Análisis Didáctico a un Proceso de Instrucción del Método de Integración por Partes

Enrique Mateus Nieves

Tesis presentada como requisito para optar el título de
Doctor en Educación
Énfasis Educación Matemática

Director de tesis
Dr. Rodolfo Vergel Causado

Director Ad Honorem
Dr. Carlos Eduardo Vasco Uribe

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Educación
Énfasis Educación Matemática
2017

Resumen

Este es un análisis didáctico sistemático que analiza un proceso de instrucción del método de integración por partes. Es una investigación cualitativa basada en el estudio de caso y enfocado en un contexto educativo particular. Dos interrogantes guiaron nuestra investigación ¿Cuáles son las dificultades específicas -de tipo: epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, emocional, ecológico- que se observan durante el proceso de instrucción del método de integración por partes (MIP) y cuáles son las causas de la presencia de tales dificultades? ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de instrucción ejecutado por el profesor al enseñar el MIP?

La metodología de observación utilizada fue la descripción de sesiones de clase. Aplicamos como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática y desarrollamos las categorías de análisis propuestas. Específicamente, la noción de idoneidad didáctica (descripción, explicación y valoración) de los procesos de instrucción de las matemáticas. Este marco guió lo que había que observar, cómo se debía observar y proporcionó las herramientas para realizar la observación. Se tomaron en cuenta los sistemas de prácticas matemáticas en el programa de estudios vigente en la malla curricular del Departamento de Matemáticas, en los libros de texto propuestos en la bibliografía del curso, y los sistemas de prácticas personales implementadas por el profesor. Este análisis muestra una radiografía de qué fue lo que pasó en el aula y por qué. Se hace importante reconocer que la relación existente entre la relación de la enseñanza y los significados que se asignan a los objetos matemáticos que institucionalizan no estén desconexos del contexto en que ellos se desarrollan dada la implicación que éste tiene en la evolución y construcción del significado implementado, por ello proponemos hacer procesos de enseñanza menos formales dónde se incluyan otras técnicas, como la incorporación de Tics entre otras. Esta investigación en donde pretendimos mirar el papel del contexto en los procesos que siguió un profesor elegido para institucionalizar la construcción de significado del método de integración por partes (MIP) puede ser guía para otros profesores interesados en mejorar sus prácticas pedagógicas y ser replicadas en otros objetos tanto de nivel básico, media o superior, propios de la enseñanza de las matemáticas.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Capítulo 1. Problema de investigación

En este capítulo presentamos la situación problema, la pregunta y los objetivos de investigación. La literatura en Educación Matemática ha reportado trabajos enfocados en identificar la comprensión de los conceptos de función, límite, derivada y las dificultades intrínsecas al manejo y uso de estos. Encontramos que existen, en la misma dirección, algunas investigaciones sobre la integral. Aquí, compartimos lo que esta literatura ha denominado como la percepción de crisis en la enseñanza del Cálculo Infinitesimal en los niveles universitarios nacionales e internacionales.

Los pocos trabajos sobre el Cálculo Integral motiva esta investigación en la que aplicamos las herramientas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS) para valorar la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción de uno de los métodos de integración: específicamente, el método de integración por partes (MIP), siendo este el que genera mayores dificultades para su comprensión y manejo, en miras de analizar qué tanto puede aportar en la exploración y comprensión de esta problemática nacional e internacional.

1.1. La percepción de crisis en la enseñanza del Cálculo en el nivel universitario

Diferentes investigaciones en Educación Matemática han venido documentando esta situación donde se ha identificado algunas dificultades que han sido reportadas sistemáticamente en diferentes regiones del mundo y bajo diversas perspectivas teóricas (Orton, 1983a; Artigue, 1998, 2003; Cantoral, 2000; Moreno-Armella, Hegedus & Kaput, 2008; Salinas & Alanis, 2009). Estos trabajos se han orientado al desarrollo de acercamientos didácticos que favorezcan la construcción de significados, tanto al nivel de los procesos como de los conceptos propios del Cálculo y del Análisis Matemático, principalmente de los conceptos de función, límite, continuidad, derivada, convergencia y analiticidad, entre otros.

Sin embargo, este tipo de investigaciones muestra que los estudiantes tienen dificultades con la conceptualización de los procesos de integración y que éstas se refieren al desequilibrio existente entre lo conceptual y lo algorítmico. De ahí, que para esta investigación coincidimos con quienes afirman que, bajo el influjo del discurso matemático escolar, la enseñanza del Cálculo Integral privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de integración, en detrimento propiamente de la comprensión de nociones básicas como se señala en Quezada, (1986); Artigue, (1998); y Cantoral, (2000).

El artículo *L´evolution des problematiques en didactique de l´analyse,* Artigue (1998), aborda una problemática que ha jugado un papel fundamental en la didáctica del Análisis Matemático, ejemplifica sus potencialidades y límites y postula que el desarrollo de este campo depende tanto de su evolución global, como de las condiciones culturales y sociales en las cuales se desarrollan los procesos de enseñanza y de aprendizaje del Análisis. En dicho trabajo, la autora discute los obstáculos epistemológicos (destacándose el concepto de límite y la heterogeneidad de las dimensiones), la transición entre procesos y objetos, los sistemas didácticos y de la ingeniería didáctica (destacándose una situación fundamental para el aprendizaje de la integral) y aspectos institucionales y ecológicos (destacándose la Didáctica del Análisis y las tecnologías informáticas). En las conclusiones, la autora resalta la necesidad de desarrollar una estructuración y reconstrucción epistemológicamente coherentes y ecológicamente viables para la evolución del Análisis, tanto en la enseñanza universitaria como en el final de la secundaria, considerando las diferentes culturas y los distintos contextos educativos.

La literatura existente en didáctica de las matemáticas muestra que es conocido que la enseñanza habitual del Cálculo se basa en la transmisión de conocimientos con un énfasis muy marcado en el desarrollo de habilidades algebraicas y se desatiende el discernimiento intelectual para la comprensión de ideas, nociones y conceptos. Tal situación ha sido abordada en diversos trabajos en los que se muestran desde argumentaciones teóricas hasta propuestas para mejorar la calidad del aprendizaje, las cuales incluyen tanto los conocimientos previos que necesitaría tener un estudiante para tener éxito en el estudio del Cálculo, como en la elaboración de materiales didácticos (Farfán, 1997; Artigue, 1991; Salinas & Alanis, 2009).

La situación que describen los autores mencionados anteriormente es de crisis, mostrada desde la caracterización de dificultades presentes en los estudiantes. Artigue (1998) sintetiza esas dificultades de la siguiente manera:

> Nivel altamente sofisticado de las estructuras de los objetos en los fundamentos del Cálculo, tales como sucesiones y funciones. Existencia de varios obstáculos, incluyendo aquellos evidentes en el desarrollo histórico como los obstáculos debidos a los procesos infinitos, y los obstáculos en la conceptuación de los números reales por parte de los estudiantes. Dificultades planteadas en el aprendizaje de técnicas específicas o propias del análisis; Tal como el uso de los axiomas de completez (p. 45).

En la misma dirección, la investigación adelantada por Cantoral y Farfán (2003) menciona que los estudiantes llegan a obtener un nivel de éxito razonable en un cierto número de tareas algorítmicas, sin embargo, las concepciones desarrolladas por los estudiantes son pobres y las técnicas sutiles del Cálculo no son adoptadas. Por su parte, Dreyfus (1990) afirma que los estudiantes aprenden los procedimientos del Cálculo (encontrar límites, diferenciación, integración, etc.) a un nivel puramente algorítmico y construidos sobre imágenes conceptuales escasas. Menciona, además, que las dificultades en la concepción de los procesos de diferenciación e integración pueden explicarse en términos que los estudiantes carecen de un nivel alto de abstracción, tanto del concepto de función (como un objeto), como de los procesos de aproximación.

En estudios anteriores, Orton (1983b) identifica dificultades entre estudiantes de 16 a 22 años de edad al momento de estudiar ideas del Cálculo, debido a problemas vinculados con los procedimientos algorítmicos, a pesar de la gran dependencia que se tiene con el álgebra elemental. También identifica dificultades para determinar áreas bajo curvas cuando éstas cortan un eje, o dificultades en la comprensión de relaciones entre una integral definida y las áreas bajo una curva, la cual debe ser dividida en tantos rectángulos como sea posible (una cantidad muy grande). Además, el autor identifica dificultades para explicar por medio de un diagrama o por otra vía, el porqué de la igualdad $\int_0^a \left(x^2 + x\right) dx = \int_0^a x^2 \, \mathrm{dx} + \int_0^a x \, \mathrm{dx}$.

Schneider (1991), en un estudio realizado con estudiantes de 15 a 18 años de edad, en el que recurrió a la “descomposición infinita” de superficies y sólidos utilizando los principios de Cavalieri, identificó dificultades para calcular áreas y volúmenes debido a un obstáculo que considera epistemológico, que consiste en derivaciones inconscientes e indebidas en la manera de pensar de los alumnos entre el campo de las cantidades y el campo de las medidas. Quezada (1986) reporta el análisis de las dificultades de los estudiantes al buscar primitivas y señala que estas se deben a un dominio insuficiente del álgebra. La autora sugiere situar a los estudiantes para que realicen una cantidad suficiente de ejercicios y posibilitar la adquisición de destrezas a través de la experiencia en la búsqueda de primitivas, considerando atender los errores presentados por los estudiantes.

Cordero (2003) no buscan caracterizar dificultades de los estudiantes ante las tareas que requieren de la integración, sino que se orientan al examen de las características necesarias para entender el concepto de integral, para lo cual acude al empleo de diferentes marcos como el epistemológico, el cognitivo y el didáctico. Del análisis epistemológico se identificó un patrón de construcción de la teoría de integración con la expresión $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ en donde la diferencia $F(x+dx) - F(x)$ y las condiciones de una función derivada F' juegan un papel definitivo. Se le asoció un significado a la integral por medio de la noción de acumulación. Las situaciones que favorecen el pensar en la integral son los fenómenos de cambio. Considerar al área bajo una curva como modelo geométrico de la integral en un ambiente de variación continua exige mover lo estático. En las explicaciones de profesores y estudiantes ante situaciones de variación, relacionan a los significados y objetos dentro de un sistema específico de la situación, en contraste con una estructura axiomática. Por ejemplo, $f(x)\ dx$ es una porción de una cantidad que varía o es la pieza de un todo, $f(x)$ es una función la cual es representada por una curva o por una expresión algebraica y el dx como un término independiente de la función $f(x)$.

En el quehacer diario de la docencia, es común encontrarnos con la falta de motivación en nuestros estudiantes para resolver problemas matemáticos, porque les parecen tal vez difíciles o porque no saben cómo hacerlos. Las investigaciones antes relacionadas permiten inferir varios aspectos. Los estudiantes prefieren sólo resolver ejercicios, sin emplear axiomas, teoremas, definiciones, conceptos, etc. La negativa para resolver problemas permite aseverar que usualmente los estudiantes olvidan lo que en un momento determinado demostraron haber aprendido, ya que retuvieron en su memoria los conceptos y procedimientos objetos de aprendizaje como hechos aislados y no inmersos en una organización o estructura lógica. Generalmente lo aprendido en su momento al paso del tiempo, se reproduce tal cual sin conexiones con otros conocimientos y esto es debido a la falta de solidez. En la resolución de problemas hay bloqueo y es porque no hay una organización efectiva del conocimiento por los estudiantes.

Por otro lado se coincide en reconocer la deficiencia en la preparación de los estudiantes para “resolver problemas”. Se atribuyen distintas causas a crear esta situación y una de ellas se debe a la enseñanza tradicional que aún se practica, es decir, el “Modelo Transmisión-recepción”, puesto que el profesor de matemáticas está estigmatizado como una persona implacable y que los conocimientos que vierte son indiscutibles. Lo anterior hace que los estudiantes sean muchas veces sujetos pasivos de su aprendizaje porque no se propician discusiones, diálogos y muchas veces no se sabe cómo motivarlos.

Esta situación obliga a buscar alternativas que propicien cambios en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del Cálculo, particularmente en esta investigación, del Cálculo Integral. Se trata de aspectos abordados en los debates realizados en diferentes congresos, simposios, reuniones sobre el tema, entre los que se destacan el ICME (International Congress on Mathematics Education) y el Simposio Iberoamericano de Enseñanza de la Matemática RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa). También han sido objeto de análisis en diferentes publicaciones entre las que se destacan la Revista ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik), la Revista Enseñanza de las Ciencias y la Revista Iberoamericana de Educación, entre otras.

De ahí que, en lo que se relaciona esta problemática de la enseñanza a nivel universitario compartimos lo expuesto por Moreno (2005) y Crisóstomo (2012):

> La enseñanza de los principios del Cálculo resulta bastante problemática, y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, o bien, realizar algunas derivadas o integrales, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas. Los métodos tradicionalmente de enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo que acaba siendo rutinaria (Artigue, 1995; Yusof y Tall, 1999), y a menudo intentan inculcar desde los inicios, los tradicionales métodos de demostración matemática (Yusof y Tall, 1999). Asimismo, el profesor evalúa las competencias adquiridas por el estudiante en este dominio algorítmico y algebraico, generalmente a partir de ejercicios similares o iguales a los presentados en clase, ejercicios que responden exactamente al mismo esquema de pensamiento (p. 82).

1.2. El Cálculo Integral Como campo investigativo en Educación Matemática

Es pertinente mencionar que los conceptos del Cálculo Infinitesimal que primero se abordaron en las investigaciones fueron los relativos a límites y funciones, posteriormente, los relacionados con integrales, derivadas y áreas. Estas investigaciones se completan en la actualidad con la gran cantidad de trabajos sobre el uso de la tecnología en el aprendizaje del Cálculo (Robert y Speer, 2001). Uno de los trabajos pioneros sobre el aprendizaje del concepto de integral definida es el de Orton (1983a) que plantea como uno de sus objetivos investigar la comprensión de los estudiantes sobre la integración y la diferenciación. En los resultados del trabajo se evidencia el dominio del modo algebraico sobre el gráfico y algunas carencias de significado en límites y aproximaciones. Su trabajo estuvo centrado en poner de manifiesto las dificultades de los estudiantes al comprender en particular, la integral definida, como el límite de una suma debido a una comprensión no adecuada del proceso de límite.

Encontramos que la literatura en Educación Matemática reporta diferentes tipos de investigaciones: ya mencinado, Cordero (2003) sobre la integral definida, otras ubicadas dentro del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) como: Tall (1991, 1996), Mamona, Down y Dows (2008), Czarnocha, Loch, Prabhu, y Vidakovik (2001), Hereal, Selden & Selden (2006), Rasslan y Tall (2002), Ordóñez (2011), Crisóstomo (2012), y Font y Pino-Fan (2015). Además, se encuentran los aportes del Grupo Internacional para la Psicología de la Educación Matemática (PME) con los trabajos de Bezuidenhout y Oliver (2000), Czarnocha et al. (2001), Rasslan y Tall (2002) y Carlson et al. (2003), centradas en las problemáticas relativas a los procesos de enseñanza y de aprendizaje del Cálculo Integral. Otros autores hablan sobre el uso de la tecnología en la enseñanza relacionada, entre ellos podemos encontrar a Sutherland y Balacheff (1999) y Crisóstomo (2012). Por su parte, Dreyfus y Eisenberg (1990) plantean que esta variedad se debe no solamente a que el Cálculo es la rama de la matemática avanzada a la que se dedica mayor cantidad de tiempo en los estudios científicos-técnicos, sino también al número de problemas no triviales que suelen presentarse en su proceso de aprendizaje.

Estas investigaciones se centran en poner de manifiesto las dificultades de los estudiantes al comprender la integral definida mediante unas característica comunes: dificultad para comprender la integral definida como el límite de una suma (Orton, 1983b), dificultad que tienen los estudiantes de relacionar las aproximaciones gráficas y analíticas (Ferrini-Mundy y Graham, 1994), o la reticencia a la hora de utilizar métodos gráficos (Dreyfus y Eisemberg, 1990; Dreyfus 1991), poner de manifiesto una concepción procedimental de la integral definida (Calvo, 1997; Ferrini-Mundy y Guardard 1992; Llorens y Santonja, 1997; Muñoz, 2000; Zazkis, Dubinsky y Dautermann, 1996) y la formación de imágenes inapropiadas del concepto de integral (Bezuidenhout y Olivier 2000). En relación con esta característica Davidson (1990) encontró que la manipulación de métodos numéricos de integración facilitaba la adquisición de un significado de la integral más asociado con el problema del área.

Turégano (1998) identificó tres diferentes concepciones que los estudiantes generan usando la idea del concepto imagen: primitiva, operativa y descriptiva. Con la idea primitiva de integral, el estudiante sólo asociaría la integral con el área de figuras raras. En esta línea Camacho y Depool (2003a, 2003b) utilizando el marco teórico de las representaciones semióticas de Duval (1993) y el modelo de competencias de Socas (2007) señalan la necesidad de distinguir entre un objeto matemático y sus representaciones para que los estudiantes puedan alcanzar una comprensión eficaz de la integral definida.

Por otra parte, la relación entre la integral definida y la impropia fue planteada por Camacho y González-Martín (2005) a partir de los resultados relacionados en Thomas (1995) y Artigue (1995). Dichos resultados indican que una de las dificultades de los estudiantes radica en concebir la integral definida como un área sin acabar de precisar que para ello se requiere que la función sea positiva. Por su parte Thomas (1995) en su estudio del teorema fundamental del cálculo, observa que los estudiantes establecen un fuerte vínculo entre los dos tipos de integrales, ven más vinculada la integral indefinida con la definida que la integral indefinida con la derivada. Los resultados de esta investigación indican que puede ser adecuado presentar de manera separada las dos integrales, incluso revisar la integral indefinida después de haber introducido la integral definida prestando mayor atención a las diferencias existentes entre los dos tipos de integrales. Artigue (1995) señala las consecuencias negativas de estas situacines:

> Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del Cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas. Estos estudios también muestran de manera clara que, frente a las dificultades encontradas, la enseñanza tradicional y, en particular, la enseñanza universitaria, aún si tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Este fenómeno se convierte en un círculo vicioso: para tener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial, ya que es lo que se evalúa (p.12).

La situación planteada por esta autora condiciona el ambiente en el aula, la disposición de los estudiantes para aprender y su actitud ante los nuevos conocimientos. Saber matemáticas significa para los alumnos tener alguna habilidad en la resolución de ecuaciones, desarrollar procedimientos, aplicar fórmulas y métodos. Rara vez un estudiante concibe a las matemáticas como algo que le pueda ser útil más allá de eso y cuando llega a suceder, no es del todo claro. ¿Qué se puede hacer?, ¿cómo vincular los contenidos matemáticos con las áreas que puedan interesar al estudiante? Al respecto Camarena (2000) menciona que “la matemática en contexto ayuda al estudiante a construir su propio conocimiento de una matemática con significado, con amarres firmes y no volátiles” además, “refuerza el desarrollo de habilidades matemáticas mediante el proceso de resolver problemas vinculados con los intereses del alumno” (p. 32).

También existe otro tipo de investigaciones que se enfocan en el proceso de enseñanza del concepto de integral en el nivel universitario bajo la perspectiva de “objeto de conocimiento”, este grupo liderado por Godino y sus colaboradores, (Godino, Batanero, 1994; Godino, 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, 2005; Font & Ramos, 2005; Godino, Contreras & Font, 2006b; Ramos & Font, 2006; Godino, Batanero & Font, 2007; D'Amore & Godino, 2007), ha desarrollado el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS) que considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas. En particular, están las realizadas por Pochulu y Font (2010), Contreras y Ordóñez, (2006), Ordóñez, (2011), Crisóstomo, (2012), Pino-Fant, Godino, Font y Castro (2013), Robles, Telechea y Font, (2014); Pino-Fan y Godino (2015). De acuerdo con los resultados encontrados conduce a pensar que dado este tratamiento didáctico, los estudiantes tienden a adquirir ciertos significados en cuanto a las nociones básicas del Cálculo Integral, alejándolos del desarrollo exclusivo como herramienta de cálculo.

Tradicionalmente la enseñanza del Cálculo Infinitesimal se inicia en la educación media, con el Cálculo diferencial, regularmente se concibe como un conocimiento que cierra el ciclo de la formación secundaria y da inicio a la formación superior donde entre otros, se hacen presentes las definiciones formales de límite, derivada e integral. De esta manera se pretende la “comprensión” de los conceptos tratados con la ejercitación de los algoritmos propios de cada tema y sus propiedades. Sin embargo resultados de investigaciones realizadas en la década de los ochentas por (Cornu, 1983; Sierpinska, 1985 y Orton, 1983a, 1983b) sobre la comprensión de este tipo de conceptos permite concluir que está determinada por nociones complejas que fueron desarrolladas a lo largo de 19 siglos por la comunidad matemática y que generaron nuevos estilos de pensamiento matemático y nuevas formas de razonar.

Particualrmente, en el contexto escolar los procesos de integración son tratados en el último año de la enseñanza media y en el primero de la enseñanza superior a partir de dos vertientes: la integral indefinida y la integral definida. El concepto de integral definida se asocia a expresiones simbólicas y representaciones geométricas. Las formas más usuales de concebir estas representaciones son: la integral como la operación inversa de la derivada y la integral cómo el método de determinación del área bajo una curva para funciones continúas sobre intervalos cerrados. Sin embargo, según Llorens y Santonja (1997) en los cursos habituales de Cálculo Integral y en la mayoría de textos propios de la educación superior consideran dos grandes momentos para enseñar esas dos vertientes: el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral.

Desde la secuencia de contenidos para el apartado de Cálculo Integral es: Cálculo de primitivas, métodos de integración, la Integral definida y aplicaciones de la integración: cálculo de áreas y volúmenes. El nivel de profundidad en cada uno de esos epígrafes suele ser bien diferente llevándose la mayor cantidad los dos primeros, porque el objetivo que se persigue es adiestrar a los estudiantes en el cálculo de primitivas exigiendo un considerable nivel de destreza, "trucos" y recetas para la obtención del resultado, de ahí que para esta investigación nos detendremos más adelante en los métodos de integración, centrando nuestra atención en el MIP. Se puede constatar que en muchos textos se omite una revisión del concepto de área, se aprovecha que es un "concepto intuitivo" para interpretar de ese modo las integrales justificando todo el engorroso cálculo de primitivas, cálculo cada vez menos necesario, ya que se está generalizando el uso de software para computadores y calculadoras científicas que realicen diferentes operaciones y actividades matemáticas como es la integración. En estas circunstancias se considera más importante el significado y estudio de algunos métodos de integración numérica con el uso de las nuevas tecnologías.

Por otro lado, haciendo una revisión de los textos que se manejan en el nivel universitario a nivel de Licenciatura en Matemáticas, como de otras carreras como Ingeniarías, Administración, Economía, por nombrar algunas, para determinar el tipo de presentación que hacen de estos conceptos, se miraron los libros de cálculo de Spivak, Leithhold, Apóstol y Stewart, encontrando que todos estos comienzan el Cálculo Integral con aproximaciones al concepto de área como función de conjunto. Relacionan el concepto de anti derivación o anti diferenciación, entendida como el proceso mediante el cual se determina el conjunto de todas las antiderivadas de una función dada. Presentan el símbolo $\int$ para denotar la operación anti derivación que se escribe: $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, donde $F'(x) = f(x)$ y c representa una constante arbitraria. Por lo anterior, si $\{f(x) + C\}$ es el conjunto de todas las funciones cuyas diferenciales son $f(x)\,dx$, también es el conjunto de todas las funciones cuya derivada es $f(x)$.

Por tanto la anti derivación se considera como la operación para determinar el conjunto de todas las funciones que tienen una derivada dada. El texto de Spivak menciona que "… una función $\int f(x)\,dx$, es decir, una primitiva de *f*, recibe el nombre de "*integral indefinida*" de *f*, mientras que $\int_a^b f(x)\,dx$ es llamada, por contraste, "*integral definida*" (p. 205).

Estos textos de manera casi general presentan mediante un teorema lo siguiente: "*si n representa un número racional, entonces* $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq 1$" conduciendo al alumno a una aproximación del concepto de integral indefinida. Sin embargo, una característica de estos textos universitarios es que comienzan presentando la integral definida para luego presentar la integral indefinida y posteriormente la impropia. La integral definida la presentan haciendo uso del teorema fundamental de cálculo para validar este tipo de apreciaciones desde la siguiente definición:

> *…La integral de f* de *a b, que se designa por el símbolo* $\int_a^b f(x)\,dx$ *, se define mediante la siguiente formula:* $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ Es decir, para obtener el valor de la integral se multiplica cada valor de f_k constante, por la longitud de intervalo k-ésimo correspondiente formando el producto $f_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ y se suman luego todos los productos obtenidos (Spivak, 1981, p. 456).

Algunos de estos textos hacen una representación geométrica del concepto de integral cuando la función es positiva, como aquella del área bajo una curva donde el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$

expresa el valor de dicha área, es decir: $\int_a^b f(x)\,dx = \text{"área bajo la curva } y = f(x)\text{"}$

Una interpretación plausible dice que el signo $\int$ significa la suma de los rectángulos representados por $f(x)dx$, donde $f(x)$ es la altura y dx la base, mientras que los extremos a y b del intervalo son los límites de integración sobre los que construyen los rectángulos. Los procesos de integración son presentados y su construcción se da a partir de la definición de la integral de Riemann donde se trata con área de regiones simples, particularmente aquellas delimitadas por el eje horizontal, las rectas verticales que pasan por $(a,0)$ y $(b,0)$, y por la gráfica de una función f tal que $f(x) > 0$ para todo x en $[a,b]$, denotando este tipo de regiones por $R(f, a, b,)$.

Cuando el profesor tiene que enseñar a sus alumnos cómo calcular una integral indefinida se encuentra ante el dilema que en los textos de matemáticas esta temática se expone desde diferentes puntos de vista, no en su concepto ni en su interpretación geométrica ni en sus propiedades, pero si desde varios enfoques en los métodos analíticos que se proponen para su cálculo. Por ejemplo, hay autores que consideran a la sustitución y/o cambio de variables como un método de integración, cuando este caso es realmente una de las técnicas que se utilizan para re-expresar el integrando a una función elemental de la cual se puede hallar su primitiva. Otro ejemplo es considerar la descomposición de funciones racionales en funciones racionales simples como un método de integración, pues este es un caso similar al anterior. Es natural que el profesor debe enseñar al alumno todas las variantes que se le pueden presentar, teniendo en cuenta que uno de los objetivos educativos del Cálculo Integral consiste en que los alumnos desarrollen hábitos de proceder reflexivamente, de evaluar los resultados de su trabajo y uso de diversa literatura además de, contribuir a la capacidad de razonamiento, de pensar lógicamente y contribuir a la formación computacional de los estudiantes.

Luego de mostrar los métodos para calcular este tipo de integrales, de calcular áreas entre curvas, calcular volúmenes, longitudes de arco, centros de masa de una barra o de una lámina, la fuerza ejercida por la presión de un líquido entre otras, regularmente en los libros de texto del nivel universitario se presentan las integrales impropias como aquella integral donde el integrando tiene una discontinuidad infinita en los límites de integración. Mediante aproximaciones geométricas se llega a la definición de integral impropia, se distingue si la discontinuidad está en el límite inferior, en el superior o en ambos y se muestran unos casos específicos a seguir.

Esta forma de presentar la integral produce efectos en el desarrollo conceptual de los estudiantes donde las construcciones de nociones aparecen visiblemente complejas con ausencia de actividades asociadas a prácticas de la vida tendiendo a favorecer el desarrollo de técnicas de integración y en consecuencia su pensamiento algorítmico. Lo anterior permite percibir que la comprensión de los conceptos básicos del Cálculo llega a convertirse en una tarea difícil para la mayoría de los estudiantes en sus primeras experiencias en esta asignatura.

1.3. La situación problema

Bajo este panorama encontramos que la enseñanza de la integral ha estado caracterizada por cinco aspectos a saber:

- Un énfasis en una algoritmia desprovista de significados, (Artigue, 1998, 2003).
- Conceptualización de la integral basada únicamente en la noción de área, (Azcárate y Camacho, 2003).
- Falta de articulación explicita con otras ciencias de las cuales el cálculo es subsidiario, Contreras et al., (2005) y Crisóstomo (2012).
- Insistencia en la enseñanza formalista a sabiendas de las dificultades que trae consigo, (Contreras, Ordóñez y Wilhelmi 2010).
- Uso de los diferenciales por sus bondades didácticas, Pino-Fant et al., (2013); Robles et al., (2014).

Es una situación perceptible en el currículo del segundo curso de Cálculo de nivel universitario en un intento por alcanzar una adecuada comprensión del concepto de Integral: Reconocer y clasificar el tipo de Integral (definida, indefinida e impropia) que involucra una situación problema determinada e identificar el método de integración a seguir. Se observa que la típica explicación escolar regularmente no parte de una presentación que precise un equilibrio entre el desarrollo conceptual de las ideas básicas del Cálculo Integral con el manejo apropiado de sus algoritmos. Tal como se mencionó anteriormente a partir de los problemas observados en la enseñanza de los métodos de integración encontramos que el MIP es el que genera mayores dificultades, lo que podría ser una de las tantas causas, quizá influyente en la denominada crisis. De ahí esta investigación mediante un estudio de caso que, aunque no promete resolver el problema general de la crisis en la enseñanza del Cálculo Integral, sí permite enfocar la visión en la idoneidad didáctica de las formas usuales de enseñar y en la manera de analizarla para superar este aspecto del problema general. La investigación puede arrojar información que vaya más allá del caso particular además, conjeturamos “hipótesis de trabajo” que hay una relación causal documentable entre la baja idoneidad didáctica de los procesos de instrucción y la crisis que se percibe en todo el mundo.

En este estudio de caso el problema que se intenta resolver -o al menos avanzar en su resolución a partir del análisis didáctico a un proceso de enseñanza, para determinar el grado de idoneidad didáctico de dicho proceso de instrucción realizado por un profesor que enseña un método de integración- puede condensarse en dos preguntas: ¿cuáles son las dificultades específicas -de tipo: epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, emocional, ecológico- que se observan durante el proceso de instrucción del método de integración por partes (MIP), cuáles son las causas de la presencia de tales dificultades? y ¿cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de instrucción ejecutado por el profesor al enseñar el MIP?

1.4. Algunos supuestos preliminares

Entre los múltiples factores que pueden originar la percepción de crisis se pueden mencionar el libro de texto, el currículo, la preparación de los estudiantes, los métodos de estudio de los estudiantes y el proceso de instrucción. Esta investigación centra nuestra atención en el último nombrado. Dado que el investigador no es neutral como control de la subjetividad en la recolección y análisis de los resultados, puede ayudar un intento de explicar la actitud que se tiene al comienzo de la investigación. Para el desarrollo del presente estudio de caso no se habla de hipótesis nula e hipótesis alternas en el sentido de conjeturas que se van a poner a prueba para confirmarlas o rechazarlas, sino de ciertos supuestos o hipótesis de trabajo que todo investigador supone al comienzo como más probables y que reconoce guiaron sus búsquedas y su selección de la temática y las preguntas de investigación. El investigador es consciente de que pueden sesgar sus percepciones y conclusiones, pero que al explicitarlas al comienzo, permiten a los lectores y al investigador mismo controlar esos efectos perturbadores. Se plantean los siguientes supuestos preliminares como respuestas tentativas previstas para las preguntas de investigación.

1. Se espera observar muchas dificultades que la literatura de la didáctica del Cálculo Integral ha documentado y encontrar algunas específicas del estudio de caso.
2. Se espera encontrar cómo el tipo de matemáticas enseñadas y la gestión de los procesos de enseñanza y de aprendizaje (en particular la gestión de conflictos) generan las dificultades observadas.
3. A partir de los resultados encontrados sobre el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza del MIP se espera una mediana o baja idoneidad didáctica en la mayoría de los seis criterios del EOS.

El investigador trata de contrastar estas hipótesis o supuestos contra la observación de una trayectoria específica de enseñanza para lograr un cierto nivel de objetividad pero no puede negar que formularlas implica ya reconocer la sospecha inicial del investigador de que una de las causas, evidentemente no la única, que explica los malos resultados de los estudiantes en matemáticas es la utilización en el aula de materiales y métodos de enseñanza que desconocen cómo se aprende o que están en clara confrontación con la construcción de los conceptos matemáticos. Confirmar o refutar las causas sería factible desde el estudio de un solo caso si se tratara de contrastarlas globalmente con respecto a la crisis que Artigue y otros perciben en muchos países. Sin embargo, sí podrían confirmarse localmente en el caso estudiado y proporcionar a los docentes que aprovechen el análisis de este caso particular como manera de reflexionar sobre su propio modelo de enseñanza y de autoevaluar su idoneidad didáctica. Si bien aún queda mucho para disponer de una teoría coherente que explique suficientemente todos los fenómenos que se dan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del Cálculo Integral y que ponga de manifiesto el papel del conocimiento matemático, el del alumno y el del profesor, se dispone ya de aportaciones teóricas muy importantes dentro del EOS que ofrece una nueva perspectiva teórica para investigar el potencial didáctico de los ambientes matemáticos de aprendizaje.

1.5. objetivos

A continuación presentamos los objetivos de la investigación.

1.5.1. Objetivo general. Caracterizar el proceso de instrucción que ha seguido un profesor cuando explica el MIP en un curso de Cálculo Integral identificando dificultades específicas que se observen en el desarrollo de las clases; indagar sus causas y comprobar si persisten o no para determinar con base en esa información, el grado de idoneidad didáctica del proceso de instrucción ejecutado al enseñar el MIP desde los criterios de idoneidad propuestos por el EOS.

1.5.2. Objetivos específicos. Se plantean 4 objetivos específicos a saber:

1. Realizar el análisis didáctico al proceso de instrucción implementado por el profesor, utilizando algunas herramientas del EOS.

2. Inferir el modelo de clase que sigue el profesor a partir de las prácticas matemáticas implementadas, los objetos y procesos matemáticos involucrados y la identificación de normas que se ejecutan durante el proceso de enseñanza del MIP.
3. Identificar las dificultades de tipo epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, emocional y ecológicos, observadas en el desarrollo de las clases, para determinar en qué grado estas desencadenan en lo que el EOS denomina conflictos semióticos.
4. Valorar el grado de idoneidad didáctica del proceso de instrucción ejecutado.

Capitulo 2.Antecedentes

En este capítulo se presenta los antecedentes de la investigación desde dos puntos de vista: los trabajos realizados en Educación Matemática sobre la enseñanza de la integral y los trabajos centrados en la enseñanza de la integral como objeto de aprendizaje.

2.1. Investigaciones realizadas en Educación Matemática relacionadas con la enseñanza de la integral

El concepto de Integral es esencial dentro del Análisis Matemático que se ubica dentro del PMA y en particular en la didáctica del Cálculo Integral. No es tarea sencilla distinguir si los estudiantes llegan a una verdadera comprensión de la definición del concepto de Integral en lugar de tener sólo una percepción empírica de la integración. A partir del conocimiento de estas dificultades y de la enseñanza del concepto de Integral, Turégano (1993) propone como alternativa enseñarla utilizando la génesis histórica del concepto, comenzado con el concepto de integral de forma independiente de la diferenciación y como primera introducción al límite, partiendo de un análisis epistemológico del concepto de integral y de las aportaciones de matemáticos tales como Cavalieri, Wallis y Roberval.

Turégano (1996) apunta a una posible explicación de la raíz del problema sobre la enseñanza del concepto de Integral: los estudiantes ligan la noción de área a una fórmula; esto es, no consideran el área como un objeto geométrico, sino como un objeto aritmético (un número). Agrega que los conceptos abstractos que sirven para explicar el Cálculo (límite, infinito, etc.) aparecen junto a ideas formales que los caracterizan matemáticamente. Aunado a esto la teoría rara vez se vincula con experiencias previas. Por su parte, Calvo (1997) reporta dificultades en la comprensión del concepto de integral definida con el acercamiento mencionado por Turégano en 1996.

Uno de los fenómenos didácticos considerados dentro del Análisis Matemático es la algebrización del Cálculo Integral señalada por Artigue (1998) que se manifiesta en enfoques excesivamente algebraicos y por tanto reduccionistas de una forma simplista, incluso eludiendo el estudio de los resultados de las razones de cambio. Dubinsky (2000) diseña una instrucción para estudiantes universitarios y concluye que los alumnos muestran una visión diferente que la desarrollada por la instrucción habitual. Czarnocha et al. (2001) advierten que las dificultades en los significados de los conceptos del Cálculo están íntimamente relacionadas con el proceso del paso al límite.

Muñoz (2000) caracteriza la problemática de la enseñanza del Cálculo Integral como un desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico. Señala que en los cursos donde se enseña esa rama del Cálculo, hay un énfasis excesivo en el cálculo de anti derivadas o integrales indefinidas y que poca atención se presta a la conceptualización de la integral (definida), reduciéndose ésta a la definición de Cauchy o a la de Riemann. Además solo hasta que se abordan las llamadas “aplicaciones” es cuando se estudian algunos aspectos de las nociones asociadas a este concepto. Sin embargo en las prácticas predominantes de la enseñanza del Cálculo los problemas en los que se aplica la integral son muy estereotipados. El estudiante puede ver cuál es la integral en juego reduciéndose la evaluación al cálculo de dicha integral vía el teorema fundamental del Cálculo, de ahí el excesivo tiempo dedicado al cálculo de anti derivadas. Por esto Muñoz (2000) dice que no basta dar la definición de un objeto matemático para comprenderlo y consecuentemente aplicarlo. Al respecto Kleiner (2002. p. 136) hace una observación didáctica como resultado de su estudio de la historia del Cálculo: “deberíamos dar a los estudiantes ejemplos –muchos ejemplos en diferentes contextos– antes de definir, generalizar o demostrar”. Artigue (2003) en la misma dirección de Muñoz, considera que se ha dado una excesiva orientación algebraica a la enseñanza del Cálculo con el consecuente demérito de la parte gráfica y geométrica y como resultado los estudiantes no pueden dar su significado real a los procesos de derivación o integración. Otros investigadores como Czarnocha, et al. (2001) y Labraña (2000) coinciden en estos puntos.

Tall (2002) indica que bajo estos escenarios los estudiantes aprenden a desarrollar procedimientos estandarizados para obtener ciertas respuestas luego, esta les provee de un conocimiento matemático sin la metodología que guía al matemático cuando utiliza ese conocimiento en la resolución de problemas en diferentes contextos. Este autor argumenta que la discrepancia observada entre lo que se espera y lo que muestran los estudiantes se debe a que los profesores no se dan cuenta de la cantidad de experiencia que éste utiliza (generalizar, abstraer, formalizar) cuando trabaja con diferentes procesos matemáticos, algo que la mayoría de los estudiantes no tiene entre sus herramientas y habilidades.

Li (2004) defiende la enseñanza mecanicista, argumenta que se requiere que los estudiantes practiquen la resolución mecánica de ejercicios matemáticos bajo el supuesto que la formación de conceptos por parte del estudiante tiene su origen en la práctica manipulativa. Depool (2004) utiliza las nuevas tecnologías para desarrollar la comprensión del concepto de Integral Definida en estudiantes universitarios y definir un modelo de competencia cognitivo de la Integral Definida. En este mismo sentido Camacho et al. (2008) utilizan software en un curso de ingeniería para ayudar a los alumnos a comprender los conceptos de partición, refinamiento, aproximación y límite. A partir del diseño de una ingeniería didáctica para los primeros cursos universitarios en torno al concepto de integral impropia, González-Martín (2006) trata de mejorar la comprensión de este concepto por parte de los estudiantes. A pesar de estos esfuerzos, los conflictos semióticos siguen presentes en el proceso de enseñanza y no parecen resolverse en muchos casos.

Thompson y Silverman (2007) ante las dificultades que tienen los estudiantes para comprender la definición formal de integral como el límite de sumas de Riemann, plantean la conveniencia de conceptualizar primero la función de acumulación y en tal sentido se abocan a estudiar las dificultades que se presentan en los estudiantes en esta conceptualización auxiliar. Por otra parte, Gordon y Gordon (2007) ante lo increíble que resulta para los estudiantes el teorema fundamental del cálculo por la forma en la que lo presenta la enseñanza tradicional, hacen uso de la idea de ajustes de funciones con datos y de un recurso computacional discreto para favorecer el descubrimiento de dicho teorema.

Con el apoyo de recursos tecnológicos encontramos investigaciones como la reportada por Turégano (1993) quien realizó un trabajo donde utilizó la visualización para dar significado al concepto de integral definida basado en la idea de área bajo la curva. Calvo (1997) también sugiere el uso de materiales visuales que enriquezcan el esquema conceptual de la integral definida en el estudiante. Martínez Torregrosa et all. (2002) señalan que las conclusiones de las pocas investigaciones realizadas en la enseñanza del cálculo integral, han evidenciado la existencia de serias dificultades en estudiantes, incluso en profesores, en relación con la comprensión de las ideas propias del Cálculo.

Aldana (2011) hace un estudio acerca de la comprensión del Concepto de Integral definida identificando cómo realizan los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas la comprensión de este concepto. Para ello, hizo un estudio de libros de texto que le permitió identificar los elementos matemáticos que configuran el concepto y establece una descomposición genética del concepto de integral definida. El análisis permitió caracterizar los niveles y subniveles en los que se encuentra la producción realizada por cada estudiante (INTRA 1, INTRA, INTER 1, INTER y TRANS).

Bajo este panorama encontramos que la enseñanza de la integral ha estado caracterizada de varias maneras: un énfasis en una algoritmia desprovista de significados, conceptualización de la integral basada únicamente en la noción de área, falta de afinidad con otras ciencias de las cuales el cálculo es subsidiario, insistencia en la enseñanza formalista a sabiendas de las dificultades que trae consigo y el uso de la tecnología como recurso para salvar esas dificultades. Respecto a la última de las características cabe mencionar que la evolución de los recursos tecnológicos, de acuerdo con Moreno-Armella, Hegedus y Kaput (2008), ofrecen una nueva perspectiva teórica para investigar el potencial didáctico de los ambientes tecnológicos dinámicos continuos que pertenecen a la última etapa en tal desarrollo.

2.2. Investigaciones centradas en la Enseñanza de la integral como objeto de aprendizaje

La enseñanza del concepto de integral en el nivel universitario se desarrolla bajo la perspectiva de “objeto de conocimiento” lo que conduce a pensar que dado este tratamiento didáctico, los estudiantes tienden a adquirir ciertos significados en cuanto a las nociones básicas del Cálculo Integral alejándolos del desarrollo exclusivo como herramienta de cálculo.

En diferentes trabajos de investigación Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, 2005; Font y Ramos, 2005; Godino, Contreras y Font 2006; Ramos y Font, 2006) han desarrollado el enfoque Ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) para el caso del cálculo diferencial e integral, que considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas. Muestran que los estudiantes tienen dificultades para lograr la emergencia del objeto integral debido a la excesiva rutinización algebraica que incide negativamente en la enseñanza y en el aprendizaje de este concepto. Aquí se hace necesario adoptar una posición situada en dos aspectos: el cognitivo y el epistémico. Para el primero considerar los procesos cognitivos del sujeto desde un punto de vista semiótico (construcción de significados personales). Para el segundo, implica asumir que es fundamental problematizar el propio conocimiento matemático (construcción histórico-epistemológica de significados institucionales) no considerándolo como trasparente y acabado. Con esto en el EOS se entiende la comprensión esencialmente como una competencia que posee el estudiante y no solo como un proceso mental. Desde este punto de vista es posible inferir que un estudiante comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas, lo que implica que la capacidad se traduce en la realización de prácticas que son evaluables públicamente.

Dentro del EOS la idea pragmática de considerar a los objetos matemáticos como sistemas de prácticas y la diferenciación entre significado institucional y significado personal, introduce en la problemática didáctica el estudio de la estructura y caracterización de estas entidades teóricas. Como indica Godino et al. (2003):

> …esta caracterización se puede concebir como una 'medida', no en un sentido psicométrico o matemático estricto, sino en su sentido más general, esto es, como

> categorización de valores variables. Por tanto, puede contribuir a superar la ilusión de trasparencia determinista que adopta frecuentemente cuando se consideran estos problemas (p. 221).

Otro aspecto considerado para esta investigación dentro del análisis didáctico de procesos de instrucción, es que en la última década aumentó el interés por investigar el conocimiento y las competencias que necesitan los profesores de matemáticas para conseguir una enseñanza eficaz con procesos de instrucción de calidad (Wilson, Cooney y Stinson, 2005; Hill, Blunk, Charambus, Lewis, Phelps, Sleep y Ball, 2008). Entre estos trabajos es necesario resaltar los que consideran en el marco del PMA que el profesor debe desarrollar la competencia "mirar con sentido" que le permite ver las situaciones de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional, que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas (Mason, 2002). También los trabajos que se desarrollan en el marco del EOS (Godino, Batanero, Font, 2007) ya que en este enfoque se proponen cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de instrucción que concuerdan con el objeto de esta investigación. Este tipo de análisis tiene por objeto que el profesor tenga instrumentos para describir, valorar y mejorar dichos procesos.

Según los aportes de Hill, Blunk, Charambus, Lewis, Phelps, Sleep y Ball (2008), se puede definir la calidad epistémica de la instrucción como un compuesto de varias dimensiones que caracterizan el rigor y la riqueza de las matemáticas de la clase, incluyendo la presencia y ausencia de errores matemáticos, explicación y justificación matemática, representaciones matemáticas y observaciones relacionadas. Al respecto, Font y Adán (2013) plantean que estos autores

> Han desarrollado un sistema de categorías para medir la calidad matemática de la instrucción: a). Formato de segmento. b). El trabajo en las clases está conectado a las matemáticas. c). La riqueza de las matemáticas. d). Trabajo con los estudiantes. e). Errores e imprecisiones en el lenguaje. f). Participación de los estudiantes. Para cada categoría también se definieron subcategorías (p. 286).

El EOS propone herramientas para describir las matemáticas implicadas en un proceso de instrucción y valorar su idoneidad. Para la descripción, propone herramientas que permiten analizar las prácticas matemáticas y los objetos primarios y procesos matemáticos activados en ellas. Para valorar la calidad de las matemáticas Font, Planas y Godino (2010) proponen el constructo "Criterios de idoneidad" visto desde seis componentes o facetas que serán descritas en el Capítulo 3 de este trabajo.

Capítulo 3. Fundamentos

En este capítulo se presenta un estudio histórico-epistemológico de la integral, pasando por el Pensamiento Matemático Avanzado en el que se fundamentan los procesos de enseñanza y de aprendizaje de este objeto matemático (la integral). El capítulo finaliza con la presentación de algunos elementos teóricos que propone el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS) y que han sido utilizados como soporte teórico y metodológico para este trabajo.

3.1. Marco teórico

En un primer momento se pretende reconocer el significado global de la integral reportado en la literatura, desde un barrido histórico-epistemológico que presentamos en tres momentos que llamamos: infancia del cálculo integral; el cálculo integral desde la edad media y la fundamentación del cálculo Integral. Posteriormente presentamos los principales elementos teóricos del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Cerramos el capítulo con el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS).

3.1.1. Estudio histórico-epistemológico del objeto matemático "la integral". Se pretende mostrar el origen de la noción de este objeto matemático, su desarrollo histórico y sus implicaciones en el proceso de formalización del Cálculo Integral.

La historia de las matemáticas muestra la infancia del Cálculo Integral en la escuela de Atenas, dado que esta ciudad se convirtió no solo en el centro político y comercial sino también en el centro intelectual del mundo griego. Esta escuela se concentró en aspectos especiales para dar solución a tres problemas: a) La duplicación del cubo o el intento de encontrar una arista de un cubo cuyo volumen sea el doble de un cubo dado; b) La trisección de un ángulo dado; y c) La cuadratura del círculo, o intento de encontrar un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado. Arquitas, buscó soluciones construyendo modelos mecánicos que influyeron a Zenón de Elea, quién llegó a convertirse en el "crítico filosófico de los matemáticos de la época" (Newman, 1994, p. 22). Es Zenón quien postula su paradoja comúnmente conocida como "Aquiles y la tortuga" poniendo así en boga ideas sobre infinitésimos. La secuela de este tipo de intentos para dar respuesta, fue el invento del Cálculo Integral por Aquimedes.

Newman (1994) citando a Heiberg, menciona que en 1906 "se descubrió el libro perdido de Arquímedes titulado *Método*, donde Arquímedes considera a Demócrito como el primer matemático que estableció correctamente la fórmula del volumen de un cono o de una pirámide" (p. 22). Arquímedes menciona que Demócrito consideró estos solidos como si estuvieran formados por innumerables capas paralelas, (*Figura 1*). Esta observación es sorprendente, pues prefigura la obra constructiva de Arquímedes, y siglos más tarde, la de Cavalieri y Newton. De esta forma, se dan los inicios de la teoría de límites, que bien podemos llamar la infancia del Cálculo Infinitesimal, que si lo miramos detenidamente comenzó con el Cálculo Integral.

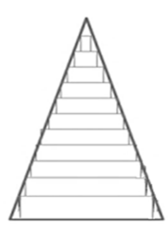


Figura 1. Demócrito previó la integral de volumen con su método de las capas.

Tomado de Newman, (1994, p. 23).

En esta misma escuela, aparecen los trabajos de Eudoxo. Una consecuencia inmediata de esta obra, fue la creación del *método exhaustivo* que servía de base a las observaciones de Demócrito sobre el volumen de un cono y a las de Hipócrates referente al área de un círculo, trabajos retomados por Arquímedes para consolidar y fundar el Cálculo Integral, ofreciendo demostraciones estrictas para encontrar las áreas, volúmenes y centros de gravedad de curvas y superficies, círculos, esferas, cónicas y espirales.

La historia de la ciencia muestra que este legado griego pasó a la India y a Arabia después de casi mil años de inactividad. Este conocimiento matemático pasó a Europa occidental por medio de los árabes, teniendo en cuenta que ellos no fueron, en ningún sentido, los creadores ni del algebra, ni de la notación numérica. Lo que, si se le reconoce al mundo árabe, es que rindieron homenaje a las matemáticas y valoraron el saber antiguo, tanto si provenía de Grecia como de la India.

Como segunda etapa miraremos el Cálculo Integral desde la edad media. En este período se destaca el trabajo de Cavalieri titulado "Geometría indivisibilibus" con reflexiones sobre la generación de figuras geométricas. En esta obra considera una figura plana como compuesta del conjunto de sus líneas y el sólido como constituido de un número indefinido de fragmentos planos paralelos. Allí, con el fin de evitar sumar indivisibles, determina en su lugar las proporciones o relaciones (Pier, 1996).

El siguiente paso de las matemáticas occidentales se dio en el siglo XVI con los trabajos de los geómetras franceses Descartes y Pascal. El primero cambió la faz de las matemáticas, dando a la geometría una universalidad no alcanzada hasta entonces y consolidando una posición que hizo del Cálculo Diferencial, el descubrimiento inevitable por Newton y Leibniz. Posteriormente, Wallis, matemático inglés, siguió la fructífera indicación de exponentes negativos y fraccionarios. Descartes funda la geometría analítica y llega a distinguir entre dos clases de curvas: geométricas y mecánicas, las que posteriormente Leibniz denomina algebraicas y trascedentes.

Pascal se encarga de la continuación natural de lo que Kepler había iniciado en geometría proyectiva. Su originalidad, surge de la discusión sobre un problema referido a una curva llamada cicloide, a la que descubrió sus propiedades principales por medio de argumentación geométrica. De esta manera Pascal haciendo uso del método de los indivisibles creado por Cavalieri[1], lanzó lo que Newman (1994, p. 22) llama "el segundo capítulo del Cálculo Integral" sin desconocer que fue Grégoire de Saint-Vincent quien obtuvo resultados sobre integrales antes que Fermat. Para esta época se le atribuye a Fermat realizar el cálculo de ciertas integrales importantes, es él quien trata completamente, con funciones potenciales, el problema de una curva que va hasta el infinito cuya área es finita. En particular, la suma S de una progresión infinita de primer término a y de razón $x, (x < 1)$ expresada en nuestra notación actual como $S = \frac{a}{1 - x}$. La suma infinita será para Fermat un punto de partida para las cuadraturas.

Parece ser que, desde 1636, Fermat conocía lo que, en notación actual es, $F(x) = \int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, para todo racional n distinto de -1, lo que le dio las bases para que en

1 Cavalieri de Bolonia, notable geómetra que hizo progresar el cálculo integral con su método de los indivisibles, continuando la geometría del tonel de vino de Kepler.

1668 desarrollara el cálculo de la integral de las "parábolas generalizadas"

$F(x) = \int_0^a x^{\alpha}\, dx\ ,\ \alpha < 0 \rightarrow \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, que es un problema parecido al anterior. Para esto, utilizó técnicas parecidas a las sumas de Riemann, siendo por tanto una aproximación geométrica[2].

A lo largo de esta revisión histórica, se percibe que lo operacional suele preceder históricamente a lo estructural. Uno de los primeros cálculos de integrales en intervalos infinitos aparece en el siglo XVII, con un enfoque de tipo geométrico parecido al enfoque usado por Lebesgue en el silgo XX. Es importante reconocer que fue Grégoire de Saint-Vincent el primero en tratar las integrales impropias de forma explícita antes que Fermat. Su motivación era puramente la de investigar, buscar y generalizar resultados. De esta forma, la integral impropia aparece en el escenario matemático de forma natural como una generalización. Saint-Vincent estudia las secciones cónicas y da una expresión para el área bajo la hipérbola $y = \frac{1}{x}$. En un manuscrito de 1625, publicado en Amberes en 1647, muestra de dos formas distintas que si en la *Figura 2,* la relación de las longitudes sucesivas es constante, es decir $\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3}$, entonces las áreas I, II, III, son iguales.

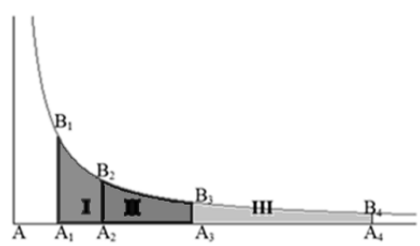


Figura 2. Relación de las longitudes sucesivas (González-Martin, 2006, p. 78)

2 Fermat no aborda curvas más generales porque las que utiliza conservan las progresiones geométricas, es decir, toda progresión geométrica en las abscisas, por correspondencia de la curva, da de nuevo una progresión geométrica en la ordenada, criterio que también usó Saint-Vincent para estudiar la hipérbola. Véase Dhombres, (1995b). En Dhombres (1995a) se muestran ejemplos de cómo se calculaban las áreas.

En concreto, demuestra que si se disponen puntos según una progresión geométrica sobre una de las asíntotas de una hipérbola, las áreas cortadas bajo la curva por ser paralelas a la otra asíntota, son iguales; ésta es la Proposición 109 del libro VI de *Opus geometricum*: las áreas de los trapecios curvilíneos $A_1A_2B_1B_2; \mathrm{A}_2A_3B_3B_2, \ldots$ son iguales cuando las longitudes $AA_1, AA_2, AA_3, AA_4, \ldots$ están en progresión geométrica. Por tanto, estudia en términos de áreas los valores de la función $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{dt}$. De aquí se deduce, en lenguaje moderno, que $F(x) = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$. Este trabajo de Saint-Vincent sirve como una caja de cuadraturas, aunque no se constituye en una teoría de la cuadratura (Dhombres, 1995b). Mucho más tarde, Wallis y Leibniz atribuyen a Gregory la demostración del hecho de que la primitiva de la función $y = \frac{1}{x}$ es la función logarítmica. Con estos cálculos, Saint-Vincent abría una nueva puerta que daría lugar posteriormente a la integración. Subrayamos el hecho que, igual que hace Grégoire de Saint-Vincent, Fermat geometriza todas sus construcciones: las series auxiliares son visualizadas por segmentos, las medias geométricas son construidas, etc. De ahí que, la geometría está omnipresente, no es solamente un enfoque.

A mediados del siglo XVII, Wallis y Hobbes escenificaron controversias alrededor de temas matemáticos, entre ellas, la naturaleza de la trompeta hiperbólica infinita. Esta trompeta se construye a partir del gráfico de la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, para valores de $x > 1$, si lo hacemos girar alrededor del eje OX (*Figura 3*). Es fácil comprobar que el área superficial de la trompeta es infinita (esto es, a medida que recorremos la trompeta hacia la derecha, su área superficial crece sin límite); sin embargo, su volumen interior es finito (de hecho, vale π). Aparte de esta característica esta trompeta tiene otras igualmente sorprendentes: no tiene boquilla (no hay dónde ponerla) y tampoco tiene centro de gravedad.

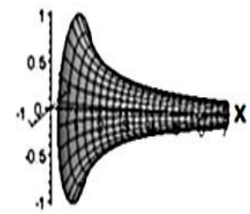


Figura 3. Trompeta hiperbólica. Tomado de (González-Martin, 2006, p. 82)

"Mientras el cálculo de Newton es más próximo a la geometría, el de Leibniz se desarrolla hacia le análisis, con manipulación de fórmulas y poca o ninguna utilización de figuras o interpretaciones geométricas" (Zuin, 2001, p. 34). El desarrollo del cálculo tuvo continuidad con la familia Bernoulli, Euler y Lagrange. Una característica de esta etapa fue la carencia de formalización de su teoría y consecuentemente de su fundamentación teórica, aspectos que son de interés para los matemáticos del siglo XVIII y que marcarían una nueva etapa en la historia del cálculo y consecuentemente en el desarrollo del concepto de integral definida.

Como tercera y última etapa mencionaremos el período de fundamentación del Cálculo Integral**.** A partir del siglo XVIII el concepto de integral pasó por un amplio proceso de fundamentación teórica, basado en el rigor y precisión de los conceptos en la búsqueda de su generalización a una clase cada vez más amplia de funciones. Cabe recordar que fue Jacques Bernoulli (1654-1705) quien usó por primera vez la expresión "Integral" en su obra La Isócrona en el *Acta Eruditorum* de 1690. "Él ya había sugerido dicha expresión a Leibniz, que utilizo la expresión *calculus integralis* (en sustitución a *calculus summatorius*) para referirse al proceso inverso del *calculus differentialis"* (Boyer, 1992, pp. 306-307).

El nuevo enfoque del siglo XVIII es el de sustituir la Integral por un desarrollo en series. Como en este siglo no se escriben los extremos de integración de una función, ya que la notación es inventada por Fourier, la integral impropia no aparece como tal. Sin embargo, está implícita y todos los métodos asintóticos, como la fórmula de sumación de Maclaurin se relacionan con ella. Así, las integrales de la ley normal y de sus momentos no plantean ningún problema, salvo para el cálculo explícito. La convolución aparece en el escenario matemático, lo que implica el cálculo de una integral sobre un intervalo infinito. Este nuevo enfoque aparece durante el desarrollo de los trabajos de Newton y Leibniz, para quienes la aproximación ya no es geométrica, sino formal, lo que implica la desaparición de muchos problemas, pues ya no hay integrales impropias como tales. Así, se contempla la integral como una anti derivada y esto implica la existencia de la función. En notación moderna, se escribe $f(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)$, esto quiere decir que la función que se deriva está bien definida, luego, no hay problemas entre los extremos de integración.

Para ellos, el problema principal consistía en el desarrollo asintótico de la función $\int_a^x f(t)\,dt$ (esto es $\int_a^x f(t)\,dt = x^n + \ldots$), lo que puede ser considerado como una variante de la integración impropia. Por tanto las cuestiones que se plantearon hacen referencia a la buena definición de la función relacionándose más con las integrales impropias de segunda especie.

Leibniz se interesó por el cálculo de los desarrollos de integrales impropias usando series alternadas, del tipo $\sum \frac{(-1)^n a_n}{n} \approx \int_a^{x_0} f(t)\,dt$ que Bernoulli más tarde estudió su convergencia.[3]

Todo este trabajo de desarrollos en series llega hasta el cálculo de una fórmula para $n!$ por Stirling, proviniendo de una integral impropia: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$, cuando $n \to \infty$, donde se utiliza qué $\frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln(n-1)) + \frac{1}{2}\ln n = \int_1^n \ln x\,dx - E + o(1)$. Otra evidencia del cambio de punto de vista, que elimina los problemas sobre la elección de un intervalo finito o infinito, es la ausencia de un tratamiento de las integrales impropias en *Introductio in analysin infinitorum* de Euler (1748)[4].

Euler compara la integral de una función con su serie asociada:

> ...Euler choisit la notation $\int x\,dx$; il adopte les techniques de Newton, notamment l'intégration terme à terme. Toutefois, il lui arrive d'utiliser un processus d'exhaustion notamment en vue de l'approximation des intégrales par le calcul; cette procédure annonce la méthode qui sera suivie par Cauchy. Pour une fonction positive décroissante *f*, Euler compare f (1) + f (2) + … + f (n) à $\int_1^n f(t)\,dt$; à titre d'exemple, il considère $\int \frac{dx}{x^n}$ ". (Pier, 1996, p. 49)

Euler utiliza ya el Criterio Integral y reintroduce consideraciones geométricas. De esta forma parece que históricamente el desarrollo de comparaciones entre la integral y la serie

---

3 Hay que remarcar aquí que con esta formulación se centra la atención en la función y su buena definición en el intervalo. Mientras que antes el problema se planteaba sobre el intervalo (Primera Especie), aquí se mira más bien la función (Segunda Especie)
4 En Opera Omnia, compilación de los trabajos de Euler que se comenzó a publicar en el siglo XX.

asociada a una función, fue tardío a pesar que Fermat había usado series para calcular integrales. Euler define también una transformada integral por una fórmula del tipo $F(p)=\int_a^b \Phi(t,p)\,dt$ siendo F una función desconocida y hace uso de ellas en su búsqueda de soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden. En este momento el cálculo de integrales impropias está completamente normalizado, pues en 1782 Laplace ya define su transformada $s \mapsto \int_0^\infty e^{-sx}\,\varphi(x)\,dx$ y determina el valor de una integral definida de primera importancia. Él considera $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ds\,dx\;e^{-s(1+x^n)}$ e integrando con respecto a s, obtiene $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$, al ser $\int e^{-s(1+x^n)}ds = \frac{-e^{-s(1+x^n)}}{1+x^n}$.

En 1842, de Morgan proporcionó las series convergentes que representan a la integral $\int_u^{+\infty} x^\alpha e^{-x}dx$ para $u>0$ arbitrario. En 1825, Legendre organiza el estudio de las integrales elípticas en un tratado en el que estudia en profundidad las integrales eulerianas. En 1870, Bertrand señaló que la integral $\int_u^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$ ha sido denominada por Legendre "*integral euleriana de segunda especie*" y que su notación $\Gamma(n)$ ha sido adoptada casi unánimemente, a pesar que en una de sus memorias, Gauss la haya designado como $\Pi(n-1)$. Posteriormente desde 1832, Liouville hace uso de la función gamma para introducir el cálculo de diferenciales con índice cualquiera llegando hasta el cálculo integral fraccionario. En 1820 Poisson aborda la resolución de una integral impropia mediante extensión al plano complejo en la obra *Suite* *du Mémoire sur les intégrales définies de Laplace, Journal de l'École polytechinique*, (XVIII). Citado en Pier (1996, pp. 66), considera que $dx = -i\,(cos\ \ z + i\,sen\ \ z)\,dz,$ de donde deduce que $\int \frac{dx}{x} = \left[log\ \ (-(cos\ \ z + i\,sen\ \ z))\right]_0^{(2n+1)\pi}$, lo cual forma parte de uno de los comienzos de la historia de las funciones analíticas.

Cauchy redefine la integral de una función continua por medio de sumas de Riemann sobre un segmento, rompiendo así con la tradición de contemplar la integral como anti derivación y retomando entonces el punto de vista geométrico ya iniciado por Euler y Poisson. En 1821 Cauchy, en su *Cours d'analyse algébrique,* estudia las integrales del tipo $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x)\,dx,$ lo que da lugar a la definición del Valor Principal de Cauchy: un origen de la teoría de distribuciones. Como bien sabemos, si la función $f(x)$ no está acotada en $x = 0,$ esta integral es impropia. Pero el problema de la convergencia es más débil, puesto que se puede encontrar funciones f cuyo valor principal es finito, pero cuya integral impropia en un intervalo que contiene al 0 es divergente. Es de señalar que Cauchy definió este Valor Principal como una alternativa a la divergencia de la integral impropia.

En la Obra *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* (1823), Cauchy da la primera definición precisa de integral. En particular, propone la notación actual para una integral definida, sustituyendo la engorrosa $\int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x = b \\ x = a \end{bmatrix}$ por $\int_a^b f(x)dx$, ya utilizada por Fourier en su *Théorie analytique de la chaleur* de 1822. Vemos que Cauchy vuelve al *método de exhausción* que posteriormente se denominará de "*sumas de*

Riemann". Cauchy formaliza muchas de las propiedades actualmente conocidas y las expresa con la nueva notación, algunas de ellas son:

- $\int_{x}^{x_0} f(x)dx = -\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$

- $\int_{x}^{x_0} (f + ig)_{(x)}\, dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + i \int_{x_0}^{x} g(x)\, dx$

- $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{b} f(x)\, dx$

A Fourier le debemos la notación actual para las integrales, aunque es Cauchy quien la "institucionaliza" en sus trabajos. Fourier estudia también el problema del desarrollo en series alternadas de ciertas integrales, del tipo: $\sum \frac{(-1)^n a_n}{n} \approx \int_{a}^{x_0} f(t)\, dt.$

Es durante el siglo XIX que se desarrollan las técnicas para asegurar los medios de convergencia de las series de Fourier. A Bertrand se le debe un importante trabajo de búsqueda de criterios de convergencia para la serie $\sum f(n)$ según el comportamiento de la función $f(x)$ en el infinito.

Finalmente, es Riemann quien caracteriza las funciones *Riemann-integrables* con una propiedad también válida para las integrales impropias. Una función es Riemann-integrable si, y solamente si, la medida del conjunto de sus puntos de discontinuidad es nula.[5] Parece ser que

---

5 En el vocabulario de Lebesgue (1904), un conjunto de medida nula E es un conjunto que, dado $\varepsilon > 0$, puede incluirse en una reunión de intervalos $I_n : E \subset \bigcup_{n \geq 1} I_n$, tales que $\sum_{n \geq 1} |I_n| < \varepsilon$

la teoría de integrales impropias tuvo su contacto con la teoría de series divergentes, en desarrollo en el siglo XIX; ésta se retoma ligada a un problema de integración impropia.

Dado que fue solo hasta el siglo XVIII que se cambió el punto de vista global-local de la integral, la formulación del problema cambia y entra en escena el estudio de las propiedades de la función en el intervalo de integración. Sin embargo este problema se plantea bajo un enfoque ahora analítico y no geométrico. Sin embargo, en los siglos XIX y XX volvemos al enfoque gráfico del problema, pero esta vez vestido con el nuevo formalismo desarrollado en este período.

Este nuevo enfoque permite el estudio de las integrales por medio de series, lo que promueve diversos estudios que desembocan en los criterios de convergencia de Bertrand y de Cauchy. Desde Leibniz no se veían estudios sobre integrales impropias de funciones que cambian de signo y que Fourier desarrolló posteriormente. Solo hasta 1902 Henri Lebesgue descubrió una nueva integral con todos los inconvenientes de la integral de Riemann.

Esto hizo que se tuviera en cuenta una clase de funciones integrables más amplia. Sin embargo, Bosch y Kucera (1999) plantean que al comparar la integral de Lebesgue con la integral impropia de Riemann se ve que ninguna de las dos sea más general que la otra.

