x = 150$ e $y = 66\ \frac{2}{3}$ também cumprem a equação mas não é a solução desta equação, porque é impossível produzir $\frac{2}{3}$ do pão.

Alargou-se a discussão ao tópico de duas equação lineares com duas incógnitas para iniciar os sistemas das equações lineares com duas incógnitas. Para esta discussão modificou-se a tarefa da padaria acrescentando o açúcar na lista de ingredientes dos dois tipos de pão.

Figura 4.3 – Modificação do exemplo da tarefa "Padaria"

Para o pão redondo colocam-se 10 gramas de açúcar e 5 gramas para o pão caixote. O cozinheiro prepara 2 quilogramas de açúcar todos dias e os dois ingredientes devem ser utilizados em todos. Quantos pães redondos e caixotes podem fazer com estes ingredientes?

A resolução deste novo problema iniciou-se com a determinação de duas equações relativamente aos ingredientes: $20x + 30y = 5000$, para a quantidade da farinha; e $10x + 5y = 2000$, para a quantidade da açúcar. Nesta etapa incentivou-se os estudantes a analisarem se todas as soluções encontradas na primeira equação (a quantidade de farinha) também seriam soluções para segunda equação (a quantidade de açúcar). Durante esta análise os estudantes concluíram que nem todas as soluções da primeira equação são soluções para segunda equação, por exemplo: $x = 100$ e $y = 100$ é uma das soluções da primeira equação, mas não é solução da segunda equação. A única solução para duas equações é $x = 175$ e $y = 50$. O processo de encontrar uma solução para duas equações lineares com duas incógnitas não é fácil e pode levar mais tempo a resolver. Partindo-se deste reconhecimento, solicitou-se aos estudantes que resolvessem um sistema das equações lineares com duas incógnitas utilizando vários métodos de resolução. Para resolver esta tarefa com um procedimento algébrico, a formadora e os alunos resolveram (em conjunto) recorrer a dois métodos da resolução: o método do misto, que se considera mais conhecido pelos estudantes; e o método da matriz inversa que envolve o conhecimento da matriz. Apresenta-se, de seguida, a resolução com método do misto (<u>Solução A</u>) e com método da matriz inversa (<u>Solução B</u>).

Inicialmente, traduziram todas as informações dadas na tarefa para linguagem simbólica. Sendo que x é o número do pão redondo e y é o número do pão caixote. A quantidade da farinha para um pão redondo é 20 gramas e para um pão caixote é 30 gramas, a quantidade da farinha que está disponível é de 5 quilogramas (5000 gramas). Portanto, a expressão algébrica para esta informação é 20 x + 30 y = 5000. Do mesmo modo, traduziram a segunda informação: a quantidade da açúcar para um pão redondo é 10 gramas e para um pão caixote é 5 gramas, a quantidade da açúcar que está disponível é 2 quilogramas (2000 gramas). Logo, a segunda expressão algébrica é 10 x + 5 y = 2000. Das duas expressões resultam um sistema das equações lineares com duas incógnitas:

$\begin{cases} 20x + 30y = 5000 \\ 10x + 30y = 2000 \end{cases}$ e resolveram-se com dois métodos resolução:

<u>Solução A</u> – resolução da tarefa da padaria "Dader diak" pelo método misto.

Pelo método da eliminação, elimina-se a incógnita x

$$20x + 30\,y = 5000\ (múltiplica\ com\ 1)$$
$$10x + 5\,y = 2000\ (múltiplica\ com\ 2)$$

$$\begin{array}{r} 20x + 30\,y = 5000 \\ \underline{20x + 10\,y = 4000} \\ 20y = 1000 \end{array} - \text{; então } y = \frac{1000}{20} = 50$$

Substitui-se o valor de $y = 50$ na segunda equação:

$y = 50 \rightarrow 10x + 5\,y = 2000$

$\Leftrightarrow 10x + 5\,(50) = 2000$

$\Leftrightarrow 10x + 250 = 2000$

$\Leftrightarrow 10x = 2000 - 250$

$\Leftrightarrow x = \frac{1750}{10} = 175$

Assim, a quantidade de pães redondos que poderá ser produzida é 175 e de pães caixote é 50.

Solução B – resolução da tarefa da padaria "Dader diak" com método da matriz inversa.

Para resolver o sistema das equações lineares com duas incógnitas com método da matriz inversa, no primeiro momento traduziu-se as equações lineares para a equação matriz da forma $A \times P = B$, portanto $P = A^{-1} \times B$. Neste caso:

$$\underset{A\ \times\ P}{\begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} 5000 \\ 2000 \end{bmatrix}} .$$

Sendo uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, então matriz inversa A é $A^{-1} =$

$$\frac{1}{a_1\ b_2 - a_2\ b_1} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

Para determinar matriz inversa de A, deve-se identificar o valor do determinante que se obtém pela fórmula $|A| = a_1\ b_2 - a_2\ b_1$, portanto:

$$|A| = a_1\ b_2 - a_2\ b_1 = 20 \times 5 - 30 \times 10 = 100 - 300 = -200$$

Assim, $A^{-1} = \frac{1}{-200} \begin{bmatrix} 5 & -30 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}$

A solução desta equação matriz obtém-se pela fórmula $P = A^{-1} \times B$. Para resolver a equação matriz envolvem-se as propriedades da: multiplicação entre dois matrizes e multiplicação de matriz e escalar. Portanto,

$$P = \frac{1}{-200} \begin{bmatrix} 5 & -30 \\ -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5000 \\ 2000 \end{bmatrix} = \frac{1}{-200} \begin{bmatrix} 5 \times 5000 + (-30) \times 2000 \\ (-10) \times 5000 + 20 \times 2000 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{-200} \begin{bmatrix} 25000 - 60000 \\ -50000 + 40000 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-200} \begin{bmatrix} -35000 \\ -10000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-35000}{-200} \\ \frac{-10000}{-200} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Assim, $x = 175$ e $y = 50$, ou seja a quantidade de pães redondos que poderá ser produzida é 175 e o pão caixote é 50.

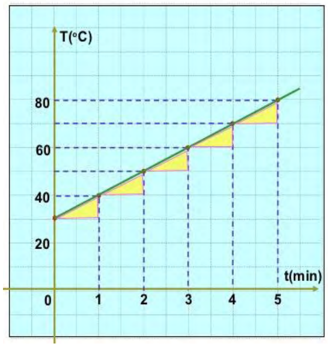
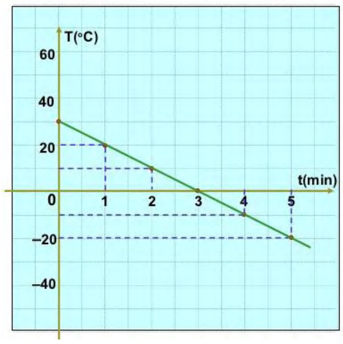
Nesta sessão 3, os estudantes aprofundaram os seus conhecimentos sobre o tema da Função Real de Variável Real. Apresentaram-se duas situações e levaram-se os estudantes a analisar estas situações.

Figura 4.4 – Exemplo da tarefa "Aquecimento da água"

Sendo que temperatura de água num jarro é 30º C. Vamos analisar as seguintes situações distintas.
1. O Mausoko aqueceu a água no fogão e observa a mudança da temperatura. Sua temperatura varia com o tempo de maneira uniforme, aumentando 10º C por minuto. Observe as temperaturas, medindo-as minuto a minuto. *2.* O Mausoko deixou a água no frigorífico e observou a mudança da temperatura. A temperatura varia com o tempo de maneira uniforme, diminui 10º C por minuto. Observe as temperaturas medidas minuto a minuto.

Os estudantes analisaram várias possibilidade de representações para expressar esta situação. Pode-se expressar através de um gráfico, uma tabela ou uma expressão da função, como se apresenta a seguir.

Tabela 4.6 - Várias representações da situação - problema sobre o aquecimento da água

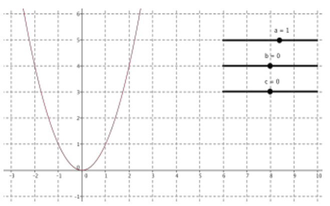
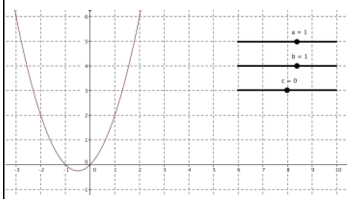
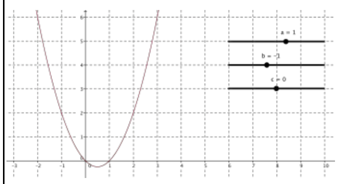
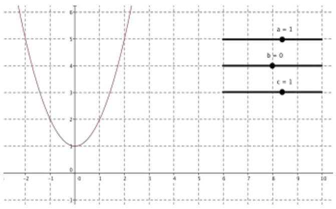
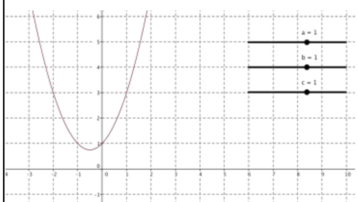
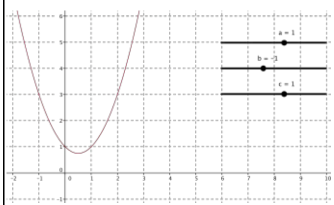
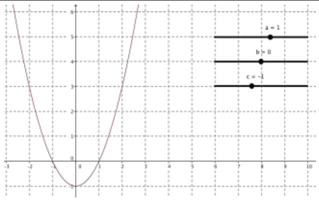
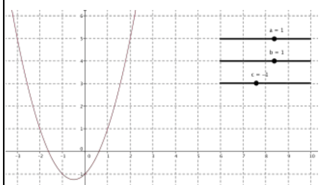
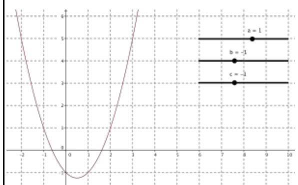
<table>
<tr><th>Expressão</th><th>1.ª situação</th><th>2.ª situação</th></tr>
<tr><td>Tabela</td><td><table><tr><td>t(min)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>T (ºC)</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td><td>80</td></tr></table></td><td><table><tr><td>t(min)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>T (ºC)</td><td>30</td><td>20</td><td>10</td><td>0</td><td>-10</td><td>- 20</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Gráfico</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Expressão</td><td>A taxa de variação da temperatura é positiva (10ºC/min).
Após t minutos, a temperatura T da água em graus Celsius é T = 30 + 10t</td><td>A taxa de variação da temperatura é negativa (10ºC/min).
Após t minutos, a temperatura T da água em graus Celsius é T = 30 - 10t</td></tr>
</table>

Tendo por base a observação da tabela 4.6, os estudantes podem tirar a conclusão que a variação da temperatura tem implicações no crescimento ou no decrescimento da temperatura da água. Ou seja, a função apresenta $T = ax + b$, então se $a > 0$, a função é crescente e pelo contrário se $a < 0$, a função é decrescente. Assim, o (de)crescimento de uma função depende do parâmetro a.

No final da sessão 3 apresentou-se os vários modelos de função, nomeadamente: função constante (por exemplo: $f(x) = 3$); função simétria (por exemplo: $f(x) = x^2$); função linear (por exemplo: $f(x) = 3x$); função afim (por exemplo: $f(x) = 3x - 2$); e função quadrática (por exemplo: $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$). Particularmente, aprofundou-se o conhecimento dos estudantes nas características da função afim e da função quadrática que se baseia nos valores dos seus parâmetros. O valor do parâmetro a e do parâmetro b implicou-se a variação do gráfico da função afim $y = f(x) = ax + b$.

Na discussão sobre o impacto dos parâmetros na função quadrática, apresentou-se uma demonstração dos gráficos e utilizou-se o programa de *GeoGebra*. A utilização deste programa teve como objetivo ajudar os estudantes a compreender os efeitos dos parâmetros (a, b e c) na função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}\, e\, a \neq 0)$ e as suas implicações nas mudanças do gráfico. Nesta fase, com o programa de *GeoGebra,* a formadora apresentou no projetor os vários gráficos de $y = ax^2 + bx + c$. No primeiro momento, a formadora apresentou um exemplo do gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ com $a > 0,\ b = 0\ e\ c = 0$ (gráfico 1.1 da tabela 4.6). Seguidamente, com os mesmos gráficos substitui outros valores nos parâmetros b e c, como se apresenta na tabela 4.7. Analogamente, apresentaram-se exemplos do gráfico para $a > 0$ e vários valores de parâmetro b e c, como se apresenta na tabela 4.8.

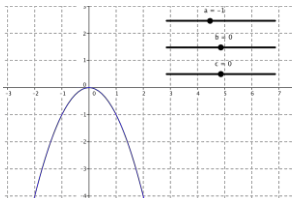
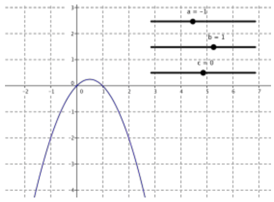
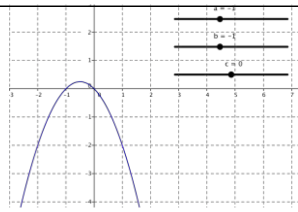
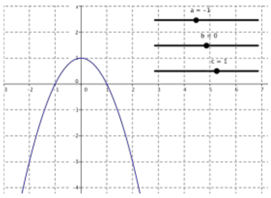
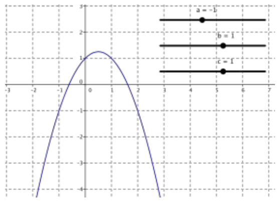
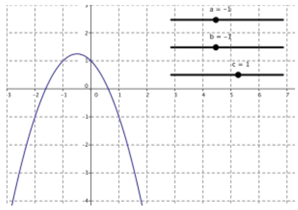
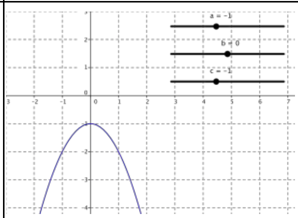
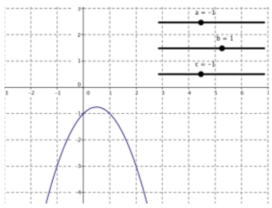
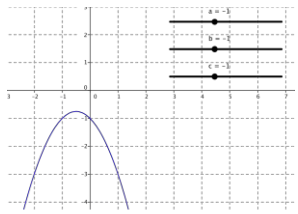
Tabela 4.7 – Gráficos das funções quadráticas $y = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a > 0)$

Para $\boldsymbol{a > 0}$	$\boldsymbol{b = 0}$	$\boldsymbol{b > 0}$	$\boldsymbol{b < 0}$
$\boldsymbol{c = 0}$	 Gráfico 1.1	 Gráfico 1.2	 Gráfico 1.3
$\boldsymbol{c > 0}$	 Gráfico 2.1	 Gráfico 2.2	 Gráfico 2.3
$\boldsymbol{c < 0}$	 Gráfico 3.1	 Gráfico 3.2	 Gráfico 3.3

Tendo por base a observação de todos gráficos na tabela 4.7, os estudantes constataram que todos os gráficos têm abertura voltada para cima, ou seja, o sinal positivo do parâmetro $\boldsymbol{a}$ implica a concavidade da parábola, correspondente à expressão $y = ax^2 + bx + c$, está voltada para cima.

Analogamente, apresentaram-se exemplos do gráfico para $a < 0$ e vários valores para os parâmetro b e c, como se mostra na tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Gráficos das funções quadráticas $y = ax^2 + bx + c \;\; (a, b, c \in \mathbb{R} \; e \; a < 0)$

Para $a < 0$	$\boldsymbol{b = 0}$	$\boldsymbol{b > 0}$	$\boldsymbol{b < 0}$
$\boldsymbol{c = 0}$	 Gráfico 1.1	 Gráfico 1.2	 Gráfico 1.3
$\boldsymbol{c > 0}$	 Gráfico 2.1	 Gráfico 2.3	 Gráfico 2.3
$\boldsymbol{c < 0}$	 Gráfico 3.1	 Gráfico 3.2	 Gráfico 3.3

Através da observação dos gráficos, pode - se ver na tabela 4.8, os estudantes observaram que todos os gráficos da função $y = ax^2 + bx + c$ têm a concavidade para baixo.

Relativamente ao parâmetro b, se o valor do parâmetro b é positivo então a parábola cruza o eixo Y no ramo crescente. Este caso pode-se observar na tabela 4.7 (gráfico 1.2; gráfico 2.2; e gráfico 3.2), e na tabela 4.8 (gráfico 1.2; gráfico 2.2; e gráfico 3.2). Se o valor do parâmetro b é negativo, então a parábola cruza o eixo Y no ramo decrescente, como se pode observar na tabela 4.7 (gráfico 1.3; gráfico 2.3; gráfico 3.3) e na tabela 4.8 (gráfico 2.1; gráfico 2.2; gráfico 2.3).

Os estudantes também observaram os efeitos do parâmetro c e tiraram a conclusão que o valor do parâmetro c indica o ponto em que a parábola cruza o eixo Y. Neste sentido, se o valor c é positivo, como mostram a tabela 4.7 (gráfico 2.1; gráfico 2.2; e gráfico 2.3) e a tabela 4.8 (gráfico 2.1; gráfico 2.2; e gráfico 2.3), a parábola cruza no eixo Y positivo. Por outro lado, se o valor c é negativo, como mostram a tabela 4.6 (gráfico 3.1; gráfico 3.2; e gráfico 3.3) e a tabela 4.8 (gráfico 3.1; gráfico 3.2; e gráfico 3.3), a parábola cruza no eixo Y negativo.

Assim, na observação de todos gráficos (da tabela 4.7 e da tabela 4.8), os estudantes tiraram as conclusões relativamente aos efeitos dos parâmetros a, b e c. Neste caso, o parâmetro a influencia a concavidade da parábola. Significa que se o parâmetro a for positivo ($a > 0$), a parábola terá a concavidade para cima e se este fosse negativo ($a < 0$), a parábola teria concavidade para baixo. O valor absoluto de a influencia a abertura da parábola. Quanto maior é o valor absoluto de a, menor a abertura da parábola.

O parâmetro c influencia a intersecção da parábola com o eixo Y. Se ele for positivo o gráfico terá o ponto de interseção com o eixo Y acima da origem; se for negativo então terá o ponto de interseção com o eixo Y abaixo da origem e; se for zero, terá o ponto de interseção com o ponto origem do referencial.

No final desta sessão a formadora apresenta novamente a tarefa 5 do QI sobre a família da função quadrática (ver o anexo II). Na tarefa 5 foram questionados os efeitos do parâmetro a de uma função $y = ax^2$ nas situações: $a > 0$; $a < 0$; $0 < a < 1$; e $a > 1$. Nesta apresentação recorreu-se também a uma apresentação gráfica com o programa de *GeoGebra.*

Sessão 4: *Modelação Matemática*

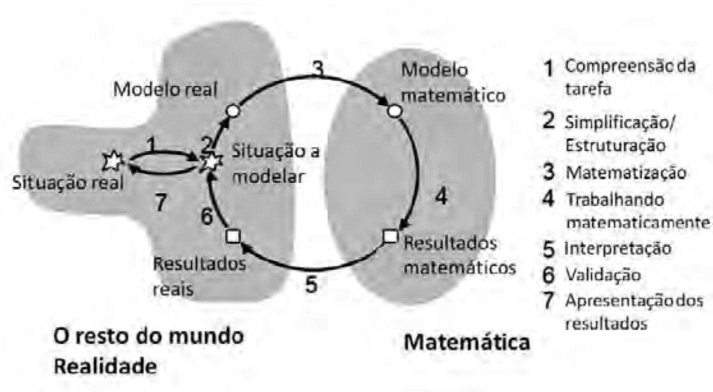
Tendo em consideração as dificuldades que os estudantes mostraram nos resultados do QI, particularmente na tarefa algébrica do tipo de modelação, esta sessão foi dedicada ao conceito de modelação Matemática.

Iniciou-se com uma apresentação sobre os conteúdos que estão envolvidos na Álgebra escolar (Godino et.al, 2015), nomeadamente: *Estrutural* - que tem relação com equivalência, propriedades das equações, equações, ...; *Funcional* – relacionada com o padrão aritmético, o padrão geométrica, função linear, função quadrática, ...; *Modelação* – que tem relação com problemas de contexto que resolvidos pela proposição da equação ou relação funcional; *Operacional* – tem relação com o processo de resolver o problema, analogia, ...

Uma das dificuldades que os estudantes timorenses enfrentam, baseada nos resultados do QI, é a tradução da linguagem natural para a linguagem Matemática, ou seja, traduzir uma situação da vida real por um modelo matemático. A transição da situação real para a representação mental da situação constitui o passo mais importante do processo de modelação, correspondendo à compreensão da tarefa (Ferri, 2006).

Na intervenção deste tópico adapta-se um ciclo de modelação Matemática de Blum e Leiss (2005).

Figura 4.5 - Modelo da modelação Matemática de Blum e Leiss (2005)



O modelo real é traduzido matematicamente, dando origem ao modelo matemático da situação original e, inclusivamente, podem ser construídos diferentes modelos da mesma situação. O processo de resolução do problema continua, através da escolha de métodos adequados e do trabalho no seio da Matemática, obtendo-se assim resultados matemáticos. Estes devem ser traduzidos para o mundo real relativamente à situação original. Assim, que resolve o problema também valida o modelo matemático (Blum & Ferri, 2009).

Nestas atividades constituem os passos de modelação: compreender, simplificar/ estruturar, matematizar, trabalhar matematicamente, interpretar e validar. O ciclo de modelação, assim descrito, pretende auxiliar os investigadores e os professores, a conhecer os passos de modelação relevantes na resolução de uma tarefa de modelação e, em especial, a mobilização do conhecimento extra-matemática na transição entre as várias fases do processo (Blum & Ferri, 2009).

Para reforçar o conhecimento dos estudantes neste tema, propôs-se a seguinte tarefa:

Figura 4.6 – Tarefa "Compro do Natal"

Para celebrar a festa do Natal, o João comprou 3 camisas, 2 pares de calças e uns sapatos. Cada da camisa custou $ 10.00 menos do que cada par de calças, e os sapatos custaram $ 50.00. No final da compra, o João tinha de pagar $ 220.00. Qual é o preço de uma camisa?

Elaborou-se uma discussão que envolveu a participação de todos os estudantes na sala. Os estudantes tentaram a seguir as sete etapas de resolução:

1. *compreensão da tarefa* - compreender todas as informações dadas na tarefa (compreender que o problema é o compro os vestuários para Natal e a questão é o preço de uma camisa);
2. *simplificação* – simplificar as informações numa imagem, como se apresenta na figura 4.7;

Figura 4.7 - Ilustração da situação de problema do compro do Natal

3. *matematização* – traduzir as informações em linguagem Matemática, por exemplo: sendo camisa : x ; calças : y ; e sapatos : z. O João comprou 3 camisas, 2 calças, um par de sapatos e pagou $ 220.00, portanto pode-se traduzir numa equação : $3x + 2y + z = 220$. Cada camisa custou $ 10.00 menos do que uma calça, então $x = y - 10$; um par de sapatos custou $ 50.00, por isso $z = 50$;
4. *trabalhar matematicamente* – baseia-se na matematização, na etapa anterior, considera-se resolução desta tarefa deve-se envolver o conhecimento sobre a resolução do sistema das equações lineares com três incógnitas, que pode-se resolver pelos vários métodos de resolução, nomeadamente: o método da eliminação; da substituição; e um conjunto da eliminação e da substituição.

Apresenta-se, seguidamente, um exemplo de solução envolveu o método da substituição:

O sistema das equações é $\begin{cases} 3x + 2y + z = 220 \ldots\ldots 1^{\underline{a}} \text{ equação} \\ x = y - 10 \quad \ldots\ldots\ldots 2^{\underline{a}} \text{ equação} \\ z = 50 \quad \ldots\ldots\ldots 3^{\underline{a}} \text{ equação} \end{cases}$

Partindo-se da substituição da 2.ª equação na 1.ª equação 3x + 2y + z = 220, teremos:

3 (y – 10) + 2y + 50 = 220

3y – 30 + 2y + 50 = 220

3y + 2y + 20 = 220 – 50 + 30

5y = 200 → y = 200 / 5 = 40

Substituindo o valor de y = 40 na 2.ª equação, obteve-se x = y – 10 = 40 – 10 = 30.

5. *interpretação* – traduzir a linguagem Matemática para a linguagem natural, neste caso: se x = 30, então o preço de uma camisa é $ 30.00; e o preço de uma calça é $40.00, conforme a equação y = 40;
6. *validação* – a substituição dos valores de x, y e z na primeira equação deve-se implicar que a igualdade é verdadeira, como se apresenta na seguinte validação:

   3x + 2y + z = 220

   3 (30) + 2 (40) + 50 = 220

   90 + 80 + 50 = 220

   220 = 220
7. *apresentação dos resultados* – responder a questão da tarefa que o preço de uma camisa é $ 30.00.

Sessão 5*:* Estudo de uma função real de variável real, com as suas características (injetiva, sobrejetiva, bijetiva)

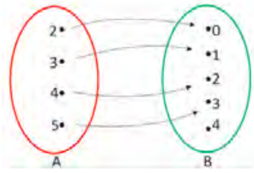
Inicialmente, este tema não tinha sido programado na ação formativa. Mas após a sessão 3 sobre a função, considerou-se a importância e a necessidade de os estudantes terem mais conhecimentos desta temática.

Inicia-se a discussão sobre o tema, envolvem-se as ideias que se baseiam no conhecimento previsto dos estudantes, a definir qual seria uma função. Portanto, apresentaram-se exemplos de representações de várias correspondências: 3 diagramas de

Venn; 2 gráficos; e 2 produtos cartesianos. A formadora pediu aos estudantes para determinarem quais seriam as funções entre estas representações.

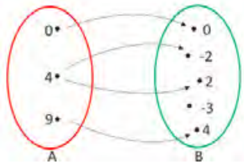
Figura 4.8 – Exemplos das funções e não funções

1.

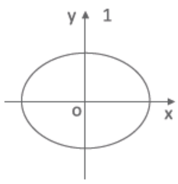


2.

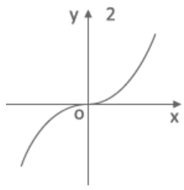
3.



4.



5.



6. $C \times D = \{(1, a), (2, b), (2, d), (3, c), (4, c)\}$

7. $E \times F = \{(p, 2), (q, 5), (r, 5)\}$

Através da observação das várias representações, os estudantes identificaram que os exemplos 1, 5 e 7 são funções pelo facto de que todos elementos do conjunto partida (domínio) destas representações correspondem a cada um único elemento do seu conjunto chagada. Os estudantes identificaram que o exemplo 2 não é função porque há um elemento do domínio A (neste caso é 0) que não corresponde em nenhum elemento do conjunto B. O exemplo 3 não é função, indicado pela o elemento 4 do domínio A corresponde em dois elementos do conjunto chegada (neste caso são -2 e 2). O gráfico do exemplo 4 também não é função, porque se traçam retas verticais neste gráfico, podendo-se identificar que a cada ponto do x corresponde nos dois pontos de y.

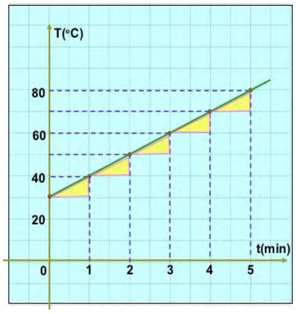
Partindo-se da identificação da função, através dos vários exemplos acima, e baseia-se no conhecimento prévio dos estudantes sobre uma função, definem-se que uma função é uma regra que aceita certos números como valor de entrada e associa a cada um deles um único valor de saída. O conjunto formado por todos os valores de entrada é chamado de ***domínio*** da função e o conjunto das valores de saída, é a ***imagem*** da função.

Envolveu-se o exemplo (figura 4.3) e a situação-problema do aquecimento da água no jarro (tabela 4.6) para identificar a variável dependente e a variável independente.

Exemplo: Tarefa do aquecimento da água (tabela 4.6 da 1.ª situação)

t (min)	0	1	2	3	4	5
T (ºC)	30	40	50	60	70	80

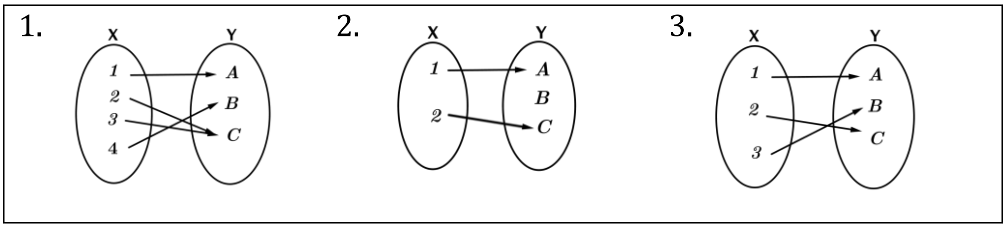
$T = 30 + 10\,t$



Pela observação da situação - problema, os estudantes generalizaram que a mudança da temperatura é dependente da função do tempo. Ou seja, a cada minuto t, corresponde uma única temperatura T. Neste caso, pode-se designar a função T e a sua expressão é $T = f(t)$, onde T representa a variável dependente e t a variável independente.

Relativamente à discussão sobre o conceito da propriedade de uma função injetiva, sobrejetiva e bijetiva, a formadora apresentou três diagramas diferentes e pediu aos estudantes para identificarem, quais seriam a função injetiva, a função sobrejetiva e a função bijetiva.

Figura 4.9 – Diagramas de Venn de funções injetiva, sobrejetiva e bijetiva



A maioria dos estudantes identificaram corretamente que o diagrama 3 é uma função bijetiva, mas confundiram a identificação da função injetiva e da função sobrejetiva. Portanto, a formadora apresentou os conceitos destas últimas funções e deu os respetivos exemplos.

Relativamente à função injetiva, a formadora apresentou o conceito desta função do seguinte modo: uma função $f: A \rightarrow B$ é injetiva quando a objetos diferentes correspondem imagens diferentes, ou seja, para dois qualquer valor de D_f, x_1 e x_2: se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$. Partindo-se deste conceito, os estudantes e a formadora (no primeiro) observaram o exemplo do diagrama 1 e identificaram que há dois elementos do conjunto X que têm a mesma correspondência no conjunto X. Neste caso $2 \neq 3$ mas $f(2) = f(3) =$

C, então o exemplo 1 não é uma função injetiva. A função injetiva mostra-se no exemplo 2, pelo fato que $1 \neq 2 \rightarrow f(1) \neq f(2)$.

No conceito da função sobrejetiva, a formadora utilizou o conceito desta função como, uma função $f: A \rightarrow B$e sobrejetiva quando todo elemento de $y \in B$, é imagem de pelo menos um $x \in A$, ou seja $I_m\, f(x) = B$. Pela observação da diagrama do exemplo 2, os estudantes identificaram que este diagrama não é uma função sobrejetiva pelo fato que há um elemento do contra domínio (Y) que não tinha correspondência em nenhum elemento do domínio (X). Ou seja, a imagem da função não é igual com o contra domínio da função, neste caso $I_m\,(f) \neq Y$. Os estudantes conseguiram identificar que o exemplo 1 é uma função sobrejetiva porque $I_m\,(f) = Y$.

No final desta sessão, a formadora apresentou várias representações das funções e pediu aos estudantes para identificarem e justificarem a função injetiva, a função sobrejetiva e a função bijetiva (ver ANEXO III).

Sessão 6: *Atividade prática 1 – Reflexão sobre os objetivos e processos algébricos básicos*

A primeira atividade prática teve como objetivo levar os estudantes a refletir e aprofundar aos seguintes aspetos: interpretação das expressões matemáticas; interpretação do sinal de igualdade de uma expressão; interpretação do significado de "x" numa expressão; estudo da família de funções lineares; interpretação do coeficiente de uma equação quadrática; interpretação da família da função quadrática; resolução de problemas envolvendo um sistema das equações lineares com duas incógnitas. Utilizou-se uma ficha de trabalho (ANEXO IV), devendo os estudantes discutir e responder às tarefas desta ficha em grupo de 4 a 5 pessoas.

As duas tarefas apresentadas em seguida são as tarefas de conhecimento básico da Álgebra sobre; a identificação das expressões; e a identificação do significado de "x" das expressões.

***Tarefa 1** – identificação das expressões*

Nesta tarefa pretende-se analisar os conhecimentos relacionados com o conceito de igualdade (como os estudantes o entendem): se na igualdade aparecem variáveis e a igualdade é verdadeira para quaisquer valores das variáveis (identidade); se a igualdade é verdadeira apenas para certos valores das variáveis (equação); e se a igualdade é utilizada para expressar a relação de dependência entre duas ou mais variáveis (fórmula). Nesta tarefa apresentaram-se seis expressões algébricas (equivalência, equação linear, e a fórmula de área do círculo) e pediu-se para interpretar as expressões e identificar o significado do sinal da igualdade de cada expressão.

Figura 4.10 – Tarefa 1 da atividade prática 1 "Identificação das expressões"

Analisa as seguintes expressões:

(1). $(2-\sqrt{2})\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$
(2). $\sqrt{9} - 4 = -5 + 2^2$
(3). $(2x+1)(x-1) = 2x^2 - x - 1$
(4). $A = \pi r^2$
(5). $-2x + 7 - 3 = 4 - 2x$
(6). $4x - 3 = 2y + 1$

a. Qual é o significado destas expressões?
b. Como se compreende o sinal de igualdade nessas expressões?

Soluções previstas relativamente à tarefa 1 – identificação das expressões

A seguinte tabela apresenta os resultados previstos relativamente ao item a e ao item b.

Tabela 4.9 - Resultados previstos relativamente à tarefa 1 do item a e do item b da ficha do trabalho 1

item a	Item b
(1) Identidade aritmética, propriedade distributiva.	(1) Significado relacional
(2) Identidade aritmética	(2) Significado operacional
(3) Equivalência formal	(3) Igualdade do significado relacional, da equivalência formal que descreve termos equivalentes.
(4) Fórmula (fórmula da área de um círculo)	(4) Igualdade do significado relacional, da identidades contextuais em fórmulas.
(5) Equação linear com uma incógnita nos ambos dos lados.	(5) Igualdade do significado relacional, da equação condicional que caracteriza incógnita.
(6) Equação linear com duas incógnitas (x e y)	(6) Igualdade do significado relacional, da equação condicional que caracteriza as incógnitas.

Análise das respostas do grupos relativamente à tarefa 1 – identificação das expressões

Na análise do significado das expressões, no item a desta tarefa, todos os grupos conseguiram identificar o significado da expressão $A = \pi r^2$ como uma fórmula (fórmula da área de um círculo). Mesmo assim, não encontrou um grande número das respostas corretas relativamente às outras expressões. Por exemplo, na 1.ª expressão eles identificaram como o processo aritmético ou expressão algébrica.

Pelo contrário, no item b onde se pretendia identificar o sinal de igualdade das expressões, todos os grupos conseguem identificar o significado do sinal da igualdade da expressão $(2 - \sqrt{2})\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$ como uma igualdade relacional. E conseguiram identificar a igualdade da expressão $\sqrt{9} - 4 = -5 + 2^2$ como igualdade com significado operacional.

Os três grupos conseguiram identificar a expressão $A = \pi r^2$ como uma igualdade relacional, neste caso como sendo da área do circulo. Existiram apenas dois grupos que conseguiram identificar a igualdade da expressão: $(2x + 1)(x - 1) = 2x^2 - x - 1$ como uma igualdade relacional, da equivalência formal que descreve termos equivalentes; $-2x + 7 - 3 = 4 - 2x$ como uma igualdade relacional; $4x - 3 = 2y + 1$ como uma igualdade relacional.

Os poucos números de respostas corretas relativamente ao significado das expressões foi um indicador de falta de conhecimento dos alunos sobre a relação entre as expressões algébricas.

***Tarefa 2* – identificação do significado de "x" das expressões**

Apresentam-se, nesta tarefa, quatro expressões envolvendo o "x" com vários significados. Esta tarefa estimulou a análise dos estudantes sobre a existência de "x" quando: se utiliza para representar números (ou outros objetos), um dos valores possíveis que torna verdadeira a expressão (variáveis como incógnita, por exemplo: $4x + 2 = 3x + 5$); se utiliza em expressões que são verdadeiras para todos os elementos do domínio de expressão, por exemplo $a \times b = b \times a$; se identifica uma relação de dependência entre variáveis quando a mudança de uma variável determina a alteração na outra, por exemplo

$y = 5x + 6$; se utiliza como constante ou parâmetros, por exemplo a letra a na fórmula da função de proporcionalidade $y = ax$.

Figura 4.11 – Tarefa 2 da atividade prática 1 “Identificação de significado do x “.

Qual é o significado do “ x “ destas seguintes expressões?	
(1). $4 + x = 9$	(3). $(x + 2)^2 = 0$
(2). $2x + y = 6$	(4). $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

Soluções previstas relativamente à tarefa 2 – identificação do significado de “x” das expressões

O *“x”* da primeira expressão é uma variável como incógnita, uma vez que representa um número (valor) de valores possíveis que torna a expressão verdadeira, neste caso é 5. O *“x”* na segunda expressão tem significado de uma variável, se *x* muda consequentemente y também muda. A variável como incógnita também aparece na terceira expressão. O valor de *“x”* encontrado pela resolução desta equação quadrática. Na quarta expressão, a variável *“x”* é identificado como indeterminada ou expressão de padrão geral, neste caso é o padrão geral da equação quadrática.

Análise das respostas dos grupos relativamente à tarefa 2 – identificação do significado de “x” das expressões

A compreensão do significado da letra, em Matemática, como uma maneira de expressar relações gerais entre os objetos, parece ainda ser originadora de uma grande preocupação para estes estudantes. Todos os grupos de estudantes conseguiram apenas identificar o significado do *“x”* como uma incógnita nas expressões: $4 + x = 9$; e $(x + 2)^2$. E três deles conseguiram identificar o *“x”* da $2x + y = 6$ como uma variável para expressar quantidades de variáveis em conjunto. Houve apenas um grupo que conseguiu identificar o *“x”* da expressão $ax^2 + bx + c = 0$ como um objeto indeterminado ou variável ou expressão geral que traduz uma equação quadrática.

Nesta atividade prática apresentou-se uma tarefa estrutura sobre o efeito da mudança do valor x e m, como se apresenta na seguinte tarefa 4:

***Tarefa 4* – equação quadrática**

O envolvimento de uma equação quadrática incompleta apresentada nesta tarefa tem como objetivo analisar duas situações diferentes relativamente aos efeitos dos valores de x e m na equação quadrática, ou seja, interpretar o coeficiente de uma equação quadrática.

Figura 4.12 – Tarefa 4 da atividade prática 1 "Equação quadrática ".

Sendo uma equação em forma geral $(m-3)x^2 + 2x + 4 = m + 1$
a. Se $x = 0$, considera que esta expressão é uma equação? Explique.
b. Se $m = 3$, considera que esta expressão é uma equação? Explique.

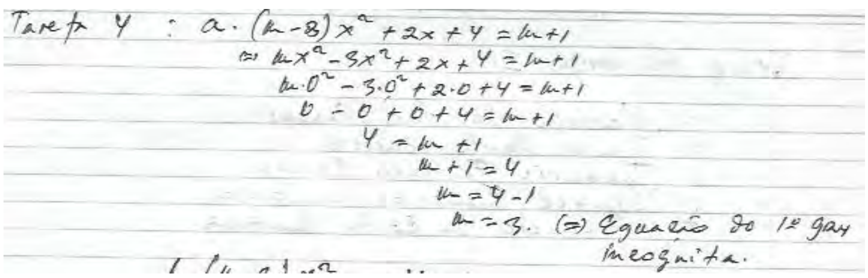
Soluções previstas relativamente à tarefa 4 – equação quadrática

Para $x = 0$, então a equação fica em $(m-3)0^2 + 2(0) + 4 = m + 1$ ou seja $4 = m + 1$, então esta expressão é uma equação linear com uma incógnita m. Pela substituição de $m = 3$, a equação fica $(3-3)x^2 + 2x + 4 = 3 + 1$ ou seja $2x + 4 = 4$, neste caso também resulta uma equação linear com uma incógnita x.

Análise das respostas dos grupos relativamente à tarefa 4 – equação quadrática

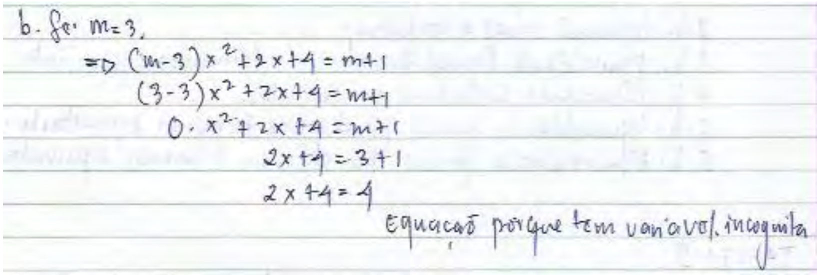
Todos os grupos utilizaram uma propriedade de substituição do valor $x = 0$ (item a) e $m = 3$ (item b) na equação quadrática $(m-3)x^2 + 2x + 4 = m + 1$ para identificar a mudança desta equação quadrática por esta substituição, se é manter uma equação ou é outra expressão. Todos os grupos conseguiram resolver esta tarefa e identificaram que a expressão envolvida foi uma equação linear com uma incógnita, como se apresenta no seguinte exemplo:

Figura 4.13 – Exemplo da resposta correta de um grupo relativamente ao item a da tarefa 4 da atividade prática 1


Tarefa 4 : a. $(m-3)x^2 + 2x + 4 = m+1$
$\Leftrightarrow mx^2 - 3x^2 + 2x + 4 = m+1$
$m \cdot 0^2 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 4 = m+1$
$0 - 0 + 0 + 4 = m+1$
$4 = m+1$
$m+1 = 4$
$m = 4-1$
$m = 3.$ $\Leftrightarrow$ Equação do 1º grau incógnita.

Relativamente ao <u>item b</u>, os quatro grupos conseguiram resolver este problema mas apenas dois grupos conseguiram identificar que o processo de substituição resulta numa equação linear, como se apresenta no seguinte exemplo:

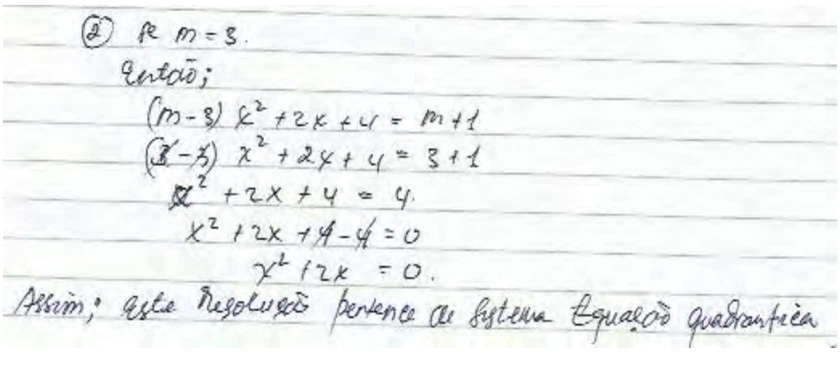
Figura 4.14 – Exemplo da resposta correta de um grupo relativamente ao <u>item b</u> da tarefa 4 da atividade prática 1


b. Se $m=3$,
$\Rightarrow (m-3)x^2+2x+4=m+1$
$(3-3)x^2+2x+4=m+1$
$0\cdot x^2+2x+4=m+1$
$2x+4=3+1$
$2x+4=4$
Equação porque tem variável. incógnita

Os dois outros grupos, mesmo que, resolvem corretamente deste problema, têm erro na identificação da expressão. Para eles a expressão indicada são “equação do 2.º grau” e “não é uma equação, são uma forma de função”.