Armand Denjoy y Oskar Perron en 1912 y 1914 respectivamente, de forma independientemente ofrecen una noción más general del concepto de integral, que posteriormente resultaron ser equivalentes. En 1955 Ralph Henstok y en 1957 Jaroslav Kurzweil por separado dieron una formulación mucho más simple de la integral denominada integral de Denjoy-Perron. La integral de Henstock-Kurzweil o integral medidora es tan buena como la integral de Lebesgue y la definición se muestra un poco más complicada que la integral de Riemann. Sin embargo, Carlos Imaz y Juan Rivaud del Cinvestav de Mexico, mencionan en el número 28 de *Miscelánea Matemática*, haciendo eco a la propuesta de Bosch y Kucera, un respaldo pleno a la idea de sustitución de este tipo de integrales. Entre las razones que dan para recomendar dicha substitución, se encuentra por un lado que la integral medidora es muy general, ya que incluye a las integrales de Riemann y Lebesgue, además de incluir a la integral impropia de Riemann.

Este devenir histórico permite comprender lo que la literatura en Educación Matemática ha denominado "Configuraciones Epistémicas de la integral" presentadas en el Capítulo 5 como elementos para interpretar el significado general de la integral que será utilizado en el análisis de los Capítulos 7 y 8 de este trabajo.

3.1.2 El Pensamiento Matemático Avanzado (PMA). Crisóstomo (2012) citando a Artigue, Batanero y Kent (2007) menciona que el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) está relacionado con los enfoques para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior o "pos secundaria". Entre las principales teorías desarrolladas están la Teoría APOS (Dubinsky, 1994; Dubinsky y McDonald, 2001), Obstáculos Epistemológicos (Cornu, 1983; Sierpinska, 1985, 1987; Schneider, 1991), Dualidad Proceso-Objeto (Dubinsky, 1991, Sfard, 2000), Enfoque Epistemológicos (Dorier, 2000; Sierpinska, 2000), Cognición Corporificada (Lakoff y Nuñez, 2000), Enfoques Antropológico (Chevallard, 1992; Bosch y Chevallard, 1999), Enfoque Ontosemiótico (Godino y Batanero, 1994) y Socio matemática (Cantoral y Farfán, 2003).

Dichas teorías han sido fundamentales en el desarrollo de las investigaciones realizadas en el nivel superior particularmente, con las relacionadas con la Didáctica del Cálculo. Para esta investigación se ha tenido en cuenta las aportaciones de las investigaciones centradas en el PMA y se utiliza como principal marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS, Godino y Colaboradores). Como uno de los objetivos de este trabajo se relaciona con la caracterización del proceso de enseñanza de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas, esta investigación requiere, además, apoyarse en los estudios desarrollados sobre la formación de profesores de matemáticas, y particularmente de los profesores-formadores que actúan en la docencia de Cálculo.

Síntesis y constructos teóricos del PMA. En 1985 en el congreso del PME (Psychology of Mathematics Education) se forma un grupo de trabajo cuyo objetivo fue estudiar la naturaleza del PMA y en particular, profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Dreyfus, 1990; Tall, 1991). Además en esa misma época, se amplía el campo de los problemas investigados hasta entonces centrado en los conceptos básicos de las Matemáticas de la enseñanza primaria, que corresponde al "pensamiento matemático elemental" y a cuestiones relacionadas con el pensamiento matemático propio de los currículos de los últimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios. Este desarrollo de investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de temas relacionados con el Análisis Matemático, ha permitido incorporar que "considerando además los procesos asociados de definición, prueba y demostración, ha venido enriqueciendo los modelos que sirven para describir los procesos cognitivos de aprendizaje de los estudiantes" (Azcárate y Camacho, 2003, p. 2).

Es Tall quien fundamenta la psicología del PMA desde tres partes: la primera, centrada en la naturaleza del PMA que comprende el estudio de los procesos involucrados en la concepción de dicho pensamiento, la creatividad matemática y la demostración matemática. La segunda, denominada teoría cognitiva del PMA, aborda el rol de las deficiencias en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas conceptuales y de sus símbolos en la introducción de los conceptos matemáticos, así como la abstracción reflexiva. La tercera parte, contempla algunas investigaciones centradas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del PMA "…relacionadas con el desarrollo cognitivo y con las dificultades conceptuales y de aprendizaje asociadas a algunos temas como funciones, limites, infinito y demostraciones con el uso de ordenadores" (Crisóstomo, 2012, pp. 33-34).

Para Tall los elementos del PMA existen desde dos secuencias de desarrollo distintas y simultáneas que empiezan, una por la percepción de objetos y la otra con la acción (Percepción-Acción). La actividad matemática empieza por la percepción de objetos en forma visuo-espacial seguida de su descripción verbal, su clasificación y el inicio de deducciones verbales-geometría. La acción sobre objetos matemáticos nos lleva a considerar un tipo de desarrollo cognitivo distinto, relacionado con la dualidad proceso-objeto. Cuando un proceso y su producto se representan mediante el mismo símbolo, Tall utiliza el término procepto (PROceso/conCEPTO).

Azcárate y Camacho (2003) plantean que la principal distinción entre el llamado "pensamiento matemático elemental" (PME) y el PMA, es la complejidad y la capacidad de controlarla, aspecto que definen como procesos del PMA. Los procesos más potentes son aquellos que permiten este control, en particular la representación y la abstracción. Azcárate y Camacho (2003) citando a Dreyfus (1990) manifiestan que abstraer consiste en sustituir fenómenos concretos por "conceptos confinados a la mente humana". Diferencian dos tipos de procesos que los distingue de comprender: Procesos matemáticos como analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar; y procesos matemáticos y psicológicos como representar, conceptualizar (formar conceptos), inducir, visualizar. Mencionan que "el comprender puede ser un "clic" de la mente, pero suele suceder como una secuencia de actividades donde ocurren una gran variedad de procesos mentales que interaccionan entre sí" (p. 137).

Azcárate y Camacho (2003) plantean que existen unas características "perversas" propias de la enseñanza universitaria, en su orden las mencionan: Sucesión: definición-teorema-demostración-aplicación. Ocultar los verdaderos procesos matemáticos anteriores a los resultados finales refinados y formales: ensayo y error; intuición, imprecisión; visualización. Enseñar rutinas: se aceptan las rutinas bien ejecutadas como un éxito (aunque solo sea un éxito aparente), y hacer solo ejercicios de aplicación, pocos problemas (p. 10).

Frente a esas prácticas indican que fomentar la Meta-cognición es una condición importante del auténtico aprendizaje, es decir, recapacitar y pensar en cómo se ha llegado a la solución, adelantar la solución, controlar la complejidad en la abstracción y la representación y controlar los procesos mentales y matemáticos. La forma en que se aprende no suele coincidir con la manera formal lógica de presentar un concepto matemático dentro de la comunidad matemática.

Los modelos que se utilizan en la investigación de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos, como son los implicados en el Análisis Matemático, son modelos con distintas formas teóricas de describir la naturaleza del conocimiento de los estudiantes y los procesos de construcción del mismo. Con el propósito de clarificar las ideas y el lenguaje, resulta relevante la distinción que establecen Tall y Vinner (1981) entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos, es decir entre los diferentes resultados del proceso de adquisición y representación de un concepto matemático en la mente de cada individuo y la definición formal del mismo. "Una representación mental se considera "rica" si refleja muchos aspectos relacionados con el concepto, de tal manera que exista una gran flexibilidad a la hora de enfrentarse y resolver problemas" (Tall y Vinner, 1981, p. 32).

Se considera la definición de un concepto matemático como una secuencia de palabras o una definición verbal del concepto, fruto de su evolución histórica. Se podría distinguir entre las definiciones formales, convenidas y aceptadas por la comunidad científica de los matemáticos en un momento dado que además, se suelen encontrar escritas en los libros y las definiciones personales que utilizan los estudiantes, profesores y matemáticos como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal.

En esencia, el esquema conceptual es algo no siempre verbal que asociamos mentalmente al nombre del concepto, puede ser una representación visual del concepto, pero incluye también las experiencias y las sensaciones vividas en relación al mismo. Desde otra perspectiva, una de las razones de la complejidad del conocimiento matemático superior es que, en su mayoría, los conceptos del PMA pueden jugar el papel de procesos y de objetos, según la situación planteada o el nivel de conceptualización del estudiante. Sfard (1991) habla de dos tipos de concepciones de un mismo concepto matemático: las concepciones que llama *operacionales* cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos dinámicos, algoritmos y acciones, y las concepciones *estructurales* cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos estáticos. Si bien, afirma que los dos tipos de concepciones son complementarias "…la habilidad para ver una función o un número, a la vez como un proceso y como un objeto es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas, cualquiera que sea la definición de "comprender"" (p. 12), ella considera que las concepciones operacionales preceden a las estructurales.

En su análisis del proceso de formación de concepciones, Sfard distingue tres etapas que corresponden a tres grados de estructuralización progresiva, las que denomina interiorización, condensación y cosificación. Se consideran las etapas de interiorización y de condensación como procesos graduales y cuantitativos, mientras la cosificación se considera un proceso casi instantáneo. Tall (1995) explica que la acción sobre objetos matemáticos, nos lleva a considerar un tipo de desarrollo cognitivo distinto, relacionado con el problema de la dualidad proceso-objeto y la noción de lo que llama *precepto*[6].

Para complementar este panorama teórico citamos la teoría de las Representaciones Semióticas, desarrollada por Duval (1993, 1999), al interrogarse sobre si los medios estructuralmente requeridos para que una persona pueda acceder a los objetos del conocimiento matemático son diferentes o no, a los medios requeridos para acceder a los otros

---

6 Azcárate y Camacho mencionan que Procepto es nuestra traducción de la expresión original inglesa procept, que proviene de proceso (PROcess) y de concepto (conCEPT).

objetos de conocimiento, constata la no accesibilidad de los objetos matemáticos fuera de un sistema semiótico, aunque sea rudimentario. Los objetos matemáticos no son objetos reales como pueden ser los propios de las disciplinas como la biología o la física que pueden ser manipulables. Verifica la necesidad de no confundir nunca un objeto con su representación semiótica por ejemplo, un número y su escritura o un objeto geométrico y la figura que lo representa.

Por la dificultad de las finas distinciones semióticas introducidas por Duval, para el análisis didactico de este trabajo, nos ceñiremos a las propuestas del EOS para las funciones semióticas. Por ejemplo, si se consideran los registros de representación lingüísticos como el lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal, u otros registros como figuras geométricas, gráficos cartesianos o tablas, se entiende por cambio de registro de representación a la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico. Por ejemplo, realizamos un cambio cuando al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función, esto conlleva a que el dominio del conocimiento matemático se moviliza en diferentes registros de representación, haciéndose necesario coordinarlos.

Las definiciones en el PMA. Una de las formas de establecer la diferencia entre las matemáticas elementales y las avanzadas, es considerar que en las primeras los objetos se describen, mientras en las segundas se definen. Si nos referimos al lenguaje, en ambos casos se utiliza el lenguaje natural para relacionar las actividades matemáticas con el contexto, sea matemático o sea del mundo externo y para describir o enunciar las propiedades de los objetos. Sin embargo, en las matemáticas elementales las descripciones se construyen sobre la experiencia (percepción visuo-espacial, interacción con proceptos operacionales), mientras que en el más alto nivel de las matemáticas avanzadas (conocimiento formal), las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones.

Adquirir un concepto matemático se puede describir como construir un esquema conceptual del mismo. Saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado. En realidad comprender quiere decir tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto mediante imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias o sensaciones. Sin embargo, la presentación y la organización de la mayoría de los libros de texto y de buena parte de las clases de matemáticas, parecen basarse en la presunción de que los conceptos se adquieren mediante su definición y de que los estudiantes utilizarán las definiciones en la realización de tareas o la resolución de problemas. Existe aquí un conflicto que Vinner (1991) expresa diciendo:

> Las definiciones crean un problema muy serio en el aprendizaje de las matemáticas. Representa, quizá más que cualquier otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos. (p. 57).

Por su parte Azcárate y Camacho (2003) mencionan que

> Desde un punto de vista cognitivo, parece que los autores de libros de texto y muchos profesores dan por supuesto que se produce el aprendizaje a partir de las definiciones y que en la resolución de problemas y realización de tareas son éstas las que se activan en la mente del estudiante y controlan el proceso. Sin embargo, lo que ocurre en la práctica, según las investigaciones que se ocupan de esta cuestión, es que el esquema conceptual se construye a partir de la experiencia del estudiante, es decir a partir de situaciones muy

> variadas. Los alumnos tienden a realizar sus tareas de forma espontánea, de acuerdo con los hábitos adquiridos en la vida cotidiana, es decir que elaboran sus respuestas a partir de los elementos de sus esquemas conceptuales evocados por el contexto de la situación. (p. 136).

Sin embargo, indican que

> Es evidente, que, en el campo de las matemáticas, como por ejemplo el del Análisis Matemático, las definiciones desempeñan un papel muy importante en la realización de tareas cognitivas y, por consiguiente, en la formación de los esquemas conceptuales. De ahí la necesidad de ingeniar situaciones didácticas adecuadas, en las cuales las definiciones sean imprescindibles para una correcta realización de la tarea (p. 137).

3.1.3. El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS). Nuestro objetivo es estudiar los fenómenos que acontecen en el proceso de enseñanza de las matemáticas en particular, de la noción de integral. Para ello, se adoptó como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), propuesto por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009, principalmente). Este enfoque desarrolla herramientas para un estudio unificado de los fenómenos y procesos que acontecen en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

3.1.3.1. Fundamentos Del Enfoque Ontosemiótico (EOS). Godino, Batanero y Font (2007), en el documento *Un marco teórico integrativo para la Didáctica de la Matemática*, muestran que el EOS, es un marco teórico que trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y que adoptan principios didácticos de tipo socio constructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El conjunto de nociones teóricas que componen el EOS se clasifican en los siguientes cinco grupos, cada uno de los cuales permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas.

1. Noción de sistema de prácticas (operativas y discursivas). Se asume una concepción pragmatista-antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). Adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático la resolución de problemas.

2. Noción de configuración de objetos y procesos matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas. La adopción de una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado (contenido de funciones semióticas) articula de manera coherente la concepción antropológica (Wittgenstein, 1953) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos.

3. Noción de configuración didáctica, como sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación-problema constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática. Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémicas (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos

personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático.

4. La noción de dimensión normativa como sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas generaliza la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es el principal factor explicativo de los fenómenos didácticos.

5. La noción de idoneidad didáctica como criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. El sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas, constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El EOS, basado en la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS), considera a los objetos matemáticos como entidades que surgen al realizar sistemas de prácticas correspondientes a un campo de problemas. De esta forma, los objetos matemáticos personales se definen como “emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 335). Los objetos personales cobran forma, van apareciendo en un aprendizaje motivado por la propia práctica. Los presupuestos de tipo pragmático definen al significado personal de un objeto como “el sistema de prácticas que efectúa un sujeto para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado” (Godino y Batanero, 1994, p. 341).

Por otra parte, puede considerarse que los objetos matemáticos nacen progresivamente de los sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. En Godino y Batanero (1994) se define el significado de un objeto institucional como “el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge en un momento dado” (1994, p. 340). Godino et al. (1994) proponen que la noción de función semiótica se puede concebir, al menos metafóricamente, como una correspondencia entre conjuntos poniendo en juego tres componentes: Un plano de expresión (objeto inicial, considerado como significante); un plano de contenido es decir, un objeto final considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor; y un criterio o regla de correspondencia, es decir, “un código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido, estableciendo el aspecto o carácter del contenido referido por la expresión” (p. 341).

Tanto el objeto inicial como final pueden estar constituidos por uno o varios de los tipos de entidades primarias consideradas es decir, los tipos de entidades primarias pueden desempeñar el papel de expresión o de contenido en las funciones semióticas. Godino (2002) afirma que “las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo *representacional* (un objeto se pone en lugar de otro), *instrumental* u *operatoria* (un objeto usa a otro u otros como instrumento) y *componencial o cooperativa* (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos)” (p. 250). Además, menciona que de esta manera “la semiótica que proponemos generaliza de manera radical la noción de representación tan usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática" (2002, p. 252).

Sobre este panorama el análisis Ontosemiótico de un proceso instruccional, consiste en identificar la trama de funciones semióticas que establecen los agentes participantes (profesor-alumnos) en los procesos de comunicación. El estudio de la complejidad semiótica permite formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales, entendiendo por conflicto semiótico, a “la disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos -personas o instituciones- en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas” (Godino 2002, p. 258).

El EOS propone que para el análisis Ontosemiótico de un episodio de clase se deben tener en cuenta como mínimo tres aspectos: los agentes involucrados, es decir, la institución representada por el docente que instruye, los estudiantes, el texto y la persona que realiza el análisis (investigador); los objetos puestos en juego, como entidades, expresiones, contenidos y códigos interpretativos; y los diversos tipos de funciones semióticas.

Considera importante el orden en que aparecen dichos elementos a lo largo de un determinado proceso de instrucción, nominando como trayectoria epistémica a la descomposición en unidades de análisis de un episodio de clase con el fin de caracterizar el tipo de actividad matemática que se implementa efectivamente. Este tipo de análisis ayudará a formular hipótesis sobre puntos críticos del proceso instruccional en los que puede haber lagunas o vacíos de significado o bien, disparidad de interpretaciones que requieran fases de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio.

D´Amore, Font, Godino (2007); Font y Contreras (2008); Font y Godino, (2006); Godino y Batanero (1994); Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006); Godino, Contreras y Font (2006); Godino, Font y Wilhelmi (2006); Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009), proponen, en el marco del EOS, que es posible hacer una adaptación de los cinco niveles de análisis de procesos de estudio.

Estos niveles son considerados para el desarrollo de un análisis completo que permite describir, explicar y valorar procesos de instrucción. Para esta investigación se ha hecho una adaptación de estos niveles de la siguiente manera.

Nivel 1. *Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas*. En un proceso de instrucción la aplicación de este nivel nos lleva a describir una secuencia de prácticas matemáticas, durante las que se activan elementos distintos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la instrucción y un medio donde se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos etc.).

Nivel 2. *Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.* La finalidad de este nivel de análisis es describir la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos, ya que el agente realiza practicas orientadas a la resolución de situaciones-problema, en las que se deben considerar, entre otros aspectos, las configuraciones de objetos y los procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas. Para este nivel, nos centraremos en la elaboración de las configuraciones didácticas y epistémicas de objetos y procesos matemáticos, con el fin de describir la complejidad Ontosemiótica de las prácticas, de ahí describir y explicar los conflictos semióticos que se producen o pueden producirse en un proceso de instrucción.

Nivel 3. *Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas en torno a conflictos*. Dada la diversidad de interacciones didácticas ocurridas en cualquier proceso de instrucción, para este nivel nos centramos en las interacciones en torno a conflictos de tipo semiótico. Cada proceso de estudio se modeliza como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estado y trayectorias. Considerando las seis dimensiones de cualquier proceso de instrucción, se tienen seis trayectorias: a) epistémica, que consiste en la distribución a lo largo del tiempo de enseñanza de los componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos); cognitiva: desarrollo de los significados personales (aprendizajes); b) mediacional, que es la distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos; c) interaccional, que consiste en la secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados; d) afectiva, que es la distribución temporal de los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido; e) ecológica, que se fundamenta en el sistema de relaciones con el entorno social, político, económico. Lo anterior soporta y condiciona el proceso de estudio (Godino, Font, y Wilhelmi, 2006, pp. 3-4). Cada uno de los estados dará lugar a una configuración (epistémica, cognitiva). La interacción entre los distintos estados y trayectorias se describe mediante las nociones de configuración didáctica y trayectoria didáctica, que nos proporcionan herramientas para identificar los patrones de interacción de una manera sistemática.

Nivel 4. *Identificación del sistema de normas y metanormas*. En este nivel se valora qué tanto las prácticas matemáticas como las interacciones están consideradas y soportadas por un conjunto de normas y metanormas que regularan las acciones y que deben ser analizadas. Sirven para valorar la pertinencia de las intervenciones de los profesores con los estudiantes y sugerir cambios en las normas buscando optimizar el aprendizaje.

Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa ya que sirven para comprender y responder a las preguntas ¿Qué ha ocurrido aquí? y ¿por qué?

Nivel 5. *Valoración de la idoneidad didáctica interaccional del proceso de estudio*. Este nivel se ocupa del análisis de tipo valorativo. La didáctica de la matemática no debería limitarse solo a la descripción, sino que debería aspirar a la mejora del funcionamiento de los procesos de estudio. Para ello, son necesarios los "criterios de idoneidad" que permiten valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y "guiar" su mejora, evaluando la pertinencia de los procesos de instrucción matemática y señalando pautas para la mejora del diseño y la implementación del proceso de estudio entendida como "criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/implementados" (Godino, Font y Wilhelmi, 2006, p. 5). Dado este carácter sistémico, esta idoneidad supone la articulación de las idoneidades parciales epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica que se sintetizaran más adelante.

Durante el desarrollo de esta investigación, se muestra un análisis didáctico desde la aplicación de estos niveles usando como contexto de reflexión el análisis de doce episodios de clase de matemáticas con la asignatura Cálculo Integral, en la que un profesor implementa un proceso de enseñanza del MIP. Con este fin, se considera útil introducir las nociones de trayectoria epistémica, configuración epistémica y estados potenciales de dichas trayectorias.

Trayectoria epistémica. Dentro del EOS se distinguen seis categorías de entidades primarias como constituyentes de los sistemas de prácticas: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, proposiciones y argumentos. La trayectoria epistémica es la distribución en el tiempo de estos componentes en un proceso de estudio. Distinguiremos en ella, por tanto, seis estados posibles, según el tipo de entidad que se estudia en cada momento: E1: Situacional: se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas. E2: Actuativo: se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver los problemas. E3: Lingüístico: se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc. E4: Conceptual: se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego. E5: Proposicional: se enuncian e interpretan propiedades. E6: Argumentativo: se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

Según Godino, Contreras y Font, (2006, pp. 8-12), estos estados se suceden a lo largo del proceso instruccional relativo a un tema o contenido matemático, El análisis de la trayectoria de un proceso instruccional permitirá caracterizar el significado institucional efectivamente implementado y su complejidad Ontosemiótica. Para analizarla, su desarrollo o crónica será dividido en unidades de análisis de acuerdo a las distintas situaciones problema (o tareas) que se van proponiendo.

Godino, Contreras y Font, (2006) proponen dentro del EOS el constructo Configuración epistémica así:

> Se llama *Configuración epistémica* al sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos relativos a la resolución de una situación problema.[7] Se trata por tanto, de un segmento de la trayectoria epistémica. El análisis epistémico será la caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. Dentro de cada configuración se definen *unidades de análisis* más elementales según los estados de la trayectoria, las que son llamadas unidades *epistémicas*. Las distintas oraciones que componen la crónica de un proceso de instrucción son numeradas correlativamente para su referencia y se denominan *unidades naturales de análisis* (p. 10).

En el desarrollo del análisis didáctico de este trabajo, se presenta la trascripción de los episodios de clase en *unidades naturales de análisis*, las *configuraciones epistémicas* entendidas como las redes de objetos institucionales intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y las *configuraciones Cognitivas*, entendidas como las redes de objetos personales. Es por ello que los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión personal e institucional, ya que son las configuraciones de los objetos puestos en juego y las traducciones entre ellas, las que producen el *significado global* de dicho objeto (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004). Por este motivo, más que hablar de representaciones ostensivas o de signos, en este trabajo hablamos de *configuraciones epistémicas*, para hacer patente la trama de objetos y relaciones que se ponen en juego cuando cambia de registro semiótico o contexto de uso. De ahí que, el interés está realmente en determinar si las representaciones introducidas facilitan o no, la realización de las prácticas que interesan que formen parte del significado global del alumno, en saber si

---

7 Si bien, el origen de la configuración será una situación–problema, en algunas circunstancias puede ser más operativo tomar en consideración otro de los estados de la trayectoria para delimitar la configuración epistémica.

aumenta o disminuye la complejidad semiótica y también en saber si producen o no conflictos semióticos innecesarios.

Cada configuración epistémica, globalmente considerada, desempeña una función especial. Para conocer lo que ocurre en el interior de cada configuración epistémica, es necesario analizarla detalladamente y por tanto, reconocer nuevas entidades y estados en el segmento de trayectoria correspondiente. A lo largo del tiempo se distribuye el planteamiento y resolución de una colección de situaciones-problemas, alrededor de los cuales se construyen *configuraciones epistémicas.* La secuencia de estas configuraciones constituye finalmente el "*sistema de prácticas matemáticas*" que fija el *significado institucional* implementado y el *significado global* alcanzado para el objeto de estudio.

En el EOS se considera "Práctica Matemática" (Godino y Batanero 1994) a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, simbólica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Por tanto, se distingue entre conducta humana, entendida como comportamiento aparente y observable de las personas y práctica, que en tanto que una acción humana orientada a una finalidad, tiene una razón de ser, tanto para quien la realiza como para quien la interpreta porque está sujeta a reglas. Si entendemos la práctica como la describe Rubio (2012, pp. 43-44) "acción sujeta a reglas orientada a un fin", se observa que en la definición de práctica que se ha dado anteriormente se pueden considerar tres intenciones diferentes, las cuales permiten considerar tres tipologías de prácticas que llamaremos: a) *operativas o actuativas*, como toda actuación o manifestación, lingüística o no, realizada por alguien para resolver problemas matemáticos; b) *discursivas o comunicativas*, como comunicar a otros la solución y validar la solución; y c) *regulativas o normativas*, entendida como generalizarla a otros contextos y problemas. No obstante, es más conveniente pensar en una práctica como una acción compuesta sujeta a reglas, en la que puede primar el componente operatorio, el discursivo o bien el regulativo. Las prácticas en las que prima el componente operatorio o actuativo nos permiten realizar acciones y argumentaciones cuya finalidad es la resolución de situaciones problema. Las prácticas discursivas o comunicativas, están relacionadas con el dominio y la creación del lenguaje, así como en su uso para la realización de argumentaciones que permitan dar una justificación de la validez de las acciones realizadas. Las prácticas regulativas o normativas están orientadas básicamente a conseguir establecer propiedades o proposiciones y definiciones de conceptos. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la configuración de la *Figura* 4.

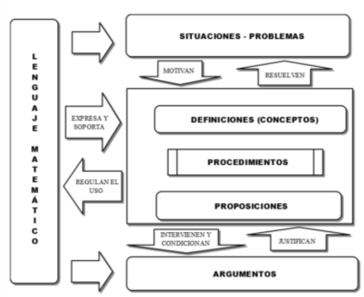


Figura 4. Configuraciones de objeto primarios. Fuente citada en Godino, Batanero y Font (2006, p. 69)

Relación entre creencia y configuración cognitiva. Hay diversas interpretaciones de lo que es una creencia. Al término “creencia” se le asocian “acciones”, las cuales son respuestas a la “situación” que se le presenta al organismo, y “proposiciones” (yo creo A), las que en muchos casos son “propiedades” que relacionan “conceptos”. Según Peirce, el sujeto, ante “situaciones-problema”, genera un proceso de “investigación” para establecer la creencia (Yo creo A). Ahora bien, si reflexionamos con más detalle sobre el mecanismo de fijación de creencias propuesto por Peirce, vemos que el paso de la “duda” a la “creencia” exige unos métodos de “razonamiento” que rigen las operaciones simbólicas que permiten tal paso. Tales métodos se desarrollan por imperativo de la experiencia y se refinan con el uso. Por otra parte, es evidente que todo lo anterior necesita expresarse por medio de un cierto “lenguaje”. En otros términos, la práctica realizada por un sujeto, que genera (o está de acuerdo con) una determinada “creencia”, se puede considerar como el resultado de la activación de algo parecido a lo que en el EOS se ha llamado “configuración cognitiva”.

Relación entre concepción y significado personal de un objeto matemático. Según Ramos (2006) el EOS considera el significado de los objetos personales como el conjunto de prácticas, en la que el objeto en cuestión juega un papel determinante. Además, esta visión holística del significado propuesta en el EOS se relaciona, en cierta manera, con las investigaciones que consideran la concepción de un objeto como un sistema de creencias o como un substrato básico de las creencias.

3.1.3.2. Emergencia de objetos personales matemático-didácticos a partir de prácticas profesionales. Hasta ahora hemos considerado básicamente objetos matemáticos y prácticas matemáticas, pero en el caso de los profesores nos interesa su práctica como profesor de matemáticas. En el EOS, se entiende la práctica del profesor de matemáticas como una práctica que posibilita que los alumnos realicen prácticas de matemáticas, lo cual nos lleva a diferenciar los tipos de prácticas, como mínimo, prácticas matemáticas y prácticas profesionales del profesor de matemáticas. Las prácticas matemáticas enmarcadas en prácticas profesionales generan la emergencia de objetos matemático-didácticos personales en el profesorado. En el EOS, el significado de los objetos personales, matemáticos y didácticos del profesorado, para un objeto matemático institucional, se entiende como el conjunto de prácticas, operativas y discursivas que realiza el profesor, relacionadas con dicho objeto y con su enseñanza y su aprendizaje.

Desde esta perspectiva, algunas de las prácticas que forman el significado de los objetos personales, matemáticos y didácticos de los profesores, para un determinado objeto matemático institucional, tratarán de cómo debería ser el proceso de instrucción y otras son las que intervienen en la determinación del significado pretendido, el implementado y el evaluado. Dicho de otra manera, en el significado de los objetos personales, matemáticos y didácticos, asociados a un objeto matemático institucional, se puede considerar, entre otras, las siguientes componentes: a) lo que hace; b) lo que dice que hace; c) lo que dice que ha acordado implementar con los otros compañeros; y d) lo que dice sobre cómo debería ser el proceso de enseñanza-aprendizaje. En el EOS, se entiende el significado de los objetos personales, matemáticos y didácticos del profesorado, como el conjunto de prácticas, operativas y discursivas, que realiza el profesor relacionadas con el objeto matemático en cuestión y con su enseñanza y aprendizaje.

La primera cuestión que plantea el EOS es de tipo ontológico. Establece la noción de práctica como noción primitiva: "Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Ésta es una noción clave, pues como señala Godino (2002), "como objeto básico para el análisis cognitivo (tanto en su dimensión institucional como personal) proponemos «los sistemas de prácticas manifestadas por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas»" (p. 242), lo que permite considerar los objetos matemáticos como emergentes de dichos sistemas de prácticas y por tanto derivados de ellas. Así, adoptando presupuestos antropológicos los objetos matemáticos se consideran una construcción humana que se va construyendo y enriqueciendo a través de la actividad reflexiva. Es claro que esta emergencia progresiva en los sujetos dará lugar a objetos personales sin embargo, no podemos olvidar que estas prácticas se realizan en el seno de las instituciones donde han sido estructuradas y organizadas y por tanto están mediatizadas por ellas. Esto nos lleva a considerar los objetos matemáticos desde las facetas interdependientes personal e institucional. En concreto los objetos matemáticos personales, según Godino y Batanero (1994) son "emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas" (p. 339). Estos objetos personales van cobrando forma o van emergiendo en un aprendizaje motivado por la propia práctica.

Unido a este término Godino y Batanero (1994) plantean el significado personal de un objeto como "el sistema de prácticas personales de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado” (p. 341). Conviene observar que el significado de un objeto personal consiste en las prácticas que hace la persona y también en aquellas que haría o planificaría en otras situaciones en las que tuviera que resolver problemas similares. Desde esta perspectiva el objeto personal se convierte en una posibilidad permanente de planificación de prácticas. Los objetos matemáticos se pueden considerar como entes abstractos que emergen progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución ligada a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Godino y Batanero (1994) definen el objeto institucional como “emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas” (p. 338). Por otra parte las prácticas pueden variar en las distintas instituciones, lo que nos lleva a conceder al objeto una relatividad respecto a las mismas. Estos autores también recurren a la máxima pragmática para definir el significado de un objeto institucional "Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado” (p. 340).

Teniendo en cuenta su uso en el análisis didáctico se realizan una tipología básica de significados. Así, para los significados institucionales se proponen: el implementado, o sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente en un proceso de estudio específico; el evaluado, que consiste en el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes; el pretendido, que es el sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio y el referencial entendido como el sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. Este significado de referencia será parte del significado global del objeto matemático escogido en función de la institución concreta.

Para los significados personales la tipología es: global, que corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencial el sujeto relativas a un objeto matemático; declarado, que consiste en las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas; y logrado, es decir, prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. El EOS simplifica estos aspectos como se muestra en la *Figura 5*

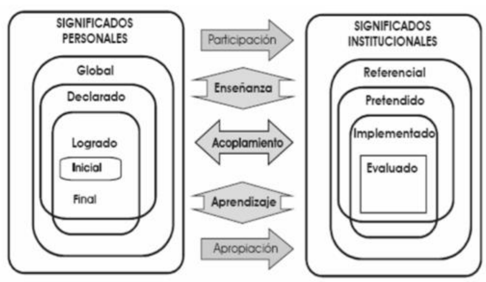


Figura 5. Tipos de significados institucionales y personales. Tomada de (Godino y Font, 2007 a, pp. 2-3)

Al respecto, Ordóñez (2011) manifiesta que

> Esta manera de interpretar el significado desde la dualidad institucional-personal lleva a concebir la comprensión como un proceso social y no como proceso mental. Se interpreta como la correspondencia entre los significados personales y los institucionales. Como consecuencia, está ligada y condicionada por los contextos institucionales, ya que es en ellos donde se determinan los objetos a enseñar, así como su estructura y organización y, por tanto, qué prácticas son adecuadas. Pero es claro que en cualquier proceso de instrucción se puede producir la comprensión o no. Esta forma de entender la comprensión nos proporciona una interpretación de la no comprensión entendida, ahora, como una discrepancia entre los significados personales y los propuestos por la institución (p. 57).

En esta línea, en Godino (2002) se entienden las dificultades y errores en términos de conflictos semióticos, concebidos como “toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas" (p. 258).

En Godino, Font, y Wilhelmi (2007) se presenta la triada Elementos del significado, Dimensiones duales y Configuraciones. En estas prácticas, operativas y discursivas, de las que emergen los objetos matemáticos y por tanto sus significados es necesario interpretar entre otras, las situaciones-problema, las entidades conceptuales y los propios medios expresivos.

Así, si se refieren a significados institucionales cada una de las diferentes organizaciones dará lugar a configuraciones epistémicas y configuraciones cognitivas si se refieren a los significados personales; definidas como redes de objetos emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, como se expresa en la *Figura 6* expuesta en la siguiente página.

Los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unas con otras. La distinción entre expresión y contenido y su correspondencia por medio de una función semiótica nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. La función semiótica se entiende como la correspondencia entre un antecedente o expresión y un consecuente o contenido, establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

En la *Figura 6*, tomada de Ordóñez (2011) indica que no sólo se recogen las entidades primarias y las diferentes facetas, sino procesos matemáticos. La emergencia de los objetos de una configuración tiene lugar mediante los procesos de comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización y problematización. Otros procesos matemáticos aparecen con la consideración de las facetas duales, tal es el caso de la generalización/particularización (faceta intensiva/extensivo), idealización/materialización (faceta no ostensiva/ostensivo), etc.

> Nuestra manera de interpretar los procesos matemáticos como secuencias de prácticas, en correspondencia con los tipos de objetos matemáticos primarios, nos proporciona criterios para categorizar los procesos. La constitución de los objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos primarios, de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización,...) y argumentación (…) tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones son relativas y dependientes de los marcos institucionales, contextos de uso y juegos de lenguaje (Ordóñez, 2011, p. 61).

Figura 6. Objetos primarios, facetas duales y procesos de la actividad matemática. Tomado de Ordoñez (2011, p. 61)

En el EOS, se llama *configuración didáctica* a la secuencia interactiva que tiene lugar a propósito de una situación-problema (o tarea). Una configuración didáctica incorpora una configuración epistémica, que se inicia con una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (definiciones, propiedades y procedimientos) y argumentos, que pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o bien se distribuyen entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá también una configuración docente y otra discente en interacción, además de las correspondientes cognitivas, emocionales y mediacionales. El docente puede desempeñar las funciones de asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación, evaluación. El discente puede a su vez desempeñar los roles de exploración, comunicación, validación, recepción, autoevaluación. La configuración didáctica se concibe como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de la trayectoria didáctica de la que forma parte. Esta noción va a permitir realizar un análisis detallado de los procesos de instrucción matemática. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas.

***3.1.3.3. Configuraciones teóricas didácticas de referencia*.** Pochulu y Font (2010. p. 374) determinan que el análisis de las configuraciones teóricas didácticas[8] discentes de cuatro tipos efectivamente implementadas en un proceso instruccional y de las que potencialmente pueden diseñarse para su implementación se verá facilitado si se dispone de algunos modelos teóricos que sirvan de referencia. Para ello, describen cuatro tipos de configuraciones teóricas que pueden desempeñar ese papel y que pueden presentarse de manera individual, o interactuando entre ellas; en el EOS, se designan como configuración *magistral, a-didáctica, personal* y *dialógica*.

Una configuración teórica didáctica se considera *a-didáctica* cuando el alumno y el profesor logran que el primero asuma el problema planteado como propio y entre en un proceso de búsqueda autónomo sin ser guiado por lo que pudiera suponer que el profesor

---

[8] En este artículo de 2010 se introducen el calificativo “teóricas” para referirse a las configuraciones didácticas discentes de cuatro tipos, que solo van a utilizarse para identificar momentos de las clases en que estas interactúan sin descuidar que las epistémicas y las cognitivas también son de tipo teórico.

espera. La *configuración teórica magistral* se basa en la manera tradicional de enseñar matemáticas con exposición, seguida de ejercicios sobre los contenidos presentados. Una variante intermedia entre los tipos anteriores, puede definirse cuando el profesor se encarga de la formulación y validación, mientras que los alumnos se responsabilizan de la exploración. La institucionalización tiene lugar mediante un diálogo entre el docente y los alumnos, quienes han tenido ocasión de asumir la tarea, familiarizarse con ella y posiblemente de esbozar alguna técnica de solución. En este caso, se habla de *configuración teórica dialógica*. Otro tipo teórico de configuración teórica didáctica surge cuando el estudiante resuelve la situación problema sin intervención directa del docente, aquí, los alumnos resuelven ejercicios propuestos por el profesor o que incluye el libro de texto. Se trata de un tipo de configuración teórica didáctica en la que predomina el estudio personal y que se denomina *configuración teórica didáctica personal*.

***3.1.3.4. Configuraciones Epistémicas de referencia*.** Turégano (1988), identificó tres concepciones distintas para el concepto de integral definida: “1° cuadratura con independencia de tangentes en el periodo que precedió el siglo XVIII, (reflejado en una cantidad de ejemplos relativos al cálculo de áreas bajo curvas realizados independientemente del trazado de tangentes. 2° El Cálculo Integral como inverso del Cálculo Diferencial (siglo XVIII y parte del XIX): con la introducción del concepto de función (Euler) en lugar de las curvas fue gradual el proceso de aritmetización del análisis, donde el interés de la integración consistía en hallar una función conociendo su derivada. Y 3° la integral como límite de una suma (Siglo XIX): el cambio conceptual de función de una variable real, que pasa a ser definida como correspondencia arbitraria entre números reales conlleva a la necesidad de una nueva definición para la integral como límite de una suma, así como a una formulación rigurosa del teorema fundamental del cálculo (trabajo adelantado por Cauchy)" (p. 235).

En este trabajo Turégano planteó implícitamente la necesidad de fundamentar la evolución histórico-epistemológica de la integral, trabajo que adelantó el grupo liderado por Godino, Font, Ordóñez, Crisóstomo y otros, de diferentes universidades de España, quienes han definido las siguientes Configuraciones Epistémicas de referencia para la integral.

Ordóñez (2011) muestra una síntesis de los significados Histórico-Epistemológicos institucionales de referencia para la integral definida en la cultura griega en la edad media, en la etapa del uso explícito de los procesos infinitos y en la etapa de generalización de los métodos infinitesimales. Se generaliza la integral como la inversa de la derivada, como suma de elementos infinitesimales, como límite de una suma y como la integral definida formalizada o extendida a funciones discontinuas, a lo que denomina: Configuraciones Epistémicas a lo largo de la Historia.

Para el estudio de los distintos significados que se han dado para la integral definida Ordóñez (2011) utiliza diversas fuentes bibliográficas, en la mayoría de los casos, hace citas explícitas y en otros solamente las usa de referencia. A partir de estas fuentes, ha conocido los principales acontecimientos de cada época poniendo atención a los cambios importantes, cuáles fueron y cómo se superaron las dificultades, buscando comprender y tener una amplia visión de la situación actual de la integral definida y sus diferentes posibilidades. En Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2005) se señala:

> En la reconstrucción del significado global del objeto interesa, por tanto, identificar los cambios que se van añadiendo en cada categoría de objetos emergentes y que permitirán

> caracterizar los obstáculos, rupturas y progresos en la evolución de las configuraciones epistémicas. Los cambios se caracterizan por la solución que se presenta para la problemática existente en una configuración epistémica en un determinado momento. Pueden implicar tanto la ruptura de la estructura de la configuración, como su evolución para otra configuración epistémica inclusiva y (o) complementaria (p. 131).

Mediante el uso de tablas Ordóñez recoge en primer lugar las entidades primarias considerando las facetas, sobre todo extensiva/intensiva, que predominaban en un determinado momento, pues en ocasiones, el tratamiento intensivo de las situaciones ha supuesto un importante cambio en la matemática que hasta ese momento no generalizaba. También considera elementos emocionales y mediacionales que han posibilitado la matemática de cada época y su avance, las rupturas y fronteras epistemológicas como momentos clave cuando aportan información relevante de una etapa a las siguientes.

Destaca el desarrollo de una noción a lo largo de su evolución histórica y encuentra que:

> Hay cortes, rupturas que conducen, desde la estructura dada a nuevos haceres provocando la variación de los cuadros de validez, y de tiempo en que una determinada matemática es adecuada. Rupturas que no se centran por modo exclusivo en el manejo de nuevos objetos matemáticos, sino en una nueva manera de manejarlos, de plantearlos como problemas; enfoque que conlleva su cohorte de perspectiva epistemológicos y ontológicos distintos y que da paso a otros tipos de hacer a otras matemáticas (De Lorenzo, 1977, p. 37).

A lo largo de este trabajo, plantea 6 Configuraciones Epistémicas que en su orden de presentación son: Geométrica, de Resultado de un proceso de cambio, Inversa de la derivada, de Aproximación al límite, Generalizada y Algebraica.

Por su parte, Crisóstomo (2012) hace un estudio Historico Espistemológico–didáctico de la integral desde una perspectiva centrada en la evolución de las ideas primitivas del cálculo anteriores al siglo XVII, el cálculo del siglo XVII (cálculo infinitesimal), su evolución y las implicaciones de los trabajos de Cauchy y Reimann sobre el objeto la integral, elementos conducentes a la fudamentación del concepto de integral. Luego de este estudio platea 8 significados de referencia para la integral a los que denomina Configuraciones Epistémicas, que en su orden de aparición define como: Intuitiva, Primitiva, Geométrica, Sumatoria, Aproximada, Extra matemática, Acumulada y Tecnológica.

Los significados parciales de la integral que fueron apareciendo a lo largo de la historia no difieren mucho en la manera como los presentan Ordóñez y Crisóstomo. Ambos plantean que en su momento esos significados fueron potentes, considerando las características relativas al origen de cada uno, dado el momento de su desarrollo histórico, su evolución motivada por una constante búsqueda de fundamentación y generalización del concepto, particularmente el de integral definida. Lo anterior se hace sin olvidar que se trabajaban integrales impropias usando series alternadas a las que buscaban su convergencia. Crisóstomo (2012), menciona que

> Estos no se restringían a la solución de los problemas que se generaban y se quedaban sin respuesta (por las limitaciones propias de cada modelo), sino con la fundamentación de una teoría capaz de dar respuesta a una clase cada vez más amplia de situaciones (p. 133).

Desde esta perspectiva, Crisóstomo adiciona dos configuraciones nuevas que Ordóñez no considera, estas son: Intuitiva y Tecnológica, dado el tipo de trabajo adelantado por cada uno. En la tabla 1 presentamos de manera sistémica las configuraciones definidas por estos autores.

Tabla 1. Presentación sistémica de las Configuraciones Epistémicas definidas por Ordóñez (2011) y Crisóstomo (2012).

Ordóñez (2011)	
Configuración	**Síntesis de la configuración**
Configuración epistémica geométrica	El tipo de situaciones que se estudian son cálculos de áreas, volúmenes y longitudes, es decir, situaciones que hacen referencia a un contexto

	geométrico totalmente estático, ausente de movimiento. Su origen está en la cultura griega.
Configuración epistémica de resultado de un proceso de cambio	Considera la idea de acumulación que subyace en la integral y que corresponde con la segunda de las raíces o períodos del desarrollo histórico del Cálculo. Sitúa el inicio en la época Escolástica medieval cuando se interesan por las cuestiones del cambio, considerando el tiempo como prototipo del continuo. Con este significado, es natural considerar los conceptos del Cálculo de la tasa de cambio (diferenciación) y el crecimiento acumulado (integración), junto con el importante teorema fundamental del cálculo que establece la diferenciación y la integración como procesos esencialmente inversos. Este significado será el utilizado en los problemas de modelización donde la integral definida es una herramienta para la resolución.
Configuración epistémica inversa de la derivada	La relación entre derivada e integral, se establece a partir de Newton y Leibniz. Unen los métodos y resultados de las etapas posteriores donde el límite se plantea como noción central y las funciones integrables van teniendo condiciones cada vez menos restrictivas.
Configuración epistémica de aproximación al límite	Está directamente relacionada con la formalización iniciada por Cauchy y que dará lugar a la nueva definición de integral definida que éste realiza. La sitúa históricamente en el tercer período del desarrollo del Cálculo señalado por Kaput (1994, citado en Farmaki y Paschos, 2007) y que corresponde a las preocupaciones por la fundamentación teórica de las bases del Cálculo.
Configuración epistémica generalizada	Está marcada por la necesidad de ampliar el conjunto de las funciones integrables, dado que la fundamentación comenzada por Cauchy ha abierto una nueva línea de desarrollo. Esta integral ha sido tratada en su trabajo por Turégano (1994, p. 97), presentando una propuesta didáctica para introducir la integral basándose en la definición geométrica de la integral de Lebesgue y buscando conectar con la noción de área. Afirma que el problema de calcular el área de las figuras delimitadas por una gráfica de una función en un intervalo, queda reducido en este modelo “al cálculo de la altura media de la función en todo el intervalo [a, b], y, a continuación, calcular el área pedida como el producto de esta altura por la longitud b-a del intervalo cerrado [a, b]” (Turégano, 1997, p. 40)
Configuración epistémica algebraica	Esta configuración epistémica la presenta como fruto de la trasposición didáctica, dado que en la enseñanza de este concepto se emplea gran parte del tiempo a practicar las reglas de integración. De esta manera, da lugar a esta otra configuración epistémica que en este caso escolar, no proviene de la historia estrictamente y que consiste en aplicación de las reglas de integración y la regla de Barrow cuando se está aprendiendo este concepto.
Crisóstomo (2012)	
Configuración	**Síntesis de la configuración**
Configuración epistémica primitiva	Caracteriza esta configuracion por la relacion inversa entre la integración y la diferenciacion que se estableció claramente desde el siglo XVII a traves del Teorema Fundamental de Calculo.

Configuración epistémica intuitiva	A partir del estudio histórico-epistemológico de la integral, plantea que mientras se desarrolló la geometría en Grecia, se puso de manifiesto las ideas respecto a las nociones del continuo, del infinito matemático y del límite. Sin embargo, estas nociones solo se quedaron en un plano implícito trayendo como consecuencia la separación de la Geometría de la Aritmética y acentudando lo que se conoció como el "horror al infinito".
Configuración epistémica geométrica	Plantea que en la practica se abandona el concepto de límite, utilizándose la primitiva y la Regla de Barrow para encontrar los valores de las magnitudes que se pretende medir, a pesar que se usa la idea del límite de las sumas de las areas los infinitos rectángulos para hallar el área de una región plana o el límite de la suma de los volúmenes de los infinitos cilindros, ambos en un intervalo cerrado para calcular el volumen de un solido de revolución.
Configuración epistémica Sumatoria	La plantea enfatizando que a partir del siglo XVIII los conceptos de integral definida e indefinida pasaron por un amplio proceso de fundamentación teórica que implicó un distanciamiento de los factores que motivaron su génesis. Estos aspectos se concretaron solo hasta el siglo XIX con los trabajos de Cauchy como el principal artífice de la introducción del rigor en el cálculo infinitesimal, rompiendo definitivamente con el significado geométrico que subyacía en el mismo haciendo del límite una noción aritmética
Configuración epistémica Aproximada	Contempla conceptos relacionados con las aplicaciones matemáticas y extra matemáticas de la integral definida. Aquí, las situaciones problema asumen otra estructura cuando no es posible identificar una función específica para cada caso o no se puede calcular la primitiva. Regularmente, suceden cuando los problemas están relacionados con datos obtenidos a través de experimentos científicos.
Configuración epistémica extra matemática	Plantea que, en el contexto de un curso de cálculo a nivel universitario, uno de los aspectos fundamentales es el concepto de integral desde las distintas etapas de su desarrollo histórico, dada la amplitud de posibilidades de su aplicación a situaciones problema de distintas áreas del conocimiento. Lo anterior es justificado citando a Kouropatov y Dreyfus (2009), indica que esto requiere desarrollar conocimientos básicos relativos a cada campo, lo que puede convertirse en un desafío que debe ser enfrentado por los docentes y estudiantes de cálculo.
Configuración epistémica acumulada	Los procesos intuitivos de integración trabajados en la época medieval, retoman el trabajo adelantado por los griegos que se caracterizaron por el estudio del cambio y del movimiento, ideas que fueron perfeccionadas con el paso de la evolución histórica del cálculo. Muestra tres bondades presentadas en investigaciones adelantadas por Tall, 1996; Kouropatov y Dreyfus, 2009, quienes resaltan la importancia de desarrollar el proceso de enseñanza de la integral utilizando la noción de acumulación. Estas bondades son: a) la idea de acumulación establece los conceptos de integral definida e integral indefinida de manera natural y conecta los conceptos de integral y derivada; b) la idea de acumulación acerca de las aplicaciones de integral; y c) la idea de acumulación acerca de las aplicaciones posibilita realizar posteriormente la generalización del concepto de integral de manera más natural (Kouropatov y Dreyfus. 2009. pp. 3-420)
Configuración epistémica Tecnológica	Plantea, que las manipulaciones algebraicas pierden su importancia una vez que los cálculos generalmente son realizados cuando se usa un software específico, dado que ahí se da importancia a los resultados obtenidos, a la visualización gráfica, numérica y algebraica que se pueden contemplar simultáneamente en la pantalla, así como en la adquisición de habilidad para la utilización de las herramientas del software.

	También plantea que el rápido desarrollo de tecnologías es muy reciente comparado con la evolución de concepto de integral. Sin embargo, la potencialidad de los aspectos dinámicos del software para los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo a nivel universitario, favorece la transición hacia las matemáticas axiomáticas.

3.1.3.5. Normas y metanormas para analizar los procesos de instrucción. Se trata de tener en cuenta las normas, hábitos y convenciones generalmente implícitas que regulan el funcionamiento de la clase de matemáticas, concebida como micro sociedad que condicionan en mayor o menor medida los conocimientos que construyen los estudiantes. El foco de atención en estas aproximaciones ha sido principalmente las interacciones entre profesor y estudiantes cuando abordan el estudio de temas matemáticos específicos. En Godino, Contreras y Font (2006) se propone tomar en consideración las facetas epistémicas, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica. Siguiendo esta clasificación en Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) se propone considerar las normas según la faceta del proceso de estudio a que se refiere la norma. Esto permite fijar la atención en las normas que regulan seis aspectos: Las matemáticas susceptibles de ser enseñadas y aprendidas en una institución; la manera en que los alumnos construyen y comunican las nociones, procesos y significados matemáticos; las interacciones docente-discente y discente-discente; el uso de los recursos humanos, materiales y temporales; la afectividad (emociones, creencias, actitudes, valores) de las personas que intervienen en el proceso de estudio; y la relación con el entorno (sociocultural, político, laboral, etc.) en el que se desarrolla el proceso de instrucción.

A continuación, presentamos detalladamente la dimensión normativa propuesta por D'Amore, Font y Godino (2007) complementada por Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) y luego por Assis, Godino y Frade (2012). Godino y Font (2007) lo presentan en forma resumida como se muestra en la *Figura 7:*

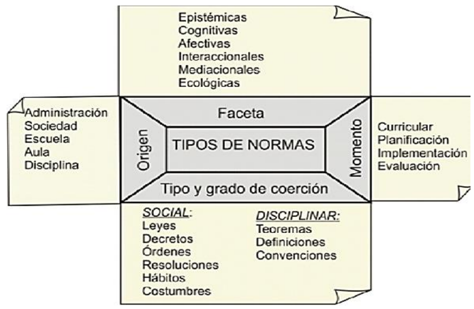


Figura 7. Dimensión normativa. Tomado de (Godino, Font y Wilhelmi 2007, p. 2)

Normas epistémicas. Son el conjunto de normas que determinan la actividad matemática que es posible desarrollar en una determinada institución. Regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para su aprendizaje y las representaciones que se utilizan para los distintos contenidos. En el EOS las configuraciones epistémicas llevan asociadas un sistema de normas que pueden ser compartidas, configuraciones meta epistémicas, o personales de los estudiantes involucrados en los procesos de aprendizaje correspondientes. Las configuraciones meta epistémicas se generan y se mantienen durante un largo periodo de tiempo (por ejemplo, un curso o una etapa educativa) y coexisten con muchas configuraciones epistémicas que se van sucediendo a lo largo del tiempo. En general tienen un carácter implícito, hecho que explica la ruptura entre diferentes niveles educativos, entre primaria-secundaria y entre secundaria-universidad. Puesto que las configuraciones meta epistémicas son utilizadas para valorar la práctica matemática que se realiza y juegan en cierta manera, un papel axiológico en la actividad matemática institucional.

Normas cognitivas**.** Son las que permiten conseguir que los sujetos aprendan lo que se les enseña. En el EOS se considera que la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, mientras que el aprendizaje, en última instancia supone la apropiación por el estudiante de dichos significados. Para que esta apropiación sea posible, el referente ya no son las normas epistémicas que nos dicen qué matemáticas se deben aprender, sino las ciencias que nos dicen cómo aprenden los sujetos y cómo se les debe de enseñar. Las normas cognitivas desarrollan el principio de que el alumno debe aprender y que la institución escolar debe hacer lo posible para que ello sea posible.

La herramienta configuración cognitiva permite describir la estructura de los objetos que han posibilitado la práctica matemática realizada por el alumno. A su vez el par configuración cognitiva, prácticas realizadas (o que posibilita), es una herramienta útil para determinar el significado personal declarado. La configuración cognitiva indica el grado de apropiación por el alumno de la configuración epistémica correspondiente al significado institucional implementado. Algunos de los constituyentes de las configuraciones cognitivas de los alumnos, se pueden considerar como normas que regulan el comportamiento matemático de los estudiantes. Dichas normas personales (o cognitivas), pueden concordar o no con las normas epistémicas correspondientes.

Normas interactivas. Son aquellas normas que regulan los modos de interacción entre docentes y discentes teniendo en cuenta que estos modos de interacción están sujetos a reglas, hábitos, tradiciones, compromisos y convenios. La secuencia de interacciones por una parte, está sujeta a reglas, y por otra, genera pautas de actuación, las cuales tienen sentido si son con referencia a otras pautas anteriores y posteriores en el tiempo. Un buen ejemplo de cómo los formatos o patrones de interacción en el aula están con frecuencia condicionados o normados por agentes externos al propio sistema didáctico, son los dispositivos “clase de teoría”, “clase de prácticas”, “sesiones de tutoría”, etc. Ahora bien, a pesar de que el macro-contexto proyecta expectativas de comportamiento en alumnos y profesores, los comportamientos se (re)construyen por medio de procesos sociales del aula y deben interpretarse, en primer lugar, desde el micro-contexto del aula (Civil y Planas, 2004). Los formatos de interacción de tipo dialógico y de trabajo cooperativo tendrán potencialmente mayor idoneidad interaccional que las de tipo magistral y de trabajo individual, puesto que los estudiantes muestran su relación con los objetos matemáticos, y, por lo tanto, el profesor tiene indicadores explícitos de dicha relación. Estos indicadores pueden permitir al profesor valorar la relación de los estudiantes con los objetos matemáticos y eventualmente determinar la intervención más adecuada, según las restricciones matemático-didácticas asociadas a la situación.

Normas mediacionales. El uso de medios técnicos y del tiempo en los que se apoyan los procesos de enseñanza y aprendizaje, está gobernado por reglas que condicionan los procesos de estudio. Este sistema de reglas relativas al uso de medios técnicos y temporales es lo que se designan en el EOS como normas mediacionales.

Normas afectivas. En los procesos de estudio matemático otra de las dimensiones a tener en cuenta se refiere a la afectividad, la motivación, las emociones, las creencias y las actitudes. Se dice que el alumno debe estar motivado, tener una actitud positiva, no tener fobia a las matemáticas. Se dice que el profesor “debe” motivar a los estudiantes, elegir unos contenidos “atractivos” y crear un “clima” afectivo en la clase propicio para el aprendizaje. En el EOS, estas serían cláusulas genéricas de la faceta afectiva de la dimensión normativa. La principal motivación intrínseca hacia el estudio de las matemáticas parece estar en la elección de los tipos de situaciones-problema matemáticas, las tareas y actividades concretas que el profesor propone a los alumnos, las cuales deben reunir unas características específicas. Además, el “modelo instruccional” que implementa en la clase -tipos de configuraciones y trayectorias didácticas que organiza y gestiona-, condiciona las oportunidades de aprendizaje autónomo de los alumnos y por tanto, su autoestima y compromiso con el estudio.

Normas ecológicas. Tener en cuenta la faceta ecológica de la dimensión normativa implica buscar información sobre el entorno social, político y económico donde se ubica la institución educativa, ya que éste influye sobre el tipo de prácticas matemáticas que se van a realizar en el aula. Las normas ecológicas tienen como principal objetivo conseguir dos tipos de competencias en los alumnos. Las normas ecológicas tienen que ver con los contenidos que se van a enseñar, ya que los significados pretendidos que se especifican en las directrices curriculares tratan de contribuir a la formación socio-profesional de los estudiantes. El cumplimiento de los programas es otro requisito que condiciona el trabajo del profesor, ya que los aprendizajes logrados por sus estudiantes constituyen el punto de partida de los estudios en cursos posteriores.

Metanormas En el EOS. Godino y D'Amore (2007), muestran la relación con el uso del prefijo meta en las investigaciones didácticas; citando a Robert y Robinet (1996), mencionan que estos autores hicieron un estudio extenso y sistemático que abarca los trabajos sobre Meta cognición realizados bajo el enfoque de la psicología cognitiva, es decir, estrategias de los sujetos individuales enfrentados a tareas de resolución de problemas. También realizaron investigaciones que podrían incluirse en la perspectiva interaccionista:

> Cuando el profesor expone conocimientos en clase (en la fase de institucionalización, por ejemplo), acompaña su discurso estrictamente matemático de frases que se refieren a dicho discurso, pero sin contener necesariamente informaciones matemáticas en sentido estricto: el profesor puede hablar de manera cualitativa de los conocimientos que trata de descontextualizar, puede explicar para qué sirven, cómo utilizarlos, puede mencionar los errores frecuentes que ocasionan. Por tanto, hay en este comportamiento todo un discurso sobre las matemáticas, más o menos importante, más o menos difuso, más o menos explícito, que nosotros vamos a clasificar como discurso meta en tanto que discurso sobre las matemáticas" (Godino y D'Amore, 2007, p. 147).

Bagni y D´Amore (2005) y D´Amore, Radford y Bagni (2006) mencionan que las prácticas matemáticas en el aula no son libres, están fuertemente condicionadas por el entorno sistémicamente entendido. A pesar de que el macro contexto proyecta expectativas de comportamiento en alumnos y profesores, los comportamientos se (re)construyen por medio de procesos sociales del aula y deben interpretarse, en primer lugar, desde el micro contexto del aula (Civil y Planas, 2004). Desde este punto de vista, las prácticas que se realizan en el aula forman parte de un sistema de adaptación de los individuos (estudiantes) a la sociedad, bajo la dirección (custodia, análisis, ejemplificación, tutela, evaluación) de otro individuo que la institución social reconoce como su representante (el docente).

En D'Amore, Font y Godino (2007) se propone contemplar también una dimensión *meta-normativa* de los procesos de instrucción. En dicha dimensión, se consideran tres grandes bloques: las normas *Meta-epistémicas*, las *Meta-instruccionales* y las *Meta-cognitivas.* Según estos autores el profesor quiere que los alumnos se apoyen en una configuración epistémica previa para realizar unas prácticas matemáticas de las que se obtendrá una configuración epistémica emergente. Dicha realización estará regulada por la configuración Meta-epistémicas que coexiste con configuraciones epistémicas que se van sucediendo a lo largo del tiempo. Para ello implementará una configuración instruccional que a su vez, también estará regulada por una configuración Meta-instruccional.

Ordóñez (20011, p. 62), indica que para realizar un Análisis didáctico las herramientas anteriores son útiles para abordar los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues modelizan el conocimiento matemático a enseñar (dimensión epistemológica) y los aprendizajes de los estudiantes (dimensión cognitiva). Sin embargo, para el análisis de cualquier proceso de instrucción es necesario tener en cuenta también las interacciones en el aula. Es necesario abordar cuestiones descriptivas y explicativas pero además este enfoque plantea ir más allá, éste análisis deberá permitir emitir juicios de adaptación, pertinencia o eficacia que orienten en el diseño e implementación de los procesos de instrucción con el objetivo de mejorar y optimizar el aprendizaje matemático.

Con estas herramientas se propone un análisis didáctico de los procesos de estudio, donde es necesario tener en cuenta que dichas herramientas "se pueden aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006, p. 8).

En el marco teórico del EOS, la introducción de la noción de significado de referencia y la adopción de postulados socio-constructivistas para el aprendizaje, permiten formular *criterios de idoneidad* para las distintas facetas implicadas en un proceso de estudio como se muestra en la *Figura 8*

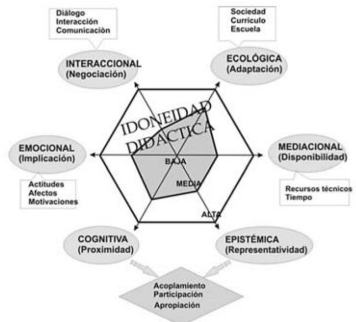


Figura 8. Criterios de idoneidad didáctica. Fuente: Godino et al., (2009. p. 12)

Es importante observar que en la base de esta figura están las idoneidades epistémicas y cognitivas, ya que todo proceso de estudio gira en torno al desarrollo de unos conocimientos matemáticos específicos.

3.2. Metodología

Se trata de una investigación cualitativa, basada en el estudio de caso de un profesor elegido que enseña un contenido matemático, el MIP. La selección de este método se debe a que es el método central utilizado por la mayoría de los docentes y donde los estudiantes presentan mayor dificultad para identificar tanto el tipo de integral -indefinida, definida e impropia- desde el significado global de la misma reportado en la literatura existente, hasta el método que deben aplicar para calcularla. La metodología para el análisis didáctico de la investigación se hace desde los aportes del EOS. Su ubicación teórica está dentro del PMA, específicamente en la didáctica del Cálculo Integral en un contexto educativo particular, pero en la presentación y discusión de los resultados se utilizan los criterios y las categorías de análisis del EOS que permite combinar diversos métodos y técnicas de acuerdo a las fases de la investigación, y de manera más especifica la noción de idoneidad didáctica de procesos de instrucción y aprendizaje de las matemáticas.

3.2.1 Organización y fases en el diseño de la investigación. Para el desarrollo de este trabajo se han seguido cuatro fases: heurística, hermenéutica, de recolección y triangulación de la información, y de Resultados. Para la Fase heurística: se procedió a la búsqueda y recopilación de las fuentes de información dando como resultado el estado del arte.

3.2.1.1 Instrumentos. Desarrollo propio de las Fases hermenéutica, de recolección y triangulación de la información. Para la fase hermenéutica: a partir del estado del arte construido, se eligieron los niveles propuestos por el EOS (D'Amore, Font y Godino, 2007; Font y Contreras, 2008; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) como guía para hacer el análisis didáctico y que fueron adaptados como se indicó anteriormente.

Para la Fase de recolección y triangulación de la información, se crearon las siguientes categorías de análisis:

1. Sistemas de prácticas. (Institucionales, personales y procesos-tareas acciones)
2. Trayectoria epistémica de la integración (histórico–epistemológica)
3. Trayectoria epistémica del proceso de enseñanza que ejecuta el profesor. Para esta categoría diseñaron tres subcategorías de análisis, a saber:
    3.1. Sensibilidad a la variable
    3.2. Sensibilidad al algoritmo
    3.3. Sensibilidad al algoritmo iterativo

4. Existencia o no de dificultades -de tipo: epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, emocional, ecológicos- que desencadenen conflictos semióticos en el desarrollo de la clase.
5. Significado global alcanzado del MIP durante el desarrollo de las sesiones de clase. Esto a partir de las configuraciones epistémicas de la integral que se utilizaron en el proceso de enseñanza observado.
6. Idoneidad didáctica del proceso de enseñanza desarrollado por el docente.

Para el análisis y triangulación de la información en las categorías de análisis, se realizaron: una entrevista semiestructurada -con grabación de audio- al profesor con el objeto de determinar el conocimiento que él posee acerca del cálculo infinitesimal, el Cálculo Integral, la integral, el proceso de integración, los métodos de integración y en particular el MIP como objetos matemáticos. También se observaron y grabaron 12 sesiones de clase que el profesor utilizó para enseñar el MIP -sesiones de dos horas académicas de clase; dos sesiones semanales- programadas para el semestre académico en la Facultad. Se crearan 10 fichas de trabajo, para la observación de la clase del docente donde se consideraron aspectos tales como: Proceso de Enseñanza. Ambiente en el aula. Proceso de instrucción en la clase. Nivel de aprendizaje de los estudiantes durante la clase. Habilidades pedagógicas del docente. Estrategias del profesor. Acerca del Plan de Clases. Uso de espacios y materiales. Adaptación del mobiliario y de los materiales que se llevan a cabo durante la enseñanza en el aula de clase. Aspectos que se exponen detalladamente en los Capítulos 4, 5 y 6 de este trabajo con la construcción del material documental, las matrices documentales y las matrices categoriales.

Con respecto a la fase de Resultados: conclusiones, limitaciones del estudio, perspectivas y recomendaciones hacia el futuro. Se exponen en los Capítulo 7 y 8 de este trabajo.

3.2.1.2. Sujetos de la investigación. Se eligió una universidad de carácter público estatal, donde se imparte la carrera llamada "Licenciatura en Matemáticas", se eligió un grupo de estudiantes de este programa, que cursan tercer semestre, cuyas edades oscilan entre 19 y 21 años de edad, en la asignatura Cálculo Integral. A quienes les fue asignado un profesor que cuenta con una formación en matemáticas puras y una especialización en "Enseñanza universitaria".

Para realizar esta esta investigación se eligió al profesor asignado para dicha asignatura, mediante un estudio de caso que, aunque no se puede generalizar, involucra a un profesor representativo de esta problemática que puede arrojar información que va más allá del caso particular. El principal resultado que se espera es una valoración fundamentada de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción implementado y una explicación de las dificultades de aprendizaje de los alumnos.

Capítulo 4. Significado institucional de referencia

En este capítulo se presenta el marco conceptual adoptado por el Departamento de Matemáticas de la universidad, las características y la estructura curricular del Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas, así como los componentes del programa académico para la asignatura Cálculo Integral. Elementos tomados del documento llamado: "Referentes del proyecto curricular licenciatura en matemáticas" denominado PEI (2001). En dicho documento se muestra el proyecto curricular de la licenciatura, su desarrollo en la facultad desde la construcción del Programa de Licenciatura en Matemáticas en la época de los años 60, hasta los últimos ajustes donde se presenta el proyecto para la calificación de alta acreditación ante el Ministerio de Educación Nacional.

4.1 Saber disciplinar que fundamenta el Proyecto Curricular

El saber disciplinar que fundamenta el Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas considera que las concepciones pluridisciplinares y de ciencia autónoma, de la Educación Matemática, es admitir su descomposición como disciplina en teoría y práctica puesto que ella es, en sí misma, un campo de estudio social heterogéneo y complejo, compuesto de tres áreas:

a. La acción práctica reflexiva sobre los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas;
b. La didáctica que elabora materiales y recursos, a partir de teorías específicas disponibles;

c. La investigación científica que trata de comprender el funcionamiento de sistema didáctico.

Dentro del Marco Conceptual del Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas se consideran que el conocimiento profesional del educador matemático se constituye a partir de los saberes teóricos y prácticos en relación con: La matemática: teorías, procesos, métodos, problemas, criterios de validez y otros (Interesa el aspecto interpretativo de la disciplina y la reflexión permanente sobre cómo se accede a dichas teorías). La naturaleza de las matemáticas y de las matemáticas escolares, particularmente en lo que respecta a los procesos históricos de su evolución. a cimentar la parte conceptual enfatiza en la didáctica de las matemáticas: teorías, constructos, acercamientos, recursos, entre otros. El currículo escolar de matemáticas: principios, metas, visión y estructura. La cognición de los aprendices: características del aprendizaje de nociones matemáticas específicas, dificultades, concepciones, errores, estilos cognitivos, entre otros. La enseñanza de las matemáticas: modelos, análisis de tareas, diseños de intervención, entre otros. Estos componentes se constituyen en elementos claves para construir el programa de formación en aras que dote al futuro educador matemático de las herramientas esenciales para desempeñar el papel de enseñar a aprender matemáticas

El Departamento de Matemáticas acoge la noción de ambiente de formación, acepta el compromiso de caracterizar dichos ambientes según la especificidad de la formación de educadores matemáticos y asume la tarea de re-estructurar el currículo de la Licenciatura en Matemáticas, integrando los diversos componentes del programa de formación en dichos ambientes. Reconoce que los ambientes disciplinar y pedagógico contribuyen en la formación investigativa, al asumir que los contenidos seleccionados para estos espacios académicos, tanto del conocimiento matemático, como del didáctico, se asocian a situaciones problema que dotan de significado el aprendizaje de los futuros profesores.

Adicionalmente, el ambiente de formación pedagógica asume los espacios contemplados por la Universidad para la Práctica Educativa, en donde el estudiante puede iniciarse en la actividad profesional, generar esquemas prácticos de acción y, en general, desarrollar competencias profesionales como educador matemático.

4.2 Estructura Curricular del Proyecto

La selección de los contenidos articula el saber de y sobre las matemáticas (ambiente disciplinar) y el saber sobre las didácticas de las matemáticas (ambiente pedagógico y didáctico). De acuerdo con los Lineamientos Curriculares Institucionales, de estos saberes en el Programa se agrupan en ambientes educativos subordinados al principio de la dialéctica entre los dos saberes. Cada uno de los ambientes articula áreas de conocimiento propias de las disciplinas (PEI, 2001, p. 63), como elemento esencial en la formación del conocimiento profesional del futuro profesor.

La estructuración del Programa se da en dos ciclos de formación (UPN, PEI, 2001, p. 64). El de fundamentación y el de profundización. El primero tiene como propósito aproximar a los estudiantes, a los fundamentos conceptuales, metodológicos y contextuales básicos para el desempeño como profesional de la Educación Matemática. En el segundo los estudiantes intensifican actividades académicas en torno a la selección de una de las líneas de investigación del campo de la Educación matemática.

La estructura curricular para el ciclo de Fundamentación que va hasta VI semestre incorpora una organización académica para el estudio del cálculo distribuida de la siguiente manera: Para el I semestre un curso de pre cálculo, para el II semestre un curso de cálculo diferencial, para el III semestre un curso de Cálculo Integral y en IV semestre un curso de Análisis. La Figura 9 muestra la estructura jerárquica usada en la línea de los cálculos hasta tercer semestre.

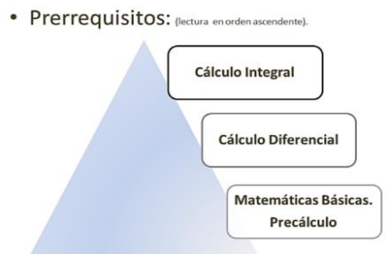


Figura 9. Aspecto del contenido curricular de la Licenciatura
Elaboración propia

En la Figura 10 se presenta un modelo del aspecto curricular institucional

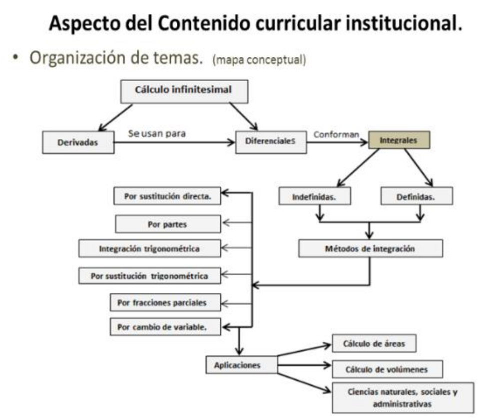


Figura 10. Aspecto del contenido curricular institucional
Elaboración propia

El Programa para Cálculo Integral se encuentra distribuido en tres grandes unidades:

1. La anti derivada de una función. (Integral definida e integración)

Propósito de la unidad: conocer y manejar el concepto de Anti derivada de una función mediante la reflexión y el análisis del mismo como proceso inverso a la derivada para desarrollar el razonamiento lógico y analítico de los estudiantes en su aplicación al cálculo de integrales.

Contenido de la unidad:

- Concepto de Diferencial de una función
- Concepto de primitiva o antiderivada de una función

- La integral definida. Área bajo la curva
- Definición de integral definida como límite de una suma de Riemann
- Teorema Fundamental del Cálculo
- Evaluación de integrales definidas
- Teoremas fundamentales del cálculo
- Integración de funciones algebraicas
- Integración de funciones compuestas. Regla de la cadena para integración
- Formulas fundamentales de integración
- Integración de funciones usando las formulas fundamentales

2. Técnicas de integración, formas indeterminadas e integrales impropias

Propósito de la unidad: conocer y manejar las principales técnicas de integración a través de estrategias que desarrollen el razonamiento lógico matemático de los estudiantes para calcular la Anti derivada o Integral de una función. Así como reconocer y evaluar integrales impropias.

Contenido de la unidad:

- Integración sustitución directa
- Integración por partes
- Integración de funciones algebraicas mediante sustitución trigonométrica
- Integración por separación en fracciones parciales
- Integración por cambio de variable
- Integrales impropias con límites de integración infinitos, otras integrales impropias

3. Aplicaciones de la integral.

Propósito de la unidad: Desarrollar el pensamiento lógico y analítico de los estudiantes a través de estrategias que apliquen el Teorema fundamental del Cálculo Integral para la solución de problemas relacionados con diferentes ciencias.

Contenido de la unidad:

- **Aplicaciones de la integral.**

- Cálculo de áreas planas
- Cálculo de volúmenes de sólidos
- Cálculo de la longitud de arco de una curva
- Trabajo
- Presión y fuerza ejercidas por un fluido
- Momentos, centros de masa y centroides

Durante el Ciclo de Profundización, el estudiante se inscribe durante dos semestres a uno de los grupos de investigación del Proyecto Curricular (donde existe una línea para el estudio del cálculo) y realiza actividades de carácter investigativo formativo. Su trabajo de grado consistirá en la presentación escrita de las actividades realizadas. Esta presentación se constituye en el Trabajo de Grado.

Capítulo 5. Significado institucional pretendido e implementado

En este capítulo se presenta el significado propuesto en la malla curricular. Dicho significado se interpreta desde las Configuraciones Epistémicas reportadas por la literatura en Educación Matemática que se aplican en el diseño del programa para la asignatura Cálculo Integral. En la parte final de este capítulo se presenta el significado personal declarado durante el proceso de instrucción del MIP, concluyendo con el significado implementado a lo largo de las sesiones de clase observadas con el objeto de lograr una triangulación entre el significado propuesto y el implementado.

5.1. Significado propuesto en la malla curricular vigente en la facultad

En el EOS el “significado de los objetos matemáticos” es de naturaleza ontológica y epistemológica esto es, se refiere a la naturaleza, origen y evolución de los objetos matemáticos.

Pino-Fan, Godino y Font (2015) indican que:

> El significado global de referencia se define a partir de dos nociones: significado global (también denominado significado holístico u Holo significado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático) y significado de referencia (entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio. Para una institución de enseñanza concreta, el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático) (p. 147).

Concretamente, la noción de configuración epistémica[9] permite reconstruir el significado global de referencia.

De los tres tipos de prácticas que contempla el EOS, en el aspecto Institucional se observa énfasis en dos: Las de tipo Discursiva (comunicativa) y la Regulativa (normativas). Dado que las de tipo operativo o actuativo (las que nos permiten realizar "acciones" y "argumentaciones" cuya finalidad sea la resolución de "situaciones problemas"), se deja de manera autónoma al profesor-formador que hará el proceso de instrucción de la asignatura.

La estructura de las dos primeras se puede observar en la tabla 2 comparativa:

Tabla 2. Comparativa tipos de prácticas

Tipo de prácticas: D**iscursivo-comunicativo**	
Proyecto curricular	**Malla curricular**
Desarrolla procesos de investigación y formación propios de su campo de acción: el conocimiento profesional del educador matemático. Innova, orienta y dinamiza los procesos pedagógicos con las instituciones educativas, tanto las relacionadas con la formación inicial del profesor, como las de educación básica y media. Forma profesional de la educación matemática para los niveles básicos y medio, y atiende procesos educativos orientados a poblaciones especiales en ámbitos formales e informales. Se Expresa en Lenguaje natural	Se orienta a la formación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Acoge la noción de ambientes de formación desde dos aspectos: - Disciplinar y pedagógico que contribuyen en la formación investigativa. - Los ambientes investigativo, deontológico, lingüístico y de desarrollo de la cultura física y estética como elementos que complementan la formación integral del educador matemático. Se Expresa en Lenguaje natural.

[9] Las *configuraciones epistémicas* se componen de los objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas en distintos contextos de uso. Un objeto matemático puede tener varias configuraciones epistémicas las cuales a su vez llevan asociadas un significado parcial distinto para dicho objeto matemático (Font y Godino, 2006).

Tipo de prácticas: Regulativo-normativo: Considera una estrecha relación entre la teoría y la práctica como uno de los aspectos fundamentales del programa de formación del Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas, se constituye en uno de los pilares de la formación. Veámoslos desde lo propuesto en la malla curricular y el programa académico para Cálculo Integral en la tabla 3.

Tabla 3. Aspectos fundamentales del programa de formación del Proyecto Curricular de Licenciatura en Matemáticas.

Malla curricular

- Plantea dos ciclos de formación: Fundamentación y profundización.
- Se debe elegir una de cuatro opciones para profundizar: álgebra, geometría, cálculo, e informática.
- Se debe tomar una electiva en educación matemática abordada desde 4 referentes: Etnomatemática, epistemología de las matemáticas escolares; historia de la Educación Matemática en Colombia y Representación.
- Contempla la formación de profesionales de la Educación atemática reflexivos, respecto de sí mismos y de todos los factores que intervienen en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, y que aceptan el carácter heterogéneo, cambiante, complejo e impredecible del espacio educativo y aún del conocimiento matemático.

Ambientes de Formación

- Formación disciplinar específica: conduce a la profundización en un saber o disciplina determinada.
- Formación científica, tecnológica o investigativa: brinda los fundamentos y las prácticas para la comprensión y aplicación científica del saber y la capacidad de innovar en el campo pedagógico.
- Formación pedagógica: proporciona los fundamentos para el desarrollo de procesos cualificados integrales del proceso de enseñanza y aprendizaje, orientados de acuerdo con las expectativas sociales y culturales.
- Formación deontológica y en valores humanos: promueve la idoneidad ética del educador.
- Formación lingüística: desarrolla las habilidades lectoescritoras tanto en español como en una lengua extranjera.
  Formación artística y de cultura física: desarrollan la expresión cultural y estética como recursos para mejorar la calidad de vida y la proyección productiva en el quehacer

  Profesional.

Para atender aspectos particulares del conocimiento matemático con propósitos específicos, el ambiente disciplinar se organiza en las siguientes áreas que proporcionan, además de una formación integral en matemáticas, los elementos para determinar las posibilidades de su enseñanza.

- Álgebra: atiende aspectos relativos a la construcción de números, estructuras y sus relaciones.
- Geometría: gira en torno a aspectos relativos a la forma, el espacio, la medida y la deducción, como procedimiento de validación del conocimiento matemático.
- Cálculo: atiende los problemas relativos a la construcción de las nociones de variación y aproximación.
- Estadística y probabilidad: se centra en el estudio de fenómenos aleatorios y estudia particularmente los conceptos de muestreo, aleatoriedad, y probabilidad.

Sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de enseñanza

La distribución definida para el área del Cálculo, para el ciclo de fundamentación se estableció así: semestre I, Pre-cálculo; semestre II, Cálculo diferencial; semestre III, Cálculo integral; semestre IV, Sucesiones y Series; semestre V, Calculo en varias variables; y semestre VI, Enseñanza y Aprendizaje del cálculo.

Programa Académico

El programa académico está integrado y centrado en la dialéctica de los dos saberes disciplinar y pedagógico. La selección y organización de los contenidos formativos se orienta a la formación del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, por lo que la selección de los contenidos articula el saber de y sobre las matemáticas (ambiente disciplinar) y el saber sobre las didácticas de las matemáticas (ambiente pedagógico y didáctico).

Componentes del programa

Los componentes del programa contemplan conocimientos teóricos prácticos en relación con:

- Las matemáticas y sobre las matemáticas.
- La pedagogía específica de las matemáticas; comprende conocimiento sobre los currículos de matemáticas, la cognición de los aprendices, la enseñanza de las matemáticas.
- Las comunidades de práctica en matemáticas y la relación matemática, cultura, tecnología y sociedad.
- Los mecanismos y procesos de gestión social para liderar proyectos de pertinencia social.
- Las nuevas tecnologías de la comunicación y la información en la educación.
- La función social del educador matemático y su aporte a la construcción del proyecto de nación colombiana.

Estructura del programa. Quedó presentada en el capítulo anterior.

Sistema de normas que condicionan y hacen posible el acceso del estudiante al curso cálculo integral

Normas epistémicas: Haber cursado y aprobado las asignaturas prerrequisito correspondientes a primer y segundo semestre (1° pre cálculo, 2° cálculo diferencial); Normas cognitivas: conocimiento, apropiación y manejo de conceptos previos; Normas mediacionales: uso de recursos mediacionales complementarios (software matemático); Normas afectivas: motivación para la clase; Normas interactivas: secuencia de interacciones entre profesor y alumnos orientadas a la fijación y negociación de significados; Normas ecológicas: relaciones con el entorno que soportan y condicionan el proceso de estudio.

5.2. Significados histórico-epistemológicos de la integral

Conforme a la literatura en Educación Matemática vigente, se econtraron 11 configuraciones epistémicas que se han originado a lo largo del proceso de evolución del concepto de integral. Estas han sido refrenciadas por Ordóñez (2011) y Crisóstomo (2012).

5.2.1. Configuraciones Epistémicas reportadas por la literatura en Educación Matemática que se aplican en el diseño del programa para la asignatura Cálculo

Integral. Conforme a la distribución de temas presentes en el programa que el Departamento de Matemáticas presenta al Consejo de Facultad para su aprobación, se observa que están presentes las siguientes configuraciones epistémicas.

- *Configuración epistémica geométrica*, cuando se plantea trabajar la integral definida, área bajo la curva, cálculo de áreas planas, cálculo de volúmenes de sólidos, cálculo de la longitud de arco de una curva, trabajo, presión y fuerza ejercidas por un fluido, momentos, centros de masa y centroides.
- En los temas antes mencionados se encuentra la *Configuración epistémica de resultado de un proceso de cambio si* se percibe en palabras de Kaput (1982, p. 115*), "*la acumulación y la tasa de cambio como las dos caras de una misma moneda".
- *Configuración epistémica inversa de la derivada,* cuando se trabaja el concepto de primitiva o anti derivada de una función.
- *Configuración epistémica de aproximación al límite*, cuando se trabaja la definición de integral definida como límite de una suma de Riemann.
- *Configuración epistémica generalizada*, cuando se trabaja Integración de funciones algebraicas; integración de funciones compuestas.
- *Configuración epistémica algebraica*, cuando se enfatiza en la enseñanza del método de integración.
- *Configuración epistémica Sumatoria*, cuando se presenta la integral definida, el área bajo la curva y particularmente el Teorema Fundamental del Cálculo.

- *Configuración epistémica aproximada*, que se da parcialmente cuando se plantean problemas específicos relacionados con cálculo de áreas planas, cálculo de volúmenes de sólidos y con el Cálculo de la longitud de arco de una curva.
- *Configuración epistémica extra matemática*, que se da parcialmente cuando se plantean problemas específicos relacionados con trabajo, Presión y fuerza ejercidas por un fluido, momentos, centros de masa y centroides, problemas relacionados con economía y administración entre otros.

5.2.2. Configuraciones Epistémicas reportadas por la literatura en Educación Matemática que no se aplican en la distribución del programa académico. Observando la distribución de temas presentes en el programa, se encuentra que no están presentes las configuraciones epistémicas *acumulada* y *tecnológica.* De esta manera, el objeto matemático (la integral) se presenta como un ente abstracto que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. De ahí que, las definiciones y enunciados constituyen manifestaciones lingüísticas que en la cultura matemática suelen tomarse como elementos que determinan esta clase de objetos, describiendo el procedimiento constructivo del mismo o sus propiedades características.

A partir de lo observado en las configuraciones epistémicas planteadas se puede deducir que el significado global de la integral que se pretende implementar desde el programa aportado por el Departamento de Matemáticas es pragmático y realista pues aborda nueve de las once Configuraciones Epistémicas propuestas en la literatura en Educación Matemática. Es decir, pretende mostrar de manera amplia y completa dicho concepto. Para ello, utiliza un *lenguaje* propio del Cálculo Integral y sus *argumentaciones*, intervienen *conceptos* tales como Anti derivada, Concepto de Primitiva, Concepto de Diferencial de una función, Integral Definida, Indefinida e Impropia, Teorema Fundamental del Cálculo, Técnicas de integración y por último algunas aplicaciones de la integral. Como se puede observar, se espera que los *procedimientos* geométricos, algebraicos y analíticos que se utilizen en dicha construcción del concepto de integral estén encaminados a construir, calcular e interpretar una integral basándose en las definiciones y propiedades planteadas allí.

Los tipos de situaciones-problemas que se espera sean aplicados durante el proceso de instrucción son los reportados en los libros de texto registrados en la bibliografía del curso, los que están enfocados a profundizar con la aplicación del concepto de integral a temas relacionados con la física, la ingeniería y algunos ejercicios con la economía. Cabe aclarar que el número de ejercicios relacionados con estos temas, por capítulo no excede el número 20. Es decir, son algo limitados, dado que el enfoque del curso no es centrar la atención del estudiante en las aplicaciones sino en la formalización del concepto mismo.

La malla curricular contempla la implementación de 9 de las 11 Configuraciones Epistémicas estas son: *geométrica, intuitiva, inversa de la derivada, aproximación al límite, algebraica*, *Sumatoria, aproximada, generalizada y extra matemática*, ya explicitas al comienzo de este capítulo. No obstante, en la institucionalización del MIP solo se hace uso parcial de tres de ellas: *intuitiva, algebraica*, *generalizada.* En la *Figura 11* presentamos un esbozo de ellas.

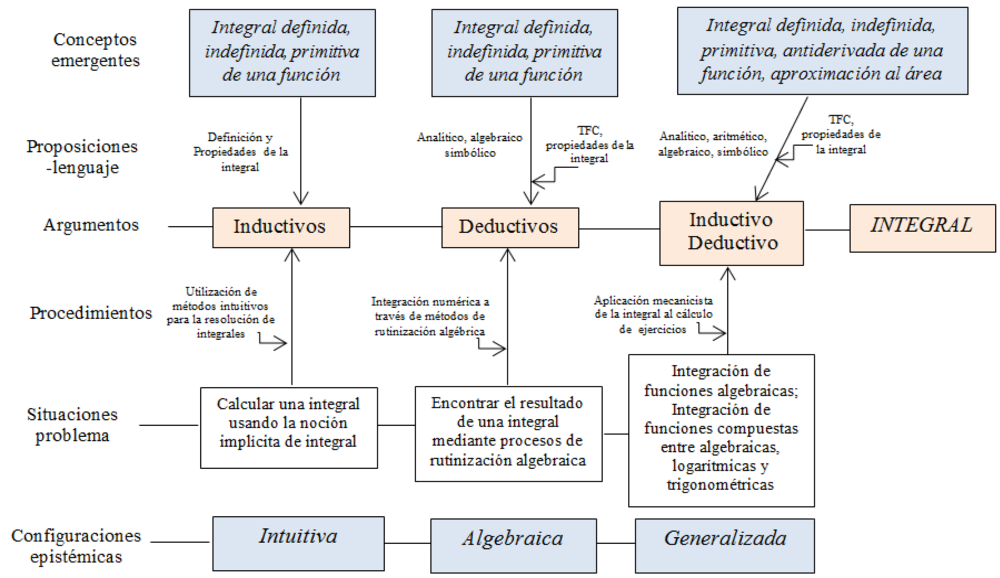


Figura 11. Esquema de configuraciones epistémicas presentes en la institucionalización del MIP

5.3. Significado personal declarado por el profesor-formador sobre la integral a partir del proceso de enseñanza del MIP

De la entrevista aplicada al profesor se pudo extraer la información relacionada en la tabla 4.

Tabla 4. Resultados de la entrevista al profesor

DESCRIPTORES			
Formación académica	Pregrado		Formación en Matemáticas puras
	Postgrado		Especialización en docencia universitaria
Experiencia como docente universitario	Pregrado		5 años y dos meses
	Postgrado		No tiene experiencia como profesor de postgrado
Conocimiento del Cálculo infinitesimal	Evolución histórico epistemológica		Conoce aspectos relevantes a la edad media (fundamentación del cálculo infinitesimal), y la evolución posterior aproximándose a los avances alcanzados en el siglo XX
	Cálculo integral	métodos de integración	Los conoce, manifiesta que el estudiante debe ser artífice de su propio proceso de aprendizaje
		MIP	Manifiesta que los estudiantes presentan dificultades en el manejo de este método.
Preparación de la clase	Fase pre-activa		Manifiesta que sí. Lo hace mirando el programa, luego consulta la bibliografía y elije unos ejercicios para explicar

	Fase activa	Plantea que sus clases son normales, los estudiantes asisten y participan. Hace uso del libro de texto, y algunas veces fotocopias con ejercicios
	Fase post activa	Manifiesta que no le queda tiempo para hacer ese tipo de reflexiones dado que debe salir de un salón a otro para dictar las clases.
Conocimiento de la Educación Matemática	Detecta dificultades en los estudiantes	Presencia de errores en los estudiantes. Manifiesta que: - los corrige permanentemente, - los invita a verificar su trabajo con las respuestas del libro, y - los invita a consultar el libro para confrontar los posibles errores y que de manera autónoma los corrijan Presencia de dificultades: - Los remite a repasar temas que son prerrequisito. - "Miren en el libro, las definiciones, las propiedades y las apliquen en forma rigurosa" Conflictos semióticos (tipos) - No los identifica. - Manifiesta que solo conoció en el borrador con las preguntas para la entrevista y que cree que los estudiantes presentan conflictos de tipo conceptual, de representación y de procedimientos

En la Tabla 4 se puede observar que la formación disciplinar del profesor es en matemática pura, manifiesta un desconocimiento de los resultados reportados en la literatura de Educación Matemática sobre investigaciones que permiten tener una aproximación al significado global de la integral, desde la construcción de configuraciones epistémicas considerando sus conexiones y relaciones. Se realta aquí la importancia de las referidas configuraciones epistémicas definidas al comienzo de este capítulo, dado que toman como punto de partida las situaciones–problema o los procedimientos que se utiliza para resolverla, articulados con las demás entidades primarias de análisis del EOS (conceptos, definiciones, lenguajes, proposiciones y argumentos), consideramos necesario analizar cada una de ellas para poder alcanzar una aproximación al significado de referencia implementado por el profesor-formador mientras institucionalizo el MIP.

5.3.1. Las situaciones problema. Se observa durante el proceso de instrucción, que pareciera existir una tipología específica de problemas para introducir y desarrollar el estudio de la integral, pues a pesar que se resaltó la importancia de considerar la evolución histórica de esta, ubicándola en la antigua Grecia con los procesos seguidos por Arquímedes, en su discurso el profesor enfatiza en los procesos realizados en la edad media mencionando que:

> *La verdad en la carrera tuve un profesor que nos enseñó cálculo diferencial y nos hizo mucho énfasis en la parte histórica de la edad media sobre invención del cálculo por parte de estos dos matemáticos (Newton y Leibniz), sobre la controversia que existió entre ellos porque el uno acusaba al otro de plagio sobre la autoría de esta rama del análisis matemático. Esa polémica fue mutua entre estos dos grandes matemáticos. No podemos olvidar que la gestación duró casi 2000 años. Comenzó cuando los griegos lograron determinar áreas y volúmenes por un proceso que llamaron el método de exhaución. El estudio de este método por unas pruebas excelentes de Euclides y Arquímedes no sólo es muy interesante, sino también es muy instructivo como anticipación de unos conceptos básicos del Análisis, como "límite" y "suma de Riemann"* (Entrevista realizada al Docente, 19/08/2014, Unidad de trascripción 14).

Podemos identificar en este fragmento de la entrevista que el profesor identifica una de las situaciones-problema intra matemáticas que ha sido resuelta por el método de Arquímedes de manera intuitiva, donde se consideraban ideas matemáticas muy similares a las actualmente presentadas en el proceso de integración (Boyer, 1992), lo que permite inferir que dichas situaciones problema requerían de procedimientos intuitivos sobre el área de figuras planas, procedimientos que abordan implícitamente la noción de la integral. De esta forma, se caracterizan las configuraciones epistémicas intuitiva, geométrica, algebraica, sumatoria, aproximada, de resultado de un proceso de cambio, generalizada y de aproximación al límite, aspectos que se pasan por alto durante el proceso de instrucción. Sin embargo, se destaca la importancia de hacer aproximaciones numéricas en la práctica profesional del futuro profesor de matemáticas en la enseñanza secundaria dado que esto les permitirá solucionar diferentes tipos de problemas; el profesor considera que a través del cálculo se puede contribuir al desarrollo de esta competencia en los futuros profesores.

También podemos identificar la configuración epistémica *inversa de la derivada*, cuando menciona la primitiva o anti derivada, dado que relaciona la problemática general que caracteriza la referida configuración cuando plantea que "*Una segunda etapa importante en el desarrollo embrionario del Análisis es el cálculo de indivisibles que es practicado por dos discípulos de Galileo, Cavalieri y Torricelli, en el comienzo del siglo de Oro*" (Entrevista realizada al Docente, 19/08/2014. Unidad de trascripción 14), relacionándola con la forma de encontrar la primitiva de una función conocida.

Se identifica que en la formación universitaria se muestra la integral como el límite de una suma de Riemann, lo que conlleva a la noción de trabajo en física, relacionada con la configuración epistémica sumatoria y con la de resultado de un proceso de cambio, al mencionar que: "…*el origen de ellas está en la necesidad de solucionar problemas como el de la cuadratura, el área bajo una curva, por decir algunos; y estos se desarrollaron desde aspectos geométricos. Es decir, dieron origen a la integral definida, cuando el intervalo dominio no es acotado, produce integrales indefinidas o si lo es acotado parcialmente* *produce integrales impropias*". (Entrevista realizada al Docente, 19/08/2014. Unidad de trascripción 18).

Se observa que privilegia la resolución de problemas de naturaleza extra matemática con aplicaciones de la integral y extensiones de la misma, pero en contextos lejanos a su entorno, cuando menciona: "*La integral de Riemann-Stieltjes, que es una extensión de la integral de Riemann. La integral de Lebesgue-Stieltjes, que fue desarrollada por Radon, quien hizo generalizaciones de las integrales de Riemann- Stieltjes y la de Lebesgue. Hay otra que se denomina La integral de Henstock- Kurzweil, que fue desarrollada por Henstock. Esta lleva un trabajo arduo, apenas me acuerdo del nombre. Hay otra que se llama:*
La integral de Haar, que es la integral de Lebesgue con el uso de la medida de Haar.
La integral de McShane, la de Bochner, y la de Ito, esta última extiende la integral de Riemann-Stieltjes, y sé que permite integrar respecto a procesos estocásticos que pueden no ser de variación acotada como el movimiento browniano. Son temas muy densos para mí. Apenas los conozco, pero no en profundidad". (Entrevista realizada al Docente, 19/08/2014. Unidad de trascripción 16).

5.3.2. Las proposiciones en el proceso de enseñanza del MIP. En el desarrollo del proceso de instrucción seguido se concibe que para que la enseñanza de la integral sea exitosa, se necesitan las siguientes proposiciones: algoritmo para derivar un producto de funciones, teorema fundamental del cálculo y desarrollar una aproximación el concepto de integral tomando como base una función potencia de la forma $\int ax^n \, dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1,$ conocer las propiedades para integrar una suma o resta de funciones; se indica que el proceso de anti derivar es el inverso a la derivada, a lo que él llama Teorema Fundamental del Cálculo.

Como proposiciones emergentes, se institucionaliza el algoritmo del MIP expresado como: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$; de esta forma:

- Para integrales indefinidas; $\int ax^n \, dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C , n \neq -1$; $\int kf = k\int f$, la función que "esta de primeras" será la candidata para *u*; lo que "sobra" será *dv; u' = du ; v' = dv;*
- Para integrales definidas. $\int_a^b kx^n \, dx = \left. \frac{kx^{n+1}}{n+1} \right|_a^b = \left(\frac{k(b)^{n+1}}{n+1} \right) - \left(\frac{k(a)^{n+1}}{n+1} \right)$; $\int_a^b k \, f = k \int_a^b f$

  $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$;

5.3.3. Definiciones relacionadas con la integral. En el discurso se reconoce que el curso de Cálculo Integral está dirigido a futuros profesores de matemáticas de secundaria, que las nociones geométricas ocupan un papel relevante pero no se reconoce que estas constituyen la configuración epistémica geométrica. Se identifica que únicamente se trabaja desde las nociones explícitas en los libros de texto propuestos en la bibliografía del programa, la más usual es la definición de integral de Riemann. A pesar que en la entrevista se refirió a nociones como límite, suma de Riemann, la integral (definida como una suma de infinitos incrementos muy pequeños) y las diversas nociones y extensiones de la integral como las de Riemann-Stieltjes, Henstock- Kurzweil, las integrales de McShane, la de Bochner, la de Ito y lka de Lebesgue, centradas particularmente en la física, solo enfatiza en la noción de suma de Riemann dado que fue la que él aprendió. Al respecto menciona: "*Creo que esta es la esencia del cálculo infinitesimal. Cuando tomé cálculo integral tuve una profesora que solo nos hacía énfasis en la integral de Riemann, y en los métodos para aplicarla. Vine a conocer los otros* *tipos de integral en la medida que la carrera avanzó y porque a mí me interesaba conoce*rlas" (Entrevista realizada al Docente, 19/08/2014. Unidad de trascripción 14).

5.3.4. Lenguajes utilizados durante el proceso de enseñanza del MIP. En la malla curricular se espera que el estudiante deba comprender y articular coherentemente los distintos significados relativos a la noción matemática que se estudia. Esto implica el desarrollo de competencias necesarias para la comprensión, articulación y utilización del lenguaje más adecuado para interpretar, expresar, desarrollar solucionar y justificar cada una de las situaciones problema propuestas en el proceso de estudio de la integral. Sin embargo, el tipo de lenguaje simbólico usado durante el proceso de instrucción para lograr este objetivo tiene características propias de las matemáticas del nivel estudiado, pero en algunas ocasiones es ambiguo por ejemplo $\cancel{\int}(u \cdot v)$ para indicar que la derivada de ese producto de funciones se anula calculando la integral.

Con respecto al lenguaje verbal utilizado se evidencia de manera explícita un uso de lenguaje no técnico, como ejemplo vemos las unidades de análisis 21, 22 y 33 correspondientes a las Configuración Didáctica 2 (CD2) donde se institucionaliza el MIP. En la unidad de análisis (21) menciona: "*Este es un ejercicio que tiene forma racional, pues tiene polinomios arriba y abajo, El de abajo es un radical polinómico*" [21]; para referirse al numerador y denominador de la expresión racional. En la unidad [22] "¡*mire que el de arriba es la derivada del de abajo*!" ratifica el anterior. En la unidad de análisis [33] menciona: "¡*Vamos a calcular la integral de equis, Euler a la tres equis de equis*!"; para referirse a la expresión $\int x\, e^{3x}\, dx$.

Lo que nos permite identificar un uso de lenguaje verbal de carácter ambiguo que puede conducir a los estudiantes a cometer equivocaciones e imprecisiones en el proceso de aprendizaje. En la unidad de análisis [48] menciona: "*¿Qué pasa en esta primera integral? ¿Qué nos dice el teorema fundamental del cálculo? ¡Cuando tengo la integral de una derivada esos dos procesos se anulan! Entonces ¿qué se anula aquí? ¿Se anula esta integral con esta derivada y qué queda?"* $\cancel{\int}(u \cdot v)\cancel{'}$. Esto se dice mientras se escribe:

$u \cdot v - \int u' \cdot v = \int u . v'$.

En la unidad de análisis [56] menciona que hay dos formas de aprenderse la fórmula del MIP: "*¡Una es "con la regla de la vaca"!* Dice : "*Una vaca sin cola vestida de uniforme*" al tiempo que va señalando con la mano la *u* para "*una*", la *v* para "*vaca*", el signo menos para "*sin*" , el signo de integral $\int$ para "*cola*", la *v* para "*vestida*" y el *du* para "*de uniforme*", que correspondería a la expresión matemática $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$.

Por lo tanto podemos inferir que en el proceso de instrucción del MIP observado el profesor articula muy bien los lenguajes técnicos reconocidos por la comunidad con los naturales no reconocidos, pues ni él ni los estudiantes parecen notar ninguna incoherencia. Sin embargo, no se percibe una articulación coherente y adecuada de un uso de lenguaje institucionalizado y reconocido por la comunidad matemática; aspecto que va en direccion contraria a lo planteado Institucionalmente en la malla curricular y el PMA. También se observa uso de un lenguaje "natural" no tecnico; un lenguaje simbólico impreciso, un lenguaje algebraico donde se hacen procesos "saltandose pasos", donde no se justifica la accion ejecutada y una evidente carencia de lenguaje computacional que apoye el proceso de enseñanza de la integral.

.

5.3.5. La argumentación en la enseñanza del MIP. Al reflexionar sobre las proposiciones que deben ser demostradas en el estudio de la integral desde la enseñanza universitaria, especialmente en la formación de licenciados en matemáticas, se observa que durante el proceso de instrucción no se realizan demostraciones ni de definiciones, ni teoremas, ni propiedades como lo plantea el PMA para este nivel de instrucción. En el desarrollo de las clases se privilegia tomar definiciones del texto guía e invitar a los alumnos a verificarlas, estudiarlas y comprenderlas a través de un estudio personal de los cuatro libros de texto propuestos en la bibliografía del programa. Como ejemplos podemos citar las unidades de análisis: [123]: "*Es cuestión de práctica, en el taller 7.1 hay 50 ejercicios para resolver*"; en [161] se le dice a un estudiante *"¡Si A9!, o si no ¡pues mire la tabla del libro!";* En [285] se le cuestiona a un grupo de estudiantes que presentó dificultades con un ejercicio: *"¿Por qué no miraron la respuesta del libro?"*. Por el tipo de presentación intuitiva que se hace de las definiciones, teoremas y propiedades se infiere que el que el proceso de instrucción se basa en convencer al alumno, a través de la utilización de argumentaciones coherentes de tal manera que el resultado presentado sea verdadero, pero no existe una presentación lógicamente argumentada propia del PMA mediante una demostración matemática, en su sentido más axiomático.

En lo referente a las demostraciones axiomáticas, en un apartado de diálogo informal contemplado luego de la entrevista semiestructurada que se le practicó al profesor, mencionó su importancia, no obstante, indicó que esas demostraciones serán objeto del curso de Análisis Matemático que se imparte como último curso en la línea de los Cálculos (Ciclo de fundamentación) razón por la que él las omitía, no sin darles la importancia que les son intrínsecas. En la entrevista practicada, en la pregunta 10 menciona: "*En la enseñanza no solo del Cálculo Integral sino en general de la matemática nos encontramos con múltiples dificultades que van desde los problemas de preconceptos por parte de los alumnos hasta problemas de mal manejo didáctico por parte de los libros que usamos como guía y que van en la bibliología del curso. Soy de los que cree que dentro del proceso el alumno debe aprender a elaborar sus propios procedimientos para llegar al resultado, debe aprender a resolver problemas por sí mismo y también a discutir con otros. Así me formaron a mí y veo que da resultados. Reitero, el profesor en la mayoría de los casos sólo debe ser un guía*" (Entrevista realizada al Docente, 19/08/2014. Unidad de trascripción 26).

5.3.6. Articulaciones y conexiones. En este apartado consideramos las articulaciones desde dos perspectivas: articulación de los objetos matemáticos y didácticos y las conexiones intra disciplinares e inter disciplinares de la integral.

***5.3.6.1. Articulación de los objetos matemáticos y didácticos*.** Las tres configuraciones epistémicas de la integral que hemos sistematizado anteriormente, pueden ser interpretadas desde el EOS como el significado personal global de la integral manifestado al momento de implementar el MIP. Cada configuración epistémica contempla las relaciones entre los elementos de análisis primario (situaciones problema, lenguaje, procedimientos, definiciones, proposiciones y argumentos), articulados en una red de configuraciones didácticas manifestadas durante las sesiones de clase y descritas en el Capítulo 6.

Lo que se puede inferir, es el tipo de relaciones internas que se produce en cada configuración epistémica a partir de la siguiente estructura genérica: tomando como punto de partida una situación-problema específica, una integral, que requiere la utilización de la integración para su solución, se trata de identificar el procedimiento más adecuado para solucionarla, determinar el tipo de integral y el posible método para solucionarla. Para desarrollar dicho procedimiento, generalmente se recurre a las definiciones como a las proposiciones, algunas veces citando definiciones, propiedades y teoremas, otras veces, se aplican sin siquiera nombrarlos. Los argumentos aceptados como válidos son utilizados para justificar, aunque implícitamente o intuitivamente, el resultado encontrado para la referida situación- problema (integral), nunca es validado, solo se limitan a encontrar un resultado y nada más. Aspectos contrarios a lo que propoene el PMA para este nivel.

En lo que se refiere a las relaciones que se establecen entre las distintas configuraciones epistémicas (o significados intermedios) de la integral, consideramos que el uso de procesos básicamente intuitivos colabora con la comprensión necesaria a la transición del pensamiento elemental hacia el pensamiento avanzado en matemáticas (Tall, 1996; Crisóstomo, 2012). En este sentido la comprensión de la idea matemática que soporta el proceso de integración debe ser movilizada por los alumnos en el momento de elegir o decidir el procedimiento más apropiado para solucionar cada situación-problema que se les presente. De ahí que el principal procedimiento declarado durante el proceso de instrucción, para la integración, consiste en la primitivación o anti derivación. La determinación de primitiva o anti derivada de una función es tácitamente lo que se muestra como la integral de una función, lograda mediante procesos de rutinización algebraica.

Durante el proceso de instrucción se observó que la no comprensión de los distintos significados de la integral contemplados en el currículo de cálculo propuesto en la malla curricular, se convierte en un obstáculo para transformar el conocimiento de contenido matemático de la integral en un conocimiento didáctico (Shulman, 1996). En este sentido compartimos los aportes de Crisóstomo (2012, p. 277) que plantea “la comprensión de las configuraciones epistémicas de la integral en el contexto de profesores de matemáticas consiste en una etapa fundamental para la trasformación del conocimiento que el profesor-formador posee sobre la integral en un conocimiento “enseñable” a los futuros profesores de matemáticas”

5.3.6.2 Conexiones intra disciplinares e inter disciplinares de la integral. Las situaciones-problema tomadas como punto de entrada en cada una de las tres configuraciones epistémicas mencionadas anteriormente, pueden contener implícita o explícitamente conceptos matemáticos (conexiones intra disciplinares), o la asociación de conceptos matemáticos con conceptos de otras áreas del conocimiento (conexiones extra disciplinares) sin embargo, esto no se manifiesta en la institucionalización del MIP, solamente se presentan ejercicios en un contexto netamente intra matemático de rutinización algebraica donde se utilizan algunos tipos de funciones racionales**,** logarítmicas, trigonométricas y un único tipo de función exponencial, la que relaciona a e^x, todo esto descontextualizado de otras conexiones extra matemáticas.

Las conexiones extra disciplinares deberían ser abordadas con relación a una diversidad de fenómenos que pueden ser estudiados en un curso de nivel universitario como el de Cálculo Integral, resaltando la importancia de conectar el cálculo con otras ciencias (física, economía, administración, ingeniería, etc.), y con el mismo curso de Análisis Matemático de la Licenciatura en Matemáticas, aspectos que no se evidencian durante la institucionalización del MIP. En lo que se refiere a las conexiones inter disciplinares, se resalta la importancia de las funciones algebraicas, exponenciales, (únicamente las que tienen la forma e^x), logarítmicas y algunas trigonométricas para el estudio de una fenomenología que es mucho más amplia ligada a la matemática que la que se presenta e institucionaliza.

5.3.7. Procedimientos en el estudio de la integral. Los principales procedimientos utilizados durante el proceso de instrucción resaltan la importancia de introducir el MIP a partir de una situación problema específico, por ejemplo, una integral que necesita ser calculada y que por su estructura no se puede resolver por el método de sustitución simple. En palabras de Crisóstomo (2012), esta es una manera “moderna” de introducir la integral. Esto presupone que se desarrolle el proceso de enseñanza a partir de la integral de Cauchy-Riemann. Como evidencia podemos observar las unidades de análisis [20, 33,125, 176, 231 y 280], entre otras ubicadas en la trascripción de la observación de clases. En lo que se refiere al proceso de integración de una función, se considera que el principal procedimiento consiste en calcular la primitiva (o anti derivada), unidad de análisis [33] para integrales indefinidas y unidad de análisis [326] para integrales definidas con un carácter netamente mecánico, lejano a lo propuesto por el PMA para este nivel.

Con respecto a la noción de área manifiesta que es importante, pero recalca que debe fundamentarse en los cursos previos a Cálculo Integral (semestres I y II, Pre cálculo y Cálculo diferencial), unidades de análisis [36, 104, 161, 197, 240, 270], entre otras. Sin embargo, se espera que durante el proceso de instrucción de este nivel el estudiante ya maneje claramente conceptos como el de derivada, límite y métodos para derivar, que le permitirán visualizar la noción de integral como acumulación y como sumas de Riemann, motivación que puede ser entendida como una vía de convencimiento para que los alumnos den la utilidad de la integración en la resolución de situaciones-problema prácticas propias de las matemáticas. En la entrevista, el profesor–formador menciona: "*Soy de los que cree que dentro del proceso el alumno debe aprender a elaborar sus propios procedimientos para llegar al resultado, debe aprender a resolver problemas por sí mismo y también a discutir con otros. Así me formaron a mí y veo que da resultados. Reitero, el profesor en la mayoría de los casos sólo debe ser un guía*" (Entrevista realizada al Docente, 19/08/2014. Unidad de trascripción 26).

En la unidad (38) de la trascripción de la entrevista señala: "*Pues son un grupo de muchachos que les gusta las matemáticas, pues quieren ser profesores, pero tienen muchos vacíos conceptuales. No manejan preconceptos básicos. Siento que ese es un aspecto que estanca el avance de la clase.*" En la unidad (40) de la misma trascripción señala: "*Los corrijo, permanentemente les indico que cuando terminen miren la respuesta del libro para que cotejen si lo hicieron bien o si no pues, que corrijan, que revisen todo el ejercicio para que encuentren el error. Y sí, hay varios muchachos que ya detectan sus propios errores, o entre ellos se corrigen, creo que el trabajo entre pares del mismo nivel es más oportuno que* *la intervención mía como profesor. A veces ellos se entienden más a sí mismos porque son muchachos.”*

Por otra parte, defiende la utilizacion de métodos numéricos para la resolución de algunos problemas que requieren la noción de integral dada la complejidad para la determinacion de la primitiva de una funcion. Al respecto en la entrevista menciona que él elije el tipo de ejercicios que va a colocar en la clase: “*Pues miro el programa, luego consulto la bibliografía, elijo unos ejercicios para explicar. Creo que uno aprende desde la formulación de inquietudes, entonces yo por lo regular coloco ejercicios y desde ahí explico el tema. Luego los pongo a trabajar*” (Entrevista realizada al Docente, 19/08/2014. Unidad de trascripción 30).

5.4. El significado implementado por el docente durante las sesiones de clase observadas. Según Shulman (1996) para que el profesor pueda enseñar es necesario que él comprenda previamente la disciplina que irá a enseñar. Además considera que se requiere una trasformación de las ideas comprendidas por el profesor con la finalidad de enseñarlas. Por su parte Crisóstomo (2012, p. 267) señala que:

> El conocimiento didáctico de los profesores-formadores sobre la didáctica de la integral, en consonancia con las seis dimensiones propuestas y desarrolladas en el EOS, debe contemplar un conjunto de conocimientos de los referidos docentes que involucren, entre otros aspectos:
>
> 1. Conocimiento de los distintos significados de la integral en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas, así como de las posibles relaciones y conexiones que deben establecerse entre los referidos significados, así como con el currículo de la Licenciatura.
> 2. Conocimiento de los significados que los formadores esperan que sean logrados por los estudiantes y su adecuación a los significados pretendidos /implementados por los profesores.

3. Conocimiento de la vía qué puedan estimular los intereses y necesidades, actitudes positivas y las emociones de los estudiantes hacia los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la integral;
4. Conocimiento de las posibilidades de implementación de propuestas de innovación curricular (basadas en los resultados de investigaciones o en la propia práctica en el proceso de enseñanza el cálculo y de las adaptaciones de la enseñanza de la integral y del cálculo en entorno socio-profesional de los futuros profesores

De ahí que el principal procedimiento declarado sea únicamente en un contexto netamente intra matemático de rutinización algebraica, descontextualizado de otras conexiones extra matemáticas.

En la entrevista el profesor concibe que para que el proceso de enseñanza de la integral sea exitoso es suficiente manejar tres proposiciones: El teorema fundamental del cálculo, desarrollar una aproximación el concepto de integral tomando como base una función potencia de la forma $\int ax^n \, dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1,$ si la integral es indefinida o $\int_a^b ax^n \, dx = \left. \frac{ax^{n+1}}{n+1} \right|_a^b,$ si la integral es definida. De ahí, que el principal procedimiento declarado para la integración consiste únicamente en la primitivación o anti derivación, ratificado particularmente cuando se institucionaliza el MIP, uno de los once significados (Configuraciones epistémicas existentes para el objeto la integral), lo que nos permite deducir que el significado global de la integral pretendido no está cercano al implementado. En la práctica pedagógica observada, solo apareció un modelo pragmático y realista que podría percibirse como una deformación de "cuasi formalista-mecanicista". Estos resultados encontrados pueden ser interpretados desde el EOS como el significado personal global de la integral manifestado durante el proceso de instrucción del MIP.

Capítulo 6. Instrumentos diseñados y aplicados para analizar la secuencia didáctica seguida en el proceso de instrucción del MIP

En este capítulo se presenta el diseño y aplicación de tres instrumentos para recopilar la información: una entrevista semiestructurada, la creación de fichas de observación para la clase, la grabación y trascripción en unidades de análisis de doce sesiones de clase que fueron necesarias para la implantación del MIP. Posteriormente esta información se organiza en 15 Matrices documentales, se definieron las Categorías de Análisis como herramienta para sistematizar la información arrojada por las 15 matrices documentales en 6 matrices categoriales.

Para el diseño y aplicación de instrumentos que nos permitieran realizar el análisis didáctico, se consideró el propuesto en Font, Planas y Godino (2010) para describir, explicar y valorar el proceso de instrucción efectuado. Lo anterior se hace con base en la identificación de diferentes configuraciones didácticas (CD), cada una de las cuales corresponde al conjunto de interacciones generadas a partir de una situación problema específica. Dicho modelo de análisis didáctico de procesos de instrucción, considera los cinco niveles de análisis adoptados en el capítulo 3. Estos niveles de análisis, según el momento del proceso de instrucción que se esté considerando, tienen un peso diferente. Por ejemplo, los dos primeros niveles de análisis se consideraron como fundamentales para observar el diseño curricular y la planificación del proceso de instrucción. Los niveles tercero y cuarto fueron particularmente útiles en el estudio de la implementación realizada. El quinto nivel se tuvo en cuenta para observar tanto en la fase de planificación como en la valoración de los procesos de instrucción.

Una cuestión fundamental en el EOS, es que como objeto básico del análisis cognitivo se toman los sistemas de prácticas presentadas por un sujeto ante determinado campo de problemas. Por ello, para evaluar la comprensión del MIP, observaremos el conjunto de prácticas manifestadas asociadas a este objeto según los significados institucionales pretendidos e implementados, esto es, analizaremos el significado declarado durante el proceso de instrucción observado mediante el discurso, signos y símbolos utilizados durante las sesiones de clase y registrados en las unidades de análisis. Esto nos permitió establecer características del significado global de la integral luego del proceso de instrucción ejecutado. Para ello se han elaborado y aplicado tres tipos de Material: documental, de datos recopilados, y la construcción de seis categorías de análisis.

6.1. Material documental

Para aproximarnos al significado declarado del MIP nos propusimos realizar tres instrumentos para la recolección de la información: una entrevista semiestructurada para el profesor; la creación de 10 fichas para observar la clase y el registro en grabación de audio de las sesiones de clase utilizadas para enseñar el MIP. Con esta información se construyeron unidades de análisis (UA) resultado de la trascripción de las grabaciones de audio y se definieron 6 categorías de análisis. A partir de la trascripción en UA procedimos a elaborar dos tipos de instrumentos para organizar el análisis de la información en forma sistemática: construcción de 15 matrices documentales y 6 matrices categoriales. Las matrices documentales fueron útiles para organizar los datos recopilados en configuraciones didácticas. Dichas configuraciones nos permitieron clasificar la información por categorías de análisis en las matrices categoriales. En los siguientes párrafos se muestra en forma detallada dicho trabajo.

6.1.1. Instrumentos. Para la realización de la entrevista semiestructurada dirigida al profesor se consideró la dimensión epistémica del conocimiento del profesor (incluye los conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional, conocimiento sobre el Cálculo Infinitesimal, en particular el Cálculo Integral) en el que se realiza el proceso de estudio (Godino et al., 2009); se tuvo en cuenta los tres tipos de conocimiento definidos por Hill y colaboradores (2008): el conocimiento común del contenido, el conocimiento en el horizonte matemático y el conocimiento especializado del contenido. Además, su formación profesional, tiempo de experiencia como docente universitario y la forma como imparte el proceso de enseñanza de la integral. El cuestionario definitivo se completó con entrevistas semiestructuradas que fueron aplicadas como pilotaje a otros profesores de la facultad que también han dictado Cálculo Integral, con el objeto de clarificar determinadas cuestiones detectadas en la corrección de las creadas inicialmente que nos resultaban ambiguas y que nos parecía debíamos concretar ya que podían mostrar conflictos semióticos entre el que hacer del docente en el aula.

6.1.1.1. Entrevista semiestructurada al profesor. La entrevista consta de 20 preguntas abiertas organizadas conforme a lo planteado en el párrafo anterior. A continuación presentamos el Cuestionario final.

Entrevista semiestructurada para el profesor. Agradecimiento al profesor por permitirnos llevar a cabo esta investigación, entrar a su salón y poder observar qué ocurre en él. Segundo, permitir que se realice un recuento de lo que ocurre en la clase, cómo se trabaja y cómo se evalúa el proceso seguido. Tercero, permitir que mediante esta investigación se generen cambios significativos que lleven a modificar, pensar y mejorar si es necesario las prácticas docentes que se están realizando actualmente en la educación superior.

Preguntas

1. ¿Cuál es su formación académica?
2. ¿Tiene en la actualidad postgrados adelantados, cursados, terminados?
3. ¿En qué tema específico fue su postgrado?
4. ¿Cuánto tiempo lleva enseñando matemáticas a nivel universitario?
5. ¿En cuáles asignaturas de la licenciatura enseña matemáticas?
6. ¿Tiene libertad de elegir esas asignaturas que enseña o le son impuestas por el jefe del departamento?
7. ¿Qué conoce de la evolución histórico- epistemológica del cálculo infinitesimal?
8. ¿Le gusta enseñar cálculo infinitesimal?, ¿por qué?
9. En particular, ¿le gusta enseñar Cálculo Integral?
10. Desde su experiencia docente en Cálculo Integral, podría describirnos ¿cómo ha sido esa experiencia con los métodos de integración?
11. *Fase preactiva10:* ¿profesor usted prepara sus clases?

---

10 La Fase preactiva es el proceso donde se requiere una primera reflexión sobre los componentes básicos del currículo, qué se pretende que aprendan los alumnos, para qué, con qué estrategias y en qué condiciones. Esto supone una fundamentación y clarificación de la acción futura de la labor didáctica del profesor.

12. Al momento de preparar su clase, ¿planea cómo hacerlo?
13. ¿Qué estrategias metodológicas, didácticas utiliza para el desarrollo de su clase?
14. *Fase activa11:* podría describirnos desde su perspectiva, ¿cómo es una de sus clases de cálculo integral, qué hace, qué espera de los estudiantes, qué evalúa?
15. *Fase pos activa12:* Usted, al terminar la clase se pregunta ¿cómo salió esa clase?, ¿qué actitudes toma al respecto?
16. ¿Qué me puede contar del grupo con el que se van a realizar las clases?, ¿Qué conoce de ellos?
17. Profesor: ¿usted qué hace cuando detecta que sus estudiantes cometen errores al momento en que se desarrollan ejercicios o problemas que usted propone para la clase?
18. Profesor: ¿usted qué hace cuando detecta que sus estudiantes tienen dificultades al momento en que se desarrolla la clase?
19. Profesor: ¿usted conoce algo de lo que la literatura en Educación Matemática se conoce como "errores, dificultades, conflictos, obstáculos", que pueden presentar los estudiantes en el momento que se desarrollan problemas o ejercicios propuestos en clase?
20. En Educación Matemática la noción de conflicto semiótico, introducida por Godino, Batanero y Font (2007) se ha mostrado como un instrumento conceptual para analizar procesos de aprendizaje de los objetos matemáticos. Esta noción permite superar las nociones de obstáculo epistemológico, obstáculo didáctico, error conceptual, entre otras. Situando la problemática del aprendizaje en una actividad de carácter fuertemente semiótico, atravesada por diversos tipos de tensiones, una de las cuales es la relación entre lo individual y lo sociocultural, ¿qué tipo de conflictos semióticos cree usted que presentan los estudiantes, a la hora de aprender Cálculo Integral?

6.1.1.2. Fichas de trabajo descriptivas. Se diseñaron 10 fichas para observación de las clases con el objeto de caracterizar el proceso de enseñanza del MIP. El método incluye un observador no participante de la clase. La observación directa permite describir objetivamente la realidad en que se desarrolla la clase. Se trata de constatar con la información suministrada por las unidades de análisis.

¿Qué observar?

11 La Fase activa es el conjunto de procedimientos y tareas de aprendizaje que el profesor propone a los estudiantes en los diversos ambientes de aprendizaje.

12 La Fase pos activa es un proceso donde se valoran una serie de elementos que ayudan al profesor a analizar y reflexionar sobre los procesos de aprendizaje y estimar en qué medida debe ser transformada.

- La ocurrencia, es decir, qué tipo de fenómenos se dan para el desarrollo de la clase.
- Se observa el orden. Es importante consignar el orden en que aparecen las categorías conductuales del docente que soportan el proceso de enseñanza.

Para el diseño de las 10 fichas de observación de la clase, se consideraron las 6 facetas contempladas en el EOS para valorar el grado de idoneidad didáctica del proceso de instrucción. Para dicha construcción, también se tomó como guía los componentes y algunos descriptores que se mencionan en Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013) haciendo énfasis en:

- Para la dimensión cognitiva se tuvo en cuenta los aprendizajes, incluyendo los errores, dificultades, conflictos y concepciones. En la dimensión afectiva, se tuvo en cuenta las actitudes, emociones, creencias y valores.
- El conocimiento del contenido en relación a la enseñanza se interpretó según las dimensiones interaccional y mediacional. Este conocimiento considera dos grandes aspectos: las configuraciones didácticas y la trayectoria didáctica. Las primeras, incluyen el rol del profesor y los estudiantes con relación a la tarea o contenido, los modos de interacción profesor-estudiante y estudiantes entre sí, los recursos materiales y el tiempo asignado. La trayectoria didáctica está relacionada con el modo de seleccionar las secuencias y gestionar las configuraciones didácticas.
- Finalmente, se evaluó el conocimiento del currículo y las conexiones intra e inter disciplinares que están relacionadas con la dimensión ecológica del conocimiento matemático. En esta categoría se contemplan las orientaciones curriculares, las

conexiones entre distintas áreas de la matemática y las relaciones de las matemáticas con otras disciplinas y con factores de índole socio cultural.

Cabe aclarar que en las 10 fichas se construyeron descriptores emergentes que nos permitieron hacer una observación más detallada a cada dimensión contemplada, centradas particularmente en el Cálculo Integral. Dichos descriptores son adaptables a cualquier otro objeto matemático que se desee analizar. Como paso previo para el diseño y construcción de estas fichas, se realizaron tres modelos piloto de ficha donde se proponían detalles a observar, cuyo objetivo fue analizar la eficacia de estas herramientas para el análisis de los significados declarados durante el proceso de instrucción, buscando, por una parte, puntos conflictivos en la resolución y, por otra, confrontar y completar el análisis a priori que realizamos para su corrección. Una vez corregido y analizado el cuestionario planeado en los modelos de ficha, se concretaron las definitivas donde se incluyó la necesidad de mirar la interacción entre dimensiones (creación de las fichas 8, 9 y 10) que deberían ser diligenciadas por el investigador al momento de grabar y observar cada sesión de clase.

Es pertinente aclarar que en la elaboración de los cuestionarios para la entrevista y la creación de las fichas de observación se tuvieron en cuenta, por una parte, las aportaciones de diferentes trabajos de investigación que habían planteado cuestionarios a profesores y estudiantes de un nivel educativo similar al nuestro sobre la integral definida, en concreto, Labraña (2000); Turégano (1993); el trabajo realizado por Wenzelburger (1993); Ordóñez (2010, 2011); Crisóstomo (2012), en el que se tratan situaciones que involucran procesos de acumulación y que consideramos debían estar presentes en nuestro estudio, así como el modelo de plantilla creado por Fuhrer y De Almeida (2013) para observación de clases. A continuación, se presenta la información consolidada en las 10 fichas de observación.

Fichas de trabajo - observación de clase	
Datos consolidados	
Facultad:	Ciencia y Tecnología
Espacio curricular:	Licenciatura en Matemáticas
Asignatura:	Cálculo Integral
Docente a cargo:	Docente observado
Curso / grupo:	201B
Convenciones. Los siguientes cuadros utilizaran valoraciones nomenclados así: Si (S); No (N); Algunas Veces (AV)	

Ficha 1.

Criterios de evaluación idoneidad epistémica Representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.	Valoración		
	S	N	AV.
Componente: Situaciones-problemas **Descriptores**			
1. Presenta el plan de clase al observador		x	
2. Inicia su clase puntualmente			x
3. Revisa tareas asignadas para la casa			x
4. Da a conocer los objetivos de la clase a los estudiantes		x	
5. Presenta el tema de la clase a los estudiantes	x		
6. Presenta una muestra representativa y articulada de situaciones-problemas que permitan contextualizar, ejercitar, ampliar y aplicar el conocimiento matemático, los cuales proceden de la propia matemática y de otros contextos		x	
7. Propone problematización (situaciones de generación de problemas)		x	
8. Asigna actividades alternativas (problemas ejercicios, guías) para que los estudiantes avancen más rápido			x
9. Presenta material concreto de soporte			x
10. Muestra interés en que todos sus estudiantes entiendan el tema		x	
11. Denota dominio de los contenidos tratados			x
13. Se realizan recomendaciones bibliográficas	x		
Componente: Lenguaje **Descriptores**			
1. Uso de un amplio repertorio de representaciones (materiales, icónicas y simbólicas) para modelizar problemas e ideas matemáticas			x
2. Analiza la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realiza procesos de traducción entre las mismas		x	
3. Se favorece que los estudiantes construyan, perfeccionen y usen sus propias representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas.		x	
4. El nivel del lenguaje usado es adecuado a los estudiantes a que se dirige			x

5. Realiza preguntas para comprobar si los estudiantes están comprendiendo el tema tratado	x		
6. Su modulación, volumen, tono de voz y pronunciación son adecuados	x		
7. Utilización de vocabulario técnico		x	
Componente: Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos) **Descriptores**			
1. Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen			x
2. Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema adaptados al nivel educativo dado			x
3. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos		x	
4. Las consignas son claras y facilitan la comprensión y ejecución de las tareas asignadas		x	
5. Presenta al tema a partir de ejemplos que ilustran la situación acorde al contexto del curso	x		
6. Refuerza las explicaciones a los estudiantes que muestran dificultad para comprender un concepto o una actividad que deben realizar			x
7. Adopta el uso de recursos en función de las actividades propuestas		x	
8. Revisa y corrige los procedimientos seguidos en los ejercicios asignados	x		
9. Presenta orden en la exposición de temas tratados durante la clase			x
10. Sigue una secuencia lógica y articulada de los temas tratados en clase			x
11. Muestra interés en que todos sus estudiantes entiendan el tema		x	
12. Denotan dominio de contenidos matemáticos de los temas tratados			x
13. Se equivoca frecuentemente en la colocación de signos, o en el desarrollo de procesos algorítmicos propios del calculo			x
14. Permite que sus estudiantes reconozcan toda la simbología matemática usada durante al clase			x
15. Explica los temas utilizando ejemplos, contraejemplos, ejercicios, casos, etc.			x

Ficha 2.

Criterios de evaluación idoneidad epistémica	Valoración		
Componente: Argumentos **Descriptores**	S	N	AV
1. Se favorece el razonamiento y la prueba de los enunciados y proposiciones matemáticas mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de pruebas		x	
2. Los estudiantes formulan con frecuencia conjeturas sobre relaciones matemáticas, las investigan y justifican			x
3. Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen			x
Componente: Relaciones (conexiones, significados) **Descriptores**			
1. Se favorece el establecimiento y el uso de conexiones entre las ideas matemáticas (problemas, representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades argumentos)			x
2. Los contenidos matemáticos se presentan y estudian como un todo organizado			x
3. Se reconocen y aplican las ideas matemáticas en contextos no matemáticos		x	
4. El profesor establece conexiones de la asignatura que enseña con otras ramas de la ciencia que las involucran		x	
5. El profesor conduce al alumno a percibir los temas tratados como herramientas útiles para el desempeño profesional de los futuros profesores		x	

Ficha 3.

Criterios de evaluación Idoneidad cognitiva	Valoración		
Grado en que los significados pretendidos/ implementados son asequibles a los alumnos, así como el grado en el que los significados personales logrados por los alumnos son los significados pretendidos por el profesor.	S	N	AV
Componente: Conocimientos previos (Componentes similares a la dimensión epistémica) **Descriptores**			
1. Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio)	x		
2. Cuando el profesor está enseñando evoca en los alumnos los conocimientos previos que son necesarios para la construcción del tema que trata			x
3. El profesor presenta el plan de estudio a los alumnos (programa)	x		
4. El profesor evidencia seguridad en la presentación del tema que enseña			x
5. El profesor evidencia preparación de la clase		x	
6. El profesor presenta la clase a sus alumnos usando estrategias metodológicas / didácticas que la enriquecen		x	
7. Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes		x	
8. Durante la clase se percibe apropiación y conexión de los saberes tratados con los ya conocidos			x
9. Se percibe extensión del conocimiento a partir de los temas trabajados en clase		x	
Componente: Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales Descriptores			
1. Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo		x	
2. Relaciona el tema tratado con la realidad escolar del curso que toman los estudiantes		x	
3. Las actividades propuestas y las desarrolladas responden al objetivo trazado para la clase			x
4. El profesor adapta el desarrollo del programa al ritmo de aprendizaje que muestra el curso	x		
5. El profesor promueve en los alumnos estrategias metodológicas que permitan avanzar el desarrollo del programa en forma significativa para el proceso de aprendizaje		x	
Componente: Aprendizaje Descriptores			
1. Presenta el tema de la clase a los estudiantes			x
2. Da a conocer los objetivos de la clase a los estudiantes			x
3. Realiza una evaluación diagnóstica para conocer lo que los estudiantes saben del tema a tratar (hay retroalimentación de preconceptos)		x	
4. Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas		x	
5. Toma las experiencias previas de los estudiantes como punto de partida para la clase		x	
6. Refuerza las explicaciones a los estudiantes que muestran dificultad para comprender un concepto o una actividad que deben realizar			x
7. Realiza preguntas para comprobar si los estudiantes están comprendiendo el tema que está enseñando	x		
8. Refuerza el trabajo individual del estudiante			x
9. Asigna tareas extra clase	x		
10. Revisa y corrige ejercicios asignados en la clase anterior	x		
11. Las actividades implican procesos cognitivos	x		

	S	N	AV
12. El profesor hace uso de actividades de fijación que ayuden al proceso de aprendizaje de los alumnos		x	

Ficha 4.