Encontra-se um erro algébrico relativamente à resolução desta tarefa, como se apresenta na seguinte figura:

Figura 4.15 – Exemplo da resposta errada de um grupo relativamente ao <u>item b</u> da tarefa 4 da atividade prática 1


② Se $m=3$.
Então;
$(m-3)x^2+2x+4=m+1$
$(\cancel{3}-\cancel{3})x^2+2x+4=3+1$
$x^2+2x+4=4$.
$x^2+2x+4-4=0$
$x^2+2x=0$.
Assim; este Resolução pertence ao Sistema Equação quadrática

Este grupo tem um erro na eliminação do coeficiente da mesma incógnita, para ele $(3-3)x^2 = x^2$. Este erro na eliminação (Kieran, 1992) tem a ver com de facto de os estudantes não compreenderam que $(3-3)$ é 0 e portanto $(3-3)x^2$ seria 0 e não x^2.

Relativamente à tarefa do tipo de função, nesta atividade prática foi questionada duas tarefas: o gráfico da função linear (Tarefa 3); e a família da função quadrática (Tarefa 5).

***Tarefa 3* – gráfico da função linear**

Esta tarefa implicitamente pretende uma formalização das expressões analíticas através da terminologia de $ax + by = c$ ou $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ esta formalização vem de uma consideração em que os alunos, por várias vezes, compreendem que a expressão da $ax + by = c$ é apenas uma equação linear e este conceito é totalmente diferente com o conceito da função linear. Nesta tarefa pretende-se uma observação e análise do gráfico de uma função linear em modo geral, por isso, os alunos devem ser capazes de manipular, desenhar e observar as possibilidade de situações relativamente ao ponto de interseção do gráfico nos dois eixos.

Figura 4.16 – Tarefa 3 da atividade prática 1 "Família da função linear"

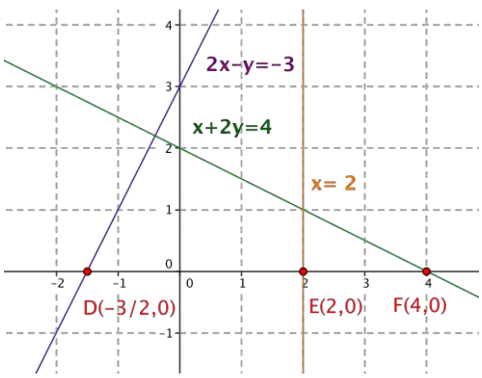
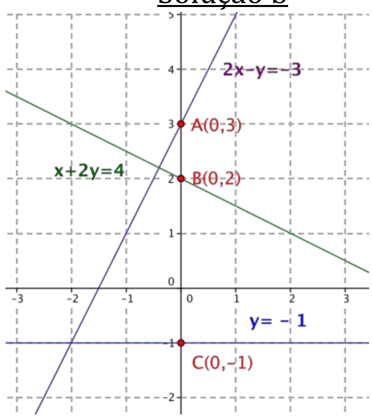
Sendo uma família da equação linear $ax + by = c$

a. Em que situação o gráfico da função tem o ponto de interseção da linha com o eixo X?
b. Em que situação o gráfico da função tem o ponto de interseção da linha com o eixo Y?
c. Qual é o significado do: a, b, c, x, y ?

Soluções previstas relativamente à tarefa 3 – gráfico da função linear

O desenho do gráfico da função linear foi uma abordagem para resolver esta tarefa. A escolha de várias situações ajuda a observar e analisar as situações, logo a tirar as conclusões.

Tabela 4.10 – Solução prevista da tarefa 3 da atividade prática 1 "Família da função linear"

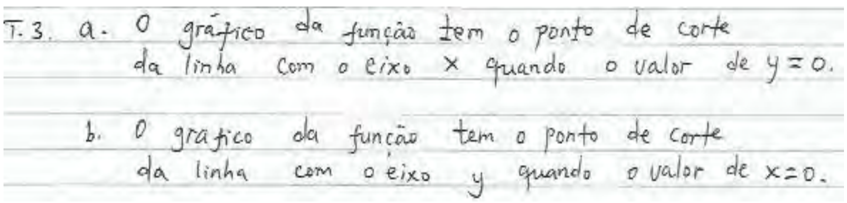
<table>
<tr><th><u>Solução a</u></th><th><u>Solução b</u></th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>a. O ponto interseção da linha com o eixo X (por exemplo: o ponto D, o ponto E e o ponto F) indicado pela o</td><td>b. O ponto interseção da linha com o eixo Y (por exemplo: o ponto A, o ponto B e o ponto C) indicado pela</td></tr>
</table>

valor zero da sua ordenada. Ou seja o gráfico da função linear $ax + by = c$ tem o ponte interseção da linha com o eixo X quando $y = 0$, e consequentemente $x = \frac{c}{a}$ e o coordenada do ponto de interseção é $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$.	o valor zero da sua abcissa. Ou seja o gráfico da função linear $ax + by = c$ tem o ponto interseção da linha com o eixo Y quando $x = 0$, e consequentemente $y = \frac{c}{b}$ e o coordenada do ponto de interseção é $\left(0, \frac{c}{b}\right)$.
c. "a" significa o coeficiente do variável x; "b" significa o coeficiente do variável y; "c" significa o coeficiente independente.	

Análise das respostas dos grupos relativamente à tarefa 3 – gráfico da função linear

Nesta tarefa pretende-se os alunos desenhem os esboços dos gráficos e observam em que situação, o gráfico tem o ponto de interseção com o eixo X e com o eixo Y. Mesmo assim, nenhum dos grupos fizeram o gráfico. As respostas deles vem da memoria do conhecimento que eles têm sobre o gráfico da função linear, como se apresenta no seguinte exemplo:

Figura 4.17 – Exemplo da resposta de um grupo relativamente da tarefa 3 da atividade prática 1


T. 3. a. O gráfico da função tem o ponto de corte da linha com o eixo X quando o valor de $y = 0$.

b. O grafico da função tem o ponto de corte da linha com o eixo y quando o valor de $x = 0$.

Relativamente à identificação das letras a, b, c, x e y, são três grupos que respondem corretamente que: a e b são coeficiente; x e y são variáveis; e c é uma constante. Ainda se encontrou um grupo sem resposta e um grupo que identificou as letras x e y desta equação que são símbolos algébricos e não identificou, em particular, elementos como variáveis.

<u>Tarefa 5</u> - família da função quadrática

Nesta tarefa apresentam-se várias funções com os vários valores de coeficientes e solicitou aos estudantes observem e analisem se são da mesma família e, logo, para identificar esta família, descrever e explicar a forma geral através da qual se representa esta família.

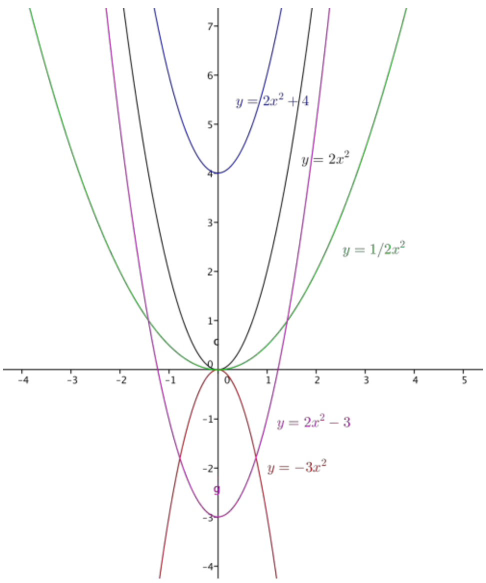
Figura 4.18 – Tarefa 5 da atividade prática 1 “Família da função quadrática”

Sendo que $y = 2x^2$; $y = -3x^2$; $y = \frac{1}{2}x^2$; $y = 2x^2 + 4$; $y = 2x^2 - 3$ são mesma família.
a. Qual é a família?
b. Descreve e explique a forma geral que se representa esta família

Soluções previstas relativamente à tarefa 5 - família da função quadrática

O objetivo desta tarefa não é apenas identificar o nome da família ou expressar esta família de funções em modo geral, mas também, e é principalmente, analisar o conhecimento dos estudantes sobre a família de funções quadráticas e os efeitos dos seus parâmetros.

Tabela 4.11 – Solução prevista da tarefa 5 da atividade prática 1 “Família da função quadrática”



item b

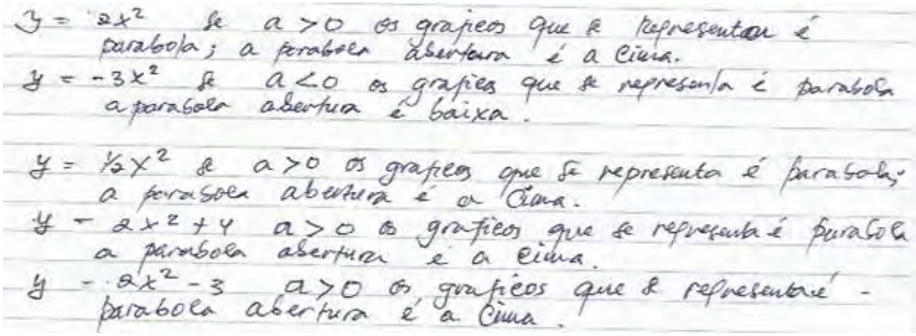
Numa função quadrática $y = ax^2 + b$

- O sinal do coeficiente $\boldsymbol{a}$ influencia o sentido da concavidade;
- O valor absoluto de $\boldsymbol{a}$ influencia a abertura da parábola. Quanto maior é o valor absoluto de $\boldsymbol{a}$, menor a abertura da parábola;
- Qualquer uma destas parábolas tem vértice no ponto (0,0) e o eixo de simetria é a reta de equação x = 0, de onde se conclui que são independentes de $\boldsymbol{a}$;
- O valor b determina a constante da translação da função relativamente ao eixo Y;
- Se b positivo, o gráfico desloca-se polo eixo X positivo e a parábola tem o vértice no ponto $(0, b)$;
- Se b negativo, o gráfico desloca-se polo eixo X negativo e a parábola tem o vértice no ponto $(0, -b)$.

Análise das respostas dos grupos relativamente à tarefa 5 - família da função quadrática

Todos os grupos conseguiram identificar as funções dadas como funções da mesma família, que é a família da função quadrática, e conseguiram também descrever a forma geral desta função, que é $y = ax^2 + bx + c$. Os estudantes ainda tiveram dificuldades em detetar as mudanças como o efeito dos valores do a, b e c. A falta de construção e observação dos gráficos são as duas razões que explicam o facto de que os alunos não conseguiram resolver este problema. Apenas um grupo de estudantes tentou responder, baseando-se no conhecimento de que: se $a > 0$ então a parábola tem abertura para cima; e por contrário se $a < 0$ tem abertura para baixo, como se apresenta no seguinte exemplo:

Figura 4.19 – Exemplo da resposta de um grupo relativamente à tarefa 5 da atividade prática 1


$y = 2x^2$ se $a > 0$ os graficos que se representa é
parabola; a parabola abertura é a cima.
$y = -3x^2$ se $a < 0$ os grafics que se representa é parabola
a parabola abertura é baixa.
$y = \frac{1}{2}x^2$ se $a > 0$ os grafics que se representa é parabola;
a parabola abertura é a cima.
$y = 2x^2 + 4$ $a > 0$ os graficos que se representa é parabola
a parabola abertura é a cima.
$y = 2x^2 - 3$ $a > 0$ os graficos que se representa é -
parabola abertura é a cima.

Na ficha do trabalho da atividade prática 1, foi apresentada também uma tarefa do tipo modelação matemática sobre o preço de comida, como se mostra na tarefa 6.

<u>Tarefa 6</u> – preço de comida

O problema sobre modelação é um tipo de tarefa que se considera importante para o desenvolvimento da criatividade e do RA dos alunos. Nesta tarefa apresenta-se uma situação-problema sobre o custo do lanche e da bebida, o que envolve uma interpretação de um sistema das equações lineares com duas incógnitas.

Figura 4.20 – Tarefa 6 da atividade prática 1 “Preço de comida”

Um grupo de amigos decide comprar um lanche. A Ana vai para um quiosque donde compra 2 lanches e uma bebida por \$ 1,80 e não sabe o preço de cada coisa. O António também vai comprar no mesmo quiosque, 3 lanches e 2 bebidas do mesmo tipo que a Ana comprou e paga \$ 3,10. O António também não sabe o preço de cada coisa.

a. Qual é o preço de um lanche? E uma bebida?
b. Mais tarde, o Miguel vai comprar 6 lanches e 3 bebidas do mesmo tipo e paga \$ 4,20. Será que o Miguel compra no mesmo quiosque?

Soluções previstas relativamente à tarefa 6 – preço de comida

Na resolução deste problema os estudantes devem traduzir e interpretar esta situação da linguagem natural para a linguagem algébrica. Se x é interpretado por um lanche e y é interpretado por uma bebida, então podemos traduzir estas situações do seguinte modo:

Ana	$2x + y = 1.80$
António	$3x + 2y = 3.10$
Miguel	Neste caso será que $6x + 3y = 4.20$?

Para resolver esta situação, pode-se envolver vários métodos da resolução de sistema equação linear com duas incógnitas. No seguinte exemplo, resolve-se pelo método misto (eliminação e substituição).

<u>Item a</u> $\begin{cases} 2x + y = 1.80 \\ 3x + 2y = 3.10 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\substack{4x+2y=3.60 \\ 3x+2y=3.10}}{x=0.50} -$

$$2x + y = 1.80 \iff 2 \times 0.50 + y = 1.80 \iff 1.00 + y = 1.80 \iff y = 0.80$$

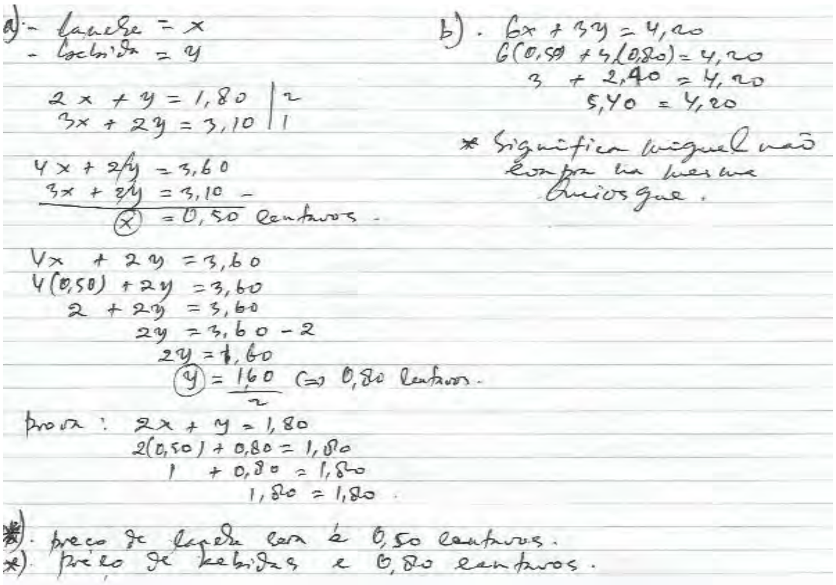
Assim, o preço de um lanche é \$ 0.50 e uma bebida é \$ 0.80

<u>Item b</u> $6x + 3y = 6 \times 0.50 + 3 \times 0.80 = 3.00 + 2.40 = 5.40$. Neste caso, o Miguel apenas pagou \$ 4. 20, portanto ele não comprou no mesmo quiosque que a Ana e o António compraram os lanches e as bebidas.

Análise das respostas dos grupos relativamente à tarefa 6 – preço de comida

Os objetivos desta tarefa de modelação são preparar os estudantes para resolver os problemas reais e motivá-los para utilizar o RA na resolução de problemas. Apenas três grupos tiveram resposta correta e dois outros grupos não responderam esta tarefa. Estes três grupos traduziram as informações na linguagem algébrica e resolveram o problema do sistema das equações lineares seguindo o método misto (da eliminação e da substituição), como se apresenta no seguinte exemplo:

Tabela 4.12 – Exemplo da solução de um grupo e a sua análise da tarefa 6 da atividade prática 1


a) - lanche = x
- bebida = y

$2x + y = 1,80 \mid 2$
$3x + 2y = 3,10 \mid 1$

$4x + 2y = 3,60$
$3x + 2y = 3,10$ -
$x = 0,50$ centavos.

$4x + 2y = 3,60$
$4(0,50) + 2y = 3,60$
$2 + 2y = 3,60$
$2y = 3,60 - 2$
$2y = 1,60$
$y = \frac{160}{2}$ ⇒ 0,80 centavos.

prova: $2x + y = 1,80$
$2(0,50) + 0,80 = 1,80$
$1 + 0,80 = 1,80$
$1,80 = 1,80$.

*). preço de lanche cada é 0,50 centavos.
*). preço de bebidas e 0,80 centavos.

b). $6x + 3y = 4,20$
$6(0,50) + 3(0,80) = 4,20$
$3 + 2,40 = 4,20$
$5,40 = 4,20$

* Significa igual não compra na mesma quiosque.

<u>Elementos linguísticos:</u> relação entre linguagem natural e linguagem simbólica.
<u>Situações-problemas:</u> identificação o preço de um lanche e o preço de bebida (<u>item a</u>); identificar a igualdade relacionados com o gasto do Miguel.
<u>Conceitos:</u> sistema das equações lineares com duas incógnitas.
<u>Proposição:</u> vários métodos de resolução (substituição, eliminação, misto, etc.)
<u>Procedimentos:</u>
(<u>item a</u>)
- eliminar uma incógnita para determinar o valor de outra incógnita;
- substituir o valor da incógnita em qualquer das equações para determinar o valor de outra incógnita;

(<u>item b</u>)
- substituir os valores obtidos relativamente ao preço de um lanche e de uma bebida para a quantidade de lanche e de bebida que foram comprados por Miguel, neste caso seis lanches e três bebidas.
- Comparar o valor do resultado do calculo numérico anterior com o montante de dinheiro que foi pagado.

<u>Argumentos:</u> baseia-se no conceito de resolução de um sistema das equações lineares com duas incógnitas.
<u>Nível de RA:</u> **nível 3**
- utiliza-se símbolos como incógnitas (simbólica literal);
- utiliza-se operações algébricas, aplicando as propriedades de misto;
- a configuração da resposta é Álgebra estrutural.

Síntese dos resultados da primeira atividade prática

O reduzido número de respostas corretas relativamente às duas tarefas sobre o significado das expressões e o significado de "x" nas expressões mostra a dificuldade dos estudantes na compreensão destes conceitos. Esta realidade é uma grande preocupação, tratando-se de conceitos básicos de Matemática que os estudantes devem dominar para desenvolver o seu conhecimento matemático e, ainda, porque se trata de futuros professores de Matemática. Identificou-se também um erro na eliminação do coeficiente da mesma incógnita (Kieran, 1992), neste caso, $(3-3)x^2 = x^2$. Este erro vem de facto de os estudantes não compreenderem o conceito de coeficiente e perceber que o coeficiente e a incógnitas são dois elementos diferentes.

Os estudantes não tem o hábito de desenhar um esboço de gráfico e de observar os gráficos para analisar as situações e resolver o problema relativamente a: ponto de interseção do gráfico da equação linear com os eixos X e Y; e efeitos dos parâmetros na família da função quadrática. As respostas dos estudantes tem por base a memorização de conhecimentos que eles têm sobre estes conceitos.

Considerou-se que a tarefa da modelação foi uma tarefa importante para estimular aos estudantes de resolver os problemas reais e motivá-los na utilização do RA na resolução, mesmo assim não são todos estudantes que estão familiarizados com este tipo de tarefa.

Sessão 7: *Modelo do RA para o Ensino Básico*

A realização da sessão 7 desta ação formativa tem como o seu objetivo introduzir o conhecimento sobre o RA para o Ensino Básico; e através de uma discussão, identificar os níveis do RA baseados nos tipos de representações utilizadas; processos de generalização envolvidos; e cálculo analítico que corresponde à atividade Matemática.

Inicia-se esta sessão com uma apresentação das características dos objetos algébricos, nomeadamente: *relações binárias* (equivalência ou ordem) e suas respetivas propriedades (reflexiva, transitiva e simétricas ou antissimétricas), essas relações são utilizadas para definir novos conceitos matemáticos; *operações e suas propriedades*, realizou mais de elementos de vários conjuntos de objetos (números, transformações geométricas, etc.). O cálculo algébrico é caracterizada pela aplicação de propriedades, dos conceitos (como equação, desigualdade) e procedimentos (tais como eliminação, factorização, etc.) podem também intervir no cálculo; funções algébricas, geradas pela adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação de outras expressões algébricas.

Seguidamente, apresentam-se as características do processo algébrico, de generalização e de particularização, que são importantes para atividade algébrica no que respeita o papel de generalização como uma das principais características do RA. E o conhecimento sobre a categorização dos níveis do RA de atividade matemática é útil para concentrar a atenção sobre os objetos resultantes dos processos de generalização e de particularização. Relativamente ao resultado de um processo de generalização, pode-se obter um tipo de objeto matemático a que chamamos de objeto intensivo, que se torna a regra que gera a classe (coleção ou conjunto) de objetos matemáticos (Godino et al., 2011).

Através de processos de particularização, novos objetos são obtidos aos quais chamamos objetos extensivos (particulares). Um conjunto finito ou coleção de objetos particulares simplesmente listados não devem ser considerados como um intensivo até que se mostre a regra aplicada para delimitar os elementos constitutivos do conjunto.

Na apresentação dos níveis de RA concentra-se este conteúdo nos critérios para categorizar os níveis do RA: a presença de "objetos algébricos" intensivos (ou seja, entidades que têm um carácter de generalidade, ou indeterminação); o tratamento que se aplica aos objetos (operações, transformações com base na aplicação das propriedades de estruturas algébricas relevantes); e os tipos de linguagem que estão utilizados (Godino et. al., 2014). Sintetiza-se a categorização dos níveis de RA na tabela 4.13.

Tabela 4.13 - Categorização dos níveis de RA para o Ensino Básico

Categorização dos níveis de RA para o Ensino Básico			
Nível	**Objetos**	**Transformações**	**Linguagem**
0	Não envolve objetos intensivos. Nas tarefas estruturais podem envolver dados desconhecidos.	Opera-se com objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; podendo envolver símbolos que se referem aos objetos extensivos e dados desconhecidos.
1	Nas tarefas estruturais podem envolver-se dados desconhecidos. Nas tarefas funcionais reconhecem-se os intensivos.	Nas tarefas estruturais aplicam-se relações e propriedades das operações. Nas tarefas funcionais calcula-se com objetivo intensivo.	Natural, numérico, icónico, gestual; podendo envolver símbolos que se referem aos objetos intensivos conhecidos.
2	Envolve objetos indeterminados ou variáveis.	Nas tarefas estruturadas são equações da forma $Ax \pm B = C$ Nas tarefas funcionais gerais é reconhecido mas não operado com variáveis para formas canônicas de expressão.	Simbólico – literal, utilizando para refere aos intensivos reconhecidos, em que ligados às informações do contexto especial e temporal.
3	Envolve objetos indeterminados ou variáveis.	Nas tarefas estruturadas são equações da forma $Ax \pm B = Cx \pm D$ Opera-se com as variáveis.	Simbólico – literal, utilizando de maneira analítica, sem refere às informações do contexto.

Baseando-se na tabela anterior, as respostas que estão categorizadas no nível 0 do RA são as respostas que não incluem características algébricas, sendo apenas realizadas operações com objetos particulares. As tarefas estruturais podem envolver dados desconhecidos. Nestas respostas intervêm os objetos extensivos cuja linguagem usada é natural, numérica, podendo conter imagens. Em tarefas recursivas, o relacionar de dois termos consecutivos não significa a determinação de uma regra. Apresenta-se um exemplo de análise dada uma tarefa e a sua resposta que se considera o nível 0 do RA.

Tabela 4.14 - Exemplo da tarefa “Plantação de cafeeiros” e a sua solução do nível 0 do RA

Exemplo de tarefa:
O ministério da agricultura planta no início dum período 25 caixas de cafeeiros. Cada caixa tem 20 cafeeiros. Depois de alguns dias de seca matou 100 cafeeiros. Quantos são deixados?

Exemplo da resolução:
25 caixas com 20 cafeeiro por caixa, então nas 25 caixas têm 500 cafeeiro. Se matou 100, então fica só
400 cafeeiros.

Análise do nível da RA

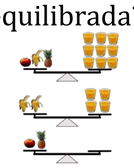
Objetos	Transformações	Linguagem
Não envolve nenhum objetos intensivos.	Se opera com objetos extensivos.	Natural

Relativamente ao nível 1 do RA, as respostas que estão categorizado neste nível são aquelas em que apenas há trabalho com as propriedades de estruturas algébricas no conjunto dos números naturais. A igualdade é usada como equivalência de expressões e intervêm os objetos intensivos cuja generalidade comparece nitidamente recorrendo a uma linguagem natural, numérica, simbólica, podendo recorrer a imagens. Em tarefas estruturais, podem aparecer dados desconhecidos expressos em forma de símbolos e serem aplicadas relações e propriedades de operações. Em tarefas funcionais, recorre-se ao cálculo com objetos extensivos.

Utiliza-se o exemplo da tarefa da “Balança de sumo” - Tarefa 1 do QI (ANEXO II) para discutir sobre a categorização do nível 1 do RA.

Tabela 4.15 - Exemplo da tarefa “Balança de sumo” e a sua solução do nível 1 do RA

Exemplo de tarefa:
Quantos copos de sumo tem que se colocar na terceira balança, para ficar equilibrada?



Exemplo da resolução:
Na segunda balança, indica que 2 bananas podem fazer em 4 copos, ou seja 1 banana igual a $\frac{4}{2}$ = 2 copos. Na primeira balança tem 9 copos no prato esquerdo. Se tiramos 1 banana no prato esquerda, então tiramos também 2 copos no prato direito, para a balança manterá equilíbrio. Logo, na terceira balança tem 9 – 2 = 7 copos de sumo.

Análise do nível da RA

Objetos	Transformações	Linguagem
Não envolve quaisquer objetos intensivos.	Opera-se com objetos extensivos; Aplica-se as propriedades de divisão e de substração.	Natural.

No nível 2 está categorizado às respostas que são constituídas por representações alfanuméricas de funções e equações. As variáveis são representadas através de uma linguagem simbólica e literal mencionando os objetos intensivos relacionados com a informação do contexto espacial ou temporal. Nas tarefas de estruturais, são as equações lineares de forma $Ax \pm B = C$. Por fim, nas tarefas funcionais reconhece-se a generalidade, mas não se opera com as variáveis para obter formas canónicas de expressão.

Utiliza-se o exemplo mesma tarefa (Tarefa 1 do QI – ANEXO II) para discutir sobre a categorização do nível 2 do RA.

Tabela 4.16 - Exemplo da tarefa "Balança de sumo" e a sua solução do nível 2 do RA

Exemplo de tarefa – Balança de sumo		
Exemplo da resolução: Sendo que M : maçã; B : banana; e A : ananás Na 2ª balança, 2B = 4, B = 2 M + B + A = 9 ; M + 2 + A = 9 M + A = 9 – 2 ; M + A = 7 . Então, colocamos 7 copos na terceira balança.		
Análise do nível da RA		
Objetos	Transformações	Linguagem
Envolve objetos indeterminados ou variáveis (M, B e A).	Estrutura da tarefa é $Ax \pm B = C$	Símbolos literais (M, B e A).

As respostas de nível 3 são aquelas em que os estudantes trabalham com incógnitas e variáveis, utilizando propriedades estruturais (tais como a anulação e a substituição). As expressões usadas sofrem alterações a nível simbólico, no entanto há sempre preservação da equivalência. São resolvidas equações do tipo Ax ± B = Cx ± D. Os objetos intensivos que surgem são apresentados de forma simbólica e literal, efetuando-se operações analíticas com eles. Utiliza-se ainda a mesma tarefa, mas desta vez com uma resposta que está considerada no nível 3 do RA.

Tabela 4.17 - Exemplo da tarefa "Balança de sumo" e a sua solução do nível 3 do RA

Exemplo de tarefa – Balança de sumo		
Exemplo da resolução: Sendo que M : maçã; B : banana; A : ananás; x : dado desconhecido Traduz-se as informações em três equações: M + B + A = 9 ; 2B = 4; M + A = x Substitui-se 3.ª equação na 1ª equação: (M + A) + B = 9 então x +B = 9 e chama-se 4.ª equação As 2.ª e 4.ª equações pode-se transformar em 2B – 4 = 0 e x + B – 9 = 0 Portanto, **2B – 4 = x + B – 9** 2B – B = x – 9 + 4 B = x – 5 ou seja 2B = 2x – 10 e chama-se 5.ª equação Substitui 2.ª equação na 5ª equação: 4 = 2x – 10 então 2x = 14, assim x = 7 Então, colocamos 7 copos na terceira balança.		
Análise do nível da RA		
Objetos	Transformações	Linguagem
Envolve objetos indeterminados variáveis (M, B e A) e um dado desconhecido (x)	Estrutura da tarefa é $Ax \pm B = Cx \pm D$ Opera com variáveis, envolve-se a propriedade da substituição.	Símbolos literais (M, B, A e x).

Finaliza-se esta sessão com uma apresentação de tarefa sobre o modo de transporte e pede-se aos estudantes para resolver a tarefa recorrendo a vários tipos de resolução e vários níveis do RA.

Sessão 8: *Discussão e exercícios com as tarefas utilizadas o RA para o Ensino Básico.*

Os objetivos da realização desta sessão foram: refletir e aprofundar o conhecimento dos estudantes sobre o RA no Ensino Básico; e reconhecer os níveis de RA na atividade Matemática do Ensino Básico. Para atingir estes objetivos, inicia-se esta sessão com um "*Brainstorming*" sobre as matérias dadas anteriormente. Continua-se esta sessão com uma discussão em torno da tarefa seguinte (figura 4.21):

Figura 4.21 - Exemplo da tarefa "Modo de transporte"

Para ir à escola, os alunos utilizam dois modos de transporte. Para cada um aluno que vai de táxi, há três alunos que vão de bicicleta. Se há 212 alunos na escola, quantos alunos utilizam de cada meio de transporte?

a. Resolva a tarefa com várias possibilidades da resolução.
b. Identificar, em cada resposta: a linguagem, os objetos e os processos que estão envolvidos para resolver a cada resposta.
c. Carateriza o nível do RA de cada resposta.

Convidou-se os estudantes apresentam as suas respostas no quadro. As respostas corretas que os estudantes apresentaram pertencem todas ao mesmo nível do RA (nível 3), manifestando-se pelo envolvimento do processo da resolução de um sistema das equações lineares, por isso decidiu-se apresentar três outros tipos de respostas como se expõe na tabela 4.18:

Tabela 4.18 - Exemplos da soluções da tarefa "Modos de transporte"

Resposta A - apresenta pelo estudante x : aluno que vai de táxi ; y : aluno que vai de bicicleta. Total aluno : $x + y = 212$ (1ª equação) 1 aluno de táxi = 3 aluno de bicicleta, então $y = 3x$ (2ª equação) Com o método da substituição, substitui-se a 2ª equação na 1ª equação $x + y = 212$ $x + 3x = 212$ $4x = 212 \rightarrow x = \frac{212}{4} = 53$ (3ª equação) Substitui-se a 3ª equação na 2ª equação $y = 3x$ $y = 3(53) = 159$ Assim, são 59 alunos vão de táxi e são 159 alunos vão de bicicleta.	Resposta B - apresenta pela formadora $212 = x + 3x$ $212 = 4x$ $x = \frac{212}{4} = 53$ Assim, o aluno que vão de táxi são 53 e que vão de bicicleta são 212 – 53 = 159 alunos.
Resposta C – apresenta pela formadora Se cada 3 alunos que vão de bicicleta há 1 aluno vai de táxi. Assim de cada 4 alunos, em total (3 + 1) vão para escola no mesmo tempo. Para cada 200 alunos por 50 vão com os seus meios de transporte. Para cada 12 alunos por 3 vão com os seus meios de transporte. Portanto a solução seria 53 alunos que vão de táxi. E o resto, que são 59 que vão de bicicleta.	Resposta D - apresenta pela formadora Por cada 4 alunos, há 3 alunos que vão de bicicleta. Podemos planear em seguinte proporcionalidade: 4 alunos → 3 vão de bicicleta 212 alunos → x vão de bicicleta Portanto $\frac{4}{3} = \frac{212}{x} \rightarrow x = 3 \times \frac{212}{4} = 53$ Assim, o aluno que vão de táxi são 53 e que vão de bicicleta são 212 – 53 = 159 alunos.

Baseando-se nas quatros respostas, os estudantes discutem e identificam a linguagem, os objetos e processos envolvidos em cada resposta e categorizam o seu nível do RA.

Tabela 4.19 - Identificação dos níveis do RA das soluções de tarefa "Modos de transporte"

Resposta	*Objetos*	*Transformação*	*Linguagem*	*Nível do RA*
A	Envolve objetos indeterminados ou variáveis x e y	Estrutura da tarefa é $Ax \pm B = Cx \pm D$	Simbólica literal	3
B	Envolve objetos indeterminados ou variáveis x	Estrutura da tarefa é $Ax \pm B = C$	Simbólica literal	2
C	Não envolve objetos intensivos	Opera com objetos extensivo	Natural	0
D	Envolve um dado desconhecido x	Aplica a propriedades da divisão	Natural	1

Sessão 9: *Atividade prática 2 – Reflexão sobre as características do RA para o Ensino Básico*

A atividade prática que foi realizada nesta sessão teve como objetivos: refletir e aprofundar sobre as características do RA no Ensino Básico; reconhecer os níveis de RA da atividade no Ensino Básico; desenhar as tarefas cujas soluções envolvem a mudança dos níveis de RA. Para atingir estes objetivos, utilizou-se uma ficha de trabalho com cinco tarefas algébricas e pediu-se aos grupos de estudantes para: resolver as tarefas com vários métodos de resolução; identificar os objetos e processos algébricos que se envolvem nas soluções; identificar o nível de RA na atividade de Matemática que se realiza em cada tarefa; e desenhar as tarefas relacionadas, envolvendo soluções que implicassem mudança de níveis de RA.

A ficha de trabalho utilizada nesta sessão, conforme o documento no ANEXO IV, foi composta por:

- 1 tarefa estrutura sobre equivalência (Tarefa1);
- 1 tarefa da função sobre o padrão e a progressão de palitos (Tarefa 3);
- 3 tarefas modelações sobre: balança de *cupcake* (Tarefa 2), o custo do almoço (Tarefa 3) e o movimento do *kayak* (Tarefa 5).

Relativamente às duas últimas tarefas sobre modelação, foram as tarefas que já tinham questionadas no QI.

Tarefa da estrutura

<u>Tarefa 1</u>– Equivalência

Apresenta-se, nesta tarefa, uma situação - problema de uma equivalência "8 + 4 = ___ + 5 " e o valor do elemento branco fica "12". Através desta tarefa pretende-se que os estudantes interpretem o raciocínio que leva ao resultado e interpretem também o significado do sinal de igualdade desta expressão.

Figura 4.22 - Tarefa 1 da atividade prática 2 "Equivalência"

Considere a seguinte pergunta que se referia aos alunos do Ensino Básico:
Qual é o número deve ser colocado na caixa para que a igualdade é correta?
8 + 4 = __ + 5 . Um estudante responde ao número 12,
a. Explique o que a possível raciocínio que levou o estudante a dar essa resposta.
b. Que interpretação do sinal "=" no pensamento deste aluno?

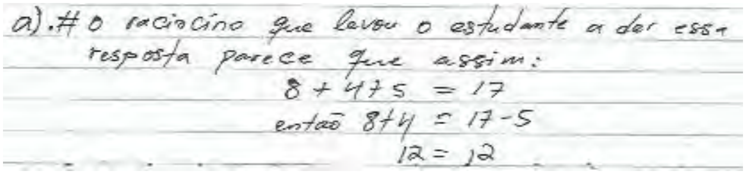
Soluções previstas relativamente à tarefa 1 – equivalência

O objetivo desta tarefa é procurar uma interpretação sobre o sinal do "=" como uma equivalência. A interpretação do resultado (12) do <u>item a</u> pode-se assumir pela uma observação estrutura de tipo 8+4=12+5=17+3=20 para se referir a uma sequência de adição (((8+4)+5)+3)=20. Neste caso, a igualdade aritmética é interpretada como ação (Wilhelmi, Lacasta & Godino, 2007). O sinal "=" desta expressão significa um resultado de operação, e não uma relação de equivalência (<u>item b</u>).

Análise das respostas dos grupos relativamente à tarefa 1 – equivalência

Nenhum dos grupos conseguiu resolver esta tarefa. Os estudantes não se mostram familiarizados com este tipo de tarefa, portanto mesmo sendo uma tarefa simples, nenhum dos grupos apresentou uma resposta correta nesta tarefa. Houve um grupo que tentou resolver e ver o sinal "=" como relação de equivalência

Figura 4.23 – Exemplo da resposta errada de um grupo relativamente da tarefa 1 da atividade prática 2


a) ~~#~~ o raciocino que levou o estudante a dar essa resposta parece que assim:
8 + 4 7 5 = 17
então 8+4 = 17-5
12 = 12

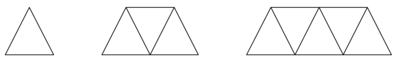
Tarefa da função

<u>Tarefa</u> 3 - Padrão e progressão dos palitos

A tarefa sobre padrão e sequência é um exemplo para levar os alunos a compreender melhor o conceito de função através da situação de problema real. Nesta tarefa os estudantes têm liberdade para resolver o problema utilizando vários métodos de resolução, mesmo assim pretende-se encontrar as soluções que manifestem o envolvimento do RA e vários níveis de RA.

Figura 4.24 - Tarefa 3 da atividade prática 2 “Padrão e progressão dos palitos”

Observa os seguintes palitos que se formam em blocos

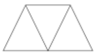
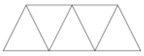
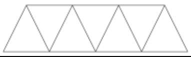
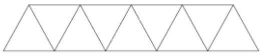


a. Represente os dois termos da sequência seguintes e indique o número de palitos necessários para construir cada um triângulo. Explique como fazê-lo.
b. Como modificaria o enunciado da tarefa para induzir um processo de resolução que envolve o conhecimento algébrico?
c. Considera que esta tarefa pode promover o RA dos alunos do 3.º ciclo do Ensino Básico?

Soluções previstas relativamente à tarefa 3 - padrão e progressão dos palitos

A observação da tabela foi uma resolução de baixo nível de RA relativamente ao <u>item a</u> desta tarefa. Nesta resolução os alunos apenas têm que construir duas figuras sucessivas e fazer a contagem dos números de palitos.

Tabela 4.20 - Processo de identificação dos padrões dos números de blocos e de palitos

	Números de bloco	Números de palitos
	1	3 = 4 x 1 - 1
	3	7 = 4 x 2 -1
	5	11 = 4 x 3 - 1
	7	15 = 4 x 4 - 1
	9	19 = 4 x 5 - 1
...		
	$U_n = 2n - 1$	$U_n = 4n - 1$

Baseando-se na observação da tabela, o problema dos palitos pode também resolver-se com um processo algébrico, mais analítico, envolvendo o conceito de padrão e progressão aritmética. Para a progressão de número de palitos: $U_1 = 3$; $U_2 = 7$; $U_3 = 11$; ..., encontra-se o mesmo padrão de $U_n = 4n - 1$, e o número de palitos de duas figuras sucessivas foram determinadas pela substituição do número ordenado da figura $(n = 4\ e\ n = 5)$ na fórmula de padrão. Outra resolução pode-se encontrar através do envolvimento da fórmula de progressão aritmética $U_n = a + (n - 1)b$. Indicam-se o valor do primeiro termo (neste caso é $a = 3$) e a diferença de segundo termo e primeiro termo $b = U_n - U_{n-1}$, (neste caso $b = 7 - 3 = 4$). Através da propriedade da substituição destes valores na fórmula de progressão aritmética, encontra-se o padrão de palitos, que é $U_n = 4n - 1$ e os números de palitos que se podem construir nas figuras são 15 e 19.

A modificação desta tarefa (o item b) pode-se construir pelo envolvimento do número de bloco e do número de palitos, por exemplo: "Quantos blocos se podem construir com 33 palitos?". Para resolver este problema deve-se, em primeiro lugar, encontrar a fórmula que identifica a progressão de blocos (neste caso é $U_n = 2n - 1$). O seu resultado pode-se obter em duas etapas: substituir o número de palitos na formula $U_n = 4n - 1$ até encontrar o número ordenado da figura $(n = 8)$; e substituir o número de figura na fórmula da progressão de bloco $U_n = 2n - 1$.

$$U_n = 4n - 1$$
$$33 = 4n - 1$$
$$33 - 1 = 4n$$
$$4n = 32 \ \rightarrow n = 8$$

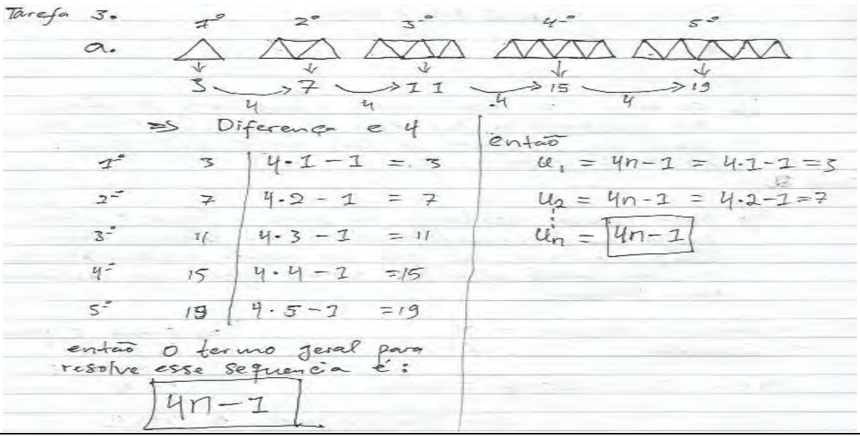
Número de bloco

$$U_n = 2n - 1$$
$$n = 8 \ \rightarrow U_8 = 2 \times 8 - 1 = 15$$

Análise das respostas dos grupos relativamente à tarefa 3 - padrão e progressão dos palitos

Na resolução desta tarefa envolve-se uma interpretação da figura e a linguagem algébrica, e pretende-se encontrar as soluções que manifestam a utilização do RA. Mesmo assim, a maioria dos grupos utilizaram o raciocínio aritmético revelado pelo envolvimento do desenho de dois figuras sucessivas e contagem do número de palitos. Apenas um grupo utilizou o RA corretamente, como se apresenta na seguinte tabela:

Tabela 4.21 – Exemplo da solução de um grupo e a sua análise da tarefa 3 da atividade prática 2



Tarefa 3.

a. 1º 2º 3º 4º 5º

$3 \xrightarrow{4} 7 \xrightarrow{4} 11 \xrightarrow{4} 15 \xrightarrow{4} 19$

⇒ Diferença é 4

1º	3	$4 \cdot 1 - 1 = 3$
2º	7	$4 \cdot 2 - 1 = 7$
3º	11	$4 \cdot 3 - 1 = 11$
4º	15	$4 \cdot 4 - 1 = 15$
5º	19	$4 \cdot 5 - 1 = 19$

então o termo geral para resolve esse sequencia é: $\boxed{4n-1}$

então

$u_1 = 4n - 1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$

$u_2 = 4n - 1 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$

$\vdots$

$u_n = \boxed{4n-1}$

Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e a representação figura; convenções assumidas para identificar os números de *palitos*.