Criterios de evaluación Idoneidad mediacional Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo de los proceso de enseñanza y de aprendizaje.	Valoración		
	S	N	AV
Componente: Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores) **Descriptores**			
1. El profesor hace uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido		x	
2. El profesor utiliza material didáctico que ayudan a conceptualizar los temas tratados			x
3. El profesor promueve el uso de calculadoras modulo CAS como ayuda al proceso de aprendizaje de los alumnos		x	
4. Las definiciones y propiedades son contextualizadas, motivadas usando situaciones y modelos concretos		x	
5. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando visualizaciones con la ayuda de algún software matemático		x	
6. Los temas propuestos en el desarrollo de la clase se contextualizan ayudándose de software matemático		x	
7. El profesor distribuye material de apoyo como fotocopias con ejercicios resueltos o para resolver	x		
8. El profesor se limita al uso de los textos propuesto en la bibliografía del programa	x		
9. El profesor promueve la investigación y profundización de los temas del curso incentivando la consulta en otras fuentes bibliográficas		x	
10. El profesor permite que los alumnos presenten situaciones problémicas o ejercicios propios del curso extraídos de otras fuentes bibliográficas diferentes a las que el propuso en el programa		x	
Componente: Número de alumnos, horario y condiciones del aula **Descriptores**			
1. El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida	x		
2. El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora)	x		
3. El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido			x
4. El mobiliario del salón de clase es apropiado para el desarrollo normal de la clase			
5. El ambiente climático dentro del salón de clase es apropiado para el desarrollo normal de la clase			
Observaciones: las clases se desarrollan los días martes en el salón B225 y los viernes en el salón B116. Es pertinente aclarar que el uso del salón B116 limita la acción del docente dado que al aula le faltan vidrios, la clase es la las 11 de la mañana, entra mucho viento por las ventanas sin vidrio; regularmente es un salón frio. Cuando llueve se entra el agua. Es un salón incómodo para trabajar. Además, está ubicado al frente de las canchas de baloncesto y de futbol, en repetidas ocasiones los estudiantes dan balonazos a la reja de la ventana y distraen el agrupo. Algunas veces los estudiantes deben traer sillas de otro salón ya que las existentes no alcanzan para todos.			
Componente: Tiempo (De enseñanza colectiva/tutorización; tiempo de aprendizaje) **Descriptores**			
1. El profesor inicia su clase puntualmente			x

2. El profesor invierte tiempo adecuado en los contenidos más importantes o nucleares del tema.			x
3. El profesor hace inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad, enfatizándolos			x
4. El profesor hace inversión de tiempo durante la clase atendiendo las dificultades que presentan los alumnos	x		
5. El profesor dedica tiempo de la clase relacionando los temas fundamentales del curso con temas previos que el alumno debe conocer			x
6. Se percibe adecuación de los significados pretendidos /implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial)			x
7. El profesor detecta deficiencia en los alumnos en el manejo y apropiación de los significados pretendidos /implementados		x	
8. El profesor dedica tiempo de la clase para corregir errores, superar posibles dificultades que presenten los alumnos	x		
9. El profesor asigna trabajo, tareas que deben realizarse en equipo durante la clase	x		
10. El profesor asigna trabajo, tareas que deben realizarse en tiempo extraescolar (para la casa)	x		

Ficha 5.

Criterios de evaluación Idoneidad emocional o afectiva	Valoración		
Interés y motivación del alumnado en el proceso de estudio	S	N	AV
Componente: Intereses y necesidades **Descriptores**			
1. Se percibe selección de tareas de interés para los alumnos		x	
2. Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional		x	
3. Revisa tareas asignadas para la casa		x	
4. Revisa y corrige ejercicios asignados en la clase anterior aun si los alumnos no lo solicitan			x
5. Presenta orden y secuencia lógica en la exposición de temas tratados durante la clase	x		
6. El profesor organiza el mobiliario (sillas y mesas) en el salón por filas		x	
7. El profesor propone el tipo de agrupamiento de los alumnos en el salón para la clase		x	
8. Los alumnos ubican los pupitres en el salón de una forma no convencional para la clase	x		
9. El profesor con sus actividades genera convencimiento en los alumnos de la importancia de los temas tratados en la asignatura como soporte del proceso de formación profesional			x
Componente: Actitudes **Descriptores**			
1. Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.			x
2. El profesor muestra creatividad en la actividad con la que inicia la clase			x
3. El profesor hace la distribución del material de trabajo para la clase		x	
4. Los alumnos mismos hacen la distribución del material de trabajo que el profesor trajo para la clase	x		
5. Se promueve la participación activa de los alumnos en el desarrollo de la clase			x
6. Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quien lo dice	x		
Componente: Emociones **Descriptores**			
1. Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas			x
2. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas			x

	S	N	AV
3. Transmite entusiasmo e interés por el tema a tratar al grupo de estudiantes			x

Ficha 6.

Criterios de evaluación Idoneidad interaccional Grado en que la organización de la enseñanza permite identificar conflictos semióticos y resolverlos durante el proceso de instrucción	valoración		
	S	N	AV
Componente: Interacción docente-discente **Descriptores**			
1. El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.)		x	
2. Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.)			x
3. Se busca llegar a consensos con base en el mejor argumento			x
4. Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos		x	
5. Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión			x
6. Es afectuoso con los alumnos (les llama por su nombre)	x		
7. Trata con respeto y amabilidad a los estudiantes	x		
8. Valora la participación de los estudiantes			x
9. Permite que la mayoría de los estudiantes expresen sus puntos de vista cuando él hace preguntas	x		
10. Motiva a los estudiantes a participar activamente en la clase			x
11. Permite que algunos estudiantes se distraigan y pierdan el rumbo de la clase	x		
12. Lleva control de asistencia en la clase		x	
13. Ofrece alternativas para que los estudiantes que presentan dificultades puedan superarlas		x	
14. El profesor se despide de sus estudiantes al finalizar la clase	x		
15. Indica al grupo que se iniciara un nuevo tema a partir de una situación previa conocida			x
16. Corrige actividades o tareas propuestas en el tablero siempre que un alumno lo solicite	x		
17. Cuando los alumnos trabajan en grupo se dirige dónde está el estudiante y le pide que venga a su mesa o al tablero	x		
18. El profesor utiliza emergentes para aprendizajes ocasionales		x	
19. El profesor promueve la utilización de técnicas de estudio		x	
20. Muestra una actitud de apertura a los comentarios y preguntas de los alumnos			x
21. el profesor sigue un modelo didáctico definido	x		
22. Atiende personalmente a los estudiantes cuando trabajan en grupo		x	
23. Atiende al estudiante cuando le pregunta mientras explica al grupo general	x		
24. Atiende al estudiante cuando le pregunta mientras trabaja individualmente			x
25. Resuelve dudas al grupo general	x		
26. Detiene la clase para aclarar dudas que han surgido en el trabajo individual o por subgrupos para explicarlas al grupo general	x		
Componente: Interacción entre discentes **Descriptores**			
1. Se favorece el dialogo y comunicación entre los estudiantes	x		
2. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión			x
3. Algunos se limitan a desarrollar los ejercicios, otros a copiar lo que sus compañero o el profesor hace en el tablero	x		

4. Busca apoyo en su grupo de compañeros para solucionar dudas			x
5. El alumno se siente cómodo ante sus compañeros al preguntar			x
6. El alumno ayuda a sus compañeros a resolver ejercicios o tareas asignados por el profesor			x
Componente: Autonomía **Descriptores**			
1. Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación)			x
2. La clase de ejercicios que el profesor les propone a los estudiantes los elige él mismo	x		
3. Da la opción a los alumnos que propongan ejercicios de práctica diferentes a los que el propuso		x	
4. El alumno busca ayuda en el profesor cuando presenta dificultades			x
5. El alumno levanta la mano para manifestar sus dudas con temor a la reacción del profesor			x
6. El alumno siente apoyo del profesor al momento de preguntar			x
7. El alumno es respetuoso con el docente y sus compañeros al participar en la clase	x		
8. Trabajan organizada y productivamente			x
Componente: Evaluación formativa **Descriptores**			
1. Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos		x	
2. Los alumnos muestran responsabilidad ante el pedido previo de materiales para la clase	x		
3. Los alumnos muestran responsabilidad en el cumplimiento de actividades			x
4. Promueve la participación de los alumnos, y verifica su comprensión		x	
5. Se ayuda de actividades más sencillas que le proporcionen al estudiante herramientas para la comprensión de conceptos más elevados para la solución de problemas propios del cálculo integral		x	

Ficha 7

Criterios de evaluación Idoneidad ecológica Grado de adecuación del proceso de estudio llevado a cabo con respecto a los currículos oficiales, proyecto educativo del centro y sociedad.	Valoración		
	S	N	AV
Componente: Adaptación al currículo **Descriptores**			
1. Los significados, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.			x
2. El profesor realiza la presentación de los contenidos y pauta los objetivos a alcanzar cuando se inicia el curso (entrega programa académico del curso)	x		
3. El profesor realiza la presentación de los contenidos y pauta los objetivos a alcanzar durante cada una de las clases		x	
4. La evaluación de los contenidos desarrollados en el curso es acorde a lo planificado en el programa		x	
5. La facultad hace seguimiento al desarrollo del programa académico que el profesor ejecuta			x
Componente: Apertura hacia la innovación didáctica			

Descriptores			
1. Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva		x	
2. Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo		x	
3. Explica los temas con claridad.			x
4. Los recursos son utilizados correctamente		x	
5. Los recursos resultan atractivos e interesantes para los estudiantes		x	
6. Sigue una secuencia lógica y articulada al presentar los temas de estudio			x
7. Sintetiza y enfatiza cuando es necesario			x
8. Hace referencia a contenidos ya tratados para articularlos			x
9. Los objetivos de la clase son conocidos por los alumnos		x	
10. Explica los temas utilizando ejemplos, contraejemplos, ejercicios, casos, etc.		x	
11. Prepara la clase considerando cada una de sus fases		x	
Componente: Adaptación socio profesional y cultural **Descriptores**			
1. Los significados contribuyen a la formación socio profesional de los estudiantes			x
2. Propone y utiliza tareas, ejercicios de apoyo para que los alumnos comprendan conceptos más profundos		x	
3. Le sugiere a los alumnos consultar textos de la bibliografía para profundizar los temas en que presenta debilidades	x		
4. Le sugiere al alumno consultar textos de la bibliografía para profundizar los temas en que presenta fortalezas		x	
5. El profesor enseña y orienta a los estudiantes a usar un vocabulario técnico propio de la asignatura y del medio profesional que enseña		x	
6. El estudiante percibe la importancia de los temas tratados en la clase en miras a construir su perfil profesional		x	
Componente: Conexiones intra e interdisciplinares **Descriptores**			
1. El profesor le sugiere al alumno realizar otras actividades extra clase para fortalecer las debilidades presentadas en el desarrollo de la clase	x		
2. El profesor relaciona los temas tratados en la clase con otras áreas del saber		x	
3. El profesor propone situaciones problema propias de otras ciencias que se solucionan con los temas que se trabajan en clase		x	

Interacciones entre dimensiones. En Godino et al., (2013), se plantea que la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la idoneidad didáctica como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global, de ahí surge la necesidad de la interacción entre dimensiones. Por ejemplo, el uso de un recurso tecnológico puede determinar que se puedan abordar determinados tipos de problemas y las configuraciones de objetos y procesos correspondientes, lo cual conlleva nuevas formas de representación, argumentación, generalización, etc. También, se pueden ver afectadas las formas de interacción entre el profesor y los estudiantes, el interés y motivación, y en definitiva los aprendizajes. En estas interacciones entre dimensiones, se incluyen las características observadas que apuntan a normas que integran dos o más componentes de diferentes dimensiones. La ficha 8 contempla situaciones donde interaccionan las dimensiones epistémica-ecológica, epistémica-cognitiva, epistémica-interaccional y epistémica-mediacional. La ficha 9 contempla situaciones donde interaccionan las dimensiones cognitiva-interaccional y la afectiva-interaccional. La ficha 10 contempla situaciones donde interaccionan las dimensiones afectiva-mediacional y la interaccional- mediacional.

Ficha 8.

Criterios de evaluación Interacción entre las dimensiones Epistémica-Ecológica	Valoración		
	S	N	AV
Componente: Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos **Descriptores**			
1. Utilización de los lenguajes gráfico, analítico, estadístico, esenciales para interpretar la información sobre la realidad		x	
2. Utilización de modelos gráficos, analíticos que le permitan al alumno visualizar nexos con otras ciencias		x	
3. Utilización de modelos gráficos, analíticos que le permitan al alumno visualizar aplicaciones a otras ciencias		x	
4. Utilización de modelos mentales, gráficos, analíticos, históricos, epistemológicos que le permitan al alumno visualizar la evolución de esta rama de las matemáticas (calculo infinitesimal)		x	
Se propone el planteamiento y resolución de problemas en contextos matemáticos y no matemáticos		x	
Se emplean las representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos		x	
Se percibe innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.		x	
Criterios de evaluación Interacción entre las dimensiones Epistémica- cognitiva			

Componente: Las representaciones semióticas utilizadas deberían tratarse como elementos esenciales para sustentar la comprensión de los conceptos y relaciones matemáticos **Descriptores**			
1. Se institucionaliza el uso y nominación correcta de signos y símbolos propios del cálculo integral			x
2. El profesor detecta posibles falencias en la apropiación y uso adecuado de dicha simbología			x
3. Incluir y diferenciar los diferentes registros semióticos en la solución de situaciones problémicas propuestas			x
4. Realizar tratamientos y conversiones utilizando diferentes registros semióticos en una misma situación problémica propuesta.			x
5. Controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos relacionados con el cálculo integral y reflexionar sobre él		x	
6. El profesor guía a sus alumnos en el desarrollo y la utilización de múltiples representaciones con eficacia		x	
Criterios de evaluación Interacción entre las dimensiones Epistémica- interaccional			
Componente: El profesor modeliza el lenguaje matemático que los alumnos posiblemente no hayan conectado todavía con sus ideas. **Descriptores**			
1. El profesor utiliza y promueve el uso de vocabulario técnico especializado propio del cálculo integral			x
2. El profesor corrige a alumno cuando utiliza un vocabulario no técnico especializado propio del cálculo integral		x	
3. El profesor promueve estrategias didácticas/metodológicas para que los alumnos se apropien del vocabulario técnico especializado propio del cálculo integral		x	
4. Se establecen conexiones entre el lenguaje del cálculo integral con contenidos de otros niveles superiores de enseñanza (análisis matemático, ecuaciones diferenciales entre otros)		x	
Criterios de evaluación Interacción entre las dimensiones Epistémica-mediacional			
Componente: Las nuevas formas de representar asociadas a la tecnología electrónica crean la necesidad de una atención, incluso mayor, a la representación en relación con otras ciencias que se sirven de las matemáticas **Descriptores**			
1. Se tienen en cuenta las exigencias del currículo escolar y se busca integrarlo con otras áreas del saber		x	
2. Se establecen conexiones entre los contenidos del cálculo integral con diferentes contextos de la vida cotidiana		x	
3. Se establecen conexiones entre cálculo integral y su uso en diferentes profesiones y campos de la ciencia		x	
4. Se analizan usos del cálculo integral en el mundo circundante.		x	
5. Se analizan usos incorrectos del cálculo integral en el mundo circundante.		x	
6. Se contempla la integración didáctica de las TIC (pc, calculadoras, recursos de Internet, software específico) y material concreto en los proyectos de análisis de situaciones problémicas cotidianas		x	

Ficha 9

Criterios de evaluación Interacción entre dimensiones Cognitiva-interaccional	valoración		
	S	N	AV
Componente: El profesor debe ser capaz de reconocer y solucionar conflictos y fomentar el aprendizaje de los alumnos **Descriptores**			
1. El profesor utiliza las concepciones erróneas que surgen en las representaciones de los ejercicios y situaciones problémicas hechas por los alumnos, para proporcionarles situaciones para enseñanzas y aprendizajes nuevos		x	
2. El profesor considera que los alumnos deberían llegar a ser más expertos en aprender de otros y con otros	x		
3. Se tiene en cuenta la identificación y resolución apropiada de conflictos		x	
4. Se fomenta el aprender de otros y con otros.	x		
5. Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo		x	
6. Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes a lo planeado para el curso		x	
7. Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.		x	
8. La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia		x	
9. El profesor reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y se dan respuestas adecuadas, etc.).		x	
10. Los alumnos tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos.	x		
11. En el desarrollo de la clase se percibe una observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos		x	
Criterios de evaluación Interacción entre dimensiones Afectiva-interaccional			
Componente: Alude a la necesidad de hacer una introducción adecuada del tema de estudio que se quiere tratar con los estudiantes **Descriptores**			
1. Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad en el proceso de aprendizaje			x
2. Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas		x	
3. Se proponen situaciones problémicas que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.		x	
4. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas		x	
5. Las explicaciones dadas por los estudiantes incluyen argumentos matemáticos y racionales, no solamente descripciones de procedimientos			x
6. Se incluyen contenidos motivadores, con adaptaciones razonables y apropiadas, que promueven el acceso y el logro de todos los estudiantes.			x

Ficha 10.

Criterios de evaluación Interacción entre dimensiones Afectiva-mediacional	valoración		
	S	N	AV
Componente: A través de la tecnología puede potenciarse la implicación de los alumnos en el proceso de aprendizaje			

Descriptores			
1. El profesor es comprensivo y dedicado a sus estudiantes		x	
2. El profesor conoce y entiende profundamente las matemáticas que enseña y es capaz de usar ese conocimiento con flexibilidad en sus tareas de enseñanza			x
3. El profesor tiene amplias oportunidades y apoyo para incrementar y actualizar frecuentemente sus conocimientos didáctico-matemáticos			x
4. Se contemplan momentos de introducción (presentación de objetivos, metodología didáctica, modos de evaluación,…) y sistematización de los contenidos tratados poniendo énfasis en los contenidos claves		x	
5. Se trabajan los contenidos tratados poniendo énfasis en los contenidos claves	x		
6. Se considera llegar a consensos con base al mejor argumento. f. Se tiene en cuenta el uso de diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos		x	
6. Se favorecen instancias de comunicación y debate que implican explicar, justificar y cuestionar puntos de vista (respuestas) utilizando argumentos matemáticos. 7. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión. Autonomía a	 x	x	
8. Se promueve el trabajo personal de los estudiantes frente a la resolución de problemas y tareas (comprensión del problema, trazar un plan, comprobar soluciones, comunicar resultados).		x	

Criterios de evaluación Interacción entre dimensiones
Interaccional- mediacional

Componente: La tecnología ayuda en la evaluación permitiendo a los profesores examinar los procesos seguidos en las investigaciones de los alumnos, así como los resultados, y enriqueciendo, por tanto, la información disponible para tomar decisiones relativas a la enseñanza

Descriptores			
1. Se promueve el trabajo personal con el uso de software matemático de apoyo al proceso de aprendizaje de los alumnos frente a la resolución de problemas y tareas (comprensión del problema, trazar un plan, comprobar soluciones, comunicar resultados desde el uso del software)		x	
2**.** Se contemplan el uso de diversas técnicas de evaluación (resolución de problemas, tareas prácticas, observaciones, diarios de clase,…)		x	
3. Se incluyen actividades de auto-evaluación, co-evaluación y hetero-evaluación.		x	
4. La evaluación es coherente con las metas de aprendizaje (se incluyen tareas similares a las situaciones de aprendizaje, incluso las mismas)			x
5. La evaluación se aplica de manera continua y sistemática		x	

Interacciones entre las seis dimensiones de la idoneidad didáctica

Componente: Se planifican apropiadamente los contenidos de enseñanza teniendo en cuenta

Descriptores			
1. La selección apropiada de situaciones, su solución esperada y posibles respuestas erróneas (la forma de enfrentarlas		x	
2. La metodología didáctica; los medios a utilizar; y la forma de evaluar los aprendizajes pretendidos		x	

6.1.1.3. Los registros narrativos (grabaciones de audio de la clase). Ayudan a obtener descripciones que refuerzan lo observado, con un formato flexible que permite recoger diferentes características y modalidades de las actividades desarrolladas por el grupo durante la clase (tanto por el docente como por los estudiantes). Este registro se trascribió en unidades de análisis sugeridas por la lectura repetida de los mismos, para un manejo objetivo de la información recogida.

6.2. Material de datos recopilados

La información recogida se trascribió en unidades de análisis conforme se registran los sucesos acaecidos en la clase, esta información se organizó por configuraciones didácticas y su respectiva configuración epistémica asociada, organización que llamamos Matrices Documentales; luego de esta organización se depuraron los datos clasificándolos en las Matrices Categoriales descritas en el apartado 6.3 de este Capítulo. A continuación se presentan en detalle las Matrices Documentales.

6.2.1. Trascripción en unidades de análisis. A partir de la información recogida con la aplicación de los instrumentos diseñados, se tomaron los registros narrativos (grabaciones de audio de la clase) que fueron trascritos en 820 unidades de análisis. Los datos se clasificaron por situaciones problema, desde su inicio hasta que se dio su culminación, bien sea porque se solucionó el ejercicio o porque se dieron las pautas para realizarlo. Cada situación problema abordada genera lo que en el EOS se define como una Configuración Didáctica (CD), esta comienza con una tarea propuesta por el profesor, para este caso calcular una integral, y termina cuando el profesor considera que se ha solucionado la situación planteada y propone otra tarea: calcular otra integral, bien sea porque la anterior ya se solucionó o porque se asumió que ya se daba por terminada. Para el análisis de cada configuración se adaptó la siguiente plantilla propuesta en Ordóñez (2011).

Plantilla de análisis a las situaciones propuestas por el profesor	
Objetivo general	Se especifica el objetivo perseguido con la cuestión planteada
Objetivos específicos	Se concreta el objetivo general en diferentes objetivos específicos dotándolo de operatividad.
Significados institucionales de referencia (CE)	Se especifican las Configuraciones Epistémicas que es necesario movilizar en la resolución de la cuestión según las establecidas en el capítulo 5.
Entidades primarias	Se especifican las Configuraciones Epistémicas definitorias en la cuestión propuesta.
Situación problema propuesta	Se presenta la situación específica propuesta
Lenguaje (Los tipos de lenguaje que se pueden usar en la resolución)	Los posibles lenguajes que hemos considerado son el natural, analítico, numérico y el gráfico.
Argumentaciones	Distinguimos dos tipos de argumentaciones siguiendo a Duval (1995) que podemos encontrar en la presentación que hace el profesor y que replican los alumnos: • Retórica: justificación verbal de un enunciado • Heurística: justificación de la eficacia de una acción Eso se da porque el profesor y los alumnos realizan los procedimientos para resolver la situación, acompañándolos de comentarios.
Conceptos y proposiciones	Se han unido ambas entidades primarias en este grupo. En él analizamos, por una parte, los conceptos-regla (que se tendrán en cuenta al momento de solucionar el ejercicio) y, por otra parte, las proposiciones necesarias entre las que se incluyen las posibles proposiciones "falsas" que pueden utilizarse en la resolución de la cuestión. Éstas serán fuente de conflictos semióticos y serán expuestos en ese apartado al finalizar las 15 plantillas construidas.
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Hemos distinguido entre los errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral y los que no lo son. En este apartado, completamos los conflictos semióticos propios de las proposiciones falsas que se Utilicen, ya vistos en las proposiciones, y otros que puedan aparecer.
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral y que generan dificultades	Aunque consideramos que los errores en general son debidos a conflictos semióticos, hemos observado que algunos corresponden a otros objetos matemáticos subyacentes y nos pareció necesaria su diferenciación. Es claro que la presencia de este tipo de errores conduce a la presencia de dificultades que inciden en la comprensión

	de la integral, pero su análisis y estudio no corresponde a nuestra investigación, únicamente los mencionaremos.

6.2.2. Matrices documentales. Como se mencionó antes, cada configuración didáctica genera una Configuración Epistémica asociada, a dicho conjunto lo llamamos Matriz Documental. Cabe aclarar que en el registro de las 12 sesiones de clase utilizadas para la implementación del MIP se identificaron 15 Configuraciones Didácticas, cada una de ellas con su respectiva Configuración Epistémica asociada, lo que conlleva a la creación de 15 matrices documentales relacionadas a continuación.

Matriz documental 1. Esta matriz está asociada a la Configuración Didáctica 1 (CD1). Se da desde la unidad 20 hasta la unidad 32 de análisis. En la Figura 12**,** plantilla 1 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 12. Plantilla 1 de análisis Configuración Didáctica 1 (CD1).

Objetivo general	Corregir el ejercicio $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}dx$
Objetivos específicos	Verificar si el trabajo adelantado como tarea es correcto. Identificar el método utilizado para solucionar esta integral.
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada, inversa de la derivada y algebraica*
Entidades primarias	CEGen, CEant, CEa
Situación problema propuesta	Calcular la integral $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}dx$
Lenguaje	Los posibles lenguajes que hemos considerado son el natural, analítico, numérico, algebraico y el gráfico.
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal de un enunciado. Heurística: Consideramos que el tipo de argumentación que utiliza tanto el profesor como los estudiantes no son argumentaciones ambiguas no respaldadas teóricamente.
Conceptos y proposiciones	En cuanto a los conceptos-regla, tanto el profesor como los estudiantes muestran ambigüedades al momento de mencionar el ejercicio. Por otra parte, las proposiciones necesarias entre las que se incluyen las proposiciones falsas que utilizan en la resolución de la cuestión (unidad de análisis 21 al 24).

	Éstas son fuente de conflictos semióticos que se expondrán al finalizar estas plantillas.
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión, pero no se valida la solución encontrada (unidad de análisis 21 al 28).
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Se presentan errores asociados a conflictos semióticos que no son asociados a la integral, producto de las proposiciones falsas que se utilizan. Están descritos detalladamente al finalizar las 15 plantillas.

Tabla 5. Configuración epistémica asociada a la CD1.

Problema:

Corregir el ejercicio $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}}\, dx$

Definiciones/Conceptos:

Función racional, derivada, antiderivada, integral indefinida, diferencial, factorización

Procedimientos:

Previos: Simplificación, factorización, derivación de funciones, método de sustitución

Emergente: Método de Sustitución simple

Paso 1: Identificar el tipo de función, y el método a aplicar ("Este es un ejercicio que tiene forma racional, pues tiene Polinomios arriba y abajo. El de abajo es un radical polinómico. A6 recuerde que se debe mirar bien para descubrir la forma de calcular la integral. Tenga en cuenta revisar cual es la derivada del otro. ¿Cuál sería u?) (A6, ¡mire que el de arriba es la derivada del de abajo!... ¡Es evidente!") (Trascripción observación de clases, Anexo # 2 unidad de análisis [20].)

Paso 2: Sustituir la cantidad sub radical del denominador de la función por la letra *u (Pues u es igual al de abajo sin el radical y du igual al de arriba por dx* [21]*)*

Paso 3: Calcular du (derivando)

Paso 4: Sustitución en la integral (*Ahora lo sustituimos en la integral en términos de u ¿cierto profe?* [28]*)*

Paso 5: Trasformar toda la integral en términos de la nueva variable u (normalmente por sustitución)

Paso 6: Aplicar la propiedad de las integrales: fórmula $\int ku \;\; du = k \int u \; du \;, \forall \; k \in \Re$

Paso 7: Calcular la integral $\frac{1}{3}\int u^{-1/2} du$

Paso 8: Presentar la respuesta sumando la constante de integración C

Proposiciones

Previas a la CD1:

- $P(x) = \frac{ax+b}{cx+d}\,,\; cx + d \neq 0; \;\; a, b, c, d \in \Re$ Polinomio con forma racional
- Según el profesor: Determinar si el de arriba es la derivada del de abajo ¿cómo será la sustitución?
- $(cx + d)' = ax + b$
- Realizar el tratamiento: Seleccionar *u* como la cantidad sub radical, derivarla y revisar si este resultado es la función que está en el numerador. (*u* es igual al de abajo sin el radical y *du* igual al de arriba por *dx)*
- $\int ax^n \; dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C \,, n \neq -1$
- $\int k \;\; f = k \int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- $u' = du \; ; \; v' = dv$

Emergentes:

- $u = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow du = (3x^2 + 6x) = 3(x^2 + 2x)dx$
- $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}} dx = \int \frac{(x^2 + 2x)}{u^{1/2}} \cdot \frac{du}{3(x^2 + 2x)} =$
- $= \frac{1}{3} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$
- $= \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} + c$

Lenguaje

Simbólico: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, *U, v, du, dv, u', v',* x, *dx,* $\int$, *C,...*

Verbal: "*al tener forma racional, pues tiene Polinomios arriba y abajo*"; "*el de arriba es la derivada del de abajo"* [29-32]

Argumento 1.

Tesis 1: $\int \frac{du}{u} =$ a una integral por sustitución

Razón: Este es un ejercicio que tiene forma racional, pues tiene Polinomios arriba y abajo. Sí, el de arriba es la derivada del de abajo; entonces ¿cómo será la sustitución?

Tesis 2: $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}} dx = \int \frac{(x^2 + 2x)}{u^{1/2}} \cdot \frac{du}{3(x^2 + 2x)} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} + c$

Razón 1: Esta integral $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1}} dx$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por sustitución donde el de arriba es la derivada del abajo sin el radical

Razón 2: Se ha aplicado el método de sustitución a esta integral, tomando como *u* a la cantidad sub radical del denominador y se ha obtenido el siguiente resultado

$u = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow du = (3x^2 + 6x) = 3(x^2 + 2x)dx$

Razón 3: Se ha realizado un tratamiento al ejercicio para transformarlo en términos de la nueva variable *u* $\int \frac{(x^2 + 2x)}{u^{1/2}} \cdot \frac{du}{3(x^2 + 2x)} = \frac{1}{3}\int u^{-1/2} du =$

Razón 4: Se han aplicado las propiedades de la integral para obtener $= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} + c$

Matriz documental 2. Esta matriz está asociada a la Configuración Didáctica 2 (CD2). Se da desde la unidad 33 y va hasta la unidad 122 de análisis. En la Figura 13, plantilla 2 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 13. Plantilla 2 de análisis Configuración Didáctica 2 (CD2)

Objetivo general	Institucionalizar el MIP

Objetivos específicos	• Determinar el tipo de ejercicios que se solucionarán por el MIP • Construir la fórmula para el MIP • Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada, inversa de la derivada y algebraica*
Entidades primarias	CEgen, CEant, CEa
Situación problema propuesta	A partir del ejercicio $\int x\, e^{3x}\, dx$ construir la fórmula de integración por aportes
Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte del profesor para los enunciados propuestos Heurística: justificación de la eficacia de una acción
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla: son presentados por el profesor de forma ambigua al relacionar la fórmula para el producto de funciones con el Teorema Fundamental del Calculo (TFC). Por otra parte, las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la explicación son fuente de conflictos semióticos relacionados al finalizar las 15 plantillas.
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Hemos distinguido entre los errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral y los que no lo son.
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Algunos corresponden a otros objetos matemáticos subyacentes: regla para derivar un producto de funciones, su relación con el TFC, la manera ambigua en que llega a la fórmula para el MIP; la nemotecnia limitada para memorizar la regla; la manera utilizada para identificar si el ejercicio es soluble por el MIP; la forma imprecisa para elegir *u* y *dv*. Es claro que inciden en la presencia de dificultades en los estudiantes para la comprensión de la integral, pero su análisis y estudio no corresponde a nuestra investigación.

Tabla 6. Configuración epistémica asociada a la CD2.

Problema:

Calcular $\int x\, e^{3x}\, dx$

Definiciones/Conceptos:

Función, derivada, anti derivada, integral indefinida, diferencial, factorización

Procedimientos:

Previos: Simplificación, factorización, derivación de funciones, método de sustitución

Emergente: Método de integración por partes (MIP)

Paso 1: Regla nemotécnica para memorizar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ (una vaca sin cola vestida de uniforme)

Paso 2: Se aplica a un producto de funciones

Paso 3: Descartar el método de sustitución (por ejemplo, si una función es derivada de la otra, entonces no se aplica el MIP, se aplica el método de sustitución)

Paso 4: Selección de *u* y *dv* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv)*

Paso 5: Calcular *du* (derivando) y *dv* (integrando, normalmente por sustitución)

Paso 6: Aplicar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Paso 7: Si la integral $\int v \cdot du$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*

Paso 8: Repetir el proceso desde el paso 4

Proposiciones
Previas a la CD2:

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (u \cdot v)' - u' \cdot v = u \cdot v'$
- $\int (u - v) = \int u - \int v$
- $\int ax^n \, dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\int kf = k \int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- Lo que está sumando pasa restando
- *u' = du ; v' = dv*
- $AC + CB = C(A + B)$

Emergentes:

- $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
- $dv = e^{3x} \, dx \; ; \; v = \frac{1}{3} e^{3x}$
- $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{u} du = \frac{1}{3} e^{3x} + c$
- $\int x\, e^{3x} \, dx = x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx$
- $\int x\, e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + c$
- $\int x\, e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + c$

Lenguaje:
Simbólico:

e^x, *u, v, du, dv, u', v',* $\cancel{\int(u \cdot v)'}$, *x, dx,* $\int$, *C,* .....

Verbal: "Euler a la 3x"

Argumento 1.

Tesis 1: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Razón: Si tomamos la fórmula de la derivada de un producto, y si luego integramos a ambos lados de la igualdad, simplificamos y obtenemos la igualdad.

Tesis 2: $\int x\, e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + c$

Razón 1: Esta integral $\int x\, e^{3x}\, dx$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes, debido a que hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.

Razón 2: Se ha aplicado el MIP a esta integral y se ha obtenido el siguiente resultado; $\frac{1}{3}e^{3x}\left(x-\frac{1}{3}\right)+c$

Matriz documental 3. Esta matriz está asociada a la Configuración Didáctica 3. (CD3). Se da desde la unidad 123 y va hasta la unidad 147 de análisis. En la *Figura 14*, plantilla 3 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 14. Plantilla 3 de análisis Configuración Didáctica 3. (CD3)

Objetivo general	Aplicar la fórmula del MIP
Objetivos específicos	• Reconocer el tipo de ejercicios que se solucionaran por el MIP • Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada y algebraica*
Entidades primarias	CEgen, CEa
Situación problema propuesta	A partir del ejercicio $\int x\, sen\; x\, dx$ aplicar la fórmula del MIP
Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte del profesor para los enunciados propuestos, validación por parte de los alumnos Heurística: justificación de la eficacia de una acción
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla son aplicados por el profesor a partir de la fórmula encontrada e institucionalizada para el MIP. Las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la explicación son fuente de conflictos semióticos relacionados al finalizar las 15 plantillas.
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral, como llamar a la función exponencial $f(x)=e^{x}$ Euler a la equis, encontrado su primitiva de forma inmediata, impidiendo reconocer la forma de encontrar la primitiva de una función exponencial de forma general.
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Algunos corresponden a otros objetos matemáticos subyacentes como: creer que porque existe un producto entre dos funciones la integral se soluciona por partes; el desconocer las propiedades y mencionar por ejemplo “podemos sacar el menos de la integral” (unidad de análisis 143); y creer que la primera función que aparece en el ejercicio siempre se tomara como *u* y lo que sobra como *dv*.

Tabla 7. Configuración epistémica asociada a la CD3

Problema:

Calcular $\int x \, sen \; x \, dx$

Definiciones/Conceptos:
Función, función trigonométrica, derivada, anti derivada, integral indefinida, diferencial

Procedimientos:
Previos: Manejo de: funciones trigonométricas, derivación de funciones, integral indefinida

Emergente: Método de integración por partes
Paso 1: Según el profesor: ¿por qué podemos aplicar el método de integración por partes
Paso 2: Porque hay un producto entre términos
Paso 3: Descartar el método de sustitución (por ejemplo, si una función es derivada de la otra, entonces no se aplica)
Paso 4: Selección de *u* y *dv* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv*
Paso 5: Calcular *du* (derivando) y *dv* (integrando, integral directa de una función trigonométrica sencilla)
Paso 6: Aplicar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
Paso 7: Revisar si la integral que resulta al aplicar la fórmula del MIP "¿sí baja de grado?" Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
Paso 8: Repetir el proceso desde el paso 4

Proposiciones Previas a la CD3:

- $\int ax^n \, dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C \, , n \neq -1$
- $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
- $\int kf = k \int f$
- La función que esta de primeras será la candidata para *u*; lo que sobra será *dv*
- Lo que falta para aplicar la fórmula: *¡du* y *v!*
- $u' = du \; ; \; v' = dv$
- $u = x \rightarrow du = dx$
- $dv = sen \; x \rightarrow v = - \cos \; x$

Emergentes:

- $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
- $u = x \quad \wedge \quad dv = sen \; x$
  $du = dx \qquad v = - \cos \; x$
- $\int x \, sen \; x \, dx = -x \cos \; x - \int - \cos \; x \, dx$
- $= -x \cos \; x + \int \cos \; x \, dx$
- $= - x \cos \; x + sen \; x + c$

Lenguaje Simbólico:

Sen x , Cos x, u, v, du, dv, u', v', x, dx, $\int$ *, C, ...*

Verbal: "Podemos aplicar el método de integración por partes, porque hay un producto entre términos"; "la función que aparece de primeras será la seleccionada como *u*, el resto será *dv*"

Argumento 1.

Tesis 1: El método a aplicar es por partes
Razón: Porque hay un producto entre funciones, donde una no es la derivada de la otra

Tesis 2: $\int x \operatorname{sen} x\, dx = x \cos x + \operatorname{sen} x + c$

Razón 1: Esta integral $\int x \operatorname{sen} x\, dx$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes, debido a que hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.
Razón 2: Se ha aplicado el MIP a esta integral y se ha obtenido el siguiente resultado;

$= x \cos x + \operatorname{sen} x + c$

Matriz documental 4. La matriz documental 4 está asociada a la Configuración Didáctica 4 (CD4). Se da desde la unidad de análisis 148 y va hasta la unidad 173. En la *Figura 15,* plantilla 4 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 15. Plantilla 4 de análisis Configuración Didáctica 4. (CD4)

Objetivo general	Aplicar la fórmula del MIP
Objetivos específicos	• Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular • Adquirir destreza aplicando al fórmula del MIP
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas *generalizada* y *algebraica*
Entidades primarias	CEgen, CEa
Situación problema propuesta	A partir del ejercicio $\int e^{x} \operatorname{sen} x\, dx$ aplicar la fórmula del MIP
Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte de los estudiantes de los enunciados propuestos, validación por parte del profesor Heurística: justificación de la eficacia de una acción
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla son aplicados por los estudiantes a partir de la fórmula encontrada e institucionalizada para el MIP. En esta configuración también se evidencia que las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la explicación son fuente de conflictos semióticos ya relacionados
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral. No reconocer la primitiva de las funciones seno y coseno, por ejemplo:

	$\cos x,\ sen\ x$ (Unidades de análisis 152-156); creer que la primitiva de la función exponencial siempre se calcula en forma directa desconociendo el proceso a seguir (unidades de análisis 150 y 156).
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Algunos corresponden a otros objetos matemáticos subyacentes como memorizar la regla del MIP únicamente con las leras *u, v, du* y *dv*, desconociendo que si cambiamos por g y f la nemotecnia memorizada no funciona (unidades de análisis 178-185); "*saque un medio de la integral y mire que esa integral es similar a la anterior"* (unidad de análisis 220).

Tabla 2. Configuración epistémica asociada a la CD4

Problema:
Calcular $\int e^{x}\ sen\ x\ dx$

Definiciones/Conceptos:
Función exponencial, función trigonométrica, derivada, anti derivada, integral indefinida, diferencial

Procedimientos:

Previos: derivación de funciones exponencial y trigonométrica, MIP

Emergente: Aplicación del Método de integración por partes
Paso 1: Se aplica el MIP porque el ejercicio presenta la integral de un producto de funciones
Paso 2: Descartar el método de sustitución (porque una función no es derivada de la otra, entonces no se aplica)
Paso 3: Selección de *u* y *dv* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv)*
Paso 4: Calcular *du* (derivando) y *dv* (integrando normalmente)
Paso 5: Aplicar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
Paso 6: Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
Paso 7: Repetir el proceso desde el paso 4

Proposiciones
Previas a la CD4:

- $si\ \ f(x) = ln\ |x| \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{1}{x}$
- $si\ \ f(x) = sen\ x \rightarrow \frac{df}{dx} = cox\ \ x$
- $u = e^{x} \wedge\ dv = sen\ \ x$
- $\int ax^{n}\ dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\int kf = k\int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- *u' = du ; v' = dv*
- Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
- Aplicar iterativamente el MIP

Emergentes:

- $u = e^{x} \quad \wedge \ dv = sen\ \ x$
  $du = e^{x} dx \qquad v = -\cos\ \ x$

- $\int e^x \, sen \; x \, dx = -e^x \cos \; x - \int -e^x \cos \; x \, dx$
- $u = sen \; x \quad \wedge \quad dv = e^x$

  $du = \cos \; x \, dx \qquad v = e^x$
- $\int e^x \, sen \; x \, dx = e^x \cos \; x - \int e^x \cos \; x \, dx = e^x \cos \; x - \int e^x \cos \; x \, dx$
- $u = \cos \; x \quad \wedge \quad dv = e^x$

  $du = -\, sen \; x \, dx \qquad v = e^x$
- $\int e^x \cos \; x \, dx = e^x \cos \; x + \int e^x \, sen \; x \, dx$

Lenguaje:
Simbólico:
e^x, *u, v, du, dv, u', v', Sen x, Cos x, x, dx,* $\int$ *, C, ...*

Verbal: "Euler a la equis", "es una integral parecida a la que nos da el ejercicio. No veo que se le baje el grado", "Vamos mal, toca cambiar el u y el dv que tomamos", "Yo veo ese ejercicio como raro", "La integral de sen x ¿si es cos x profe? Mire la tabla del libro", "Profe esa integral da Euler a la equis por coseno de equis más la integral de Euler a la equis por sen x. ¡Pero es igual a la que me dio el ejercicio! ¿Qué hacemos?"

Argumento 1.

Tesis 1: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Razón: Se aplica el MIP porque el ejercicio presenta un producto de funciones.

Tesis 2: $\int e^x \, sen \; x \, dx = \int e^x \cos \; x \, dx = e^x \cos \; x + \int e^x \, sen \; x \, dx$

Razón 1: Esta integral $\int e^x \, sen \; x \, dx$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes, debido a que hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.

Razón 2: Se ha seleccionado $u = e^x \rightarrow du = e^x dx$ y como $dv = sen \; x \rightarrow v = -\cos \; x$ luego se ha aplicado el MIP y se ha obtenido el siguiente resultado: $\int e^x \, sen \; x \, dx = -e^x \cos \; x - \int -e^x \cos \; x \, dx$

Razón 3: Se dudó de si se había bajado o no el grado a la integral y se procedió a hacer cambio en la selección de *u* y *dv* así: $u = sen \; x \rightarrow du = \cos \; x \, dx$ para $dv = e^x \rightarrow v = e^x$ luego de aplicar la fórmula del MIP se obtuvo el siguiente resultado: $e^x \cos \; x - \int e^x \cos \; x \, dx$

Razón 4: No se concluye cual es la respuesta del ejercicio, ni cuál de los dos procesos seguidos es correcto o si son complementarios o no. Se deja como tarea al estudiante terminar el ejercicio y encontrar la solución.

Matriz documental 5. Esta matriz está asociada a la Configuración Didáctica 5 (CD5). Se da desde la unidad 174 y va hasta la unidad 230 de análisis. En la *Figura 16,* plantilla 5 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 16. Plantilla 5 de análisis Configuración Didáctica 5 (CD5).

Objetivo general	Aplicar la fórmula del MIP
Objetivos específicos	• Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular • Adquirir destreza aplicando al fórmula del MIP
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada y algebraica*
Entidades primarias	CEgen, CEa
Situación problema propuesta	A partir del ejercicio $\int x \cos 2x \, dx$ aplicar la fórmula del MIP
Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte de los estudiantes de los enunciados propuestos, validación por parte del profesor. Heurística: justificación de la eficacia de una acción.
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla son aplicados por los estudiantes a partir de la fórmula encontrada e institucionalizada para el MIP. En esta configuración también se evidencia que las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la explicación son fuente de conflictos semióticos relacionados al finalizar las 15 plantillas
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral. No reconocer la primitiva de las funciones seno y coseno cuando tienen argumento sencillo y compuesto por ejemplo: $\cos 2x$, $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} \pi x$, *etc.* (unidades de análisis 191-203).
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Algunos corresponden a otros objetos matemáticos subyacentes como memorizar la regla del MIP únicamente con las leras *u*, *v*, *du* y *dv*, desconociendo que si cambiamos por g y f la nemotecnia memorizada no funciona, (unidades de análisis 178-185); "*saque un medio de la integral y mire que esa integral es similar a la anterior"* (Unidad de análisis 220).

Tabla 9. Configuración epistémica asociada a la CD5.

Problema:
Calcular $\int x \cos 2x \, dx$

Definiciones/Conceptos:
Función, función trigonométrica, derivada, anti derivada, integral indefinida, diferencial

Procedimientos:

Previos: Derivación de funciones, método de sustitución, MIP

Emergente: Aplicación del Método de integración por partes

Paso 1: ¡Como hay un producto es por partes!, ¡Con la regla que aprendimos! $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ (una vaca sin cola vestida de uniforme)

Paso 2: Se aplica a un producto de funciones

Paso 3: Selección de *u* y *dv* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv)*

Paso 4: Reconocer que se aplica el método de sustitución para calcular *v*, dado que hay una función trigonométrica seleccionada como *dv*, que tiene argumento. Su argumento es *2x* que lo sustituyen por una nueva *u*.

Paso 5: Calcular *du* derivando y *dv* integrando por sustitución.

Paso 6: Aplicar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Paso 7: Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*

Paso 8: Repetir el proceso desde el paso 4.

Proposiciones
Previas a la CD5:

- $si \ \ f(x) = cos \ \ ax \rightarrow \frac{df}{dx} = -a \cdot sen \ \ ax$
- $u = x \wedge \ dv = cos \ \ ax$
- $\int ax^n \ dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C \ , n \neq -1$
- $\int kf = k \int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- *u' = du ; v' = dv*
- Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
- Aplicar iterativamente el MIP
- Lo que está sumando pasa restando
- *u' = du ; v' = dv*

Emergentes:

- $u = x \quad y \quad dv = cos \ \ 2x$
- $v = \int cos \ \ 2x \ dx$
- $u = 2x \rightarrow du = 2 \ dx \rightarrow dx = \frac{du}{2}$
- $v = \int cos \ \ 2x \ dx = -\frac{1}{2} sen \ \ x + c$
- $u \cdot v - \int v \cdot du$
- $-\frac{1}{2} x \ sen \ \ x + \int \frac{1}{2} sen \ \ 2x \ dx$
- $-\frac{1}{2} x \ sen \ \ 2x + \frac{1}{2} \int sen \ \ 2x \ dx$
- $u = 2x \ \rightarrow \frac{du}{2} = dx \rightarrow -\frac{1}{2} x \ sen \ \ 2x + \frac{1}{4} cos \ \ 2x + c$

Lenguaje:

Simbólico: *Sen 2x Cos 2x , u, v, du, dv, u', v', x, dx,* $\int$ *, C, ...*

Verbal: "tengo una integral que es un producto entre funciones acaso u es la derivada de v? si es así es por sustitución. De lo contrario es por partes", "saque un medio de la integral y mire que esa integral es similar a la anterior" , "Y como hago para distinguirlo del método por sustitución: Porque un término no es la derivada del otro", "Porque la integral de coseno de dos equis da un medio que se multiplica por el un medio que sacamos"

Argumento 1.
Tesis 1: $\int x \cos 2x \, dx$ es una integral por partes.
Razón: hay un producto de funciones donde un término no es la derivada del otro.

Tesis 2: $\int x \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2} x \,\text{sen}\, 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$
Razón 1: Esta integral $\int x \cos 2x \, dx$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes, debido a que hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.
Razón 2: Se ha seleccionado $u = x \rightarrow du = dx$ y como $dv = \cos 2x$ luego se ha identificado que se debe hacer un tratamiento al argumento de la función trigonométrica para poder calcular v. se ha llamado a ese argumento: $u = 2x$ se derivó y se encontró que $dx = \frac{du}{2}$ de ahí que $v = \int \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2} \,\text{sen}\, x + c$

Razón 3. Se aplicó el MIP y se ha obtenido el siguiente resultado: $-\frac{1}{2} x \,\text{sen}\, x + \int \frac{1}{2} \,\text{sen}\, 2x \, dx$
Razón 4: Se dudó de si la integral del coseno es seno positivo y si esto le había bajado o no el grado a la integral. el profesor intervino y se procedió a revisar la aplicación de la fórmula del MIP, luego se aplicó la propiedad $\int kf = k \int f$ y se calculó la integral resultante para obtener el siguiente resultado: $-\frac{1}{2} x \,\text{sen}\, 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$

Matriz documental 6. Esta matriz está asociada a la Configuración Didáctica 6 (CD6). Se da desde la unidad 231 y va hasta la unidad 311 de análisis. En la *Figura 17*, plantilla 6 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 17. Plantilla 6 de análisis Configuración Didáctica 6. (CD6)

Objetivo general	Aplicar la fórmula del MIP
Objetivos específicos	• Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular • Adquirir destreza aplicando al fórmula del MIP
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada* y *algebraica*
Entidades primarias	CEgen, CEa
Situación problema propuesta	A partir del ejercicio $\int \frac{\text{sen}\, 2x}{e^x} dx$ aplicar la fórmula del MIP
Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte de los estudiantes de los enunciados propuestos, validación por parte del profesor Heurística: justificación de la eficacia de una acción
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla son aplicados por los estudiantes a partir de la fórmula encontrada e institucionalizada para el MIP. En esta configuración también se evidencia que las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la

	explicación son fuente de conflictos semióticos relacionados al finalizar las 15 plantillas
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral. No reconocer la primitiva de las funciones seno y coseno cuando tienen argumento sencillo y compuesto por ejemplo: $cos\ 2x,\ \ sen\ \ x,\ \ sen\ \ \pi x, etc.$ (unidades de análisis 238-245); creer que la primitiva de la función exponencial siempre se calcula en forma directa desconociendo el proceso a seguir (unidades de análisis 245 y 250); identificar que la integral que resulta es la misma propuesta en el ejercicio y por tanto se debe operar a ambos lados para hallar la solución (unidad de análisis 298) y que no es infinita como el estudiante creía (unidad de análisis 307).. El profesor institucionaliza que no se trata de integrales infinitas sino cíclicas (unidad de análisis 308).
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Creer que no es posible solucionar el ejercicio por este método dado que los alumnos creen que no existe un producto entre funciones en el ejercicio dado. Hasta tanto el profesor no hace el siguiente tratamiento $\int e^{-x} sen\ 2x\ \ dx$ (unidades de análisis 231-240); la aplicación en forma iterativa del MIP en un mismo ejercicio, (unidades de análisis 263 y 268); la selección de *u* y *dv* en forma jerárquica (unidades de análisis 275, 276 y 291).

Tabla 10. Configuración epistémica asociada a la CD6.

Problema:

Calcular $\int \frac{sen\ 2x}{e^{x}} dx$

Definiciones/Conceptos:

Función racional, función exponencial, función trigonométrica, derivada, anti derivada, integral indefinida, diferencial

Procedimientos:

Previos: Derivación de funciones trigonométricas y exponencial, método de sustitución, tratamiento a la función racional asignada aplicando la propiedad de los números reales $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}, \forall\ a \in \Re \wedge a \neq 0$

Emergente: Aplicación del Método de integración por partes

Paso 1: Regla nemotécnica para memorizar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ (una vaca sin cola vestida de uniforme)

Paso 2: Descartar el método de sustitución (una función no es derivada de la otra, entonces no se aplica)

Paso 3: Se duda de la aplicación del MIP debido a que no se percibe un producto de funciones

Paso 4: Intervención del profesor para hacer un tratamiento a la función racional que se desea integrar y expresarla en la forma $\int e^{-x} sen\ \ 2x\ \ dx$

Paso 5: Selección de *u* y *dv* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv)*

Paso 6: Calcular *du* (derivando) y *dv* (integrando, normalmente por sustitución)

Paso 7: Aplicar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Paso 8: Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos “sencilla” que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*

Paso 9: Repetir el proceso desde el paso 4

Proposiciones Previas a la CD6:

- $si \ f(x) = e^{-x} \rightarrow \frac{df}{dx} = -e^{-x}$
- $si \ f(x) = sen \ 2x \rightarrow \frac{df}{dx} = 2 \ cox \ 2x$
- $u = e^{-x} \wedge dv = sen \ 2x$
- $\int ax^n \, dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\int kf = k \int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- *u’ = du ; v’ = dv*
- Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos “sencilla” que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
- $u = sen \ 2x \wedge dv = e^{-x}$
- Aplicar iterativamente el MIP
- $\int kf = k \int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- Lo que está sumando pasa restando
- *u’ = du ; v’ = dv*

Emergentes:

- $u = e^{-x} \wedge dv = cos \ 2x$

  $du = -e^{-x} dx \qquad v = \frac{1}{2} sen \ 2x$
- Aplicar la formula $u \cdot v - \int v \cdot du$
- $-\frac{1}{2} e^{-x} \cos \ 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} e^{-x} sen \ 2x + \frac{1}{2} \int e^{-x} sen \ 2x \ dx\right) =$
- $u = sen \ 2x \wedge dv = e^{-x}$

  $du = 2 \cos \ 2x \ dx \qquad v = -e^{-x}$
- $-e^{-x} sen \ 2x + 2 \int e^{-x} \cos \ 2x \ dx$
- $u = \cos \ 2x \wedge dv = e^{-x}$

  $du = -2 \ sen \ 2x \ dx \qquad v = -e^{-x}$
- $-e^{-x} \ sen \ 2x + 2\left(-e^{-x} \cos \ 2x - 2 \int e^{-x} \ sen \ 2x \ dx\right)$
- $-e^{-x} sen \ 2x - 2e^{-x} \cos \ 2x - 4 \int e^{-x} sen \ 2x \ dx$
- $\int e^{-x} sen \ 2x \ dx + 4 \int e^{-x} sen \ 2x \ dx =$
- $-e^{-x} sen \ 2x - 2e^{-x} \cos \ 2x - 4 \int e^{-x} sen \ 2x \ dx + 4$
- $\int e^{-x} sen \ 2x \ dx = \frac{1}{5}\left(-e^{-x} sen \ 2x - 2e^{-x} \cos \ 2x\right)$

Lenguaje:
Simbólico:

	e^{-x}, *u, v, du, dv, u', v', x, dx, sen 2x, Cos 2x,* $\int$ *, C,.....*
	Verbal: *"¿por qué no miraron la respuesta del libro?", "Pues no sabemos si nos quedó bien o no. ¡Cómo no hay respuestas en el libro!", "Profe y ¿eso si sale así de largo?", "Es la misma que nos dieron, entonces no estamos bajándole el grado, profe eso debe estar mal.", "al reemplazar en la fórmula nos equivocamos, invertimos v por dv. ¡Mire!", "Euler a la menos equis"*
	Argumento 1. **Tesis 1**: la integral $\int \frac{sen\ 2x}{e^{x}} dx$ no se soluciona por partes **Razón:** No existe un producto entre sus términos. **Tesis 2:** $\int e^{-x} sen\ 2x\ dx = \frac{1}{5}\left(-e^{-x} sen\ 2x - 2e^{-x} \cos\ 2x\right)$ **Razón 1:** Esta integral $\int \frac{sen\ 2x}{e^{x}} dx$ si es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes, debido a que una función no es la derivada de la otra. Sí hay un producto de funciones, luego de hacer un tratamiento a la expresión del denominador aplicando una propiedad de los números reales. $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}, \forall\ a \in \Re \wedge a \neq 0$ **Razón 2:** Luego del tratamiento presentar la integral en la forma $\int e^{-x} sen\ 2x\ dx$ **Razón 3:** Se hace una selección equivocada de *u* y *dv* conllevando a resultados que confunden a los estudiantes **Razón 4:** Un estudiante pide pasar al tablero a hacer el ejercicio haciendo la selección adecuada de *u* y *dv*, porque le preguntó a otro compañero de un semestre más adelantado que le explicó **Razón 5:** Se aplicar el MIP a esta integral y se ha obtenido el siguiente resultado: $\frac{1}{5}\left(-e^{-x} sen\ 2x - 2e^{-x} \cos\ 2x\right)$

Matriz documental 7. Esta matriz está asociada a la Configuración Didáctica 7 (CD7). Se da desde la unidad 312 y va hasta la unidad 325 de análisis. En la *Figura 18*, plantilla 7 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 18. Plantilla 7 de análisis Configuración Didáctica 7. (CD7)

Objetivo general	Aplicar la fórmula del MIP
Objetivos específicos	• Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular • Adquirir destreza aplicando al fórmula del MIP
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada y algebraica*
Entidades primarias	CEgen, CEa
Situación problema propuesta	A partir del ejercicio $\int -x\ e^{-x}\ dx$ aplicar la fórmula del MIP
Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte de los estudiantes de los enunciados propuestos, validación por parte del profesor Heurística: justificación de la eficacia de una acción
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla son aplicados por los estudiantes a partir de la fórmula encontrada e institucionalizada para el MIP.

	En esta configuración también se evidencia que las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la explicación son fuente de conflictos semióticos relacionados al finalizar las 15 plantillas
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral. Se ratifican los definidos anteriormente.
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Se ratifican los definidos anteriormente.

Tabla 11. Configuración epistémica asociada a la CD7

Problema:

Calcular $\int -x\, e^{-x}\, dx$

Definiciones/Conceptos:

Función, función exponencial, derivada, anti derivada, integral indefinida, diferencial

Procedimientos:

Previos: derivación de funciones, método de sustitución, regla de integración

Emergente: Aplicación del método de integración por partes

Paso 1: Regla nemotécnica para memorizar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ (una vaca sin cola vestida de uniforme)

Paso 2: Se aplica a un producto de funciones

Paso 3: Descartar el método de sustitución (por ejemplo, si una función es derivada de la otra, entonces no se aplica)

Paso 4: Selección de *u* y *dv* (se toma la primera función como *u* y lo que queda como *dv)*

Paso 5: Calcular *du* (derivando) y *dv* (integrando, normalmente por sustitución)

Paso 6: Aplicar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Paso 7: Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*

Paso 8: Repetir el proceso desde el paso 4

Proposiciones
Previas a la CD7:

- $si\ \ f(x) = e^{-x} \rightarrow \frac{df}{dx} = -\frac{1}{e^{x}} = -e^{-x}$
- $u = -x \wedge dv = e^{-x}\, dx$
- $\int_a^b kx^n\, dx = \left.\frac{kx^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \left(\frac{k(b)^{n+1}}{n+1}\right) - \left(\frac{k(a)^{n+1}}{n+1}\right)$
- $\int kf = k\int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- *u' = du ; v' = dv*
- Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
- Aplicar iterativamente el MIP

- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (u \cdot v)' - u' \cdot v = u \cdot v'$
- $\int (u - v) = \int u - \int v$
- $\int kf = k \int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- $A \cdot (B \pm C) = A \cdot B \pm B \cdot C$

Emergentes:

- $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
- $dv = e^{-x}\, dx\ ;\quad v = -e^{-x}$
- $\int e^{-x} dx = -\int e^{u} du = -e^{-x} + c$
- $u \cdot v - \int v \cdot du = xe^{-x} + e^{-x} + C$
- $= e^{-x}(x + 1) + c$

Lenguaje:
Simbólico:

e^{-x}, u, v, du, dv, u', v', $\cancel{\int (u \cdot v)'}$*, x, dx,* $\int$ *, C, ...*

Verbal: "Euler a la menos equis", "hacer una sustitución en el exponente de la función e^{-x}", "como -1 es una constante la saco de la integral", "es el resultado de multiplicar el menos que sacó de la integral con el menos de la fórmula para calcular la integral"

Argumento 1.
Tesis 1: $\int - x\, e^{-x}\, dx = e^{-x}(x + 1) + c$

Razón 1: Esta integral $\int - x\, e^{-x}\, dx$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes, debido a que hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.

Razón 2: Se ha aplicado el MIP a esta integral y se ha obtenido el siguiente resultado; $= e^{-x}(x + 1) + c$

Matriz documental 8. Esta matriz *está asociada* a la Configuración Didáctica 8 (CD8). Se da desde la unidad 326 y va hasta la unidad 340 de análisis. En la *Figura 19,* plantilla 8 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 19. Plantilla 8 de análisis Configuración Didáctica 8. (CD8)

Objetivo general	Aplicar la fórmula del MIP
Objetivos específicos	• Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular • Adquirir destreza aplicando al fórmula del MIP
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada y algebraica*
Entidades primarias	CEgen, CEa
Situación problema propuesta	A partir del ejercicio $\int_{1}^{3} x^5 e^{x^2} dx$ aplicar la fórmula del MIP

Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte de los estudiantes de los enunciados propuestos, validación por parte del profesor. Heurística: justificación de la eficacia de una acción.
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla son aplicados por los estudiantes a partir de la fórmula encontrada e institucionalizada para el MIP. En esta configuración también se evidencia que las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la explicación son fuente de conflictos semióticos relacionados al finalizar las 15 plantillas.
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral. Se ratifican los definidos anteriormente.
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Se ratifican los definidos anteriormente; algunos estudiantes olvidan que cuando la integral es definida se deben evaluar los resultados en los límites de la integral y no solamente en la integral interna de la formula, además, tampoco se debe escribir la constante de integración (unidades de análisis 334-338).

Tabla 12. Configuración epistémica asociada a la CD8

Problema:

Calcular $\int_1^3 x^5 e^{x^2}\, dx$

Definiciones/Conceptos:
Factorización, función, función exponencial, derivada, anti derivada, integral definida, diferencial

Procedimientos:

Previos: derivación de funciones, método de sustitución, regla de integración por sustitución, regla de integración por partes, integral definida. Evaluación de una integral definida (regla de Barrow)

Emergente: Aplicación del método de integración por partes a una integral definida
Paso 1. Reconocer que es una integral definida
Paso 2: Regla nemotécnica para memorizar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ (una vaca sin cola vestida de uniforme)
Paso 3: Se aplica a un producto de funciones
Paso 4: Descartar el método de sustitución (una función es derivada de la otra, entonces no se aplica)
Paso 5: Selección de *u* y *dv* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv)*
Paso 6: Calcular *du* (de**r**ivando) y *dv* (integrando, normalmente por sustitución)
Paso 7: Aplicar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
Paso 8: Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos “sencilla” que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
Paso 9: Repetir el proceso desde el paso 4

Proposiciones
Previas a la CD7:

- $si \;\; f(x) = x^5 \rightarrow \frac{df}{dx} = 5x^4$
- $si \;\; f(x) = e^{x^2} \rightarrow \frac{df}{dx} = 2xe^{x^2}$
- $u = x^5 \wedge dv = e^{x^2}$
- $\int_a^b kx^n \, dx = \left. \frac{kx^{n+1}}{n+1} \right|_a^b = \left(\frac{k(b)^{n+1}}{n+1} \right) - \left(\frac{k(a)^{n+1}}{n+1} \right)$
- $\int_a^b k \;\; f = k \int_a^b f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- *u' = du ; v' = dv*
- Si la integral $\int_a^b v \cdot du$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
- Aplicar iterativamente el MIP
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- *u' = du ; v' = dv*
- $\int_a^b (u - v) = \int_a^b u - \int_a^b v$

Emergentes:

- $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$
- $a = x^2 \rightarrow da = 2x \;\; dx$
- $\int_1^3 x^5 e^{x^2} \, dx = \int_1^5 x^5 e^a \, \frac{da}{2x} \rightarrow \int_1^5 x^3 e^a \, da$
- $a = x^2 \rightarrow x = a^{1/2}$
- $\int_1^5 x^3 e^a da \rightarrow \int_1^5 a^{3/2} e^a da$
- $u = a^{3/2} \qquad dv = e^a da$

  $du = \frac{3}{2} a^{1/2} \, da \qquad v = e^a$
- $\int_1^3 x^5 e^{x^2} \, dx = a^{3/2} e^a - \int_1^3 \frac{3}{2} a^{1/2} e^a da$
- $a = x^2 \rightarrow da = 2x \; dx$ *por tanto* $dx = \frac{da}{2x}$
- $\int_1^5 x^3 e^{x^2} \, dx = \int_1^5 x^3 e^a \, da = \int_1^5 x^2 e^a \, \frac{da}{2}$
- $u = a \qquad dv = e^a da$

  $du = da \qquad v = e^a$
- $\int_1^5 x^3 e^{x^2} \, dx = ae^a - \int_1^5 e^a da = ae^a - e^a \Big|_1^5$

Lenguaje:
Simbólico:

e^{x^2} ,*u*, *v*, *du*, *dv*, *u'*, *v'*, x^5 , $2xe^{x^2}$ *dx*, $\int_a^b$, *C*, ...

Verbal: "el tipo de argumento que hay en la exponencial", "debemos dejar todo en función de la variable a", "Profe, no es correcto el trabajo del compañero", "¡Solo falta evaluar y listo!"

Argumento 1.

Tesis 1: $\int_1^3 x^5 e^{x^2}\,dx$ es una integral definida que se soluciona por partes

Razón 1: Hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.

Razón 2: Como hay una función exponencial tiene argumento, su argumento es x^2 entonces primero debe hacer la por sustitución llamándolo *a* al argumento

Tesis 2: $\int_1^5 x^3 e^{x^2}\,dx = ae^a - \int_1^5 e^a\,da = ae^a - e^a\Big|_1^5$

Razón 1: Esta integral $\int_1^5 x^3 e^{x^2}\,dx$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes, debido a que hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.

Razón 2: Se hace necesario considerar el argumento de la función exponencial haciendo un tratamiento al mismo así: $a = x^2 \rightarrow \quad da = 2x \quad dx \rightarrow \int_1^3 x^5 e^{x^2}\,dx = \int_1^5 x^5 e^a \frac{da}{2x} \rightarrow \int_1^5 x^3 e^a\,da$

Razón 3: Se trabaja toda la integral en términos de la variable *a*, así: como $a = x^2 \rightarrow \quad x = a^{1/2} \rightarrow$ $\int_1^5 x^3 e^a\,da \rightarrow \int_1^5 a^{3/2} e^a\,da$

Razón 4: Se selecciona como *u* la primera función y el resto como *dv*

Razón 5: Se aplicó la fórmula $u \cdot v - \int v \cdot du$ del MIP a esta integral y se ha obtenido el siguiente resultado: $= ae^a - \int_1^5 e^a\,da = ae^a - e^a\Big|_1^5$

Razón 6: se propone evaluar conforme al TFC. ¡Solo falta evaluar y listo! (unidad de análisis 340)

Matriz documental 9. La matriz documental 9 está asociada a la Configuración Didáctica 9 (CD9). Se da desde la unidad 341 y va hasta la unidad 350 de análisis. En la *Figura 20*, plantilla 9 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 20. Plantilla 9 de análisis Configuración Didáctica 9 (CD9).

Objetivo general	Aplicar la fórmula del MIP
Objetivos específicos	• Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular • Adquirir destreza aplicando al fórmula del MIP
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada y algebraica*
Entidades primarias	CEgen, CEa

Situación problema propuesta	A partir del mismo ejercicio $\int_1^3 x^5 e^{x^2}\,dx$ aplicar la fórmula del MIP
Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte de los estudiantes de los enunciados propuestos, validación por parte del profesor Heurística: justificación de la eficacia de una acción
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla son aplicados por los estudiantes a partir de la fórmula encontrada e institucionalizada para el MIP. En esta configuración también se evidencia que las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la explicación son fuente de conflictos semióticos relacionados al finalizar las 15 plantillas.
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral. Se ratifican los definidos anteriormente.
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Se ratifican los definidos anteriormente; a partir de que el estudiante desconoce la forma como encontrar la primitiva de la función exponencial no logra hallar la primitiva *v* para la expresión $dv = \int_1^3 e^{x^2}\,dx$ (unidades de análisis 342-345). Desconocer la importancia de hacer un tratamiento al argumento de la función exponencial para poder calcular su primitiva (unidad de análisis 345).

Tabla 13. Configuración epistémica asociada a la CD9.

Problema:
Calcular $\int_1^3 x^5 e^{x^2}\,dx$

Definiciones/Conceptos:
Función, función exponencial, derivada, anti derivada, integral definida, diferencial

Procedimientos:
Previos: derivación de funciones, método de sustitución, regla de integración por sustitución, regla de integración por partes, integral definida. Evaluación de una integral definida (regla de Barrow)

Emergente: Aplicación del método de integración por partes, tratamiento al argumento de la función exponencial para poder aplicar el MIP, evaluación de una integral definida (regla de Barrow)

Paso 1: Regla nemotécnica para memorizar la fórmula $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$ (una vaca sin cola vestida de uniforme)

Paso 2: Se aplica a un producto de funciones

Paso 3: Reconocer que debe hacerse un tratamiento al argumento de la función exponencial haciendo una sustitución ($a = x^2 \rightarrow da = 2xdx \rightarrow dx = \frac{da}{2x}$)

Paso 4: Trasformar las dos funciones en términos de una sola variable con el objeto de poder hacer la Selección de *u* y *dv* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv)*

Paso 5: Calcular *du* (derivando) y *dv* (integrando, normalmente por sustitución)

Paso 6: Aplicar la fórmula $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$

Paso 7: Si la integral $\int_a^b v \cdot du$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*

Paso 8: Repetir el proceso desde el paso 4

Proposiciones

Previas a la CD9:

- $si \ f(x) = e^{x^2} \rightarrow \frac{df}{dx} = 2x\, e^{x^2}$
- $a = x^2 \rightarrow da = 2xdx \rightarrow dx = \frac{da}{2x}$
- $\int_a^b kx^n \, dx = \frac{kx^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \left(\frac{k(b)^{n+1}}{n+1}\right) - \left(\frac{k(a)^{n+1}}{n+1}\right)$
- $\int_a^b k \ f = k \int_a^b f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- *u' = du ; v' = dv*
- Si la integral $\int_a^b v \cdot du$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
- Aplicar iterativamente el MIP
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (u \cdot v)' - u' \cdot v = u \cdot v'$
- $\int_a^b (u - v) = \int_a^b u - \int_a^b v$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- Lo que está sumando pasa restando
- *u' = du ; v' = dv*

Emergentes:

- $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$
- $\int_1^5 x^3 e^{x^2} \, dx = \int_1^5 x^3 \ e^a \ \frac{da}{2x}$
- $\int_1^5 x^{\cancel{3}} e^a \frac{da}{\cancel{2x}}$
- $\frac{1}{2}\int_1^5 x^2 e^a da$ *como* $a = x^2$
- $\int_1^5 x^3 e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2}\int_1^5 a \ e^a da$

Lenguaje:
Simbólico:

e^{x^2} u, v, du, dv, u', v', $\int_1^5 x^{\cancel{3}} e^a \frac{da}{\cancel{2x}}$, x, dx, $\int_a^b$, C, …..

Verbal: "Profe, no entendimos qué fue lo que usted hizo, ¿por qué no lo hizo por partes directamente? ", ". Recuerden es un truquito que a uno no se le ocurre de primera vez. ¡Eso se aprende con la práctica!"," el argumento de la exponencial es compuesto. Luego la integral debe primero pasar por una sustitución en términos de otra variable para que sea más sencilla y luego expresar toda la integral en términos de una sola variable".

Argumento 1.

Tesis 1: $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$

Razón: Si tomamos la fórmula de la derivada de un producto, y si luego integramos a ambos lados de la igualdad, simplificamos y obtenemos la igualdad.

Tesis 2: $\int_1^5 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_1^5 a \ e^a da$

Razón 1: Esta integral $\int_1^5 x^3 e^{x^2} dx =$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes, debido a que hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.

Razón 2: Se debe hacer un tratamiento al argumento de la función exponencial, (sustitución en términos de otra variable, de tal manera que la aplicación del MIP sea directo)

Razón 3: se deben expresar todas las funciones de la integral en términos de la nueva variable

Razón 4: se ha aplicado el MIP a esta integral y se ha obtenido el siguiente resultado $\int_1^5 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_1^5 a \ e^a da$ que se calcula por el MIP

Matriz documental 10. Esta matriz se asocia a la Configuración Didáctica 10 (CD10). Se da desde la unidad 351 y va hasta la unidad 393 de análisis. En la *Figura 21*, plantilla 10 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 21. Plantilla 10 de análisis Configuración Didáctica 10 (CD10)

Objetivo general	Aplicar la fórmula del MIP
Objetivos específicos	• Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular • Adquirir destreza aplicando al fórmula del MIP
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada y algebraica*
Entidades primarias	CEgen, CEa
Situación problema propuesta	A partir del mismo ejercicio $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \sec x \tan x \, dx$ aplicar la fórmula del MIP

Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte de los estudiantes de los enunciados propuestos, validación por parte del profesor Heurística: justificación de la eficacia de una acción
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla son aplicados por los estudiantes a partir de la fórmula encontrada e institucionalizada para el MIP. En esta configuración también se evidencia que las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la explicación son fuente de conflictos semióticos relacionados al finalizar las 15 plantillas.
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral. No identificar las primitivas de las funciones trigonométricas. Se ratifican los definidos anteriormente.
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Se ratifican los definidos anteriormente. La selección acertada de las funciones *u* y *dv* (unidades de análisis 365, 368, 377 y 378). Desconocer la importancia de hacer un tratamiento a las funciones dadas para poder seleccionar adecuadamente u y dv.

Tabla 14 Configuración epistémica asociada a la CD10.

Problema:

Calcular $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \sec x \tan x \, dx$

Definiciones/Conceptos:

Función, función trigonométrica, derivada, anti derivada, integral definida, diferencial

Procedimientos:

Previos: Manejo de: derivación de funciones algebraicas y de funciones trigonométricas, MIP, integral definida, evaluación de una integral definida (regla de Barrow)

Emergente: Aplicación del método de integración por partes, evaluación de una integral definida (regla de Barrow)

Paso 1: Regla nemotécnica para memorizar la fórmula $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$ (una vaca sin cola vestida de uniforme).

Paso 2: Se aplica a un producto de funciones.

Paso 3: Descartar el método de sustitución (por ejemplo, si una función es derivada de la otra, entonces no se aplica).

Paso 4: Selección de *u* y *dv* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv).*

Paso 5: Calcular *du* (derivando) y *dv* (integrando, normalmente por sustitución).

Paso 6: Aplicar la fórmula $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$.

Paso 7: Aplicar la derivada de las funciones trigonométricas.

Paso 7: Si la integral $\int_a^b v \cdot du$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*.

Paso 8: Repetir el proceso desde el paso 4.

Proposiciones
Previas a la CD10:

- $si\ \ f(x) = sec\ \ x\ tan\ \ x \rightarrow \frac{df}{dx} = sec\ \ x$
- $si\ \ f(x) = x \rightarrow \frac{df}{dx} = 1$
- $u = x \wedge\ dv = sex\ \ \ tan\ \ x$
- $\int_a^b kx^n\ dx = \left.\frac{kx^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \left(\frac{k(b)^{n+1}}{n+1}\right) - \left(\frac{k(a)^{n+1}}{n+1}\right)$
- $\int kf = k\int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- *u' = du ; v' = dv*
- Si la integral $\int_a^b v \cdot du$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
- Aplicar iterativamente el MIP
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (u \cdot v)' - u' \cdot v = u \cdot v'$
- $\int_a^b (u - v) = \int_a^b u - \int_a^b v$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- Lo que está sumando pasa restando
- *u' = du ; v' = dv*
- $AC + CB = C(A + B)$

Emergentes:

- $\int_a^b u \cdot dv = \left.(u \cdot v)\right|_a^b - \int_a^b v \cdot du$
- $u = x\ sec\ \ x, \quad \wedge, \quad dv = tan\ \ x$
  $du = sec\ \ x + x\ sec\ \ x\ tan\ \ x\ , \quad v = \int tan\ \ x\ dx$
- $u = x\ , \quad \wedge, \quad dv = sec\ \ x\ tan\ \ x$
  $du = 1\ dx\ , \quad v = sec\ \ x$
- $u = x\ , \quad \wedge, \quad dv = sec\ \ x\ tan\ \ x$
  $du = 1\ dx\ , \quad v = sec\ \ x$
- $u = x\ , \ \wedge, \quad dv = sec\ \ x\ tan\ \ x$
- $u = x\ , \quad \wedge, \quad dv = sec\ \ x\ tan\ \ x$
  $du = 1\ dx\ , \quad v = sec\ \ x$
- $x\ sec\ \ x - \int sex\ \ c\ \ dx$
- $x\ sec\ \ x - \int sex\ \ c\ \ dx = x\ sec\ \ x - ln\ \left|sec\ \ x + tan\ \ x\right|$
- $\left. x\ sec\ \ x - ln\ \left|sec\ \ x + tan\ \ x\right| \right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$
- $= \frac{\pi}{3} sec\ \frac{\pi}{3} - ln\ \left|sec\ \frac{\pi}{3} + tan\ \frac{\pi}{3}\right| - \left(\frac{\pi}{6} sec\ \frac{\pi}{6} - ln\ \left|sec\ \frac{\pi}{6} + tan\ \frac{\pi}{6}\right|\right)$

Lenguaje:
Simbólico:

$\frac{d}{dx} sec\ x\ \ tan\ x = sec\ x,$ $u, v, du, dv, u', v', x, dx, \int_a^b, C, ...$

Verbal: "el segundo término de la formula $-\int v\ du$ queda una integral más complicada que la inicial", "El profe nos había dicho que si la integral que resultaba era más complicada el ejercicio iba por mal camino", "¿Cómo sabe que la primitiva de $sec\ x\ tan\ x$ es $sec\ x$?", "yo no lo tengo claro aún, más bien que lo termine A9.", "¿Uno como sabe que esa integral se saca por tabla?", "como la integral es definida entonces no colocamos la constate de integración sino que la evaluamos en los límites de integración. ¡Cierto profe!"

Argumento 1.

Tesis 1: $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$

Razón: Si tomamos la fórmula de la derivada de un producto, y si luego integramos a ambos lados de la igualdad, simplificamos y obtenemos la igualdad.

Tesis 2: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\ sec\ x\ tan\ x\ dx = \frac{\pi}{3} sec\ \frac{\pi}{3} - ln\left|sec\ \frac{\pi}{3} + tan\ \frac{\pi}{3}\right| - \left(\frac{\pi}{6} sec\ \frac{\pi}{6} - ln\left|sec\ \frac{\pi}{6} + tan\ \frac{\pi}{6}\right|\right)$

Razón 1: Esta integral $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\ sec\ x\ tan\ x\ dx$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes, debido a que hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.

Razón 2: Al ejercicio presentar tres funciones se debe tener cuidado al seleccionar cual es *u* y cual es *dv*

Razón 3: Reconocer que dos de las funciones del ejercicio (trigonométricas) son la derivada de la primitiva $f(x) = sec\ x$

Razón 4: Al reconocer esto se hace la selección adecuada de u y dv y se procede a aplicar el MIP a esta integral y se ha obtenido el siguiente resultado: $= \frac{\pi}{3} sec\ \frac{\pi}{3} - ln\left|sec\ \frac{\pi}{3} + tan\ \frac{\pi}{3}\right| - \left(\frac{\pi}{6} sec\ \frac{\pi}{6} - ln\left|sec\ \frac{\pi}{6} + tan\ \frac{\pi}{6}\right|\right)$

Matriz documental 11. Esta matriz se asocia a la Configuración Didáctica 11 (CD11). Se da desde la unidad 394 y va hasta la unidad 417 de análisis. En la *Figura 22*, plantilla 11 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 22. Plantilla 11 de análisis Configuración Didáctica 11 (CD11)

Objetivo general	Aplicar la fórmula del MIP
Objetivos específicos	• Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular • Adquirir destreza aplicando al fórmula del MIP
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada y algebraica*

Entidades primarias	CEgen, CEa
Situación problema propuesta	A partir del mismo ejercicio $\int x\,2^x\,dx$ aplicar la fórmula del MIP
Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte de los estudiantes de los enunciados propuestos, validación por parte del profesor Heurística: justificación de la eficacia de una acción
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla son aplicados por los estudiantes a partir de la fórmula encontrada e institucionalizada para el MIP. En esta configuración también se evidencia que las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la explicación, son fuente de conflictos semióticos relacionados al finalizar las 15 plantillas.
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral. Se ratifican los definidos anteriormente.
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Se ratifican los definidos anteriormente.

Tabla 15. Configuración epistémica asociada a la CD11

Problema:
Calcular $\int x\,2^x\,dx$

Definiciones/Conceptos:
Función, función exponencial, derivada, anti derivada, integral indefinida, diferencial

Procedimientos:

Previos: derivación de funciones algebraica y exponencial, método de sustitución, regla de integración

Emergente: Aplicación del método de integración por partes

Paso 1: Regla nemotécnica para memorizar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ (una vaca sin cola vestida de uniforme)
Paso 2: Se aplica a un producto de funciones
Paso 3: Descartar el método de sustitución (por ejemplo, si una función es derivada de la otra, entonces no se aplica)
Paso 4: Selección de *u* y *dv* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv)*
Paso 5: Calcular *du* (derivando) y *dv* (integrando, normalmente por sustitución)
Paso 6: Aplicar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
Paso 7: Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
Paso 8: Repetir el proceso desde el paso 4

Proposiciones
Previas a la CD11:

- $si\ \ f(x) = 2^x \rightarrow \frac{df}{dx} = 2^x\ ln\ (2)$
- $si\ \ f(x) = x \rightarrow \frac{df}{dx} = 1$
- $u = x \wedge dv = 2^x$

- $\int ax^{n}\, dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$
- $\int kf = k \int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- *u' = du ; v' = dv*
- Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de

u y *dv*

- Aplicar iterativamente el MIP
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (u \cdot v)' - u' \cdot v = u \cdot v'$
- $\int (u - v) = \int u - \int v$
- $\int kf = k \int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- Lo que está sumando pasa restando
- *u' = du ; v' = dv*

Emergentes:

- $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
- $u = x \qquad dv = 2^{x}$

  $du = dx \qquad v = ln\left|2\right| 2^{x}$
- $= u \cdot v - \int v \cdot du = x\, ln\left|x\right| 2^{x} - \int ln\left|2\right| 2^{x}\, dx$
- $x\, ln\left|x\right| 2^{x} - ln\left|2\right| \int 2^{x}\, dx$
- $= x\, ln\left|x\right| 2^{x} - ln^{2}\left|2\right| 2^{x} + C$
- $ln^{2}\left|2\right|$

Lenguaje:

Simbólico:

2^{x}, *u, v, du, dv, u', v', x, dx,* $\int$ *, C, ...*

Verbal: "como $ln\ 2$ es una constante la sacamos de la integral ", "la primitiva de 2^{x} es $ln\, 2\, 2^{x}$", "ahí vamos mejorando profe, es cuestión de práctica como usted nos dice", "ustedes repártanse en los grupos y miran que dificultades han tenido y les ayudan"

Argumento 1.

Tesis 1: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Razón: Si tomamos la fórmula de la derivada de un producto, y si luego integramos a ambos lados de la igualdad, simplificamos y obtenemos la igualdad.

Tesis 2: $\int x\, 2^{x}\, dx = x\, ln\,(x)\, 2^{x} - ln^{2}\,(2)\, 2^{x} + C$

Razón 1: Esta integral $\int x\, 2^{x}\, dx$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes, debido a que hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.

Razón 2: Se ha aplicado el MIP a esta integral y se ha obtenido el siguiente resultado:

$x\, ln\,(x)\, 2^{x} - ln^{2}(2)\, 2^{x} + C$

Matriz documental 12. La matriz documental 12 está asociada a la Configuración Didáctica 12 (CD12). Se da desde la unidad 418 y va hasta la unidad 488 de análisis. En la *Figura 23*, plantilla 12 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 23. Plantilla 12 de análisis Configuración Didáctica 12 (CD12)

Objetivo general	Aplicar la fórmula del MIP
Objetivos específicos	• Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular • Adquirir destreza aplicando al fórmula del MIP
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada y algebraica*
Entidades primarias	CEgen, CEa
Situación problema propuesta	A partir del mismo ejercicio $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{2\theta} sen\ 3\theta\ d\theta$ aplicar la fórmula del MIP
Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte de los estudiantes de los enunciados propuestos, validación por parte del profesor Heurística: justificación de la eficacia de una acción
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla son aplicados por los estudiantes a partir de la fórmula encontrada e institucionalizada para el MIP. En esta configuración también se evidencia que las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la explicación son fuente de conflictos semióticos relacionados al finalizar las 15 plantillas.
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral. Se ratifican los definidos anteriormente
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Se ratifican los definidos anteriormente.

Tabla 16. Configuración epistémica asociada a la CD12.

Problema: Calcular $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{2\theta} sen\ 3\theta\ d\theta$
Definiciones/Conceptos: Función trigonométrica, función exponencial, derivada de función exponencial y de función trigonométrica , anti derivada, integral definida, diferencial
Procedimientos: **Previos:** Derivación de funciones trigonométricas y exponenciales, método de sustitución, regla de integración por partes, Regla de Barrow. **Emergente**: Aplicación del método de integración por partes.

Paso 1: Regla nemotécnica para memorizar la fórmula $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$ (una vaca sin cola vestida de uniforme).

Paso 2: Se aplica a un producto de funciones.

Paso 3: Descartar el método de sustitución (por ejemplo, si una función es derivada de la otra, entonces no se aplica).

Paso 4: Selección de *u* y *dv* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv).*

Paso 5: Calcular *du* (derivando) y *dv* (integrando, normalmente por sustitución).

Paso 6: Aplicar la fórmula $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$.

Paso 7: Si la integral $\int_a^b v \cdot du$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*.

Paso 8: Repetir el proceso desde el paso 4.

Proposiciones
Previas a la CD12:

- $si \;\; f(x) = sen \;\; 3\theta \to \frac{df}{dx} = 3 \; cos \;\; 3\theta$
- $si \;\; f(x) = e^{2\theta} \to \frac{df}{dx} = 2\, e^{2\theta}$
- $\int_a^b cx^n \; dx = \frac{cx^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \left(\frac{c(b)^{n+1}}{n+1}\right) - \left(\frac{c(a)^{n+1}}{n+1}\right)$
- $\int_a^b k \;\; f = k \int_a^b f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- *u' = du ; v' = dv*
- Si la integral $\int_a^b v \cdot du$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
- Aplicar iterativamente el MIP
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (u \cdot v)' - u' \cdot v = u \cdot v'$
- $\int_a^b (u - v) = \int_a^b u - \int_a^b v$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- Lo que está sumando pasa restando
- *u' = du ; v' = dv*
- $AC + CB = C(A + B)$

Emergentes:

- $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$
- $a = 2\theta \to da = 2\,d\theta \to d\theta = \frac{da}{2}$
- $a_1 = 3\theta \to da_1 = 3\,d\theta \to d\theta = \frac{da_1}{3}$
- $dv = e^{2\theta}, \;\; \wedge, \;\; v = 2e^{2\theta}$
- $d\theta = \frac{da}{3}$
- $dv = e^{2\theta}$

- $dv = e^{2\theta} \to a = 2\theta \to d\theta = \frac{da}{2}$
- $dv = e^{2\theta} \to \int e^{2\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int e^{a}\, da = \frac{1}{2}e^{a} = v$
- $sen\ 3\theta \cdot \left(\frac{1}{2}e^{2\theta}\right) - \int\left(\frac{1}{2}e^{2\theta}\right)\left(\frac{1}{3}cos\ 3\theta\right)d\theta$
- $\frac{1}{2}sen\ 3\theta \cdot \left(e^{2\theta}\right) - \frac{1}{6}\int\left(e^{2\theta}\right)(cos\ 3\theta)\,d\theta$
- $u = cos\ 3\theta \ , \ \wedge \ , \ dv = e^{2\theta}$

  $du = -3 sen\ 3\theta , \quad v = \frac{1}{2}e^{2\theta}$
- $= \frac{1}{2}sen\ 3\theta \cdot \left(e^{2\theta}\right) - \frac{1}{6}\int\left(e^{2\theta}\right)(cos\ 3\theta)\,d\theta$

  $= \frac{1}{2}sen\ 3\theta \cdot \left(e^{2\theta}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}e^{2\theta}\ cos\ 3\theta - \int \frac{1}{2}e^{2\theta}(-3 sen\ 3\theta)d\theta\right)$
- $= \frac{1}{2}sen\ 3\theta \cdot \left(e^{2\theta}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}e^{2\theta}\ cos\ 3\theta + \frac{3}{2}\int e^{2\theta} sen\ 3\theta\ d\theta\right)$
- $= \frac{1}{2}sen\ 3\theta \cdot \left(e^{2\theta}\right) - \frac{1}{12}e^{2\theta}\ cos\ 3\theta - \frac{3}{12}\int e^{2\theta} sen\ 3\theta\ d\theta$
- $\int e^{2\theta} sen\ 3\theta\ d\theta + \frac{3}{12}\int e^{2\theta} sen\ 3\theta\ d\theta = \frac{1}{2}sen\ 3\theta \cdot \left(e^{2\theta}\right) - \frac{1}{12}e^{2\theta}\ cos\ 3\theta$
- $\frac{15}{12}\int e^{2\theta} sen\ 3\theta\ d\theta = \frac{1}{2}sen\ 3\theta \cdot \left(e^{2\theta}\right) - \frac{1}{12}e^{2\theta}\ cos\ 3\theta$
- $\int e^{2\theta} sen\ 3\theta\ d\theta = \frac{12}{15}\left(\frac{1}{2}sen\ 3\theta \cdot \left(e^{2\theta}\right) - \frac{1}{12}e^{2\theta}\ cos\ 3\theta\right)$

Lenguaje:
Simbólico:

$e^{2\theta}$, e^{a} , *u, v, du, dv, u', v'*, $sen\ 3\theta$, *dx*, $\int_a^b$, *C, …..*

Verbal: *"*Euler a la tres equis ", "¡es una función exponencial multiplicada por una trigonométrica, ambas tienen argumento y ¡no son sencillos!", "Sacamos menos tres medios de la integral por ser constante", "Pues como esa integral está restando la pasamos a sumar porque son la misma, para anularla", "pasamos a sumar esa integral", "Ahora pase a dividir el quince doceavos que está multiplicando, ¡Y listo!," Pero esa integral que le resulto no tiene grado menor que la anterior, parecen iguales", "Volvemos a aplicar partes"

Argumento 1.

Tesis 1: $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$

Razón: Si tomamos la fórmula de la derivada de un producto, y si luego integramos a ambos lados de la igualdad, simplificamos y obtenemos la igualdad.

Tesis 2: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{2\theta} sen\ 3\theta\ d\theta = \frac{12}{15}\left(\frac{1}{2}sen\ 3\theta \cdot \left(e^{2\theta}\right) - \frac{1}{12}e^{2\theta}\ cos\ 3\theta\right)$

Razón 1: Esta integral $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{2\theta} sen\ 3\theta\ d\theta$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes, debido a que hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.

Razón 2: Como hay función trigonométrica y exponencial con argumentos no sencillos debemos, toca cambiarlo en términos de otra letra.

Razón 3: Para calcular *du* ahí si hago el reemplazamiento del argumento, Despejo $d\theta$ y nos queda $d\theta = \frac{da}{3}$.

Razón 4: Lo mismo hago con Euler a las dos teta. Para calcular la primitiva hago el cambio en el argumento para que me quede una integral directa.

Razón 5: Se ha aplicado iterativamente el MIP a esta integral y se ha obtenido el siguiente resultado: $= \frac{12}{15}\left(\frac{1}{2} sen \ 3\theta \cdot \left(e^{2\theta}\right) - \frac{1}{12} e^{2\theta} cos \ 3\theta\right).$

Razón 6: Al hacer los cálculos han olvidado que la integral es definida y no se aplica la regla de Barrow al finalizar el ejercicio.

Matriz documental 13. La matriz está asociada a la Configuración Didáctica 13 (CD13). Se da desde la unidad 489 y va hasta la unidad 551 de análisis. En la *Figura 24*, plantilla 13 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 24. Plantilla 13 de análisis Configuración Didáctica 13. (CD13)

Objetivo general	Aplicar la fórmula del MIP
Objetivos específicos	• Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular • Adquirir destreza aplicando al fórmula del MIP
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada y algebraica*
Entidades primarias	CEgen, CEa
Situación problema propuesta	A partir del mismo ejercicio $\int \sqrt{x} \ ln \ (x) \, dx$ aplicar la fórmula del MIP
Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte de los estudiantes de los enunciados propuestos, validación por parte del profesor Heurística: justificación de la eficacia de una acción
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla son aplicados por los estudiantes a partir de la fórmula encontrada e institucionalizada para el MIP. En esta configuración también se evidencia que las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la explicación son fuente de conflictos semióticos relacionados al finalizar las 15 plantillas.
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral. Se ratifican los definidos anteriormente.
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Se ratifican los definidos anteriormente.

Tabla 17. Configuración epistémica asociada a la CD13

Problema:

Calcular $\int \sqrt{x} \ ln \ (x) \, dx$

Definiciones/Conceptos:

Función, función ex logarítmica, derivada, anti derivada, integral indefinida, diferencial

Procedimientos:

Previos: Derivación de funciones, regla de integración por partes

Emergente: Aplicación del método de integración por partes

Paso 1: Regla nemotécnica para memorizar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ (una vaca sin cola vestida de uniforme)
Paso 2: Se aplica a un producto de funciones
Paso 3: Descartar el método de sustitución (por ejemplo, si una función es derivada de la otra, entonces no se aplica)
Paso 4: Selección de *u* y *dv* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv)*
Paso 5: Calcular *du* (derivando) y *dv* (integrando, normalmente por sustitución)
Paso 6: Aplicar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
Paso 7: Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
Paso 8: Repetir el proceso desde el paso 4

Proposiciones
Previas a la CD13:

- $si\ f(x) = \sqrt{x} \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\int \sqrt{x}\ \ ln\ x\ \ dx$
- $si\ f(x) = ln\ x \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{1}{x}$
- $u = \sqrt{x} \wedge dv = ln\ x\ dx$
- $\int ax^{n}\ dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c,\ \ n \neq -1$
- $\int kf = k\int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- *u' = du ; v' = dv*
- Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
- Aplicar iterativamente el MIP
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (u \cdot v)' - u' \cdot v = u \cdot v'$
- $\int (u - v) = \int u - \int v$
- $\int kf = k\int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- Lo que está sumando pasa restando
- *u' = du ; v' = dv*
- $AC + CB = C(A + B)$

Emergentes:

- $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
- $u = \sqrt{x},\ \wedge,\ \ dv = ln\ x\ dx$
- $du = \frac{1}{2}x^{-1/2},\ \wedge,\ \ v = xln\ x - x$
- $= \sqrt{x} \cdot x\ ln\ |x| - x - \int x\ ln\ |x| - x \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)\ dx$
- $= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + c$
- $= \sqrt{x} \cdot x\ ln\ |x| - x - \int \left(x\ ln\ |x| - x\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)\ dx$

- $= \sqrt{x} \cdot x \ ln \ |x| - x - \int (x \ ln \ |x| - x) \cdot \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} \right) \ dx$

  $= \quad '' \qquad - \int \frac{1}{2} x^{-1/2} (x \ ln \ |x|) - x \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} dx$
- $\frac{1}{2} x^{1/2}$
- $= \quad '' \qquad - \int \frac{1}{2} x^{-1/2} (x \ ln \ |x|) - x \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} dx$

  $= \quad '' \qquad - \int \frac{1}{2} \sqrt{x} ln \ x - \frac{1}{2} \sqrt{x} \ dx$
- $u = ln \ x \quad \wedge, \quad dv = \sqrt{x}, dx$
- $du = \frac{1}{x} \quad \wedge, \quad v = \frac{2}{3} x^{3/2}$
- $\frac{2x^{3/2} \cdot ln \ x}{3} - \int \frac{2}{3} x^{3/2} \cdot \frac{1}{x} \ dx$
- $\frac{x^{3/2}}{x} = x^{1/2}$
- $\frac{2x^{3/2} \cdot ln \ x}{3} - \frac{2}{3} \int x^{1/2} \ dx = \frac{2x^{3/2} \cdot ln \ x}{3} - \frac{4x^{3/2}}{9} + c$

Lenguaje:
Simbólico:

$ln|x|$, *u, v, du, dv, u', v',* $\sqrt{x}$, *dx,* $\int$ *, C, ...*

Verbal: "*a*l aplicar la formula la integral que le resulta no es más sencilla", "la distributiva la debe aplicar a los dos términos de la primera expresión que escribió. Fue que se comió un paréntesis", "esta parte baja igual y el menos también", "¡esa integral es más complicada que la que el ejercicio nos dio!", "¿qué significa?: Que se eligió mal la u el dv era al contrario", "Para que todos entiendan que si al hacer la elección, la integral que nos resulta es más compleja que la anterior , pues debemos hacer el cambio en la selección de las funciones que tomaos como u y dv"

Argumento 1.

Tesis 1: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Razón: Si tomamos la fórmula de la derivada de un producto, y si luego integramos a ambos lados de la igualdad, simplificamos y obtenemos la igualdad.

Tesis 2: $\int \sqrt{x} \ \ ln \ x \ \ dx = \frac{2x^{3/2} \cdot ln \ x}{3} - \frac{4x^{3/2}}{9} + c$

Razón 1: Esta integral $\int \sqrt{x} \ \ ln \ x \ \ dx$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes debido a que hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.

Razón 2: Se toma a u como raíz de equis y el resto será *dv.*
Razón 3: Se calcula *du, v* y se aplica la fórmula del MIP.
Razón 4: Observan que al aplicar la formula la integral que le resulta no es más sencilla.
Razón 5: Determinan que se eligió mal la *u* el *dv*, era, al contrario.
Razón 6: Se hace el cambio en la selección de *u* y *dv.*
Razón 7: Nuevamente se calcula *du* y *v* y se aplica la fórmula del MIP y se ha obtenido el siguiente resultado: $= \frac{2x^{3/2} \cdot ln \ x}{3} - \frac{4x^{3/2}}{9} + c$

Matriz documental 14. La matriz se asocia a la Configuración Didáctica 14 (CD14). Se da desde la unidad 552 y va hasta la unidad 620 de análisis. En la *Figura 25*, plantilla 14 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 25. Plantilla 14 de análisis Configuración Didáctica 14 (CD14

Objetivo general	Aplicar la fórmula del MIP
Objetivos específicos	• Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular • Adquirir destreza aplicando al fórmula del MIP
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada y algebraica*
Entidades primarias	CEgen, CEa
Situación problema propuesta	A partir del mismo ejercicio $\int_1^2 \frac{ln(x)}{x^2}\,dx$ aplicar la fórmula del MIP
Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte de los estudiantes de los enunciados propuestos, validación por parte del profesor Heurística: justificación de la eficacia de una acción
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla son aplicados por los estudiantes a partir de la fórmula encontrada e institucionalizada para el MIP. En esta configuración también se evidencia que las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la explicación son fuente de conflictos semióticos relacionados al finalizar las 15 plantillas
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral. Se ratifican los definidos anteriormente
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Se ratifican los definidos anteriormente.

Tabla 18. Configuración epistémica asociada a la CD14

Problema:

Calcular $\int_1^2 \frac{ln(x)}{x^2}\,dx$

Definiciones/Conceptos:

Función racional, función logarítmica, derivada, anti derivada, integral definida, diferencial

Procedimientos:

Previos: derivación de funciones racionales y logarítmicas, regla de integración por partes, Regla de Barrow

Emergente: Aplicación del método de integración por partes

Paso 1: Regla nemotécnica para memorizar la fórmula $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$ (una vaca sin cola vestida de uniforme)

Paso 2: hacer un tratamiento a la función que está en el denominador para que este en forma de producto de funciones.
Paso 3: Se aplica a un producto de funciones
Paso 4: Descartar el método de sustitución (por ejemplo, si una función es derivada de la otra, entonces no se aplica)
Paso 5: Selección de *u* y *dv* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv)*
Paso 6: Calcular *du* (derivando) y *dv* (integrando, normalmente por sustitución)
Paso 7: Aplicar la fórmula $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$
Paso 8: Si la integral $\int_a^b v \cdot du$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
Paso 9: Repetir el proceso desde el paso 4

Proposiciones
Previas a la CD14:

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0$
- $si\ \ f(x) = ln\ |x| \to \frac{df}{dx} = \frac{1}{x}$
- $si\ \ f(x) = \frac{1}{x^2} \to\ f(x) = x^{-2} \to \frac{df}{dx} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$
- $\int_a^b cx^n\ dx = \frac{cx^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b = \left(\frac{c(b)^{n+1}}{n+1}\right) - \left(\frac{c(a)^{n+1}}{n+1}\right)$
- $\int_a^b k\ f = k \int_a^b f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- *u' = du ; v' = dv*
- Si la integral $\int_a^b v \cdot du$ no es menos "sencilla" que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
- Aplicar iterativamente el MIP
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (u \cdot v)' - u' \cdot v = u \cdot v'$
- $\int_a^b (u - v) = \int_a^b u - \int_a^b v$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- Lo que está sumando pasa restando
- *u' = du ; v' = dv*
- $AC + CB = C(A + B)$

Emergentes:

- $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$
- $\int_1^2 \frac{ln\ (x)}{x^2}\ dx = \int_1^2 x^{-2}\ ln\ (x)\, dx$
- $u = x^{-2},\ dv = ln\ (x)\ dx$
  $du = -2x^{-3} \qquad v = xln\ |x| - x$
- $u = ln\ (x),\ \ dv = x^{-2}\ dx$
  $du = \frac{1}{x} \qquad v = -\frac{1}{x}$

- $x^{-2}(x \ln x - x) - \int (x \ln x - x)(-2x^{-3})\, dx$
- $= \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) dx$
- $x^{-2}(x \ln x - x) - \int \left(-2x^{-2} - 2x^{-3} \ln x + 2x^{-2}\right) dx$
- $= \ln |x| \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot dx$
- $x^{-2}(x \ln |x| - x) - \int \left(-2x^{-2} \ln x + 2x^{-2}\right) dx$
- $= \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-x^{-2}\right) \cdot dx$
- $= \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) + \int x^{-2} \cdot dx$
  $= \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + c$

Lenguaje:
Simbólico:

$\ln(x)\ \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, *u, v, du, dv, u', v', dx,* $\int_a^b$, *C, ...* .

Verbal: "Profe es que ahí tuvimos problemas, porque elegimos a u como equis a la menos dos y nos quedó una integral larguísima, luego tratamos de tomar a u como el logaritmo y la integral que obtuvimos también salió muy complicada", "Entonces u será logaritmo natural de equis y dv será equis a la menos dos dx", "compare las dos opciones que tiene, ¿cuál integral le parece que es más sencilla de resolver, la primera opción o la segunda?", "tienen problemas con procesos algebraicos para simplificar expresiones algebraicas", "La primera parte baja igual y esta integral para calcularla debemos subir la equis al cuadrado", "para saber si es la respuesta correcta debe derivar esa respuesta encontrada"

Argumento 1.

Tesis 1: $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$

Razón: Si tomamos la fórmula de la derivada de un producto, y si luego integramos a ambos lados de la igualdad, simplificamos y obtenemos la igualdad.

Tesis 2: $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx = \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + c$

Razón 1: Esta integral $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx =$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes, debido a que hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.

Razón 2: Como hay función logarítmica y una racional algebraica toca cambiar "el de abajo" por equis ala menos dos.

Razón 3: Ahora si tenemos un producto de funciones al que se le puede aplicar el MIP

Razón 4: Selección de *u* y d*v* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv)*

Razón 5: Observan que al aplicar la formula la integral que le resulta no es más sencilla

Razón 6: Determinan que se eligió mal la *u* el *dv,* era, al contrario.

Razón 7: Se hace el cambio en la selección de *u* y *dv*

Razón 8: Se ha aplicado iterativamente el MIP a esta integral y se ha obtenido el siguiente resultado: $\ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + c$

Razón 9: Al hacer los cálculos han olvidado que la integral es definida y no se aplica la regla de Barrow al finalizar el ejercicio.

Matriz documental 15. Esta matriz se asocia a la Configuración Didáctica 15 (CD15). Se da desde la unidad 621 y va hasta la unidad 802 de análisis. En la *Figura 26*, plantilla 15 se muestra la estructura de dicha configuración.

Figura 26. Plantilla 15 de análisis Configuración Didáctica 15. (CD15)

Objetivo general	Aplicar la fórmula del MIP
Objetivos específicos	• Aplicar la formula en la solución de un ejercicio particular • Adquirir destreza aplicando al fórmula del MIP
Significados institucionales de referencia (CE)	Aplicar las Configuraciones epistémicas: *generalizada* y *algebraica*
Entidades primarias	CEgen, CEa
Situación problema propuesta	A partir del mismo ejercicio $\int \frac{xe^{x}}{(x+1)^{2}}dx$ aplicar la fórmula del MIP
Lenguaje	Natural, analítico, numérico, algebraico
Argumentaciones	Retórica: justificación verbal por parte de los estudiantes de los enunciados propuestos, validación por parte del profesor Heurística: justificación de la eficacia de una acción
Conceptos y proposiciones	Los conceptos-regla son aplicados por los estudiantes a partir de la fórmula encontrada e institucionalizada para el MIP. En esta configuración también se evidencia que las proposiciones necesarias que el profesor incluye para la explicación son fuente de conflictos semióticos relacionados al finalizar las 15 plantillas
Procedimientos	Se explicitan los diferentes procedimientos utilizados en la resolución de la cuestión.
Errores debidos a conflictos semióticos de la integral	Errores asociados a conflictos semióticos propios o asociados a la integral. Se ratifican los definidos anteriormente
Errores debidos a conflictos semióticos de objetos distintos de la integral	Se ratifican los definidos anteriormente.

Tabla 19. Configuración epistémica asociada a la CD15.

Problema: Calcular $\int \frac{xe^{x}}{(x+1)^{2}}dx$
Definiciones/Conceptos: Función racional, función exponencial, derivada, anti derivada, integral indefinida, diferencial
Procedimientos: **Previos:** derivación de funciones, regla del MIP **Emergente**: Aplicación del método de integración por partes Paso 1: Regla nemotécnica para memorizar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ (una vaca sin cola vestida de uniforme) Paso 2: Se aplica a un producto de funciones

Paso 3: Descartar el método de sustitución (por ejemplo, si una función es derivada de la otra, entonces no se aplica)
Paso 4: Selección de *u* y *dv* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv)*
Paso 5: Calcular *du* (derivando) y *dv* (integrando, normalmente por sustitución)
Paso 6: Aplicar la fórmula $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
Paso 7: Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos “sencilla” que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
Paso 8: Repetir el proceso desde el paso 4

Proposiciones
Previas a la CD15:

- $si\ f(x) = e^x \rightarrow \frac{df}{dx} = e^x$
- $\int ax^n\ dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \neq -1$
- $\int kf = k \int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- *u’ = du ; v’ = dv*
- Si la integral $\int v \cdot \mathrm{du}$ no es menos “sencilla” que la integral inicial hay que cambiar la selección de *u* y *dv*
- Aplicar iterativamente el MIP
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (u \cdot v)' - u' \cdot v = u \cdot v'$
- $\int (u - v) = \int u - \int v$
- $\int kf = k \int f$
- El proceso de anti derivar es el inverso a la derivada (TFC según el profesor)
- Lo que está sumando pasa restando
- *u’ = du ; v’ = dv*
- $AC + CB = C(A + B)$

Emergentes:

- $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
- $u = x,\ \ dv = \frac{e^x}{(x+1)^2}$
- $u = x,\ \ \ \ dv = \frac{e^x}{(x+1)^2}$

  $du = dx,\ \ v = \int \frac{e^x}{(x+1)^2}\ dx$
- $\int \frac{e^x}{(x+1)^2}\ dx = \int e^x (x+1)^{-2} dx$
- $a = x + 1 \rightarrow\ \ da = dx$
- $\int e^x (x+1)^{-2} dx = \int e^x\ a^{-2}\ da$
- $a = x + 1 \rightarrow\ \ a - 1 = x$
- $\int e^x\ a^{-2}\ da = \int e^{a-1} a^{-2}\ da$
- $u = e^x,\ \ \ \ dv = \frac{x}{(x+1)^2}$
- $du = e^x dx,\ \ v = \int x\left((x+1)^{-2}\right) dx$

- $a = x + 1 \to da = dx \to \int x \; a^{-2} da$
- $\int (a - 1) a^{-2} da$
- $\int a^{-1} - a^{-2} da = 1 + \frac{1}{a} + c$
- $1 + \frac{1}{x+1} + c$
- $\int a^{-1} - a^{-2} da = 1 + \frac{1}{a} + c$
- $\int ax^{n} dx = \frac{anx^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int a^{-1} - a^{-2} da = \frac{a^{-1+1}}{-1+1} -$
- $\frac{x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x}{x^2} + \frac{x}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2x+1}{x}$
- $u = xe^{x} dx, \quad cv = \frac{1}{(x+1)^2} dx$
- $u = xe^{x}, \qquad dv = \frac{1}{(x+1)^2}$

  $du = e^{x} + xe^{x} \; dx \qquad v = -\frac{1}{x+1}$
- $\int \frac{1}{(x+1)^2} \; dx$
- $\int \frac{1}{(x+1)^2} \; dx = \int (x + 1)^{-2} \; dx$
- $a = x + 1 \to da = dx \to dx = da$
- $\int (x + 1)^{-2} \; dx = \int a^{-2} da$
- $\int a^{-2} da = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{x+1}$
- $xe^{x} \cdot \left(-\frac{1}{x+1}\right) - \int \left(-\frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(e^{x} + xe^{x}\right) dx$
- $xe^{x} \cdot \left(-\frac{1}{x+1}\right) - \int \left(-\frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(e^{x} + xe^{x}\right) dx = e^{x}(1 + x)$
- $xe^{x} \cdot \left(-\frac{1}{x+1}\right) - \int \left(-\frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(e^{x} + xe^{x}\right) dx$

  $= \quad " \quad - \int \left(-\frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(e^{x}(1 + x)\right) dx$

  $= \quad " \quad - \int \left(-\frac{1}{\cancel{x+1}}\right) \cdot \left(e^{x}(\cancel{1+x})\right) dx$
- $= \quad "" \quad - \int -1 \cdot e^{x} \; dx$
- $= \quad "" \quad + \int e^{x} \; dx$
- $= \quad "" \quad + e^{x} + C$
- $xe^{x} \cdot \left(-\frac{1}{x+1}\right) + e^{x} + C$
- $\left(-\frac{xe^{x} \cdot}{x+1}\right) + e^{x} + C$
- $\left(-\frac{xe^{x} \cdot}{x+1}\right) + \frac{e^{x}}{1} + C$
- $\frac{-xe^{x} + (x+1)e^{x} \cdot}{x+1} + C$
- $\frac{-xe^{x} + xe^{x} + e^{x} \cdot}{x+1} + C$

  $\frac{\cancel{-xe^{x}} + \cancel{xe^{x}} + e^{x} \cdot}{x+1} + C$
-
- $\frac{e^{x}}{x+1} + C$

Lenguaje:
Simbólico:

xe^x, u, v, du, dv, u', v', $\frac{1}{(x+1)^2}$, , x, dx, $\int$, C, ...

Verbal: "Euler a la x", "me quedaría a la cero sobre cero, que es uno sobre cero y eso es una indeterminación", "¿Por qué no miraron la selección de u y dv que hicieron? quizá desde ahí estaba el error y pues es natural que si empiezan mal lo que viene pues saldrá igual", "muchos errores que espero con este trabajo sean corregidos, y entiendan que es normal en el proceso de aprendizaje en que ustedes están", "Primero desarrollamos el cuadrado del abajo. Luego simplificamos con la equis de arriba", "porque la factorización es correcta, no la simplificación que él hace. A9 no puede distribuir así ese denominador. Nosotros en el grupo discutimos esto y llegamos a un acuerdo que eso solo era posible cuando el polinomio está arriba y la variable (monomio) está abajo, de lo contrario no.", "En matematices hay situaciones complejas en las que es necesario buscar caminos, crearlos, construirlos, pero siempre siguiendo una forma lógica deductiva, sin desviarnos del camino", "el ejercicio no está mal planteado. Si ustedes miran en el libro hay una respuesta. ¡Que debemos encontrar!"

Argumento 1.

Tesis 1: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Razón: Si tomamos la fórmula de la derivada de un producto, y si luego integramos a ambos lados de la igualdad, simplificamos y obtenemos la igualdad.

Tesis 2: $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1} + C$

Razón 1: Esta integral $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$ es un caso donde se puede aplicar el método de integración por partes, debido a que hay un producto de funciones, donde una función no es la derivada de la otra.

Razón 2: Como hay tres funciones, una racional que tiene una algebraica por una exponencial toca cambiar "el de abajo". ¿Cómo llevarlo a la forma de producto si hay tres funciones?

Razón 3: Se hace al tanteo la selección de u y dv en varias formas diferentes tratando de encontrar un producto de funciones al que se le puede aplicar el MIP.

Razón 4: Selección de *u* y d*v* (se toma la primera como *u* y lo que queda como *dv).*

Razón 5: Observan que al aplicar la formula las integrales que les resultan no es más sencillas.

Razón 6: Determinan en varias oportunidades que se eligió mal la *u* el *dv*.

Razón 7: Se hace el cambio en la selección de *u* y *dv.* Los estudiantes manifiestan estar muy confundidos con el ejercicio.

Razón 8: El profesor interviene haciendo un tratamiento a la expresión para definir que se tomará como u cual como dv.

Razón 9: Se ha aplicado iterativamente el MIP a esta integral y se ha obtenido el siguiente resultado:

$$= \frac{e^x}{x+1} + C$$

6.3. Construcción de las categorías de análisis y matrices categoriales

Categorías de Análisis. A continuación, se presenta la construcción de seis categorías de análisis creadas considerando los niveles propuestos por el EOS. Nos propusimos establecer una aproximación al significado declarado por el profesor a partir del proceso de instrucción implementado durante las 12 sesiones clase, buscamos regularidades, tendencias, puntos conflictivos, dificultades, lagunas de significado, etc. Las categorías de análisis definidas fueron:

1. Sistemas de prácticas (Institucionales, personales y procesos-tareas acciones).
2. Trayectoria epistémica del proceso de enseñanza del MIP o procesos matemáticos que ejecuta el profesor. Para esta categoría se diseñaron tres subcategorías de análisis: sensibilidad a la variable, sensibilidad al algoritmo y sensibilidad al algoritmo iterativo.
3. Existencia de conflictos semióticos en el desarrollo de la clase, que generan dificultades.
4. Sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de enseñanza del MIP.
5. Configuraciones epistémicas de la integral, potenciadas en el proceso de enseñanza del MIP, y si éstas permiten, alcanzar un significado global de la integral.
6. Configuraciones didácticas-epistémicas e idoneidad didáctica del EOS al proceso de instrucción ejecutado.

6.3.1. Matrices categoriales. Ramos y Font (2008), plantean que cuando un sujeto lleva a cabo y evalúa una práctica matemática es necesario activar un conglomerado formado por algunos o todos de los siguientes elementos: lenguaje, situaciones-problema, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Tal conglomerado, indispensable para realizar y evaluar la práctica, en el EOS recibe el nombre de configuración, que peude ser cognitiva o epistémica, dependiendo si la práctica se concibe desde la perspectiva personal o la institucional.

Cada uno de estos elementos, a excepción de las situaciones problema, se puede entender como un emergente de las prácticas cuya finalidad es resolver situaciones problema. A su vez, las situaciones problema se pueden entender como emergentes de otros tipos de prácticas (necesidad de contextualizar y aplicar las matemáticas, de generalizar o de proponer problemas).

(Godino y Batanero 1994) consideran sistema de práctica matemática a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (p. 30). Si entendemos la práctica como "acción orientada a un fin". Se observa que en la definición de práctica dada anteriormente, se pueden considerar tres intenciones diferentes, que permiten considerar tres tipologías de prácticas que llamaremos: a) operativas o actuativas, que consisten en toda actuación o manifestación, lingüística o no, realizada por alguien para resolver problemas matemáticos; b) discursivas o comunicativas, referidas a comunicar a otros la solución, validar la solución; y c) regulativas o normativas, en las que se generaliza a otros contextos y problemas (Font, Godino, y Gallardo, 2012). Lo que hay es un sistema complejo de prácticas en las que se activan diferentes configuraciones epistémicas/cognitivas. Cada una posibilita un subconjunto de prácticas que surge del conjunto de prácticas que atañen al significado del objeto institucional/personal. Dicho de otra manera, el objeto que surge de un sistema de prácticas se puede considerar como único y con significado holístico donde la actividad de resolución de problemas se adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático. De ahí que los sistemas de prácticas permiten:

- Ser aplicados, sobre todo, a la planificación y a la implementación de un proceso de estudio; pretenden estudiar las prácticas matemáticas planificadas y realizadas en dicho proceso.
- Descomponer el proceso de estudio en una secuencia de episodios (configuraciones didácticas (CD)) y, para cada uno de ellos, describir las prácticas realizadas siguiendo su curso temporal.
- Describir una configuración epistémica global, previa y emergente, que determina las prácticas planificadas y realizadas.

Este primer nivel se analizará detalladamente al finalizar este capítulo, considerando la estructura de la matriz categorial 1 relacionada a continuación, buscando triangular la información recogida en la entrevista al profesor en la trascripción en UA y en los registros consolidados de las fichas de observación.

***Matriz categorial 1**. Identificación del Sistemas de Prácticas*

Figura 27. Matriz Categorial 1

<table>
<tr><td colspan="4">Sistemas de prácticas</td></tr>
<tr><td colspan="4">Procesos-tareas acciones</td></tr>
<tr><td>Tipo de prácticas</td><td colspan="3">Tipo de Lenguaje usado
(términos, expresiones, notaciones, gráficos)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Discursivas.
(comunicativas)
Están relacionadas con el dominio y la creación del lenguaje, así como en su uso para la realización de argumentaciones que permitan dar una justificación de la validez de las acciones realizadas.</td><td>Language natural</td><td rowspan="2">Se describen o ponen en juego otros objetos no lingüísticos</td><td>Situaciones que incluyen problemas, aplicaciones extra matemáticas o intra matemáticas, ejercicios, etc.,</td></tr>
<tr><td>Lenguaje analítico, correspondiente al uso del lenguaje simbólico propio de las Matemáticas</td><td>Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Lenguaje gráfico, cualquier representación gráfica que se utilice, bien sea de una función, un dibujo representativo...</td></tr>
<tr><td colspan="3">Lenguaje numérico</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Operativas:
Prácticas en las que prima el componente operatorio o actuativo, nos permiten realizar acciones y argumentaciones cuya finalidad es la resolución de situaciones problemas.</td><td rowspan="2">Argumentaciones</td><td>De modo heurístico, usan la intuición y están encaminadas a validar determinadas actuaciones (como puede ser una resolución de un problema o una argumentación lógica), se denominarán justificaciones o validaciones.</td></tr>
<tr><td>Deducciones o demostraciones. Son las que validan formalmente una proposición</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Regulativas (normativas) Están orientadas básicamente a conseguir establecer “propiedades” (proposiciones) y definiciones de “conceptos”.</td><td colspan="2">Propiedades o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conceptos, dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, media, función)</td></tr>
</table>

Matriz Categorial 2. Identificación de objetos y procesos matemáticos. Para este nivel, se consideró la trayectoria epistémica del proceso de enseñanza del MIP (Identificación de objetos y procesos matemáticos que ejecuta el profesor). Como se mencionó antes, para interpretar esta categoría, se diseñaron tres subcategorías: sensibilidad a la variable, sensibilidad al algoritmo y la aplicación del algoritmo iterativo.

Con relación al objeto institucional que se pretende enseñar interesa resaltar los siguientes aspectos: 1) Las personas distinguen entre sus objetos personales y los objetos institucionales; cuando hablan de sus objetos personales utilizan el discurso en primera persona, mientras que al hablar de los objetos institucionales utilizan el discurso en tercera persona. 2) Un objeto institucional implica la generación de una regla de comportamiento compartida por toda la comunidad educativa. De ahí que el significado de un objeto matemático es entendido como un sistema de prácticas que se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Es así que cada contexto ayuda a producir sentido, permite generar un subconjunto de prácticas, pero no produce todos los sentidos (Font, Rubio y Contreras, 2008).

En lo dicho anteriormente se ha considerado los objetos que emergen de las prácticas. Ahora bien, para la realización de cualquier práctica es necesario "activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos citados anteriormente: lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones" (Godino, 2012. p. 23). Conviene resaltar que hay diferentes usos del término "objeto" que pueden generar algún tipo de confusión al lector. Por una parte, hay un uso más amplio (débil) en el que "todo" es objeto, después hay un uso más restringido en el que la reflexión se centra en lo que se considera el prototipo de objeto matemático (los conceptos) y, por último, hay un uso intermedio en el cual por objeto se toma cualquiera de los elementos que forman una configuración. Es necesaria la buena disposición del lector para transitar entre estos tres usos diferentes del término objeto. Este nivel se analizará detalladamente al finalizar este Capítulo, considerando la estructura de la matriz categorial 2 relacionada a continuación.

La estructura de esta matriz se consideró desde tres momentos: cuando se institucionalizó el MIP, cuando se solucionaron ejercicios relacionados con integrales indefinidas y cuando se trabajó con integrales definidas por este método de integración. Dicha descomposición se relaciona en las *Figuras 28, 29, 30* y *31*.

Figura 28. Matriz Categorial 2

Identificación de objetos y procesos matemáticos que ejecuta el profesor				
Objetos	**procesos**	**Sensibilidad**		
Personales, según Godino y Batanero (1994, p. 335), son: "emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas	En el EOS se considera conveniente interpretar la relación entre el objeto personal y la práctica en términos de brecha puesto que para la realización de una práctica primero hay que valorar y decidir lo que se va a hacer, después decidir la acción más indicada para conseguir lo que se ha	**A la variable**	**Al algoritmo**	**Al algoritmo iterativo**

a un campo de problemas".	decidido y, por último, mantener la acción desde el inicio hasta el final.			
Institucionales				

Figura 29. Desarrollo de la Matriz Categorial 2.1. Cuando se institucionaliza el MIP

Objetos	**Procesos**	**Sensibilidad**		
		A la variable	**Al algoritmo**	**Al algoritmo iterativo**
Primarios: Calcular la integral $\int x\, e^{3x}\, dx$	• Verificar si la solución es por sustitución o en caso contrario será por partes. Que una función sea la derivada de la otra. Unidad de análisis [22].		**x**	
	• Identificar que existe un producto entre sus términos lo que implica debe solucionarse por partes [35]		**x**	
	• Para saber la técnica, debemos recordar la fórmula de la derivada de un producto [37]			
	• Recordar el teorema fundamental del cálculo en su 1° parte [42]			
	• ¡Aplicar el teorema fundamental del cálculo, es decir, recuerden que el proceso de anti derivar es el inverso a la derivada! [45]			
	• Integrar a ambos lados y queda la integral de *u.v* prima menos *u* prima por *v* [46]			
	• ¡Como la integral de la izquierda es una resta, pues se pude separar para calcularla! [47]			
	• cuando tengo la integral de una derivada esos dos procesos se anulan [48]			
	• ¡listo, esa es la fórmula! [49]		**x**	
Emergentes: Fórmula para derivar un producto de funciones; El TFC; fórmula para el MIP ; resolver la integral	• Escribir la fórmula en términos de diferenciales. [51] $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$		**x**	
	• Institucionaliza la regla de la integración por partes [53]		**x**	
	• Aprender la regla de integración de dos formas posibles: Nemotécnica, "la regla de la vaca" o de memoria [56]		**x**	
	• Resolver la integral de equis Euler a la tres equis [63]			
	• Determinar que si existe una multiplicación entre dos funciones no similares, la integral se calcula por partes [66]		**x**	
	• Escoger quien ha de ser *u* y quien *dv.* si escojo a *dv* esa función al buscarle la primitiva, esta debe bajarle el grado, si eso no se da entonces le subo el grado y significa que va mal, lo estaríamos haciendo mal [67]	**x**	**x**	

	• La idea es que al derivar se baje el grado de la integral si eso no se da entonces lo hicimos mal y debemos cambiar la selección que hicimos para *u* y para *dv*. [70]		x	
	• Determinar cuál función es *dv* y la forma de encontrar a *v* mediante el cálculo de la primitiva [74]	x	x	
	• ¡luego reemplazamos en la formula! [79]		x	
	• Identificar el método para calcular la integral $\int e^{3x}\,dx$ [84]		x	
	• ¿Qué más necesitamos en nuestra formula de integración? Miren qué ya conocemos a *v*, ¿qué nos haría falta? [89]	x		
	• Reemplazar en la fórmula [104]		x	
	• Verificar que la integral que resulta al aplicar el algoritmo es más sencilla, lo que implica que el proceso de selección de *u* y *v* es adecuado [115]	x		x
	• Presentar la respuesta simplificando al máximo posible [119]		x	

Figura 30 Matriz Categorial 2.2. Correspondiente a las sesiones 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13 y 15 de clase cuando se trabaja con integrales indefinidas.

Objetos	**Procesos**	**Sensibilidad**		
		A la variable	**Al algoritmo**	**Al algoritmo iterativo**
Primarios: Calcular las integrales $\int x \,sen\, x\, dx$; $\int e^{x}\, sen\, x\, dx$; $\int x \cos 2x\, dx$; $\int \frac{sen\, 2x}{e^{x}}\, dx$; $\int -x e^{-x}\, dx$; $\int x\, 2^{x}\, dx$; $\int \sqrt{x}\, \ln x\, dx$; $\int \frac{xe^{x}}{(x+1)^2}\, dx$ **Emergentes:** fórmula para el MIP para integrarles indefinidas ; propiedades de las	• Verificar si la solución es por partes. Probar que una función no sea la derivada de la otra. Identificar que existe un producto entre sus términos lo que implica debe solucionarse por partes [128, 149, 177, 238, 242, 290, 315, 331, 402, 426, 496, 556, 633]	x	x	x
	• Recordar la fórmula para el MIP, $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ [129, 150, 178, 239, 244, 292, 318, 333, 404, 427, 497, 559, 635]	x		x
	• Escoger quien ha de ser *u* y quien *dv recordando* que si se elige a *dv* esa función al integrarla debe bajarle el grado, si eso no se da entonces significa que va mal el proceso. [132, 155, 180, 241, 244, 298, 320, 338, 409, 431, 500, 572, 639]	x	x	
	• Identificar el método para calcular la integral [130, 152, 181, 249, 248, 300, 321, 340, 411, 430, 500, 561, 638]		x	
	• Reemplazar en la fórmula [133, 142, 154, 183, 251, 258, 303, 325, 343, 416, 433, 504, 564, 640]		x	
	• Verificar que la integral que resulta al aplicar el algoritmo es más sencilla, lo que implica que el proceso de selección de *u* y *v* es adecuado [149, 175, 238, 243, 290, 316, 330, 402, 495, 555, 634,817]		x	x

integrales; resolver la integral	• Presentar la respuesta simplificando al máximo posible [128, 150, 179, 246, 298, 319, 3337, 407, 427, 498, 557, 628,815]		x	

Figura 31. Matriz Categorial de 2.3. Correspondiente a las sesiones 8, 9, 10, 12 y 14 de clase cuando se trabaja con integrales definidas.

Objetos	**Procesos**	**Sensibilidad**		
		A la variable	**Al algoritmo**	**Al algoritmo iterativo**
Primarios: Calcular las integrales $\int_1^3 x^5 e^{x^2}\, dx$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \sec x \tan x\, dx$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{2\theta} sen\ 3\theta\, d\theta$; $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ **Emergentes:** fórmula para el MIP para integrales definidas; propiedades de las integrales; resolver la integral	• Verificar si la solución es por partes. Probar que una función no sea la derivada de la otra. Identificar que existe un producto entre sus términos lo que implica debe solucionarse por partes [326, 357, 427, 555]	x	x	x
	• Recordar la fórmula para el MIP, $\int_a^b u \cdot dv = (u \cdot v)\Big\|_a^b - \int_a^b v \cdot du$		x	x
	• Escoger quien ha de ser *u* y quien *dv recordando* que si se elige a *dv* esa función al integrarla debe bajarle el grado, si eso no se da entonces significa que va mal el proceso. [333, 359, 378, 432, 458, 570, 573,]	x	x	x
	• Identificar el método para calcular la integral [328, 361, 427]	x	x	
	• Reemplazar en la fórmula [334, 338, 340, 345, 366, 439, 463, 478, 582, 590]	x	x	x
	• Verificar que la integral que resulta al aplicar el algoritmo es más sencilla, lo que implica que el proceso de selección de *u* y *v* es adecuado [348, 377, 445, 481, 583, 591]			x
	• Presentar la respuesta simplificando al máximo posible [347, 389, 392, 486, 601, 617]		x	

Matriz Categorial 3. Descripción de interacciones en torno a la presencia de conflictos semióticos*[13] *en el desarrollo de la clase, que generan dificultades. En el EOS,

[13] Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa. Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales. (Godino, 2002. p. 240).

los conflictos semióticos se consideran como explicaciones de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes matemáticos efectivamente realizados cuando los comparamos con el significado pretendido. Permiten detectar limitaciones en los aprendizajes matemáticos efectivamente realizados. Estas limitaciones se producen cuando determinadas prácticas representativas del significado de referencia no son contempladas en el significado pretendido o implementado. Por ejemplo, cuando el significado pretendido solo contempla que el cálculo de la integral consiste en la aplicación de una regla de integración algebraica y en el cálculo del valor de la función en dicho intervalo si la integral es definida, pero no contempla otras prácticas. Nos referimos en concreto a argumentaciones de tipo variacional que permiten calcular la integral como límite de procesos de acumulación infinitesimal o bien a argumentaciones de tipo gráfico que permiten calcular la integral como el área bajo una curva.

Este nivel se analizará detalladamente en el Capítulo 7 con el cuadro titulado "Conflictos semióticos en el desarrollo de la clase que general dificultades de tipo…" considerando la estructura de la matriz categorial 3, relacionada en la *Figura 32*.

Figura 32. Matriz Categorial 3. Existencia de conflictos semióticos en el desarrollo de la clase.

Matriz Categorial 3. Existencia de conflictos semióticos en el desarrollo de la clase
De tipo Epistémico Tal como se mencionó en el capítulo 3, las normas epistémicas regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para su aprendizaje y las representaciones que se utilizan para los distintos contenidos. Son componentes de las configuraciones epistémicas (definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos) que regulan las prácticas matemáticas que se ejecutaron. • ***Conflicto semiótico (epistémico 1)*:** Como se observa en las unidades de análisis [33-36], se institucionaliza un procedimiento para identificar integrales que se solucionan por el MIP desde un ejercicio que se propone, indicando que "al existir una multiplicación entre sus términos, entonces el ejercicio se debe hacer por partes" a pesar que se indica que es necesario revisar que no es posible factorizar los términos para simplificar la expresión, si se debe verificar si la solución es por sustitución -cuando una función es la derivada de la otra- en caso contrario será por partes. En la CD6 los alumnos no identifican si el ejercicio $\int \frac{sen\ 2x}{e^{x}}\,dx$ se soluciona por el MIP, dado que no ven un producto entre sus términos, situación que es superada por intervención del profesor al mencionar que es posible hacer un

tratamiento a la expresión para transformarla en $\int e^{-x}\, sen\ 2x\ dx$., conflicto que permanece latente y es ratificado en las CD2 [65], CD6 [240], CD6 [282], CD7 [313-316], CD10 [365], CD13 [501-517-537] y CD14 [572-584].

- ***Conflicto semiótico (epistémico 2)***: En las unidades de análisis [38-55], se institucionaliza el algoritmo del MIP a partir de proposiciones y argumentos que no se construyen ni se demuestran, sino que se utilizan de manera implícita, casi intuitiva. Se utiliza la fórmula de la derivada de un producto de funciones y una aplicación de la primera parte del TFC arguyendo que "el proceso de anti derivar es el inverso a la derivada" y haciendo uso de algunas propiedades de las integrales ya institucionalizadas en clases anteriores, llega al algoritmo $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ .que institucionaliza como "la regla de la integración por partes".

- ***Conflicto semiótico (epistémico 3)***: En las unidades de análisis [67-74], de manera implícita, se institucionaliza mediante argumentos de carácter ambiguo un procedimiento para calcular integrales por el MIP que no contempla un paso esencial para seleccionar *u* y *dv* (no se explica la jerarquía para dicha selección, según el tipo de función) ya que durante el proceso de instrucción se dice que "*u* será la primera y lo que queda será *dv*". Además, se indica que "si no se baja el grado de la integral al aplicar el algoritmo del MIP, entonces el proceso va mal y será necesario replantear la selección de *u* y *dv". Se trata de un conflicto muy relevante ya que implica que en las CD4 los alumnos no puedan resolver la integral propuesta ($\int e^{x}\, sen\ x\ dx$), lo cual también sucede con otras integrales en las sesiones 3 a la 12 descritas en la unidades de análisis [123- 291, 322, 361,406, 458,461, 498 entre otras].

- ***Conflicto semiótico (epistémico 4).*** En las unidades de análisis [69-93] en el desarrollo del ejercicio $\int x\, e^{3x}\ dx$ luego de hacer la selección de *dv* como $dv = e^{3x}\ dx$ queda latente la imposibilidad procedimental para encontrar la primitiva de este tipo de funciones, dado que al momento de explicar no se relaciona el método de sustitución simple con el MIP. No se argumentan procedimientos lógico-deductivos que permitan hacer esta inferencia. Se institucionaliza como si fuera algo des-conexo. Se hace énfasis en hacer ver que es necesario realizar un tratamiento a este tipo de funciones para convertirlas en otras a las que se les puede calcular la primitiva de forma inmediata. Este conflicto epistémico queda latente en las CD5 [176-186] con el ejercicio $\int x\cos\ 2x\ dx$; en [203] con el ejercicio $\int \frac{1}{2} sen\ 2x\ dx$; en la CD6 [238] con el ejercicio $\int e^{-x}\, sen\ 2x\ dx$, en la CD7 [314] con el ejercicio $\int - x\, e^{-x}\ dx$, en la CD7 [326] con el ejercicio $\int_1^3 x^5 e^{x^2}\ dx$ *;* y CD13 [423] con el ejercicio $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{2\theta} sen\ 3\theta\ d\theta$

De tipo Cognitivo

Prácticas realizadas (o que posibilitan) conseguir que los alumnos aprendan lo que se les enseña. En el EOS se considera que la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados. La configuración cognitiva indica el grado de apropiación por el alumno de la configuración epistémica correspondiente al significado institucional implementado, valora el grado de adecuación entre las configuraciones cognitivas logradas y las configuraciones epistémicas implementadas.

- ***Conflicto semiótico (cognitivo 1):*** Este conflicto cognitivo 1 se desprende del conflicto epistémico 1. En la CD2 [35] se institucionaliza que, al existir una multiplicación entre funciones no similares, el método a aplicar es por partes. Estamos en presencia de un conflicto cognitivo que se genera en los alumnos. Este conflicto se hace evidente en la sesión 2 CD5 [231] ante la imposibilidad de resolver la integral $\int \frac{sen\ 2x}{e^{x}}\ dx$. A13 dice que no se puede aplicar la integración por partes porque no hay un producto de funciones, el profesor resuelve este conflicto ayudándole a avanzar en su aprendizaje indicándole que si se hace el siguiente tratamiento $\int e^{-x}\ sen\ 2x\ dx$, sí que se tiene un producto de funciones. En la CD10 [365-382], ante el ejercicio propuesto $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\ sec\ x\ tan\ x\ dx$ y ante la imposibilidad de interpretar cuál es la forma adecuada para "ver" el ejercicio como un producto de funciones, se da la intervención del estudiante [A9] –alumno que está repitiendo la asignatura- indicando la selección adecuada y la solución del ejercicio. Este conflicto cognitivo es medianamente superado por el grupo. El profesor no hace ningún tipo de explicación adicional que ayude al grupo a superarlo.