Situações-problemas: identificação o número palitos da quarta figura e quinta figura.

Conceitos: progressão aritmética; envolve-se a dedução de uma fórmula (expressão designatória de uma função)

Proposição: -

Procedimentos:

- identificar a diferença entre dois termos sucessivos;
- identificar o padrão (a fórmula) da progressão;
- Substituir os valores na fórmula obtida como uma prova que a fórmula obtida é uma generalização desta progressão.

Argumentos: baseia-se na operação algébrica envolvida a fórmula.

Nível de RA: **nível 3**

- utiliza letras, para representar os números;
- justifica de modo geral, explica o funcionamento e a estrutura de cada solução;
- opera algebricamente e chega até uma expressão canónica;
- a configuração da resposta é Álgebra funcional.

Tarefa Modelação

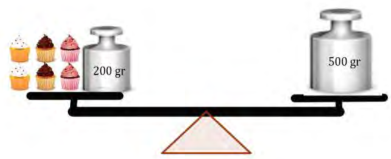
A tarefa 4 do QI sobre custo do almoço e a tarefa 5 do QI sobre o movimento do *kayak* já foram apresentados no Capítulo III e são ambas tarefas de modelação matemática. As resoluções dos estudantes relativamente a estas duas tarefas apresentam-se nesta parte.

***Tarefa 2* – Balança de cupcake**

Nesta tarefa pretende-se que os alunos resolvam o problema apresentado recorrendo a vários métodos de resolução, identificando os objetos e processos algébricos que envolveram nas suas resoluções.

Figura 4.25 - Tarefa 2 da atividade prática 2 "Balança de cupcake"

A Senhora Ana foi comprar 6 *cupcakes* para sua família, que a empregada da pastelaria pesou numa balança de prato. Considera-se os *cupcakes* têm mesmo peso. A empregada colocou os *cupcakes* no prato esquerdo, e o peso 500 gr no prato direito, mas a balança não fica em equilíbrio. Por isso, para ficar equilibrada, ela colocou mais um peso de 200 gr no prato esquerdo. Quanto pesa cada *cupcake*? (cada tipo de *cupcake* tem o mesmo peso).



a. Explique o raciocínio que o aluno pode seguir para resolver esta tarefa.
b. Quais são os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa?

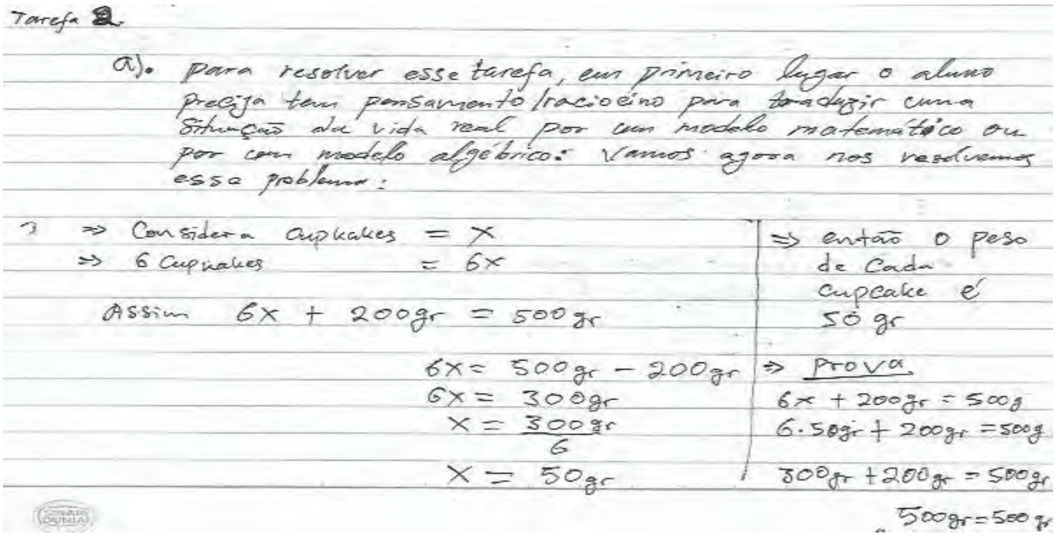
Soluções previstas relativamente à tarefa 2 – balança de cupcake

A resolução desta tarefa é obtida pelo envolvimento do conhecimento algébrico, relativamente: igualdade operacional, equação e incógnita (item b). A tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica é primeiro passo para resolver esta problema. Sendo que o peso de um *cupcake* é x, então a balança pode-se traduzir em: $6x + 200 = 500$ e a resolução de problema é obtida pela operação numérica $6x = 500 - 200$; $6x = 300$; $x = \frac{300}{6} = 50$. Assim, o peso de um *cupcake* é 50 gramas.

Análise das respostas dos grupos relativamente à tarefa 2 – balança de cupcake

Nesta tarefa, todos os grupos apresentaram uma resposta correta. Os grupos conseguiram resolver algebricamente e explicar os processos de resolução desta tarefa, como se apresenta no seguinte exemplo (tabela 4.22):

Tabela 4.22 – Exemplo da solução de um grupo e a sua análise da tarefa 2 da atividade prática 2



Tarefa 2.

a). para resolver esse tarefa, em primeiro lugar o aluno precisa tem pensamento/raciocino para traduzir uma situação da vida real por um modelo matemático ou por um modelo algébrico: vamos agora nos resolvemos esse problema:

? => Considera cupkakes = x
=> 6 cupkakes = 6x
Assim 6x + 200gr = 500gr
6x = 500gr − 200gr
6x = 300gr
x = 300gr / 6
x = 50gr

=> então o peso de cada cupcake é 50 gr
=> Prova
6x + 200gr = 500g
6·50gr + 200gr = 500g
300gr + 200gr = 500gr
500gr = 500gr

<u>Elementos linguísticos:</u> relação entre linguagem natural e linguagem simbólica.
<u>Situações-problemas:</u> identificação o peso de cada um de *cupcake*.
<u>Conceitos:</u> equação linear com uma incógnita.
<u>Proposição:</u> resolução da equação linear com uma incógnita: consiste em escrever uma sequência de equações equivalentes até que a variável fique isolada, ou seja, apareça sozinha em um dos lados da igualdade.
<u>Procedimentos:</u>
- traduzir da linguagem natural para linguagem algébrica;
- associa-se o peso de um *cupcake* com o "x";
- resolve-se a equação linear: coloca-se o "x" num lado e os outros no outro lado da igualdade.

<u>Argumentos:</u> substitui-se o valor de "x" obtido na equação e mostra que os valores são iguais no dois ambos dos lados.
<u>Nível de RA:</u> **nível 2**
- utiliza - se símbolos como incógnitas (simbólica literal);
- utiliza - se operações algébricas na resolução de problema;
- a forma da equação $Ax \pm B = C$
- a configuração da resposta é Álgebra estrutural.

***Tarefa 4* – Custo do almoço - Tarefa 3 do QI (ANEXO II)**

Na resolução desta tarefa pretende-se utilizar o RA e o conceito de equação linear, todavia há a possibilidade de resolver esta tarefa com o procedimento aritmético envolvendo, apenas, cálculo numérico.

Figura 4.26 - Tarefa 4 da atividade prática 2 "Custo do almoço"

Um aluno recebe dos seus pais um conjunto de dinheiro para comer durante 40 dias. Por isso, encontrou sítios onde pode comer a $ 4.00 por almoço. Desta forma, o dinheiro dado pelos pais dura 60 dias.

a. Quanto dinheiro recebe dos pais?
b. Pode-se resolver a tarefa com procedimentos exclusivamente aritméticos? De que maneira?
c. Pode-se resolver a tarefa com procedimentos exclusivamente algébricos? De que maneira?

Soluções previstas relativamente à tarefa 4 "Custo do almoço"

Apresentam-se as possibilidades de soluções à tarefa 4, com o procedimento aritmético e com o procedimento algébrico.

Tabela 4.23 - Soluções previstas da tarefa 4 da atividade prática 2 "Custo do almoço"

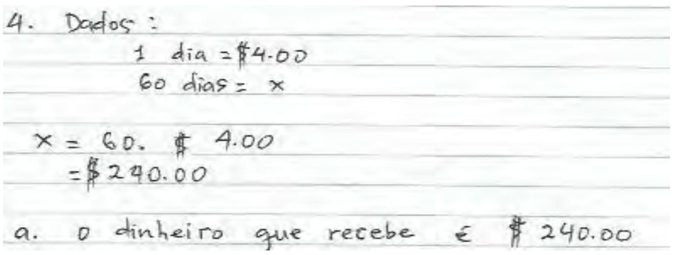
item b - *Procedimento aritmético* O gasto de $ 4.00 por dia durante 40 dias previstos, então o total de poupança é $ 4.00 x 40 dias = $ 160.00. Com esta quantidade poderia comer durante 20 dias. O custo real diária é $\frac{\$\ 160.00}{20\ dias} = \$\ 8.00\ /\ dia$ Como os dias pressuposto inicial foram 60 dias, então o total de dinheiro que recebe dos pais é 60 dias x $ 8.00 = $ 480.00	Nível 1 - Não envolve objetos algébricos; - Não envolve a operação algébrica; - Utiliza-se propriedades da multiplicação e da divisão.
item c - *Procedimento algébrico* Sabendo que: P = o total de dinheiro que recebe x = o gasto para comer durante 40 dias Então $x = \frac{\mathrm{P}}{40} \rightarrow P = 40x$ Se y é o gasto diário que permite para comer durante 60 dias,	Nível 3 - Envolve-se os objetos algébricos como incógnita; - Envolve - se operações algébricas; - Envolve-se um sistema

Então $y = \frac{P}{40} \rightarrow P = 60\,y$ Portanto $40x = 60\,y$, além de $y = x - 4$ $40x = 60\,(x - 4)$ $40x = 60\,x - 240$ $20x = 240 \;\rightarrow x = 12$ Assim, o dinheiro que recebe: $P = 40x = 40\;\cdot 12 =$ \$ 480.00	equações lineares com duas incógnitas; - Envolve-se uma equação linear do tipo $Ax\; \pm B = Cx\; \pm D$

Análise das respostas dos grupos relativamente à tarefa 4 – custo do almoço

Esta tarefa foi uma tarefa muito difícil para os alunos. Nenhum grupo apresentaram solução correta. Esta realidade resulta da dificuldade que os estudantes têm em traduzir a linguagem natural para a linguagem algébrica e do erro de compreensão relativamente às informações dadas nesta tarefa tendo consequentemente um erro no processo de resolução, por exemplo:

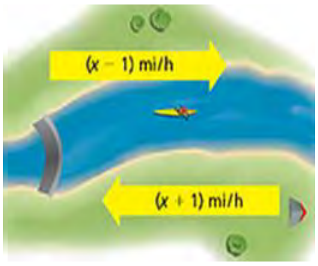
Figura 4.27 – Exemplo da resposta errada de um grupo relativamente da tarefa 4 da atividade prática 2



Tarefa 5*: Movimento do *kayak* - *Tarefa 6 do QI (ANEXO II)

A presente tarefa está relacionada com o conceito de equação linear que se envolve no problema de movimento do *kayak* num rio. Nesta tarefa envolvem-se vários conhecimentos, nomeadamente: a distância entre um acampamento (o ponte A) e uma barragem (o ponte B); a velocidade do *kayak*; a velocidade de rio; e a fórmula o tempo (t) relativamente a distância (d) e a velocidade (v), que é $t = \frac{d}{v}$.

Figura 4.28 - Tarefa 5 da atividade prática 2 “Movimento do kayak”



Supõe que moves um *kayak* num percurso de 5 milhas favorável ao movimento do rio desde o teu acampamento até uma barragem e, seguidamente regressas ao acampamento. A velocidade constante a que se move em toda a viagem é de x milhas por hora, e a velocidade de movimento atual do rio é de 1 milha por hora.

a. Escreva uma expressão que permite calcular o tempo total de viagem.
b. Enuncie uma variação desta tarefa cuja solução implique apenas os conhecimentos aritméticos. Resolva este problema.
c. Enuncie uma variação de problema cuja solução implique o uso de parâmetros. Escreva a expressão correspondente.

Soluções previstas relativamente à tarefa 5 – movimento do kayak

Na resolução desta tarefa, pretende-se envolver: uma tradução da linguagem corrente para a linguagem algébrica; operações algébricas, neste caso é processo da resolução de uma equação linear do tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$.

No <u>item a</u>, pretende-se calcular o tempo total de viagem do *kayak*, do ponto A para o ponto B, e seguidamente regressar do ponto B para o ponto A. Se a velocidade do *kayak* do ponto A para o ponto B é (x – 1) milhas/horas, então o tempo assumido pelo *kayak* de ponte A para o ponto B é $t_1 = \frac{d}{v_1} = \frac{5}{(x-1)}$.

Se a velocidade do *kayak* de ponte B para o ponto A é (x + 1) milhas/horas, consequentemente o tempo assumido pelo *kayak* do ponto B para o ponto A é $t_2 = \frac{d}{v_2} = \frac{5}{(x+1)}$. Portanto, o total de tempo é $t = t_1 + t_2 = \frac{5}{(x-1)} + \frac{5}{(x+1)} = \frac{5\,(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{5\,(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{10\,x}{(x+1)(x-1)}$.

Análise das respostas dos grupos relativamente à tarefa 5 “Movimento do kayak”

Nenhum grupo conseguiu resolver corretamente esta tarefa. Esta realidade mostra a dificuldade em traduzir a linguagem natural para a linguagem algébrica e esta dificuldade teve relação com a falta de compreensão do enunciado da tarefa.

Síntese da atividade prática 2

A análise dos resultados da atividade prática 2, mostra uma confusão dos estudantes ao nível de questões de linguagem, envolvendo a operação adição e o sinal de igualdade aritmética. Por exemplo, 8+4=12+5=17+3=20 $\Leftrightarrow$ (((8+4)+5)+3)=20), neste caso os estudantes foram apresentando somas parciais e utilizaram o sinal de igualdade como uma operação. Os estudantes demonstram dificuldades no significado da igualdade apenas como um resultado de operação (por exemplo: 2 + 3 = 5) ou como uma relação de equivalência.

Na tarefa sobre a identificação de um padrão, a maioria dos grupos ainda utilizam o raciocínio aritmético, envolvendo desenho de duas figuras sucessivas e contando-se as componentes dessas figuras, ou seja, não utilizam o RA para resolver o problema.

A tarefa que envolve a resolução de uma equação linear é considerada como uma tarefa simples, que se indica pela resposta correta por todos os grupos. Eles conseguem resolver algebricamente e explicar os processos de resolução desta tarefa.

Relativamente às duas tarefas da modelação Matemática, o custo da comida e o movimento do *kayak*, os estudantes consideram que estas duas tarefas são difíceis. Esta realidade resulta da dificuldade que os alunos têm na tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica, do erro de compreensão relativamente às informações dadas nesta tarefa e, consequentemente, apresentam erros no processo de resolução.

Sessão 10: *Modelo de RA para o Ensino Secundário*

A matéria que está apresentada nesta sessão é uma continuação da matéria da sessão 7 e ainda se discutiu a teoria do Godino *et. al*., (2014) sobre a categorização do níveis do RA, neste caso para o Ensino Secundário, onde se distinguem três níveis , tendo em conta os objetos e processos que intervêm na atividade de Matemática. O tema da Álgebra para o Ensino Secundário está alargado nos seguintes tópicos: função que se envolve o conhecimento sobre parâmetro e variável; família de funções; e estrutura algébrica abstrato como espaço vetorial, grupos, anéis, etc. Na categorização do nível do RA, segundo Godino et al. (2014), o nível 4 está designado para a utilização de parâmetro para expressar famílias de equações e funções; o nível 5 está relacionado com a realização cálculo analítico que envolve o tratamento de um ou mais parâmetros; e o nível 6 refere-se à introdução de algumas estruturas algébricas (espaço vetorial, grupo) e o estudo da Álgebra funcional (adição, substração, divisão, multiplicação e composição).

Relativamente à categorização dos níveis do RA, o nível 4 está categorizado para as respostas em que é realizado um estudo de uma família de funções ou equações tendo em conta os seus parâmetros. Em algumas respostas poderá notar-se uma distinção entre parâmetros e coeficientes de variáveis, se forem apontes os domínios dos parâmetros.

Apresenta-se um exemplo sobre os efeitos do parâmetro a na função $y = ax^2$. Este exemplo já tinha sido questionado na tarefa 5 do QI (ver ANEXO II) a propósito da família de funções quadráticas. A apresentação deste exemplo também tem como objetivo discutir e apresentar uma resposta correta sobre esta tarefa.

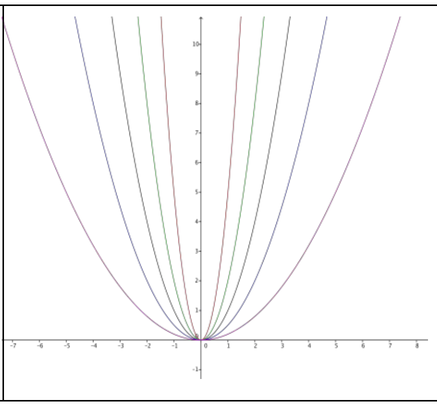
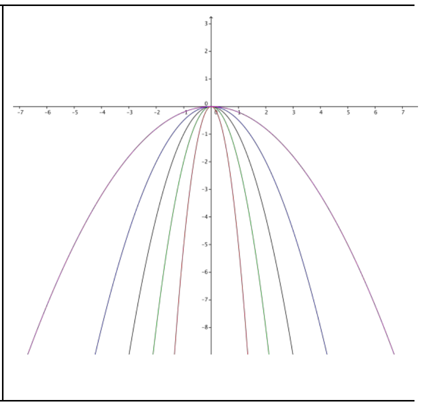
Figura 4.29 – Exemplo da tarefa "Família de funções quadráticas $y = ax^2$"

Considera uma função real de variável real, de forma geral, definida por $y = ax^2$.

a. Observe os gráficos desta função para: $a > 0$; $a < 0$; $0 < a < 1$; $e\ a > 1$
b. Explique os efeitos do parâmetro a nos gráficos da função anterior.
c. Identifique os conhecimentos algébricos que se envolvem na resolução desta tarefa.

Na resolução desta tarefa, escolheram-se alguns valores (positivos e negativos) ao parâmetro a, fizeram o esboço nas representações gráficas e analisam-se as relações entre elas com as variações do parâmetro a, por exemplo: $a = -5, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5$

Tabela 4.24 - Ilustração do gráfica da família de funções quadráticas $y = ax^2$

Se $a > 0$, por exemplo: $y = x^2$ $y = 2x^2$ $y = 5x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $y = \frac{1}{5}x^2$		Se $a < 0$, por exemplo $y = -x^2$ $y = -2x^2$ $y = -5x^2$ $y = -\frac{1}{2}x^2$ $y = -\frac{1}{5}x^2$	

Esta tarefa dá uma oportunidade aos estudantes relacionarem corretamente as representações gráficas das funções da família de funções, indicando resumidamente qual o "papel" do parâmetro a. Esta tarefa assume uma natureza exploratória e investigativa, e pede o estabelecimento da relação entre representações gráficas e representações algébricas.

Baseia-se na observação do gráfico desta família da função, os estudantes conseguem tirar as conclusões e responder ao item b, sobre os efeitos do parâmetro a, nomeadamente: sinal do coeficiente $\boldsymbol{a}$ influência o sentido da concavidade; o valor absoluto de $\boldsymbol{a}$ influencia a abertura da parábola. Quanto maior é o valor absoluto de a, menor abertura da parábola; qualquer uma destas parábolas tem vértice no ponto (0,0) e o eixo de simetria é a reta de equação x = 0, de onde se conclui que são independentes de a.

Aproveitou-se nesta sessão para dinamizar uma discussão, com o objetivo de aprofundar o conhecimento dos alunos sobre o domínio, a variável e o parâmetro de uma função. Por exemplo, na expressão algébrica, $y = 2x$, os símbolos literais x e y representam variáveis, símbolos que podem assumir qualquer valor a partir de um conjunto de número previamente estabelecido, geralmente R. Os valores numéricos x e y co-variam uns em relação aos outros, de acordo com a regra estabelecida na expressão correspondente; neste caso, y é duas vezes o valor atribuído ax. O fator de multiplicação de x pode ser generalizada para qualquer valor num certo domínio, como podemos ver na expressão $y = ax$. Assim, neste caso, a letra a intervém como um parâmetro o que significa que pode assumir valores diferentes dentro de um determinado domínio, de modo que para cada valor possível, obtemos uma função particular. Por exemplo, para $a = 2$, temos $y = 2x$.

Relativamente ao nível 5 do RA, as respostas que estão categorizadas no nível 5 são aquelas em que é realizado um tratamento de incógnitas, variáveis e parâmetros, apresentando a estrutura da solução que resulta desse tratamento. O estudo de um ou mais parâmetros é realizado de modo analítico. Para facilitar a compreensão dos estudantes sobre este nível apresenta-se um exemplo da resolução da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ em forma geral. Para resolver esta problema, envolve-se uma manipulação simbólica e equivalência sucessivas, como se mostra nas seguintes etapas:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ou seja $x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

A discussão sobre a resolução deste problema levou mais tempo porque os estudantes levantaram questões relativamente às etapas de resolução, como se poderia modificar $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ e como responder a estas questões. Deste modo, algumas vezes, foi necessário uma repetição.

As respostas que estão categorizadas no nível 6 são as respostas mais complexas, aquelas em que é realizado um estudo com estruturas algébricas envolvendo definições e propriedades estruturais. Alguns exemplos dessas estruturas algébricas poderão ser os vetores espaciais, o estudo da adição, subtração, divisão, multiplicação e composição de funções. Para aprofundar o conhecimento dos estudantes, no final desta sessão, apresenta -se um exemplo de tarefa sobre operações vetoriais, que serão discutidas na sessão 11.

Sessão 11: *Discussão e exercícios com as tarefas utilizadas o RA para o Ensino Secundário.*

Os objetivos da realização desta sessão foram dois: refletir e aprofundar o conhecimento dos estudantes sobre o RA no Ensino Secundário; e reconhecer os níveis de RA na atividade Matemática do Ensino Secundário. Para atingir estes objetivos, iniciou-se a sessão com um "*Brainstorming*" sobre os conteúdos dados anteriormente. Continuou-se a sessão 11 com uma discussão da tarefa dada no final da sessão 10 sobre as operações vetoriais.

No momento do "*Brainstorming*" questionaram-se os alunos sobre as características do nível 4, 5 e 6, nomeadamente para que serve cada este nível, quais são as linguagens que estão utilizadas, os objetos algébricos envolvidos, e quais as transformações que se envolvem no processo de resolução da tarefa. Partindo-se nesta discussão, a formadora incentiva os estudantes a tirarem conclusões, como se apresenta na tabela 4.23:

Tabela 4.25 - Categorização dos níveis de RA para o Ensino Secundário

Nível	Objetos	Transformação	Linguagem
4	Variáveis, incógnitas e parâmetros; Famílias de equações e funções (Objetos intensivo com um terceiro grau de generalidade).	Existem operações com variáveis, mas não com os parâmetros.	Natural, numérico, icónico, gestual; podendo envolver símbolos que referem aos objetos extensivos os dados desconhecidos.
5	Variáveis, incógnitas e parâmetros; Famílias de equações e funções (Objetos intensivo com um terceiro grau de generalidade).	Existem operações com os parâmetros e, portanto, com objetos com um terceiro grau de generalidade.	Simbólico - literal; símbolos são usados analiticamente, sem se referir a informações contextuais.
6	Estruturas algébricas Abstrato (espaços vetoriais, grupos, anéis, ...) Relações binárias Gerais e suas propriedades (Objetos intensivos com quarto grau de generalidade).	Existem operações com os objetos que formam as partes das estruturas.	Simbólico - literal; símbolos são usados analiticamente sem se referir a informações contextuais.

Inicialmente a segunda parte desta sessão foi iniciada com uma discussão em torno da resolução da tarefa sobre operações vetoriais, mas foi sofrendo alterações devido às dúvidas dos estudantes. Portanto, a formadora decidiu lecionar sobre o conceito de vetor, apresentando a noção de vetor; como se representa um vetor ($\overline{a}\,, \underline{a}, \vec{a}, \overrightarrow{AB}$); a medida do segmento de vetor ($\|\overrightarrow{AB}\|$); os tipos de vetor (colineares, simétricos, vetor nulo); a adição de vetores com a regra do triângulo; a multiplicação do vetor com um escalar. Partindo-se desta breve apresentação do conceito de vetor, realizou-se uma discussão sobre a resolução da tarefa.

Figura 4.30 – Exemplo da tarefa “Propriedades de vetores”

Sendo um triângulo $[PQR]$ com seguintes pontos coordenadas: $P(3,1,-4)$; $Q(3,-4,6)$; e $R(-1,5,4)$. E sendo, também, duas escalar $a = -2$ e $b = 3$. O vetor $\overrightarrow{PQ}$ apresentado por $\vec{u}$, o vetor $\overrightarrow{QR}$ apresentado por $\vec{v}$ e o vetor $\overrightarrow{RP}$ apresentado por $\vec{w}$. Observe os seguintes afirmação e identifique as propriedades que se envolvem na seguinte operação vetorial:

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
(2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
(3) $\vec{u} \,.\, \vec{v} = \vec{v} \,.\, \vec{u}$
(4) $-\vec{v} + \vec{v} = 0$
(5) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{v} + a\,\vec{u}$
(6) $(a + b).\vec{u} = a\,.\vec{u} + b\,.\vec{u}$
(7) $(a\,.\,b).\vec{u} = a\,.(\,b\,.\vec{u}\,)$

Para a resolução desta tarefa começou-se por transformar os vetores dados na forma da vetor posição, por exemplo:

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{u}\,;$$

$$\overrightarrow{QR} = \vec{r} - \vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{v}\,;$$

$$\overrightarrow{RP} = \vec{p} - \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \vec{w}\,.$$

Baseando-se nestes produtos de vetores, os estudantes responderam às questões e tiraram conclusões relativamente às propriedades da operação vetorial, designadamente: (1) propriedade comutativa da soma de dois vetores; (2) propriedade associativa da soma de vetores; (3) propriedade comutativa da multiplicação de dois vetores, o produto desta propriedade é um escalar; (4) soma de dois vetores que são opostos é um vetor nulo; (5) propriedade distributiva do produto da multiplicação de um escalar com dois vetores; (6) propriedade distributiva do produto da multiplicação de dois escalar com um vetor; (7) propriedade associativa do produto de dois escalar e um vetor.

Sessão 12: *Atividade prática 3 – Reflexão sobre as características do RA para o Ensino Secundário*

Na sessão 9 e na sessão 12, apesar dos tópicos serem para níveis diferentes (RA para o Ensino Básico e RA para o Ensino Secundário), o objetivo destas atividades foi comum e consistiu na resolução de tarefas, usando vários métodos da resolução, na identificação dos objetos e dos processos algébricos envolvidos nas suas soluções, na identificação do nível de RA na atividade Matemática e, finalmente, na construção de tarefas relacionadas, envolvendo soluções que implicassem mudança de níveis de RA. Na ficha de trabalho utilizada nesta sessão questionou-se sobre a família de funções lineares; o movimento do *kayak*; e o sistema das equações lineares com duas incógnitas em forma geral que também foi questionada no QI. O objetivo da presença de três tarefas, que também foram questionadas no QI, foi avaliar os conhecimentos dos estudantes nesta fase e, ao mesmo tempo, relembrar e dar feedback durante a discussão (depois da realização desta ficha do trabalho) sobre estas tarefas.

A tarefa estrutura que está questionada nesta sessão já tinha questionada no estudo piloto (Tarefa 7 do QI) sobre sistema das equações lineares com duas incógnitas em forma geral. Seguidamente, apresentam-se os resultados de análise das respostas dos alunos nesta tarefa.

***Tarefa 3*– Sistema das equações lineares com duas incógnitas**

A tarefa 3, que constou do QI não apresentou nesta altura nenhuma solução correta. Todos os estudantes escolheram um exemplo particular e utilizaram as métodos (eliminação, substituição ou misto) na resolução. Portanto, esta atividade prática deu oportunidade aos estudantes para refletirem, em grupo, e discutirem a maneira de a resolver. Três de cinco grupos apresentaram a resposta correta a esta tarefa. Além de utilizarem o método da eliminação com que estão mais habituados, os estudantes de um grupo apresentaram - se uma resolução envolvendo a regra do Cramer. Seguidamente, apresentam-se os dois exemplos das respostas corretas com as duas maneiras de resolução.

Tabela 4.26 - Respostas do grupo 1 e do grupo 2 relativamente à Tarefa 3 da atividade prática 3 "Sistema das equações lineares com duas incógnitas"

Resposta do grupo 1 – resolução com o método da eliminação	Resposta do grupo 3 – resolução com o método de Cramer
a). $a_1x + b_1y = c_1 \mid b_2$ $a_2x + b_2y = c_2 \mid b_1$ (=) $a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1$ $a_2b_1x + b_1b_2y = b_1c_2$ $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$ $x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ $a_1x + b_1y = c_1 \mid a_2$ $a_2x + b_2y = c_2 \mid a_1$ (=) $a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1$ $a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2$ $(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2$ $y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$	3. a. $a_1x + b_1y = c_1 \mid a_2$ $a_2x + b_2y = c_2 \mid a_1$ $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1.b_2 - a_2.b_1$ $Dx = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_2a_1$ $Dx = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ $X = \frac{Dx}{D} = \frac{c_1.b_2 - c_2.b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ $Y = \frac{Dx}{D} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

Elementos linguísticos: relação entre linguagem simbólica em forma geral.
Situações-problemas: identificação os valores de x e de y em forma geral.
Conceitos: sistema das equações lineares com duas incógnitas.
Proposição: método da eliminação (resposta do grupo 1); método de Cramer (resposta do grupo 3)
Procedimentos:

método da eliminação

- eliminar uma incógnita para determinar o valor da outra incógnita;
- substituir o valor da incógnita em qualquer das equações para determinar o valor de outra incógnita.

método de Cramer

- determinar o determinante da matriz;
- determinar a matriz ajunta de x e a matriz ajunta de y;
- determinar os determinantes da matriz ajunta de x e de y.

Argumentos: baseia-se no conceito de resolução de um sistema das equações lineares com duas incógnitas.
Nível de RA: **nível 3**

- utiliza - se símbolos como incógnitas (simbólica literal);
- utiliza - se operações algébricas, aplicando as propriedades da eliminação (resposta do grupo 1) e regra de Cramer (resposta do grupo 3);
- a configuração da resposta é Álgebra estrutural.

Tarefa 1– Efeitos dos parâmetros na função linear

Figura 4.31 - Tarefa 1 da atividade prática 3 "*Efeitos dos parâmetros na função linear*"

Considera as seguintes funções do tipo $y = a\,x + b$

a. Explique os efeitos dos parâmetros a e b em gráfico desta função.

b. Identifique os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa?

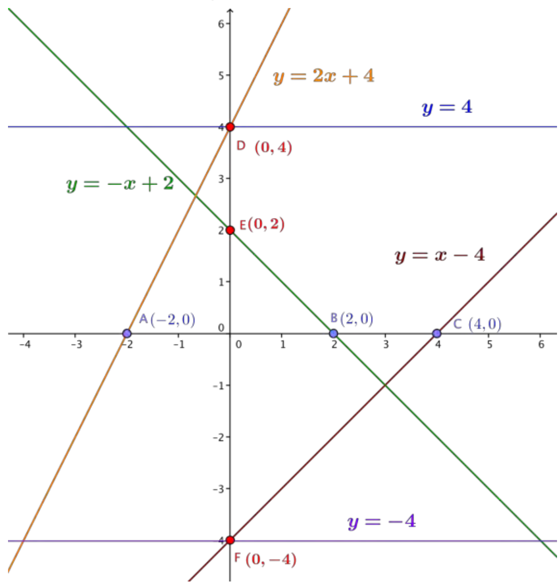
c. Qual o significado de: a, b, c, x, y ?

A interpretação da família da função linear e os efeitos dos seus parâmetros são os objetivos que pretende - se atingir através esta tarefa. A apresentação de uma função é uma vez mais complicado para os estudantes, uma vez que fomenta um raciocínio mais analítico e oferece a possibilidade de procurar várias estratégias para resolver o problema, por exemplo: a criação de exemplos particulares de vários possibilidades de parâmetros, o desenho e a observação dos gráficos, e tirando - se conclusões baseadas nas observações gráficas.

Resultados previstos relativamente à tarefa 1 - efeitos dos parâmetros na função linear

O conceito de função e gráfico da função linear são dois conhecimentos que os estudantes precisam para resolver este problema. Baseando-se no conceito da construção do gráfico da função linear, os estudantes construíram os gráficos de vários valores de parâmetros e observaram os acontecimentos relativos às suas mudanças, comose apresenta no próximo gráfico:

Figura 4.32 - Ilustração do gráfica da função linear $y = a\,x + b$



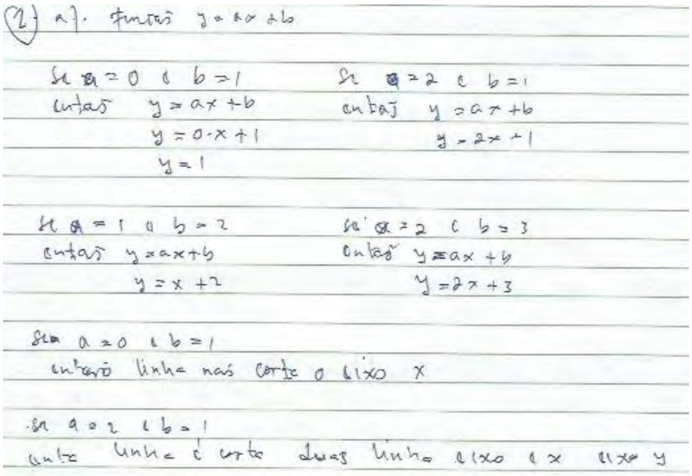
Encontra-se pela observação gráfica: se $a > 0$, a reta é crescente; se $a < 0$, a reta é decrescente; e se $a = 0$, a função é constante e a reta é horizontal ou paralelo com o eixo X. O parâmetro b (o coeficiente linear) determina-se o ponto de interseção com o eixo Y. O ponto D (0,4), o ponto E (0,2) e o ponto F (0,-4) são os pontos de interseção do gráfico com o eixo Y e todos destes pontos têm a mesma abscisa, que é zero. O gráfico tem o ponto de interseção com o eixo Y no ponto Q $(0, y)$, o valor de ordenada obtido pela substituição do $x = 0$ na função $y = ax + b$. Se $x = 0$, consequentemente $y = b$ e a coordenada do ponto de interseção é $(0, b)$. O ponto A (-2,0), o ponto B (2,0) e o ponto C (4,0) são os pontos de interseção do gráfico com o eixo X e todos destes pontos têm a mesma ordenada, que é zero. O gráfico tem o ponto de interseção com o eixo X no ponto P (x,0), o valor de abscisa obtido pela substituição do y = 0 na função $y = ax + b$. Se $y = 0$ então $0 = ax + b$, portanto $x = -\frac{b}{a}$ e o ponto coordenadas é $P\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

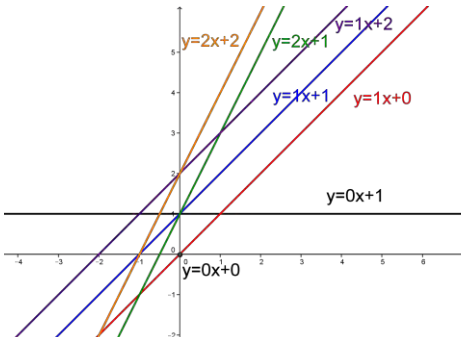
Análise das respostas dos grupos relativamente à tarefa 1 da atividade prática 3 "Efeitos do parâmetro na função linear"

A apresentação da função linear em modo geral motivou aos estudantes a procurarem uma estratégia alternativa para resolver este problema. Todos os grupos decidiram utilizar o programa matemático *GeoGebra* para ajudar na construção dos gráficos. Eles escolheram os vários valores do parâmetro a e do parâmetro b para construir vários gráficos, e observaram as mudanças afetadas por valores de parâmetros. Mesmo assim, os estudantes não conseguiram tirar a conclusão relativa a se a função é crescente ou é decrescente; se a função tem o ponto interseção no eixo X; se o gráfico tem o ponto interseção no eixo Y; ou se a função é monótona. Mesmo quando os estudantes conseguem construir os vários gráficos, a generalização ainda se torna um processo difícil para eles. Apresenta-se, em seguida, vários exemplos das respostas dos grupos relativamente a esta tarefa:

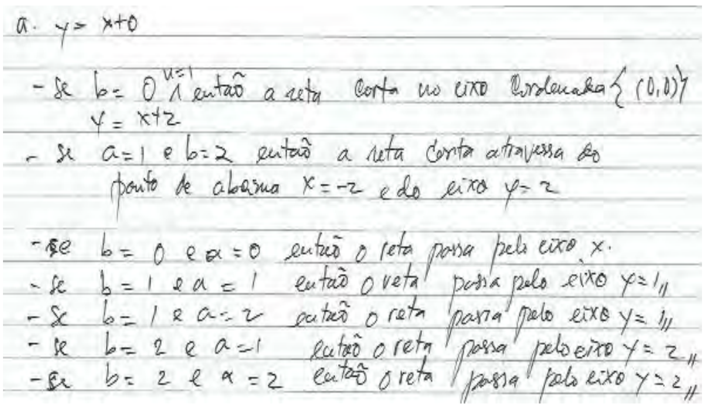
Tabela 4.27 - Respostas do grupo 2 e do grupo 3 relativamente à Tarefa 1 da atividade prática 3 *"Efeitos dos parâmetros na função linear"*

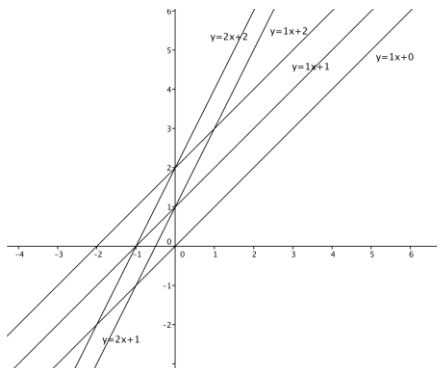
Resposta A – Grupo 2





Resposta B – Grupo 3





<u>Elementos linguísticos:</u> relação entre linguagem natural, simbólica e a representação gráfica.

<u>Situações-problemas:</u> identificação em que situação o gráfico tem o ponto de interseção com o eixo X e com o eixo Y.

<u>Conceitos:</u> O valor zero de abcissa define o ponto de interseção do gráfico com o eixo Y e o valor zero de ordenada define o ponto de interseção do gráfico com o eixo X.

<u>Proposição:</u>

- se $a > 0$, a reta é crescente; se $a < 0$, a função é decrescente; e se $a = 0$, a função é constante e a reta é horizontal ou paralelo com o eixo X.
- o parâmetro b (o coeficiente linear) determina-se o ponto de interseção com o eixo Y, o coordenado do ponto interseção com o eixo Y é $P(0, b)$.

<u>Procedimentos:</u>

- desenhar as retas com vários valores de a e b
- observar os efeitos de parâmetros a e b em várias situações;
- Fazer uma generalização dos efeitos de parâmetro a e b.

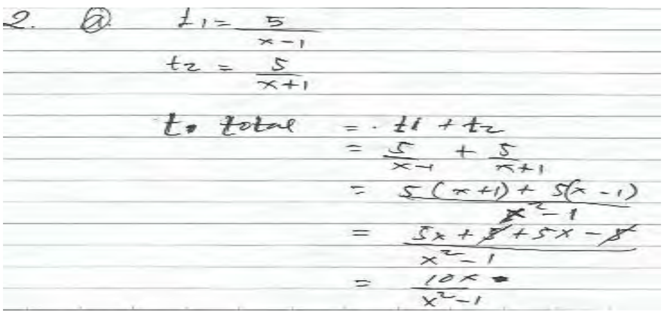
<u>Argumentos:</u> baseia-se na observação gráfica.

Nível de RA: **Nível 5**
- envolve o parâmetro a e b;
- estudo da família da função linear;
- opera com os parâmetros;
- envolve uma generalização;
- a configuração da resposta é Álgebra funcional envolvendo-se o RA e o raciocínio diagramático.

<u>Tarefa 2</u> - Movimento do kayak (Tarefa 6 do QI; Tarefa 4 da ficha do trabalho 2)

A tarefa sobre o movimento do *kayak* surgiu na tarefa 6 do QI e prolongou-se na atividade prática 2 e na atividade prática 3. Não se encontrou nenhuma resposta correta para esta tarefa no QI. As resoluções corretas foram encontradas nas respostas da atividade prática 3. Encontraram-se três grupos com respostas corretas, como se apresenta no seguinte exemplo:

Tabela 4.28: Respostas de um grupo 3 relativamente à Tarefa 2 da atividade prática 3 "Movimento do kayak"



2. (a) $t_1 = \frac{5}{x-1}$

$t_2 = \frac{5}{x+1}$

$t.\ total = t_1 + t_2$

$= \frac{5}{x-1} + \frac{5}{x+1}$

$= \frac{5(x+1) + 5(x-1)}{x^2-1}$

$= \frac{5x + \cancel{5} + 5x - \cancel{5}}{x^2-1}$

$= \frac{10x}{x^2-1}$

Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e linguagem simbólica.
Situações-problemas: identificação o tempo total da viagem do kayak.
Conceitos: distancia entre um acampamento e uma barragem, velocidade do kayak, velocidade do rio, o tempo (t) relativamente à distância (d) e à velocidade (v)
Proposição: o tempo (t) relativamente a distância (d) e a velocidade (v): $t = \frac{d}{v}$
Procedimentos:
- traduzir da linguagem natural para linguagem algébrica;
- determinar o tempo assumido pelo kayak do acampamento para o barragem $t_1 = \frac{d}{v_1}$;
- determinar o tempo assumido pelo kayak do barragem para o acampamento $t_2 = \frac{d}{v_2}$;
- determinar o tempo total de viagem $t = t_1 + t_2$.

Argumentos: o calculo algébrico do total de viagem

Nível de RA: **nível 3**

- envolve-se uma tradução da linguagem corrente para a linguagem algébrica;
- utiliza - se operações algébricas na resolução de problema;
- envolve - se uma equação linear;
- a forma da equação $Ax \pm B = Cx + D$;
- a configuração da resposta é Álgebra estrutural.

Síntese da atividade prática 3

Nos resultados da atividade prática 3 mostra-se uma mudança no desenvolvimento do conhecimento algébrico dos estudantes. Estas mudanças são indicadas pelo aumento do número das respostas corretas e pela utilização do RA nas resoluções do problema relativamente a todas as tarefas.

Os estudantes mostraram uma mudança positiva relativamente à tarefa da modelação (o movimento do *kayak*), comparando ao resultado desta mesma tarefa no QI e na Atividade Prática 1.

Na determinação da expressão geral da solução do sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, em forma geral, os estudantes além de terem utilizado a propriedade com a qual estão mais habituados, utilizaram uma resolução envolvendo a regra do Cramer.

Os estudantes utilizaram o programa *GeoGebra* para ajudar na construção dos gráficos de casos particulares. Mesmo assim, os estudantes ainda tiveram dificuldades em tirar conclusões. O processo de generalização é, pois, uma das preocupações mais comuns na aprendizagem matemática.

Análise dos resultados das questões sobre o CDM relativamente à atividade prática 2 (sessão 9) e à atividade prática 3 (sessão 12)

As atividades práticas 2 e 3 que foram propostas aos estudantes envolvem também as questões relativamente ao CDM. A análise do CDM destas atividades foca-se nas facetas epistémica, cognitiva e instrucional. Para efeitos de análise, categorizam-se todas as questões relativamente ao CDM referindo-se a proposta de Godino et al. (2015) sobre as facetas acima referidas (tabela 4.27):

Tabela 4.29 - Questões do CDM relativamente às fichas de trabalhos 2 e 3

Facetas	Tarefa	Questão
Faceta epistémica (níveis de RA)	*Família da função linear*	FT3 – 1d. Qual seria nível de RA poderia categorizar pela resposta desta tarefa.
	Custo do almoço	FT2 – 4b. Pode-se resolver a tarefa com procedimentos exclusivamente aritméticos? De que maneira?
		FT2 – 4c. Pode-se resolver a tarefa com procedimentos exclusivamente algébricos? De que maneira?
Faceta cognitiva (significados pessoais)	*Equivalência*	FT2 – 1b. Que interpretação do sinal "=" no pensamento deste aluno?
	Balança de cupcake	FT2 – 2b. Quais são os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa?
	Problema de palitos	FT2 – 3c. Considera que esta tarefa pode promover o RA dos alunos do 3º ciclo do Ensino Básico?
	Família da função linear	FT3 – 1b. Identifique os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa?
	Sistema das equações lineares com duas incógnitas	FT3 – 3b. Identifique os conhecimentos algébricos se pode utilizar para resolver esta tarefa?
Faceta instrucional (situações e recursos)	*Problema de palitos*	FT2 – 3b. Como modificaria o enunciado da tarefa para induzir um processo de resolução que envolve o conhecimento algébrico?
	Movimento do kayak	FT2 – 5b. Enuncie uma variação desta tarefa cuja solução que implica apenas os conhecimentos aritméticos. Resolva este problema.
		FT2 – 5c. Enuncie uma variação de problema cuja solução que implica o uso de parâmetro. Escreva a expressão correspondentes.
	Movimento do kayak	FT3 – 2b. Enuncie uma variação desta tarefa cuja solução que implica apenas os conhecimentos aritméticos. Resolva este problema.
		FT3 – 2c. Enuncie uma variação de problema cuja solução que implica o uso de parâmetro. Escreva a expressão correspondentes.
	Sistema das equações lineares com duas incógnitas	FT3 – 3c. Enuncie duas problemas que se possam propor aos alunos do 10º ano cuja sistema das equações lineares com duas incógnitas!

FT2: segunda da ficha de trabalho; FT3: terceiro da ficha de trabalho

Faceta Epistémica

A identificação do nível de RA na tarefa sobre a família da função linear (FT3 – 1d) e na tarefa (custo do almoço) a qual se pode resolver com o procedimento aritmético ou algébrico (FT2 – 4b, 4c), foram duas tarefas apresentadas na faceta epistémica. Dos cinco grupos apenas um grupo apresentou resposta correta (nível 4) e os outros apresentaram respostas erradas ou não responderem. O RA e o nível do RA foram apresentados aos estudantes durante a ação formativa, por isso não tiveram muito tempo para dominar estes conteúdos e demonstraram dificuldades relativamente a este novo conhecimento.

A dificuldade dos alunos também se identifica nas suas respostas sobre a resolução da tarefa com o procedimento aritmético (FT2 – 4b) e com o procedimento algébrico (FT2 – 4c). Nenhum dos grupos tem resposta correta relativamente a este tipo de questão. Esta realidade foi identificado por a falta do conhecimento por parte dos estudantes sobre a diferença entre os dois procedimentos.

Faceta Cognitiva

A questão sobre a faceta cognitiva ainda tem grande dominância nas atividades práticas, em particular nas questões sobre a identificação do conhecimento algébrico envolvido nas resoluções das tarefas. Na atividade prática 2 (FT2 – 2b), apenas um grupo respondeu corretamente sobre o conhecimento algébrico envolvido na tarefa sobre a balança de *cupcake*, que é uma equação linear com uma incógnita. A compreensão dos estudantes relativamente este tipo de questão foi evoluindo na atividade prática 3, por exemplo na questão sobre o conhecimento algébrico envolvido na tarefa do sistema das equações lineares com duas incógnitas (FT3- 3b), todos os grupos identificaram o sistema equações lineares com duas incógnitas, resolveram o sistema equações lineares com duas incógnitas recorrendo aos métodos de eliminação, substituição ou Cramer.

Todos os grupos responderam corretamente relativamente ao conhecimento algébrico envolvido na tarefa sobre família da função linear (FT3 – 1b). Para estes grupos, os conhecimentos referidos são: função linear; gráfico da função linear; família da função linear; construção do gráfico da função linear apoiado com o programa *GeoGebra*. A dominância na utilização do programa *GeoGebra* foi uma experiência interessante durante a qual os estudantes timorenses começaram a familiarizar-se e a utilizar as tecnologias na sua aprendizagem. Para os estudantes timorenses o *GeoGebra* foi uma ajuda muito importante na visualização e na observação gráfica. Neste caso, a visualização gráfica minimizou os conflitos cognitivos.

Todos os grupos identificaram corretamente o significado do sinal "=" na tarefa sobre equivalência (FT2 – 1b), e fazendo as seguintes afirmações: igualdade como resultado da operação; igualdade dos resultados de dois ambos dos lados; igualdade do processo aritmético.

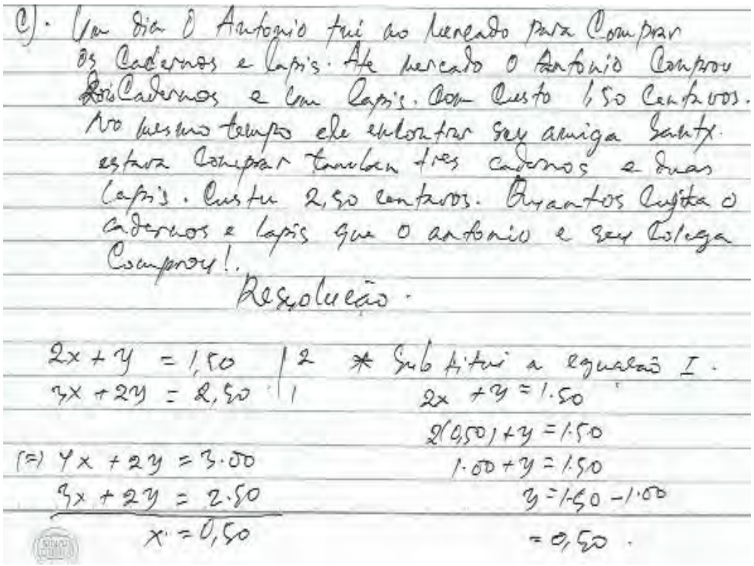
A falta de programas de Matemática para Ensino Básico foi uma razão para a dificuldade dos estudantes na consideração do tema "Padrão e sequência" na reflexão sobre a possibilidade deste fazer parte do Ensino Básico (FT2-3c).

Faceta Instrucional

Na avaliação desta faceta, foram apresentadas quatro questões sobre modificação ou enunciação das tarefas relacionadas com os temas referidos. Na maioria dos grupos foram repetidas as questões das tarefas dadas, por exemplo, na tarefa sobre a sequência dos palitos (FT2 -3b) pediu-se aos estudante o seguinte: "Representa os dois termos da sequencia seguintes e indica o número de palitos necessários para construir de cada um." Aqui os estudantes apenas modificam "Quantos palitos que constituem no sétimo e no oitavo, desta sequência". Esta dificuldade de modificar o enunciado da tarefa para envolver o RA também ocorre na enunciação da tarefa sobre o movimento do kayak.

O tema do sistema das equações lineares com duas incógnitas parece que é o tema que os estudantes melhor conhecem e com o qual estão mais familiarizados. Esta realidade facilita os grupos na construção de tarefas sobre este tema, como se apresenta no seguinte exemplo:

Figura 4.33 – Exemplo da resposta de um grupo 1 relativamente à construção da tarefa sobre sistema de equações lineares


C). Um dia o Antonio fui ao mercado para comprar os cadernos e lapis. Ao mercado o Antonio comprou dois cadernos e um lapis. Com custo 1,50 centavos. No mesmo tempo ele encontrar seu amiga Santx estava comprar tambem tres cadernos e duas lapis. Custu 2,50 centavos. Quantos custa o cadernos e lapis que o antonio e seu colega comprou!.

Resolução.

$$\begin{cases} 2x + y = 1,50 & \mid 2 \\ 3x + 2y = 2,50 & \mid 1 \end{cases}$$

$$(=)\ 4x + 2y = 3.00$$
$$\underline{3x + 2y = 2.50}$$
$$x = 0,50$$

* Substitui a equação I.

$$2x + y = 1.50$$
$$2(0,50) + y = 1.50$$
$$1.00 + y = 1.50$$
$$y = 1.50 - 1.00$$
$$= 0,50.$$

O exemplo apresentado o grupo de estudantes elaborou o enunciado de um problema, sobre compro de lápis e cadernos. Traduziram o enunciado com o recurso a um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas e resolveram pelo método misto.

4.4 Avaliação da ação formativa

A realização da avaliação final, como também na avaliação inicial, tem como o objetivo evidenciar aspetos relativos a duas vertentes fundamentais depois da ação formativa: o conhecimento da Álgebra, com o enfoque do RA e o CDM proposto por Godino (2009). Identifica-se também, através desta avaliação, os erros algébricos e as dificuldades dos estudantes na aprendizagem da Álgebra.

Na parte seguinte, apresentam-se as descrições e os resultados da análise dos dados obtidos na avaliação final, nomeadamente:

3. Construção do questionário final (QF);
4. Descrição sobre as tarefas estruturas, funções e modelação que envolve:

   a) Construção das soluções previstas das tarefas;

   b) Descrições dos níveis do RA que envolvem nas soluções previstas;

   c) Descrição epistémica relacionada às soluções previstas.

3. Análise dos resultados obtidos, envolvendo a análise sobre:

a) O conhecimento algébrico: a presença de objetos algébricos intensivos; as transformações (operações) aplicadas para aos objetos; e o tipo da linguagem utilizada;

b) Identificação dos erros algébricos manifestados nas respostas dos estudantes;

c) Análise o CDM às varias facetas: epistémica, cognitiva e instrucional.

4. Discussão dos resultados envolvendo uma caraterização psicométrica do QF.

4.4.1 Construção do QF sobre o RA e o CDM

Neste estudo a avaliação final foi realizada através da aplicação do questionário final (QF), como uma avaliação sumativa, é um meio para ter informações relativamente aos conhecimentos dos estudantes sobre o RA, depois da ação formativa. Através desse resultado determinou-se o sucesso dos estudantes relativamente ao conhecimento algébrico e ao CDM.

O QF foi constituída em torno de 6 tarefas: 1 tarefa para o Ensino Básico e 5 tarefas para o Ensino Secundário. As tarefas são do CDM e do conhecimento algébrico, nomeadamente de: *Estrutura* - "Balança de Angry Bird" envolvida ao sistema das equações lineares com duas incógnitas (Tarefa1); *Funções* - "Padrão e sequência de *lafatik*" (Tarefa 2), "Aulas de explicações de Matemática" (Tarefa 3) e "Família da Função Linear" (Tarefa 6); *Modelação* – "Identificação das expressões algébricas" (Tarefa 4) e "Área do triângulo retângulo" (Tarefa 5), conforme o documento no ANEXO VII.

No QF repetiram-se duas tarefas que fizeram parte do QI: "Padrão e sequência de *lafatik*" (Tarefa 2) e "Identificação das expressões algébricas" (Tarefa 4). A tarefa 2 do QF teve como o objetivo que os estudantes deduzissem o termo geral da sequência e não pretendia que os estudantes construíssem o termo (flor) e realizassem cálculos numéricos (como foi no item a do QI). Ou seja, pretendeu-se que os estudantes envolvessem os símbolos e as operações algébricas, encontrando a forma canónica que representa os número de flores (item a do QI). Além disso, pelo item b desta tarefa pretendeu-se que os estudantes apresentassem outras soluções diferentes. Na tarefa 2, do QF, colocaram-se mais questões relativamente à faceta epistémica: identificação do nível do RA envolvido na resolução da tarefa; justificação das possibilidades de resolver a tarefa com o procedimento algébrico e com o procedimento aritmético.

A tarefa 4 sobre "Identificação das expressões algébricas" não sofreu nenhuma alteração na questão do conhecimento algébrico, nem na questão do conhecimento didático. A repetição desta tarefa vem de uma dificuldade manifestada pelos estudantes no QI, onde se observou que tiveram dificuldades na construção ou modificação das tarefas utilizadas expressões dadas na tarefa. Portanto, agora, pretende-se analisar o desenvolvimento do conhecimento dos estudantes na construção da tarefa (faceta instrucional).

Relativamente às descrições todas as tarefas do QF vão ser apresentadas nas seguintes secções:

4.4.2 Descrição das tarefas do questionário final (QF)

Apresenta-se uma descrição e análise das tarefas deste questionário, apoiando-se nas soluções esperadas e no quadro teórico adotado. Nesta análise identifica-se os objetos matemáticos envolvidos na solução das tarefas, permitindo descrever a complexidade e natureza algébrica tendo por base os níveis do referencial do EOS (Godino, 2009) e categoriza-se segundo três tipos de tarefa: estruturas; função; e modelação.

4.4.2.1 Descrição das tarefas do QF sobre Estruturas

A tarefa sobre Álgebra, dentro da categoria Estrutura, "Equilíbrio da balança", serve para avaliar conhecimentos algébricos no Ensino Básico.

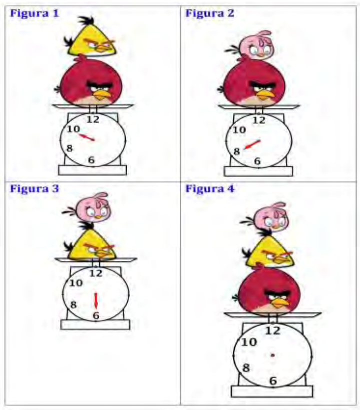
<u>Tarefa 1</u>*: *Balança de "Angry Bird"

A presente tarefa 1 foi baseada na tarefa "*Chickens*" de Kindt, Abels, Meyer e Pligge (2006, p. 22). Esta tarefa é semelhante à primeira tarefa do QI sobre a "Balança de sumo" (ANEXO II) que aplica propriedades estruturais de: números naturais ℕ; princípios de resolução de equações do 1.º grau. Na tarefa 1 intervêm incógnitas e a resolução de um sistema das equações lineares com duas incógnitas. Apresentam-se, no enunciado da tarefa, quatro figuras de balança com diferentes tipos de "Angry Bird" com diferentes pesos. De seguida apresenta-se o enunciado de tarefa:

Figura 4.34 – Tarefa 1 do QF "Balança de Angry bird"

Observa as figuras das balanças ao lado:

a. Quanto é o peso dos "Angry bird" da 4ª balança (figura 4)?
b. Que interpretação da "balança" está associada ao conhecimento matemático?
c. Quais são os conhecimentos matemáticos utilizados para resolver esta tarefa?
d. Identifique os níveis de RA das suas respostas no item a?



A resolução do item a envolve a tradução da linguagem natural em linguagem algébrica envolvendo os símbolos como incógnitas. Se o "Angry Bird" grande, médio e pequeno são respetivamente, simbolizados por x, y e z, então cada uma das balanças é associada à equação que facilita a resolução desta tarefa. Na teoria de Vlasis (2002), esta tarefa é categorizada como sendo do 1.º tipo de equações lineares com uma incógnita, atendendo a que tem incógnitas só num lado.

Soluções previstas relativamente à tarefa 1.

A tarefa 1 pretende encontrar a solução que manifeste o nível 3 do RA que envolve símbolos algébricos e processos algébricos, como se apresenta na solução 3 da tabela 4.30. Para além disso, permite, também, encontrar as soluções de nível mais baixo, sem envolvimento dos símbolos e dos processos algébricos (nível 0) como mostra na solução 1 da tabela 4.30 ou as soluções que envolvem as propriedades da operação numérica (adição, divisão) e a propriedade distributiva na sua solução (nível 1), como apresenta na solução 2 da tabela 4.30.

Considera-se que existem vários métodos para resolver um sistema de equações lineares com três incógnitas (substituição; eliminação; misto (conjunto dos métodos de substituição e eliminação; regra de Cremer; e matriz inversa), na solução 3 da tabela 4.30 apresenta-se um exemplo de solução com o método misto.

Tabela 4.30 - Soluções previstas relativamente à tarefa 1 do QF

item a	
<u>Solução 1</u> Se fazemos o cálculo da primeira balança + segunda balança – terceira balança, então obtemos que o peso de dois "Angry Bird" grande é 12 quilogramas. Portanto, o peso de cada "Angry Bird" grande é 6 quilogramas. Na primeira balança, o conjunto do peso "Angry Bird" grande e "Angry Bird" médio é 10 quilogramas. Então, o peso de um "Angry Bird" médio é 6 quilogramas mais leve do que o peso do "Angry Bird" grande, ou seja, 4 quilogramas. Analogicamente, o conjunto do peso "Angry Bird" grande e "Angry Bird" pequeno, na segunda balança, é 8 quilogramas. Então, o peso de um "Angry Bird" pequeno é 6 quilogramas mais leve do que o peso do "Angry Bird" grande, ou seja 2 quilogramas. Assim, o total do peso de um "Angry Bird" grande, um "Angry Bird" médio e um "Angry Bird" pequeno são 12 quilogramas.	<u>Nível 0</u> - Utiliza-se a linguagem natural: - Não envolve nenhum símbolo algébrico; - Não envolve nenhuma operação algébrica. *A configuração da resposta é operação numérica.*
<u>Solução 2</u> 1.ª balança: grande + médio = 10 quilogramas 2.ª balança: grande + pequena = 8 quilogramas 3.ª balança: médio + pequena = 6 quilogramas Somas de três balanças: (grande + média) + (grande + pequena) + (médio + pequena) = 10 + 8 + 6 Então, 2 grandes + 2 médios + 2 pequenos = 24 Ou 2 x (grande + médio + pequeno) = 24 Assim, o total peso de "Angry Bird" grande, médio e pequeno é 24/2 = 12 quilogramas.	<u>Nível 1</u> - Utiliza-se a linguagem natural; - Envolve-se as operações numéricas de adição e divisão; - Envolve-se a propriedade distributiva; - Envolvem-se os dados desconhecidos, neste caso são os pesos de "Angry Bird" grande, médio e pequeno. *A configuração da resposta é operação numérica.*
<u>Solução 3</u> Sabendo que na 1ª balança tem 2 "Angry Bird": grande e média. A soma dos dois "Angry Bird" é 10 quilogramas. Na 2ª balança, a soma do "Angry Bird" grande e do "Angry Bird" pequena é 8 quilogramas. A 3ª balança mostra-se o peso do "Angry Bird" média e do "Angry Bird" pequena é 6 quilogramas. Esta	<u>Nível 3</u> - Envolve-se os símbolos como incógnitas (simbólica lateral); - Utilizam-se

informação traduz-se: A 1.ª balança fica: x + y = 10 ..... 1ª equação A 2.ª balança fica: x + z = 8 .... 2ª equação A 3.ª balança fica: y + z = 6 .... 3ª equação Da 1ª equação $x + y = 10$ ou seja $x = 10 - y$, substitui-se na equação da 2ª balança e fica: $10 - y + z = 8$ ou seja $-y + z = -2$, e pode-se chamar 4ª equação. Então tem-se um sistema das equações com duas incógnitas y e z $\begin{cases} y + z = 6 \ldots\ldots\ 3^{a}\ equação \\ -y + z = \ -2 \ldots 4^{a}\ equação \end{cases}$ Da 4ª equação, forma-se $z = y - 2$ e substitui-se na 3ª equação e fica: $y + (y - 2) = \ 6$ $2y - 2 = 6$ $2y = 6 + 2 = 8 \ \rightarrow y = 4 \ldots\ldots 5^{a}\ equação$ Substitui-se 5ª equação na 3ª equação $z = y - 2$, então: $z = 4 - 2 = 2$. Por isso, até esta etapa temos os valores de $y = 4$ e $z = 2$. Substitui-se estes valores na 1ª ou na 2ª equação. Substitui-se o valor de $y = 4$ na 1ª equação: $x + y = 10$ $x + 4 = 10 \ \rightarrow x = 10 - 4 = 6$ Assim, o peso do “Angry Bird” grande é 6 quilogramas; “Angry Bird” média é 4 quilogramas; e “Angry Bird” pequena é 2 quilogramas. Para responder o <u>item a</u>, envolve-se o calculo numérico de somatório de três tipos de “Angry Bird” ou seja o peso de três “Angry Bird” são $6 + 4 + 2 = 12$ quilogramas.	operações algébricas; - A estrutura da tarefa é a equação de forma $Ax \ \pm B = Cx \ \pm D$ *A configuração resposta é da Álgebra estrutural.*
item b	
A balança interpreta-se como uma igualdade de uma operação.	
item c	
Os conhecimentos matemáticos utilizados para resolver esta tarefa, são: igualdade; equação; sistema de equações; método de resolução de um sistema das equações lineares com duas incógnitas (eliminação, substituição, misto, ...); método de resolução de um sistema das equações lineares com três incógnitas.	
item d	
A resposta dada no <u>item a</u> está categorizado no nível 3 do RA e feita pelo envolvimento de: símbolos literais como incógnitas; processo algébrico, neste caso é resolução de um sistema de três equações lineares com três incógnitas, utilizando o método misto envolve-se equações do tipo $Ax \ \pm B = Cx \ \pm D$.	

Descrição epistémica relacionada com a tarefa 1 e as suas soluções previstas.

Nesta parte, apresenta-se uma análise dos tipos de objetos e processos algébricos envolvidos nas resoluções da tarefa 1 baseado na proposta do Godino et al. (2007) sobre elementos linguísticos; conceitos; proposições; procedimentos; argumentos.

A situação problema apresentada na tarefa 1 é uma situação de três diferentes balanças em que cada uma delas é constituída por dois tipos de "*Angry Bird*" com diferentes pesos dependendo do tamanho do "*Angry Bird*", grande, médio ou pequeno. Pretende-se, nesta tarefa, identificar o total de peso de três tipos de "*Angry Bird*", como se mostra na figura 4 da enunciado da tarefa.

No item a identificam-se os diferentes *elementos linguísticos* entre as três soluções apresentadas na tabela 4.30. Nas soluções 1 e 2, envolvem-se uma relação entre linguagem natural e a apresentação das figuras, e na solução 3 é a relação entre linguagem simbólica (x, y e z) e a apresentação das figuras. Na solução 1, a linguagem natural ocupa grande parte da resolução do problema e envolve-se propriedade da substração e divisão do cálculo numérico. A solução 3 é feita a tradução em linguagem algébrica envolvendo os símbolos como incógnitas. Se o "*Angry Bird*" grande, médio e pequeno são simbolizados por x, y e z, então cada uma das balanças é associada a equações, o que facilita a resolução desta tarefa.

As duas primeiras soluções envolvem o *conceito* de equilíbrio de balança como o conceito básico para compreender o problema. A utilização dos símbolos, na solução 3, permite uma solução que envolve o *conceito* da equação linear como uma tradução do conceito de balança. Se cada uma das balanças for traduzida numa equação linear, portanto para resolver as situações das três balanças, é necessário um conceito da resolução de um sistema lineares com três incógnitas e o respetivo método de resolução.

A solução 1 utiliza uma observação das balanças como o *procedimento* de resolução. Inicia-se a resolução de problema com o envolvimento das propriedades da adição e da subtração de operação numérica. Neste caso se 1.ª equação + 2.ª equação – 3.ª equação, resulta que o peso de dois "*Angry Bird*" grande é 12 quilogramas. Portanto, com a propriedade da divisão, o peso de um "*Angry Bird*" grande é 6 quilogramas. O resultado desta associação permite resolver esta tarefa.

Outro procedimento de resolução foi apresentada na Solução 2. Inicia-se esta solução com o processo de adição de três balanças e obtem-se o peso de: 2 "*Angry Bird*" grande + 2 "*Angry Bird*" médio + 2 "*Angry Bird*" pequenos. Portanto, pela propriedade da divisão (dividir por 2) pode-se obter a solução (o peso de "*Angry Bird*" grande, médio e pequeno).

Na solução 3, inicia-se o *procedimento* de resolução com uma tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica e relacionam-se as situações das três balanças. Neste exemplo, utiliza-se o método da substituição para resolver o problema.

Relativamente ao CDM, nesta tarefa colocaram-se duas questões da faceta cognitiva:

1. compreensão dos estudantes relativamente ao significado de "equilíbrio" da balança, que neste caso associa-se ao uso da igualdade como equivalência da expressão (item b);
2. identificação dos conhecimentos matemáticos utilizados na resolução da tarefa. Esta tarefa questiona, também, uma questão relativamente à faceta epistémica sobre a identificação do nível do RA que envolve na resolução de problema (item c).

4.4.2.2 Descrição das tarefas do QF sobre Funções

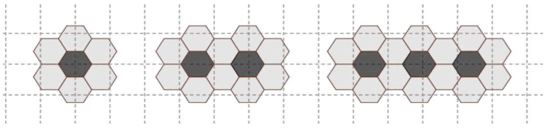
Seguidamente, apresentam-se as três tarefas do QF, com referência aos vários conhecimentos algébricos e os vários níveis de RA. A primeira tarefa sobre funções é uma tarefa do padrão e sequência (Tarefa 2). Esta tarefa pode-se utilizar para avaliar o conhecimento sobre a função no Ensino Secundário. A segunda tarefa é da função linear incorporada numa tarefa sobre a tomada de decisão para escolher uma de duas opções de explicação (Tarefa 3). A família da função linear é o tema da terceira tarefa, envolvendo uma representação gráfica de elementos desta família, através da atribuição de valores aos parâmetros (Tarefa 6). Estas duas últimas tarefas pretendem desenvolver o conhecimento algébrico funcional para o Ensino Secundário.

Tarefa 2*: *Padrão e sequência de lafatik

Esta tarefa é semelhante à tarefa 2 do QI (ver anexo II), mas desta vez insiste-se mais na utilização do padrão e sequência, em vez da observação da figura. Existem, também, várias modificações relativamente às questões sobre o CDM.

Figura 4.35 – Tarefa 2 do QF “Padrão e sequência de *lafatik*”

A figura abaixo, mostra o padrão de uma *lafatik* que é composto por *tali tahan* branco e *tali tahan* preto. A primeira flor é formada por 6 *tali tahan* branco e 1 *tali tahan* preto, a segunda por 10 *tali tahan* branco e 2 *tali tahan* preto, e assim sucessivamente.



a. Quantas flores serão construídas com 37 *tali tahan*?
b. Resolva esta tarefa utilizando vários métodos de resolução.
c. Quais seriam os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa?
d. Identifique os níveis de RA das suas respostas no <u>item b</u>.
e. Pode resolver-se a tarefa com procedimentos exclusivamente aritméticos? De que maneira?
f. Pode resolver-se a tarefa com procedimentos exclusivamente algébricos? De que maneira?

Aqui pretende-se que os estudantes resolvam esta tarefa com, no mínimo, dois procedimentos diferentes (<u>item a</u> e <u>item b</u>). Esta situação permite aos estudantes familiarizarem-se com tarefas com diferentes formas de resolução.

Soluções previstas relativamente à tarefa 2.

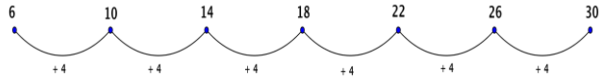
Apresentam-se as possibilidades de soluções que poderiam responder a tarefa 2, com vários métodos de resolução e várias categorias do nível de RA.

Tabela 4.31 - Soluções previstas relativamente à tarefa 2 do QF

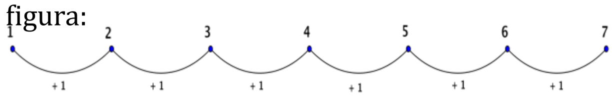
<table>
<tr><th colspan="2">item a e item b</th></tr>
<tr><td><u>Solução 1</u>
Construindo os seguintes figuras com: 4 flores, 5 flores, 6 flores, etc., e calculado o número da tali tahan branco e o número da tali tahan preto e regista-se na seguinte tabela:
<table>
<tr><th>Flor</th><th>tali tahan branco</th><th>tali tahan preto</th><th>Total de tali tahan</th></tr>
<tr><td>1ª</td><td>6</td><td>1</td><td>7</td></tr>
<tr><td>2ª</td><td>10</td><td>2</td><td>12</td></tr>
<tr><td>3ª</td><td>14</td><td>3</td><td>17</td></tr>
<tr><td>4ª</td><td>18</td><td>4</td><td>22</td></tr>
<tr><td>5ª</td><td>22</td><td>5</td><td>27</td></tr>
<tr><td>6ª</td><td>26</td><td>6</td><td>32</td></tr>
<tr><td>7ª</td><td>30</td><td>7</td><td>37</td></tr>
</table>
Baseia-se na tabela anterior, os 37 tali tahan pode construir em 7 flores</td>
<td><u>Nível 0</u>
- Não envolve símbolos algébricos nem soluções algébricas
- Utiliza-se uma representação de um diagrama e/ou tabela</td></tr>
</table>

Solução 2

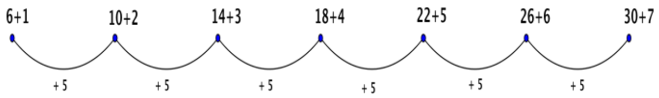
Os números de cada tali tahan indica-se os padrões da progressão aritmética. E a quantidade de *tali tahan* branco ilustrada pela seguinte progressão:



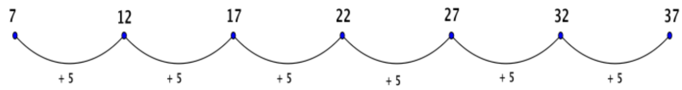
E a progressão da quantidade de *tali tahan* preto ilustrada na seguinte figura:



Baseia-se nas duas progressões anteriores, permite de construir um conjunto de progressão de dois tipos de *tali tahan*, como apresentadas nas seguintes figuras:



Ou seja,



Portanto, a sua solução obtida por a seguir desta progressão sucessivamente até encontrar as 37 do conjunto de dois tipos de *tali tahan*, que pode-se construir em 7 flores.

Nível 1

- Utiliza a linguagem numérica
- Envolve as propriedades de adição e de substração

Solução 3

Tendo por base na observação de três primeiras flores, regista-se em seguinte tabela:

Flor	*tali tahan* branco	*tali tahan* preto	Conjunto de *tali tahan*
1ª	$6 = 6 + 4 \cdot 0$	1	7
2ª	$10 = 6 + 4 \cdot 1$	2	12
3ª	$14 = 6 + 4 \cdot 2$	3	17
...	...	...	...
n	$U_n = 6 + 4 \cdot (n-1)$ $U_n = 4n + 2$	$U_n = n$	$U_n = (4n+2) + n$ $U_n = 5n + 2$

a. $U_n = 37 \longrightarrow n = ?\ U_n = 5n + 2$

$37 = 5n + 2$

$35 = 5n \longrightarrow n = 7$

A flor que têm 37 *tali tahan* é 7ª flor.

Nível 3

- Utiliza-se letras como representante dos números
- Envolve-se objetos indeterminados ou variáveis
- Envolve-se as operações algébricas
- A generalização definida por identificação de padrão

item c

Os conhecimentos matemáticos envolvidos nesta tarefa, são: padrão; sucessão; e progressão.

item d

Os níveis do RA das respostas pode-se observar nas soluções a cima: a solução1 é categorizado no nível 0; a solução 2 é categorizado no nível 1; solução 3 é categorizado no nível 3.

item e

Sim, pode resolve esta tarefa com o procedimento aritmético, por exemplo como apresentado na solução 1.

item f
Sim, pode resolve esta tarefa com o procedimento algébrico, por exemplo como apresentado na solução 3.

Descrição epistémica relacionada com a tarefa 2 e as suas soluções previstas.

Na 1.ª questão desta tarefa, ainda há uma possibilidade em que os estudantes utilizam uma construção das figuras como uma estratégia de resolução e apresentam-se os números de *tali tahan* numa tabela (exemplo, Solução 1, tabela 4.31). Considera-se ainda que existe a possibilidade dos estudantes utilizarem uma tabela para registar os números de *tali tahan* e aplicar um cálculo numérico como *procedimentos* de resolução.

Na Solução 2, o *procedimento* da resolução está baseado na identificação da diferença entre dois termos sucessivos, neste caso opera-se a propriedade de subtração para obter as razões de *tali tahan* branco e de *tali tahan* preto da 1.ª e da 2.ª flor, com o mesmo modo para a 2.ª e a 3.ª flor, e também para a 3.ª e a 4.ª flor. Através deste procedimento mostra-se um *argumento* em que os termos sucessivos têm a mesmo razão. A solução é obtida através de continuação de progressão de dois tipos de *tali tahan.* Há possibilidade, também, de resolver o item b através de uma análise de progressão, de conjunto de *tali tahan* branco e de *tali tahan* preto. E a solução obtida pela continuação deste conjunto de progressões.

Na solução 3, a *linguagem* utilizada recorre a símbolos literais para representar os números de *tali tahan.* Envolve-se os *conceitos* de padrão e progressão aritmética e *proporciona-se* pela fórmula da progressão aritmética $U_n = a + (n-1)b$, sendo $a = U_1$ = 1.º termo da progressão e $b = U_n - U_{n-1}$ = razão entre dois termos sucessivos. Neste caso, a expressão $U_n = 6 + 4 \cdot (n-1)$ para progressão de *tali tahan* branco e a expressão $U_n = n$ para progressão de *tali tahan* preto. Os resultados obtidos pelos *procedimentos* envolvidos a propriedade distributiva de número das flores (n) nas expressões de duas progressões.

Relativamente ao CDM, o item a, o item b e item c desta tarefa pretendem avaliar a faceta cognitiva sobre a resolução da tarefa e a identificação do conhecimento algébrico envolvido na resolução. Na faceta epistémica, esta tarefa questiona sobre a identificação do nível de RA (item d), e solicita a justificação da possibilidade de resolver a tarefa pelo procedimento aritmético (item e) e pelo procedimento algébrico (item f).

***Tarefa 3*: Aulas de explicações da Matemática**

A presente tarefa 2 foi baseada na tarefa "Inscrição ao ginásio" de Rodrigues, Menezes e Ponte (2014, p.360). A tarefa 3 envolve o conceito de função linear e pretende-se que os estudantes analisem qual é o centro de explicações mais vantajoso relativamente ao tipo de pagamento durante 6 meses.

Figura 4.36 – Tarefa 3 do QF "Aulas de explicações da Matemática"

No inicio de Janeiro, a Joana pretende inscrever-se numa aula dos dois centro de explicação Matemática são de: "*Matenek*" e "*Badinas*", que existem na sua cidade. Os preços da explicação são seguintes:

Matenek	Badinas
Inscrição: $ 30.00	***Inscrição: gratuito***
Mensalidade: $ 15.00	*Mensalidade: $ 20.00*

a. Se a Joana tem de fazer um exame nacional no mês de junho e quer terminar as suas aulas deste mês, qual seria a explicação mais vantajosa para a Joana? Porque?
b. Quais são os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa?
c. Considera que esta tarefa é adequada para ser proposta a alunos do Ensino Secundário? Se concorda, indique em que ano e justifique a sua resposta.

No centro de explicação "Matenek" um aluno deve pagar os $ 30.00 do valor de inscrição e os $ 15.00 do valor da mensalidade. Enquanto no "Badinas", um aluno não paga o valor de inscrição, mas deve pagar os $ 20.00 por mês de explicações.

Soluções previstas relativamente à tarefa 3.

Existem vários tipos de abordagens para resolver esta tarefa, nomeadamente: a utilização da tabela, Solução 1, com a comparação dos dois tipos de pagamento trata-se de uma abordagem Aritmética; o envolvimento do conceito de progressão aritmética (Solução 2); e a utilização do conceito da função (Solução 3).

Tabela 4.32 - Soluções previstas relativamente à tarefa 3 do QF "Aulas de explicações da Matemática"

item a

Solução 1

Pagamento até mês de:	Matenek	Badinas
Janeiro	30 + 15 = 45	20
Fevereiro	60	40
Março	75	60
Abril	90	80
Maio	105	100
Junho	120	120

Baseada na observação da tabela, mostra-se a igualdade de montante total de pagamento, que são $ 120.00, ou seja, não há diferença de total do dinheiro que deve pagar durante 6 meses entre dois centros de explicação.

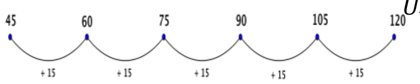
Nível 0

- Utiliza a linguagem numérica;
- Não envolve símbolos algébricos nem soluções algébricas;
- Utiliza-se uma representação de uma tabela;
- Realiza-se a contagem para determinar a solução.

Solução 2

O pagamento para a explicação "Badinas" está associado por progressão: 45, 60, 75, 90, 105, 120 e para o "Matenek" está associado por 20, 40, 60, 80, 100, 120 . Baseandose nas duas progressões pode-se observar os seus padrões e as suas expressões canónicas. Seguidamente, apresentam-se duas situações resolvidas por fórmula da progressão aritmética.

Badinas



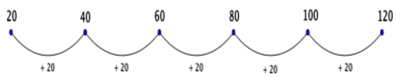
$U_n = 15n + 30, n \in \mathbb{N}$

$n = 6 \rightarrow$

$U_6 = 15(6) + 30$

$= 90 + 30 = 120$

Matenek



$U_n = 20x , n \in \mathbb{N}$

$n = 6 \rightarrow$

$U_6 = 20(6) = 120$

Nível 3

- A linguagem utilizada é simbólica;
- Envolve-se objetos indeterminados ou variáveis
- Envolve o conceito da sucessão;

Solução 3

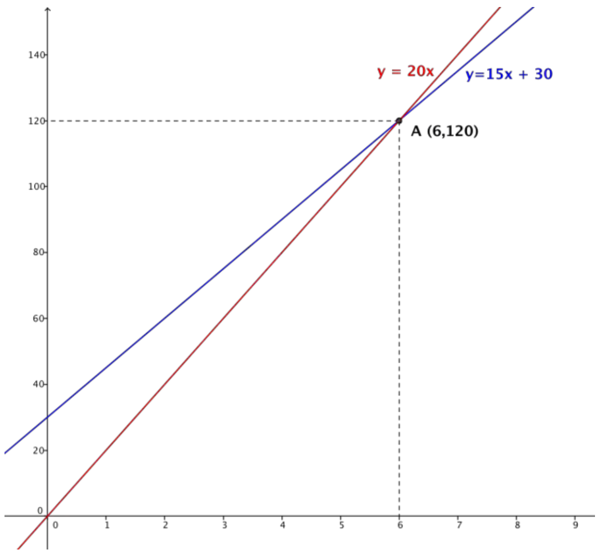
Se o pagamento do "matenek" se associa à função $y = 15x + 30$, $x \in \mathbb{N}$ e o pagamento do "Badinas" se associa à função $y = 20x$, $x \in \mathbb{N}$, então o valor do pagamento até 6 meses obtido pela substituição do número de mês em cada uma das funções, ou seja,

	Número de meses (x)	Total do pagamento (y)
Badinas	6	$y = 15x + 30 = 15\ (6) + 30 = 90 + 30 = 120$
Matenek	6	$y = 20x = 20\ (6) = 120$

Esta situação pode-se ilustrada pela seguinte gráfica:

Nível 4

- Envolve as variáveis da função linear;
- Envolve-se a operação com as variáveis;
- Envolve-se o conceito de função linear;
- Utiliza-se o conceito de ponto de interseção das duas linhas para determinar o equilíbrio.



O ponto de interseção da representação gráfica das duas funções lineares (modelo matemático das situações):

$\begin{cases} y = 15x + 30 \\ y = 20x \end{cases}$ transforma-se ao sistema das equações lineares $\begin{cases} 15x - y = -30 \\ 20x - y = 0 \end{cases}$

No exemplo da seguinte resolve-se com o método de misto.

$$\frac{\begin{array}{r} 15x - y = -30 \\ 20x - y = 0 \end{array}}{-5x = -30} - \text{então } x = \frac{-30}{-5} = 6$$

Substitui-se o valor $x = 6$ no 2ª equação.
Assim $20(6) - y = 0 \rightarrow y = 20(6) = 120$
Baseia-se nos processos algébricos acima, resulta o valor do pagamento para 6 meses do “Badinas” e do “Matenek” são iguais, que é de $ 120.00

item b

Os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa são: função linear; gráfico de uma função linear.

item c

Sim, esta tarefa foi considerada para introduzir o conceito de uma função e de função crescente para os alunos do 11.º ano do Ensino Secundário.

Descrição epistémica relacionada com a tarefa 3 e as suas soluções previstas.

Para a Solução 1, inicia-se com uma tradução da *linguagem* verbal para a *linguagem* numérica e utiliza-se uma tabela para registar as informações. Envolve-se o cálculo numérico de cada situação relativa ao pagamento nos dois centros de explicações como o *procedimento* da resolução.

A solução 2 envolve, também, uma tradução da linguagem verbal para a linguagem numérica. Envolve-se o *conceito* de padrão e de sucessão algébrica. No procedimento da resolução, em cada uma das duas situações ("*Badinas*" e "*Matenek*") identifica-se a razão entre dois termos sucessivos e envolve-se a fórmula da sucessão aritmética $S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b), n \in \mathbb{R}$ para resolver o problema. O resultado obtido pela comparação dos valores de pagamento, neste caso durante 6 meses ($n = 6$), nos dois centros de explicações.

Na solução 3, a tradução da *linguagem* verbal para a *linguagem* algébrica é um processo importante para resolver o problema. Nesta solução envolve os *conceitos* de função linear e gráfico de uma função linear. O envolvimento do gráfico de função linear permite ajudar aos estudantes ilustram e compreendem este situação-problema. O resultado obtido pela substituição do valor da variável independente (neste caso $x = 6$) na função do pagamento de "Matenek" $y = 15x + 30$ e na função do pagamento de "Badinas" $y = 20x$.

Relativamente ao nível do RA, o objetivo desta tarefa é encontrar as soluções que manifestam o nível 4 de RA (Solução 3), pelo envolvimento do conceito da função linear e operação com as variáveis. PÉ possível também encontrar uma solução na qual se envolvem as variáveis no seu padrão e na operação algébrica destas variáveis, como a característica do nível 3 de RA (Solução 2), ou apenas a solução do nível 0 que envolve a observação duma tabela e a operação com o cálculo numérico (Solução 1).