- ***Conflicto semiótico (cognitivo 2):*** Del conflicto epistémico 3 mencionado, se observa la creación de un conflicto de tipo cognitivo en los alumnos. En la CD2 [130-132] se genera este conflicto cognitivo en el alumno cuando ante el ejercicio propuesto $\int x\ sen\ x\ dx$ se aprueba la respuesta de un estudiante ante la pregunta ¿quién será *u*? A9 responde: "*x",* el profesor pregunta *¿Por qué?,* y los estudiantes responden porque esta de primeras. Los alumnos se quedan pensando que *u* siempre será la función que aparece en el registro escrito de primeras. Se observa la imposibilidad de elegir a *u* en forma correcta. Otro ejemplo se da en la sesión 1. CD4 [148-162] ante el ejercicio propuesto $\int e^{x}\ sen\ x\ dx$, donde los estudiantes eligen a la función e^{x} como *u* y $sen\ x\ dx$ como dv, llegando a inconsistencias en el desarrollo del ejercicio propuesto en la CD5 [174-177] con el ejercicio $\int \frac{sen\ 2x}{e^{x}} dx$ manifestando la imposibilidad de aplicar este método dado que: no existe un producto entre sus términos; luego del tratamiento que el profesor presenta para expresar la integral en la forma $\int e^{-x}\ sen\ 2x\ dx$, los estudiantes vuelven a elegir como *u* a la función e^{-x} llegando a resultados similares al expuesto anteriormente. La misma situación sucede en la CD6 [231-246] ante el ejercicio propuesto $\int e^{-x}\ sen\ 2x\ dx$, en CD10 [351-356] ante el ejercicio propuesto $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\ sec\ x\ tan\ x\ dx$, en CD12 [418-423] ante el ejercicio propuesto $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{2\theta}\ sen\ 3\theta\ d\theta$, en CD13 [489-496] ante el ejercicio propuesto $\int \sqrt{x}\ \ ln\ x\ dx$ y en CD14 [552-562] ante el ejercicio propuesto $\int_{1}^{2} \frac{ln\ x}{x^{2}}\ dx$.

En todas estas situaciones se hacen procesos mecánicos, repetitivos sin validar la respuesta obtenida. De ahí que este conflicto es relevante, no es superado.

- ***Conflicto semiótico (cognitivo 3):*** Por parte de los estudiantes, el manejo inadecuado de conceptos previos como no conocer la derivada de las funciones trigonométricas, el algoritmo para derivar una función logarítmica, o el de un exponencial, les conduce a no saber encontrar la anti derivada de este tipo de funciones.

En la CD2 los estudiantes manifiestan confusión para identificar una función exponencial y su derivada, lo que les conduce a dificultades para encontrar su primitiva. La situación se da ante ejercicios propuestos tales como:

hallar la primitiva de $\int e^{3x}\, dx$ [69]; en la CD8 [326], hallar la primitiva de $\int_1^3 e^{x^2}\, dx$; en la CD11 [399], hallar la primitiva de $\int 2^x\, dx$. En los tres casos aplican procesos errados y no reconocen que se trata de una función exponencial que debe ser tratada bajo los mismos principios que aplicaron al calcular la primitiva de e^{3x} .

Con respecto a las funciones trigonométricas se hace latente la imposibilidad de calcular de forma acertada la primitiva de expresiones de la forma $\int sen\ ax\ dx\ ,\ con\ \ a \in \Re$, además, los alumnos dudan sobre la derivada de dichas funciones [160] donde el estudiante A pregunta: *"La integral de sen x ¿si es cos x profe?* ". Con respecto a las funciones logarítmicas solamente se presentan ejercicios donde el argumento de la función permite evaluarla de forma inmediata, es decir, expresiones de la forma $\int \ln(x)\, dx$. Este conflicto es relevante, no es superado.

- ***Conflicto semiótico (cognitivo 4):*** Este conflicto está íntimamente relacionado con el conflicto cognitivo 3. Se hace latente la imposibilidad de hacer tratamiento a las funciones propuestas para convertirlas en otras a las que se les puede calcular la primitiva de forma más sencilla. Tal es el caso de CD2 [84] con el ejercicio $\int e^{3x}\, dx$, CD2 [110] con el caso $-\frac{1}{3}\int e^{3x}\, dx = -\frac{1}{9}e^{3x} + C$, CD5 [203] con el ejercicio $\int \frac{1}{2} sen\ 2x\ dx$, CD6 [231] con el ejercicio $\int \frac{sen\ 2x}{e^x}\, dx$, CD6 [271] con el ejercicio $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-x} sen\ 2x + \frac{1}{2}\int e^{-x} sen\ 2x\ dx\right)$, CD7 [314] con el ejercicio $\int -x\, e^{-x}\, dx$, y CD8 [326] con el ejercicio $\int_1^3 x^5 e^{x^2}\, dx$. Este conflicto cognitivo es medianamente superado por la intervención de los estudiantes A6, A9 y A12 [85, 90, 108, 118, 152, 155, 164, 169, 194, 203, 206, 216, 224, 250, 262, 283 -285, 300, 320, 326, 338, 344, 361, 36-378, 428, 433, 448, 454, 463, 483, 498, 507, 520, 545, 614, 624-626, 634, 665, 670, 683, 695-696, 705, 711, 727, 745, 791-799] los alumnos A6 y A9 se encuentran repitiendo la materia y ya poseen unos conocimientos más afianzados que sus compañeros de curso. La mayoría de los alumnos toman la materia por primera vez. La posición del profesor es la de validar lo que los estudiantes mencionados proponen. En otras palabras, se apoya en ellos para el desarrollo de la clase.

- ***Conflicto semiótico (cognitivo 5):*** a pesar que los estudiantes alcanzan a reconocer el tipo de integral, persiste la imposibilidad de identificar el método por el que se soluciona el ejercicio. En CD10 [359] A4 menciona "*Se trata de una integral definida, hay un producto entre funciones, pero son tres funciones, la pregunta es: ¿cómo se yo que es por partes*?". En [362] A9 interviene reforzando el conflicto semiótico cognitivo 1 haciendo una selección errada de *u* y *dv* argumentando "*Profe como hay tres funciones en el integrando podemos tomar a u como x y dv el resto*. ¡*Yo lo hice así!"*

De tipo Afectivo

Se refiere a la afectividad, la motivación, las emociones, las creencias y las actitudes. Se dice que el profesor "*debe*" motivar a los estudiantes, elegir unos contenidos "*atractivos*" y crear un "clima" afectivo en la clase propicio para el aprendizaje. La principal motivación intrínseca hacia el estudio de las matemáticas parece estar en la elección de los tipos de situaciones-problema matemáticas, las tareas y actividades concretas que el profesor propone a los alumnos, las cuales deben reunir unas características específicas propias del curso que se imparte.

- ***Conflicto semiótico (afectivo 1):*** En las unidades de análisis [18-25], se genera en los estudiantes este conflicto afectivo motivacional, cuando A6 le solicita realizar un ejercicio que ella no pudo hacer. El profesor permite al alumno A2 que se exprese sobre ejercicio. En la CD2 [22] este alumno le dice a su compañera "*A6, ¡mire que el de arriba es la derivada del de abajo!... ¡Es evidente!*", *el* profesor aprueba esa afirmación, solicita al estudiante A9 pasar al tablero a solucionar el ejercicio. En [29] el profesor valida el trabajo realizado por este alumno y se limita a preguntarle a la estudiante "¡*Muy bien A9, eso era todo! ¿Claro A6?*" El profesor con este tipo de intervenciones deja latente este conflicto que se repite durante las demás sesiones de clase, al punto que muchos estudiantes prefieren no preguntar y quedarse con la duda o con la incertidumbre de si el trabajo por ellos adelantado quedo bien hecho o no. En la misma CD2 [84], el profesor parece notar este conflicto e interroga a un estudiante preguntándole: "A5*, ¿por qué hoy está tan callado?* "En CD2 [104] el profesor cuestiona a la estudiante A6 que no parece convencida del trabajo que adelantan. En la CD3 [126-128], el profesor de forma ambigua responde al interrogante de un estudiante sin verificar la comprensión por parte del alumno a su respuesta. En CD4 [159-159], un estudiante manifiesta dudas sobre el proceso seguido por sus compañeros para solucionar un ejercicio, a lo que el profesor le responde "*No todos los ejercicios son sencillos*". En términos generales, este conflicto es relevante a lo largo de las 12 sesiones de clase, el tipo de respuesta del profesor desmotiva a los alumnos a preguntar y participar de forma masiva, de ahí que este conflicto no es superado.

- ***Conflicto semiótico (afectivo 2):*** En la CD3 unidades de análisis [128-129], se genera en los estudiantes este conflicto afectivo relacionado con las creencias al institucionalizar que, si existe un producto entre términos, la integral se calcula por partes, al punto que en la CD4 [155] un estudiante menciona "*No, profe ese ejercicio esta raro*.", queriendo indicar que duda del proceso seguido por sus compañeros para solucionarlo. El conflicto es ratificado en CD5 [178, 205, 213, 227], en CD6 [242] y en CD9 [343]; en general este conflicto no es superado.

- ***Conflicto semiótico (afectivo 3):*** En la CD2 unidad de análisis [49-61], se genera en los estudiantes este conflicto afectivo relacionado con las actitudes hacia las matemáticas como algo denso, complicado y de difícil estudio, al institucionalizar el algoritmo para el MIP, a lo que un estudiante le dice: *"¡Profe eso es un poquito pesado!"* [50]. Este conflicto es ratificado en la misma CD2 [57] cuando se institucionaliza que dicho algoritmo es necesario memorizarlo. También en CD4 [159] cuando se menciona a los estudiantes que "*No todos los ejercicios son sencillos*". En CD5 [229], una estudiante confirma la presencia del conflicto mencionando que *"¡Hay no, esos ejercicios son feos, confusos*!". En CD6 [244] nuevamente se ratifica este conflicto al mencionar "*Tienen que ensayarlo mucho para poder aprenderlo*". También, es ratificado en CD6 [306], en CD8 [334], en CD11 [398] y en CD13 [548].

- ***Conflicto semiótico (afectivo 4):*** En la CD6 [302-315], el estudiante A9 manifiesta "*profe. ¿Por qué volvimos a la misma integral?*", refiriéndose al trabajo adelantado por A14, A4 interviene aclarando en [303] que se ha hecho un mal reemplazamiento y por ende esto condujo a un resultado errado. En [305], A12 reitera la existencia del conflicto preguntando *"¡Y ahora ¿qué hacemos si volvimos a la misma integral?*!" el profesor interviene y aclara que se ha hecho una selección errada para *u* y *dv*, que si la cambian el resultado será otro. Lo central de este conflicto es que los estudiantes no perciben la aplicación iterativa del algoritmo para el MIP en un mismo ejercicio, conflicto que queda sin resolver.

- ***Conflicto semiótico (afectivo 5):*** En la CD7 [318-326], el estudiante A10 manifiesta tener dificultad con el método para aprender el algoritmo asociándolo con la frase que se institucionalizó en la CD2 [56] como "*la regla de la vaca*". En la CD7 [321], el estudiante manifiesta "*yo no me acuerdo del que significado de cada letra*", conflicto que queda sin resolver dado que ni el profesor ni los compañeros de curso le ayudan a superarlo.

- ***Conflicto semiótico (afectivo 6):*** En la CD10 [351-380], el estudiante A8 menciona en tono de disgusto "¡*Pero que lo haga despacio y que nos explique!, ¡Es que él es repitente y por eso ya los sabe* *hacer, pero nosotros no*!", refiriéndose al estudiante A9 que ha hecho la selección adecuada $u=x \wedge, \quad dv = sec \;\; x \, tan \;\; x$ para el ejercicio propuesto. El conflicto queda latente dado que el estudiante A9 repite el último paso que había realizado y termina de hacer el ejercicio, sin embargo, el profesor no interviene para comprobar si los estudiantes han comprendido o no el trabajo realizado por A9 en el tablero.

- ***Conflicto semiótico (afectivo 7):*** En la CD12 [424-450], el estudiante A8 menciona que trabajaron la tarea en casa y cuando fueron a comparar las respuestas en el grupo notó que "*cada uno tenía una respuesta distinta y cuando nos fueron a explicar yo me confundí más"*. A9 y el profesor intervienen para tratar de ayudar a A8 a superar el conflicto. En [428] A9 le dice: "*Ojo que antes es necesario hacer un cambio a los argumentos o si no se confunden*", a lo que A2 [429] pregunta "*¿por qué a los argumentos?",* a lo que A9 con alguna ayuda del profesor da solución a este conflicto.

- ***Conflicto semiótico (afectivo 8):*** En la CD13 [489-550] el estudiante A2 solicita al profesor corregir un ejercicio que se había dejado de tarea. El profesor interviene preguntado *¿quién quiere pasar al tablero*? [494], a lo que A12 responde en [495]: "¡*Yo quiero pasar y verificar si al fin estoy aprendiendo este método*!", el profesor accede a que A12 pase, pero al aplicar el algoritmo del MIP A6 [501], detecta errores en el trabajo y le advierte que se está equivocando. En [502] se menciona que es necesario que lo dejen trabajar para que el mismo detecte el error. El estudiante revisa y corrige la aplicación de la propiedad distributiva, sigue trabajando y en [535] menciona "¡*esa integral es más complicada que la que el ejercicio nos dio*!", en [537] A8 le indica que "eligió *mal la u el dv era al contrario*", en [540] A7 menciona "*¿O sea que todo estaba mal*?", en [542] A7 reitera "*Y entonces ¿para que hicimos todo eso*?", en [543] el profesor soluciona el conflicto aduciendo que. "*Para que todos entiendan que si al hacer la elección, la integral que nos resulta es más compleja que la anterior, pues debemos hacer el cambio en la selección de las funciones que tomamos como u y dv".* En [547] A12 ha realizado el cambio en la elección de *u* y *dv*, repite el proceso y manifiesta**: "**¡*Un poco largo eso profe, Pero bueno al fin parece que estoy entendiendo*!", en CD13 [546-549], que corresponde a las sesiones 8 de las 12 observadas, se mantiene latente este conflicto

De tipo Interaccional

Modos de interacción entre docente y discente para el logro de los objetivos de la enseñanza y el aprendizaje. Estos modos de interacción están sujetos a reglas, hábitos, tradiciones, compromisos y convenios que generan pautas de actuación, las cuales tienen sentido si son con referencia a otras pautas anteriores y posteriores en el tiempo.

- ***Conflicto semiótico (interaccional 1)****:* En la CD2 [81-90] el alumno A13 dice que la solución de $\int e^{3x}\,dx$ es e^{3x} y el alumno A6 que el resultado de $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}$ otra diferente. Este conflicto se resuelve bien por la intervención de A12 que le explica a A13 por qué está equivocado. Este tipo de conflicto se presenta en reiteradas ocasiones a lo largo de las 12 sesiones, un estudiante ayuda a su compañero a superar el conflicto. Como evidencia esta CD4 [152-160] donde A9, A12 y A4 ayudan a A2 a comprender el proceso adelantado, CD5 [184-186], CD5 [213-218], CD6 [275-282], CD8 [344-350], CD10 [360-376], CD12 [430-488] y CD14 [552-580].

- ***Conflicto semiótico (interaccional 2)****:* En [152-158] el alumno A12 duda de la solución que se está dando al ejercicio $\int e^{x} \; sen \;\; x \;\; dx$ al notar que la integral que resultó no era "*más sencilla*" que la propuesta en el ejercicio. Ante la observación de A12, el profesor borra del tablero lo que han escrito y hace el cambio en la selección de *u* y *dv*. repite el proceso iterativo para llegar a

$\int e^{x} sen\ x\ dx = -e^{x} cos\ x - \int -e^{x} cos\ x\ dx$ en [157]. A12 reitera la duda en la solución planteada que conlleva a la no comprensión de este tipo de solución. Este conflicto no se resuelve por la intervención del profesor, queda latente ya que la clase se termina y tampoco se aborda en las sesiones siguientes.

- ***Conflicto semiótico (interaccional 3)**:* En la CD4 [148-173] el alumno A12 duda del proceso seguido por los estudiantes A6 y A9 para seleccionar *u* y *dv* en el ejercicio $\int e^{x} sen\ x\ dx$ al punto que en [155] menciona "*No, profe ese ejercicio esta raro. Veo que es una integral parecida a la que nos da el ejercicio. No veo que se le baje el grado*". Ante esta inquietud, en [159] el profesor interviene re direccionando la selección de *u* y *dv,* pero no hace la solución del ejercicio. En [166] A4 pregunta sorprendido por qué la integral que se obtiene es igual a la planteada en el ejercicio inicial. El conflicto se queda sin resolver dado que la clase termina y el profesor deja como tarea terminarlo.

- ***Conflicto semiótico (interaccional 4)**:* En la CD5 [200-219] A2 cuestiona a A6 y A9 por qué han utilizado una sustitución simple para abordar la integral $\int cos\ 2x\ dx$ argumentando que "*¿acaso todos los ejercicios de esta parte del curso no son por partes*? [212], dado que ellos han realizado un tratamiento y una conversión (una sustitución simple) al argumento de la función trigonométrica dada en el ejercicio. En [213] se interviene ante esta pregunta argumentando de forma ambigua que. "*Atentos: ¿tengo una integral que es un producto entre funciones acaso u es la derivada de v? si es así es por sustitución. De lo contrario es por partes*." En [216] A9 interviene para reforzar lo planteado por el profesor diciendo "*Es que equis no es la derivada de coseno de dos equis ni viceversa. Cuando esto se cumple es por sustitución. No se cumple en este ejercicio, ¿cierto profe?",* sin embargo, este conflicto no se resuelve dado que en [218] el mismo alumno A2 recontra pregunta: "*Pero profe, ¿Cómo se hace esa integral*?". En [221] A4 dice: "*Mejor deje que pase A9 porque usted nos confunde*" el profesor accede y A9 termina el ejercicio, quedando de esta forma el conflicto sin resolver. En CD6 [241] se ratifica la presencia de este conflicto cuando A1 pregunta "*Y como hago para distinguirlo del método por sustitución*", la respuesta del profesor en [244] es que "*Tienen que ensayarlo mucho para poder aprenderlo*".

- ***Conflicto semiótico (interaccional 5)**:* En la CD6 [231-311], A9 en [272] duda si el ejercicio propuesto se realiza mediante la aplicación iterativa del algoritmo del MIP, aspecto que es ratificado en [284] por A6 a lo que el profesor responde en [285] *"¿Por qué no miraron la respuesta del libro?"*. En [286] A9 responde "*Porque ese ejercicio no trae respuesta*" en 288 A2 interviene y da solución parcial a este conflicto argumentado "*Porque nos tocó preguntarle a otro compañero que está en otro semestre más adelante de nosotros y nos dijo que tocaba volver a integrar*", el profesor no interviene para argumentar el porqué de la aplicación iterativa del algoritmo. De ahí que el conflicto no se resuelve. Esto lo ratifica lo dicho por A6 en [290] cuando menciona "*Pues no sabemos si nos quedó bien o no. ¡Como no hay respuestas en el libro*!"

- ***Conflicto semiótico (interaccional 6)**:* En la CD7 [312-325] se refuerza el conflicto semiótico interaccional 5 cuando se da por entendido que los estudiantes asumieron la aplicación iterativa del algoritmo del MIP con el ejercicio realizado en la sesión anterior. En [313] mientras se soluciona el ejercicio $\int e^{-x} sen\ 2x\ dx$ en el tablero, se dice "*Vuelvo a integrar por partes*" pero no argumenta por qué es necesario hacerlo. Este conflicto se hace latente en [299] cuando A2 le dice "¡*No se puede profe*!". En [300] A9 interviene argumentando "*Si, si podemos, ¡podemos sumar cuatro veces esa misma integral a ambos lados*!", el profesor accede y en [305] argumenta "*Y listo ya está hecho. ¡Ven que no es difícil!*", de esta manera se percibe solución al ejercicio, pero el conflicto sigue latente.

De tipo Mediacional

Se refiere al sistema de reglas relativas al uso de medios técnicos y temporales y el uso apropiado de recursos como tablero, marcador, borrador de tablero, video-beam, equipos multimedia, determinados materiales manipulativos, libros de texto de los alumnos y programas informáticos.

- ***Conflicto semiótico (mediacional 1):*** Limitación del uso de recursos que refuercen el proceso de enseñanza. A lo largo de las 12 sesiones de clase el trabajo adelantado se limitó al uso exclusivo de un solo libro de texto de los reportados en la bibliografía entregada por el al iniciar el curso. Solamente se hizo uso del tablero y de la intervención permanente de algunos estudiantes que pasaban a solucionar los ejercicios propuestos.

- ***Conflicto semiótico (mediacional 2*)**: Ausencia de recursos multimedia para el desarrollo de la clase.

De tipo Ecológico
Tienen que ver con los contenidos que se van a enseñar ya que los significados pretendidos que se especifican en las directrices curriculares tratan de contribuir a la formación socio-profesional de los estudiantes. El cumplimiento del programa es otro requisito que condiciona el trabajo del profesor ya que los aprendizajes logrados por sus estudiantes constituyen el punto de partida de los estudios en cursos posteriores. Adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo de la institución, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

- ***Conflicto semiótico (ecológico 1*)**: Se hace una distribución inadecuada del tiempo dedicado a cada tema para la ejecución del programa según lo estipulado en la malla curricular. Para la implementación del MIP en la distribución del "micro-currículo" del curso que se entregó, se manifiesta que se había acordado utilizar 4 sesiones de clase para implementar el MIP, sin embargo, se utilizaron 12 sesiones.

- ***Conflicto semiótico (ecológico 2*)**: Ratificación de uso inadecuado de lenguaje, preconceptos y conceptos propios del curso calculo integral, lo que será una limitante para los alumnos en los estudios de cursos posteriores.

- ***Conflicto semiótico (ecológico 3*)**: El no cumplimento de lo planeado en el programa entregado a los estudiantes para las 16 semanas del semestre.

Matriz Categorial 4*. Sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de enseñanza del MIP.* En toda práctica se identifica un sujeto agente (institución o persona) y un medio en el que dicha práctica se realiza (que puede contener otros sujetos u objetos). Puesto que el sujeto agente realiza una secuencia de acciones orientadas a la resolución de un tipo de situaciones-problema, es necesario considerar también los objetos, procesos y significados matemáticos involucrados. Este nivel de análisis se centra en los objetos, sobre todo, en los procesos que intervienen en la realización de las prácticas y también en los que emergen de ellas.

D'Amore et al. (2007) mencionan que "Las normas sociales en el seno de la clase son convenciones que describen cómo comunicarse unos con otros, así como las obligaciones que describen cómo reaccionar socialmente ante un error o una indicación" (p. 4). Una posible manera de realizar esta descomposición es tomar como unidad de análisis básica el constructo "configuración didáctica". En Godino, Contreras y Font (2006b) se considera, como ya se mencionó antes, que una configuración didáctica lleva asociada una configuración epistémica, esto es, una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Esta noción va a permitir realizar un análisis detallado de los procesos de instrucción matemática que para nuestro caso se construyeron 15, detalladas en las matrices documentales, presentadas al inicio de este Capítulo.

El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas. El análisis de estas configuraciones didácticas efectivamente implementadas en un proceso de instrucción permite determinar qué tipo de normas se han seguido. En Godino, Contreras y Font (2006b) se consideran cuatro tipos de configuraciones teóricas que pueden desempeñar este papel y que se designan como configuración magistral, adidáctica, personal y dialógica.

De ahí que, para determinar el sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de enseñanza del MIP relacionados en la *Figura 33,* se tuvo en cuenta la dimensión normativa propuesta por D'Amore, Font & Godino (2007) complementada por Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) y luego por Assis, Godino y Frade, C. (2012) que considera la estructura de la *Figura 7* descrita en el Capítulo 3, cuya valoración se encuentra detallada en el Capítulo 8.

Figura 33. Matriz Categorial 4. Sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de enseñanza del MIP.

El EOS propone una categorización teniendo en cuenta las seis facetas consideradas.

Normas epistémicas: Las normas epistémicas regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para su aprendizaje, las representaciones que se utilizan, las definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. Estos conglomerados determinan las configuraciones epistémicas y las actividades que posibilitan. El profesor institucionaliza:

- Se deben aceptar las definiciones, teoremas y argumentaciones dadas en el libro de texto.
- Al aplicar el algoritmo del MIP la integral que resulta debe ser de menor grado que la dada en el ejercicio propuesto.
- Debe existir un producto entre funciones para que se pueda solucionar el ejercicio aplicando el algoritmo del MIP.

Normas cognitivas: Permiten conseguir que los sujetos aprendan. El profesor institucionaliza:

- Memorizar el algoritmo del MIP con lo que él llamó nemotécnicamente “la regla de vaca”.
- Se debe recordar “la regla de la vaca” para memorizar el algoritmo del MIP y poderlo aplicar en la solución de ejercicios de este tipo.
- El uso de conocimientos previos se hace de manera ambigua y en otras de forma inadecuada. El profesor muchas veces da por entendido que los estudiantes manejan preconceptos y en realidad no es así.
- Los conocimientos previos no se incorporan ni se integran de manera adecuada en la construcción de nuevos aprendizajes, tampoco en el nivel de dificultad de los contenidos pretendidos.
- El profesor no presenta adaptaciones curriculares a las diferencias individuales de los alumnos, tampoco estrategias ni metodológicas ni didácticas que le permitan poner en consideración de los alumnos un sistema de ayudas donde ellos practiquen lo aprendido y se atienda a los estudiantes que presentan dificultades.

Normas interactivas: Regulan los modos de interacción entre los intervinientes.

Interacción docente-discente

- Existe una escasa interacción docente-discente a nivel individualizado.
- Se percibe prevalencia de procesos instruccionales expositivos en su mayoría de veces por parte del profesor.
- El plan de formación responde parcialmente a los indicadores propuestos en la malla curricular emitida por el Departamento de Matemáticas.
- Se enuncia de manera general la realización de clases expositivas con talleres que deben ser resueltos por subgrupos.
- El hecho de que el profesor se disguste porque los alumnos hablen entre si mientras él explica hace explicita la norma que la interacción entre discentes no debe darse en clase.

Interacción entre discentes

- La interacción entre discentes se da solo cuando un alumno pasa al tablero a realizar un ejercicio y al presentar alguna equivocación es corregido por otro compañero.
- En el plan de formación propuesto por el Departamento de Matemáticas se propone la incorporación de diversas formas de evaluar, en este aspecto el profesor solo propone dos: talleres para trabajar en subgrupos y tres parciales.
- La identificación de conflictos cognitivos en la interacción intra-estudiantes, regularmente es superada por la intervención de otros alumnos.
- No se identifican conflictos cognitivos en la interacción intra-equipos, dado que cada subgrupo trabaja. Algunas veces en clase unos representantes de estos subgrupos exponen sus resultados al grupo general que es supervisado por el profesor.
- La escasa interacción entre discentes revela una norma social en la que se debe respetar la voz del profesor y el estudiante solo interviene para pedir aclaraciones.

Autonomía:

- A pesar que en la estructura de la malla curricular emitida por el Departamento de matemáticas contempla en el plan de formación el desarrollo de la autonomía en los alumnos como un criterio orientador, en las clases solo se utiliza para desarrollar algunos talleres.
- La norma social mediacional en el Departamento de Matemáticas es que la evaluación no se restrinja a los parciales únicamente, plantea la opción del uso de diversas técnicas evaluativas (pruebas escritas, tareas de aplicación, resolución de problemas), el profesor únicamente evalúa cada corte con el parcial, los talleres los toma como la cuarta nota, de la cual se tomara el porcentaje asignado para cada una y así emitir la nota final del semestre.

Normas mediacionales: Sistema de reglas relativas al uso de medios técnicos y temporales.

Recursos materiales

- El uso de hojas de cálculo, de algún tipo de software de simulación, de materiales y/o recursos es nulo. Los únicos recursos que se usan son el libro de texto, los cuadernos, el tablero y el marcador.

Número de alumnos

- La cantidad de alumnos del curso es 20, aspecto que permite hacer un seguimiento individualizado del progreso de los aprendizajes.

  Horario y condiciones del aula
- El horario programado para las clases está planeado en las mañanas, con el objeto de no saturar con trabajo de otras asignaturas propias de la licenciatura a los estudiantes.
- Existe una limitación con el salón B116 asignado para los viernes, dado que no tiene vidrios, hace mucho frio, los ruidos emitidos por el uso de las canchas de baloncesto interfieren el normal desarrollo de la clase.

  Tiempo de enseñanza y aprendizaje
- El curso tiene una duración de carácter semestral (16 semanas de clase) y se realizan a través de dos sesiones semanales de 90 minutos cada una.

Normas afectivas: Entre ellas están la motivación a través de situaciones matemáticas ricas y dentro del campo de interés de los estudiantes; adaptadas para que el alumno acepte la responsabilidad de resolverlas.

Intereses y necesidades,

- Falta de compromiso personal de algunos estudiantes para asumir la responsabilidad de su estudio.
- A pesar que el programa ofrecido por la facultad contempla e incentiva el uso de situaciones reales y de aplicaciones al ámbito profesional estas no se fomentan en el desarrollo de la clase.
- El profesor no hace referencia al carácter motivacional de los problemas.

Actitudes y Emociones

- En cuanto a las actitudes, el profesor solo hace referencia de manera explícita a la perseverancia como elemento para aprender el algoritmo del MIP.
- No se fomenta el trabajo sistemático, la disponibilidad para el trabajo en equipo, el uso crítico de la información ni la argumentación en situaciones de igualdad.
- En cuanto a las Emociones, el plan de formación implementado por el profesor no incluye orientaciones relacionadas con promover la confianza, la seguridad en sí mismo para resolver problemas, tareas matemáticas, y resaltar las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Normas ecológicas: Tienen como objetivo conseguir educar a los estudiantes y comprometerlos con la comunidad y una formación inicial de profesionales competentes para un futuro ejercicio profesional.

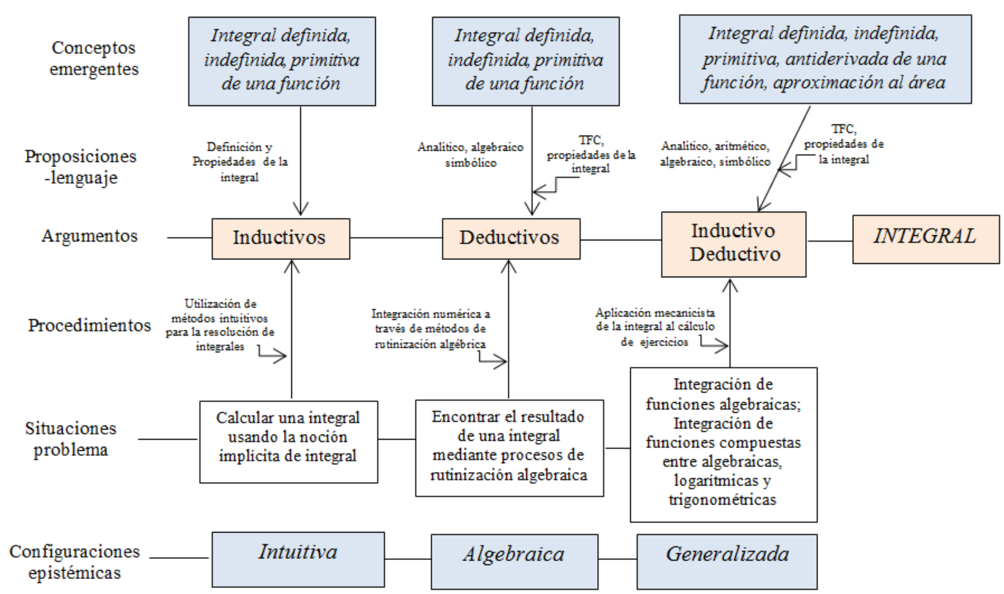
- Escasa conexión entre los contenidos propios del cálculo integral en contexto interdisciplinares. (Contenidos de la línea de los cálculos de distintos niveles de enseñanza del ámbito escolar)

No existe conexión entre los contenidos propios del cálculo integral con otras disciplinas de la formación profesional.

Matriz Categorial 5. Presencia de Configuraciones epistémicas y si éstas permiten alcanzar el significado global de la integral. *Figura 34*. Matriz Categorial 5. Configuraciones epistémicas de la integral que se potenciaron en el proceso de enseñanza del MIP

Figura 34. Configuraciones epistémicas de la integral que se potenciaron en el proceso de enseñanza del MIP

En la institucionalización del MIP adelantada solo se hace uso de tres de las once CE definidas en la literatura vigente de Educación Matemática, estas son: *intuitivas, algebraicas* y *generalizada.* En el siguiente esquema las presentamos.



Matriz Categorial 6. Descripción de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción. Cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática es necesario activar un conglomerado formado por algunos (o todos) de los elementos citados: lenguaje, situaciones, conceptos, proposiciones, acciones y argumentaciones. A este conglomerado, como ya se mencionó antes, en el EOS se le llama configuración; que pueden ser cognitivas (conglomerado de objetos personales) o epistémicas (conglomerado de objetos institucionales) según que se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional.

La idoneidad didáctica del EOS al proceso de enseñanza desarrollado, contempla el estudio de las configuraciones didácticas, epistémicas y su articulación, puesto que el estudio de las matemáticas tiene lugar bajo la dirección de un profesor y en interacción con otros estudiantes. Se orienta, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción y su puesta en relación con los aprendizajes de los estudiantes (trayectorias cognitivas). La idoneidad didáctica del proceso permite valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y "guiar" su mejora. En el EOS se considera que la idoneidad global de un proceso de estudio se debe valorar teniendo en cuenta las seis dimensiones contempladas anteriormente. En la *Figura 35* se muestra la matriz categorial 6 que relaciona estos aspectos.

Figura 35. Matriz Categorial 6. Idoneidad didáctica del proceso de instrucción

Idoneidad didáctica del proceso de instrucción.
Se consideraron los elementos de referencia para describir y en el Capítulo 7 valorar la idoneidad didáctica del proceso implementado en correspondencia al significado institucional pretendido y descrito en el capítulo 5. **Idoneidad Epistémica:** Identifico las siguientes prácticas desde las enunciaciones discursivas • Durante el proceso de instrucción se hace una presentación no muy detallada de la construcción del algoritmo para el MIP descuidando la vigilancia epistemológica de conceptos y contenidos intrínsecos a dicho concepto, se saltan pasos del proceso. Se dan por entendido el manejo de teoremas y propiedades que conducen a la construcción de dicho algoritmo.

- Se hace uso de un lenguaje verbal no técnico propio del vocabulario institucionalizado y reconocido por la comunidad matemática.
- Se institucionaliza de manera intuitiva definiciones, conceptos y algoritmos, no se hace a través de demostraciones, argumentaciones lógico deductivas que le permitan al alumno una aproximación al significado matemático real institucionalizado y reconocido por la comunidad matemática.
- Se realizan presentaciones ambiguas del contenido matemático, no se organizan de una manera lógico-deductiva que permita concluir de manera coherente el proceso seguido.
- Las conversiones entre diferentes formas de representación fueron escasas, casi ausentes.
- No hay una muestra representativa de los tipos de problemas en donde es indicado aplicar el método de la integración por partes, incluso, el tipo de problemas donde se debe aplicar dos veces el mismo método. No les hace observar que hay una familia de problemas que se resuelven por integración repetida del algoritmo. Los ejercicios que se presentan relacionan directamente una integral que es necesario solucionar, pero no se dan situaciones problema para las cuales sea necesario construir una integral y luego si solucionarla.
- No se consideran ejercicios que involucren más de una configuración epistémica.
- Se percibe una falta de procesos relevantes, en particular de modelación y de justificación, así como la falta de representatividad de significados parciales, solo se trabaja la configuración inversa de la derivada, la algebraica y algunas vences la generalizada.

Idoneidad Cognitiva:

- La institucionalización que se hizo del MIP impide la comprensión de conceptos y procesos básicos que permitan al alumno aplicar adecuadamente el uso del razonamiento propio del Cálculo Integral.
- La argumentación es casi inexistente. Se abandonan las demostraciones y no son sustituidas por justificaciones de tipo inductivo, grafico, visual, abductivo, etc.
- Permanentemente se descuida la vigilancia epistemológica de conceptos, definiciones, teoremas y lemas al momento de institucionalizar el MIP, algunos se aplican de forma equívoca, tal es el caso del uso del Teorema Fundamental del Cálculo para asegurar que la segunda parte de este teorema anula la derivada de la función (ver unidades de análisis [40-56]).
- Se manipulan símbolos sin dotarles de significación institucionalmente reconocida.
- Se olvidó considerar si los alumnos presentaban un uso adecuado de conocimientos previos. Se da por hecho que al llegar al curso Cálculo Integral, los alumnos ya manejan los prerrequisitos de la asignatura.
- La incorporación relativa a los conocimientos previos en la construcción de nuevos aprendizajes fue ausente; también el nivel de dificultad de los contenidos pretendidos.
- No se realizan adaptaciones curriculares que consideren las diferencias individuales de los alumnos, tampoco se aplican estrategias ni metodológicas ni didácticas que le permitan a los alumnos entender y practicar lo aprendido, por ejemplo: asesorías extra clase o creación de talleres con ejercicios de diferente grado de complejidad para que ellos realicen.
- Se observa que unos alumnos resuelven algunas integrales correctamente, pero sólo adquieren un conocimiento instrumental que les permite hallar una solución sin saber por qué se resuelven de esta manera y no de otra.

Idoneidad interactiva:

- La clase presenta objetivos instruccionales claros y observables, pero la enseñanza se realiza por imitación y asociación, y por refuerzos/castigos. En consecuencia, el aprendizaje se produce por observación de lo que hace un experto, mientras que el alumno es receptor del proceso y sigue instrucciones.
- Los momentos de institucionalización del conocimiento matemático no son producto de fases de discusión sobre los aspectos críticos del proceso de aprendizaje.

- Es escasa la interacción docente-discente. No se da a nivel individualizado.
- Los conflictos cognitivos identificados en la interacción intra-estudiantes la mayoría de las veces es superada por la intervención de otro alumno o del profesor.
- La interacción intra subgrupos de trabajo no permite identificar la presencia de conflictos cognitivos, dado que no interactúan entre ellos.
- Únicamente se da prevalencia a los procesos instruccionales expositivos por parte del profesor o regularmente de algún estudiante que repite la asignatura.
- La Interacción entre discentes se limita al trabajo en subgrupos para desarrollar talleres propuestos por el profesor.
- Se propone una amplia lista de ejercicios del texto guía para realizarlos en forma repetitiva de carácter mecánico y de manera descontextualizada.
- El plan de formación que se ejecuta no fomenta el desarrollo de la autonomía en los alumnos.
- No se hace uso de diversas técnicas evaluativas como pruebas escritas, tareas de aplicación, resolución de problemas).
- La exposición, uso y manejo de conceptos de forma imprecisa y ambigua durante el proceso de instrucción permite la creación de conflictos y la no resolución satisfactoria de los mismos. La mayoría de conflictos detectados provienen de los alumnos, lo que permite inferir que se está generando un tipo de comprensión no significativa de los conceptos propios del Calculo Integral.
- Se acepta como válidas las intervenciones y respuestas de algunos alumnos que pasan ala tablero o participen en la clase, en la medida que coincidan con el discurso previamente diseñado.

Idoneidad mediacionales:

- Se plantea la temática del empleo de un lenguaje simbólico, sin apoyo en modelos concretos o visualizaciones; por lo tanto, las definiciones y propiedades emergen descontextualizadas.
- El proceso de instrucción no se apoya en ningún tipo de software de simulación.
- El número de estudiantes del curso es adecuado para desarrollar una clase en la que es posible hacer un seguimiento individualizado del progreso de los aprendizajes.
- El horario programado para las clases está planeado para generar aprendizaje en los alumnos.
- Se percibe una dificultad para el profesor los días viernes dado que para este día le asignaron un salón del primer piso, donde las ventanas no tienen vidrio, cuando llueve hace mucho frio y se entra el agua. Además, el número de pupitres no es el adecuado para todos los alumnos, muchas veces tienen que traerlos de otro salón y esto hace que se pierda tiempo de clase.
- El plan de formación institucionalizado cuenta con un tiempo apropiado para la enseñanza. El curso tiene una duración de carácter semestral y se realizan a través de dos sesiones semanales de 90 minutos cada una.
- No se evidencian configuraciones didácticas donde el profesor tenga en cuenta las potenciales dificultades de comprensión de los alumnos.
- El análisis de los objetos, procesos y trayectorias epistémicas de la clase nos indica que durante el proceso de instrucción pareciera hacerse caso omiso a la necesidad de construir un nuevo lenguaje para poder integrar el aprendizaje del Cálculo Integral a los dominios cognitivos de los alumnos.

Idoneidad afectivas:

- Las actitudes de los alumnos durante el proceso de instrucción no fueron dentro de un ambiente de aprendizaje óptimo que les permita un aprendizaje significativo.
- Existe falta de compromiso personal de algunos estudiantes para asumir la responsabilidad de su estudio.
- Fue ausente la referencia al carácter motivacional de los problemas, no se relacionaron con situaciones reales y de aplicaciones al ámbito profesional.

- Se fomentó parcialmente la perseverancia como una actitud positiva en los estudiantes, pero se descuidó otras como el trabajo sistemático, la disponibilidad para el trabajo de equipo, el uso crítico de la información, la argumentación en situaciones de igualdad.
- Se dejó ausnete el fomentó en los estudiantes de la confianza y la seguridad en sí mismo para resolver problemas, tareas matemáticas, tampoco se resaltó las cualidades estéticas y la precisión de las matemáticas.
- Algunas veces se buscó favorecer la argumentación en situaciones de igualdad ya que se valoró el argumento en sí mismo y no por quién lo dijo.
- Fueron ausentes las situaciones que permitan calificar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
- Los procesos de personalización fueron escasos, pues, aunque los estudiantes se involucran inicialmente en la actividad, comienzan a perder interés en varios momentos de la clase y dejan de sentir interesante lo que se les propone, ya que se desorganizan al sentir que se pierden en el proceso a seguir para solucionar el ejercicio propuesto.

Normas ecológicas:

- Es escasa la conexión entre los contenidos propios del Cálculo Integral con otras disciplinas de la formación profesional.
- Es limitada la conexión entre los contenidos propios del Cálculo Integral y los contenidos de la línea de los cálculos de distintos niveles de enseñanza del ámbito escolar.
- Las modelizaciones extra matemáticas fueron ausentes, elementos que le permitirían al estudiante extender los conocimientos del Cálculo Integral a otras ciencias.
- Las situaciones de referencia que le den sentido a las matemáticas enseñadas no se contemplaron, ya que se presentan unas matemáticas centradas sobre ellas mismas y muy alejadas de las otras ciencias.

Capítulo 7. Resultados obtenidos a partir del análisis de la información recogida en las categorías de análisis

En este capítulo se presenta la valoración de las matrices categoriales donde los resultados se han interpretado de manera cualitativa, haciendo énfasis en cada faceta de la noción de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción seguido durante las clases observadas.

7.1. Valoración de los Sistemas de prácticas identificados durante la implementación del MIP

Desde los elementos planteados por el EOS el tipo de prácticas empleadas para institucionalizar el MIP son de tipo discursivo. Conforme a lo expuesto en Godino (2017), se encontraron entremezclados dos de los tres tipos de prácticas propuestos: Discursivas con uso de lenguaje natural y numérico;[14] Discursivas con uso de lenguaje analítico y numérico y Discursivas con uso de lenguaje gráfico. La valoración de cada una de ellas se presenta en los apartados siguientes.

---

14 Entendiendo por "lenguaje natural aquel que se expresa con una terminología no reconocida matemáticamente (lenguaje coloquial). Por lenguaje numérico aquel que expresa cifras, cantidades. Por lenguaje analítico aquel que está relacionado con el uso de símbolos propios de las matemáticas. Por lenguaje gráfico cualquier representación gráfica que se utilice, bien sea de una función, o de una situación representativa" (Godino, 2014, pp. 15-18).

Prácticas discursivas con uso de lenguaje natural y numérico. Se refieren a comunicar argumentos expresados mediante lenguaje natural, no específico de las matemáticas institucionalizadas. Como ejemplos, podemos ver en el anexo 2, la CD1 [21] se menciona *"Este es un ejercicio que tiene forma racional, pues tiene Polinomios arriba y abajo*" para referirse al numerador y denominador de una función racional. Los estudiantes asumen como institucionalizado este tipo de expresiones al mencionar en CD1 [22] "*A6, ¡mire que el de arriba es la derivada del de abajo!... ¡Es evidente!*" En la CD2 [33] se menciona: "¡*Vamos a calcular la integral de equis, Euler a la tres equis de equis*!" para referirse a la expresión $\int x\, e^{3x}\ dx$. En la misma CD2 [44], se menciona que *"u prima por v está sumando, lo paso al otro lado a restar...*" en lugar de enunciar la propiedad $A + C = B \Rightarrow A + C - C = B - C$. En CD6 [303] se valida lo que un estudiante dice *"¡Lo pasamos a dividir al otro lado!" refi*riéndose a una constante que multiplica una función, sin enunciar la ley $\forall\ \ A, B, C \in \Re$, se cumple $A \cdot C = B \Rightarrow (A \cdot C) \div C = B \div C,\ \ C \neq 0$.

En CD2 [45] se menciona el TFC limitándolo a la expresión: "¡*Ahora, aplicamos el teorema fundamental del cálculo, es decir, recuerden que el proceso de anti derivar es el inverso a la derivada!*". Se ratifica en [48] al mencionar "*¿qué nos dice el teorema fundamental del cálculo*? *Que cuando tengo la integral de una derivada esos dos procesos se anulan,...*" y escribe en el tablero $\cancel{\int}(u \cdot v)\cancel{'}$. En CD2 [56] se institucionaliza el algoritmo del MIP nemotécnicamente con lo que se llama "*la regla de vaca*" se dice "*Hay dos formas de aprenderla. ¡Una es "con la regla de la vaca*"!", sin considerar que al cambiar las funciones *u* y *v* por ejemplo por *f* y *g* esta nemotecnia carecerá de sentido. Esta situación se repite en CD5 [178] y en CD6 [235]. Situación similar se presenta en CD9 [345] cuando se institucionaliza

$\int_1^5 x^{\cancel{3}} e^a \frac{da}{2\cancel{x}}$ en lugar de enunciar la propiedad $\forall \ a \in \Re$, con $n, m, \in Z$, se cumple : $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

En CD13 [562-566] ante el ejercicio $\int_1^2 \frac{ln\ (x)}{x^2} dx$ se valida lo que un estudiante menciona "*La equis sube con exponente negativo ¿verdad?*", sin enunciar la propiedad $\forall \ a \in \Re , m \in Z$, se cumple: $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$.

En CD2 [70] se institucionaliza que la manera de conocer si la selección y posterior aplicación del MIP para solucionar una integral es correcta, se da cuando al seleccionar *u* y *dv* e integrar *dv*, este resulte de menor grado, se dice: "*La idea es que al integrar dv se baje el grado de la integral si eso no se da entonces lo hicimos mal y debemos cambiar la selección que hicimos para u y para dv*". En esta unidad de análisis se evidencia el uso de un lenguaje no especifico del PMA para este nivel de aprendizaje, ambiguo y no analítico que permita al alumno comprender el concepto y luego llegar a aplicarlo. Esta situación se repite en CD4 [155], en CD5 [178,187, 204, 219], en CD6 [237], en CD6 [237, 301], en CD11 [406], en CD13 [511, 526], En CD14 [570, 573, 577] y en CD15 [630-795].

En CD3 [128-134] se propone el ejercicio $\int x \ sen \ x \ dx$ y se pregunta "**¿Quién sería el candidato para u?**", a lo cual un estudiante responde "*x Porque esta de primeras. Como en el anterior*", se prueba esto escribiendo en el tablero "$u = x$", acto seguido pregunta "*¿quién será dv?*" Los estudiantes asumen que la expresión que no se consideró del ejercicio será lo que se toma como *dv*. Esta situación se repite en CD4 [149, 151, 156], en CD5 [204] y en CD6 [238-244, 264, 295] cuando razonan de forma imprecisa la manera de identificar si un ejercicio se debe solucionar por el MIP o por sustitución simple. Se repite en CD6 [306], en CD8 [333-334], en CD10 [355-370], en CD11 [403-406], en CD12 [439, 458, 478] y en CD13 [499, 537].

En CD6 [306-310] se menciona de forma imprecisa que *"¡A las integrales no se les dice infinitas sino cíclicas!*" cuando es necesario aplicar el algoritmo del MIP en forma iterativa y que esta habilidad solo se logra solo si: "*¡Es cuestión de practica! ¡Esto solo se aprende haciendo ejercicios!"*

En CD12 [420-437], ante el ejercicio propuesto $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{2\theta} sen\ 3\theta\ d\theta$, se valida lo que un estudiante menciona en [428] *"Ojo que antes es necesario hacer un cambio a los argumentos o si no se confunden*". En [431] el mismo estudiante menciona "*Porque es una función exponencial multiplicada por una trigonométrica, ambas tienen argumento y ¡no son sencillos!*" llegando de esta manera a institucionalizarse este procedimiento. No se menciona al grupo que ante este tipo de funciones es necesario hacer un tratamiento a los argumentos de las funciones para transformarlas en otras más sencillas. Lo anterior se ratifica en [434], cuando de forma imprecisa se hace referencia al tratamiento de los argumentos que la estudiante A9 realiza: "*En términos de una sola variable, que sea diferente a x que es la variable de integración"*. Situación similar se presenta en CD15 [630-800] ante la imposibilidad de los alumnos para identificar cuál es la forma de "*el producto entre funciones*" En el ejercicio $\int \frac{xe^{x}}{(x+1)^{2}}\,dx$

Discursivas con uso de lenguaje Analítico y numérico. Lenguaje analítico correspondiente al uso del lenguaje simbólico propio de las Matemáticas de este nivel como lo contempla el PMA. En CD2 [64] se hace un acercamiento a este tipo de lenguaje cuando se pregunta *"¿cuáles son los indicios para saber qué debo integrar por partes?"*, pero se invalida reconociendo la respuesta que A4 le da en [65] *"¡Porque hay una multiplicación entre sus términos!"*. En CD2 [74], ante la pregunta del profesor *"Pero vean que no conozco v. Entonces ¿cómo busco v?"* se permite a los estudiantes una aproximación a un raciocinio analítico deductivo cuando en [75] A12 le responde "*¿Integramos?, creo que es una primitiva, ¿si profe?"*, aprobándolo en [76]. Situación similar se repite en CD7 [315-316].

En CD2 [84-93] se fomenta un tipo de lenguaje que mezcla el numérico y el analítico ante la integral $\int e^{3x}\,dx$ cuando se pregunta *"¿cuál es la integral de Euler a la tres equis?"*. En [85] un estudiante responde "*Da Euler a la equis"*. En [86] otro estudiante responde "*¡No!, ¡da un tercio Euler a la tres equis!"*. En [87] positivamente se permite que los estudiantes se cuestionen ¿quién tiene la razón? En [88] A12 interviene e indica quién se equivocó, ante esto se le pide que pase al tablero y le comente al grupo por qué la respuesta es *"¡un tercio Euler a la tres equis!"*. En [90] A12 da una demostración de la apropiación de este tipo de lenguaje de tipo analítico al razonar sobre el ejercicio que está solucionando en el tablero y llegar de una manera analítica lógico deductiva a la expresión $v = \frac{1}{3}e^{3x}$.

En CD6 [238-244] se pregunta a los *alumnos "¿Cuáles son los indicios para saber que debo integrar por partes?",* de forma imprecisa un estudiante responde "*porque hay una multiplicación entre sus términos"*, también, de forma imprecisa se ratifica esto diciendo "*Muy bien. Hay una multiplicación entre dos funciones no similares*", acto seguido un alumno pregunta *"¿Y cómo hago para distinguirlo del método por sustitución?"* y nuevamente de forma imprecisa se le responde *"Porque un término no es la derivada del otro",* el conflicto se generó y quedó abierto dado que en [243] otro alumno cuestiona al grupo diciendo *"¡O sea que si hay un producto y un término no es la deriva de otro no es por partes sino por sustitución!".* La respuesta que se da en [244] es "*Tienen que ensayarlo mucho para poder aprenderlo"*. Esta situación se repite en CD6 [253] ante la dificultad de un estudiante para identificar si existe un producto entre sus términos y en CD9 [357-376] ante la dificultad del grupo para poder identificar el producto entre los términos cuando hay más de dos funciones, caso del ejercicio propuesto $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \sec x \tan x \, dx$.

Prácticas discursivas con uso de lenguaje gráfico. No se percibe ningún ejercicio que permita la modelación por medio de lenguaje gráfico.

Operativas

A lo largo de las 12 sesiones de clase las argumentaciones que se hacen son de tipo heurístico, usando la intuición, todas ellas encaminadas a aceptar determinadas actuaciones, por ejemplo, la institucionalización del algoritmo del MIP, la solución de las integrales propuestas, la enunciación de teoremas y las propiedades que permitan avanzar en el proceso de solución del ejercicio o alguna argumentación lógica utilizada. Otro ejemplo se da en CD2 [42] cuando se dice "*Ahora vamos a recordar el teorema fundamental del cálculo en su primera parte*", se hace una justificación para validar un proceso que queda sin demostración como lo exije el PMA para este nivel. Esta situación se vuelve a presentar en CD2 [45], en CD5 [178], en CD6 [235], en CD9 [345] y en CD13 [562-566] cuando se utilizan propiedades que se aceptan de manera intuitiva como válidas pero que nunca se formalizan nuevamente invalidando los planteamientos del PMA.

Prácticas regulativas (normativas)

La implementación de estas prácticas se orientó básicamente a conseguir establecer el uso de propiedades (proposiciones) y definiciones de conceptos para poder solucionar los ejercicios propuestos. Las propiedades o atributos de los objetos mencionados se presentaron como enunciados. Los conceptos fueron institucionalizados a partir de definiciones o descripciones, como por ejemplo el de función, derivada de un producto de funciones, TFC, anti derivada, primitiva, integral definida, integral indefinida. Ninguno se dio mediante construcciones lógico deductivas, demostraciones o elaboraciones propias del PMA para este nivel de estudio.

7.2. Valoración de los de objetos y procesos matemáticos identificados durante la implementación del MIP

La estructura de la matriz categorial 2 mostrada en el Capítulo 6, se consideró desde tres momentos: cuando se institucionaliza el MIP, cuando se solucionan ejercicios relacionados con integrales indefinidas y cuando se trabaja con integrales definidas, analizando en cada uno de ellos la sensibilidad a la identificación de la variable, al algoritmo y al algoritmo iterativo. Lo encontrado al respecto se expone a continuación.

Cuando se institucionaliza el MIP. El objeto primario fue un ejercicio específico ($\int x\, e^{3x}\, dx$) al que se le debía buscar solución. Al momento de verificar si la solución era por sustitución o por partes se percibe sensibilidad al algoritmo, CD2 [20-21]. Como objetos emergentes se utiliza la fórmula para derivar un producto de funciones, el TFC, la fórmula para el algoritmo del MIP y la solución misma de la integral propuesta. En todos ellos se percibe una fuerte sensibilidad a reconocer e institucionalizar el algoritmo del MIP.

Con respecto a la sensibilidad a la variable (elegir *u* y *dv*), esta se institucionaliza de forma imprecisa. En CD2 [67] se dice "*Escoger quién ha de ser u y quien dv. Si escojo a dv esa función al buscarle la primitiva, esta debe bajarle el grado, si eso no se da entonces le subo el grado y significa que va mal, lo estaríamos haciendo mal*", posteriormente, en CD2 [115] se ratifica al decir "*Verificar que la integral que resulta al aplicar el algoritmo es más sencilla, lo que implica que el proceso de selección de u y v es adecuado*".

La sensibilidad al uso del algoritmo iterativo para buscar respuesta a un ejercicio no se hizo explícita durante las sesiones de clase observadas.

Cuando se solucionan ejercicios relacionados con integrales indefinidas. Como objetos primarios se toman 8 ejercicios específicos que involucran integrales indefinidas a las que se les debe buscar solución**:** $\int x \operatorname{sen} x\, dx$; $\int e^{x} \operatorname{sen} x\, dx$; $\int x \cos 2x\, dx$; $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{e^{x}}\, dx$; $\int -x\, e^{-x}\, dx$;

$\int x\, 2^{x}\, dx$; $\int \sqrt{x}\, \ln x\, dx$; $\int \frac{xe^{x}}{(x+1)^{2}}\, dx$. Como objetos Emergentes también se utiliza la fórmula para el MIP para integrales indefinidas, propiedades de las integrales y la respuesta encontrada a la integral misma.

En todos los casos, estos ejercicios propuestos permiten tener sensibilidad tanto a la variable, al algoritmo del MIP como al algoritmo iterativo, sin embargo, estos procesos de modelización, tratamiento y conversiones necesarias para lograrlo durante el proceso de instrucción no se implementan ni tampoco se fomentan. En algunos casos, se da por intervención de un alumno que repite la materia y que le comenta al grupo algunas razones del por qué se hace de esa manera y no de otra.

Cuando se solucionan ejercicios relacionados con integrales definidas. Como objetos primarios se toman 4 ejercicios específicos que involucran integrales definidas a las que se les debe buscar solución: $\int_{1}^{3} x^{5} e^{x^{2}}\, dx$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \sec x \tan x\, dx$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{2\theta} \operatorname{sen} 3\theta\, d\theta$; $\int_{1}^{2} \frac{\ln |x|}{x^{2}}\, dx$. Como objetos Emergentes, también se utiliza la fórmula del MIP para integrales definidas, las propiedades de las integrales y la respuesta encontrada para la integral propuesta. Se percibe que los ejercicios propuestos permiten tener sensibilidad a la variable, al algoritmo del MIP y particularmente al algoritmo iterativo, sin embargo, estos procesos de modelización, tratamiento y conversiones necesarias para logarlo, tampoco se implementan ni se fomentan. En algunos casos también se da por intervención de un alumno que repite la materia y que le comenta al grupo algunas razones del por qué se hace de esa manera y no de otra.

7.3. Valoración de las interacciones en torno a la presencia de conflictos semióticos

Conforme a los aportes del EOS, de los conflictos semióticos detectados y descritos en el Capítulo 6 para cada una de las dimensiones, se determinaron elementos que sugieren la presencia de 33 dificultades durante el desarrollo de la clase donde se implementó el MIP. Las dificultades fueron distribuidas de la siguiente forma: 5 de tipo epistémico, 7 de tipo cognitivo, 10 de tipo afectivo, 6 de tipo interaccional, 2 de tipo mediacional y 3 de tipo ecológico descritas a continuación en la tabla 20.

Tabla 20. Conflictos que se generaron durante la implementación del MIP.

Tipo de conflicto	**Dificultad que genera**
Epistémico 1 Conflicto relacionado con los componentes "lenguajes", "reglas" Se institucionaliza que "al existir una multiplicación entre sus términos, entonces el ejercicio se debe hacer por partes". Aunque ni los estudiantes ni el profesor lo detecten, el observador identifica un conflicto semiótico por la ambigüedad de la condicional, pues siempre hay al menos una multiplcación de f(x) por dx, y los estudiantes no identifican que una división indicada puede intepretarse como un producto de la función del dividendo por el recíprico del divisor.	1. Dificultad para identificar cuándo un ejercicio se debe solucionar aplicando el algoritmo del MIP. Queda latente en los estudiantes el imaginario de que si no hay un producto explicito entre funciones, el método a aplicar es diferente al MIP, o de que si lo hay, el método es necesario, cuando podría ser un caso de integral directa cuando el factor es la derivada interna. Tal es el caso de $\int \frac{sen\ x}{e^{x}}\, dx$ o el de $\int \frac{x\,e^{x}}{(x+1)^{2}}\, dx$, o el caso $\int 2x\cdot\cos(x^2)\ dx$.
Epistémico 2 Conflicto relacionado con los componentes "Argumentos", "relaciones" Se institucionaliza el algoritmo del MIP a partir de proposiciones y argumentos que no se construyen ni se demuestran, sino que se utilizan de manera implícita, casi intuitiva. Se utiliza la fórmula de la derivada de un producto de funciones y una aplicación de la primera parte del TFC arguyendo que "el proceso de anti derivar es el inverso a la derivada". El observador identifica un conflicto con los propósitos y los valores explícitos de las matemáticas superiores.	2. Dificultad para relacionar el TFC desde la comprensión e interpretación de la regla para derivar un producto de funciones, y a partir de esta, construir y demostrar el algoritmo del MIP. La dificultad se presenta cuando no se integran estos elementos de manera lógico-deductiva que permita al estudiante relacionar mediante argumentaciones matemáticas institucionalizadas la construcción del algoritmo del MIP. (Unidades de análisis [40-49])
Epistémico 3 Conflicto relacionado con los componentes "situaciones problema", "relaciones" Se institucionaliza mediante argumentos de carácter ambiguo un procedimiento para calcular integrales por el MIP que no contempla un paso esencial para seleccionar *u* y *dv;* mencionando que "u será la primera función y lo que queda será dv". El observador detecta un conflicto entre esta declaración del orden de aparición con varios ejercicios en los que el orden es el contrario.	3. Dificultad para determinar acertadamente en cuál orden elegir la función que se nombrará como *u* y cuál como *dv,* particularmente en integrales de la forma $\int_{1}^{4} \sqrt{x}\ ln\ x\ dx$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\ sec\ x\ tanx\ dx$ [349] *y en* $\int \frac{x\,e^{x}}{(x+1)^{2}}\, dx$ [630]. No se les menciona que hay un orden jerárquico para elegir *u* y por ende facilitar el cálculo de la integral. Tanto en [349] como

en [630] los estudiantes realizan selecciones de *u* en forma inadecuada conduciéndolos a errores en el proceso de solución de los ejercicios y por ende desmotivación hacia la clase.

Epistémico 4

Conflicto relacionado con los componentes “situaciones problema”, “argumentos”, “relaciones”

Queda latente la imposibilidad procedimental para encontrar la primitiva de funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales dado que al momento de explicar no se relaciona el método de sustitución simple con el MIP. No se argumentan procedimientos lógico-deductivos que permitan hacer esta inferencia. En este caso ni el profesor ni los estudiantes detectan el conflicto, por tratarse de una ausencia; pero el observador detecta un conflicto entre saberes epistémicos ya circulantes entre docentes de cálculo y su ausencia en este docente en particular, que no puede clasificarse como cognitivo y parece exigir una nueva categoría intermedia entre lo epistémico institucional y lo cognitivo del estudiante.

4. Dificultad para realizar tratamiento al argumento de funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales cuando éste no sea sencillo, tal como en $\int x\, e^{3x}\, dx$ [104], no se explicita que el argumento de la función e^{3x}; debe hacérsele un tratamiento (una sustitución, luego su derivada) para convertirlas en otra función a las que se les puede calcular la primitiva de manera inmediata. (convertirla en e^{w} donde $w = 3x$). El mismo caso sucede en [176] con el ejercicio $\int x \cos 2x\, dx$; en [251] con $\int \frac{\text{sen } 2x}{e^{x}}\, dx$ entre otros.

Conflicto relacionado con los componentes “situaciones problema”, “argumentos”, “relaciones” de tipo Lingüístico

Dificultad para reconocer y usar un lenguaje institucionalizado propio de las matemáticas. (No se reconocen los orígenes, significados y usos de nociones epistemológicas intrínsecas a conceptos matemáticos ya institucionalizados y que son usados en la clase), que le permita al estudiante acudir a cualquier texto a consultar y éste no tenga problemas para comprender lo expuesto allí. Tal es el caso del uso inadecuado de expresiones como “Euler a la equis” [unidades de análisis 33, 84, 111, etc.] para referirse a e^{x}; “el de arriba y el de abajo” [23, 257, etc.] para referirse al numerador y denominador de una expresión racional. Entre otras.

Cognitivo 1

Conflicto relacionado con los componentes “Conocimientos previos” y “aprendizaje” que le permitían al estudiante hacer tratamiento de expresiones.

Se desprende del conflicto epistémico 1. Y está relacionado con la imposibilidad de resolver integrales de la forma $\int \frac{\text{sen } x}{e^{x}}\, dx$, dado que no identifican cuál es el producto entre funciones.

5. Dificultad para identificar que el ejercicio propuesto se soluciona por el algoritmo del MIP. En situaciones como $\int \frac{\text{sen } x}{e^{x}}\, dx$ o el de $\int \frac{x\, e^{x}}{(x+1)^2}\, dx$ el estudiante presenta dificultad para identificar que debe hacer un tratamiento a la expresión dada en la integral para transformarla.

Cognitivo 2

Conflicto relacionado con los componentes “Conocimientos previos” y “aprendizaje”

Se genera este conflicto cognitivo en el alumno cuando ante el ejercicio propuesto *se* aprueba la respuesta de un estudiante ante la pregunta ¿quién será *u*? A9 responde: “*x”*, el Prof. pregunta *¿Por qué?*, los estudiantes responden porque esta de primeras.

6. Dificultad relacionada con la que genera el conflicto semiótico epistémico 3. Creer que la función que está en el registro escrito en primer lugar es la que se tomará como *u* y lo que sobra como *dv*.

Cognitivo 3

Conflicto en relación con los componentes "Conocimientos previos" y "aprendizaje"

El investigador percibe un manejo inadecuado de conceptos previos por parte de los estudiantes, lo que les conduce a no saber encontrar la anti derivada de funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas.

7. Dificultad para encontrar la anti derivada de funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas con argumentos no sencillos (compuestos). Los estudiantes creen que la integral de $\int sen\ 3x\ dx$ es $cos\ 3x + C$, dado que $\int sen\ x\ dx = cos\ x + C.$ [90-100]; o el caso de $\int ln\ (5x)\, dx = \frac{5}{5x} + C = \frac{1}{x} + C$ [349-350], o el de $\int ln\ (x+2)\, dx$ entre otras.

Cognitivo 4

Conflicto En relación a los componentes "Conocimientos previos" y "aprendizaje"

Este conflicto está íntimamente relacionado con el conflicto cognitivo 3. Se hace latente la imposibilidad de hacer tratamiento a las funciones propuestas para convertirlas en otras a las que se les puede calcular la primitiva de forma más sencilla.

8. Dificultad para hacer tratamientos que permitan transformar las funciones propuestas en otras más sencillas a las que de manera directa se les pueda calcular su primitiva. No se reconoce que ante ejercicios cómo $\int sen\ 3x\ dx$ es posible hacer el siguiente tratamiento: llamamos $w = 3x$.

Con relación a realizar conversiones, trasferencias, tratamientos y aplicar la regla del MIP.

9. Dificultad íntimamente ligada con la dificultad anterior de no realizar tratamientos. Con el ejemplo propuesto anteriormente $\int sen\ 3x\ dx$ el estudiante presenta dificultad para reconocer que si $w = 3x\ dx$ al derivar y aplicar propiedades es posible transformarlo en $\frac{dw}{3} = dx$ y luego sustituirlo en la integral que quedará convertida en: $\frac{1}{3}\int x\ sen\ w\ dw$ donde se debe hacer una trasferencia de *x* en términos de *w*, lo que equivale a tener $\frac{1}{9}\int w\ sen\ w\ dw$ que se puede calcular aplicando la regla del MIP.

Cognitivo 5

Conflicto en relación a los componentes "Conocimientos previos" y "aprendizaje"

A pesar que los estudiantes alcanzan a reconocer el tipo de integral, persiste la imposibilidad de identificar el método por el que se soluciona el ejercicio.

10. A pesar que los estudiantes diferencian si la integral propuesta en el ejercicio es indefinida o definida presentan dificultad para reconocer si el método por el que se debe solucionar es aplicando el MIP.