Nesta tarefa envolvem-se duas questões da faceta cognitiva: resolução da tarefa e identificação dos conhecimentos algébricos envolvidos na resolução da tarefa. Nesta tarefa apresenta-se uma questão da faceta instrucional, em que os estudantes têm de modificar o enunciado de forma a ser adequada para alunos do Ensino Secundário.

***Tarefa 6*: Família da função linear**

A sexta tarefa é uma tarefa da família de funções lineares e intervêm parâmetros a e b. Na primeira questão, apresenta-se várias funções lineares e pretende-se que os estudantes identifiquem estas funções representadas através de um gráfico. Para responder a esta questão, pretende-se: identificar e relacionar objeto e imagem; observar e interpretar representações gráficas; identificar expressões algébricas que definem uma função representada por uma reta; determinar a expressão algébrica de uma reta dados dois pontos da mesma.

Figura 4.37 – Tarefa 6 do QF “Família da função linear”

Observa o seguinte referencial cartesiana onde estão representados os gráficos das várias retas.

a. Indique à frente de cada uma das expressões qual a reta que lhe corresponde:
   $y = 3$ é a reta _____
   $y = 3\,x$ é a reta ___
   $y = -3\,x + 3$ é a reta ___
   $y = -2$ é a reta _____

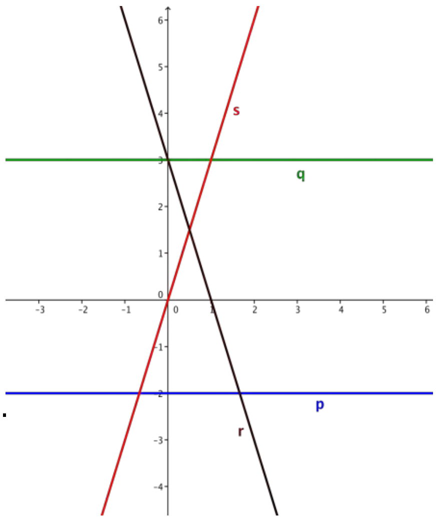
b. Escreve a fórmula geral destas expressões.

c. Explique os efeitos do valor de a no gráfico da função linear.

d. Explique os efeitos do valor de b no gráfico da função.

e. Quais são os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa.

f. Enunciar uma tarefa cuja solução que se envolve a mudança dos níveis de RA em jogo relativamente a esta tarefa.



Soluções previstas relativamente à tarefa 6 do QF

A identificação das funções no item a, ajuda na determinação da fórmula geral da função (item b). O item c desta tarefa, possibilita aos estudantes atribuírem alguns valores (positivos e negativos) ao parâmetro a, fizerem o esboço das representações gráficas e analisarem as relações entre elas com as variações do parâmetro a. Este item também dá uma oportunidade para se relacionaram corretamente as representações gráficas da família de funções lineares, indicando resumidamente qual o “papel” do parâmetro a. Esta tarefa assume uma natureza exploratória e investigativa, e pretende o estabelecimento da relação entre representações gráficas e representações algébricas. De forma análoga, procedem-se ao estudo da variação do parâmetro b (item d).

Na tabela 4.33 seguinte apresenta-se solução da tarega 6.

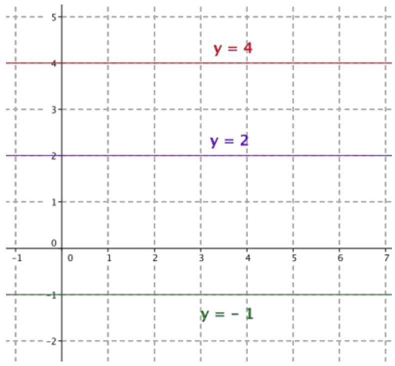
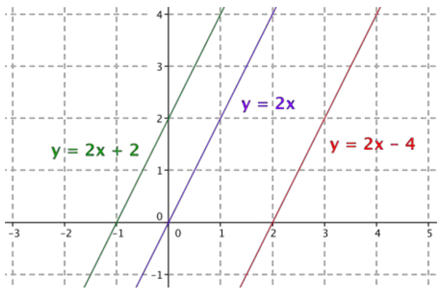
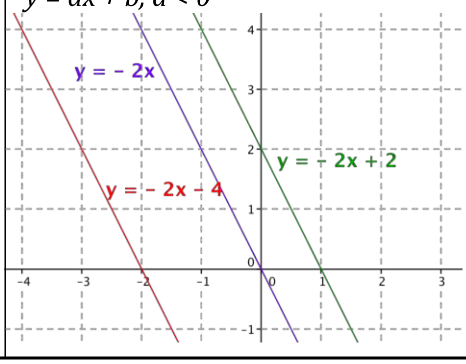
Tabela 4.33 - Soluções previstas relativamente à tarefa 6 do QF

item a
A identificação da: $y = 3$ é a reta q; $y = 3\,x$ é a reta s; $y = -3\,x + 3$ é a reta r; e $y = -2$ é a reta p.
item b
Baseia-se nos tipos das funções anteriores, a fórmula geral da função linear $y = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

item c* e *item d

- Os efeitos do parâmetro a : se $a > 0$, a reta é crescente; se $a < 0$, a reta é decrescente; se $a = 0$, a reta á horizontal.
- Os efeitos do parâmetro b : se $b > 0$, a reta passa a cima do ponto de origem; se $b < 0$, a reta passa a baixo do ponto de origem; se $b = 0$, a reta contém ao ponto de origem.

Podem-se resumir estas situações na seguinte tabela:

Se $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ então $f(x) = b$ é monótona em sentido lato (é uma função constante). Caso $b = 0$: Zeros: $x \in \mathbb{R}$ Caso $b \neq 0$: Zeros: não tem.	Gráfica a: Exemplo de uma representação gráfica do tipo $y = k$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ 
Se $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$ então $f(x) = ax + b$ é estritamente crescente. Caso $b = 0$: Zeros: $x = 0$ Caso $b > 0$: Zeros: $x \in]-\infty, 0[$ Caso $b < 0$: Zeros: $x \in]0, +\infty[$	Gráfica b: Exemplo de uma representação gráfica da forma $y = a\,x + b, a > 0$ 
Se $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$ então $f(x) = ax + b$ é estritamente decrescente. Caso $b = 0$: Zeros: $x \in \{0\}$ Caso $b > 0$: Zeros: $x \in]0, +\infty[$ Caso $b < 0$: Zeros: $x \in]-\infty, 0[$	Gráfica c: Exemplo de uma representação gráfica do tipo $y = ax + b, a < 0$ 

<u>Nível 4</u>

- Utiliza-se a linguagem simbólica representada à função;
- Aplica-se as representações gráficas da família das funções linear;
- Envolve-se os vários valores representados o parâmetro a e o parâmetro b

Faz-se as generalizações de acontecimentos de funções por atribuições de vários coeficientes.

item e

Os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa, nomeadamente: variável, parâmetro; função linear; família de funções lineares.

item f
Como se relaciona o gráfico da função $y = ax^2$ com o gráfico da $y = x^2$ e como o parâmetro a afeta o gráfico da função.

Descrição epistémica relacionada com a tarefa 6 e as suas soluções previstas.

A tarefa 6 pede o estabelecimento de relação entre representações gráficas e representações algébricas duma *situação - problema* relacionada à identificação das propriedades da família de funções lineares. A solução do item a é feita pela observação gráfica e identificação da expressão de função linear. Baseando-se na identificação das expressões no item a, pode-se identificar a forma geral desta expressão, como tinha questionado no item b.

No item c desta tarefa envolveu-se uma relação entre apresentação gráfica e *linguagem* simbólica. O *procedimento* da resolução com a apresentação gráfica possibilitou aos futuros professores atribuírem outros valores (positivos e negativos) ao parâmetro a e fazerem o esboço das representações gráficas e analisam-se as relações entre elas com as variações do parâmetro a. Procedeu-se de forma análoga, identificar o efeito do parâmetro b (item d).

No *procedimento* da resolução do item c e do item d, esta tarefa dá uma oportunidade para se relacionaram corretamente as representações gráficas das funções da família de funções, indicando resumidamente quais os "papéis" do parâmetro a e do parâmetro b. Ou seja, a generalização das observações gráficas resulta da compreensão sobre o *conceito* das propriedades da família de funções quadráticas.

O propósito da tarefa 6 é analisar o nível 4 de RA sobre a utilização dos: parâmetros; coeficientes de funções; variáveis. Ou seja, para analisar as expressões de família das funções lineares com vários destes componentes. Nesta tarefa espera-se, também, encontrar como respostas dos futuros professores que se trata de uma generalidade intensiva mais avançada em trabalhar com o nível RA (nível 5).

Relativamente às questões do CDM, além de os itens: a, b, c e d, esta tarefa também questiona com uma questão relacionada à faceta cognitiva (o item e) sobre a identificação dos conhecimentos algébricos envolvidos na resolução da tarefa 6. Colocou-se também uma questão da faceta instrucional sobre a enunciação da tarefa cuja solução envolve a mudança dos níveis de RA relativamente a esta tarefa.

4.4.2.3 Descrição das tarefas do QF sobre Modelação

Apresenta-se, nesta parte, duas tarefas do tipo de modelação que envolvem, igualmente, os vários conhecimentos algébricos e os vários níveis de RA. A quarta tarefa é uma tarefa sobre identificação das expressões que também foi colocada na Tarefa 4 do QI, por este motivo não será necessário apresentar novamente uma descrição sobre esta tarefa. Na quinta tarefa sobre modelação é do tema da equação quadrática que está associar com o problema de comprimentos de um retângulo. As duas tarefas apresentadas nesta parte são tarefas para a avaliação do RA para o Ensino Secundário.

Tarefa 5*: *Área do triângulo retângulo

A apresentação da tarefa 5 é do tipo de modelação, baseada no problema geométrico sobre a área de um triângulo retângulo. A resolução desta tarefa é feita pela tradução da linguagem natural para linguagem algébrica, pelo envolvimento da teória de Pitágoras e o método da resolução de uma equação quadrática para determinar os comprimentos dos catetos do triângulo retângulo.

Figura 4.38 – Tarefa 5 do QF "Área do retângulo"

Sabendo que num triângulo retângulo, o comprimento do cateto maior é igual ao cateto menor mais uma unidade. Se o comprimento da sua hipotenusa é 5 cm, qual é a área deste triângulo retângulo?

a. Explique os procedimentos utilizados para resolver este problema.
b. Qual é a categoria do nível de RA relativamente o procedimento que se utilizou na sua resolução.
c. Quais são os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa.
d. Enuncia duas tarefas para introduzir algum procedimento de resolução que ponha em jogo conhecimentos algébricos?

Para resolver a equação quadrática os estudantes têm a liberdade para utilizar vários métodos de resolução: factorização, a fórmula de *Bhaskara*, ou um método astucioso de completar quadrados.

Soluções previstas relativamente à tarefa 5.

Na tabela seguinte apresenta-se um exemplo de solução que se espera encontrar na resposta do aluno.

Tabela 4.34 - Soluções previstas relativamente à tarefa 5 do QF "Área do triângulo retângulo"

Solução	Nível 2
Se o comprimento de: cateto menor é x ; cateto maior é x + 1; e hipotenusa é 5 cm, e substitui-se estes dados para a fórmula de Pitágoras então, $r^2 = x^2 + y^2$ $\Leftrightarrow 5^2 = x^2 + (x+1)^2$ $\Leftrightarrow 25 = x^2 + x^2 + 2x + 1$ $\Leftrightarrow 25 = 2x^2 + 2x + 1$ $\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0$, dividimos os dois ambos dos catetos com 2 $\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$ Neste exemplo utiliza-se uma factorização para resolver o problema: $x^2 + x - 12 = 0$ $\Leftrightarrow (x+4)(x-3) = 0$ $\Leftrightarrow x = -4 \; ou \; x = 3$ O valor $x = -4$ ficou inválido por uma consideração que o comprimento de um cateto deve um valor positivo. Assim o valor de x é 3 cm e pela propriedade de substituição determina-se o comprimento dos dois catetos são 3 cm e 4 cm. Assim, a área de retângulo é $A = \frac{1}{2}\, base \times altura$ ou seja $A = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6\, cm^2$	- Utilizam-se símbolos como incógnitas (simbólica lateral); - Utilizam-se operações algébricas - Envolve-se a equação do tipo $Ax \pm B = C$

Relativamente ao nível do RA, o objetivo desta tarefa é encontrar as soluções que manifestam o nível 2, que se envolve: símbolos lateral como incógnitas; e processos algébricos envolvendo a equação de forma $Ax \pm B = C$.

Descrição epistémica relacionada com a tarefa 5 e as suas soluções previstas.

Na resolução desta tarefa pretende-se uma tradução da *linguagem* verbal para a *linguagem* algébrica. Pode-se também envolver a representação de um triângulo retângulo para ilustrar as situações. Envolve-se os *conceitos* de: catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo; teorema de Pitágoras; equação quadrática e os seus métodos de resolução (fatorização, fórmula de *Bhaskara*). No exemplo da solução (tabela 4.34) mostra-se o envolvimento do procedimento da resolução que envolve o conceito da resolução de uma equação quadrática pelo método de fatorização. Os valores obtidos nesta factorização permitem identificar os comprimentos dos dois catetos, assim podem-se utilizar para responder qual a área do triângulo retângulo.

Relativamente ao CDM, na tarefa 5 apresentam-se duas questões da faceta epistémica que são: os procedimentos utilizados para resolver o problema (item a); e identificação do nível do RA envolvido na resolução da tarefa (item b). Coloca-se ainda uma questão da faceta cognitiva sobre a identificação dos conhecimentos algébricos envolvidos na tarefa (item c) e uma questão da faceta instrucional sobre enunciação das tarefas, envolvendo o conhecimento algébrico (item d).

4.4.3 Análise dos resultados das tarefas do QF relativamente ao conhecimento algébrico

Para a condução da análise dos resultados do QF, como análise do QI, adaptou-se o modelo de categorização do RA da proposta do Godino et al., (2015) para analisar os níveis de RA que são manifestados nas respostas dos estudantes. Apresenta-se em duas partes de análise do conhecimento algébrico e CDM.

Nesta análise não foram consideradas as respostas em todas as categorias propostas no modelo de CDM. Não foi avaliada a faceta afetiva, relacionada com atitudes, motivação e emoção. Do mesmo modo, não foi avaliada a faceta ecológica, envolvendo aspetos do currículo ou materiais didáticos apoiados na aprendizagem da Álgebra. Assim, para avaliar o CDM, nesta investigação adotou-se um guião de Contreras, Ordoñez e Wilhelmi (2010) que categoriza o CDM nas facetas: epistémica, cognitiva e instrucional.

4.4.3.1 Análise dos resultados das tarefas do QF sobre Estrutura

***Tarefa 1*: Balança de "Angry Bird"**

O resultado das respostas a esta tarefa mostra um elevado número de respostas corretas no item a (19 respostas), apenas 4 respostas erradas e 1 resposta em branco, como se apresenta na tabela 4.35.

Tabela 4.35 - Grau de correção e método de solução da tarefa 1, item a.

Grau de correção	item a Frequência	%	Método de solução	item a Frequência	%
Correta	19	79,2	Tendência algébrica	19	79,2
Errada	4	16,7	Tendência aritmética	4	16,7
Em branco	1	4,2	Em branco	1	4,2
Total	24	100	Total	24	100

Relativamente ao método de solução envolvido nas respostas dos estudantes, regista-se: as 19 respostas de tendência algébrica com utilização dos símbolos e operação algébrica; as 4 respostas de tendência aritmética, utilizando-se o cálculo numérico; e 1 resposta em branco.

Apresenta-se, na tabela 4.36 , a categorização dos níveis do RA relativamente ao item a da tarefa 1:

Tabela 4.36 - Nível do RA de respostas corretas e erradas da tarefa 1, item a.

Nível do RA de resposta correta	item a Frequência	%	Nível do RA de resposta errada	item a Frequência	%
3	18	75	3	0	0
1	1	4,2	1	4	16,7
0	0	0	0	0	0
			Em branco	1	4,2
Total : 24 (100 %)					

Com base na tabela 3.36, das 19 respostas corretas, 18 respostas estão categorizadas no nível 3 pelo seu envolvimento da operação algébrica, neste caso da utilização do procedimento da resolução de um sistema de equações lineares com duas incógnitas (por exemplo Resposta B, tabela 3.37). Apenas 1 resposta correta está categorizada no nível 1, por não se envolver nenhum símbolo algébrico e apenas envolver a propriedade da adição e substração no seu processo de resolução (Resposta A, tabela 3.37). Os estudantes que têm respostas erradas no item a nesta tarefa utilizaram o cálculo numérico para resolve o problema, portanto categorizou-se no nível 1 do RA.

A tabela seguinte, apresenta dois exemplos da resolução correta dadas pelos estudantes e análise relativamente o nível de RA.

Tabela 4.37 - Exemplos de resoluções corretas e análise dos níveis de RA relativamente à tarefa 1 do QF

Situações-problema: três tipos de "Angry Bird" colocados em três diferentes balanças. A primeira à terceira balança composto por dois tipos de "Angry Bird" diferentes e com diferentes pesos. Pretende-se para identificar o peso de conjunto de três "Angry Bird".

Resposta A

1ª + 2ª − 3ª = 10 + 8 − 6

2 grandes = 12

grande = 6

1ª balança : grande + média = 10 → média = 4

2ª balança = grande + pequena = 8 → pequena = 2

grande + média + pequena = 6 + 4 + 2 = 12 quilogramas.

Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e apresentação figuras; convenções assumidas para identificar equivalência da quarta balança.
Conceitos: equilíbrio da balança.
Procedimentos:
- traduzir a linguagem natural para linguagem numérica;
- representar e relacionar as figuras;
- igualdade de razões;

Argumentos: baseia-se na substituição, de três pesos de balanças
Nível de RA: **nível 1**
- utiliza-se uma linguagem natural e numérica;
- envolve - se símbolo da operação numérica
- aplicam-se as relações de equilíbrio;
- a configuração da resposta traduz uma prática da Álgebra operacional.

Resposta B

a- angry bird Grande = x → 6 Peso
b- " " Médio = y → 4 Peso
c. " " Pequeno = z → 2.

⇒ → $x + y = 10$ I eq.
→ $x + z = 8$ II eq.
→ $y + z = 6$ III eq.

Elimina I eq. com II eq.

$x + y = 10$
$x + z = 8$ −
$0 + y - z = 2$
$\boxed{y = 2 + z}$ IV eq.

~~Substituição.~~
substitui IV eq. em III eq.

$y + z = 6.$
$2 + z + z = 6$
$2 + 2z = 6$
$2z = 6 - 2$
$z = \frac{4}{2}$
$z = 2$

$x + z = 8.$
$x + z = 8.$
$x = 8 - 2$
$x = 6$

$x = 6$
$x + y = 10$
$6 + y = 10$
$y = 10 - 6$
$y = 4.$

$x + y + z = 0$
$6 + 4 + 2 = 12$

Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e apresentação figuras; convenções assumidas para identificar equivalência da quarta balança.
Conceitos: sistema das equações lineares com duas incógnitas.
Proposição: vários métodos de resolução (substituição, eliminação, misto, etc.)
Procedimentos:
- eliminar uma incógnita para determinar o valor de outra incógnita;
- substituir o valor da incógnita na qualquer das equações para determinar o valor de outra incógnita

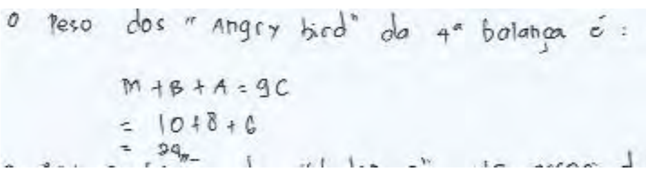
Argumentos: baseia-se no conceito de resolução de um sistema das equações lineares com duas incógnitas.
Nível de RA: **nível 3**
- utiliza-se símbolos como incógnitas (simbólica literal);
- utiliza-se operações algébricas, aplicando as propriedades da eliminação (resposta A) ou do misto (resposta B).
- a configuração da resposta é da Álgebra estrutural.

As duas respostas (resposta A e B) apresentadas na tabela 4.37 manifestam uma contextualização correta do problema. Na resposta A envolve-se a linguagem natural e numérica, enquanto que a resposta B envolve linguagem simbólica com representação das incógnitas. O conceito do equilíbrio da balança foi manifestado na primeira resposta, enquanto os conceitos de equação linear e de sistema das equações lineares são manifestadas na resposta B. A utilização de diferentes conceitos, consequentemente, tem implicações nos procedimentos e nos argumentos que são utilizados na resolução de problema.

A resolução do sistema de equações lineares através do método misto foi a estratégia mais utilizada pelos estudantes para responder a esta tarefa. Esta realidade é manifesta pelo grande número do envolvimento deste método (18 respostas) quando comparado com outros métodos (1 resposta com o método da substituição e 5 resposta com o cálculo numérico).

No <u>item a</u> desta tarefa, ainda se encontram quatro respostas erradas. Os estudantes que respondem erradamente, têm dificuldade na tradução da linguagem natural e a representação figura para a linguagem algébrica, como se apresenta na resposta A seguinte:

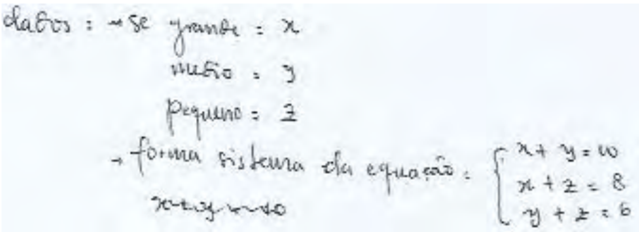
Figura 4.39 – Resposta A, exemplo da resposta errada relativamente ao <u>item a</u> da tarefa 1 do QF



Para Ponte, Branco e Matos (2009), esta dificuldade resulta da falta de compreensão dos enunciados em linguagem natural; do desconhecimento das regras de sintaxe da linguagem algébrica, estabelecimento de relações incorretas entre as duas linguagens, simples distração ou o foco em pistas enganadoras.

Encontra-se também, na resolução desta tarefa, uma situação em que o estudante conseguiu traduzir da linguagem natural para a linguagem algébrica mas não conseguiu resolver o problema com o procedimento da resolução do sistema das equações lineares com três incógnitas. O estudante confunde este sistema das equações lineares com três incógnitas, o que não é comum, neste caso apenas se encontram duas incógnitas em cada equação, como se apresenta no seguinte exemplo B:

Figura 4.40 – Resposta B, exemplo da resposta errada relativamente ao item a da tarefa 1 do QF

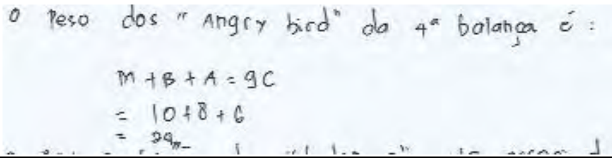


Na ideia de Ponte, Branco e Matos (2009) esta dificuldade pode-se categorizar na dificuldade em compreender a noção de sistema e a natureza da solução de um sistema de equações; compreender os processos de resolução de sistemas de equações e ser capaz de os executar corretamente até obter a solução.

Com objetivo de ajudar estes estudantes superar a sua dificuldade na tradução da linguagem verbal para a linguagem algébrica foi realizada uma sessão com entrevista clínica sobre este tema que contou com a participação de 4 estudantes. Apresenta-se, seguidamente, uma descrição do diálogo que ocorreu nesta sessão:

Figura 4.41 – Diálogo durante a entrevista clínica relativamente à dificuldade na tradução da linguagem verbal para a linguagem algébrica

Formadora (F) – Vamos discutir uma solução da tarefa 1



(A formadora pergunta ao estudante A)

F: Quais são M, B e A ?

......

F: M significa o que é ?

Estudante A: *Angry Bird*, professora.

F: *Angry Bird* grande, média ou pequena?

A: Grande. B é média e A é pequena.

F: Então, qual é o significado de C?

(... o estudante C não responde)

Estudante B: o C pode significar o valor que queremos procurar, mas tira o 9, professora.

F: Bem, vamos analisar a cada uma das balanças. Vamos ver a 1ª balança, quais estão lá?

B: *Angry Bird* grande e média. E o peso é 10 quilogramas.

F: Muito bem, então se a grande é M e a média é B, podemos traduzir em seguinte:

grande e média é 10, ou seja M + B = 10 e podemos designar esta expressão como 1ª equação.

Estudante C: Então 2ª equação é M + A = 8

F: Porque ?

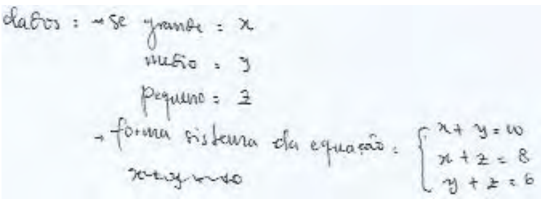
C: Porque *Angry Bird* grande mais *Angry Bird* pequena é 8, então M + A = 8

F: E qual é a expressão da 3ª balança?

A: B + A = 6

F: Correto ! Agora temos $\begin{cases} M + B = 10 \\ M + A = 8 \\ B + A = 6 \end{cases}$

Estudante D: Professora, então é igual minha resposta (ver figura 4.36)



Mas não pude resolver porque este é o sistema de 3 equações, mas só tem 2 incógnitas em cada equação.

F: Quantas incógnitas que temos?

A: 3 incógnitas.

F: Então podemos escrever este sistema em outros modos: $\begin{cases} M + B + 0A = 10 \\ M + 0B + A = 8 \\ 0M + B + A = 6 \end{cases}$

Este sistema é o sistema equações lineares com 3 incógnitas?

Todos estudantes: Sim, professora.

F: Portanto podemos resolver com vários métodos de resoluções.

D: Vamos utilizar o método da eliminação, então das 1ª equação e 2ª equação eliminamos M

F: Então qual é ficar?

(... os estudantes fizeram a solução com o método da eliminação)

B: $\begin{array}{l} M+B=10 \\ \underline{M+A=8} \; - \\ B-A=2 \end{array}$

F: O resultado da operação $B - A = 2$ podemos chamar 4ª equação.

C: Podemos utilizar 3ª equação e 4ª equação e formamos o sistema de equações das duas incógnitas.

B: Podemos eliminar B ou eliminar A.

F: Agora elimina !

(... todos os estudantes fizeram operação)

A: Então A = 2 e B = 4

B: M + B + A = 6 + 4 + 2 = 12. Então total o peso de três *Angry bird* é 12 quilogramas.

F: Está certo !

F: Vamos traduzir outra enunciação da tarefa, vamos ver a tarefa 3 sobre o pagamento das aulas de explicações.

(todos leem a tarefa)

F: Vamos analisar as duas situações no mês de janeiro. Quantos são a Joana deve pagar para centro explicação "Matenek"?

A: $ 30.00 + $ 15.00 = $ 45.00

B: E para "Badinas" deve pagar apenas $20.00 . É mais barrato !

F: Quantos são a Joana deve pagar até mês de fevereiro.

A: Igual, professora

D: Não igual, professora. Porque a Joana não paga mais inscrição, só paga uma vez.

F: Certo ! Então quantos são os pagamentos até mês de fevereiro?

C: $15.00 para "Matenek" e $20.00 para "Badinas"

F: Cuidado, estes pagamentos é "até" mês de fevereiro e não só para o mês de fevereiro.

A: Então $ 45.00 + $15.00 = $60.00 para "Matenek" e $20.00 + $20.00 = $40.00 para"Badinas"

B: Professora, se contamos até 6 meses é fácil, mas se contamos até 5 anos é complicado!

F: Sim, será difícil se calculamos com este método.

Agora vamos ver no pagamento da explicação "Matenek"

Janeiro: $ 30.00 + $ 15.00 = $ 45.00

Fevereiro: $ 30.00 + $ 15.00 + $ 15.00 = $ 30.00 + 2($ 15.00). Se continuamos:

Março: $ 30.00 + $ 15.00 + $ 15.00 + $ 15.00 = $ 30.00 + 3($ 15.00).

Então qual é valor que sempre igual em todos os meses?

B: \$ 30.00

F: Podemos chamar o valor \$ 30.00 como uma constante.

D: Então este é função. Podemos escrever $y = 30 + 15\,x$

F: Se assim, quais são o x e o y ?

D: x é número de meses e y é o valor que deve pagar até x meses.

F: Está certo ! Como podemos escrever a situação do pagamento de "Badinas" numa função?

C: $y = 20\,x$ porque não há valor de inscrição.

F: Certo! Não existe o valor constante. Vamos calcular o pagamento até mês de Junho.

(os estudantes fizeram o calculo)

A: São iguais, professora. É \$120.00

F: Se até 5 anos?

(os estudantes fizeram o calculo)

B: Para "Matenek" $y = 30 + 15\,(60) = \; 30 + 900 = 930$, então \$ 930.00

Para "Badinas" $y = 20\,(60) = \; 1200$, são \$1200.00

Agora "Matenek" é mais barrato.

F: Correto !

Inicialmente os estudantes traduziram o enunciado através de um sistemas equações com duas incógnitas, considerando não identificaram a parcela de coeficiente zero nas varias equações. Esta situação foi ultrapassada através do dialogo entre a formadora e os estudantes.

4.4.3.2 Análise dos resultados das tarefas do QF sobre funções

***Tarefa 2*: Padrão e sequência de lafatik**

Nesta tarefa apresentam-se duas questões que estão relacionadas entre si: identificação de número de flores que serão construídas de 37 *tali tahan* (item a) e utilização de vários métodos de resolução (item b). Os 22 estudantes responderam corretamente o item a desta tarefa, mas houve apenas 12 estudantes que conseguiram apresentar outros métodos de resolução diferentes dos métodos utilizados no item a para responder o item b.

Tabela 4.38 - Grau de correção da tarefa 2, item a e item b.

Grau de correção	item a		item b	
	Frequência	%	Frequência	%
Correta	22	91,7	12	50
Errada	2	8,3	3	12,5
Em branco	0	0	9	37,5
Total	24	100	24	100

Apresenta-se a tabela 4.39 os números das respostas de todos os estudantes com os seus métodos de soluções.

Tabela 4.39 - Grau de correção e método de solução da tarefa 2, item a e item b.

Grau de correção	Método de solução	item a		item b	
		Frequência	%	Frequência	%
Correta	Tendência algébrica	13	54,2	11	41,2
	Tendência ritmética	9	37,5	1	8,3
	Observação figura	0	0	0	0
Errada	Tendência algébrica	0	0	3	0
	Tendência aritmética	2	8,3	0	0
	Observação figura	0	0	0	0
	Em branco	0	0	9	37,5
Total		24	100	24	100

Na tabela 4.39 mostra-se um grande número dos estudantes que apresentam a solução algébrica nesta tarefa (13 respostas no item a e 11 respostas no item b). Mesmo assim, ainda se encontram 9 estudantes que deixaram a sua resposta em branco (no item b) neste caso mostra-se uma tendência de que os alunos estão mais habituados a um único método de resolução.

Em relação ao nível de RA, apresenta-se na seguinte tabela 4.40 a categorização dos níveis de RA das respostas dos estudantes relativamente à tarefa 2. No item a desta tarefa, das 22 respostas corretas, 13 respostas categorizaram-se no nível 3 do RA pelo envolvimento do símbolo algébrico para apresentar o padrão e a progressão aritmética, e pela utilização da operação algébrica na sua resolução. Para além disso, 4 respostas estão categorizadas no nível 1 do RA devido à utilização do conceito de padrão mas não se envolve nenhuma operação algébrica. Ainda há 5 respostas que manifestam uma observação da figura das flores e/ou da tabela das observações, e, neste caso, estão categorizados no nível 0 do RA.

Tabela 4.40 - Nível do RA de respostas corretas e erradas da tarefa 2, item a e item b.

Nível do RA de resposta correta	item a		item b		Nível do RA de resposta errada	item a		item b	
	F	%	F	%		F	%	F	%
3	13	54,2	11	45,8	3	0	0	3	12,5
1	4	16,7	0	0	1	0	0	0	0
0	5	20,8	1	4,2	0	2	8,3	0	0
					Em branco	0	0	9	37,5
Total: 24 (100 %)									

F: frequência

Relativamente ao item b, das 12 respostas corretas, 11 respostas estão categorizadas no nível 3 e apenas 1 resposta que está categorizada no nível 0 de RA.

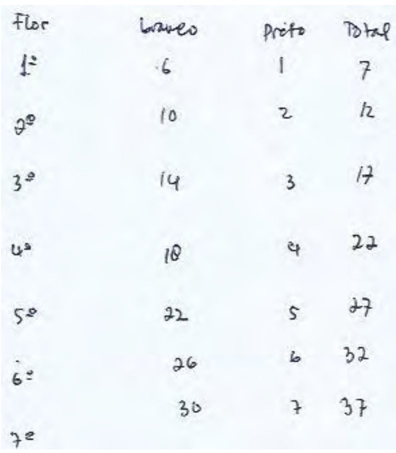
Seguidamente, na tabela 4.41, apresentam-se alguns exemplos das respostas corretas (do item a e do item b) desta tarefa e a respetiva análise do nível de RA.

Tabela 4.41 - Exemplos de resoluções corretas e análise dos níveis de RA relativamente à tarefa 2 do QF

Situações-problemas: identificação o número de flores que foram construídas pelos 37 *tali tahan*.

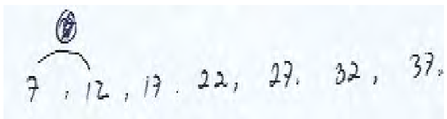
Resposta A

item a



Flor	Branco	Preto	Total
1º	6	1	7
2º	10	2	12
3º	14	3	17
4º	18	4	22
5º	22	5	27
6º	26	6	32
7º	30	7	37

item b



5

7, 12, 17, 22, 27, 32, 37.

Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e a representação figuras; convenções assumidas para identificar os números de *tali tahan*.

Nesta resposta, apresentam-se duas resoluções diferentes envolvendo uma tabela e uma progressão. Manifestam-se diferenças ao nível da configuração do processo analítico, nomeadamente: o conceito, a proposição, os procedimentos e os argumentos utilizados na resolução-problema. Encontra-se, também, as diferenças na categorização do nível de RA.

item a

Procedimentos: desenhar as flores sucessivamente e contar o número de cada cor e do conjunto de *tali tahan*.

Argumentos: baseia-se na contagem de número de *tali tahan*.

Nível de RA: **nível 0**

- não envolve nenhuma letra ou símbolo;
- não realiza nenhuma operação algébrica;
- utiliza a observação de um diagrama;
- a configuração da resposta é raciocínio visual.

item b

Conceitos: padrão e sequência

Proposição: diferença entre dois termos sucessivos do conjunto de *tali tahan* $b = U_n - U_{n-1}$

Procedimentos:

- determinar as diferenças entre dois termos sucessivos;
- fazer uma adição do valor do último termo com o valor de diferença até encontrar a solução.

Argumentos: baseia-se na contagem de número de *tali tahan*.

Nível de RA: **nível 1**

- utiliza linguagem numérica envolvendo a operação de adição e substração;
- a configuração da resposta é Álgebra operacional.

Resposta B

item a

$$a)\ 7 \underbrace{}_{+5} 12 \underbrace{}_{+5} 17 \underbrace{}_{+5} 22 \underbrace{}_{+5} 27 \underbrace{}_{+5} 32 \underbrace{}_{+5} 37$$

item b

$U_n = a + (n-1)\,b$
$37 = 7 + (n-1)5$
$37 = 7 + (5n-5)$
$37 = 7 + 5n - 5$
$37 = 5n + 2$
$5n = 37 - 2$
$5n = 35$
$n = 35/5$
$n = 7$

37 tali tahan construir 7 flores.

Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e a representação figuras; convenções assumidas para identificar o número de *tali tahan*.

Na resposta B, encontram-se duas resoluções que se envolve: o conceito de padrão e progressão do conjunto de *tali tahan*; e a formula de progressão aritmética.

Portanto, manifestam-se, também, diferentes configurações do processo analítico sobre: o conceito; a proposição; os procedimentos; os argumentos utilizados na resolução de problema, e o nível do RA.

item a

Conceitos: padrão e sequência

Proposição: diferença entre dois termos sucessivos do conjunto de *tali tahan* $b = U_n - U_{n-1}$

Procedimentos:

- determinar as diferenças entre dois termos sucessivos;
- fazer uma adição do valor do último termo com o valor de diferença até encontrar a solução.

Argumentos: baseia-se na contagem de número de *tali tahan*.

Nível de RA: **nível 1**

- utiliza linguagem numérica envolvendo a operação de adição e substração;
- a configuração da resposta é Álgebra operacional.

item b

Conceitos: progressão aritmética

Proposição:

- diferença entre dois termos sucessivos $b = U_n - U_{n-1}; n \in \mathbb{R}$
- a fórmula da progressão aritmética $U_n = a + (n-1)b, n \in \mathbb{R}$

Procedimentos:

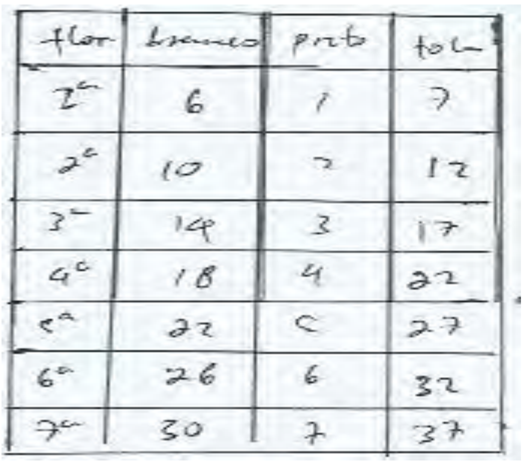
- identificar a diferença entre dois termos sucessivos;
- identificar o padrão (a fórmula) da progressão;
- Substituir os valores na fórmula da progressão aritmética.

Argumentos: baseia-se na operação algébrica envolvida na fórmula.

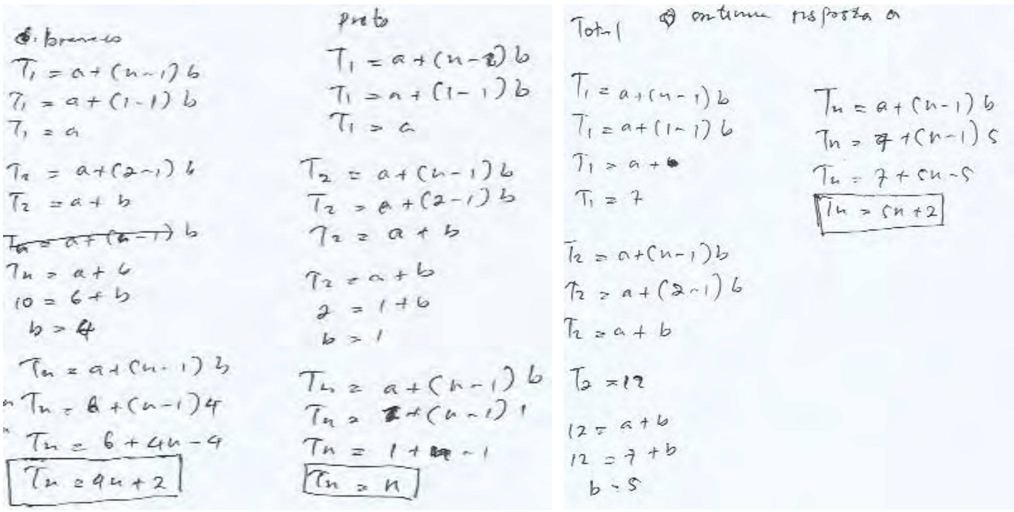
Nível de RA: **nível 3**

- utiliza letras, para representar os números;
- opera algebricamente e chega até uma expressão canónica;
- a configuração da resposta é Álgebra funcional.

Resposta C: **item a**



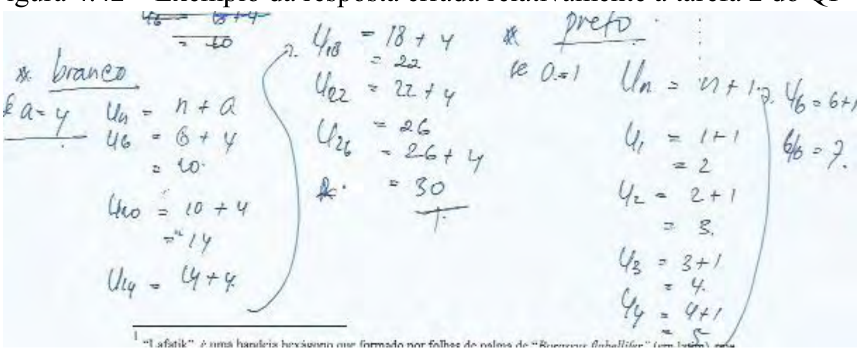
flor	branco	preto	total
1ª	6	1	7
2ª	10	2	12
3ª	14	3	17
4ª	18	4	22
5ª	22	5	27
6ª	26	6	32
7ª	30	7	37

item b

Encontra-se uma igualdade das respostas A e C relativamente o item a. Logo, a análise deste item é idêntica. No item b da resposta C, encontra-se uma diferença do item b da resposta B relativamente ao envolvimento da fórmula da progressão aritmética. Na resposta C, o aluno apresentou o item b como o argumento da sua solução. Neste caso procurou a fórmula da progressão de cada tipo de *tali tahan* e de conjunto de *tali tahan*.

Encontra-se uma grande mudança relativamente à tarefa 2 sobre o padrão e sequência de um *lafatik*, esta mudança é revelada pelo grande número de respostas corretas (22 respostas) onde 13 respostas envolveram os símbolos algébricos e operações algébricas (exemplo: Resposta C, item b, da tabela 4.41) e apenas 4 respostas que envolvem a apresentação da tabela, termos sucessivos e cálculo numérico (exemplo: Resposta B do item a e Resposta C do item a, da tabela 4.41).

Apenas se detetaram 2 respostas erradas nesta tarefa. Nas respostas erradas apresentadas por dois alunos, encontra-se o envolvimento do padrão comum da Álgebra, mas dão erro na compreensão da fórmula de Progressão Aritmética, como por exemplo:

Figura 4.42 – Exemplo da resposta errada relativamente à tarefa 2 do QF



***Tarefa 3*: Aulas de explicações da Matemática**

O resultado de análise do item a desta tarefa mostra 19 respostas corretas, 2 respostas erradas e 3 respostas deixadas em branco.

Tabela 4.42 - Grau de correção e método de solução da tarefa 3, item a.

Grau de correção	item a		Método de solução	item a	
	Frequência	%		Frequência	%
Correta	19	79,2	Tendência algébrica	4	16,7
Errada	2	8,3	Tendência aritmética	17	70,8
Em branco	3	12,5	Em branco	3	12,5
Total	24	100	Total	24	100

Dos estudantes que têm resposta correta, 17 utilizaram uma tabela para resolver este problema (nível 0 do RA); 1 resposta está categorizada no nível 1 pelo envolvimento do símbolo literal e a propriedade da substituição; apenas 1 estudante envolveu o símbolo algébrico e operação algébrica na sua resolução, neste caso as respostas estão categorizadas no nível 3 de RA; e 1 resposta está categorizada no nível 4 pelo envolvimento do conceito de função, como se apresenta na tabela 4.43 relativamente à categorização dos níveis do RA do item a da tarefa 1:

Tabela 4.43 - Nível do RA de respostas corretas e erradas da tarefa 1, item a.

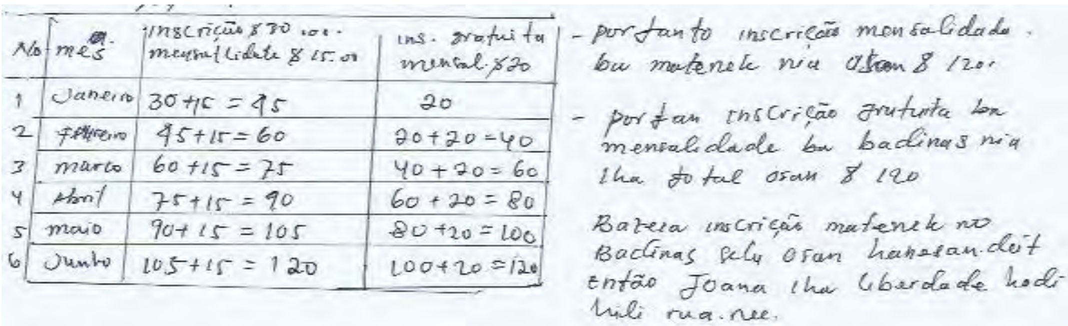
Nível do RA de resposta correta	item a		Nível do RA de resposta errada	item a	
	Frequência	%		Frequência	%
4	1	4,2	3	0	0
3	3	12,5	3	2	8,3
1	1	4,2	1	0	0
0	14	58,3	0	0	0
			Em branco	3	12,5
Total : 24 (100 %)					

Na tabela 4.44 , apresentam-se quatro exemplos de diferentes níveis de RA. A solução A envolveu o registo de uma tabela relativamente aos valores de pagamento das duas situações e apenas utilizando o cálculo numérico (nível 0 de RA). O exemplo da solução B envolveu a propriedade distributiva na operação numérica (nível 1 de RA). A solução C recorreu-se aos símbolos algébricos e às operações algébricas (nível 3 de RA) e, por fim, a solução D envolveu operação das funções (nível 4 de RA).

Tabela 4.44 – Exemplos de resoluções corretas e análise dos níveis de RA relativamente à tarefa 3 do QF

Situações-problemas: identificação e comparação do pagamento das duas aulas explicações em 6 meses.

Resposta A



- *portanto inscrição mensalidade para "Matenek" são $ 120*
- *portanto inscrição gratuita e mensalidade para "Badinas" são $ 120*
- *baseia-se nas inscrições de "Matenek" e de "Badinas" o montante é igual, então a Joana tem liberdade para escolha um dos dois.*

<u>Elementos linguísticos:</u> relação entre linguagem natural e a representação tabela; convenções assumidas para identificar os valores de pagamento em duas situações.

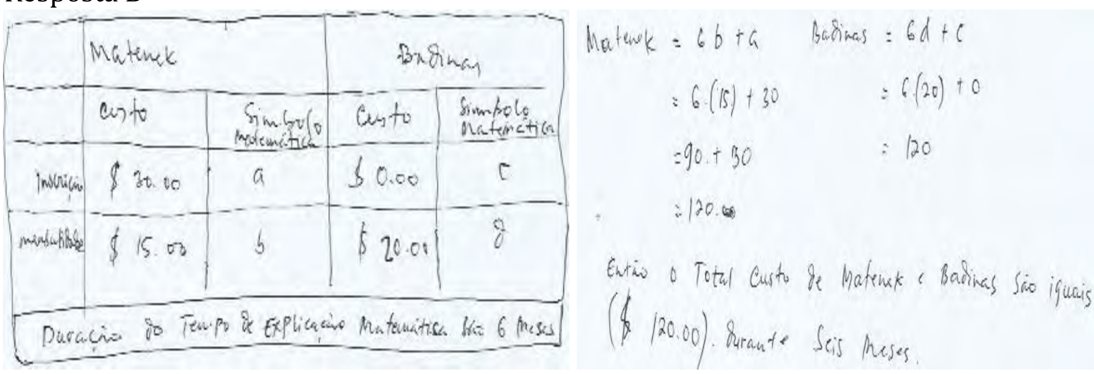
<u>Procedimentos:</u> calcular os valores de pagamento até 6 meses.

<u>Argumentos:</u> baseia-se na cálculo de valores.

<u>Nível de RA:</u> **nível 0**

- não envolve nenhuma letra ou símbolo;
- não realiza nenhuma operação algébrica;
- utiliza a observação de uma tabela;
- a configuração da resposta é calculo numérico;
- utiliza o raciocínio aritmético.

Resposta B



<u>Elementos linguísticos:</u> relação entre linguagem natural e a representação tabela; convenções assumidas para identificar os valores de pagamento em duas situações.

Procedimentos:

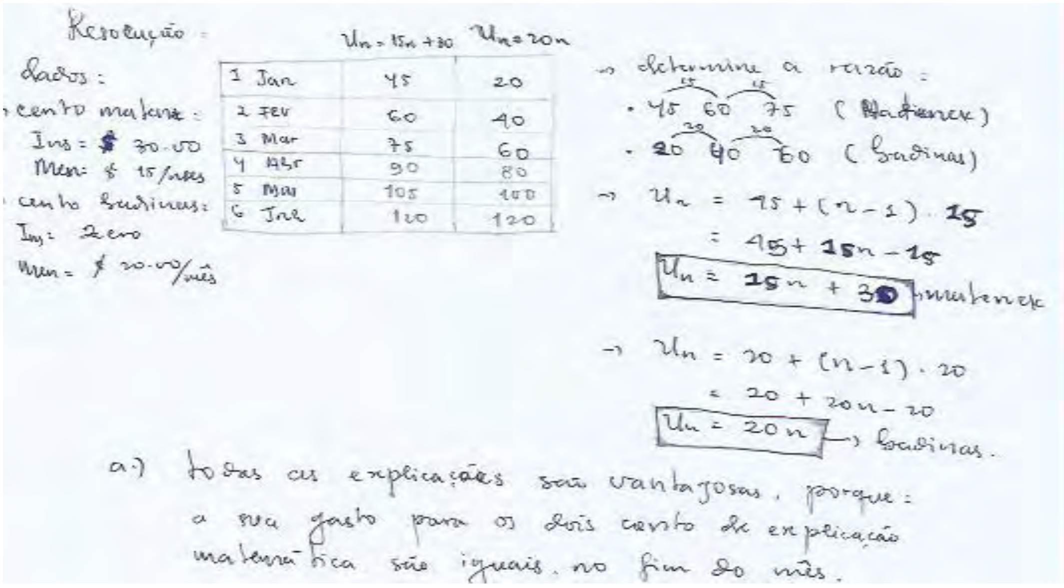
- interpretar a situação-problema utilizada uma tabela :
  interpretação de situações de dois tipos de pagamento durante 6 meses com as seguintes equações: Matenek: 6b + a ; Badinas: 6d + c; a = valor inscrição do centro de aula “Matenek”; b = pagamento mensal de“Matenek”; c = valor inscrição do centro de aula “Badinas” = 0 ; d = pagamento mensal de “Badinas”.
- determinar as diferenças entre dois tipos de pagamento;
- resolver o problema pela substituição dos valores em cada equação.

Argumentos: baseia-se no cáculo dois tipos de pagamento.

Nível de RA: **nível 1**

- envolve os símbolos (neste caso são *a, b, c* e *d*) como valores desconhecidos (incógnitas);
- envolve operação numérica.

Resposta C



Resolução :

Dados :

• centro matenek :
Ins = $ 30.00
Men: $ 15/mês

• centro badinas:
Ins: zero
Men = $ 20.00/mês

	$U_n = 15n + 30$	$U_n = 20n$
1 Jan	45	20
2 Fev	60	40
3 Mar	75	60
4 Abr	90	80
5 Mai	105	100
6 Jun	120	120

→ determine a razão :

• $\overset{15}{\frown}$ $\overset{15}{\frown}$ 45 60 75 (Matenek)

• $\overset{20}{\frown}$ $\overset{20}{\frown}$ 20 40 60 (Badinas)

→ $U_n = 45 + (n-1) \cdot 15$
$= 45 + 15n - 15$
$\boxed{U_n = 15n + 30}$ → matenek

→ $U_n = 20 + (n-1) \cdot 20$
$= 20 + 20n - 20$
$\boxed{U_n = 20n}$ → badinas.

a.) todas as explicações são vantajosas, porque: a sua gasto para os dois centro de explicação matemática são iguais. no fim do mês.

Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e a representação tabela; convenções assumidas para identificar os valores de pagamento em duas situações.

Conceitos: padrão e progressão aritmética; envolve-se a dedução de uma fórmula (expressão designatória de uma função)

Proposição:

- diferença entre dois termos sucessivos $b = U_n - U_{n-1}$;
- a fórmula da progressão aritmética $U_n = a + (n-1)b$

Procedimentos:

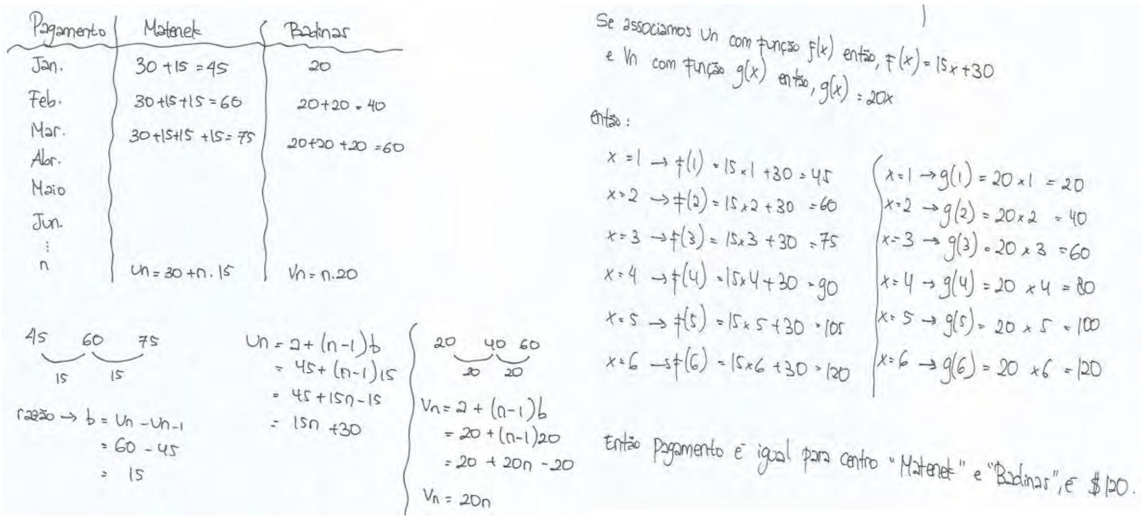
- interpretar a situação-problema utilisada uma tabela;
- identificar a diferença entre dois termos sucessivos;
- identificar o padrão (a fórmula) da progressão;
- Substituir os valores na fórmula da progressão aritmética.

Argumentos: baseia-se na operação algébrica envolvida a formula.

Nível de RA: **nível 3**

- utiliza letras, para representar os números;
- opera algebricamente e chega até uma expressão canónica;
- a configuração da resposta é Álgebra funcional.

Resposta D



<u>Elementos linguísticos:</u> relação entre linguagem natural e a representação tabela; convenções assumidas para identificar os valores de pagamento em duas situações.

<u>Conceitos:</u> padrão e progressão aritmética; envolve-se a dedução de uma formula (expressão designatória de uma função)

<u>Proposição:</u>
- diferença entre dois termos sucessivos $b = U_n - U_{n-1}$;
- a formula da progressão aritmética $U_n = a + (n-1)b$.
- a função afim $y = ax + b$

<u>Procedimentos:</u>
- interpretar a situação de problema utilizada uma tabela;
- identificar a diferença entre dois termos sucessivos;
- identificar o padrão (a fórmula) da progressão;
- substituir os valores na fórmula da progressão aritmética;
- associar a progressão aritmética com uma função afim;
- substituir o número de duração de tempo (x) na função $f(x)$ e $g(x)$.

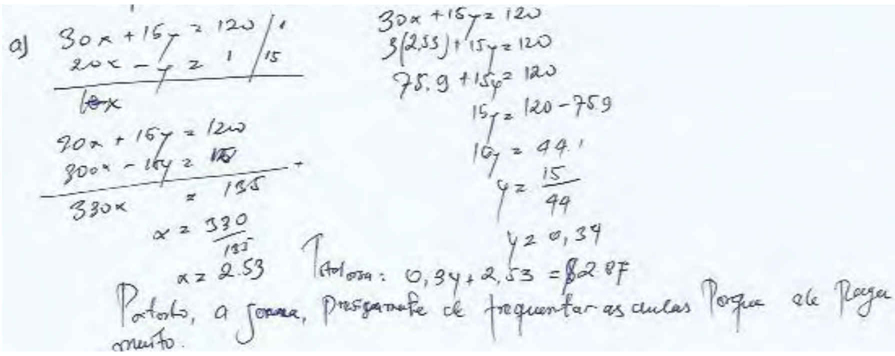
<u>Argumentos:</u> baseia-se na operação algébrica, envolve-se a fórmula da progressão aritmética e a função afim.

<u>Nível de RA:</u> **nível 4**
- utiliza símbolos para representar os dados desconhecidos;
- envolve-se os conceitos de: função e variável;
- opera algebricamente e chega até uma expressão canónica;
- a configuração da resposta é Álgebra funcional.

Todos os estudantes que têm respostas corretas (19 pessoas) conseguem traduzir as informações numa tabela, mas apenas 2 estudantes conseguem envolver as operações algébricas. Um destes últimos estudantes envolveu, na sua solução, a fórmula da progressão aritmética (Resposta C, tabela 4.44) e outro estudante conseguiu chegar até à fórmula na forma de uma função (Resposta D, tabela 4.44). Para este caso, Duval (2002) afirma que se tem acesso ao gráfico, à tabela ou à fórmula que representa a função mas não ao objeto matemático de função, assim, não se tem acesso ao objeto matemático propriamente dito que é apresentado pelas suas representações. Cada uma delas transmite informações específicas do objeto sem, no entanto, conseguir descrever completamente o conceito de função.

Nesta tarefa ainda se identificaram 2 respostas erradas. Nestas 2 respostas os estudantes tentaram resolver o problema, mas enfrentaram algumas dificuldades. Um destes estudantes teve dificuldades na: divisão para encontrar o valos de incógnita; e no cálculo numérico para identificar a conclusão final, como se mostra na seguinte solução A:

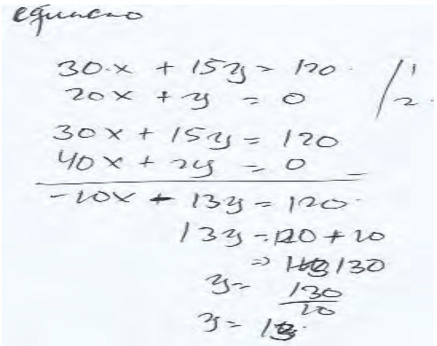
Figura 4.43 – Exemplo 1 da resposta errada relativamente ao <u>item a</u> da tarefa 3 do QF


a) 30x + 15y = 120 / 1
20x − y = 1 / 15
10x
90x + 15y = 120
300x − 15y = 15
330x = 135
x = 330/135
x = 2.53
30x + 15y = 120
3(2.53) + 15y = 120
75.9 + 15y = 120
15y = 120 − 75.9
15y = 44.1
y = 15/44
y = 0,34
Total: 0,34 + 2,53 = 2.87
Portanto, a Joana, preferiu de frequentar as aulas Porque ele Regue muito.

Este estudante teve dificuldade, por exemplo, na resolução de $330x = 135$. Para ele $x = \frac{330}{135}$ em vez de $x = \frac{135}{330}$. Este erro foi categorizado no erro da divisão (Hall, 2002) que ocorre quando o estudante não efetua a divisão final para encontrar o valor da incógnita. Este estudante também tem dificuldades na resolução de processo da divisão de números, por exemplo: $x = \frac{330}{135} = 2{,}53$ em vez de $x = 2{,}4$. Devido a estes erros, consequentemente, o processo de resolução foi errado também nas etapas seguintes.

Outro estudante manifestou dificuldade na multiplicação para eliminar uma incógnita no método da eliminação de um sistema de equações lineares, como se apresenta no próximo exemplo.

Figura 4.44 – Exemplo 2 da resposta errada relativamente ao item a da tarefa 3 do QF



Na figura 4.44 mostra-se a dificuldade deste estudante na propriedade da eliminação. Neste sentido, pretendeu-se eliminar x , portanto, deve multiplicar a primeira equação com o valor de coeficiente de x da segunda equação e multiplicar a segunda equação com o valor de coeficiente de x da primeira equação. Analogamente, pretendia-se eliminar a incógnita y.

***Tarefa 6*: Família da função linear**

A tarefa 6 apresenta uma figura das quatro funções lineares e solicitando aos estudantes para: identificar a reta relativamente as expressões dadas na tarefa (item a); escrever a fórmula geral das expressões (item b); e explicar os efeitos do parâmetro a (item c) e do parâmetro b (item d). O resultado da identificação do item a, mostra que 17 estudantes têm respostas corretas (70,8%) e 7 estudantes têm respostas parcialmente corretas, neste caso têm no mínimo um erro na indicação da reta (29,2%). Relativamente ao item b, a maioria dos estudantes (16 pessoas ou 66,7%) conseguem manifestar $y = ax + b$ como uma fórmula geral das expressões e identificar como sendo uma função linear ou função afim.

Os 15 de 24 estudantes conseguem responder corretamente o efeito do parâmetro a da função linear (item c) e os 13 de 24 estudantes têm respostas corretas relativamente ao efeito do parâmetro b (item d), como se apresenta na tabela 4.45.

Tabela 4.45 - Grau de correção da tarefa 6, item c e item d

Grau de correção	item c		item d	
	Frequência	%	Frequência	%
Correta	15	62,5	13	54,2
Errada	4	16,7	3	12,5
Em branco	5	20,8	8	33,3
Total	24	100	24	100

A tabela 4.46 mostra que todos os estudantes, nas suas soluções do item c e do item d da tarefa "Família de funções lineares" fizeram desenhos gráficos de família das função lineares e observaram os efeitos do parâmetro a e do parâmetro b.

Tabela 4.46 - Frequência do método de resolução envolvido na tarefa 6, item c e item d.

Método de resolução	item c		item d	
	Frequência	%	Frequência	%
Tendência algébrica	0	0	0	0
Tendência aritmética	0	0	0	0
gráfica	19	79,2	16	66,7
Em branco	5	20,8	8	33,3
Total	24	100	24	100

Relativamente ao nível de RA, na tabela 4.47 regista-se a categorização das respostas dos estudantes relativamente ao item c e ao item d da tarefa 6. No item c, as 8 respostas estão categorizadas no nível 4 de RA que foram identificadas pelo envolvimento dos vários valores do parâmetro a, coeficientes da expressão designatória da função, e variáveis, mas sem envolvimento de uma generalização deste parâmetro. O envolvimento da generalização, como a caraterização do nível 5, surge em 7 respostas dos estudantes.

Tabela 4.47 - Nível do RA de respostas corretas e erradas da tarefa 2, item c e item d.

Nível do RA de resposta correta	item c		item d		Nível do RA de resposta errada	item c		item d	
	F	%	F	%		F	%	F	%
5	7	29,2	3	12,5	5	0	0	0	0
4	8	33,3	10	41,7	4	4	16,7	3	12,5
					Em branco	5	0	8	33,3
Total: 24 (100 %)									

F: frequência

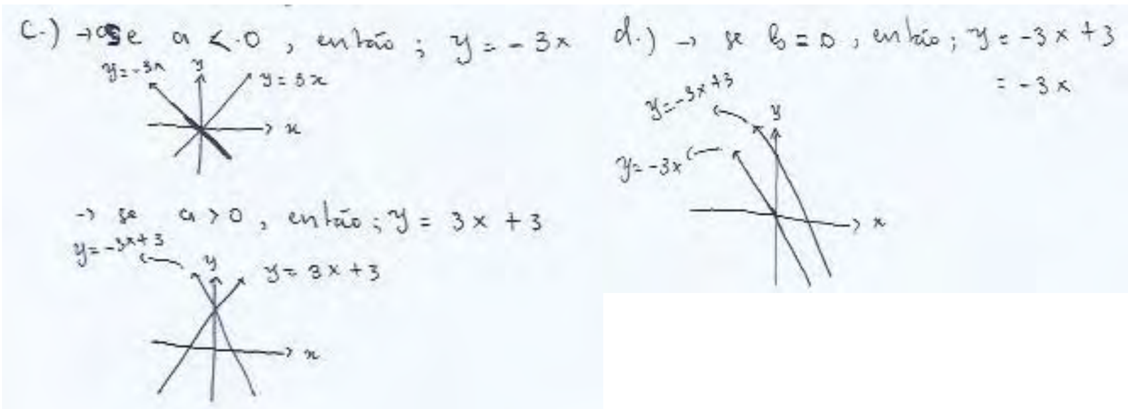
Ainda na tabela 4.47, as 10 respostas do <u>item d</u> estão categorizadas no nível 4 de RA devido ao envolvimento dos vários valores do parâmetro b e pelo não envolvimento de qualquer generalização. Foram categorizadas as 3 respostas do <u>item d</u> no nível 5 de RA pelo envolvimento da generalização do parâmetro b.

Apresentam-se, em seguida, dois exemplos das respostas do <u>item c</u> e do <u>item d</u> da tarefa da família da função linear. Resposta A é um exemplo da resposta correta que envolve a apresentação de gráficas sem nenhuma conclusão (nível 4 de RA) e a resposta B é um exemplo da resposta correta com o envolvimento da observação gráfica e a tirada da generalização (nível 5 de RA).

Tabela 4.48 – Exemplos de resoluções corretas e análise dos níveis de RA relativamente ao <u>item c</u> e ao <u>item d</u> da tarefa 6 do QF

Situações-problemas: identificação os efeitos de parâmetro a e b em várias situações da função linear.

Resposta A



<u>Elementos linguísticos:</u> relação entre linguagem simbólica e a representação gráfica.

<u>Conceitos:</u> O sinal de parâmetro a influencia o sentido monótona crescente e decrescente do gráfico da função. O sinal de parâmetro b influencia no ponto de interseção do gráfico com o eixo Y.

<u>Proposição:</u>
- Se $a > 0$, o gráfico da função é crescente;
- Se $a < 0$, o gráfico da função é decrescente.
- Se $b = 0$, o gráfico passa pelo o ponto inicial O(0,0);

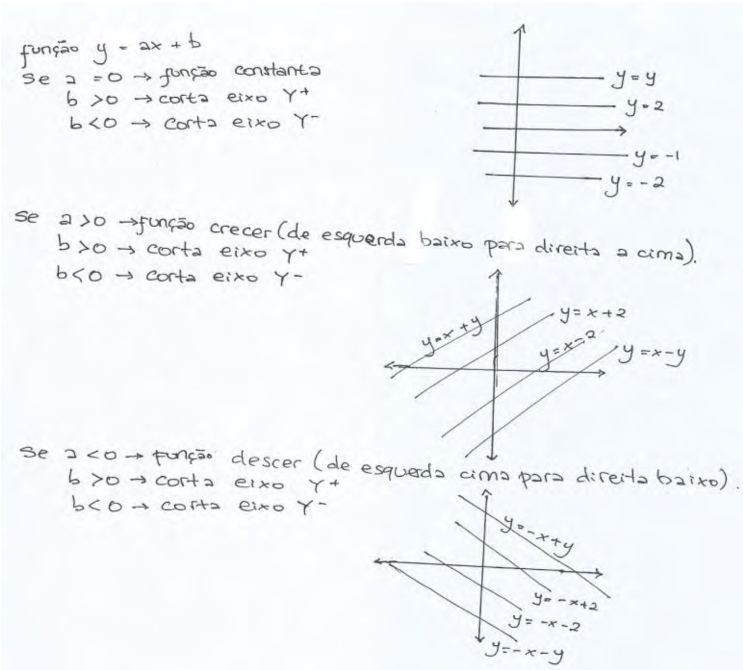
<u>Procedimentos:</u>
- escolha exemplos do valor do parâmetro a e b, neste caso a = -3; a = 3; b = 0; b = 3
- desenhar as retas com estes valores de a e b;
- observar os efeitos de parâmetro a e b;

<u>Argumentos:</u> baseia-se na observação gráfica.

<u>Nível de RA:</u> **nível 4**
- envolve os vários valores que representam o parâmetro a;
- estudo da família de funções lineares;
- não opera com o parâmetro;

- não envolve uma generalização;
- a configuração da resposta é Álgebra funcional envolvendo-se o raciocínio diagramático.

Resposta B



Elementos linguísticos: relação entre linguagem natural e a representação gráfica.
Conceitos: O sinal de parâmetro a influencia o sentido monótona crescente e decrescente do gráfico da função. O sinal de parâmetro b influencia no ponto de interseção do gráfico com o eixo Y.
Proposição:
- Se $a = 0$, o gráfico é monótona e o nome da função é a função constante;
- Se $a > 0$, o gráfico da função é crescente;
- Se $a < 0$, o gráfico da função é decrescente.
- Se $b > 0$, o gráfico tem um ponto de interseção com o eixo Y positivo.
- Se $b < 0$, o gráfico tem um ponto de interseção com o eixo Y positivo.

Procedimentos:
- desenhar as várias retas com vários valores de a e de b;
- observar os efeitos de parâmetro a e b em várias situações;
- Fazer uma generalização dos efeitos de parâmetro a e b.

Argumentos: baseia-se na observação gráfica.
Nível de RA: **Nível 5**
- envolve o parâmetro a e b;
- envolve a família da função linear;
- opera com o parâmetro;
- envolve uma generalização;
- a configuração da resposta é Álgebra funcional envolvendo-se o RA e o raciocínio diagramático.

Nesta tarefa ainda se encontram dificuldades dos estudantes na indicação de expressões, neste caso da função, pela observação da gráfica (item a). Ainda que a representação gráfica permita a visualização da expressão, para estes estudantes a compreensão de gráficos não é um processo simples. Segundo Kramarski (2004), a construção de uma representação gráfica é muito diferente da sua interpretação e a construção de um gráfico requer o desenvolvimento de ideias que geralmente estão implícitas.

As dificuldades também se encontram na indicação dos efeitos de parâmetros a e b. Considera-se a generalização que envolve o raciocínio abstrato é uma atividade muito complicada para os estudantes. Neste sentido, Ponte (1992) considera que a maioria dos estudantes sente muitas dificuldades no pensamento abstrato, em particular no trabalho com gráficos cartesianos, recorrendo frequentemente a estratégias e processos de raciocínio numéricos.

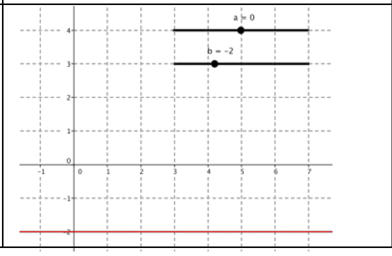
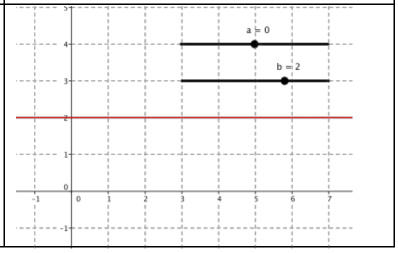
Além das dificuldades apresentadas na altura, ainda se encontra também a dificuldade dos estudantes em expressar o tipo do gráfico que é "crescente" ou "decrescente". Para os estudantes, se o valor de parâmetro a é maior então o gráfico: "para direita" ou "crescer (da esquerda-baixo para direita-cima)". Para o valor de parâmetro a é menor então o gráfico: "para esquerda" ou "descer (da esquerda-cima para direita-baixo)".

Considerando a dificuldade dos estudantes na identificação dos efeitos do parâmetro a e o parâmetro b na função linear $y = ax + b$, realizou-se uma entrevista clínica com a participação de três estudantes. Nesta entrevista apresentou-se os gráficas desta função com o *GeoGebra.*

Figura 4.45 – Diálogo na entrevista clínica relativamente à dificuldade dos estudantes na identificação dos efeitos do parâmetro a e o parâmetro b na função linear $y = ax + b$

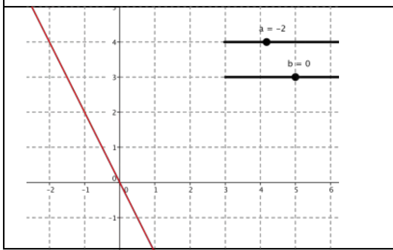
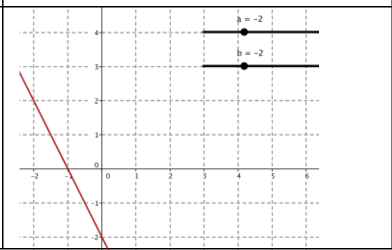
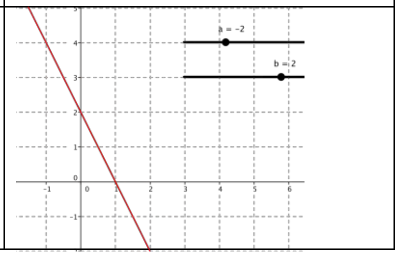
Formadora (F): Já conhece o programa de *GeoGebra* ?
Estudante A: Aprendemos com um professor, mas não habituamos de utilizar esta programa.
F: Na atividade prática 3, todos os grupos apresentaram os gráficos com *GeoGebra*. Sabem fazer o gráfico com *GeoGebra*?
(A formadora mostrou os gráficos das respostas dos grupos – Tarefa 1, atividade prática 3)
Estudante B: Sim, podemos. Mas temos dificuldade de ler estes gráficos. (ler = interpretar)
F: Então vamos aprender como interpretar o gráfico e identificar os efeitos do parâmetro a e b.
(A formadora construiu gráfico $y = ax + b$ com vários valores de parâmetro a e b, e os estudantes copiaram as imagem no papel)

Se $a = 0$

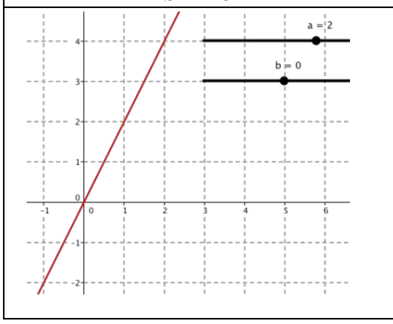
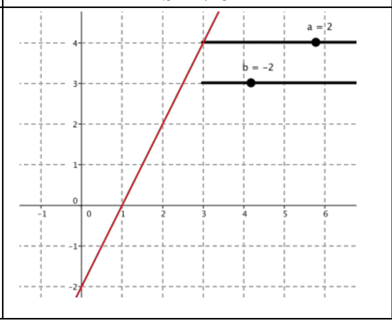
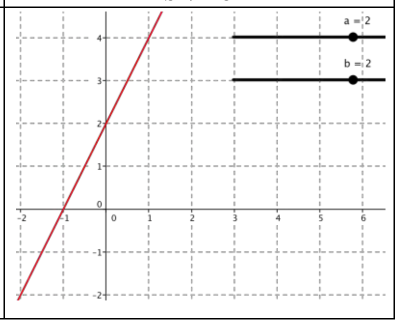
$b = 0$	$b < 0$	$b > 0$
não tem		

F: Então o que podemos dizer?
C: Os gráficos são horizontais.
F: Sim, ou podemos dizer $y = ax + b$ é monótona em sentido lato (é uma função constante).

Vamos observar se $a < 0$

$b = 0$	$b < 0$	$b > 0$
		

F: Então se $a < 0$ com vários valores de b, como os gráficos ficam?
A: Os gráficos começa da esquerda-cima para direita-baixo.
F: Os gráficos crescer ou descer?
A: Crescer, professora
B: Então se o valor de $a < 0$, em qualquer valores de b, a função $y = ax + b$ é estritamente decrescente.
F: Exato! Muito bom!
Agora $a > 0$

$b = 0$	$b < 0$	$b > 0$
		

C: Então os gráficos são crescer. A função $y = ax + b$ é estritamente crescente.
F: Muito bem!
F: Vamos analisar os efeitos do parâmetro b. O que acontece com os gráficos se $b = 0$?
B: Se $b = 0$, mas $a \neq 0$, os gráficos sempre passam pelo ponto $O(0,0)$.
F: O gráfico tem ponto interseção no $O(0,0)$.
F: Se $b < 0$, em qualquer valores de a, o que podemos dizer?
B: Os gráficos têm o ponto de interseção no eixo Y negativo, o valor x sempre 0.
F: Certo! Então o ponto de interseção é $A(0, -b)$.
A: Professora, se $b > 0$ então o ponto de interseção no eixo Y negativo. Neste caso, o ponto de interseção é $B(0, b)$.
F: Muito bem!

Com o apoio da discussão gerada durante a entrevista clínica, os estudantes receberam orientações da formadora para tirar as conclusões sobre os efeitos do parâmetro a e do parâmetro b. Além disso, o envolvimento do programa de *GeoGebra* ajudou estes estudantes a visualizar as mudanças do gráfico.

4.4.3.3 Análise dos resultados das tarefas do QF sobre modelação

***Tarefa 4*: Identificação das expressões**

Na tabela 4.49 seguinte, apresenta-se os resultados dos 24 estudantes em relação à identificação das expressões da tarefa 4.

Tabela 4.49: Categorização das respostas relativamente à tarefa 4 do QF

Expressão	Número de respostas		
	Correta	Errada	Não responde
$4x + 5 = 25$	18	6	0
$y = 2x + 1$	20	4	0
$P = 2c + 2l$	17	4	3

Os 18 os estudantes (70%) identificam a primeira expressão como uma equação linear ou equação do primeiro grau e 6 estudantes identificam erradamente, como: "equação da incógnita"; ou "função linear com uma incógnita". Na segunda expressão, os 20 estudantes (83,3%) que responderam corretamente e identificarem esta expressão como uma função linear ou como uma função afim. Em relação à terceira expressão, 17 estudantes (70,8%) responderam corretamente com um perímetro retângulo ou uma fórmula do perímetro retângulo, 4 estudantes responderam erradamente e 3 estudantes não responderam.

***Tarefa 5*: Área do triângulo retângulo**

O item a da tarefa 5 solicitou-se aos estudantes não apenas identificar o resultado, mas também para explicar os procedimentos utilizados na resolução de problema. Esta situação estimulou os estudantes a pensar estrategicamente sobre as etapas para resolver o problema. No resultado decorrente da análise identifica-se um maior número de respostas corretas: 20 respostas corretas (83,3%), 3 respostas erradas (12,5%) e 1 resposta em branco (4,2%), como se apresenta na próxima tabela:

Tabela 4.50 - Grau de correção e método de solução da tarefa 1, item a.

Grau de correção	item a Frequência	%
Correta	20	83,3
Errada	3	12,5
Em branco	1	4,2
Total	24	100

Método de solução	item a Frequência	%
Tendência algébrica	23	95,8
Tendência aritmética	0	0
Em branco	1	4,2
Total	24	100

Das 20 respostas corretas todas recorrem aos objetos e aos processos algébricos na sua resolução, estando assim categorizadas no nível 2 de RA. Os estudantes que têm respostas erradas recorram, também, ao envolvimento dos objetos e dos processos algébricos na sua resolução. Neste caso, categorizou-se estas respostas no nível 2 de RA, como se pode ler na tabela 4.51:

Tabela 4.51- Nível do RA de respostas corretas e erradas da tarefa 5, item a.

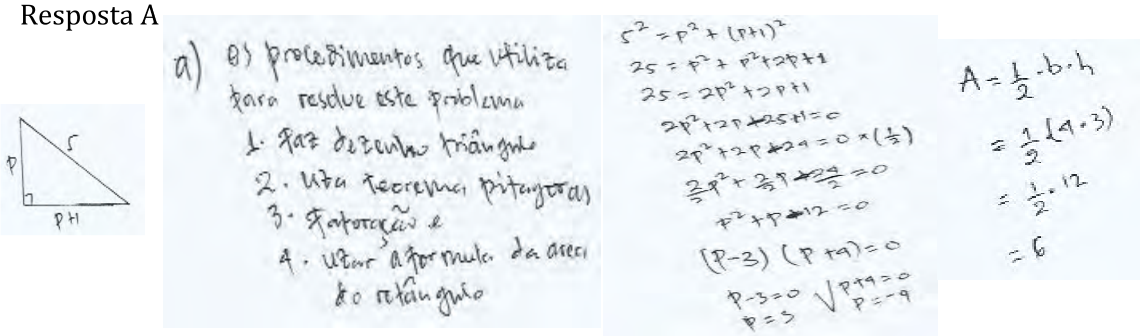
Nível do RA de resposta correta	item a Frequência	%	Nível do RA de resposta errada	item a Frequência	%
2	20	83,3	2	3	12,5
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0
			Em branco	1	4,2
Total : 24 (100 %)					

Apresenta-se, em seguida, um exemplo da resposta correta (resposta A) e a sua análise sobre os objetos e processos envolvidos na resolução. Apresenta-se, também, um exemplo da resposta parcialmente correta (resposta B) onde se indica a dificuldade que o aluno enfrenta na resolução desta tarefa.

Tabela 4.52 - Exemplos de resoluções corretas e análise dos níveis de RA relativamente à tarefa 5 do QF

Situações-problemas: identificação da área de um triângulo retângulo onde os comprimentos de catetos ainda não estão definidos.

Resposta A

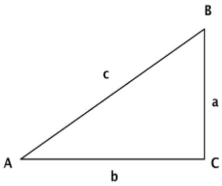


<u>Elementos linguísticos:</u> relação entre linguagem natural e a linguagem algébrica.

<u>Conceitos:</u> A área de um triângulo retângulo é dada pela metade do produto dos lados menores. O quadrado dos catetos de um triângulo é igual ao quadrado de sua hipotenusa (teoria de Pitágoras).

<u>Proposição:</u> Área do triângulo retângulo: $A = \frac{1}{2} \times a \times b$

Fórmula de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$



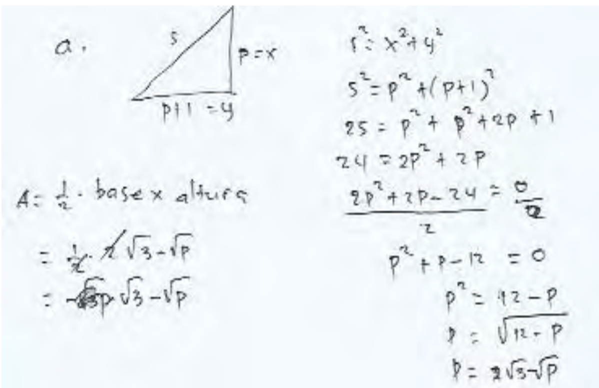
<u>Procedimentos:</u>
- traduzir da linguagem natural para linguagem algébrica;
- desenhar um triângulo retângulo e colocar os perímetros dos catetos e hipotenusa;
- utilizar a fórmula de Pitágoras, neste caso $5^2 = p^2 + (p+1)^2$;
- utilizar a propriedade de factorização para determinar o valor da p desta equação quadrática;
- utilizar a fórmula da área do triângulo retângulo para resolver o problema.

<u>Argumentos:</u> baseia-se no calculo numérico.

<u>Nível de RA:</u> **Nível 2**
- utilizam-se símbolos como incógnitas (simbólica lateral);
- utilizam-se operações algébricas;
- envolve-se o procedimento da resolução de uma equação quadrática.

A configuração da resposta é de Álgebra modelação.

Resposta B



A resposta B envolve a mesma configuração dos objetos e dos processos como a resposta A, e também da mesma categorização do nível de RA. Mesmo assim, ainda se encontra a dificuldade deste aluno no processo de resolução da equação quadrática com a factorização, embora também utilizar outros métodos de resolução, como a fórmula de *Bhaskara*.

Na análise das respostas à tarefa 5 sobre a área do triângulo retângulo, deteta-se um grande número de respostas corretas (20 respostas). Todas estas respostas corretas têm justificações corretas e utilizam o padrão comum da Álgebra. Ainda se verificaram 4 respostas erradas. Todas estas respostas erradas utilizaram os símbolos algébricos nas suas soluções. Baseando-se nas respostas destes estudantes, encontram-se os tipos de erros algébricos relativamente à resolução da equação quadrática $2p^2 + 2p = 24$, como se apresenta nos seguintes exemplos:

Tabela 4.53 – Exemplos de resoluções erradas e análise do tipo de erros relativamente à tarefa 5 do QF

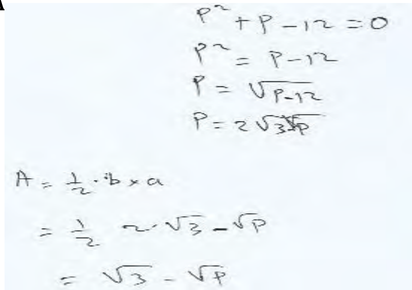
<table>
<tr>
<td>Resposta A


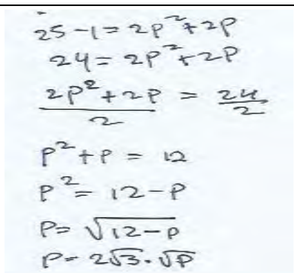
Figura 4.46 – Exemplo A da resposta errada relativamente à tarefa 5 QF</td>
<td>Encontra-se, na resposta A, transposição incorreta de termos (Kieran, 1985, 1992), neste caso:
$$p^2 + p - 12 = 0 \Leftrightarrow p^2 = p - 12$$
O erro algébrico manifesta-se, também, no processo da factorização. Neste caso, o aluno não compreendeu a propriedade dos radicais. $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
E tem dificuldade na propriedade distributiva: $a\left(\sqrt{b} - \sqrt{c}\right) = a\sqrt{b} - a\sqrt{c}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Resposta B


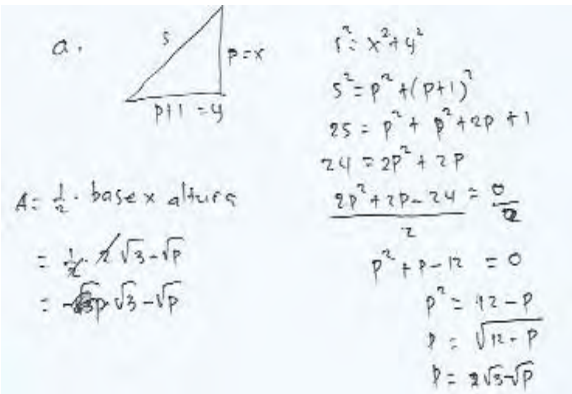
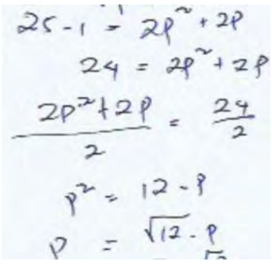
Figura 4.47 – Exemplo B da resposta errada relativamente à tarefa 5 QF</td>
<td>Na resposta B encontra-se um erro na propriedade dos radicais:
$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Resposta C


Figura 4.48 – Exemplo C da resposta errada relativamente à tarefa 5 QF</td>
<td>Encontra-se, na resposta C, um erro na propriedade dos radicais:
$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$</td>
</tr>
</table>

Resposta D  Figura 4.49 – Exemplo D da resposta errada relativamente à tarefa 5 QF	Na resposta D encontra-se outro tipo de erro na propriedade dos radicais: $p^2 = a - b \not\Leftrightarrow p = \sqrt{a} - b$

Considerando-se que existiu uma efetiva necessidade de ajudar os estudantes a ultrapassar as dificuldades no conceito de operações e de propriedades das radicais (radiciação), a formadora criou uma entrevista com objetivo de perceber as dificuldades que os estudantes enfrentam e procurou um meio para explicar melhor este conceito. Esta entrevista realizou-se na sala de aula com 4 alunos que têm dificuldade neste tópico.