Con relación al aprendizaje

11. Esta forma de presentar el MIP hace que en el estudiante se presente la dificultad para relacionar el algoritmo del MIP con problemas de otros contextos científicos que necesiten utilizar integrales por este método para su solución. Como por ejemplo la física (cinemática, el trabajo de una fuerza constante o variable, la fuerza ejercida por un fluido sobre una superficie con profundidad constante o variable); Problemas relacionados con el excedente de los consumidores y los productores pertenecientes a la administración y la economía, entre otros.

Afectivo 1

Conflicto relacionado con los componentes "intereses y necesidades" , "actitudes"

Durante la institucionalización del MIP se percibe el observador percibió falta de motivación por la clase. CD2 [18-36].

12. Se percibe en los estudiantes dificultad para preguntar cuando éste tiene dudas. Esta dificultad se refleja en el temor de sentirse rechazado por el grupo. Muchos estudiantes prefieren no preguntar y quedarse con la duda o con la incertidumbre de si el trabajo por ellos adelantado quedó bien hecho o no. [25, 124, 330,575, etc.]

Afectivo 2

Conflicto relacionado con los componentes "intereses y necesidades" , "actitudes", "emociones"

Conflicto afectivo relacionado con las creencias al institucionalizar que, si existe un producto entre términos, la integral se calcula por partes. CD3 [128-129]. NO PARECE AFECTIVO sino cognitivo.

Algunos estudiantes presentan dificultad para creer que el ejercicio propuesto se soluciona por el MIP. Esta dificultad es manifiesta cuando algunos de ellos dudan que se pueda calcular el ejercicio por el MIP aun cuando su registro escrito no evidencia un producto entre funciones. Lo que conduce a la imposibilidad de ver posibles tratamientos, trasformaciones y conversiones en un ejercicio propuesto. Tal es el caso de $\int \frac{sen\ x}{e^{x}}\,dx$ o el de $\int \frac{x\,e^{x}}{(x+1)^{2}}\,dx$

Afectivo 3

Conflicto relacionado con el componente "intereses y necesidades"

Conflicto afectivo relacionado con la actitud hacia las matemáticas como algo denso, complicado y de difícil estudio. CD2 [49-61].

13. Dificultad para ver las matemáticas de una manera natural y sencilla. Esta dificultad se percibe cuando los estudiantes ven el aprendizaje de las matemáticas como algo denso, pesado y de difícil comprensión. En [50] un estudiante menciona: *"¡Profe eso es un poquito pesado!*" En [122] otro dice: "*No solo otro profe, más… ¡el proceso es enredado!*" En] 155] otro estudiante dice: "*No, profe ese ejercicio esta raro".* En [159] el profesor dice: "*No todos los ejercicios son sencillos".* En [173] se mención: *"No olviden consultar el libro por si tienen dudas".* Entre otras.

Afectivo 4

Conflicto relacionado con el componente "intereses y necesidades"

Conflicto afectivo de orden interacción docente-discentes. Durante la institucionalización los estudiantes no perciben la aplicación iterativa del algoritmo del MIP en un mismo ejercicio. CD6 [302-315].

14. Dificultad para reconocer la aplicación iterativa del algoritmo para el MIP en un ejercicio. Esta dificultad se deriva de las generadas por los obstáculos cognitivos 4 y 5 donde el estudiante no soluciona acertadamente ejercicios que requieren de conversiones y tratamientos a las integrales como algo natural del proceso.

Afectivo 5

Conflicto relacionado con el componente "intereses y necesidades"

Conflicto afectivo de orden interacción docente-discentes. Asociar el algoritmo del MIP a unas letras exclusivas (*u*, *du* y *v*, *dv*), que representan las funciones que

15. Dificultad para asociar el algoritmo del MIP con la frase que se institucionalizó en la CD2 [56] como "la regla de la vaca". Que fallaría si se cambian las letras *u*, *v*, *du* y *dv* por *f*, *g*, *df*, y *dg* respectivamente.

intervienen en la integral a solucionar. CD7 [318-326].

Afectivo 6

Conflicto relacionado con los componentes "intereses y necesidades", "actitudes" ,"emociones"

Conflicto de orden afectivo por interacción entre discentes. La no comprensión de la selección que se hace la función que se tomará como *u* así, como de los pasos y procesos ejecutados para solucionar un ejercicio. CD10 [351-380].

16. Algunos estudiantes que toman la materia por primera vez manifiestan dificultad para comprender el trabajo realizado por los compañeros que pasan al tablero (y que están repitiendo la materia), a solucionar los ejercicios. Sienten antipatía hacia el compañero. Ejemplo en CD10 [351-380] un estudiante manifiesta ¡*Pero que lo haga despacio y que nos explique!*, ¡*Es que él es repitente y por eso ya los sabe hacer, pero nosotros no*!"

Afectivo 7

Conflicto relacionado con los componentes "intereses y necesidades", "actitudes"," emociones"

Conflicto de orden afectivo por interacción entre discentes. Los estudiantes trabajaron la tarea en casa y cuando fueron a comparar las respuestas en el grupo notaron que cada uno tenía un trabajo distinto.CD12 [424-450].

De orden afectivo por interacción entre discentes, íntimamente relacionada con las dificultades generadas por los obstáculos cognitivos 4 y 5

17. Dificultad para reconocer que su compañero par, identifica funciones con argumento compuesto a las que se les debe hacer un tratamiento para convertirlas en otras más sencillas a las que se les puede calcular la primitiva directamente.
18. Dificultad para reconocer que su compañero par (el que reporte), recuerda y aplica preconceptos de cursos anteriores (manejo de prerrequisitos).

Afectivo 8

Conflicto afectivo de orden interacción docente-discentes y entre discentes. CD13 [489-550].

19. Algunos estudiantes que toman la asignatura por primera vez presentan dificultad para identificar los posibles errores que se cometen al seleccionar en forma errada la función *u* tomándola como la primera que aparece en el registro escrito. Situación que algunos compañeros que repiten la asignatura si detectan, borran, corrigen y aplican el algoritmo. Esto les genera disgusto hacia la clase, hacia sus compañeros. Lo expresan cuando al aplicar el MIP, los estudiantes que repiten la materia verifican "si le están bajando el grado a la integral que resulta". [18-29; 147-157; 164-170] por nombrar algunas.

20. En [180-192] algunos estudiantes (que toman la materia por primera vez), presentan dificultad para comprender el trabajo de sus compañeros y del profesor cuando solucionan ejercicios como $\int x \, sen \; 3x \; dx$ entremezclando ambos métodos, por nombrar alguno. Otras situaciones similares se presentan en [489], [494], [501], [542].

Interaccional 1

21. Algunos estudiantes aun repitentes, presentan dificultad para verificar si la solución obtenida por los compañeros

Conflicto relacionado por la interacción entre discentes, que se desprende del afectivo 7. En CD2 [81-90] el alumno A13 dice que la solución de es e^{3x} y el alumno A6 que el resultado de otra diferente. Sin embargo, no lo verifican.	concuerda con la que ellos han realizado como tarea. Solamente borran lo que traían o copian del tablero la nueva solución planteada sin analizarla, discutirla y revisara. [28-259; 155-158; 175-201] entre otras.
Interaccional 2 Conflicto relacionado por la interacción entre discentes. En [152-158] el alumno A12 duda de la solución que se está dando al ejercicio al notar que la integral que resultó no era "más sencilla" que la propuesta en el ejercicio.	Regularmente los procesos lógico-deductivos adelantados se hacen de manera intuitiva lo que les conduce a 22. Dificultad de creer y convencerse de la veracidad del proceso seguido conducente a una respuesta. Aquí les es necesario comprobar con la respuesta del libro, y cuando este no la tiene queda la dificultad de creer en la veracidad del proceso seguido, queda vigente.
Interaccional 3 Conflicto relacionado con la autonomía. En CD4 [148-173] A12 duda del proceso seguido por los estudiantes A6 y A9. Dado que no tiene cómo comparar las respuestas que obtienen sus compañeros con las que ofrece el libro.	23. Dificultad para creer en los resultados encontrados en el trabajo adelantado por ellos o sus compañeros, cuando el libro de texto no tiene la respuesta al ejercicio propuesto, Pues se percibe la necesidad de la aprobación del profesor. [221-223; 237-238; 304-306]
Interaccional 4 Conflicto también relacionado con la autonomía. En la CD5 [200-219] A2 cuestiona a A6 y A9 por qué han utilizado una sustitución simple para abordar la integral argumentando que: "*¿acaso todos los ejercicios de esta parte del curso no son por partes*?	24. Se percibe en algunos estudiantes dificultad para creer que al ejercicio se le deba hacer un tratamiento para convertirlo en otro más sencillo al que se le pueda aplicar el MIP. Tal es el caso en [243] donde algunos estudiantes presentan dificultad para comprender por qué el ejercicio se soluciona por partes y no por sustitución. En [255] un estudiante cuestiona si todos los ejercicios de la unidad propuesta deben ser por partes.
Interaccional 5 Conflicto también relacionado con la autonomía. En la CD6 [231-311] A9 en [272] duda si el ejercicio propuesto se realiza mediante la aplicación iterativa del algoritmo del MIP.	25. Algunos estudiantes presentan dificultad para comprender la aplicación iterativa del algoritmo en un mismo ejercicio. Les parece como algo "mágico" en [287-295] un estudiante ante el ejercicio $\int \frac{sen\ 2x}{e^{x}}dx$ cuestiona la aplicación iterativa del algoritmo por parte de un compañero que le responde en [288] *"Porque nos tocó preguntarle a otro compañero que está en otro semestre más adelante de nosotros y nos dijo que tocaba volver a integrar*"
Interaccional 6 Conflicto también relacionado con la autonomía.	

Refuerza el conflicto semiótico interaccional 5 cuando en CD7 [300] se refuerza que se debe volver aintegrar por partes, pero no argumenta por qué es necesario hacerlo. Además se dice que es necesario "pasar a restar" la integral encontrada para encontrar la respuesta.	26. Dificultad para encontrar el resultado de una integral cuando al aplicar el algoritmo del MIP la integral que resulta es la misma del ejercicio propuesto y es necesario sumar a ambos lados la misma expresión para de este modo hallar respuesta.
Mediacional 1 Conflicto relacionado con el uso de recursos materiales.	27. El guiarse por un solo libro de texto, a pesar que en la bibliografía se muestran varios, conduce a que el estudiante presente dificultad para alcanzar un significado global de la integral desde sus dimensiones (configuraciones epistémicas).
Mediacional 2 Conflicto relacionado con el uso de recursos materiales.	28. La no utilización de recursos tecnológicos hace que el estudiante presente dificultad para hacer una aproximación de la integral como un proceso de acumulación. Aspecto que sería viable si se identificaran al menos las tres configuraciones epistémicas utilizadas.
Ecológico 1 Conflicto relacionado con la adaptación al currículo	29. Dificultad para cumplir los temas propuestos en el programa conforme a los tiempos estipulado. La distribución de los temas propuestos en el programa no correspondió a los tiempos destinados para la ejecución de cada tema. Aspecto que hizo detenerse mucho tiempo en algunos temas y pasar otros de "afán" sin percatarse si los estudiantes comprendían o no los temas enseñados.
Ecológico 2 Conflicto relacionado con la Apertura hacia la innovación didáctica.	30. El desarrollo del MIP en la forma como se implementó (contexto netamente intra-matemático), hace que en el estudiante se presente la dificultad para reconocer, utilizar y aplicar en cursos posteriores los conceptos, definiciones y teoremas trabajados.
Ecológico 3 Conflicto relacionado con la Adaptación socio profesional y cultural.	31. Dificultad para cumplir el desarrollo del programa pretendido con los tiempos programados.

7.4. Valoración de normas que hicieron posible el proceso de enseñanza del MIP

El foco de atención en estas aproximaciones ha sido principalmente las interacciones entre profesor y estudiantes durante la implementación del MIP. Por una parte, se tiene que los elementos matemáticos asociados con la solución del problema, corresponden a un curso del nivel de Licenciatura en Matemáticas y se encuentran descritos en el currículo y los libros de texto propuestos en la bibliografía del curso. Por otra parte, se observa que el diseño curricular no favorece la enseñanza con base en problemas. Los cursos están concebidos en forma expositiva-ilustrativa, con tareas y actividades específicas propias de esa modalidad. Algunas de las normas de tipo epistémico, que son las que regulan los contenidos matemáticos, el tipo de situaciones adecuadas para su aprendizaje y las representaciones que se utilizan para los distintos contenidos que se infieren, en particular en la CD2, cuando se institucionaliza el MIP, son las siguientes: 1) Los ejercicios de matemáticas se hacen de determinada manera (meta-norma meta-epistémica), por ejemplo, en [35, 36, 65, 133,]. 2) En relación con las normas de tipo cognitivo, para aprender matemáticas hay que hacer muchos ejercicios (norma meta-cognitiva), por ejemplo, en [120, 434…]; y 3) De tipo mediacional. Hay que dedicar mucho tiempo a hacer ejercicios (norma mediacional), por ejemplo, en [120, 433...], situación que se presenta a lo largo de las 12 sesiones de clase observadas.

Otras normas también de tipo epistémico, cognitivo, mediacional e interaccional que regulan las interacciones y que, implícitamente, aparecen en las clases son: el profesor interviene para resolver algunas dificultades de los alumnos; existen dificultades resueltas por estudiantes que repiten la asignatura; el profesor tiene un papel determinante en el inicio, distribución y finalización de las intervenciones; y algunos alumnos participan cuando no entienden algo.

La presencia de normas, como las descritas en la matriz categorial 4 del Capítulo 6, permite inferir que se presentó interacción entre ellas. La emergencia de unas metanormas, tal como lo proponen D’Amore, Font y Godino (2007), contempla también una dimensión *meta-*

normativa de los procesos de instrucción, los autores indican que “La constitución de estas configuraciones “meta” en muchos casos emerge de procesos no explícitos, sino basados en ciertos hábitos o maneras de actuar” (p. 12). Plantean tres grandes bloques: normas *Meta-epistémicas*, *Meta-instruccionales* y *Meta-cognitivas* que han sido contemplados en el Capítulo 3. Dichas metanormas infieren acciones de tres tipos: 1) para comprender determinados temas en matemáticas se ha de esperar a los cursos superiores; 2) se deben hacer mediante ejercicios largos (por eso son bellas y difíciles); y 3) para aprender matemáticas hay que hacer muchos ejercicios. Estos tópicos muestran que en el desarrollo de la clase se creó un marco apropiado para el surgimiento de conflictos semióticos que no se resolvieron, a su vez, manifestados en los alumnos por sentimientos de rechazo, fobia, ansiedad y temor hacia el estudio de esta disciplina, ahondando más la situación de percepción de crisis en la enseñanza del cálculo integral. Así, algunos de ellos llegan a considerar a las cuestiones de las matemáticas como demasiado complejas y fuera de su alcance. Esta situación se hace evidente en CD4 [155], en CD6 [306], en CD8 [333-334], en CD10 [355-370], en CD11 [403-406], en CD12 [439-478], en CD 12 [420-437], en CD13 [499, 537] y en CD15 [630-800].

Interacción entre normas. Dimensión meta-normativa. Según D’Amore et al. (2007) el profesor quiere que los alumnos se apoyen en una configuración epistémica previa para realizar unas prácticas matemáticas de las que se obtendrá una configuración epistémica emergente. Dicha realización estará regulada por la configuración Meta-epistémica que coexiste con configuraciones epistémicas que se van sucediendo a lo largo del tiempo. Para ello, implementará una configuración instruccional que, a su vez, también estará regulada por una configuración Meta-instruccional. Por otra parte, se pretende que los alumnos personalicen las configuraciones epistémicas en configuraciones personales, las configuraciones Meta-epistémicas en Meta-cognición matemática y las configuraciones instruccionales en Meta-cognición didáctica, ver *Figura 36*.

Figura 36. Componentes de la dimensión Meta normativa. Tomado de D’Amore, Font y Godino (2007, p. 13)

Las normas meta-epistémicas son utilizadas para valorar la práctica matemática que se realiza. Se considera que las configuraciones meta-epistémicas juegan, en cierta manera, un rol axiológico en la actividad matemática. Sin embargo, siguiendo el parámetro descrito por estos autores, se percibe que esta dimensión meta-epistémica no se aborda durante las clases observadas para la implementación del MIP. Lo que, si se percibe, es la ejecución de unas “prácticas desviadas” tal como lo mencionan D’Amore, et al. (2007):

> El hecho que la instrucción se conciba como la transmisión sistemática y formalizada de conocimientos, habilidades y valores debería llevar a la realización de determinadas prácticas funcionales; dicho en la terminología del EOS, el conjunto de prácticas personales que conforman el significado personal del alumno debería ser acorde con el significado institucional implementado, el cual, a su vez, debería ser representativo del significado de referencia. Para conseguir este objetivo, se realiza un proceso de instrucción que está regulado por diferentes tipos de normas (epistémicas, cognitivas, mediacionales, afectivas, interaccionales y ecológicas). Las interpretaciones y valoraciones que hace el alumno de este tipo de normas pueden ser el origen de prácticas funcionales (que es lo que espera la institución), o bien de prácticas desviadas (no deseadas por la institución (p. 14).

El modelo educativo implementado por la Facultad implica la necesidad de una evaluación sumativa, la que desencadena automáticamente la necesidad, en una parte de los sujetos implicados, de realizar determinadas prácticas desviadas como adaptación a la sociedad-clase.

D'Amore, et al. (2007) indican que, a propósito del desvío de las prácticas, hay un momento en el cual el alumno renuncia a realizar prácticas matemáticas y empieza a realizar prácticas desviadas como medio de adaptación a un sistema en el que no se siente integrado, unidades de análisis [50, 65, 110, 122, 155, entre otras]. No obstante, el alumno procura que las prácticas desviadas puedan ser consideradas por el profesor como prácticas matemáticas, por ejemplo, en lugar de razonar, se aprenden los procedimientos de manera memorística sin comprenderlos ni contextualizarlos unidades de análisis [131,140, 158 178, entre otras]. Este aspecto es altamente visible y reiterativo en el desarrollo de las sesiones de clase observadas.

La generación de prácticas desviadas fue inducida por el propio profesor, unidades de análisis [21, 23, 33, 35, 36, 44, 48 entre otras]. Por ejemplo, el constante énfasis en las rutinas para abordar la solución de ejercicios propuestos y más en general, por las prácticas que se derivan de una interpretación no muy clara de su papel como profesor, unidades de análisis [88, 89, entre otras], cuando permite que estudiantes manifiesten que un ejercicio está mal solucionado y permite que pasen al tablero a "corregir" los errores manifestados pero parece no percibir que estos estudiantes están cometiendo más errores que los ya manifestados por los otros compañeros pares, donde la posición asumida por él es de completa pasividad, sin corregir a los unos ni a los otros.

Con respecto a las Normas Meta-instruccionales que relacionan las meta-epistémicas con las meta-cognitivas, el conjunto de prácticas ejecutado se puede descomponer en prácticas matemáticas en las que interviene el objeto matemático "la integral" y prácticas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las mismas. A su vez estos significados implementados están relacionados con otros significados entre los que podemos destacar el significado que da el profesor a las matemáticas, a lo que es aprender y lo que considera es enseñar. Lo anterior se puede encontrar en el Capítulo 5 de este trabajo. D'Amore et al. (2007) consideran que "algunos de estos significados de objetos personales didácticos se pueden considerar incluso como significados de objetos personales, meta-didáctica" (p. 15)

Desde lo observado en las sesiones de clase se puede inferir que el significado de los objetos matemáticos y didácticos del alumnado se concreta en un conjunto de prácticas, algunas de las cuales son funcionales cuando el estudiante es capaz de reconocer el tipo de integral que le es propuesto, pero muchas otras son prácticas desviadas, como las ya descritas en los párrafos anteriores. Las prácticas desviadas que pone en juego el estudiante ante una cierta situación (matemática o instruccional), y que son calificadas como desviadas desde el punto de vista de una institución de referencia, pudieron estar motivadas por meta-conocimientos del alumno, bien matemáticos (meta-cognición matemática), o bien didácticos (meta-cognición instruccional o didáctica).

De esta manera los alumnos personalizan los significados institucionales (configuraciones epistémicas y prácticas que posibilitan) en significados personales (configuraciones cognitivas y prácticas que posibilitan). También personalizan las configuraciones meta-epistémicas y las prácticas que posibilitan en forma de meta-cognición y prácticas personales que posibilitan. Finalmente, también personalizan las normas instruccionales y las prácticas instruccionales en las que han participado en forma de normas instruccionales personales y prácticas que posibilitan. Estos tres componentes constituyen el núcleo de los significados de los objetos matemático-didácticos de los alumnos, por lo que es posible inferir que dichos significados se concretaran en prácticas funcionales y en prácticas desviadas.

7.5. Valoracion de Configuraciones epistémicas y si estas permiten alcanzar el significado global de la integral

Con base en el esquema mostrado en la matriz categorial 5 del Capítulo 6, se puede observar que tratar de buscar una aproximación al significado global implementado desde la institucionalización del MIP sobre la integral, es limitado o bastante reducido. Razones expuestas en detalle en el Capítulo 8 de este trabajo.

7.6. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción

La aplicación de los criterios de idoneidad propuestos por el EOS a un proceso de enseñanza, permiten valorar desde el tipo de comportamiento hasta el tipo de discursos empleados. Es por ello, que se considera que la idoneidad didáctica del proceso de instrucción implementado y observado se valora como bajo si se considera desde la interacción de las seis dimensiones siguientes.

Valoración de la Idoneidad Epistémica. Del análisis de los registros de la clase se evidencia un trabajado únicamente con ejercicios en contexto intra matemático, ninguno de ellos puede considerarse como una situación problema. No hay situaciones que sean generadoras de problemas excepto cuando se propone buscar una regla que permita resolver las integrales que no se pueden resolver por sustitución (falta de procesos de modelización y problematización). Las actividades que se proponen no motivan los momentos en que los alumnos tengan que hacer conjeturas ni justificaciones como lo propone el PMA para este nivel, incluso cuando pudo ser posible para buscar la regla del MIP, es el profesor quien termina encontrandola y justificándola.

Por otra parte, no se justifica suficientemente cuándo hay que aplicar la regla del MIP y cuándo la sustitución. [Ej. Unidad [23], "*Este es un ejercicio que tiene forma racional, pues tiene Polinomios arriba y abajo. El de abajo es un radical polinómico. Entonces A6 recuerde que se debe mirar bien para descubrir la forma de calcular la integral. Tenga en cuenta revisar cuál es la derivada del otro. ¿Cuál sería u?*". Otras situaciones similares se pueden evidenciar en las unidades de análisis [24 al 35, 36, 45,51-52, 58, 67, 113, 28-132, 317 y 318, 323, 372 y 373 entre otras]. En este tipo de justificación, hay que resaltar la presencia de muchas ambigüedades como el uso de arriba y abajo en lugar de decir numerador y denominador, lo que está sumando pasa a restar o lo que multiplica lo pasa a dividir. En la unidad [35], "…*este ejercicio tiene una multiplicación entre sus términos, entonces el ejercicio se debe hacer por partes*".

Los procesos de simbolización que se realizan son ambiguos, por no decir incorrectos. Por ejemplo, se utiliza símbolos que no son institucionales como tachar la integral y la prima

$\cancel{\int}(u \cdot v)\cancel{'}$. Aunque se observan registros de trasformación como tratamientos, no se institucionaliza la importancia de dichos tratamientos; por otra parte, no se observan conversiones.[15] No se fomentan las conexiones entre la integración por partes y los problemas extra matemáticos donde se puede aplicar, pero tampoco se tiene mucho cuidado con las conexiones intra matemáticas. Un ejemplo de lo anterior, consiste en la justificación que se da de la igualdad en la que se basa la integración por partes y no está bien conectada con la idea de anti derivada, ya que puede sugerir al alumno que la anti derivada de una integral indefinida no es una familia de funciones, sino una única función. El proceso fundamental que se da es el la algoritmización, aunque de manera imprecisa, ya que la práctica que realizan los alumnos durante las nueve últimas sesiones resolviendo muchas integrales por partes no les lleva a tener claros los pasos del método de integración, en particular, el orden jerárquico para seleccionar la *u.*

De las 11 diferentes configuraciones epistémicas para modelizar la complejidad de la integral que se describen en Ordóñez (2011) y Crisóstomo (2012) solo se usan parcialmente tres: la configuración que llaman inversa de la derivada, la algebraica y una aproximación de la generalizada. Por otra parte, con relación a las dos primeras configuraciones mencionadas, los elementos esenciales no están bien explicados ni coherentemente organizados, por

15 Según Duval (2006), las transformaciones semióticas y la coordinación entre los registros de representación son imprescindibles en la actividad matemática. Las transformaciones pueden ser clasificadas en dos tipos: tratamientos y conversiones. La distinción entre esas dos trasformaciones de registro posibilita analizar el funcionamiento del sistema cognitivo de comprensión del sujeto. Duval (2006) destaca que es a través de la coordinación entre los registros lo que permite la adquisición de conocimientos. El autor afirma que “la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros de representación, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión” (Duval, 2006, p.113).

ejemplo, el procedimiento del MIP, se olvida un paso fundamental que es la jerarquía para la selección de *u* y el TFC se expresa de forma ambigua, se les presenta como la inversa de la derivada, unidad [45]. No hay una muestra representativa de los tipos de problemas en donde es indicado aplicar el MIP, incluso el tipo de problemas donde se debe aplicar dos veces el mismo método no les hace observar que hay una familia de problemas que se resuelven por integración repetida del algoritmo. La tabla 21 evidencia con *x* esta falta de representatividad de los problemas propuestos ya que la clase se reduce a ejercicios del tipo marcado con ***X***.

Tipo de ejercicios	I.T.	Log.	Alg.	Trig.	Exp.
Inversas de trigonométricas (IT)		*x*		*x*	
Logarítmicas (Log)	*x*		*x*	*x*	
Algebraicas (Alg)	*x*	**X**		**X**	**X**
Trigonométricas (Trig)		*x*	**X**		**X**
Exponenciales (Exp)	*x*	*x*	**X**	**X**	

Tabla 21. Situaciones problema propuestos durante el proceso de instrucción del MIP.

No se presentan ejercicios que involucren los productos de funciones inversas o de trigonométricas por logarítmicas. La falta de procesos relevantes, en particular de modelación y de justificación, la falta de representatividad de significados parciales (solo la configuración inversa de la derivada y algebraica) y la falta de variedad de problemas donde se aplica el MIP, llevan a considerar que estas clases tienen una baja idoneidad epistémica. De acuerdo con Font y Godino (2006), consideramos que las matemáticas implementadas en estas clases se pueden considerar como unas matemáticas mecanicistas, lo que es una degeneración de las formalistas. La configuración epistémica de esta clase termina siendo una distorsión mecanicista de una formalista, ya que aparecen algunos aspectos poco deseables de este último tipo de configuraciones (descontextualización y falta de procesos de abstracción) y desaparecen los aspectos más deseables (precisión, coherencia lógica). De ahí que las matemáticas implementadas presentan las siguientes características:

- Se propone una lista de ejercicios del texto guía para realizarlos en forma mecánica, de manera descontextualizada.
- Se realizan presentaciones poco precisas, de carácter ambiguo del contenido matemático que se enseña y no se percibe una organización lógico-deductiva de manera coherente que conduzca a los resultados presentados.
- No se contemplan las conversiones entre diferentes formas de representación.
- Se sigue un modelo de clase magistral.
- La argumentación es casi inexistente. Se abandonan las demostraciones y no son sustituidas por justificaciones de tipo inductivo, grafico, visual, abductivo etc., como lo propone el PMA para este nivel.
- Se manipulan símbolos, sin dotarles de significación.
- No se emplean situaciones de referencia que le den sentido a las matemáticas enseñadas, ya que se presentan unas matemáticas centradas sobre ellas mismas y muy alejadas de las otras ciencias.
- La presentación de contenidos contemplados en el programa no se hace desde elementos que podrían ser abordados a través de las situaciones propuestas.
- La utilización de lenguaje verbal es de carácter no técnico, alejado del vocabulario reconocido por las matemáticas.
- La institucionalización de conceptos, definiciones teoremas, propiedades y algoritmos se dan de manera intuitiva. No se realizan demostraciones de ninguno de ellos.

Valoración de la Idoneidad Cognitiva. La baja idoneidad epistémica que presenta la clase ayuda a que los contenidos enseñados estén a una distancia razonable de lo que saben los alumnos. El registro de clase pone en evidencia que los alumnos tienen un manejo adecuado de la operatoria aritmética, un mediano manejo de la operatoria algebraica y un requisito básico para iniciar el estudio del Cálculo Integral si se piensa como aritmética generalizada que conforma a lo planteado por Turégano (1998, p. 3): "la mayor parte de las expresiones y manipulaciones algebraicas pueden ser explicadas a partir de las expresiones y manipulaciones aritméticas". Así, se observa que resuelven integrales correctamente, pero sólo adquieren un conocimiento instrumental que les permite hallar una solución sin saber por qué se resuelven de esta manera y no de otra. De ahí que es posible determinar que se perciben los siguientes aspectos.

- La construcción del algoritmo del MIP, el uso de teoremas, de conceptos y procesos básicos de este nivel de instrucción en forma poco precisa que conlleva a la presencia de dificultades en los estudiantes para aplicar adecuadamente el Cálculo Integral.
- El uso de conocimientos previos se hace de manera inadecuada. Muchas veces se da por entendido que los estudiantes manejan conceptos previos al tema que se desarrolla cuando en realidad no es así.
- La incorporación relativa a los conocimientos previos en la construcción de nuevos aprendizajes se da parcialmente.
- De acuerdo a lo planteado en Faerna (2006), el desarrollo de las clases se da de manera mecánica, los estudiantes de forma repetitiva solucionan integrales propuestas, no se perciben adaptaciones curriculares a las diferencias individuales de los alumnos, a los

ritmos de aprendizaje, tampoco estrategias ni metodológicas ni didácticas que permitan poner en consideración de los alumnos un sistema de ayudas donde ellos practiquen lo aprendido.

Por estas razones manifiestas y por la falta de datos sobre el logro cognitivo y el cambio conceptual en los estudiantes (tema no objeto de este trabajo), se puede considerar que el proceso de instrucción tuvo una a baja Idoneidad Cognitiva.

Valoración de la Idoneidad interactiva. La clase presenta objetivos instruccionales claros y observables, pero la enseñanza se realiza por imitación, asociación y por refuerzos/castigos. En consecuencia, el aprendizaje se produce por observación de lo que hace un experto, mientras que el estudiante es receptor del proceso y sigue instrucciones. Los momentos de institucionalización del conocimiento matemático no son producto de fases de discusión sobre los aspectos críticos del proceso de aprendizaje. Así, la topogénesis del conocimiento y la construcción misma del saber se encuentra del lado del profesor, quien privilegia unas experiencias educativas en detrimento de otras (Pochulu y Font, (2010). Los patrones de interacción, la manera de resolver los conflictos y la presencia de metanormas del tipo los ejercicios de matemáticas se hacen de determinada manera. Esto puede encaminar a que los alumnos piensen que existe sólo un algoritmo apropiado que garantiza la respuesta.. Por otra parte, el análisis de las trayectorias e interacciones didácticas nos orienta a situar esta clase en el tipo magistral interactivo. Lo que nos permite afirmar, de acuerdo a lo planteado por Godino, Font, Wilhelmi, y Castro (2009), que la clase es magistral porque se otorga autoridad al profesor, considerado experto que se sitúa en un estatus superior al del destinatario, permitiendo que gestione su discurso y que imponga unas normas aceptadas por los estudiantes.

Es interactiva porque se acepta la incorporación de otras voces en el discurso, aunque participa un grupo reducido de jóvenes estudiantes, pero prevalece una interacción mono lógica entre docente y discentes, ya que están presentes preguntas cerradas y específicas del profesor, que requieren de la respuesta convergente y fáctica de los alumnos. A su vez, se aceptan como válidas las respuestas, en la medida que coincidan con el discurso previamente diseñado. De lo anterior, es posible determinar que se perciben los siguientes aspectos.

- Escasa interacción docente-discente a nivel individualizado. No se identifican conflictos cognitivos en la interacción intra-equipos, interacción docente-discente e interacción entre discentes y autonomía.
- Se percibe prevalencia de procesos instruccionales expositivos, en su mayoría de veces por parte del profesor.
- El plan de formación no responde a ninguno de los indicadores propuestos en la malla curricular emitida por el Departamento de Matemáticas. Solo se enuncia de manera general la realización de clases expositivas con talleres, pero sin describir ninguna de estas actividades.
- En cuanto a la interacción entre discentes, la incorporación de los talleres propuestos que fueron considerados en el plan de formación, supone un trabajo de equipo, pero no se explicita.
- En relación con la autonomía, no está contemplada en el plan de formación, siendo un criterio orientador para desarrollar más ampliamente las clases expositivas y de talleres.

- El uso de diversas técnicas evaluativas como pruebas escritas, tareas de aplicación o resolución de problemas es imperceptible. Únicamente se evalúa con el examen.

La situación descrita nos lleva a considerar que el proceso de instrucción es de baja idoneidad interaccional.

Valoración de la Idoneidad mediacional. El número de alumnos, 20 en total, y su distribución en el aula permite llevar a cabo el proceso instruccional adecuadamente. No obstante, durante la clase se percibe ausencia de uso de materiales manipulativos e informáticos que permitan introducir situaciones, lenguajes, procedimientos o argumentaciones adaptadas al significado institucional de referencia. Sólo se plantea la temática con el empleo de un lenguaje simbólico sin apoyo en modelos concretos o visualizaciones, por lo tanto, las definiciones y propiedades emergen descontextualizadas. Prácticamente todo el tiempo invertido en la sesión de la clase se circunscribe a la enseñanza de una técnica particular de resolución de integrales por el método designado.

Por otra parte, las representaciones son relativas a un sistema particular de signos y pueden ser convertidas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico. No obstante, toman significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza que de acuerdo a lo planteado en Turégano (1998) y particularmente en Crisóstomo (2012) permitirían comprender que:

> Las dificultades de aprendizaje radican en la complejidad de las nociones de Cálculo y en el lenguaje que se utiliza (Tall, 1991; Artigue, 1991, 2003; Thompson y Silverman, 2007); el proceso de estudio debe iniciarse a partir de los problemas del entorno cotidiano del estudiante, lo que puede ser llevado a cabo a partir del desarrollo de proyectos de enseñanza (Ribeiro, 2010; Figuereido, Mello y Santos , 2011);

> necesidades de más tiempo para profundizar en el aprendizaje de los conceptos y propiedades el Cálculo en los estudiantes (Rutheven, 2007, Lois y Milevicich, 2009); la transición entre las distintas representaciones como clave para el aprendizaje de las nociones del Cálculo (Tall, 1991, González-Martin, 2004; Rosken y Rolka, 2006; Camacho, Depool y Garbin, 2008); implicar a los estudiantes en un proceso activo de estudio del Cálculo y la importancia de conocer los estilos de aprendizaje de los estudiantes como vía de adecuar el proceso de estudio del Cálculo a sus características (Frota, 2009), (Crisóstomo, 2012, p. 445).

El análisis de los objetos, procesos y trayectorias epistémicas de la clase, nos indica que durante el proceso de instrucción pareciera hacerse caso omiso a la necesidad de construir un nuevo lenguaje para poder integrar el aprendizaje del Cálculo Integral a los dominios cognitivos de los alumnos. En este sentido, pareciera que se adopta la posición antagónica que describe Filloy (1999) bajo el modelo sintáctico-viético, cuando propone a los alumnos partir del nivel sintáctico y enseñar sus reglas para aplicarlas más tarde en la resolución de ecuaciones y problemas. Lo anteriormente dicho nos lleva a considerar que el proceso de instrucción es de baja idoneidad mediacional. De esta valoración se concluyen los siguientes aspectos.

- No se considera ningún tipo de software de simulación, esto supondrá una dificultad especial para algunos estudiantes no familiarizados con dichas herramientas.
- La cantidad de alumnos del curso permite hacer un seguimiento individualizado del progreso de los aprendizajes. Aspecto que no es considerado durante el proceso de instrucción observado.
- El plan de formación implementado para la clase no incluye orientaciones didácticas sobre la incorporación apropiada de materiales y recursos.

- El horario programado para las clases está planeado en las mañanas, de manera que se puede inferir que los alumnos no llegan cansados mentalmente por saturación de trabajo de otras asignaturas de la malla curricular propia de la licenciatura.
- En cuanto al tiempo de enseñanza y aprendizaje, el plan de formación cuenta con un tiempo apropiado para la enseñanza. El curso tiene una duración de carácter semestral y se realizan a través de dos sesiones semanales de 90 minutos cada una. No se observa la presencia de otros indicadores.

Valoración de la Idoneidad afectiva. Se percibe ausencia de situaciones que permitan calificar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional. También se perciben procesos de personalización, pues, aunque los estudiantes se involucran inicialmente en la actividad, comienzan a perder interés, en varios momentos de la clase y dejan de sentir interesante lo que se les propone, ya que se desorganizan al sentir que se pierden en el proceso a seguir para solucionar el ejercicio. Lo que sucede, es pasar al tablero a otros estudiantes a solucionar la situación planteada, hecho que desmotiva a otros alumnos que no se involucran a la clase.

La presencia de normas y metanormas, como las descritas en el numeral 7.4 de este capítulo, dan un marco apropiado para el surgimiento de conflictos semióticos que no se resuelven, aumentando la percepción de crisis en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del Cálculo Integral, manifestados en los alumnos por sentimientos de rechazo, fobia, ansiedad y temor hacia el estudio de esta disciplina. A continuación, definimos las características principales de esta faceta.

- La falta de compromiso personal de algunos estudiantes para asumir la responsabilidad de su estudio, lo cual demandará una atención especial por parte del profesor formador.
- Con respecto a los intereses y necesidades de la clase, durante el proceso de instrucción no hace referencia al carácter motivacional de los problemas. A pesar que el programa ofrecido por la facultad contempla e incentiva el uso de situaciones reales y de aplicaciones al ámbito profesional, estas no se fomentan en el desarrollo de la clase.
- En cuanto a las actitudes, no se hace referencia de manera explícita a ninguno de los indicadores de esta componente (perseverancia, trabajo sistemático, disponibilidad para el trabajo de equipo, uso crítico de la información y argumentación en situaciones de igualdad) como aspectos orientadores del quehacer del formador en este ámbito.
- En cuanto a las emociones, en el plan de formación implementado durante las clases observadas se percibe ausencia de orientaciones relacionadas con promover la confianza en el estudiante, la seguridad en sí mismo para resolver problemas, tareas matemáticas y resaltar las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

En consecuencia, el proceso de instrucción muestra una idoneidad afectiva baja.

Valoración de la Idoneidad ecológica. Si bien, la Facultad de Ciencia y Tecnología a la que está adscrita la Licenciatura en Matemáticas establece lineamientos generales, es claro que el proceso de instrucción analizado no sigue las directrices curriculares. Una presentación del Cálculo Integral basada en la sola ejecución de las reglas de transformación y de términos a través de ejemplos desarticulados, impide que se incorporen relaciones con otros contenidos intra e interdisciplinares, además, suele fomentar en los alumnos una concepción de las matemáticas como algo perfecto y acabado que consiste en memorizar y aplicar un conjunto de reglas.

En síntesis, el proceso de instrucción es de baja idoneidad ecológica. En la *Figura 37* suponemos el hexágono regular rojo como la idealización de la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción de buena calidad (se consiguen de manera conjunta todas las idoneidades), mientras que el azul refleja la idoneidad de la clase observada.

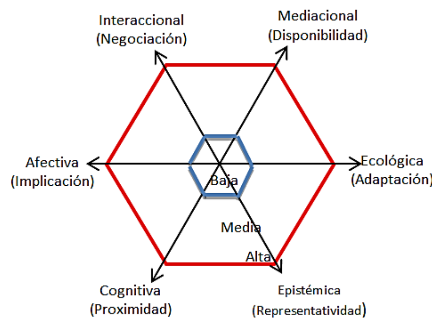


Figura 37. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción. Fuente: Adaptación al modelo presentado en Robles, Castillo, Font, 2012

Capítulo 8. Conclusiones, limitaciones del estudio, perspectivas y recomendaciones hacia el futuro

En este Capítulo encontramos las conclusiones respecto a las preguntas de investigación, los supuestos preliminares y los objetivos específicos. Se plantearon algunas consideraciones finales, limitaciones y perspectivas, algunas sugerencias y recomendaciones. Para las recomendaciones consideramos pertinente presentarlas desde tres puntos de vista: con respecto al proceso de instrucción, otras de corte netamente didáctico y otras para ser consideradas en futuras investigaciones.

8.1. Conclusiones respecto a las preguntas de investigación

Con relación a la primera pregunta, conforme a los aportes del EOS y desde los conflictos semióticos detectados y descritos en el Capítulo 6, se sugieren elementos de 33 dificultades: 5 de tipo epistémico, 7 de tipo cognitivo, 10 de tipo afectivo, 6 de tipo interaccional, 2 de tipo mediacional y 3 de tipo ecológico generadas durante el desarrollo de las sesiones de clase donde se implementó el MIP, descritas en la tabla 20.

Con relación a determinar las causas de la presencia de estas dificultades, Godino y Batanero (1994) manifiestan que, si las prácticas son realizadas por una persona, son llamadas *prácticas matemáticas personales*, y si son promovidas por una institución o realizadas en el seno de la misma, se les llama *prácticas matemáticas institucionales.* Dado que en una institución educativa se espera que después del proceso de instrucción, los sistemas de prácticas personales de los estudiantes correspondan a los sistemas de prácticas institucionales; se encontró que los estudiantes realizan durante la resolución de determinados tipos de problemas, sistemas de prácticas aisladas que no se asemejan a las establecidas en dicha institución.

Los estudiantes realizan la práctica personal de resolver integrales por el MIP como un proceso que se convirtió en mecánico, repetitivo, que si consideramos los aspectos del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permiten resolver una situación problema -por ejemplo, calcular una integral- encontramos que esas prácticas personales fomentan el uso de lenguajes verbales y simbólicos, que se caracterizaron por ser ambiguos y generadores de conflictos semióticos en los estudiantes como los descritos en el Capítulo 7. Estos lenguajes fueron la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervinieron en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones realizadas eran satisfactorias (unidades de análisis 50 a 79; 192 a 210, entre otras).

El análisis detallado de dichas prácticas mostró que se pusieron en juego procesos contemplados en el EOS como los propuestos en Font, Planas y Godino (2010), quienes indican que esencialmente se realizó un proceso de *institucionalización*[16] (del MIP) y el proceso de *algoritmización* (mecanización) de dicho método. Por otra parte, se realizaron procesos de tratamiento de expresiones simbólicas que nunca fueron justificadas como lo plantea el PMA para este nivel de instrucción. Se institucionalizaron desde un lenguaje intuitivo y ambiguo tanto verbal como escrito.

---

[16] Proceso que no coincide con la TSD, especialmente con la postura de Margolinas (1993).

Al discriminar los objetos y procesos presentes en la práctica de las 15 CD halladas, se pueden identificar aspectos que con otro tipo de herramientas no se muestran tan claramente. Detallamos, a continuación, algunos de ellos: El tema central de los problemas que se presentaron pertenece estrictamente a un contexto intra matemático[17] y por tanto, no se fomentan procesos de modelización. Se presentaron notaciones que no son reconocidas institucionalmente en el ámbito matemático y por tanto ambiguas para algunos estudiantes, por ejemplo $\int (u \cdot v)'$, que no alcanzan a comprender el porqué de dicha argumentación; o bien, cuando el profesor se refiere a la función "*Euler a la tres equis"* para referirse a la expresión $f(x) = e^{3x}$. Es ambigua dado que el estudiante al escuchar dicha expresión y al querer consultarla en los libros de texto o en la web, bajo ese nombre, podrá encontrarse bien sea con la fórmula de Euler o la relación de Euler. Teorema que establece: $e^{ix} = cos\ x + i\ sen\ x$ en el que para todo número real *x*, que representa un ángulo en el plano complejo. Aquí, *e* es la base del logaritmo natural, *i* es la unidad imaginaria, y $cos\ x,\ sen\ x$ son funciones trigonométricas. Elementos bien diferentes a la función que se quería presentar. Hubo ausencia de argumentos de tipo matemático lógico-ductivo propios del PMA que permitieron al estudiante concluir el por qué se llegó a determinada expresión; las explicaciones que se dieron se limitaron a ejemplificaciones del procedimiento a seguir. Las propiedades y procedimientos relevantes del tema, en este caso, los relacionados con el MIP o el TFC, se presentaron de manera confusa, sin justificaciones, ni construcciones lógico deductivas que permitieran concluirlas.

17 Un contexto intra matemático es aquel en el que la tarea específica a realizar se refiere solamente a objetos matemáticos como estructuras o símbolos, mientras que un contexto extra matemático incluye elementos externos que influyen en la interpretación y solución (Godino, 2012).

Con respecto a la persistencia de las dificultades descritas, se observa que no hubo criterios claros para identificar el método por el cual se debe resolver la integral. Se institucionalizó que, si hay un producto entre funciones y una función no es la derivada de la otra, entonces el método a aplicar es el MIP. Lo anterior puede conducir a los estudiantes a conflictos como los enumerados en el Capítulo 6, donde ellos necesitaron la intervención del profesor para hacer un tratamiento a la integral $\int \frac{sen\ 2x}{e^{x}}\,dx$ ante la imposibilidad de identificar que en el registro presentado hay un producto entre funciones y de ahí poder aplicar el algoritmo del MIP. De esta forma el estudiante no interpreta que la expresión $\frac{1}{e^{x}}$ multiplica a $sen\ 2x\ dx.$ Tampoco identifica que es posible hacer una tratamiento a la expresión $\int \frac{sen\ 2x}{e^{x}}\,dx$ aplicando la propiedad $\frac{1}{a^{n}} = a^{-n}, \forall\ a \in \Re$, con $a \neq 0, n \neq 0$ para convertirla en $\int e^{-x}\ sen\ 2x\ dx$. Esta situación se repite en la CD10 ante el ejercicio $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\ sec\ x\ tan\ x\ dx$ y más profundo aún en la CD15 con el ejercicio $\int \frac{x\ e^{x}}{(x+1)^{2}}\,dx$

Este tipo de prácticas ambiguas y poco precisas fomenta la no comprensión de los significados de la integral (Configuraciones Epistémicas), propuestos en la malla curricular sobre todo en los procesos que intervienen en la realización de las prácticas implementadas durante la instrucción y también en los que emergen de ellas. De ahí que, se observó que la clase privilegió una algoritmización o mecanización del algoritmo del MIP en forma descontextualizada, al punto que no se institucionaliza la iteratividad de dicho algoritmo en un mismo ejercicio. De igual forma sucede cuando se institucionaliza de manera imprecisa la forma de seleccionar a *u* y *dv*. Este tipo de selección inútil lleva a los alumnos a presentar conflictos de tipo cognitivo, interaccional, motivacional y ecológico como los descritos en el Capítulo 7.

Desde lo planteado por el EOS el significado que un sujeto (persona o institución) da a un objeto matemático, se da desde lo que el sujeto puede hacer con el objeto y decir sobre este. Como el significado se define en términos de las prácticas matemáticas, encontramos que las fuentes que nos pueden proporcionar información sobre las prácticas matemáticas implementadas son los tipos de problemas y los significados que se quiere promover en los estudiantes de esta institución. Esto se refleja en la triada: programa de estudios propuesto para la asignatura, la bibliografía sugerida en este y el profesor que imparte el curso, aspectos que poco concuerdan entre lo pretendido con lo realmente implementado. La institucionalización no se redujo a lo que está en el programa, la bibliografía y otros documentos curriculares, sino que cabe la posibilidad que haya una posición intermedia en cada profesor que imparta la asignatura. La descripción detallada de estos aspectos se encuentra en los Capítulos 6 y 7 de este trabajo.

Ahora bien, analizando el programa de estudios, algunos de los tipos de problemas que se mencionan son problemas referentes a fenómenos físicos, geométricos, económicos y de la ingeniería. En particular, problemas para calcular área de regiones planas, volúmenes de sólidos mediante los métodos de rebanado de discos y de arandelas, longitud de arco de la gráfica de una función, centro de masa de una barra, centro de masa de una lámina, centroides de una región plana, área de una superficie de revolución y algunos problemas con aplicación a la economía y a la biología, entre otros. Como se puede ver, la malla curricular y el programa contemplan la incorporación de situaciones de carácter tanto intra como extra matemáticos que no fueron abordadas en el desarrollo de las clases. Sin embargo, nos encontramos con la presentación de escasas situaciones de tipo netamente intra matemático donde el estudiante no alcanza a extender el concepto del MIP a situaciones más complejas, también de nivel intra como extra matemático que lo necesiten para su solución.

En lo que respecta a las prácticas que se desea promover entre los estudiantes, los lineamientos propuestos por el Departamento de Matemáticas proponen algunas de las que se señalan a continuación: explicar el concepto de integral; modelar problemas físicos, económicos, biológicos, geométricos y de la ingeniería; usar los conceptos y técnicas del Cálculo Integral para resolver estos problemas contemplando la incorporación de mínimo 9 de las 11 configuraciones epistémicas relacionadas en la matriz categorial 5 del Capítulo 7 de este trabajo. Sin embargo, como se mostró en dicha matriz, durante la institucionalización del MIP, únicamente tres se institucionalizan parcialmente (Intuitiva, Algebraica, Generalizada).

Desde lo planteado en Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010), podemos inferir que también se ha puesto de manifiesto la falta del significado global “de acumulación” propio de la integral, que dota de significado a la relación derivada-integral. Consideramos, en definitiva, que el significado institucionalizado es incompleto, generador de muchas dificultades, como las descritas en el Capítulo 7, que no se superan durante el proceso observado. Cabe aclarar que, si la universidad fomenta una enseñanza de tipo netamente formal, tampoco dotará de significado a la noción de integral. Esta situación cerraría las posibilidades didácticas, metodológicas que un profesor quisiera implementar. Se infiere que, si un profesor mantiene un proceso de enseñanza bajo unas directrices como las aquí mostradas, hará que estas 33 dificultades descritas persistan, tal vez aumenten, manteniendo firme la percepción de crisis en la enseñanza del Cálculo Integral.

Con respecto a la segunda pregunta relacionada con la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción, hicimos un análisis de las principales prácticas matemáticas que se implementaron para resolver los ejercicios propuestos. Además, describimos los elementos más relevantes de las configuraciones de objetos y procesos que se pusieron en juego en la solución esperada a cada situación. El reconocimiento de tales objetos y procesos para las distintas situaciones-problema usadas es necesario para gestionar las interacciones en el aula y decidir posibles institucionalizaciones de los conocimientos puestos en juego. Así mismo, la confrontación de este análisis con las investigaciones previas y la propia experiencia docente permitió prever potenciales conflictos de significado que han sido tenidos en cuenta al momento de valorar dicha idoneidad descrita en los apartados 8.4 y 8.5 de este capítulo.

Se realizó un análisis Ontosemiótico *a priori* que puso de manifiesto las diferentes configuraciones epistémicas que forman el significado de referencia del objeto “la integral”, y la trama de funciones semióticas que se debían activar para relacionar entre sí los elementos de las configuraciones y las configuraciones entre ellas como se menciona en Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010), Crisóstomo (2012), Ordóñez (2011), Robles, Telechea y Font (2014); elementos que permitieron operacionalizar la información en las matrices categoriales. Se pudo observar en la transcripción que las configuraciones didácticas implementadas y descritas en el Capítulo 6 no han tenido en cuenta dicha complejidad. El análisis *a posteriori* nos permitió decir que la estructura y funcionamiento de este tipo de clases no repara en la complejidad ontosemiótica asociada a las integrales, lo cual es una de las causas que se produzcan el tipo de dificultades identificadas y descritas en el Capítulo 7.

La aplicación de los criterios de idoneidad a un proceso de enseñanza concreto la hemos entendido como la metodología que permite encausar la valoración y posible mejora de dicho proceso. La aplicación de estos criterios permitió extraer conclusiones sobre qué aspectos del proceso de instrucción fueren factibles de mejorar en el futuro, aspectos resaltados más adelante.

Pudimos concluir que el primer momento de encuentro de los estudiantes con la integral se dio al inicio del curso, cuando se institucionalizaron las integrales como la anti derivada o como la primitiva de una función. Allí se orientó de manera intuitiva a los estudiantes a distinguir cuándo una integral era indefinida y cuándo era definida (diferencia establecida a partir del registro escrito); este trabajo se hizo según una configuración didáctica magistral, sin ningún tipo de motivación previa a que el estudiante consulte el tema a tratar. No se percibió justificación de la necesidad de la nueva noción, que podría haberse hecho utilizando una contextualización histórica que le dote de sentido y significado al objeto a enseñar. Esta situación se repitió al momento de institucionalizar el MIP, algo muy similar a lo observado ya en Ordóñez (2011) para este nivel educativo quien centró exclusivamente su estudio de la integral definida, lo que nos permite ratificar para nuestro caso lo que estos autores llamaron un "estancamiento" de la noción de integral.

Es probable que ante esta desconexión el estudiante no sea capaz de entender la integral definida como un área, identificar cuándo esta es impropia, diferenciarla de la integral indefinida para así poder dotarla de significado. Lo que se encontró fue la institucionalización de un método de cálculo que se aplicará según determinadas pistas lingüísticas que ofrezca la situación propuesta; proceso mecánico, rutinario y de poco significado para el estudiante. Por otra parte, aunque el estudiante era capaz de identificar el tipo de integral -definida o indefinida- por el registro escrito, el desarrollo estuvo centrado en los procedimientos de cálculo de forma casi exclusiva, concretamente en el cálculo de la primitiva, como se muestra en la matriz categorial 2 del Capítulo 7. Aspectos que fueron reforzados desde los ejercicios propuestos que se clasificaron en dos grupos (integrales definidas, integrales indefinidas); encontrándose procesos de cálculo netamente algorítmicos donde la distribución de configuraciones, en dichos ejercicios, fue limitada, restringida, favoreciendo la desconexión tanto intra como extra matemática del concepto de integral contario a lo que propone el PMA para este nivel de estudio.

Durante las 12 sesiones de clase observadas, se encontró que los estudiantes no alcanzaron a diferenciar que calcular la primitiva de una integral indefinida genera una familia de funciones, caso distinto al calcular la primitiva de una integral definida que representa un número. Los resultados encontrados al calcular ambos tipos de primitivas los veían al mismo nivel. Lo que nos permite inferir que los estudiantes solo identificaron la integral con el cálculo de primitivas; la integral definida con la aplicación de la regla de Barrow, no interpretándola como un área sino con un sentido puramente algebraico; ratificando lo mencionado en Ordóñez (2011):

> El comienzo de los problemas cabe situarlo, evidentemente, en el mismo orden de exposición de los temas relativos al cálculo integral y en la insistencia que en ellos se hace de ese modo. Si al alumno se le adiestra, (…), en el cálculo de primitivas que, además, encabeza el estudio del cálculo integral, no podemos pretender que, después, por dedicar una escasa atención (si es que llega a hacerse) al concepto de integral y a sus aplicaciones, las cosas queden en su sitio (p. 69).
>
> El énfasis en estos aspectos algebraicos puede ser más cómodo para el profesor porque, por ejemplo, siempre es más sencillo evaluar esas cuestiones de cálculo que evaluar los aspectos conceptuales (p. 71).

Como se mencionó anteriormente, se desconoce la integral como proceso de acumulación, lo que posteriormente hará carecer de sentido las aplicaciones donde sea necesario este significado. Esta ausencia provoca una dificultad ya señalada por Tall (1991), citado en Labraña (2000), quien puso de manifiesto que los estudiantes son incapaces de reconocer la integral en situaciones donde no aparece explícitamente pasando por alto la dificultad de entender la variación de una función cuando no depende del tiempo como señala Schneider (1991). Además, consideramos que toma sentido lo manifestado por Ferrini-Mundy y Guardard (1992), citado en Ordóñez (2011) y Rasslan y Tall (2002), quienes consideran que los procedimientos mecánicos para solucionar una integral son incluso perjudiciales para los desarrollos posteriores. Así, la mayoría de los estudiantes sólo reconoce como aplicación de la integral definida las asociaciones con un área bajo la curva (Berry y Nyman (2003); y

Camacho, Depool y Garbín (2008)), pero no reconoce contexto alguno para la integral indefinida. Cabe resaltar en este apartado que Turégano (1998) señaló que la acumulación choca de frente con los modelos actuales de instrucción si estos solo ponen el acento en aspectos mecánicos y no conceptuales.

Se hizo una definición formal desde la integral definida, que pretende un formalismo ajeno al alumno y que dudosamente el estudiante llegará a comprender por sí mismo, como afirma Wenzelburger (1993), quien considera que la enseñanza formal para estos primeros momentos de contacto con la integral definida no es adecuada por lo que deja bajo la responsabilidad del estudiante su gestión y da por superadas las numerosas dificultades que expusimos en el Capítulo 7.

También consideramos ausente el significado de la integral como proceso inverso de la derivada pues, aunque se expone el Teorema Fundamental del Cálculo, este no se trabaja más que como una herramienta que permite justificar el algoritmo del MIP, olvidando la construcción lógico-deductiva que debió hacerse conforme a lo planteado por el PMA, como un nuevo método de resolución de un modelo de ejercicios que necesitan de esta regla para su solución. Esta ausencia hace que, aunque los estudiantes conocen la reciprocidad derivada-integral, esta no es explicitada como tal (Labraña, 2000; Carlson, Persson y Smith, 2003; Ordóñez, 2011).

Si observamos los lenguajes en las 15 CD se utilizó de forma casi exclusiva una mezcla de lenguaje natural con el algebraico. El lenguaje geométrico no se utilizó para dibujar la gráfica de las funciones propuestas en las integrales definidas y poder visualizar el recinto de la región acotada a la que se trataría de calcularle el área, aspecto que hubiera podido ayudar al estudiante a diferenciar el tipo de primitiva que calculaba. Compartimos lo propuesto en Ordóñez (2011) manifestando que esto le hubiera podido ayudar a comprender al estudiante que la integral definida es un área, pero se basó en cálculos netamente aritméticos y no en una visualización geométrica. Bajo este panorama, no le será fácil a un estudiante de este grupo explicar por qué una integral puede ser negativa o nula si visualmente su área pareciera no ser cero. Dado que las áreas euclidianas nunca son negativas ni nulas, situación relacionada con el problema de la visualización geométrica.

Es importante señalar que solo hubo tres situaciones que se resolvieron por dos métodos diferentes en un mismo ejercicio; es decir, para su solución fue necesario utilizar dos métodos de integración simultáneos donde prima el MIP, sin embargo, en la ejecución de estos ejercicios no hubo cambios de lenguaje, ni se produjo una articulación de sentidos cuando se establece una función semiótica entre dos sentidos diferentes de un mismo objeto matemático primario (Rojas, 2012). No se hicieron tratamientos ni conversiones que permitan al estudiante identificar la simultaneidad de estos dos métodos. Para el estudiante, éstos quedan aislados unos de otros y no podrán establecer la necesaria coordinación.

Finalmente, destacamos que el análisis didáctico aplicado en este trabajo, al igual que como se afirma en Font, Planas y Godino (2010), semeja una radiografía, que penetró en la estructura interna de la clase resaltando aspectos y matices, que, si bien pueden parecer obvios después de haber sido encontrados, se hallan ocultos ante una mirada general y prematuramente valorativa de esta práctica matemática.

8.2. Conclusiones respecto a los supuestos preliminares

El análisis didáctico realizado permitió concluir que la secuencia de clases analizada se puede considerar como una degeneración del tipo de secuencia didáctica que llamamos “formal”. Hemos mostrado además cómo un análisis minucioso, apoyado en las herramientas didácticas que provee el EOS, precisa e ilustra con detalles la estructura y funcionamiento de una clase de matemáticas que se puede considerar como una degeneración mecanicista de una clase formal[18] ya que en el desarrollo de la misma se utilizan en forma parcial características propias del paradigma formal-mecanicista[19].

Con relación al primer supuesto: el análisis detallado, que debido a las dificultades de los conceptos y de su operacionalización metodológica, los centraremos exclusivamente en las herramientas que nos provee el EOS, permitió identificar elementos que sugieren la presencia de 33 dificultades a lo largo de las 12 sesiones de clase observadas, descritas en la tabla 20 del

---

18 Entre ellas: supone que todo sistema social está organizado en niveles estructurados en formas jerárquicas a través de relaciones de poder unidireccionales que para este caso recaen en el profesor. Existe un abordaje prescriptivo de la realidad organizacional mediante la aplicación de reglas y normas que regulan su funcionamiento (aplicación reiterativa de algoritmos en forma descontextualizada para el estudiante). Se presenta constantemente un estímulo-respuesta para explicar conductas individuales y organizacionales (presentación de algoritmos como algo dado, que no es necesario construir, deducir de dónde o cómo se llega a esa construcción universalmente ya reconocida y aceptada). Considerar tomar solo lo observable como objeto de estudio de la organización (Blanco, 1992).

19 Musso (1993) citando a Kuhn (1963) en su libro *La Estructura de las Revoluciones Cientificas* describe la génesis de la palabra Paradigma proveniente del griego «παράδειγμα»-"parádigma" que está relacionada con la triada modelo, tipo, ejemplo. Menciona que paradima es un resultado de los usos y contumbres, de creencias establecidas, de verdades a medias. El paradigma se basa en hechos que se dan por aceptados.

Capítulo 7 que se volvieron reiterativas y no se superaron. Las más relevantes se describen a continuación:

1. Dificultad para reconocer cuándo se debe aplicar el MIP para solucionar integrales.
2. Dificultad para determinar el orden jerárquico para elegir cuál función se nombrará como *u* y cuál como *dv*, conduciendo a los estudiantes a considerar que siempre debe tomarse como *u* la función que está en el registro escrito de primero en la integral y llevándolos a cometer errores que no se superan a lo largo de las sesiones de clase observadas.
3. Dificultad para hacer transformaciones del tipo tratamientos, conversiones, trasferencias y aplicar la regla del MIP. Aspectos que si se consideraran permitirían superar la segunda dificultad mencionada en el párrafo anterior.
4. Dificultad para reconocer que es posible aplicar el algoritmo del MIP en forma iterativa en un mismo ejercicio.
5. Dificultad para relacionar el MIP en la solución de problemas pertenecientes a otros contextos científicos como la física, la biología y la economía, por nombrar algunos; lo anterior porque en la clase se limita a desarrollar únicamente algunos ejercicios propuestos en el libro de texto de la bibliografía muchas veces excluyendo los problemas propuestos en contexto. Todos estos ejercicios se centran en un contexto únicamente intra matemático.
6. Dificultad relacionada con la actitud hacia las matemáticas Como algo denso, complicado y de difícil estudio, que en lugar de ayudar a superar el sentimiento de

crisis en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de esta asignatura lo que hace es ahondarlo.

Con relación al supuesto 2: hemos aplicado un modelo que permite realizar un análisis didáctico sistemático para la descripción, explicación y valoración de episodios de clases de matemáticas. La descripción de la sesión de clase es el resultado de una metodología de recolección de datos que ha consistido en aplicar los constructos del marco teórico adoptado. Dicho marco nos sirvió de guía sobre lo que había que observar y cómo se debía observar, además nos proporcionó las herramientas para realizar la observación. Hemos mostrado que la estructura y funcionamiento de la clase podríamos valorarlos como una degeneración mecanicista de una clase formal, dado que el mecanismo causal fue su estructura y funcionamiento; lo que permite visualizar que la gestión de conflictos generados al interior de la misma fue escasa dado que el abordaje que se dio a las situaciones problema, al lenguaje utilizado, a los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos definidos, se hicieron de manera intuitiva, no lógicamente argumentada ni demostrada, generando interacciones confusas que desembocaron en los conflictos mencionados en el Capítulo 7 que desencadenaron en las dificultades descritas en el mismo capítulo.

Con relación al supuesto 3: la aplicación de los criterios de idoneidad propuestos por el EOS permitió extraer valoraciones que nos llevaron a concluir una baja idoneidad didáctica, elementos que han sido detallados en el apartado 8.3.4 de este Capítulo y desde ellos concluir sobre cuáles aspectos son susceptibles de mejorar en futuras implementaciones.

8.3. Conclusiones respecto a los objetivos específicos

Con relación al primer objetivo específico. Se consideraron y adaptaron los niveles de análisis propuestos por el EOS (Cap. 3, sección 3.2.1), cada uno según el momento del proceso de instrucción que se estaba considerando. Para dicho análisis cada nivel tuvo un peso diferente. Los dos primeros fueron fundamentales en el análisis tanto del diseño curricular como de la planificación del proceso de instrucción manifestada por el profesor en la entrevista (descritos en los Capítulo 4 al 6). El tercero y cuarto nivel fueron particularmente útiles en el estudio de la implementación realizada en la clase. El quinto nivel fue tenido en cuenta en la fase de valoración de los procesos de instrucción implementados que nos permitió mostrar la valoración del grado de idoneidad didáctica alcanzado (descrito en el Capítulo 7).

Con relación al segundo objetivo específico. De acuerdo con los elementos de análisis ofrecidos por el EOS, conforme a las trascripciones, observaciones y la información arrojada por las fichas de observación, se identificó que el tipo de objetos utilizados para realizar el conjunto de prácticas actuativas y discursivas, las primeras de lectura e interpretación de situaciones problema propuestas, las segundas de reflexión y comunicación de las prácticas actuativas, fue útil para inferir el modelo de clase implementado, que se caracterizó por estar centrado en desarrollar un cierto tipo de problemas reconocidos dentro del Cálculo Integral, ejecutados por un interlocutor experto, así como problemas para comunicar soluciones, describir y argumentar métodos y procedimientos.

El análisis de este tipo de objetos y prácticas ejecutadas nos permitió realizar un análisis de las trayectorias e interacciones didácticas seguidas mientras se implementaba el MIP. Para el efecto se consideró lo propuesto en Godino et al. (2006), utilizando como criterio el tipo de interacción, la descripción de cuatro tipos teóricos de configuraciones: *magistral*, *a-didáctica*, *personal* y *dialógica*. Las configuraciones reales que acontecieron durante las sesiones de clase observadas están en una interacción próxima a ellas. Veamos la siguiente descripción que soporta lo dicho.

La configuración teórica magistral se evidenció claramente ya que el desarrollo de la clase estuvo basado en la manera tradicional de enseñar matemáticas con exposición, seguida de ejercicios sobre los contenidos presentados. Una variante entre los tipos anteriores se dio cuando el profesor se encargó de la formulación y validación del MIP, mientras que los alumnos se responsabilizaron de la exploración del tipo de ejercicios propuestos. El desarrollo de algunos momentos de la clase se aproxima tangencialmente a la configuración teórica a-didáctica, si se considera el desempeño de algunos estudiantes (repitentes), no así con los estudiantes que ven el curso por primera vez.

Una variante entre los tipos anteriores ya descritos se dio cuando el profesor se encargó de la formulación y validación del algoritmo del MIP, mientras que los alumnos se responsabilizaron de la exploración. Situación que en varias ocasiones fue compartida por tres estudiantes que repiten la asignatura y presentan un desempeño mayor en el tema con respecto al de sus compañeros de clase. Dicha institucionalización tuvo lugar mediante un diálogo entre el profesor y los alumnos, quienes tuvieron ocasión de asumir las tareas propuestas, familiarizarse con ellas y posiblemente de esbozar alguna técnica de solución. En situaciones de este caso, se habla de *configuración teórica dialógica* (Godino et al., 2006).