Figura 4.50 – Diálogo a entrevista clínica relativamente às dificuldades no conceito de operações e de propriedades das radicais (radiciação)

Formadora (F) : Vamos ver a solução da tarefa 5.

... (a formadora e os 4 alunos observaram as respostas destes alunos)

F: Nas soluções, todos vocês já chegaram à equação quadrática $2p^2 + 2p = 24$, não foi? Dividiram ambos os lados em 2 e fica $p^2 + p = 12$?

Todos estudantes: Sim, professora

F: Quais os métodos que podemos utilizar para resolver esta equação?

Estudante A (A): factorização

Estudante B (B): fórmula abc (formula de Bhaskara).

F: como se resolve esta equação com uma factorização

... (os 4 tentaram resolver com factorização)

A: procuramos dois números, se somarmos os dois é 1 e se multiplicamos, então ... ?

F: vamos simplificar esta equação com forma como forma geral da equação quadrática, então fica $p^2 + p - 12 = 0$.

continua a sua explicação!

A: então se multiplicamos, o resultado é – 12.

Estudante C: então professora, é fácil quando resolvemos com factorização.

F: vamos ver ..., qual é a sua resposta com factorização?

C: $p - 3 = 0$ e $p + 4 = 0$, e o resultado fica $p = 3$ ou $p = -4$

F: está certo! então neste caso é fácil se resolvemos com factorização. Mas, como o professor, devemos capaz de resolver com outro método por exemplo com a formula de Bhaskara que você conhece com o termo de bahasa “fórmula de abc”.

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vamos resolver a equação $p^2 + p = 12$ com desta fórmula, o primeiro indica qual é o valor do a, b e c.

B: $a = 1, b = 1$ e $c = 12$

Estudante D: Não ... não, professora. Devemos utilizar a equação $p^2 + p - 12 = 0$, então $a = 1, b = 1$ e $c = -12$

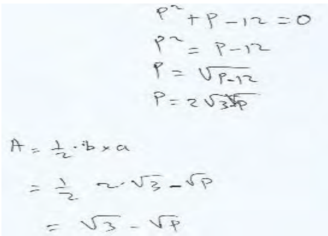
F: é certo! Vamos substituir estes valores.

... os estudantes fizeram os cálculos

A: então os resultados são mesmos com os resultados da factorização.

F: sim, os resultados da resolução de equação quadrática são os mesmos. Podemos utilizar vários métodos de resolução, mas os resultados finais são sempre iguais.

Agora vamos fazer uma discussão das respostas, vamos analisar o primeiro exemplo:



qual é o erro desta resposta?

A: tenho erro na utilização da fórmula.

F: sim, se você quer utilizar a formula de Bhaskara, então os valores devem substituídos na fórmula. E todos de vocês tem a mesma situação.

Vamos ver a sua operação de radiciação. Qual é o resultado de $p^2 = 12 - p$?

.... (ninguém responderam)

F: Se tenho $x^2 = 4$, qual é o valor de x

D: $x = 2$ ou $x = -2$

F: Se tenho $x = \sqrt{4}$ e x é elemento dos conjuntos de números reais, qual é o valor x?

B: são mesma, professora ..

A: não, professora. Só $x = 2$

F: porque?

A: porque o raiz de um número é sempre positivo.

F: sim, é certo no caso de x é elemento dos conjuntos de números reais.

agora, qual é o resultado do $p = \pm\sqrt{12 - p}$?

A: é difícil professora

F: vamos relembra as propriedades e operacionais da radiciação.

se $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ ou pelo contrário $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, mas $\sqrt{a - b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

portanto se $p = \sqrt{12 - p}$, então $p \neq \sqrt{12} - \sqrt{p}$ ou seja $p \neq 2\sqrt{3} - \sqrt{p}$

Por exemplo se o resultado deste problema foi assim, podemos indicar outro erro nesta resposta?

A: na minha, professora

F: então qual é o certo?

A: se nesta caso, $A = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} - \sqrt{p}$ então deve ser $A = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{3} - \sqrt{p}\right) = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{p}$

F: correto !

Apoiando-se nesta discussão, os estudantes puderam refletir e identificar os seus próprios erros e também reforçar os seus conhecimentos relativamente aos métodos de resolução de uma equação quadrática, à raiz quadrada, às propriedades da radiciação, e à propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição.

4.4.4 Análise dos resultados do QF relativamente ao CDM

A aplicação da fundamentação teórica do EOS para avaliar o conhecimento dos estudantes sobre o CDM, também se manifesta na análise retrospectiva das respostas dos estudantes depois da ação formativa. Quer nesta análise, quer na análise do QI sobre o CDM, focou-se atenção nas facetas epistémica, cognitiva e instrucional.

Para efeitos de análise, pretendeu-se categorizar todas as questões relativamente ao CDM.

Tabela 4.54 - Análise das respostas do QF relativamente às questões sobre o CDM

Facetas	Tarefa	Questão
Faceta epistémica (níveis de RA)	*Balança de "Angry bird"*	1d. Identifique os níveis de RA das suas respostas no item a?
	Padrão e sequência de lafatik	2d. Identifique os níveis de RA das suas respostas no item b.
		2e. Pode resolver-se a tarefa com procedimentos exclusivamente aritméticos? De que maneira?
		2f. Pode resolver-se a tarefa com procedimentos exclusivamente algébricos? De que maneira?
	Área do triângulo retângulo	5a. Explique os procedimentos utilizados para resolver este problema.
		5b. Qual é a categoria do nível de RA relativamente o procedimento que se utilizou na sua resolução.
Faceta cognitiva (significados pesoais)	*Balança de "Angry bird"*	1b. Que interpretação da "balança" está associada ao conhecimento matemático?
		1c. Quais são os conhecimentos matemáticos utilizados para resolver esta tarefa?
	Padrão e sequência de lafatik	2c. Quais seriam os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa?
	Aulas de explicações da Matemática	3b. Quais são os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa?
	Área do triângulo retângulo	5c. Quais são os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa.
	Família da função linear	6e. Quais são os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa?
Faceta instrucional (situações e recursos)	*Aulas de explicações da Matemática*	3c. Considera que esta tarefa é adequada para ser proposta aos alunos do Ensino Secundário? Se concorda, indique em que ano e justifique a sua resposta.
	Identificação das expressões	4b. Enuncie três problemas que se possam propor aos alunos do secundário cuja solução que leva destas expressões.
	Comprimento de triângulo retângulo	5d. Enuncia as duas tarefas para introduzir algum procedimento de resolução que ponha em jogo conhecimentos algébricos?
	Família da função linear	6f. Enunciar uma tarefa, cujo solução que envolve uma das expressões anterior. Qual é nível de RA são postos em jogo nesta tarefa.

Faceta Epistémica

Nesta faceta identificaram-se os conhecimentos dos estudantes relativamente: a identificação de objetos e processos algébricos nos diversos componente propostos no RA (representações, conceitos, procedimentos, propriedades, generalização, modelação); e a identificação de níveis de RA. Para avaliar esta faceta, no QF colocaram-se 6 questões de diferentes tarefas:

- Identificação do nível de RA das respostas manifestadas da tarefa de: Balança de "Angry bird" (1d), Padrão e sequência de *lafatik* (2d), e Área do triângulo retângulo (5b);
- Possibilidade de resolver a tarefa do "Padrão e sequência de *lafatik*" com procedimentos exclusivamente aritméticos (2e);
- Possibilidade de resolver a tarefa do "Padrão e sequência de *lafatik*" com procedimentos exclusivamente algébricos (2f);
- Explicação os procedimentos utilizados na resolução de problema sobre "Área do triângulo retângulo" (5a);

A análise das respostas dos estudantes relativamente à identificação do nível de RA mostra um maior número das respostas corretas: 22 na questão (1d); 21 na questão (2d); e 19 na questão (5b). Esta realidade indicia uma boa compreensão dos estudantes relativamente à categorização dos níveis de RA. Na análise deste tipo de questões não foi efetuada uma comparação com o resultado do QI, pois no QI não se manifestou este tipo de questão.

Relativamente à possibilidade de resolução de problema com o procedimento aritmético (questão 2e), são 22 de 24 estudantes que conseguem manifestar a possibilidade de resolução de tarefa do "Padrão e sequência de *lafatik*" com o procedimento aritmético, utilizando a tabela ou utilizando o padrão da progressão. Relativamente à indicação da utilização do procedimento algébrico, apenas 14 estudantes conseguem mostrar este procedimento na sua resolução através do envolvimento da fórmula do "Padrão e sequência de *lafatik*".

OS 20 de 24 estudantes, conseguiram explicar corretamente os procedimentos que foram utilizados para resolver a tarefa modelação sobre "Área do triângulo retângulo" (questão 5a). Esta realidade é uma indicação positiva de que os estudantes se começaram a familiarizar com os procedimentos da resolução de modelação matemática e se tornam capazes de resolver as tarefas algébricas do tipo de modelação.

Faceta Cognitiva

A avaliação dos significados pessoais dos estudantes relativamente ao conhecimento, à compreensão, à competência sobre o conteúdo algébrico e aos conflitos de aprendizagem sobre os objetos e processos algébricos foi questionada em treze itens. Das 13 questões, 8 itens foram sobre o conhecimento algébrico e foram analisados no momento da análise alusiva aos resultados das tarefas relacionadas com o conhecimento algébrico. As 6 questões que foram apresentadas para avaliar o CDM nesta faceta listam-se se seguida:

- interpretação da "balança" associa-se ao conhecimento matemático (1b);
- identificação os conhecimentos matemáticos utilizados para resolver na tarefa da balança de "*Angry Bird*" (1c);
- identificação dos conhecimentos algébricos envolvidos na tarefa do padrão e a sequencia de *lafatik* (2c);
- identificação dos conhecimentos algébricos envolvidos na tarefa das aulas de explicações da Matemática (3b);
- identificação dos conhecimentos algébricos envolvidos na tarefa da área do triângulo retângulo (5c);
- identificação dos conhecimentos algébricos envolvidos na tarefa da família da função linear (6e).

Todos os estudantes compreenderam e conseguiram responder corretamente à interpretação da balança de "*Angry Bird*" e à sua associação ao conhecimento matemático (item 1b), que é a igualdade de uma operação. Ainda nesta tarefa, os 20 estudantes conseguiram identificar os conhecimentos matemáticos utilizados para resolver a tarefa (item 1c), que são: igualdade; equação; sistema de equações; método de resolução de um sistema de equações lineares com duas incógnitas (eliminação, substituição, misto, ...); método de resolução de um sistema de equações lineares com três incógnitas.

O maior número de respostas corretas (23 respostas) observa-se na questão da identificação dos conhecimentos algébricos envolvidos na tarefa do padrão e sequência de *lafatik.* Para estes estudantes, os conhecimentos algébricos envolvidos nesta tarefa são: padrão; progressão e sucessão aritmética.

Encontra-se, também, maior número de respostas corretas (19 respostas) relativamente à identificação dos conhecimentos algébricos envolvidos na tarefa sobre as aulas de explicações da Matemática. A função linear, o gráfico da função linear e o ponto de interseção entre duas retas (das duas equações) são os conhecimentos que foram identificados pelos estudantes.

Todos os estudantes conseguiram identificar: teorema de Pitágoras; equação quadrática e os métodos de resolução (fatorização ou fórmula de *Bhaskara*), bem como os conhecimentos algébricos envolvidos na tarefa da área do triângulo retângulo (item 5c).

A função linear e/ou a família de funções lineares são os conhecimentos algébricos que foram identificados por todos estudantes, ou seja, todos os estudantes respondem corretamente a questão do item 6e.

Faceta instrucional

No QF colocaram-se qoutro questões relacionados com o currículo escolar para avaliar o conhecimento dos estudantes relativamente à faceta instrucional. O item 3c é o item que questiona sobre a consideração dos estudantes relativamente à adequação das tarefas para serem propostas aos alunos do Ensino Secundário, a identificação do ano em que o tema é lecionado e a justificação das respostas. O item 4b, o item 5d e o item 6f são os itens que pedem aos estudantes para enunciar os problemas ou tarefas para introduzir algum procedimento de resolução onde se envolvam os processos algébricos nas suas resoluções.

Encontram-se 15 respostas corretas relativamente ao item 3c. Para estes 15 estudantes a tarefa 3 é uma tarefa adequada para introduzir o conhecimento relativamente ao conceito da função linear aos alunos do 11.º ano do Ensino Secundário..

A questão sobre a construção de problema baseada nas três expressões algébricas dadas (item 4b) foi colocada na tarefa 4 do QI mesmo assim ainda se encontram as dificuldades por parte dos estudantes. Esta realidade é indicada pelo pequeno número de respostas corretas (16 resposta para primeira expressão, 4 para segunda expressão, e 12 resposta corretas para terceira expressão). Assim, não se identifica uma mudança significativa relativamente a esta questão.

A dificuldade dos estudantes também é visível na tarefa da área do triângulo retângulo (item 5d). Apenas 1 aluno consegue apresentar um exemplo da tarefa: "Sabendo que um triângulo retângulo isósceles tem o comprimento de diagonal é $10\sqrt{2}$ cm, calcula a área deste triângulo e justifica o processo para resolver este problema".

Nenhum dos estudantes conseguiu responder corretamente à questão da enunciação da tarefa relacionada com a representação do gráfico da família de funções lineares (item 6f).

Com base nas respostas obtidas (item 4d, item 5d e item 6f), denota-se uma grande preocupação relativamente ao domínio do CDM do tipo de construção ou modificação de uma tarefa, sublinhando-se a importância que os futuros professores devem ter este tipo de conhecimento para ensinar os estudantes.

Verificando-se a dificuldade dos estudantes na enunciação ou na modificação da tarefa, realizou-se também uma sessão de entrevista clínica sobre a tema. Nesta entrevista colaboraram 4 estudantes.

Figura 4.51 – Diálogo na entrevista clínica relativamente à dificuldade na anunciação ou na modificação da tarefa

Formadora (F): No momento vocês frequentaram a disciplina "Prática Pedagógica 1" (micro do ensino) e preparam as matérias para ensinar, vocês construíram os exemplos e as tarefas por próprios?

Estudante A (A): Não, professora. Tirou dos livros de manual e algumas vezes tirou de internet.

F: Quem de vocês fizeram sozinho ?

Estudante D (D): Fiz, mas não como modelo da tarefa da professora.

F: Então o que fez?

D: Por exemplo, sobre equação quadrática, no livro de manual há um exemplo "Quais são os valores de x se temos $x^2 - 2x + 3 = 0$" , então fui mudar a questão do exemplo "Quais são os valores de x se temos $x^2 - 9 = 0$".

F: Não fiz a tarefa do tipo de resolução de problema ou em bahasa é "Soal cerita"?

Estudante B (B): Não, professora.

F: Então hoje não vamos fazer nenhum cálculo numérico, nem cálculo algébrico. Hoje vamos aprender construir uma tarefa.
Vamos ver a tarefa 4 (tarefa 4 do QF)
A primeira expressão $4x + 5 = 25$, o que significa desta expressão?

C: Equação, professora.

F: Podemos construir uma tarefa que a sua solução envolve esta equação?

----- (os estudantes não responderam)

F: Por exemplo: se temos uma balança equilibrada, no prato esquerdo está colocada 4 bolinhas e o peso de 5 gramas e no prato direito colocamos o peso de 25 gramas. Quantos gramas do peso de cada bolinha?

B: Oh.. como o exemplo da tarefa do *cupcake* quando estivamos nas aulas.

F: Sim, exato! Agora podemos construir uma tarefa para segunda expressão?

A: Esta expressão é uma função. Então podemos fazer como a tarefa da aula de explicação. "O pagamento mensal é \$2.00 e a inscrição é \$1.00. Quantos devemos pagar na explicação de 10 meses".

F: Está certo. Outros exemplos?

B: "O peso de João igual a dois vezes do peso do Mario mais um. Qual é o peso de João"

F: Não tem mais informações na sua tarefa?

----- (B não respondeu).

C: "O preço de 1 quilo de manga é \$2.00, se compramos esta manga devemos pagar mais \$1.00 para 1 saco de plástico. Quantos dólares devemos pagar por 3 quilogramas de manga e por 5 quilogramas de manga?"

F: Muito bom!

Tenho interesse de utilizar a tarefa que o colega B tinha começado "O peso de João igual a dois vezes do peso do Mário mais um. Qual é o peso de João". E agora vou completar com uma informação "Se a soma do peso do João e do Mário são 61 quilogramas, quantos são o peso do João".

---- (Os estudantes traduziram as informações na linguagem algébrica)

D: Então temos um sistema de equações lineares, professora.

F: E que é?

D: Se o peso do João é x, e o peso de Mário é y. O peso de João é duas vezes mais um do Mário, então $x = 2y + 1$ou $x - 2y = 1$.

A soma do peso do João e do Mário é 61, então $x + y = 61$. Temos $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + y = 61 \end{cases}$

F: Muito bom !

Podem construir outras tarefas que envolve sistema de equações lineares com duas incógnitas?

---- (Os estudantes construirem as tarefas)

B: Eu tenho, professora. "A idade da Ana é 7 anos mais velha da Maria. A soma de idade da Ana e da Maria é 43 anos. Qual a idade que a Maria tem?"

F: E qual é o sistema destas equações?

B: É $\begin{cases} y = x + 7 \\ x + y = 43 \end{cases}$

F: Muito bom! Outros exemplos da tarefa ?

D: Eu fiz também a tarefa de idade, professora.

F: Está bem, não tem problema. Força!

D: " 7 anos atrás, a idade do Pai é seis vezes da idade do João. Em próximos 4 anos, duas vezes da idade do Pai igual á cinco vezes mais 9 anos da idade do João. Quantos anos tem agora o Pai?"

F: Pode explicar como traduzir esta tarefa na linguagem algébrica?

D: Sim, professora

Por exemplo idade do Pai agora é A e a idade do João é B.

Então 7 anos atrás, a idade do Pai é A - 7 e a idade do João é B – 7.

"7 anos atrás, a idade do Pai é seis vezes da idade do João" então A – 7 = 6(B – 7).

Então A – 7 = 6B – 42, ou seja, A – 6B = - 42 + 7 = - 35.

Nos próximos 4 anos, a idade do Pai é A + 4 e a idade do João é B + 4.

"Nos próximos 4 anos, duas vezes da idade do Pai igual a cinco vezes mais 9 anos da idade do João", então 2(A + 4) = 5(B + 4) + 9 ou seja 2A – 5B = 21. E temos o sistema das equações lineares $\begin{cases} A - 6B = -35 \\ 2A - 5B = 21 \end{cases}$

F: Muito bem! E podemos resolver isto com vários métodos de resolução.

D: Sim, professora

C: Professora, tenho um exemplo da tarefa mas não com o sistema das equações lineares.

F: É bom, não todas as tarefas envolvidas as resoluções com o sistema das equações lineares.

Qual é o seu exemplo da tarefa?

C: O Pedro empresta o dinheiro no banco $1000.00. A cada mês deve devolver ao banco $100.00 mais 2% de juros. Quantos juros o Pedro deve pagar até ele devolver todo montante que tinha emprestado?

F: É bom exemplo!

C: Então posso resolver seguinte:

Em janeiro: juros é 2%, ou seja, 2% x 1000 = 20
Em fevereiro: o montante de crédito é 1000 -100 = 900 e juros é 2% x 900 = 18
Em março: o montante de crédito é 900 – 100 = 800 e juros é 2% x 800 = 16
Então progressão dos juros é 20, 18, 16, ..., 0
Podemos resolver com a progressão aritmética para determinar quanto meses o Paulo deve pagar.
$U_n = a + (n-1)b$, neste caso $U_n = 0;\ a = 20;\ b = -2$
Então $n = 1$
E depois aplicamos a fórmula da sucessão aritmética para obter o resultado.
F: Muito bom !

Na construção da tarefa, inicialmente, os estudantes referem (associam) os exemplos ou tarefas dadas nas ação formativa ou dos questionários. Mas no final da sessão conseguem construir as tarefas em vários contextos. Apoiando-se na experiência da entrevista clínica deste tema, identificou-se que os estudantes têm a capacidade de construir ou de modificar as tarefas. Eles apenas não estão habituados a ter de o fazer ou não tinham sido solicitados para construírem as tarefas.

4.4.5 Discussão dos resultados relativamente à caraterização psicométricas das tarefas do QF

Nesta secção apresentam-se algumas características psicométricas do QF que foi implementado na investigação. Esta análise envolve as mesmas características que utilizadas na análise do QI: os conteúdos avaliados por cada item de questionário; a estimação de índice de dificuldade dos itens de questionário; e a categorização das respostas obtidas baseada na categorização do nível de RA.

Na tabela que se segue, apresentam-se as classificações de todos os itens do questionário baseadas nas categorias do CDM sobre o RA para o Ensino Básico e para o Ensino Secundário. Em cada linha e coluna desta tabela apresenta-se a categorização do CDM que é considerado na análise e também a análise da validação do conteúdo deste instrumento.

Porém, neste trabalho não foram avaliadas as respostas dos futuros professores em todas as categorias propostas no modelo CDM. Como já se mencionou antes, não foi avaliada a faceta afectiva – relacionada com atitudes, motivações, emoções, e não foi avaliada a faceta ecológica que envolve aspetos do currículo ou materiais didáticos apoiados na aprendizagem da Álgebra.

Tabela 4.55 - Conteúdos avaliados por cada item do QF

CONTEÚDO DIDÁTICO	**CONTEÚDO ALGÉBRICO**					
	Estruturas		Funções		Modelação	
	Básica	Secundária	Básica	Secundária	Básica	Secundária
Epistémico (níveis de RA)	1d			2d; 2e; 2f		5a; 5b
Cognitivo (Significados pessoais)	1a; 1b; 1c			2a; 2b; 2c; 3a; 3b; 6a; 6b; 6c; 6d;6e		5c
Instrucional (situações e recursos)				3c;6f		4b;5d
Conteúdo algébrico (apenas conhecimento comum ou avançado)					4a	

No QF colocaram-se 5 questões para o Ensino Básico e 20 questões para o Ensino Secundário. A dimensão do conteúdo algébrico das tarefas do QF questiona-se em: 4 itens de estrutura; 14 itens de função; e 7 itens de modelação.

Relativamente ao conteúdo didático, ainda está dominado pelas questões cognitivas (14 itens) e distribuído pelos temas igualdade, sistema de equações lineares com duas incógnitas, padrão, sequência, função linear, família de funções lineares, e equação quadrática. Ao conteúdo didático dizem respeito ainda 6 questões da faceta epistémica sobre níveis do RA e os procedimentos utilizados na resolução das tarefas; 4 itens da faceta instrucional e 1 item do conteúdo algébrico, que é apenas o conhecimento comum.

Considerando o que foi apresentado anteriormente, conclui-se que a configuração das tarefas do QF foi baseada em todas as categorias do conteúdo algébrico (estrutura; funcional; e modelação), e em categorias do conteúdo didático: faceta epistémica, como reconhecimento algébrico e resolução com procedimento exclusivo aritmético ou algébrico; faceta cognitiva, como resolução de problema; faceta instrucional, como construção ou modificação da tarefa; faceta conteúdo algébrico (apenas conhecimento comum ou avançado), tendo em conta a proposta do CDM (Godino et al., 2015).

Apresenta-se, em seguida, uma estimação dos índices da dificuldade sentidas em cada item. Utiliza-se um grau de correção das resposta, em que se categoriza o valor 0 para uma resposta errada e o valor 1 para uma resposta correta. Depois, calcula-se a média de pontuação de cada item (por exemplo, no caso 1a., temos respostas certas 16; resposta errada_8; índice de dificuldade, 16/24). Tendo por base a média de pontuação de cada item, transformam-se estas pontuações em intervalo $[0-100]$. De seguida, interpreta-se um valor de 100 como sendo um indicador de que um item é muito fácil e um valor 0 é considerado como indicador para um item muito difícil.

Tabela 4.56 - Índice de dificuldade dos itens de QF

Item	**Índice de dificuldade**
1a. Balança de "*Angry Bird*". Resolução	79,2
1b. Balança de "*Angry Bird*". Interpretação	100
1c. Balança de "*Angry Bird*". Reconhecimento Álgebra	83,3
1d. Balança de "*Angry Bird*". Identificação do nível de RA	91,7
2a. Padrão e sequência de *lafatik*. Resolução	91,7
2b. Padrão e sequência de *lafatik*. Resolução	50
2c. Padrão e sequência de *lafatik*. Reconhecimento Álgebra	95,8
2d. Padrão e sequência de *lafatik*. Identificação do nível de RA	87,5
2e. Padrão e sequência de *lafatik*. Solução aritmética	91,7
2f. Padrão e sequência de *lafatik*. Solução algébrica	58,3
3a. Aulas de explicações da Matemática. Resolução	79,2
3b. Aulas de explicações da Matemática. Reconhecimento Álgebra	79,2
3c. Aulas de explicações da Matemática. Justificação	62,5
4a. Identificação de 1.ª expressão	75
Identificação de 2.ª expressão	83,3
Identificação de 3.ª expressão	70,8
4b. Enunciação de problema de 1.ª expressão	66,7
Enunciação de problema de 2.ª expressão	16,7
Enunciação de problema de 3.ª expressão	50
5a. Área do triângulo retângulo. Resolução	83,3
5b. Área do triângulo retângulo. Identificação do nível de RA	79,2
5c. Área do triângulo retângulo. Reconhecimento Álgebra	100
5d. Área do triângulo retângulo. Enunciação da tarefa algébrica	4,2
6a. Família da função linear. Resolução	70,8
6b. Família da função linear. Resolução	66,7
6c. Família da função linear. Resolução	62,5
6d. Família da função linear. Resolução	54,2
6e. Família da função linear. Reconhecimento Álgebra	100
6f. Família da função linear. Enunciação da tarefa algébrica	0

Relativamente às respostas dos estudantes nas questões do conteúdo algébrico, encontra-se um elevado dos número de respostas corretas em todos tipos de tarefa (estruturas, funções e modelação). Na tarefa estrutura sobre a igualdade da balança (1a), com índice de dificuldade 79,2, identifica-se uma aumento do número das respostas corretas quando comparando com as respostas de mesmo tipo da questão no QI (1a) que á 66,7. A mesma situação também ocorre na tarefa sobre função, ilustrada pelo problema de *lafatik*, quando se questionam as quantidades de flores que poderiam construir a partir de 37 *tali tahan*. No QI (2b) o índice de dificuldade desta questão é 50 e no QF (2a) o índice aumento em 91,7.

O aumento do índice de dificuldade também se verifica na tarefa da modelação onde se solicita a identificação de três expressões algébricas, como se apresenta na seguinte tabela:

Tabela 4.57 - Comparação do índice de dificuldade relativamente à tarefa sobre identificação de expressões algébrica (tarefa 4 QI e tarefa 4 QF)

Expressões	Índice de dificuldade	
	QI	QF
$4x + 5 = 25$	87,5	75
$y = 2x + 1$	45,5	83,3
$P = 2c + 2l$	8,3	70,8

As questões algébricas que os estudantes consideram fáceis são: aulas de explicações (79,2); área de triângulo retângulo (83,3); e família de funções lineares (70,8).

Relativamente ao CDM da faceta epistémica, verificou-se um maior índice de dificuldade relativamente: à identificação do nível de RA na tarefa sobre balança (91,7); à identificação do nível de RA na tarefa sobre padrão e sequência de *lafatik* (87,5); e à resolução da tarefa sobre padrão e sequência de *lafatik* com o procedimento aritmético (91,7).

O maior índice de dificuldade também surge nas questões relacionadas com a faceta cognitiva sobre interpretação da balança (100), ou seja, todos os estudantes conseguem interpretar corretamente o conceito da balança. No reconhecimento dos conceitos algébricos que estão envolvidos nas resoluções da tarefa, encontra-se também um elevado índice de dificuldade: 83,3 na tarefa sobre balança de “Angry Bird”; 95,8 na tarefa sobre padrão e sequência de *lafatik*; 79,2 na tarefa sobre aulas de explicações; 100 na tarefa da área do triângulo retângulo; e 100 na tarefa sobre família de funções lineares.

As questões sobre a enunciação da tarefa são as questões que foram consideradas mais difíceis para os estudantes. Esta realidade é revelada pelo baixo índice de dificuldade: 16,7 na enunciação de problema da expressão $y = 2x + 1$; 50 na enunciação de problema da expressão $P = 2c + 2l$; 4,2 na enunciação da tarefa relacionada à área de triângulo retângulo; e 0 na enunciação da tarefa sobre a família da função linear.

Na tabela 4.58 apresenta-se a categorização dos níveis de RA das respostas dos estudantes relativamente aos 11 itens das questões sobre o conhecimento algébrico.

Tabela 4.58 - Categorização das respostas do QF baseando-se na categorização do nível de RA (Godino et al., 2015)

Tarefa	Resposta Correta							Resposta Errada
	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	Nível 4	Nível 5	Nível 6	
1ª		1		18				5
2ª	5	4		13				2
2b	1			11				12
3a	14	1		3	1			5
4a, 1.ª expressão				18				6
4a, 2.ª expressão				20				4
4a, 3.ª expressão				17				7
5a			20					4
6c					8	7		9
6d					10	3		11
Total	20	6	20	100	19	10		65

Na tabela acima, pode-se observar o baixo número de repostas erradas (RE = 65; RC= 175). A maioria das respostas erradas pertencem às questões relativas à explicação dos efeitos de parâmetros (questão 6c e questão 6d) e à questão relacionada com as várias possibilidades de resolução do problema (2b).

Relativamente à categorização do nível de RA que se manifesta nas respostas corretas dos estudantes, verifica-se que a maioria destas respostas são de nível 3 (100 respostas) e apenas 6 respostas de nível 1. Mesmo assim, ainda se encontram 20 respostas do nível 0 de RA, que está indicado pela utilização da linguagem natural e sem realização da operação algébrica, ou apenas 1 apresentação do resultado final sem justificação: 14 na tarefa das aulas de explicações; 5 na tarefa do padrão e sequência de *lafatik*; e 1 na resolução da tarefa do padrão e sequência de *lafatik* com várias resoluções.

Identifica-se, também, uma manifestação do nível de RA mais avançado (nível 5 de RA) onde se envolve uma generalização baseada na observação gráfica relativamente aos efeitos do parâmetro a e b nos gráficos da função linear (tarefa 6). São 7 respostas para o efeito do parâmetro a e 3 respostas para o efeito do parâmetro b. Mesmo assim, nestas questões, ainda predominam as respostas sem envolvimento de uma generalização (nível 4), que se mostra nas 8 respostas para o efeito do parâmetro a e nas 10 respostas para o efeito de parâmetro b.

Com base nesta análise, uma apreciação aos resultados do QF indica uma progressão da compreensão dos estudantes em todos tipos de tarefas algébricas (estruturas, funções e modelação) e também na compreensão do CDM depois de frequentar a ação de formação. Mesmo assim, ainda se verificam dificuldades dos estudantes, em particular na enunciação das tarefas considerando-se que esta habilidade é muito importante para os futuros professores.

Capítulo V – Considerações finais

Este último capítulo apresenta uma breve síntese do estudo, bem como as principais conclusões a retirar, acrescentando-se ainda uma reflexão final. As conclusões dizem respeito às respostas das questões de investigação e envolvem, também, as implicações retiradas da ação formativa para o desenvolvimento do conhecimento algébrico e para o conhecimento didático dos futuros professores de Matemática timorenses. Apresentam-se igualmente as limitações deste estudo e, finalmente, são deixadas algumas sugestões e questões abertas que servirão para futuras investigações.

5.1 Síntese do estudo

O presente estudo teve como objetivo principal compreender o desenvolvimento do raciocínio algébrico (RA) e do conhecimento didático-matemático (CDM) de futuros professores do 3.º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário timorenses, no âmbito de uma experiência de formação, de carácter exploratório, num contexto de formação inicial. Deste objetivo surgiram três questões de investigação: (1) Que conhecimentos têm os futuros professores timorenses sobre o RA?; (2) Quais as dificuldades na aprendizagem de Álgebra (tipologia de erros) que os futuros professores timorenses apresentam em relação aos procedimentos utilizados na resolução de tarefas algébricas?; (3) Que conhecimentos didático-matemáticos têm os futuros professores timorenses na sua formação inicial?

O quadro teórico engloba três conteúdos principais: o RA que inclui, também, os níveis do RA das atividades matemáticas no Ensino Básico e no Ensino Secundário; as dificuldades na aprendizagem da Álgebra; e o modelo do CDM. Na descrição sobre o RA discute-se as características do RA, designadamente a resolução de problemas usando a notação algébrica (Carraher & Schliemann, 2007) e os processos de generalização de ideias matemáticas (Blanton & Kaput, 2005, 2011; Kieran, 2004, 2007). Alarga-se a descrição do RA, envolvendo-se a concepção de raciocínio algébrico a partir da perspetiva da EOS (Aké, 2013), que se discute sobre “Razonamiento Algebraico Elemental” (RAE) para interpretar Álgebra nos primeiros anos de escolaridade e, também, a descrição sobre a caracterização do RA dos alunos no nível básico e no nível secundário (Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2013; Godino et al., 2015), que se baseia no EOS.

O presente estudo envolveu uma discussão sobre as dificuldades (erros) que os estudantes manifestam na aprendizagem da Álgebra, nomeadamente: dificuldades na transição da Aritmética para a Álgebra (Ponte, 2006); dificuldades na interpretação das letras (Kieran, 1992; Fernandes & Soares, 2003; 2014); dificuldades na simplificação de expressões algébricas e na resolução de equações do 1.º grau (Booth, 1984, 1988; Kieran 1985, 1992; Kuchemann, 1981; MacGregor e Stacey, 1997; Socas, Machado, Palarea & Hernandes, 1996; Lima & Tall, 2008; Vlassis, 2001); dificuldade na compreensão e na notação de funções (Ponte, Branco & Matos, 2009; Sajka, 2003).

Neste trabalho discutiu-se, também, o modelo de CDM (Godino, Batanero, Font & Giacomone, 2016) como uma ferramenta do sistema de categorias de análise do conhecimento de matemática e didática do professor, que são complementadas e desenvolvidas com elementos do EOS (Godino, 2009).

No quadro teórico ficaram-se aspetos que dizem respeito à aprendizagem da Álgebra e o que envolve a formação inicial, em particular no que respeita ao conhecimento em Álgebra. Nesta discussão sublinhou-se a importância de que os estudantes, na sua formação inicial, devem ter um conhecimento que possa promover uma criação de situações do ensino para desenvolver o pensamento algébrico nos seus futuros alunos (Branco & Ponte, 2001, 2013; Magiera, van den Kieboom & Moyer, 2011; Carraher & Schliemann, 2007).

Este estudo teve por base a realização de uma ação formativa que procurou promover a articulação entre conteúdo algébrico e didático, visando o desenvolvimento do conhecimento de futuros professores na Álgebra e no seu ensino. A ação formativa realizou-se numa turma de 24 estudantes que frequentavam o 4.º ano do curso de Licenciatura no Ensino da Matemática, da Universidade Nacional de Timor Lorosa'e. A ação formativa foi realizada em várias sessões, na sala de aula, envolvendo a apresentação da matéria e a discussão das tarefas de natureza algébrica.

A investigação realizada neste trabalho utilizou uma metodologia de natureza mista, assumindo um carácter explorativa. A recolha de dados foi realizada através da aplicação de: (1) dois questionários que envolveram tarefas de natureza algébrica e questões do

CDM (um antes da ação formativa - QI, e outro após da ação formativa - QF); (2) fichas de trabalho que foram aplicadas aos grupos de estudantes durante a realização da ação formativa; (3) entrevistas clínicas a 4 grupos com alguns estudantes, com base nos resultados do QF.

Para responder às questões desta investigação, foi realizada uma análise das respostas dos estudantes a dois questionários. Num primeiro momento, foi feita a análise de frequências simples sobre o grau de correção das respostas dadas pelos estudantes, sobre as diferentes estratégias utilizadas na resolução de problemas baseadas nos níveis do RA. De seguida, foi realizada uma análise descritiva utilizando ferramentas da EOS para identificar os objetos e processos algébricos envolvidos nas resoluções das tarefas e também para identificar as dificuldades manifestadas nas respostas dos estudantes.

5.2 Conclusões sobre as questões da investigação

Neste estudo pode-se destacar a importância do EOS, proposta teórica de Godino, Batanero e Font (2009), no apoio relativamente à fundamentação teórica e à metodologia. Neste sentido, os contributos EOS, com as suas características, foram tidos em conta na planificação, implementação, análise e avaliação desta investigação. Estiveram presentes na criação de guias e critérios visando, além da elaboração dos instrumentos de análise dos dados da investigação, também no planeamento de uma proposta curricular da ação formativa.

A resolução de problemas de natureza algébrica foi uma componente importante relativamente aos dados analisados sobre o conhecimento algébrico, tendo por base o EOS. A análise da resolução de problemas nos trabalhos escritos dos estudantes permite identificar o desenvolvimento do RA que manifesta pela utilização de objetos algébricos, transformações e linguagem (Godino et al., 2015). As facetas do CDM – epistémica, cognitiva e instrucional (Godino et al., 2015) – foram destacadas neste trabalho e serviram igualmente de componentes de análise do conhecimento didático dos estudantes.

Portanto, neste momento é necessário sintetizar as conclusões obtidas sobre o cumprimento dos objetivos da investigação propostas, bem como as questões de investigação (Q), no que diz respeito ao desenvolvimento do RA e do CDM de futuros professores timorenses.

Q -1. Que conhecimentos têm futuros professores timorenses sobre o RA?

A análise dos dados relativos ao trabalho realizado pelos estudantes nos dois questionários (antes e depois da ação formativa) permite identificar o contributo da ação formativa para o desenvolvimento do RA dos estudantes, ou seja, na sua capacidade de envolver os objetos e os processos algébricos na resolução das tarefas, no âmbito dos diferentes componentes algébricos (estrutura, função e modelação).

A análise das respostas ao QF e o confronto com as respostas ao QI possibilitam a identificação de situações em que os estudantes revelam compreensão e capacidade de raciocínio sobre a generalização e pontos em que seria desejável promover uma compreensão mais aprofundada dos conceitos algébricos envolvidos nos seguintes componentes:

1. Estruturas.

Antes da realização da ação formativa, a maioria dos estudantes realizaram um cálculo numérico para resolver a tarefa (tarefa 1 do QI – Balança do sumo) que envolve o conceito de equivalência. Uma grande percentagem dos estudantes (58,3%) apenas apresentaram o resultado final sem argumentação. Neste caso, existiu a possibilidade dos estudantes utilizarem a estratégia de tentativa erro para resolver tarefa ou apenas observaram a figura, exibindo as balanças.

Além disso, na avaliação inicial, verifica-se a preocupação do maior dos estudantes (87,5 %) na resolução do sistema das equações lineares com duas incógnitas em forma geral, tendo utilizado exemplos particulares para resolver a tarefa.

A exploração e discussão, durante a ação formativa, de situações que envolvem quantidades desconhecidas possibilitou a utilização de objetos e processos algébricos. Os estudantes estabeleceram relações lineares e atribuíram significado, de acordo com as situações, às diferentes operações que efetuaram, associando o processo seguido à determinação das quantidades desconhecidas. Por exemplo, na situação de compra da comida (tarefa 6 da atividade prática 1) e balança de *cupcake* (tarefa 3 da atividade prática 3).

No final da ação formativa, os conhecimentos dos estudantes evoluíram. Esta realidade manifestou-se pelo grande número de respostas corretas (79,2 %), envolvendo símbolos e processos algébricos na resolução da tarefa. Neste caso tratou-se do envolvimento do método da resolução de sistema das equações lineares com três incógnitas, onde o método misto (utilização em conjunto o método da eliminação e da substituição) foi o método mais escolhido pelos estudantes para resolver a tarefa. Apesar desta progressão, considera-se preocupante o facto de os estudantes não conseguirem manifestar na resposta a utilização de outros procedimentos de resolução, como por exemplo, através da regra de Cramer ou com a Matriz Ajunta que já tinham sido estudadas na Unidade Curricular de Álgebra I sobre a Álgebra Matriz.

O envolvimento dos objetos e dos processos algébricos manifestados nas respostas dos estudantes no QF implica a mudança da categorização dos níveis de RA, neste caso foi o nível 3, manifestando pelo envolvimento da linguagem simbólica, objetos indeterminados ou variáveis e procedimentos da resolução de sistema equações lineares com três incógnitas, comparando com as respostas dos estudantes no QI que a maioria deles categorizados no nível 0 de RA pela utilização da linguagem natural, sem o envolvimento da operação algébrica.

Assim, neste estudo verificou-se a importância das tarefas sobre estruturas que promovem o desenvolvimento da compreensão dos estudantes relativamente à possibilidade de resolução de uma mesma situação com diferentes métodos de resolução, pela utilização (ou não) da linguagem algébrica, recorrendo a equações e sistemas de equações que envolvem a seleção das estratégias mais eficientes na resolução de problemas.

2. *Funções*

Antes da ação formativa, na resolução da tarefa 2 (Padrão e sequência de *lafatik*) a maioria dos estudantes (83,3 %) realizaram a observação da figura e fizeram uma contagem de objetos para identificar o termo da sequência. Não conseguiram identificar nem o padrão nem o termo gerador da sequência. Os estudantes apenas identificaram as diferenças entre dois termos sucessivos que usaram para determinar termos da sequência.

Depois da ação formativa, os estudantes melhoram significativamente a sua capacidade para utilizar os objetos e processos algébricos, para generalizar e para expressar algebricamente essa generalização. Os estudantes utilizaram várias estratégias, tais como, o registo numa tabela, para facilitar o processo de generalização, ou seja da identificação do termo gerador das sequências, ou expressando algebricamente a relação entre o padrão e a sequência numérica associada à sequência de figuras. Assim, este estudo revelou também o contributo positivo do trabalho realizado pelos estudantes para a melhoria das suas capacidades de utilização dos objetos e processos algébricos, neste caso padrão, sequência e o significado da variável, conhecimentos importantes para os futuros professores (Blanton, Levi, Crites, Dougherty & Zbiek, 2011).

O registo dos dados numa tabela foi uma estratégia que a maioria dos estudantes utilizou para resolver a tarefa da situação-problema de "Aulas de explicação da Matemática" (tarefa 3 – QF), em vez de utilizarem a tabela como um meio para chegar a uma forma da função linear, como se pretendia nesta tarefa (neste caso, seria a resposta que manifestaria o nível 4 do RA).

Relativamente à capacidade de interpretação de situações representadas graficamente, os estudantes, antes da ação formativa, mostraram ter um conhecimento, mais formal, baseado na memorização, do que tinham aprendido sobre os efeitos dos valores atribuídos ao parâmetro a na função quadrática $y = ax^2$, na representação gráfica da função. Ou seja, sabiam que o gráfico tem a concavidade voltada para cima se $a > 0$ e tem a concavidade voltada para baixo, no caso de $a < 0$) e não conseguiram identificar os efeitos do parâmetro noutras situações ($a > 1$ e $0 < a < 1$). Durante a realização da ação formativa os estudantes representaram funções, exemplos de várias famílias de funções polinomiais com recurso ao programa *GeoGebra* e observaram os efeitos da variação dos parâmetros na família dessas funções. A experiência de representarem e de observarem os gráficos de vários exemplos de determinada família de funções ajudou os estudantes a melhorarem os conhecimentos deste tema.

3. *Modelação*

A identificação das expressões algébricas envolvidas num contexto de modelação, que neste caso são os conceitos de equações e de funções, foi uma tarefa proposta tanto no QI como no QF. Através desta tarefa, identificaram-se os conhecimentos dos estudantes relativamente aos símbolos de letras (variáveis) que desempenham papéis diferentes em diferentes expressões (incógnitas ou variáveis), e também relativamente ao significado do sinal de igual como uma equação $(4x + 5 = 25)$ ou uma especificação ou definição $(y =$

$2x + 1\,; P = 2c + 2l$). Antes da ação formativa, a maioria dos estudantes (87,5 %) consegui identificar a expressão $4x + 5 = 25$ como uma equação linear e 45,8 % dos estudantes conseguiram didentificar a expressão $y = 2x + 1$ como uma função linear, mas apenas 8,3 % dos estudantes que identificaram a expressão $P = 2c + 2l$ como uma fórmula do perímetro do retângulo. A realização da aula letiva sobre os objetos e processos algébricos básicos (sessão 2 da ação formativa) foi um incentivo para melhorar a compreensão dos estudantes sobre este tema. Este efeito positivo é revelado pelo grande número de estudantes que conseguiram identificar os significados destas três expressões.

As tarefas envolvendo situações reais foram consideradas muito difíceis para os estudantes. No questionário inicial, os estudantes não apresentaram qualquer solução para as tarefas deste tipo. Esta dificuldade revela a falta de envolvimento anterior em processos matemáticos importantes, tais como: traduzir da linguagem natural para linguagem matemática, descrever uma situação-problema, resolver o problema, interpretar e representar relações quantitativas.

Durante a ação formativa foram realizadas várias atividades que envolveram trabalhos com modelação Matemática, como por exemplo: uma sessão sobre modelação matemática (sessão 4); tarefas e sua discussão (por exemplo, na tarefa sobre o modo de transporte na sessão 8); e atividades práticas, envolvendo modelação matemática, como por exemplo, as tarefas sobre o custo de almoço e o movimento do *kayak*, que constam também no QI. As várias atividades que envolveram tarefas de modelação ajudaram os estudantes a conhecer e a trabalhar com este tipo de tarefas. Estas atividades tiveram como resultado uma diferença positiva entre o número dos estudantes que responderam corretamente à tarefa, envolvendo situações reais, no QF sobre "Área do triângulo retângulo" (índice de dificuldade: 83,3%), comparando-se com o QI nas tarefas "Custo de almoço", "Movimento de *kayak*" e "Taxa de imposto do salário" em que nenhum dos estudantes apresentou uma resposta correta (índice de dificuldade 0%).

No questionário final, os estudantes conseguiram encontrar um modelo matemático para a situação proposta, neste caso tratou-se da identificação dos perímetros do triângulo retângulo, ou seja, recorreram à estratégia que tem por base o estabelecimento de relações, revelando capacidade de generalização (Kaput, 2008).

Q2 - Quais as dificuldades (tipologia de erros) que os futuros professores timorenses apresentam em relação aos procedimentos utilizados na resolução de tarefas algébricas?

O objetivo desta questão é identificar as dificuldades (sob forma de erros) que os estudantes manifestaram nos trabalhos escritos relativamente ao envolvimento de algoritmos, operações, técnicas de cálculo na resolução de problemas (Godino, Batanero & Font, 2007). Neste estudo, os estudantes revelam então três principais dificuldades que se explicam próximos parágrafos: ao nível da tradução da linguagem verbal para a linguagem algébrica; ao nível da identificação e interpretação dos símbolos; e, por fim, ao nível da generalização dos efeitos de parâmetros na família das funções.

1. Tradução da linguagem verbal para a linguagem algébrica.

A tradução da linguagem verbal para a linguagem algébrica foi uma grande preocupação, tanto no início como no final da ação formativa, considerando que a dificuldade nesta tradução teve implicações na compreensão dos estudantes sobre a situação-problema da tarefa.

Neste estudo, a dificuldade na tradução da linguagem resulta da falta de compreensão dos estudantes nos enunciados em linguagem natural, dificuldades também identificadas noutros estudos (Ponte, Branco & Matos, 2009). No caso dos estudantes timorenses, a dificuldade com a língua portuguesa também foi um problema fundamental para a compreensão dos enunciados. Esta dificuldade na compreensão da língua, afetou, consequentemente, a capacidade em efetuar a tradução da linguagem verbal para a linguagem Matemática.

A realização de uma entrevista clínica sobre a tradução da linguagem verbal para a linguagem algébrica foi iniciativa desenvolvida com o objetivo de superar esta dificuldade. Nesta entrevista clínica envolveram-se duas tarefas do QF sobre estrutura (Balança de *Angry Bird* - tarefa 1) e função (Aulas de explicações da Matemática - tarefa 3). No diálogo que ocorreu durante esta entrevista, a formadora teve a oportunidade de encaminhar e dar orientações aos estudantes (Tavares, 2000) no processo de tradução, como por exemplo, na compreensão dos enunciados da tarefa, na identificação da incógnita ou variável e na tradução do resultado final (linguagem algébrica) da tarefa para a linguagem verbal.

2. Identificação e interpretação dos símbolos

A identificação e interpretação dos símbolos como representações das informações dadas na tarefa foram as preocupações dos estudantes antes e depois da ação formativa. Nas suas respostas ao questionário inicial, os estudantes manifestam estas dificuldades do seguinte modo: pensar termos não semelhantes como o significado de um termo qualquer $b_1 + b_2 = b$ (Kieran,1985; Ponte, Branco & Matos, 2009); interpretar incorretamente Monómios do 1.º grau $-3y = -3 + y$ (Booth, 1984; Ponte, Branco & Matos, 2009); apresentar erro no uso de parêntesis $2(2 - y) = 4 - y$ (Ponte, Branco & Matos, 2009; Kieran, 1992; Booth, 1988; Socas, Machado, Palarea & Hernandes, 1996); apresentar erro na eliminação de termos semelhantes $y - 4y = 5y$ (Kieran, 1992; Ponte, Branco & Matos, 2009); entre outros. Esta realidade é preocupante, considerando que estes estudantes são finalistas deste curso e irão realizar estágios dentro de pouco tempo.

A realização da sessão letiva sobre os objetos e processos algébricos foi um esforço para responder às necessidades dos estudantes e aprofundar os seus conhecimentos sobre este tema. Na sessão letiva a formadora explicou a matéria sobre este tema, para além de dinamizar a discussão e uma atividade prática sobre objetos e processos algébricos de forma a ajudar os estudantes a aprofundarem os seus conhecimentos. Mesmo assim, nas respostas ao questionário final ainda se encontram, ainda que em menor número (16,6%), estudantes com esta dificuldade. Aqui a dificuldade reside na compreensão do conceito de operação e das propriedades das radicais, por exemplo: $\sqrt{12 - p} = 2\sqrt{3} - \sqrt{p}$. Essa simplificação, na verdade, é "*visually attractive*" ou visualmente atraente, como mencionam Kirschner e Awtry (2004). Neste caso, o estudante está raciocinar para obter a raiz quadrada dos monómios "por partes".

3. Generalização os efeitos de parâmetros na família das funções.

Neste estudo verificaram-se as dificuldades dos estudantes, antes da ação formativa, na generalização sobre os efeitos de parâmetro na família de uma função. A maioria dos estudantes consegue fazer o esboço dos gráficos mas apresenta dificuldades na interpretação do papel do parâmetro nas propriedades da família de função.

Com o intuito de dar resposta às necessidades dos estudantes na visualização dos gráficos de função, durante a sessão dos objetos e processos algébricos sobre a função

(Sessão 3) e na atividade prática 3, desenvolvidas durante a ação formativa, foram realizadas discussões que envolveram a utilização do programa *GeoGebra*. Todos os estudantes participaram nestas discussões, mesmo que nem todos tivessem conhecimento sobre como construir os gráficos com este programa.

No final da ação formativa os estudantes conseguiram construir e identificar os gráficos relativamente às expressões dadas. Mesmo assim, a maioria destes estudantes ainda denota dificuldades em generalizar os efeitos dos parâmetros de função.

O envolvimento da tecnologia educativa (neste caso, do programa matemático *GeoGebra*) permitiu aos estudantes trabalharem no conhecimento didático, particularmente na faceta mediacional (Godino, 2011) que poderá influenciar positivamente o processo de ensino e aprendizagem, ajudando mesmo no desenvolvimento da compreensão dos alunos e na estimulação do seu interesse. Portanto, os estudantes, na sua formação inicial, devem desenvolver as suas competências no domínio da utilização da tecnologia na sala de aula de Álgebra, valorizando-a e percebendo-a como uma ferramenta que pode facilitar e motivar a aprendizagem dos seus futuros alunos (Kieran, 1992; Ponte, 1994).

Q – 3. Que conhecimentos didático-matemáticos têm os futuros professores timorenses sobre o RA?

Através da realização da avaliação inicial, antes da ação formativa, conseguiu-se diagnosticar a falta dos conhecimentos dos estudantes relativamente ao CDM. Nesta avaliação, os estudantes mostraram dificuldades no CDM, em particular na identificação do significado do sinal da igualdade, na identificação dos conhecimentos algébricos envolvidos na resolução da tarefa e na construção de uma tarefa. Esta realidade foi uma preocupação ao longo deste estudo: os estudantes participantes são finalistas que tinham frequentado as várias unidades curriculares que se debruçam sobre o conhecimento pedagógico, como por exemplo, "Estudo do Currículo de Matemática" e "Metodologia do Ensino da Matemática". Isto significa que devem dominar os conhecimentos algébricos escolares (ensinados nas escolas) e que devem ser capazes de construir as tarefas que serão um meio para avaliar a aprendizagem dos alunos, considerando que irão realizar o estágio em breve. Considera-se, também, que o curso da Licenciatura do Ensino da Matemática não estabelece uma unidade curricular que permita aos estudantes ter esses conhecimentos.

Portanto, nesta investigação realizaram-se várias sessões na ação formativa como resposta a esta lacuna, oferecendo sessões letivas sobre objetos e processos algébricos básicos; e sessões letivas e discussões sobre o modelo do RA para o Ensino Básico e o Ensino Secundário. A realização das sessões referidas contribuiu para, de alguma forma, dar uma resposta às necessidades demonstradas pelos estudantes no CDM manifestado na avaliação inicial. Neste estudo, identificaram-se então mudanças (antes e depois da ação formativa) tendo em conta as facetas epistêmica, cognitivo e instrucional.

1. *Epistémica*

Antes da ação formativa, existia um baixo número de alunos capazes de identificar os conhecimentos algébricos envolvidos na resolução das tarefas e nas possibilidades de resolver uma tarefa com o procedimento aritmético ou com o procedimento didático. Neste caso, os estudantes não tinham o conhecimento sobre quais os procedimentos algébricos e os procedimentos aritméticos adequados, e quais as diferenças entre eles.

Durante e depois da ação formativa, os conhecimentos dos estudantes relativamente esta faceta foram evoluindo. Esta realidade é indicada pelo maior número dos estudantes que conseguiram identificar os conhecimentos que se envolvem nas resoluções das tarefas propostas e na identificação do nível do RA envolvido nas suas resoluções. No final da ação formativa, a maioria dos estudantes conseguiu explicar corretamente os procedimentos ou as estratégias que foram utilizadas para resolver o problema.

A ação formativa permitiu aos estudantes, futuros professores, trabalhar questões do raciocínio matemático, em especial o raciocínio algébrico e a categorização de níveis com as suas caraterísticas. Por exemplo, na tarefa 2 do QF, os estudantes deveriam apresentar no mínimo duas soluções diferentes e identificar os níveis do RA baseados nas distinções de natureza ontossemiótica – objetos, transformações e linguagem (Godino et al., 2015) – que envolvessem as suas resoluções.

2. *Cognitiva*

Antes da ação formativa, os estudantes, tinham dificuldade em associar o conceito de balança com o conceito de igualdade como equivalência de expressões por falta de domínio dos conceitos básicos da Matemática. Esta preocupação também se identificou nas respostas destes estudantes na identificação dos métodos que podiam utilizar para resolver o sistema das equações lineares com duas incógnitas. Os métodos de substituição, eliminação e misto, são os mais utilizados na resolução do sistema das equações lineares.

A sessão letiva sobre os objetos e processos algébricos realizados na ação formativa contribuiu significativamente para promover a compreensão dos estudantes sobre este tema. No final da ação formativa, os estudantes conseguiram identificar os conhecimentos matemáticos utilizados na resolução de várias tarefas, tais como: igualdade, equação, sistema de equações, método de resolução do sistema de equações lineares (tarefa "Balança de Angry Bird"); padrão, regularidade, sucessão e progressão (tarefa "Padrão e sequência de lafatik"); função linear, gráfico de função linear (tarefa "Aulas de explicações da Matemática"); teorema de Pitágoras, equação quadrática e métodos de resolução da equação quadrática com factorização ou fórmula de *Bhaskara* (tarefa "Área do triângulo retângulo "); função linear e família de funções lineares (tarefa "Família da função linear").

3. *Instrucional*

Os estudantes manifestam, tanto no início como no final do estudo, dificuldades na construção ou na modificação das tarefas. Alguns deles, os que tentaram construir os exemplos de tarefa, apresentaram tarefas do tipo de cálculo algébrico em vez de apresentarem tarefas do tipo de resolução de um problema. Esta realidade comporta uma grande preocupação relativamente ao domínio do conhecimento didático-matemático ao nível do tipo de construção ou modificação de uma tarefa, acentuando-se a importância de que os futuros professores devem efetivamente ter este tipo de conhecimento para que consigam ensinar os seus futuros alunos.

A falta de conhecimento didático-matemático também foi identificada através da dificuldade dos estudantes (antes e depois da ação formativa) em se pronunciarem sobre a adequação da tarefa para apresentar aos alunos do Ensino Secundário. Esta realidade é uma indicação da pouca atenção dada na formação inicial à interligação entre as disciplinas aprendidas na formação de professores e os temas no currículo no Ensino Secundário.

5.3 Limitação do estudo e sugestões para futuras investigações

O presente trabalho explorou aspetos do conhecimento algébrico (estruturas, funções e modelação) e analisou o desenvolvimento do conhecimento dos estudantes relativamente aos aspetos mencionados. Todavia, e considerando as limitações dos conhecimentos destes estudantes na Álgebra avançada, não foi possível explorar o conhecimento algébrico avançado, aquele que contempla os níveis de RA mais avançados.

A ação formativa realizada neste trabalho permitiu responder às questões de investigação, dados os conflitos de identificação dos conhecimentos algébricos e do conhecimento didático dos futuros professores. Considera-se, ainda, a existência da necessidade (para futuras investigações) da criação de instrumentos de avaliação mais sistemáticos e abrangentes, com tarefas de resolução de problemas que possam promover o desenvolvimento de níveis elevados de RA através de tarefas adequadas a esse fim, nomeadamente através da resolução de problemas.

Os resultados deste estudo manifestam a pertinência de explorar o conhecimento didático-matemático, como sugerido por Godino (2009), envolvendo as facetas epistémica, cognitiva e instrucional. Reconhece-se que teria sido benéfico ter podido envolver as outras facetas: afetiva, relacionada com atitudes, motivações, emoções; faceta ecológica, envolvendo aspetos do currículo ou materiais didáticos de apoio à aprendizagem da Álgebra; e a mediacional, que se refere ao uso dos recursos tecnológicos.

A realização da entrevista clínica foi uma estratégia útil para este estudo, tendo em conta o seu papel para auxiliar os estudantes a ultrapassarem as suas dificuldades nos vários conhecimentos matemáticos e também nos conhecimentos didáticos. Considerando que esta entrevista constituiu um meio relevante quer para a recolha de dados quer para a promoção do desenvolvimento do conhecimentos dos estudantes, teria sido importante que tivessem terem decorrido em vários momentos desta investigação (antes, durante e depois da ação formativa).

O resultado deste trabalho mostra que existe uma efetiva necessidade de os futuros professores terem uma formação adequada que lhes permita desenvolver as competências didático-matemáticos em atividades que envolvem o raciocínio algébrico, básico e secundário. Considera-se que em Timor-Leste as reformas recentes na disciplina de

Matemática, quer no Ensino Básico quer ao nível do Ensino Secundário Geral, exigem conhecimentos da Álgebra, pelo que esta formação deve promover a capacidade de integrar o conhecimento dos conteúdos e processos matemáticos e a especificidade de ensinar. Este desenvolvimento do conhecimento algébrico deve ser feito "integrando conteúdos e pedagogia e ensinando os futuros professores do mesmo modo que se espera que eles ensinem os seus alunos" (Ponte & Chapman, 2008). Portanto, este estudo sugere ao Departamento do Ensino da Matemática da UNTL que procure estabelecer uma unidade curricular de Didática da Matemática para responder à necessidade dos futuros professores nesta temática. Além disso, sugere-se que se dê particular atenção à unidade curricular que desenvolve o conhecimento dos futuros professores sobre as temáticas lecionadas tanto no Ensino Básico como no Ensino Secundário.

A realidade de não existir um documento legal que sirva de referência relativamente ao programa curricular da Matemática do 1.º, 2.º e 3.º ciclo do Ensino Básico foi uma limitação deste estudo, em particular na exploração dos temas matemáticas para estes ciclos. Considera-se que este é um documento essencial e que auxilia o trabalho, tanto para os professores como para os investigadores. Assim, o presente estudo sugere ao Ministério da Educação e Cultura de Timor-Leste que crie o documento referido para responder às necessidades de ter uma base de orientação do ensino dos professores e para investigações futuras sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática em Timor-Leste.

Relativamente aos níveis de raciocínio algébrico, estes devem ter implicações também na formação de professores, tanto no Ensino Básico e Secundário. Não é suficiente no desenvolvimento de propostas curriculares (NCTM, 2008) a inclusão de Álgebra desde os primeiros níveis de ensino; o professor é obrigado a agir como agente principal da mudança na introdução e desenvolvimento do raciocínio algébrico na sala de aula elementar e estabelecer a sua progressão no ensino secundário. Assim, o reconhecimento de objetos e processos de pensamento algébrico pode ajudar a identificar características de práticas matemáticas em que os professores podem intervir para aumentar, gradualmente, os níveis de RA da atividade matemática dos seus alunos.

Considerando-se as várias limitações deste estudo, recorda-se Eichelberger (1989, citado em Afonso, 2005, p. 21): "Somos incapazes de produzir verdade, só produzimos conhecimento". Na Matemática, se o conhecimento produzido for consistente, alicerçado em conceitos matemáticos bem compreendidos e apoiado num raciocínio algébrico, se edificam as bases para alcançar sucesso na aprendizagem da Álgebra.

Referências

Abrantes, P. (2001). Avaliação das Aprendizagens: das Conceções às Praticas. Lisboa: *Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.* Acedido de: https://guinote.files.wordpress.com/2017/04/refcurricaval.pdf

Afonso, N. (2005). *Investigação naturalista em educação: Um guia prático e crítico*. Porto: Edições Asa.

Aké, L. P. (2013). *Evaluación y Desarrollo del Razonamiento Algebrico Elemental en Maestros en Formación* (Tese de Doutoramento, Universidade de Granada). Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf

Akkoç, H., & Tall, D. (2002). The simplicity, complexity and complication of the function concept. In *PME conference*, 2, 2-025. Acedido de: https://faculty.tarleton.edu/brawner/coursefiles/550%20MAED/Simplicity%20and%20complexity%20of%20function.pdf

Alarção, I. (2006). *Isabel Alarção: Percurso e Pensamento*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

Almeida, L.S., & Freire, T. (2008). *Metodologia da investigação em psicologia da educação* (5ª ed.). Braga: Psiquilibrios.

Alves, C. & Morais, C. (2006). Recursos de apoio ao processo de ensino e aprendizagem da matemática. Lisboa: *Sociedade Portuguesa de Ci.nc ias da Educação – Secção de Educação Matemática.* Acedido de: https://bibliotecadigital.ipb.pt/bitstream/10198/1087/1/CL03_2006Recursos_Ensino_Aprendizagem_Matematica.pdf

Alves, M. P e Flores, M. A. (2010). *Trabalho Docente, Formação e Avaliação: Classificar conceitos, fundamentar práticas*. Portugal: Edição Pedago.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 14(3), 24-35. Acedido de: http://flm-journal.org/FLMArcavi.pdf

Arcavi, A. (2006). El desarrolo y el uso del sentido de los símbolos. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra* *na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247.

Barbosa, A., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Patterns and generalization: the influence of visual strategies. In Proceedings of the *Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 6,* 844-851. Acedido de: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/10079642/2007_04.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1532724247&Signature=fQ8qff1u57XKiotWU%2BkZi9d3V94%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DPatterns_and_generalization_the_influenc.pd

Bardin, L. (2013). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Barwell, R. (2013). Discursive psychology as an alternative perspective on mathematics teacher Knowledge. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM). The international jornal on Mathematics Education, 45*, 595-606. Acedido de: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-013-0508-4

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. In *Approaches to álgebra,* 3-12. Springer, Dordrecht. Acedido de: https://www.researchgate.net/profile/Ricardo_Nemirovsky/publication/291575390_A_Functional_Approach_to_Algebra_Two_Issues_that_Emerge/links/56f1e6dc08ae1cb29a3d1cb8/A-Functional-Approach-to-Algebra-Two-Issues-that-Emerge.pdf

Bénony, H., Chahraoui, K. (2002). *A entrevista clínica*. Lisboa: Climepsi Editores.

Biehler, R., & Kempen, L. (2013). Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof. In Proceedings of *the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* 86-95. Acedido de: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG1/WG1_Kempen.pdf

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears: Understanding Characteristics of Professional Development that Promote

Generative and Self-Sustaining Change in Teacher Practice". *Teaching Children Mathematics, 10*, 70-77.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446. Acedido de: http://mathed.byu.edu/kleatham/Classes/Fall2010/MthEd590Library.enlp/MthEd590Library.Data/PDF/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning-1974150144/BlantonKaput2005CharacterizingAClassroomPracticeThatPromotesAlgebraicReasoning.pdf

Blanton, M., & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Berlin: Springer. Acedido de: http://www.newbooks-services.de/MediaFiles/Texts/7/9783642177347_Excerpt_002.pdf

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. *Series in Essential Understandings. National Council of Teachers of Mathematics.* 1906 Association Drive, Reston, VA 20191-1502.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of mathematical modelling and application, 1(*1), 45-58. Acedido de: http://gorila.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/viewFile/1620/1087

Blum, W., & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren, 128,* 18–21.

Bogdan R. & Taylor, S. (2000). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación: La búsqueda de significados.* 3ª Ed. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Bogdan, R., & Biklen, S.(2006). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora, Ed.

Booth, L. R. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. In A. F. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra, K-12* (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Acedido de:

http://elementaryalgebra.cmswiki.wikispaces.net/file/view/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf/142535729/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf

Borralho, A. e Palhares, P. (2013). Ensino e aprendizagem de números e álgebra. In. Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática.* Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho. Acedido de: http://www.apm.pt/files/_S3-0TI_529d2891c8bd2.pdf

Botas, D., & Moreira, D. (2013). A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática–Um estudo no 1o Ciclo. *Revista Portuguesa de Educação*, *26*(1), 253-286. Acedido de: revistas.rcaap.pt/rpe/article/download/3259/2633

Branco, N. C. V. (2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores nos primeiros anos.* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Acedido de: http://repositorio.ul.pt/handle/10451/8860

Branco, N., & Ponte, J. P. (2011). Situações de modelação na formação inicial de professores. Ensino e aprendizagem da Álgebra: *Atas do EIEM*, 383-403. Acedido de: http://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/22.Branco-Ponte.pdf

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P., & Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. In J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), (2017) *Investigación en Educación Matemática XXI.* Zaragoza: SEIEM. Acedido de: http://www.seiem.es/docs/actas/21/ActasXXISEIEM.pdf

Butto, C., & Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación matemática, 16*(1). Acedido de: http://www.redalyc.org/html/405/40516105/

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 16*(2), 81-118. Acedido de: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. *Educação Matemática, 115,* 11-17. Acedido de: https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4265/1/APCanavarro%202011%20EM115%20pp11-17%20Ensino%20Exploratório.pdf

Canavarro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In Canavarro, P., Santos, L. , Boavida, A., Oliveira, H., Menezes, L., & Carreira, S. (Orgs), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática.* Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. Acedido de: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7041/1/Canavarro_Oliveira_Menezes_eiem.pdf

Carpenter, T., & Levi, L. (2000). Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades. *Research report. Madison, WI: Wisconsin Center for Education Research,* University of Wisconsin, School of Education. Acedido de: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED470471.pdf

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* Vol. 2 (pp. 669–706). Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc. e NCTM.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics education,* 87-115. Acedido de: http://ase.tufts.edu/education/documents/publicationsBrizuela/CarraherSchliemannBrizuelaEarnest2006.pdf

Chapman, O. (2013). High school mathematics teachers' inquiry-oriented approaches to teaching Algebra. *Quadrante, 22*(2), 5-28. Acedido de: http://www.apm.pt/portal/quadrante.php?id=208596&rid=208594

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. *A research companion to principles and standards for school mathematics*, 123-135. Acedido de: https://www.researchgate.net/publication/250928975_On_appreciating_the_cognitive _complexity_of_school_algebra_Research_on_algebra_learning_and_directions_of_curricular_change

Chrysostomou, M., & Christou, C. (2013). Examining 5th grade students' ability to operate on unknowns through their levels of justification. In A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the PME* (Vol. 2, pp. 185–192). Kiel, Germany.

Contreras, A., Ordóñez, L., Wilhelmi, M. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la enseñanza de la integral definida en el Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 367-384. Acedido de: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewFile/210806/353415

Creswell, J. W. (2010). *Projeto de Pesquisa: Métodos Qualitativo, Quantitativo e Misto.* Porto Alegre: Artmed.

Cusi, A. & Malara, N. (2007). Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. *Quadrante, 16*(1), 57-80.

D Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, 28*(2), 49-77. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/dimension_metadidactica_11nov07.pdf

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2003). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Strategies of qualitative inquiry* (2nd ed., pp. 1-45). Thousand Oaks, CA: Sage. Acedido de: https://pt.scribd.com/document/144059012/The-Discipline-and-Practice-of-Qualitative-Research

Deslandes, S. F., Assis, S. D., Minayo, M. C. S., & Deslandes, S. F. (2002). Abordagens quantitativa e qualitativa em saúde: o diálogo das diferenças. *Caminhos do pensamento: epistemologia e método, 2,* 195-223.

Doerr, H. (2004). Teachers' knowledge and the teaching of algebra. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 265-290). Norwell: Klumer.

Drijvers, P. H. M. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter (tese de Doutoramento, Universidade de Utrecht). Acedido de: https://dspace.library.uu.nl/bitstream/handle/1874/886/full.pdf

Duval, R. (1995). Semiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals. Berne: Peter Lang S.A. *Editions scientifiques européennes.*

Ely, R., & Adams, A. E. (2012). Unknown, Placeholder, or Variable: What Is "X"? *Mathematics Education Research Journal, 24*(1), 19–38. Acedido de: http://eric.ed.gov/?q=Unknown,+placeholder,+or+variable:+what+is+x?+&id=EJ959462

Fernandes, D. (2008*). Avaliação das Aprendizagens: Desafios às Teorias, Práticas e Políticas*. Lisboa: Texto Editores.

Fernandes, J. A; Alves, M. P & Machado, E. A (2008). *Perspectivas e Práticas de Avaliação de Professores de Matemática*. Braga: Cadernos CIEd. Universidade do Minho.

Fernandes, J. A., & Soares, M. J. (2003). O ensino de equações lineares. *Comissão Organizadora do ProfMat,* 327-336. Acedido de: https://www.researchgate.net/publication/308415764_O_ensino_de_equacoes_lineares

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future*, 237-274. Acedido de: https://www.sensepublishers.com/media/457-handbook-of-research-on-the-psychology-of-mathematics-educationa.pdf

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. Knowledge. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM). The international jornal on Mathematics Education, 38*(2), 86-95. Acedido de: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF02655883.pdf

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics, 9*(2), 19-25. Acedido de: https://flm-journal.org/Articles/3DA2C5DE336DFD448BCF339B51168E.pdf

Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008). *Educational algebra.* A theorical and empirical approach. New York: Springer.

Font, V., & Contreras, Á. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*(1), 33-52. Acedido de: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-008-9123-7

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia e Aprendizaje, 33*(1), 89-105. Acedido de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Font_Planas_Godino_IA2010_Modelo_anadida.pdf

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22* (2), 237-284. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13–31. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino Union_020 2009.pdf

Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Internamericana de Educação Matemática,* Recife, Brasil, 1-20. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiotica de investigación en Didáctica de la Matemática. In A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García e L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49–68). Jaén: SEIEM. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_EOS_Baeza_2012.pdf

Godino, J. D. & Neto, M. T (2016). Analysis of algebraic reasoning and its different levels in primary and secondary education. Power point da apresentação em *13th International Congress on Mathematical Education*, Hamburg, 24-31 Julho 2016.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. D., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Acedido de: https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2013). Niveles de algebrizacíon de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formacíon de maestros. *Enseñanza de Las Ciencias, 32*(1), 199–219. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/niveles_algebrizacion.pdf

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrizacíon de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formacíon de maestros. *Enseñanza de Las Ciencias, 32*(1), 199–219. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/niveles_algebrizacion.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127–135. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ontosemiotic_approach.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *ACTA SCIENTIAE–Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10* (2).

Godino, J. D., Contreras, Á., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques, 26*(76), 39. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/madrid_2004/godino_contreras_font.pdf

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & De Castro Hernández, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias.* Acedido de: https://repositorio.uam.es/bitstream/handle/10486/667862/aproximacion_castro_EC_2009.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2-3), 247-265. Acedido de: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-010-9278-x

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 90-113. Acedido de: http://www.redalyc.org/pdf/2912/291250692007.pdf

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. Avances de *Investigación en Educación Matemática*, (8). Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Godino_RAE-PRI-SEC.pdf

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Moll, V. F. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*(1), 131-156. Acedido de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509907

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V. & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. In: FERNÁNDEZ, C. et al. (Ed.). *Investigación en Educación Matemática XX. Málaga: Ed. SEIEM,* 2016. p. 288-297. Acedido de: http://funes.uniandes.edu.co/8859/1/Batanero2016Articulando.pdf

Godoy, A. S. (1995). *Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades*. Volume 35, 2: 57-63. São Paulo: Revista de Administração de Empresa

Hall, R. D. (2002). An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. *Philosophy of mathematics education journal, 15*(1), 1-67. Acedido de: http://academic.sun.ac.za/education/mathematics/174/ErrorsEquatins.pdf

Herscovics, N., & Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *The Mathematics Teacher, 73*(8), 572-580.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education,* 372-400. Acedido de: https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/31156989/_1__Hill-Ball-Schilling-JRME2008-07.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1532711367&Signature=X7lcSOlugFjOmB9OROoRGBjzcfU%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DUnpacking_pedagogical_content_knowledge.pdf

Hill, M. e Hill, A. (2005). *Investigação por questionário*. (2ª ed.). Lisboa: Edição Sílabo.

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. In *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a national symposium* (pp. 25-26). Washington, DC: National Research Council, National Academy Press. Acedido de: https://eric.ed.gov/?id=ED441664

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning?. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 19-55). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1995). A research base for algebra reform: Does one exist. In *Proceedings of the 17th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 71-94).

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 145-168). Routledge. Acedido de: https://www.taylorfrancis.com/books/e/9781135676506/chapters/10.4324%2F9781410602619-16

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience, Part I: Transforming Task Structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent

(Eds.), *Proceedings of the 12th Study Conference of the International Commission on Mathematics Instruction: The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Kaput, J., & Blanton, M. (2005). Algebrafying elementary mathematics in a teachercentered, systemic way. In T. Romberg & T. Carpenter (Eds.) *Understanding Mathematics and Science Matters* (pp. 99-125). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics, 12*(3), 317-326. Acedido de: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF00311062.pdf

Kieran, C. (1985). Constructing meaning for equations and equation-solving. *Theory, research & practice in mathematical education,* 243-248.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grows, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York, NY: MacMillan.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151. Acedido de: https://www.researchgate.net/profile/Carolyn_Kieran/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it/links/53d6e3110cf220632f3df08a.pdf

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam/Taipei: Sense. Acedido de: https://www.sensepublishers.com/media/457-handbook-of-research-on-the-psychology-of-mathematics-educationa.pdf

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante, 16*(1), 5-26.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kindt, M., Abels, M., Dekker, T., Meyer, M. R., Pligge M. A., & Burrill, G. (2006). Comparing Quantities. In Wisconsin Center for Education Research & Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in Context.* Chicago: Encyclopædia Britannica, Inc.

Kirshner, D., & Awtry, T. (2004). Visual salience of algebraic transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 224-257. Acedido de: https://pdfs.semanticscholar.org/ff3e/da485a4af8041c640778e048a80a3ada64f5.pdf

Kramarski, B. (2004). Making sense of graphs: does metacognitive instruction make a difference on students' mathematical conceptions and alternative conceptions?. *Learning and Instruction, 14*(6), 593-619. Acedido de: https://www.researchgate.net/publication/248498233_Making_sense_of_graphs_Does_metacognitive_instruction_make_a_difference_on_students%27_mathematical_conceptions_and_alternative_conceptions

Lankshear, C., & Knobel, M. (2008). Introduction. In C. Lankshear & M. Knobel (Eds.), *Digital literacies: concepts, policies and practices* (pp. 1-16). New York: Peter Lang.

Lima, R. N. de, & Tall, D. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 3–18. Acedido de: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-007-9086-0

Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 47-70). Norwell, MA: Kluwer.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Seeing a pattern and writing a rule. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu & F.-L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 181-188). Tsukuba, Japan.

Magiera, M., Moyer, J., & Van den Kieboom, L. A. (2011). Relationships among features of pre-service teachers' algebraic thinking. *35th Conference of the International Group for the Psychology in Mathematics Education,* Ankara, Turquia, *3*, 169-176

ME – TL (2013). O programa da disciplina de Matemática para nível do 10.º, 11.º e 12.º anos. Díli: *Ministério da Educação da República Democrática de Timor-Leste.*

ME - TL (2009). Plano Curricular do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Estratégias de Implementação. Díli: *Ministério da Educação da República Democrática de Timor-Leste.*

ME - TL (2011). Plano Curricular do Ensino Secundário Geral - Reestruturação Curricular do Ensino Secundário Geral em Timor-Leste. Díli: *Ministério da Educação da República Democrática de Timor-Leste.*

Mendes, F., & Delgado, C. (2006). Sentido do número: um estudo no 1.º ciclo do ensino básico. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Orgs), *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 147-156). Lisboa: SEM-SPCE. Acedido de: https://comum.rcaap.pt/handle/10400.26/5153

Menino, H., & Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática: o uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2.º ciclo do ensino básico. *Atas do XV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp.271-291). Covilhã: Associação de Professores de Matemática. Acedido de: https://www.researchgate.net/publication/237267513_Instrumentos_de_avaliacao_das_aprendizagens_em_Matematica_o_uso_do_relatorio_escrito_do_teste_em_duas_fases_e_do_portefolio_no_2_ciclo_do_Ensino_Basico

Merriam, S. B. (1998). Qualitative Research and Case Study Applications in Education. *Revised and Expanded from" Case Study Research in Education.".* Jossey-Bass Publishers, 350 Sansome St, San Francisco, CA 94104. Acedido em: http://www.appstate.edu/~jacksonay/rcoe/merriam.pdf

Minayo, M. C. D. S., & Sanches, O. (1993). Quantitativo-qualitativo: oposição ou complementaridade?. *Cadernos de saúde pública, 9*, 237-248. Acedido em:

http://www.scielo.br/pdf/%0D/csp/v9n3/02.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2008). Princípios e normas para matemática escolar. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional. (Tradução portuguesa da edição original de 2000).

Nogueira, I. C., Blanco, T. F., & Vivero, D. R. (2015). Análise Ontossemiótica de processos de instrução matemática - um exemplo no Ensino Básico. *Saber & Educar*, (20), 174-187. Acedido de: http://revista.esepf.pt/index.php/sabereducar/article/viewFile/188/167

Pino-Fan, L. R., & Godino, J. D. (2015). Perpectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109. Acedido de: http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2015/07/2662-6235-1-PB.pdf

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (2ª parte) Desenho e aplicação de um instrumento para explorar a faceta epistêmica do conhecim. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 8, 1-47. Acedido de: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewFile/1981-1322.2013v8nespp1/26032

Ponte, J. D. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85*, 36-42. Acedido de: https://pt.scribd.com/document/201429534/Algebra-no-curriculo-escolar-2

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos e P. Canavarro (Org), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Acedido de: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4525/1/06-Ponte%28Caminha%29.pdf

Ponte, J. P. D. (1992). *Concepções dos professores de matemática e processos de formação.* Acedido de: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/92-Ponte(Ericeira).pdf

Ponte, J. P. D., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Acedido de: http://repositorio.ipsantarem.pt/bitstream/10400.15/1994/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf

Ponte, J. P. da, & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225–263). New York, NY: Routldge.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 461-494. Acedido de: https://www.researchgate.net/publication/260987281_Mathematics_teachers%27_knowledge_and_practices

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 1*, 65-86.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students' Non-Symbolic Algebraic Thinking. En, J. Cai, E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education.* (pp. 303-320). Berlin: Springer-Verlag.

Ricoy, M. C., & Couto, M. J. V. (2011). As TIC no ensino secundário na matemática em Portugal: a perspectiva dos professores. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 14*(1), 95-119. Acedido de: https://www.researchgate.net/publication/262718533_As_TIC_no_ensino_secundario_na_matematica_em_portugal_a_perspectiva_dos_professores

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*(3), 297-328. Acedido de: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-009-9222-0

Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. P. (2014). Tarefas matemáticas no ensino da algebra. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, 353-367. Acedido de: http://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/2428/1/eiem2014_cr_lm_jpp.pdf

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students´ access to significant mathematical ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 143-161). Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum.

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function - A case study. *Educational studies in mathematics, 53*(3), 229-254. Acedido de: https://scholar.google.pt/scholar?hl=pt-PT&as_sdt=0%2C5&q=A+SECONDARY+SCHOOL+STUDENT'S+UNDERSTANDING+OF+THE+CONCEPT+OF+FUNCTION+–+A+CASE+STUDY&btnG=

Sampieri, R. H., Collado, C. F. e Lucio, P. B. (2013). *Metodologia de pesquisa.* 3ª edição. São Paulo: McGraw-Hill Intramericana Brasil Ltda.

Saraiva, M. e Ponte, J. P. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante,12*(2), 25-52. Acedido de: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3077/1/03-Saraiva-Ponte(Quadrante).pdf

Saraiva, M. J. & Teixeira, A. M. (2009). Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento, 4*(19), 74-83. Itália: Palermo. Acedido de: http://dipmat.math.unipa.it/~grim/TSG24_ICMI11_Saraiva-Teixeira_QRDM_Supl4_09.pdf

Serapioni, M. (2000). Métodos qualitativos e quantitativos na pesquisa social em saúde: algumas estratégias para a integração. *Ciência & Saúde Coletiva, 5*(1), 187-192.

Serrano, G. (2004). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes.* Madrid: Ed. La Muralla

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. L. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133–160). New York: Taylor & Francis Group.

Soares, E. (2003). *Metodologia científica: lógica, epistemologia e normas*. São Paulo: Editora Atlas.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. In *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori. Acedido de: https://laurabrichetti.files.wordpress.com/2010/12/socas-robayna-dificutades-errores-y-obstc3a1culos-en-el-azaje-de-la-matemc3a1tica.pdf

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NUMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 5-34. Acedido de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Apertura.pdf

Sousa, M. J. e Baptista, C. S. (2011). *Como fazer investigação, dissertações, teses e relatórios*. Edições de Ciências Sociais e Política Contemporânea. Lisboa: Pactor.

Stake, R. (2000) Case Studies. In N. Denzin e Y. Lincoln (Eds) *Handbook of Qualitative Research Second Edition* (pp. 435-454) Thousand Oaks: Sage Publications.

Stump, S., & Bishop, J. (2001). Framing the future: Inventing an algebra course for pre service elementary and middle school teachers. In H. ChicK, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 2, pp. 564-570). Melbourne, Australia: University of Melbourne. Acedido de: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED471781.pdf

Sutherland, R., & Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 12*(4), 353-383.

Tall, D. (1992). The transition from arithmetic to algebra: Number patterns, or proceptual programming. *New Directions in Algebra Education*, 213-231. Acedido de: http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993f-arith-alg-brisbane.pdf

Tavares, M. (2000). *Entrevista Clínica*. In Cunha, J. A. et al. Psicodiagnóstico - V. Porto Alegre: Artmed. p. 45-56.

Tuckman, B. (2000). *Manual de investigação em educação: Como conceber e realizar o processo de investigação em educação*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

UNTL (2015). Plano de Curso da Licenciatura em Educação, Ensino da Marematíca. Díli, *Universidade Nacional de Timor Lorosa'e*.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12: NCTM 1988 Yearbook* (pp. 8–19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vale, L., Ferreira, R. A., & Santos, L. (2011). Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte. Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática EIEM 2011, 421-439. Acedido de: https://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/algebra/eiem2011.pdf

Van Ameron, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 63-75. Acedido de: https://www.researchgate.net/publication/226581788_Focusing_on_informal_strategies_when_linking_arithmetic_to_early_algebra

Veloso, E. (1993). *Problemas e Tarefas em Geométria Elementer*. Lisboa: Ministerio da Educação, Gabinete de Estudos e planeamento.

Vilelas, J. (2009). *Investigação. O processo de construção do conhecimento*. Lisboa: Edições Silabo.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 341-359. Acedido de: https://link.springer.com/content/pdf/10.1023/A:1020229023965.pdf

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122-137. Acedido de: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.513.8838&rep=rep1&type=pdf

Watson, A. (2007). Key Understanding of Mathematics Learning. *Paper 6: Algebraic Reasoning.* Nuffield Foundation. University of Oxford. Acedido de: http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/P6.pdf

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., & Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27*(79), 77. Acedido de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/igualdad_wilhelmi.pdf

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., & Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 573-582). Salamanca: SEIEM. Acedido de: https://core.ac.uk/download/pdf/33252607.pdf

Windsor, Will. (2009). Algebraic Thinking- More to Do with Why, Than X and Y. *Proceedings of the 10th International Conference "Models in Developing Mathematics Education"*. The Mathematics Education into the 21st Century Project. Acedido de:

http://www.qucosa.de/fileadmin/data/qucosa/documents/8114/Proceedings-636pages-Dresden2009_592-595.pdf