Otro tipo teórico de CD que predominó en algunos momentos de la clase fue el estudio personal, denominada *configuración didáctica personal* (Godino et al., 2006). Surgió cuando los estudiantes resolvieron actividades como tarea para la casa, resolvieron la situación sin intervención directa del docente, algunos de ellos incluían el libro de texto como guía. La situación no fue tan notoria dado que la mayoría de los estudiantes hacía su trabajo, pero la inseguridad en la solución correcta del mismo les frenaba el proceso de aprendizaje. Esto fue evidente cuando muchos de ellos no sabían si el trabajo adelantado era correcto o no, ya que el ejercicio propuesto no tenía respuesta en el libro de texto, CD1 [33], CD6 [289], CD9 [343], CD10 [380], CD12 [466], CD13 [493] y CD15 [626]. En varias ocasiones, el profesor remitía al estudiante a mirar el texto guía, a profundizar los contenidos estudiándolos de forma autónoma en el libro de texto, CD3 [123], CD6 [285,310], CD8 [340], CD9 [349], CD10 [353-354], CD11 [398] y CD13 [490].

Este modelo de enseñanza deja a los alumnos la responsabilidad de dar sentido a los objetos matemáticos que se introducen a través de los ejemplos y ejercicios que se van mostrando. Como expresan Godino et al. (2006) se estaría tratando de una decisión topo-genética: "…primero yo, el profesor, te doy las reglas generales, después tú las aplicas" (p. 31).

Aunque el registro de la sesión muestra un constante diálogo entre el profesor y los estudiantes, nos permite situar la clase en una configuración dialógica, un análisis más detallado revela que las interacciones se circunscriben a que los estudiantes asuman las tareas, se familiaricen con ellas y se esboce la técnica de resolución de integrales por el MIP. Por dichos motivos, las configuraciones didácticas de toda la secuencia de clases se han considerado del tipo *magistral* o bien de configuración didáctica *personal*.

Con relación al tercer objetivo específico. Se logró identificar a partir de los conflictos semióticos detectados elementos que generaron 33 dificultades ya mencionadas anteriormente y que están descritas en el Capítulo 7, que fueron clasificadas de la siguiente forma: 5 de tipo epistémico, 7 de tipo cognitivo, 10 de tipo afectivo, 6 de tipo interaccional, 2 de tipo mediacional, 3 de tipo ecológico.

Con relación al cuarto objetivo específico. Se pudo valorar el grado de idoneidad didáctica, desde el tipo de comportamiento y el tipo de discurso empleado, con una componente baja; valoración soportada por las razones expuestas en los Capítulos 6, 7 y resumida en la Figura 36 del Capítulo 7.

8.4. Consideraciones finales

La adaptación hecha a los diferentes niveles de análisis planteados por el EOS permitió diferenciar aspectos involucrados en el conglomerado que conforma una clase de matemáticas tales como: situaciones problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, interacciones, conflictos, normas y meta normas, así como establecer relaciones entre dichas partes. Esto conduce a percibir, en términos de D'Amore et al. (2007) la ejecución de unas "Prácticas desviadas" que desde el modelo educativo implementado por la Facultad con una evaluación sumativa, desencadena automáticamente la necesidad, en una parte de los sujetos implicados, a realizar determinadas prácticas desviadas como adaptación a la sociedad-clase, dado que son prácticas que subvierten algunas de las metanormas funcionales que condicionan el proceso de instrucción.

D'Amore et al. (2007) indican que, a propósito del desvío de las prácticas, "hay un momento en el cual el alumno renuncia a realizar prácticas matemáticas y empieza a realizar prácticas desviadas como medio de adaptación a un sistema en el que no se siente integrado" (p. 15). Desde lo observado en las sesiones de clase, se puede inferir que el significado de los objetos matemáticos, se concreta en un conjunto de prácticas, algunas de las cuales fueron eficaces, pero muchas otras fueron prácticas desviadas.

En cuanto al significado global de la integral implementado, consideramos que es necesario considerar la estructura de la malla curricular y el programa establecido por el Departamento de Matemáticas, el cual está organizado de tal manera que busca integrar la componente histórico-epistemológica en la evolución y construcción del concepto de integral (configuraciones epistémicas).

Se observó una aplicación parcial de tres configuraciones epistémicas (intuitiva, algebraica y generalizada), descritas en la matriz categorial 5 del Capítulo 6 para institucionalizar el MIP como método para calcular integrales. Lo que evidencia que se desconoce que las configuraciones epistémicas geométrica, de resultado de un proceso de cambio, de aproximación al límite, sumatoria, aproximada, permiten al alumno observar cómo se trabajan todas las entidades primarias, cómo se relacionan entre ellas y cómo se puede construir un concepto de integral cercano al de acumulación. En las 3 configuraciones utilizadas primó una mezcla entre lenguaje natural y algebraico con un discurso aproximado al lenguaje numérico. No se fomentó el paso de uno a otro, ni el uso de programas de cálculo simbólico o de calculadoras gráficas que permitiría dicha aproximación.

En cuanto a las configuraciones epistémicas no involucradas, consideramos que esto sucede porque no se involucran situaciones problema donde se trabajen todas las entidades primarias de manera tal que las utilicen. De todo esto, se infiere que se realiza la definición de integral exclusiva para funciones positivas y continuas, se deja en manos del alumno determinar cuándo una integral sea impropia o cuándo sea negativa, a pesar de haber identificado la integral definida con un área al inicio del curso, de igual forma, se deja al alumno cuándo determinar que el área sea cero, aunque en la gráfica pueda haber una región de área no nula.

Con respecto a la identificación de prácticas matemáticas, objetos y procesos matemáticos, se enfatiza en direccionar a los alumnos, a que realicen la práctica de resolver integrales particulares por este método de integración. Si consideramos los aspectos del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permiten resolver una situación problema -por ejemplo, calcular una integral- vemos el uso de lenguajes verbales y simbólicos poco reconocidos matemáticamente. Se olvida que estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones realizadas son satisfactorias. Sin embargo, entendemos que los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos.

Por tanto, podemos inferir un significado implementado para el objeto matemático “la integral” de forma parcial. De modo general, basados en lo propuesto en Font et al., (2010), el análisis indica que esencialmente se realiza un proceso de *institucionalización* del MIP y el proceso de *algoritmización* (mecanización) de dicho método, donde el professor asumió un rol expositivo, los estudiantes un rol pasivo y no lograron posicionarse frente a la clase ni frente a las ideas de la clase razones por las cuales podemos inferir que la enseñanza fue de tipo magistral.

Se puede percibir, que en las prácticas mencionadas en el párrafo anterior se involucra una serie de objetos como función, derivada de un producto de funciones, anti derivada, primitiva, el TFC y el algoritmo del MIP, además, propiedades sobre estos como $\int ax^n \, dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$, la integral de una constante por una función es la constante por la integral de la función, notada como $\int kf = k\int f$, y la integral de una resta de funciones es la resta de la integrales, notada como $\int_a^b (u - v) = \int_a^b u - \int_a^b v$ entre otras. Otros objetos corresponden a procedimientos previos como la derivación de funciones algebraicas, logarítmicas, exponenciales y de funciones trigonométricas, el algoritmo del MIP, el seguido para calcular una integral definida e indefinida, evaluación de una integral definida (regla de Barrow) o emergentes como la aplicación del método de integración por partes y evaluación de una integral definida. Por otra parte, hay que resaltar que al trabajar este tipo de ejercicios se realizaron algunos procesos de tratamiento de expresiones simbólicas, por parte de los mismos estudiantes.

Consideramos que unas prácticas específicas repetidas se vuelven objetos cuando se encapsulan en un nuevo constructo, que es todo lo contrario de emerger, pues más bien quedan sumergidas en el nuevo objeto, y otras prácticas, por más que se repitan, pueden seguir siendo siempre procesos sin volverse objetos ni por emergencia ni por sumergencia. Aquí, la función semiótica no es una función matemática sino una relación que suele tener divergencias en cada punto de salida u objeto inicial y convergencias en cada punto de llegada u objeto final. En segundo lugar, no solo no generaliza la noción de representación sino que la reduce solo a las funciones representacionales, sin caer en la cuenta de que la noción usada en todas las ciencias cognitivas incluye la representación de objetos unitarios y de objetos sistémicos, la representación de operadores como instrumentos para actuar sobre objeto unitarios o sistémicos, la representación de relatores como conexiones estáticas entre objetos unitarios o sistémicos, entre las cuales apenas se menciona aquí la relación de ser componente de un sistema, que no es lo mismo que ser elemento de un conjunto, ni tampoco lo mismo que ser un subconjunto de un conjunto, ni mucho menos lo mismo que la infinidad de relaciones binarias, ternarias, cuaternarias, etc. de cualquier objeto con otro, de cualquier operador con otros operadores u objetos, y la de cualquier relator con otros relatores, operadores u objetos.

En general, podemos decir que, al desarrollar este tipo de sistemas de prácticas matemáticas dentro de una institución, ligadas a la solución de un solo tipo de ejercicios que involucran integrales definidas e indefinidas, no se precisa de un lenguaje especial: términos técnicos, símbolos, cuantificadores, gráficas, expresiones algebraicas, etc., elementos que fueron usados de forma intuitiva, de igual forma sucedió con las definiciones de objetos matemáticos, proposiciones sobre estos, procedimientos y argumentos que justifican y validan las acciones, pero que nunca fueron demostrados, ni soportados con argumentos bajo deducciones lógico matemáticas como lo propone el PMA. A pesar de estas características descritas, durante la realización de dichas prácticas se crea un nuevo lenguaje, se establecen nuevas definiciones, se hacen nuevas proposiciones, se construyen nuevos procedimientos y se usan nuevos argumentos, es decir, se construyeron *entes* matemáticos que modifican o complementan a los ya existentes. A estos entes matemáticos los podemos clasificar en los siguientes seis tipos.

- *Situaciones*, entendidas como problemas matemáticos (los propuestos son de carácter limitado), problemas extra matemáticos (o aplicaciones) inexistentes en el desarrollo de las clases observadas, ejercicios específicos (cálculo de integrales definidas e indefinidas) y situaciones problémicas (ausentes, no se dan problemas contextualizados que necesiten para su solución involucrar la construcción y cálculo de integrales).
- *Lenguaje*, que se presenta en diversas formas: verbal, numérico, analítico (Godino et al., 2007), entendido como la notación matemática de las integrales, sus propiedades, expresiones algebraicas, funciones. Todos ellos presentadas y utilizadas de forma imprecisa con una ausencia total del lenguaje gráfico.
- *Procedimientos* como algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.
- *Proposiciones*[20] entendidas como enunciados de forma intuitiva sobre conceptos como teoremas, corolarios, propiedades, etc., nunca demostrados.

[20] Consideramos que estos enunciados tambien son otra forma de “lenguaje” que nos lleva a señalar una ambiguedad y una superposición en los planteamientos actuales del EOS.

- *Argumentos*[21] o enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, todos ellos de forma heurística.
- *Conceptos* como aproximaciones expresadas por medio de *definiciones o descripciones*.

Aquí percibimos dos confusiones que pueden estar dándose en el EOS: la primera relacionada entre los lenguajes como registros productores de representaciones semióticas y los objetos lingüísticos que se observan en las prácticas, actividades y tareas matemáticas. La segunda que "proposiciones" y "argumentos" no son paralelas a "lenguajes" como lo propone el esquema denominado "configuración ontosemiótica" sino que son dos subcategorías de "lenguajes", pero faltan los índices, los íconos (términos, predicados y operadores) que las definan.

Se promovió una excesiva rutinización del MIP sin considerar el significado global de la integral, los errores en los procesos seguidos son debidos a conflictos semióticos relacionados con el mal uso y en otros casos la mala aplicación de propiedades, pues cada una de las propiedades falsas que se usó muestra un conflicto semiótico que tampoco se abordó y éste genera otro y allí queda latente una dificultad. De ahí que este tipo de errores se pueden clasificar como de cálculo numérico.

Los 5 conflictos semióticos de tipo epistémico identificados están asociados al uso de proposiciones falsas como la identificada en las unidades de análisis [33-36] cuando se dice que "*al existir una multiplicación entre sus términos, entonces el ejercicio se debe hacer por*

---

[21] Asumimos una posición similar a la ya planteada para "*Proposiciones*".

partes”. En este caso, hacemos notar que hay discordancia con el significado implementado institucional global de la integral propuesto en la malla curricular.

Los 7 conflictos semióticos de tipo cognitivo están asociados a los del tipo epistémico dado que el proceso de instrucción usó métodos algebraicos, donde el lenguaje analítico y el geométrico tienen un papel totalmente secundario o nulo. Apenas hubo situaciones que se resuelven involucrando los dos métodos de integración aprendidos. No hay una conexión con ideas previas, principalmente con la noción de área. La formalización con que se realiza la introducción y definición de la integral utilizando la Configuración Epistémica de aproximación al límite, no la consideramos adecuada para este nivel, debido a su gran complejidad ontosemiótica, compartiendo la posición mostrada en Contreras y Ordóñez (2006).

Los 10 conflictos semióticos de tipo afectivo están asociados a las escasas situaciones de motivación y de aplicación a la vida cotidiana o a otras ciencias de los contenidos que se están aprendiendo. A ello se une el tipo de enseñanza en la que, según los apuntes analizados, el estudiante tiene un papel totalmente pasivo y la responsabilidad recae sobre el profesor.

Los 6 conflictos semióticos de tipo interaccional están asociados a la falta de motivación y credibilidad a los procesos institucionalizados y que carecen de una formalización en el sentido de la demostración, propia del PMA, a la que los estudiantes vienen acostumbrados en las clases de cálculo de los dos semestres anteriores.

Los 2 conflictos semióticos de tipo mediacional están asociados a los desarrollos rutinarios de tipo algebraico olvidando el uso de otro tipo de recursos. Los 3 conflictos semióticos de tipo ecológico están asociados a la ausencia de la noción de acumulación. El alumno no relaciona la integral con dicho proceso, hay un conflicto entre los contenidos pretendidos y los implementados.

Bajo estas consideraciones, podemos afirmar que existe una baja idoneidad didáctica en el proceso de instrucción observado. Dado que, se busca una formalización ajena para los estudiantes, más aún cuando se hace un desarrollo teórico, sin proponer situaciones para trabajarla. El tipo de situaciones propuestas se reduce a la relación de la integral como una anti derivada o una primitiva trabajada desde las distinciones entre una integral indefinida de una definida. Nos parece de gran importancia el hecho de que no se consideren los conflictos semióticos potenciales y que las propiedades se expongan pero no se argumenten. Este aspecto conduce a que se presenten las dificultades descritas y que estas no se superen durante el proceso. Lo anterior nos vuelve a ratificar la falta de idoneidad epistémica en el proceso de instrucción observado, permitiendo que las otras 5 facetas (idoneidades) que ayudan a evaluar la idoneidad didáctica, tengan desempeños similares al epistémico.

Con respecto a las características cognitivas y afectivas manifestadas por el profesor en relación a la enseñanza del Cálculo Integral, se observa que hay contenidos relacionados con el tema que le son difíciles de trasmitir al grupo de estudiantes, lo cual estaría afectando los intereses, actitudes y emociones del propio profesor hacia el cálculo. En efecto, tanto los profesores en ejercicio como en formación manifiestan inseguridad respecto al dominio de ciertos contenidos propios del cálculo infinitesimal y una percepción del Cálculo Integral como una disciplina difícil y formal.

El incurrir en errores no debidos a conflictos semióticos de la integral, es incurrir en errores de Cálculo Integral, entendiendo por ello errores al aplicar las reglas de integración y de cálculo numérico, tanto para integrales definidas como indefinidas, esto conducirá a los estudiantes a no distinguir cuándo se debe colocar “más la constante C” y cuándo evaluar en los límites de la integral. Otros errores de este tipo están relacionados con el no recordar la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas, logarítmicas, o exponenciales, aspecto que dificultad el cálculo de la primitiva o anti derivada de este tipo de funciones.

En cuanto al conocimiento didáctico del profesor sobre aspectos cognitivos y afectivos para enseñar Cálculo Integral a nivel superior, si bien hay elementos que son reconocidos y valorados por él (como la importancia de los conocimientos previos en la construcción de nuevos aprendizajes), hay otros que se manifiestan débiles como: dificultad para identificar posibles estrategias de los estudiantes de este nivel escolar al resolver problemas de tipo intra y extra matemático cuya solución involucra contenidos propios del Cálculo Integral. Consideramos que faltan estudios que permitan profundizar en los aspectos cognitivos y afectivos que se deberían tener en cuenta en dicha formación.

Se observó que la formación didáctica del profesor es mínima, pues él mismo reconoce que su formación fue netamente disciplinaria (matemática pura). Para él, enseñar Cálculo Integral presenta desafíos importantes respecto a las dimensiones interaccional-mediacional, en efecto, los resultados de las investigaciones dan cuenta que los profesores (en ejercicio y en formación) no se encuentran lo suficientemente preparados para planificar e implementar situaciones de enseñanza centradas en resolución de problemas que favorezcan modos eficaces de interacción entre estudiantes, entre los estudiantes y el profesor. Menciona que hizo una especialización en docencia universitaria en la que esperaba le enseñaran estrategias metodológicas y didácticas que le favorecieran su ejercicio profesional, pero que en la práctica observada no es así.

Si afinamos el microscopio que nos aporta el EOS, a la observación adelantada, vemos dificultades y tensiones que no producen conflicto abierto. Sin embargo, encontramos un nivel intermedio entre el saber epistémico institucionalizado y el saber cognitivo personalizado por cada estudiante, que con las herramientas actuales del EOS, no sabemos cómo llamarlo, dado que no están precisados, pues es cognitivo en el maestro, pero él cree que es epistémico, y así lo hace aparecer ante sus alumnos, considerando "de buena fe" que debe institucionalizarlo. Tal es el caso como el profesor institucionaliza la instrucción de usar el MIP siempre que vean un producto de funciones antes del diferencial "*dx*", con lo cual oculta los casos en los que el producto es precisamente entre la función y su derivada interna, que darían casos fáciles de integración directa con una sustitución simple. De ahí que identificamos conflictos como conductas descriptivas en el aula de clase que se observa, cuando el saber personal cognitivo del estudiante choca con el saber institucional epistémico que el profesor representa, lo que nos permite inferir un conflicto o dificultad entre el discurso que desarrolla el profesor y lo que es el saber epistémico que el observador cree que debería presentar el docente como representante de lo institucional; en otras palabras, lo que el profesor trata de institucionalizar con recomendaciones, instrucciones, ejemplos, evaluaciones y lo que el observador cree que debería haber institucionalizado, pues no es lo que el observador considera epistémico. Lo que nos permite inferir que los obstáculos epistemológicos, semióticos y didácticos que no producen conflicto, así como el caso de la tensión entre lo que es personal-cognitivo del profesor respecto al saber epistémico institucional no están contemplados en el EOS.

8.5. Limitaciones

Para aproximarnos a este tipo de análisis, entre los instrumentos diseñados están unas fichas de observación de la clase (inicialmente 7), con sus respectivos indicadores relacionadas en el Capítulo 6, donde se consideraron criterios de evaluación de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción desde las 6 dimensiones propuestas por el EOS, fue necesario crear descriptores para cada indicador que permitieran llegar a tener una aproximación válida que conlleve a una valoración de la idoneidad de cada dimensión. En lo observado durante las dos primeras sesiones de clase se encontró una limitación en el uso de las fichas creadas. Se notó que había interacción entre dimensiones que no se habían contemplado en las 7 fichas, de ahí que fue necesario diseñar tres fichas nuevas, cada una con sus respectivos indicadores y descriptores, donde se contemplara la interacción de las dimensiones Epistémica-Ecológica, Epistémica-Cognitiva, Epistémica-Interaccional, Epistémica-Mediacional (ficha 8), Cognitiva-Interaccional, Afectiva-Interaccional (Ficha 9), Afectiva-Mediacional y Interaccional-Mediacional (Ficha 10). Así mismo, requerimos determinar los criterios para valorar la interacción entre las seis dimensiones de la idoneidad didáctica observada en el proceso, sin embargo, se encontró que en algunos momentos del desarrollo de la clase interactuaban 3 o 4 facetas de forma simultánea, aspectos que quedan por considerar en una próxima investigación.

La entrevista semiestructurada que se le aplicó al profesor observado se utilizó como herramienta para el análisis de los significados personales que él poseía. En la elaboración de los cuestionarios se tuvieron en cuenta las aportaciones de diferentes trabajos de investigación que habían planteado cuestionarios a profesores de un nivel educativo similar al nuestro sobre la integral definida, en concreto, Labraña (2000) y Turégano (1993) y el trabajo realizado por Wenzelburger (1993) en el que se tratan cuestiones de acumulación y que consideramos debían estar presentes en nuestro estudio. La limitación se presentó al momento de hacer el pilotaje del instrumento dado a que, este tipo de investigaciones centra su interés en el objeto integral definida y nosotros lo debíamos ajustar al proceso de enseñanza de un método para calcular integrales, otra dificultad percibida se relacionó con los significados institucionales de referencia (malla curricular-programa con los institucionalizados por el profesor), pues cabía la posibilidad que estos no concordaran. Para ello corregimos y analizamos el cuestionario desde los aportes ofrecidos por la línea del conocimiento del profesor de matemáticas para este nivel académico. Con ello construimos el cuestionario definitivo que nos sirvió para determinar de forma general el significado personal del profesor que quedó relacionado en el Capítulo 6.

Hacer explicaciones ambiguas e imprecisas durante el proceso de instrucción como las aquí observadas sugiere la presencia de errores como los cometidos por los alumnos al solucionar ejercicios como los propuestos durante las sesiones de clase, lo que desencadena en la presencia de conflictos semióticos similares a los observados y descritos en este trabajo, convirtiéndose de esta manera en dificultades para los alumnos. De igual manera sucederá si se hace uso de proposiciones erradas como: 1). *"no considerar las condiciones de existencia de la integral para poder aplicar las reglas de cálculo"*, que puede deberse al uso reiterado y exclusivo en las prácticas, no explícito en la mayoría de los casos, de funciones continuas y acotadas en la línea de lo expuesto por Labraña (2001) quien llega a considerar las condiciones de integralidad como un obstáculo didáctico; 2). "*Considerar que si existe un producto entre funciones no similares la integral se resuelve por el MIP*"; 3) *"Reducir el TFC a la regla de Barrow"* debido a que sólo aplican una serie de pasos aprendidos como método algorítmico pero carente de verdadera significación. El modelo de argumentaciones aquí presente fue de tipo retórico por parte de algunos estudiantes.

Otra situación similar se dio cuando calculaban ejercicios que involucran integrales definidas (CD9, CD10, CD12, CD14). Mencionaban, por ejemplo, "la integral definida nos proporciona el área", que corresponde a aquellos estudiantes que no diferencian entre integral y área, podemos considerar que tienen una imagen operativa (Turégano, 1993), pues la integral es el área y no hay que tener en cuenta el signo. Otro ejemplo nos dice "basta tomar el valor absoluto para obtener el área", corresponde a aquellos estudiantes que, a pesar de tener una imagen operativa, la integral es un área y consideran que siempre debe ser positiva. La idea geométrica de área es muy importante y prevalece el que debe ser positiva. Son estudiantes que reflejan una confusión total entre integral y área. Tendrán problemas con la interpretación de integrales definidas negativas y puede ser un obstáculo para los problemas de modelización. Por su parte no tiene sentido para estos estudiantes, pues carecen de la noción de acumulación, lo cual conlleva a que necesariamente tendrán problemas en la interpretación de áreas nulas. Aspectos identificados a pesar que nuestro estudio no estaba centrado en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

8.6. Sugerencias

Con respecto a la idoneidad didáctica del proceso de instrucción, consideramos que es posible establecer procesos de mejoramiento para las clases si se consideran los aspectos mencionados a continuación.

Con relación a la idoneidad epistémica, se refiere a que las matemáticas enseñadas sean unas "buenas matemáticas". Para ello, además de tomar como referencia el currículo prescrito, se le sugiere tomar como referencia las matemáticas institucionales que se han transpuesto en el currículo y la forma como ellas se han de institucionalizar. Consideramos que el nivel de esta faceta se puede incrementar si se presenta a los alumnos una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.), procurando el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, analítico...), traducciones y conversiones entre los mismos, procurando así, que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo al que se está dirigiendo. Se asegura que se presenten los enunciados y procedimientos básicos del tema y adecúe, asimismo, las explicaciones, comprobaciones y demostraciones acordes al nivel superior propios del PMA.

Se sugiere a futuros cursos de didáctica para profesores en formación inicial y en servicio considerar que cuando se hace referencia a procesos cognitivos implicados en el PMA, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que se destaca el proceso de abstracción. Según Dreyfus (1989, citado por Azcárate, 1996), en el PMA se entiende que “el proceso de abstracción se da mediante la sustitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente humana, donde se hace evidente que definir, analizar y formalizar, adquieren mayor importancia en los cursos superiores” (p. 12), como lo es el Cálculo Integral, según el cual, dicho proceso consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos organizados en la mente del estudiante. Asimismo, Azcárate y Camacho (2003) ponen de manifiesto que por la naturaleza de este tipo de pensamiento avanzado, posee unos procesos característicos, entre los que se destacan el nivel de abstracción, la formalización del conocimiento, la representación, la definición de los conceptos y la demostración. Hacer este desglose de procesos puede apoyar la elaboración del listado inicial de objetos y procesos que se recomienda considerar al momento de planear la clase (fase-preactiva), al momento de aplicar en el desarrollo de la misma (fase-activa) y en lo posible evaluar su incidencia en la ejecución (fase post-activa), estableciendo relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado; aspectos que al considerarse elevarían el grado de idoneidad epistémica del proceso de instrucción.

Por otra parte, para la idoneidad cognitiva es posible incrementar el nivel si se verifica, que los alumnos tengan los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema a tratar y que los contenidos que se pretende enseñar se puedan alcanzar (tienen una dificultad manejable); se incluya actividades de ampliación y de refuerzo realizando una evaluación formativa que asegure que los estudaintes se han apropiado de los contenidos enseñados y que los pueden aplicar en contextos tanto intra como extra matemáticos.

Para la idoneidad interaccional consideramos que el nivel de esta faceta es posible incrementarse si se hace una presentación adecuada del tema a tratar (presentación clara y bien organizada, buena dicción, uso correcto de lenguaje técnico especializado de las matemáticas, adecuado uso del tablero, énfasis suficiente en los conceptos clave del tema que se enseña).

Con respecto a la idoneidad mediacional podría incrementarse si para el desarrollo de la clase se utiliza diversidad de materiales manipulativos e informáticos, procurando que las definiciones y propiedades sean contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos en lo posible con visualizaciones, además, procurando invertir el tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema y en aquellos contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Con relacion a la idoneidad emocional. Puede incrementarse si se hace una selección de tareas de interés para los alumnos, promoviendo la valoración de la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional, promoviendo la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad en los estudiantes hacia el aprendizaje del Cálculo Integral. Sobre la idoneidad ecológica consideramos que puede incrementarse si se verifica que los contenidos enseñados se corresponden con las directrices curriculares, asegurando que dichos contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.

En estas situaciones será importante tener mucho cuidado al seleccionar una amplia gama de funciones e intervalos, esto es, funciones positivas, negativas, con parte positiva y negativa, continua, con un conjunto finitos de puntos de discontinuidad de salto finito. Será interesante que se proponga funciones no integrables para enfrentar a los estudiantes con esta condición y que vean la necesidad de reconocer si una función verifica las condiciones o no antes de integrarla. De esta manera también se podrán trabajar las propiedades de la integral.

Una vez trabajada la función de acumulación desde el registro numérico, es posible hacer el cambio al registro algebraico y, de esta manera, establecer la relación integral-derivada también a nivel algebraico, así como una tabla de integrales que le permita aplicar los métodos de integración y la regla de Barrow para el cálculo de integrales definidas. Al hacer esto, se hace conciencia que los cambios de registro serán imprescindibles para que el estudiante adquiera la flexibilidad necesaria en una adecuada comprensión. De ahí que compartimos lo propuesto en Ordóñez (2011) “Es por ello que, establecidos los registros gráficos, numéricos y algebraico y diferentes significados de la integral serán necesarias actividades encaminadas a la coordinación de los diferentes registros y también de las diferentes configuraciones” (p. 79). En último lugar, y en una etapa posterior, proponemos establecer la formalización de la integral desde la fundamentación teórica a través de las sumas de Riemann y todo el proceso formal de paso al límite.

8.6.1. Recomendaciones. En este apartado las distinguimos desde tres posturas: para el proceso general de instrucción, de corte netamente didáctico y para investigaciones posteriores.

Recomendaciones para para el proceso general de instrucción. Respecto a la dimensión instruccional que incluye el rol del profesor y de los estudiantes con relación a la clase, y al mismo tiempo, la forma de seleccionar las situaciones, los medios materiales y de organizar las secuencias de enseñanza, es necesario considerar que por tratarse de la formación de futuros profesores de matemáticas, la dimensión instruccional puede ser comparable a la del ámbito escolar, aunque se debe reconocer que hay claras diferencias por el tipo de sujetos (estudiantes) en el que se enfoca el proceso de instrucción (básica primaria, secundaria, media y superior).

Esta investigación se centró en el nivel superior enfocada en estudiar las “temáticas instruccionales” ejecutadas, coincidiendo en un “problema” que Watson et al. (2007) han mencionado. Este es el uso de formas poco innovadoras de instrucción, centradas principalmente en la trasmisión de información y en la inclusión de tareas de aplicación de conceptos y técnicas algorítmicas. En consecuencia, las interacciones profesor-alumno en las clases observadas siguen los pasos típicos de una “clase tradicional”: presentación de una definición, se dan a conocer los procedimientos, presentación de algunos ejemplos y desarrollo de ejercicios.

Las interacciones previstas, evaluación y medios planificados seguidos, nos llevan a inferir que se desconoce que la enseñanza del Cálculo Integral permite implementar trayectorias didácticas en las que predominen las configuraciones de tipo personal y de trabajo cooperativo, esto es, con un nivel mayor de autonomía en el aprendizaje matemático. No obstante, cada configuración didáctica identificada ligada al desarrollo de una configuración epistémica específica, permitirá identificar los momentos de regulación (procesos de definición, enunciación, fijación de procedimientos y justificaciones) en los que el docente fije los significados institucionales que sean compartidos en la clase.

Basados en los resultados aquí encontrados, proponemos hacer procesos de enseñanza menos formales donde se incluyan otras técnicas como la incorporación de Tics. Se sugiere uso de software matemático actualizado que se posicione sobre aspectos ontológicos y epistemológicos para fundamentar sus constructos teóricos, estos deben servir para orientar la mejora de la enseñanza de las matemáticas y en especial deben ser útiles en la formación inicial y permanente del profesorado. Sin embargo, sería ingenuo pensar que el uso de la informática y la tecnología en educación, por sí mismo, representa una mejora en el aprendizaje de la matemática: es el profesor, con su labor, quien tendrá la responsabilidad de plantear las actividades en función del curso que está impartiendo a fin de utilizar racionalmente esta herramienta. Compartimos la posición de Abrate y Pochulu (2006, p. 8) de aceptar que con “la sola introducción de esta tecnología a la educación no se resuelven los problemas educativos” y “que el individuo aprenderá casi automáticamente”, implica aceptar que la capacidad cognitiva del ser humano es equiparable a la de una computadora actual y negar la complejidad de los fenómenos educativos.

Las exigencias de los currículos escolares se constituyen en una norma epistémica-ecológica que demanda del “formador de maestros”, establecer las conexiones necesarias entre los contenidos propios del Cálculo Integral con el diseño del currículo. Estas orientaciones pueden llegar a ser una norma externa al aula que condicione y oriente el trabajo del formador de maestros. Se trata de una norma ecológica-cognitiva que si el profesor no maneja puede entrar en conflicto con la práctica habitual de la enseñanza de las matemáticas, según la cual se presentan primero los conceptos y procedimientos, ilustrados con ejemplos sencillos para que luego los alumnos en forma mecanicista realicen otros.

Sí el proceso de enseñanza está dirigido en forma estratégica implicará una mayor participación del estudiante, no quiere decir que disminuya la responsabilidad del docente en los proceso de enseñanza y de aprendizaje, por el contrario, debe ser más acentuada, porque al diseñar o seleccionar estrategias de enseñanza el profesor debe hacerlo de manera consciente para lograr un aprendizaje significativo en el estudiante, por lo tanto, requiere mayor énfasis en la tarea, en el proceso, en el desarrollo del alumno, en la revisión de las actividades, en la evaluación de los trabajos, tareas, talleres y evaluaciones, entre otros. Esto implica que durante el proceso de enseñanza exista menos mecanicismo o algoritmización y más conceptualización sin caer en el formalismo.

Consideramos que es importante que quien enseña Cálculo Integral conozca la evolución histórico-epistemológica de la integral; en otras palabras, que conozca las configuraciones epistémicas que la involucran para poder acercar a los alumnos a un significado global real de la integral como un proceso de acumulación que es posible observar desde el abordaje de diferentes situaciones tanto intra como extra matemáticas.

Se recomienda al profesor observado hacer una revisión conforme a la vigilancia epistemológica[22] plantada por Chevallard (2005) para que reflexione sobre sus realizaciones verbales y le diera la oportunidad al alumno de expresar por qué no acepta ese tipo de definiciones dadas por él. Queda pendiente la posibilidad de plantear una investigación sobre el estudio de los significados personales de los estudiantes que han recibido esta enseñanza y determinar los conflictos semióticos y las ausencias de significado que se pueden producir además de los ya señalados.

En general, con respecto a la dimensión instruccional para la selección de *u* en forma acertada se recomienda considerar la siguiente jerarquía: primero funciones inversas de las

22 Acción examinadora cuyo objetivo es controlar que el saber que se enseña en las instituciones no se desvía en lo sustancial del saber erudito o científico. Concepto asociado al mismo proceso de transformación de los saberes a efectos de su enseñanza (Chevallard, 2005, p. 45).

trigonométricas, luego funciones logarítmicas, luego algebraicas, luego trigonométricas y por último se tomará como *u* a las funciones exponenciales.

Recomendaciones en didáctica. Esta investigación aporta elementos que pueden ser utilizados por los profesores o por los sistemas educativos en general, con el objetivo de lograr que los alumnos adquieran un conocimiento cada vez más sólido y más profundo de la matemática, que se vea reflejado en un uso eficaz de conceptos, algoritmos y con mejores métodos de enseñanza, interpretación y resolución de problemas propios del cálculo infinitesimal, de ahí que una recomendación sea la permanente necesidad de capacitación, de actualización docente.

Se reconoce la necesidad de verificar los conocimientos previos de los estudiantes, realizar adaptaciones curriculares razonables a las diferencias individuales. En este último caso, se propone identificar tanto los estudiantes que tienen necesidades especiales como aquellos que manifiestan un talento “excepcional” por la asignatura, para que de manera ecuánime tengan oportunidades para desarrollar plenamente sus capacidades (Faceta cognitiva).

Se destaca la necesidad de tener en cuenta el carácter motivacional de la clase, de los problemas y tareas propuestas. Se enfatiza promover una actitud positiva hacia la materia, la perseverancia y el trabajo sistemático en la resolución de problemas, una buena disposición al trabajo en equipo y un manejo crítico de la información. Por último, en el ámbito emocional, promover la confianza y seguridad en las propias habilidades para resolver problemas y tareas matemáticas (Faceta afectiva).

En cuanto a la dimensión interaccional, con relación a la primera componente de esta faceta (interacción docente-dicente), se resalta el rol del profesor como acompañante y facilitador del aprendizaje de sus estudiantes. Respecto a la interacción entre discentes, se propone vivenciar instancias de comunicación y debate donde los estudiantes tengan la necesidad de comunicar, justificar y cuestionar puntos de vista. En cuanto a la autonomía, se enfatiza direccionar la clase a que los estudiantes sean capaces de enfrentar problemas y tareas matemáticas de manera individual (Faceta interaccional).

En cuanto a la dimensión mediacional, se sugiere el uso de Internet como fuente de información y la incorporación de calculadoras y software específicos para manipular datos, elaborar graficas de funciones a partir de tablas de valores, realizar cálculos y realizar simulaciones.

Interacción entre facetas

- Epistémica-Ecológica: Hacer énfasis en la inclusión de problemas matemáticos y extra matemáticos, emplear representaciones semióticas para la modelización de fenómenos físicos y sociales.
- Epistémica-Cognitiva: Considerar la resolución de problemas como principal medio para construir aprendizajes matemáticos favoreciéndose el uso de procesos meta cognitivos.
- Epistémica-Interaccional: Propiciar modos de justificar al alcance de los estudiantes, modelizar su lenguaje matemático y el manejo eficaz de las representaciones.
- Epistémica-Mediacional: Prestar atención a las representaciones asociadas a las Tics.

- Cognitiva-Interaccional: Reconocer y solucionar conflictos y fomentar el aprendizaje de los estudiantes.
- Afectiva-Interaccional: Manifestar altas expectativas a sus estudiantes y crear un ambiente de confianza y respeto mutuo.

Recomendación para investigaciones posteriores. Entre los temas que quedan abiertos luego de esta investigación consideramos: estudiar los niveles intermedios entre el saber epistémico institucionalizado y el saber cognitivo personalizado tanto del profesor como de cada estudiante; abordar desde la perspectiva personal del estudiante la identificación de varios tipos de significados, por ejemplo el g*lobal* considerado como el sistema total de prácticas matemáticas de un estudiante ante un determinado tipo de situaciones problémicas, no importa si dichas prácticas son correctas o no para la institución correspondiente, o *El logrado* entendido como el sistema de prácticas manifestadas que son consideradas “correctas” por la institución; y *el declarado* entendido como el sistema de prácticas mostradas por el estudiante en el proceso educativo, en particular en los procesos de evaluación, ya sean consideradas como correctas o incorrectas.

De esta manera, se hace importante reconocer que la relación existente entre el contexto de la enseñanza y los significados que se asignan a los objetos matemáticos que se van a institucionalizar, los cuales no están desconectados del contexto en que ellos se desarrollan y la implicación que éste tiene en la evolución y construcción del significado implementado. Cuando hablamos de la enseñanza en contexto de las matemáticas, compartimos la posición de Crisóstomo (2012), estamos haciendo referencia a su enseñanza a través de situaciones problémicas tomadas del campo de sus aplicaciones, a situaciones problémicas tomadas de la matemática misma, aspectos que, al ser considerados al momento de preparar y ejecutar la clase, mejorarían notoriamente los desempeños y significados alcanzados por los estudiantes.

Nos surge la necesidad de verificar los efectos de esta enseñanza tan sesgada hacia la integral como método netamente algebraico en el aprendizaje de los alumnos. Esto es, habría que plantear una investigación sobre el estudio de los significados personales de los estudiantes que han recibido esta enseñanza y determinar los conflictos semióticos y las ausencias de significado que se pueden producir además de los ya señalados, la falta de capacidad para poner a funcionar conocimientos pretendidos en determinados momentos de la clase (Burgess, 2008), dificultades para planificar lecciones de enseñanza (Cai y Gorowara, 2002), un conocimiento débil para incorporar las Tic en los procesos de enseñanza (Arteaga, 2011; Pinto, 2010) y el uso de formas poco innovadoras de instrucción centradas principalmente en la "trasmisión" de información (Pinto, 2010).

Bibliografía

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Aldana, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE".* Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca España.

Alvarenga, K. (2003). La enseñanza de las inecuaciones desde el punto de vista de la Teoria APOE. *En revista Lartinoamericana de Investigacion en Matemtiac Educativa, 6(3).* 20-36.

Armella, L. (1996). La Epistemología Genética. Una interpretacion. En: *Educación Matamtica, 8(3),* 5-23.

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Artigue, M. (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Boston: Kluwer.

Artigue, M., Douady, R. y Moreno, L. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una empresa docente. Universidad de los Andes. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. Printed in Mexico.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 1(1),* 40-55.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Venezolana, X (2),* 117-134.

Artigue, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* 1011-1049. Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., & NCTM.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.*), Research in Collegiate Mathematics Education* I. 1-32. U.S.A.: American Mathematical Society.

Assis, A., Godino, J. D. y Frade, C. (2012). As dimensões normativas e meta normativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*- RELIME, *15(2),* 171-198.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E. y Lewin, P. (1988). Computer Experiences in Learning Composition of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education 19 (3),* 246–259.

Azcárate, C. (1996). El Precálculo, un eslabón necesario entre las funciones y el análisis. Barcelona. Editorial Teide. 259-262.

Azcárate, C., y Camacho M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. *10 (2),* 135-149.

Bachelard, G. (1987). La formación del espíritu científico. México: Editorial Siglo 21.

Badillo, E., Azcárate, C., Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f '(a) y f'(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 29(2),* 191–206.

Bagni, G. T., y D'Amore, B. (2005). Epistemología, sociología, semiótica: la prospettiva socio-culturale. La matematica e la sua didattica. *19(1),* 73-89.

Berry, J. S. y Nyman, M. A. (2003). Promoting students‟ graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 481-497.

Bezuidenhout, J., Olivier, A. (2000). Students' conceptions of the integral. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 273- 280. Kagamiyama, Higashi-Hiroshima: Hiroshima University.

Bishop, A. (1998). *Mathematical Enculturation: a cultural perspective on Mathematics Education*. Kluwer, Dordrecht.

Bishop, A. (1999). Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural, Paidós, Barcelona. Recuperado de http://148.201.96.14/dc/ver.aspx?ns=000105589.

Blanco, L. (1998). *Nuevos retos en la Formación de los profesores de matemáticas.* Ponencia presentada en RELME 12, Santafé de Bogotá.

Blanco, L. (1992). *La enseñanza de las matemáticas en los estudiantes para profesores*. En Pensamiento de profesores y desarrollo profesional, Tomo 2. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

Blanco, L., Mellado, V. y otro. (1995). *Conocimiento didáctico del Contenido de Ciencias y Matemáticas y Formación de profesores.* Revista de Educación, *307.*

Bloor, D. (1983). Wittgenstein: A Social Theory of Knowledge. London: The Macmillan Press Ltd., *Handbook of Analytic Philosophy.* 560-583. Blackwell Publishers.
Blumer, H. (1969). El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982.

Bosch, M., y Chevallard, Y (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19 (1),* 77-124.

Bosch, M. y Gascón, J. (2001). Las prácticas docentes del profesor de matemáticas (Versión provisional del 13/09/01)2 de la XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques. 153-159, Editeur: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).

Bosch, C. y Kucera, J. (1999). De una integral a otra. ¿Cuál escoger? *Miscelánea Matemática, 28,* 1-10. México D. F.

Borel, E. (1901). Leçons sur les séries divergentes, (reedición: IREM de París 7 Denis Diderot (1995), Mnemosyne, *10,* 5-26).

Boyer, C. (1992). Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: calculo. Sao Paulo: Atual. Blucher.

Boyer, C. (2001) *Historia de las matemáticas*. Madrid. Alianza Editorial.

Bromme, R. (1994): "Beyond subject matter: A psychology topology of teachers' professional knowledge". En *R. Bielher, R. Scholz, R. SträBer y B. Winkelman (Eds) Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Dordrecht*: Kluwer Academic Pb.

Brousseau, G. (1976). La problématique et l'enseignement des Mathématiques, 28 Rencontre de la CIEAEM, Louvain la Neuve.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistèmologiques et les problémes en didactique en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques 1983. 4(2). Disponible en: http://aportes.educ.ar/matematica/popup/tipos_de_obstaculos.php.

Brousseau, G. (1990). *Les obstacles épistemologiques et les problemes en Mathématics*. Reserches en didactique des Matematics, *4, 2,* 164-198.

Burgess, T. (2008). Teacher knowledge for teaching statistics through investigations. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), Joint ICMI/IASE Study*: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education.* Proceedings of the ICMI Study IASE Round Table Conference. Monterrey, México: ICMI e IASE. Recuperado de: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2005). Un estudio sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas: El papel de la noción de conservación del área en la explicación escolar del concepto de integral. *Resúmenes de la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Uruguay: Clame, p. 60.

Cai, J. y Gorowara, C. (2002). Teachers' conceptions and constructions of pedagogical representations in teaching arithmetic average. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics,* Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Disponible en, www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Calvo, C. (1997). *Bases para una propuesta didáctica sobre integrales*. Tesis de maestría. UAB.

Camacho, M. y Depool, R. (2003a). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la Integral Definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) Derive. *Educación Matemática 15(3),* 119-140.

Camacho, M. y Depool, R. (2003b). Using Derive to understand the concept of definite integral. Using Derive to understand the concept of definite integral. *International journal for Mathematics Teaching and learning 5,* 1-16.

Camacho, M. y González-Martín, A. (2004). What is first-year Mathematics students' actual knowledge about improper integrals? *International journal of mathematical education in science and technology 35(1),* 73-89.

Camacho M. y González-Martín, A. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de "integral impropia": algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las ciencias 23(1),* 81-96.

Camacho, M., Depool, R. y Garbín, S. (2008). Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática*.

Camarena, P. (2000). Los registros cognitivos de la matemática en el contexto de la ingeniería, *reporte de investigación*, México, ESIME-*IPN.* México.

Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN. *Publicaciones Centroamericanas 7.* 391-410. México-Cinvestav. (ISBN: 9977-64-769-0).

Cantoral R. (2000). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (paradigma de investigación en Educación Matemática). Grupo editorial Iberoamérica, S. A. México, D. F. 13. ISBN 979-626-227-4.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6 (1),* 27-40.

Carlson, M. P., Persson, J. y Smith, N. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: the fundamental theorem of calculus. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty, J. Zilliox (Eds). *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 165-172. Joint Meeting of PME and PMENA, Hawaii, USA.

Cerda-Morales, G., (2004). Raymond Duval "Semiósis y pensamiento humano". *Unión*. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 32*, 3-4. *ISSN: 1815-0640.*

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12 (1),* 73-112.

Chevallard, Y. (2005). *La trasposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Aique. p. 45. ISBN 950-701-380-6. 3ª edición.

Civil, M., y Planas, N. (2004). Participation in the mathematics classroom: does every student have a voice? *For the Learning of Mathematics*, 24 (1), 7-13.

Civil, M. y Planas, N. (2008). Voices on non-immigrant students in the multiethnic mathematics classroom. *Proceedings of the Joint Conference PME32–PMENA 30.* México: Cinvestav. *4,* 121–127.

CNA. (1998). *Criterios y Procedimientos para la acreditación previa de los programas académicos de pregrado y especialización en educación.* Santafé de Bogotá.

Cobb, P. y Bauersfeld, H. (1995). The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures. Hillsdale, NJ: *Lawrence Erlbaum Associates*

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. Recherches en Didactique des Mathématiques, *25(2),* 151–186.

Contreras, Á., y Ordóñez L. (2006). Complejidad Ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. México. Relime, 9(1). ISSN 1665-2436.

Contreras, Á., Ordóñez, L., Wilhelmi, M. (2010). Influencian de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, *28(3),* 367–384.

Cooney, T. J. (1983). Espoused beliefs and beliefs in practice: The cases of Fred and Janice, Proceedings of PME-NA 5.). Montreal. 162-169.

Cooney, T. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education, 16(5),* 324-336.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F., Muñoz, G., Solís, M. (2003). *La integral y la noción de variación*. México: Grupo editorial Iberoamérica SA *8(3),* 265-286.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage* de la notion of limit: conceptions et obstacles. *Thèse de 3ème cycle, Mathématiques. Grenoble*: Université I de Grenoble.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 153-166.

Crisóstomo, E., Ordóñez, L., Contreras, Á. y Godino, J (2005) Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. En Á. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds.), Investigaciones en Didáctica de la Matemática. Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la teoría de la Funciones Semióticas, 125-166. Jaén, España.

Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. y Vidakovik, D. (2001). The Concept of Definite Integral: coordination of two Schemas. En, *the International Conference of Psychology of Mathematics Education Proceeding of 25th PME, (2),* 297-304.

D'Amore, B. (2004). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Épsilon, 20(3),* 413–434.

D'Amore, B., Radford, L. y Bagni GT. (2006). *Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 29B (1),* 11-40.

D'Amore, B., Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. México. *Relime, 10(2).*

D'Amore, B., Font, V. & Godino, J. D. (2007). La dimensión meta didáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma, 28(2),* 49-77.

Davidson, N. (1990). *Cooperative learning in Mathematics: A handbook for teachers.* Menlo Park, CA: Innovative Learning, Addison-Wesley.

Depool, R. (2004). *La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico* (PCS). Universidad de La Laguna. Tesis Doctoral.

Dhombres, J. (1995a). Chemins Occitan de Gerbert à Fermat, en Ad égalisé en Occitanie (Cassinet, J., ed.), Toulouse, 161-200.

Dhombres, J. (1995b). L'innovation comme produit captif de la tradition: entre Apollonius et Descartes une théorie des courbes chez Grégoire de Saint-Vincent, en Geometria, Flussioni e Differenziali (Osservazioni sul rapporto fra tradizione e innovazione nella Matatematica del Seicento)) (Panza, M. y Roero, C. S., eds.), Edizioni "*La città del Sole", Nápoles*, 17-101.

De Lorenzo, J. (1977). *La matemática y el problema de su historia*. Madrid: Tecnos.

Dorier, J. L. (2000). On the teaching of linear algebra. Dordrecht. (Ed.) *The Netherlands*: Kluwer.

Douglas H. Clements. (2007). Curriculum research: Toward a Framework for “Research-based Curricula” *Journal for research in Mathematics Education*. University at Buffalo, State University of New York. *38(1),* 35-70.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En Nesher, P. y Kilpatrick, J. (Eds), Mathematics and cognition. Cambridge: Cambridge University Press, 113-133.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: theoretical issues. *Proceedings of the four Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 27-33.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, 25-41. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Dubinsky, E. (1994). A Theory and Practice of Learning College Mathematics. In A. Schoenfeld Ed. *Mathematical Thinking and Problem Solving,* 22-247.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en la matemática teórica a la investigación en la matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *3(1),* 47 – 70.

Dubinsky, E. (2001). *Using a Theory of Learning in College Mathematics Courses*. Recuperado el 12 de junio de 2014 de http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html#C.)%20Mathematics%20Education%20- %20 Refereed

Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton (Ed). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level,* 273-280.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. *5,* 37-65.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema Crucial en la Educación Matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta del RSME,* 143-168.

Faerna, A. (2006). Significado y valor: la crítica pragmatista al emotivismo. Universidad de Castilla-La Mancha. Quaderns de filosofia i ciència, *36,* 27-39.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrini-Mundy, J. y Gaudard, M. (1992). Preparation or pitfall in the study of college Calculus. Preparation or pitfall in the study of college Calculus. *Journal for Research in Mathematics Education 23(1)*, 56-71.

Ferrini-Mundy, J. y Graham, K. (1994). Research in Calculus Learning: Understanding of Limits, Derivatives, and integrals. In J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results, MAA Notes, 33,* 31-45. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Filloy, E. (1999). Aspectos teóricos del álgebra educativa. México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Font, V. y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de ciencias Económicas y sociales. *Revista de Educación, 338,* 309-345.

Font, V., Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educación Matemática*. Pesqui, *8(1),* 67-98.

Font, V., Godino, J. y D'Amore, B. (2007). Enfoque Ontosemiótico de las Representaciones en Educación Matemática. Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *27(2).*

Font, V., Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Edu Stud Math*, *69*, 33-52.

Font, V., Godino, J. D. y Contreras, A. (2008). From representations to onto-semiotic configurations in*: Epistemology, Historicity, and Culture*. Sense Publishers: The Netherlands.

Font, V., Rubio, N., Contreras, A., (2008). Procesos en Matemáticas. Una Perspectiva Ontosemiótica. *Lestón,* P. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. México, DF.

Font, V.; Rubio, N., Giménez, J. y Planas, N. (2009). Competencias profesionales en el Máster de Profesorado de Secundaria, *UNO 51*, 9-18.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33(1),* 89-105.

Font, V. y Godino, J. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato, en J. M. Goñi (ed.), *MATEMÁTICAS: Investigación, innovación y buenas prácticas* (9-55). Barcelona: Graó y Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión*, *26*, 9-25.

Font, V., Godino, J. y Gallardo, J. (2012). *The emergence of objects from mathematical practices*. DOI 10.1007/s10649-012-9411-0.

Font, V., Carvajal, S., Adán, M., Ferreres, S., Vanegas, Y., y Rubio, N. (2012). Desarrollo de un programa por competencias en la formación inicial de profesores de secundaria de Matemáticas. Universitat de Barcelona.

Font, V. y Adán, M. (2013). Valoración de la idoneidad matemática de tareas. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM)* (4761-4769). Montevideo.

Font, V., Pino-Fan, L. (2015). A methodology for the design of questionnaires to explore relevant aspects of didactic-mathematical knowledge of teachers. In Beswick, K., Muir, T., & Wells, J. (Ed.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*. 25-32. Hobart, Australia: PME

Fuhrer, P. y De Almeida, P. (2013). Grupo de Ingeniería de Software, Universidad de Fribourg, Suiza. La plantilla es una fuente libre y se encuentra disponible en:

http://diuf.unifr.ch/drupal/sites/diuf.unifr.ch.drupal.softeng/files/teaching/guidelines/softeng_en_msword.pdf

Gallardo, J., González Marí, J. (2007). El Análisis Didáctico como metodología de investigación en Educación Matemática. *Actas de la SEIEM* - Universidad de Málaga.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18/1(52)*, 7-33, 1998.

Giménez, J. D., Font, V., et all. (2011). Análisis didáctico y evaluación de competencias profesionales. *XIII CIAEM- IACME*, Recife, Brasil, 3-11.

Giménez, J., Font, V., Vanegas, Y., Rubio, N., Larios, V., Gualdrón, E., Vargas, C., Malaspina, U. (2011). Análisis didáctico y evaluación de competencias profesionales. A: *Actas de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Brasil. 1-10.

Giménez, J.; Font, V. y Vanegas, Y. (2013). Professional Tasks analyzing school mathematical practices. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education* (581-590). Proceedings of ICMI Study 22: Oxford.

Gil, C. y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Almería. *Enseñanza de las Ciencias, 21(1),* 27-47.

Godino, J. D., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Reserches en Didactique des Mathématiques, 14(3),* 325-355.

Godino, J. D. (2002). Un Enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22(2.3),* 237-284.

Godino, J., Batanero C., Font, V. (2003). Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemática para maestros. Universidad de Granada. 18071 Granada.

Godino, J. D. (2004). Didáctica de las Matemáticas para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Universidad de Granada. Disponible en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino.

Godino, J. D., Bencomo D., et al. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. Maracay. Paradigma, *27(2),* 1-27.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 26(1),* 39-88.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2006a). Qué es una Configuración epistémica (CE). *Actas del VIII Simposio de la SEIEM*, 2012. 17.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006b). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26(1),* 39-88.

Godino, J. D., Font, V., y Wilhelmi, M. (2006). Análisis Ontosemiótico de una lección de suma y resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 131-155.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2007). Un enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. *The International Journal on Mathematics Education*. *39 (1-2),* 127-135.

Godino, J., D'Amore, B. (2007). El enfoque Ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. México. *10(2).*

Godino, J. D., Font, V., y Wilhelmi, M. (2007). Análisis Didáctico de procesos de estudio matemático basado en el Enfoque Ontosemiótico. Publicaciones (en prensa). ISSN: 1577-4147. Brasil, 25-27.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista iberoamericana de educación matemática*. *20,*13-31. ISSN: 1815-0640.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque Ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27(1),* 59-76.

Godino, J. D. (2012). Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la Instrucción Matemática. Un marco teórico integrativo para la Didáctica de la Matemática. Motivación, supuestos y herramientas teóricas. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino.

Godino, J., Batanero, C., Rivas, H., Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas**.** *REVEMAT*. ISSN 1981-1322. Florianópolis (SC), *08, 1*, 46-74.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

González-Martín, S. (2006). La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. *Problemas de enseñanza y de aprendizaje,* PhD. University of La Laguna, Spain. ISBN: 84-7756-679-8.

González, M., Correia de Sá, S. (2007). *La Dimensión epistemológica de la integral impropia en el diseño de secuencias de enseñanza*. Université de Montréal-Canadá.

Goñi, J. M.; Planas, N. (2011). Interacción comunicativa y lenguaje en la clase de matemáticas. En J. M. Goñi (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas*. Barcelona, 167-197.

Gordon, S. P. y Gordon, F. S. (2007). Discovering the fundamental theorem of calculus. Mathematics Teacher *100 (9),* 597-604.

Hache, Ch. (2001). L´univers mathématique proposé para le professeur en clase, *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 21(1.2),* 81-98.

Harel, G., Selden, A. y Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future.* 147-172. Rotterdam: Sense Publishing.

Hill, H., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction, 26,* 430-511.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004) "Structure sense in high school algebra: the effect of brackets" *the International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of PME *28, 3*, 49-56.

Kaput, J. (1982). Differential effects of the symbol of arithmetic and geometry on the interpretation of algebraic symbols, en *Annual Meeting of the American Educational Research.* Association, Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research. New York.

Kieran, C. (1980). The interpretation of the equal sign: symbol for an equivalence relation vs. an operator symbol. En, *the International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Proceedings of PME *10, 3,* 163-169.

Kleiner, I. (2002). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics 48 (2-3),* 137 – 174.

Kú, D., Trigueros, A. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática 20(2),* 65-89.

Labraña, P.A. (2000). *Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e Bachalerato acerca do significado do Cálculo Integral definida*. Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela. Santiago de Compostela. España.

Lakoff, G., y Nuñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Li, S. (2004). Does practice makes perfect? En Fujita, H., Hashimoto, Y., Hodgson, V., Lee, P., Lerman, S., Sawada, T. Tokio, 165-167.

Llinares, S. (1998a). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, *17,* 51-64.

Llinares, S. (1998b). Aprender a enseñar Matemáticas en la enseñanza Secundaria. Relación dialéctica entre el conocimiento teórico y práctico. *Revista interuniversitaria de Formación del profesorado*, *32,* 117-127.

Llinares, S. (1998c) La investigación "sobre" el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. AULA. *Revista de Enseñanza e Investigación Educativa*, *10*, 153-179.

Llinares S. et all., (2006). *Construcción del conocimiento necesario para enseñar matemáticas*. "Seminario sobre Entornos de Aprendizaje y Tutorización para la Formación de Profesores de Matemáticas" Universidad Autónoma de Barcelona. (http://blues.uab.es/~ipdmc/uausuab/uauabus.htm).

Llorens, J. (1993). Aplicaciones de DERIVE al Análisis Matemático. *-I, S. Public. De la Universidad Politécnica de Valencia*, ISBN 84-7721-237-6, Valencia.

Llorens, J. L. y Santonja, F. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas 5(1/2),* 61-76.

Mamona-Downs, J. y Downs, M. L. N. (2008). Advanced mathematical thinking and the role of mathematical structure. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education.* 154-174. New York: Routledge.

Mason, J. (2002). Generalization and Algebra: Exploiting Children's Powers. In L. Haggerty (Ed.) *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*. London: Routledge Falmer: 105-120.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Martin K. (2005). *La historia de las matemáticas en la enseñanza del análisis*. "*Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas*" 2005. SCTM05. Holanda.

Martínez Torregrosa, J., López-Gay, R., Gras, A. y Torregrosa, G. (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de *diferencial* y su clarificación en la enseñanza de la física. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(2), 271-283.

Martínez, M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. 140-159.

Mesa, R. (2001). Tangentes y áreas versus Integrales y derivadas. Memoria del noveno encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/publicaciones/e-librosydoc/memorias3.pdf.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del Cálculo: evolución, estado actual y recto futuros. En A. Maz, B. Gómes y M. Torralba (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: Noveno Simposio de Investigación de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM, 81-96.* Córdoba: Universidad de Córdoba.

Moreno-Armella, L.; Hegedus S. y Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics 68*, 99-111.

Muñoz, G., (2000) Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *2(3),* 131-170.

Musso, R. (1993). Los Paradigmas Materialistas (Mecanicista Vs Dialectico), antes y después de los años 60. *Revista Argentina de Psicología Paranormal*. *4(3),* 8-32.

Newman, J. (1994). *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Ed. Grijalbo. Barcelona *1(1),* 20-56.

Oktaç, A., Trigueros, M. y Vargas, X. N. (2006). Understanding of Vector Spaces. A Viewpoint from APOS Theory.*CD–ROM Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics.* Istanbul, Turkey: Turkish Mathematical Society.

Ordoñez, L., Contreras, A. (2003). Análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. Universidad de Jaén.

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2010). La Integral Definida en las Pruebas de Acceso a la Universidad (pau): Sesgos y Restricciones en la Enseñanza de este objeto en 2° de bachillerato. *Sociedad Española de Investigación en educación Matemática.* 23- 41.

Ordóñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las matemáticas de 2º de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida***.** Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.

Orton, A. (1980). *A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults*. Tesis Doctoral, University of Leeds, England.

Orton, A. (1983a). Student´s understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14(1),* 1-18.

Orton, A. (1983b). “Student´s understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14(3),* 235-250.

Parraguez, M. y Oktaç, A. (2010). Construction of the Vector Space Concept from the Viewpoint of APOS Theory. *Linear Algebra and its Applications, 432,* 2112-124.

Piaget, J. y García, R. (2004). *Psicogénesis e historia de la ciencia.* México: Siglo 21 Editores.

Pier, J. (1996). Histoire de l’intégration – Vingt-cinq siècles de Mathématiques, Masson, París.

Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

Pino-Fant, L., Godino, J. D., Font, V. y Castro W. F. (2013). Prospective teacher´s specialized content knowledge on derivate. *Proceedings of the Eight Congress of European Research in Mathematics Education. (CERME8, WD 17).* Turkey.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36(1),* 87-109. Maracay.

Pochulu, M., Font, V. (2010). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. Relime, *14(3), Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (2011). 361-394.

Ponte, J. (1994). Knowledge, beliefs, and conceptions in mathematics teaching and learning [Documento en línea]. Disponible: http://www.educ.fc.pt/docentes/jponte/ind_uk.htm.

Quezada, M. (1986). *Cálculo de primitivas en el bachillerato: su correlación con los algoritmos algebraicos y de cálculo diferencial.* Tesis de maestría. México: Cinvestav.

Radford, L. (1997). L'invention d'une idée mathématique: la deuxième inconnue en algèbre, Repères (*Revue des instituts de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques de France), juillet, 28,* 81-96.

Radford, L. (2003). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice during the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics, 52(2)*, 123–150.

Radford, L. (2006b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), Proceedings of the 28th conference.

Ramos, A., Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e ell'apprendimento della matematica. Una prospectiva ontosemiótica. *La Matematica e la sua didattica, 20(4),* 535-556.

Ramos, A. y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11(2),* 233–265.

Rasslan, S. y Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. *Proceedings of the 26th PME, 4*, 89-96.

Reina, L., Wilhelmi, M., Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria. México. *Educación Matemática. 24(3),* 67-97. Grupo Santillana.

Roa, D. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal.* Tesis de maestría, Cinvestav, México.

Robert, A. y Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Holton, D., ed), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 283-299

Robles, M., Telechea, E. y Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática. México, 26 (2)*, 69-109.

Rojas, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos*. Tesis doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. 60-85.

Rubio, N. (2012). *Competencia del Profesorado en el Análisis Didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona. 24-106.

Salinas, P., y Alanís, J. A. (2009), Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12(3)*, 355-382.

Schneider, P. (1991). The Classic knowledge representation system: Guiding principals and implementation rationale. *SIGART Bul letin, 2(3):108*, 113, 1991.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A (2000). *Learning mathematics as developing a discourse*. Recuperado el 13 de febrero de 2014 de http://wwwleibniz. imag.fr/Didatech/Seminaires2002/Sfard/PME-NA-21.pdf.

Shulman, L. S., & Quinlan, K. M. (1996). "The comparative psychology of school subjects." In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology*. New York: Simon & Schuster Macmillan.

Sierpinska, A. (1985) Obstacles epistemològiques relatives a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6(1),* 5-67.

Sierpinska, A. (1994). Understanding in Mathematics. The Falmer Press Taylor & Francis Inc., 1900 Frost Road, Suite 101, Bristol, PA 19007.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J. L. Dorier (Ed.), On *the teaching of linear algebra*, 209-246. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en Educación Matemática 11*, 19-52.

Sutherland, R., y N. Balacheff, 1999, "Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics", *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 4*, 1-26.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. (Ed). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. Plenary lecture, *Proceedings of PME 19*, Recife (Brasil).

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En Bishop, A. J. et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education,* 289-325. Netherlands: Kluwer.

Tall, D; Gray, E; (2001). *Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking*. Proceedings of the XXIII Conference for the Psychology of Mathematics Education. Recuperado el 25 de febrero de 2014 de http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999c-apos-in-amt.pme.pdf.

Tall, D. (2002). Continuities and Discontinuities in Long-Term Learning Schemas (reflecting on how relational understanding may be instrumental in creating learning problems). In David Tall & Michael Thomas (Eds), *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics – A Tribute to Richard Skemp*, 151–177. Flaxton, Australia: Post Pressed.

Thomas, K. (1995). The fundamental theorem of calculus: An investigation into students' constructions. Doctoral dissertation. Available from Dissertation Purdue University database. (UMI No. 9622774)

Thomas, M. y Ye Yoon Hong (1996). The Riemann integral in calculus: students' processes and concepts. En, P. C. Clarkson (Edt.), *Proceedings 19 Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA*), 572-579. Melbourne: VIC.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York, 127-146.

Thompson, P. W., y Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), making the connection: *Research and teaching in undergraduate mathematics,* 117-131. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. *Revista Educación matemática, 1(17),* 5-31.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 10,* 157-176.

Trigueros, M., Oktaç, A. y Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra. Demetra Pitta – Pantazi & George Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME,* 2359–2368. Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2010). Geometric representations in the learning of two variable functions. Educational Studies in Mathematics, *73,* 3-19.

Turégano, P. (1993). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

Turégano, P. (1996). *Área e integral.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha, Albacete.

Turégano, P. (1998). Del área a integral. Un estudio en el contexto educativo. Departamento de Matemáticas. Universidad de Castilla-La Mancha. *Enseñanza de las Ciencias*. *16(2),* 233-249.

Universidad Pedagógica Nacional. (1997). *Proyecto Político Pedagógico de la UPN*, Santafé de Bogotá.

Universidad Pedagógica Nacional. (2003). *Plan de Desarrollo Institucional 1998-2003*. Santafé de Bogotá.

Vergnaud, G. et al. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. In Nesher, P. & Kilpatrick, J. (Eds.) Mathematics and cognition: *A research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Cambridge: Cambridge University Press.

Victorino, L. y Medina, G. (2008). Educación basada en competencias y el proyecto Tuning en Europa y Latinoamérica: su impacto en México. *Concyteg, 3*, 39, 8.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking. 65- 80. Netherlands: Kluwer, A. P.

Watson, W. R., Lee, S. K., & Reigeluth, C. M. (2007). Learning management systems: An overview and roadmap of the systemic application of computers to education. In F. M. Neto & F. V. Brasileiro (Eds.), *Advances in Computer-Supported Learning* (pp. 66-96). Hershey, PA: Information Science Publishing.

Wenzelburger, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral definida. Una propuesta didáctica. *Educación Matemática, 5*, 93-123.

Wittgenstein L. (1953), *Investigaciones filosóficas*. Barcelona, Crítica, 1988.

Wilhelmi. M, Godino, J. D., Lacasta E., (2004). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad en los números reales. Recuperado el 1 de abril de 2014 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/igualdad_wilhelmi.pdf

Wilhelmi, M., Font, V., Godino, J., (2005). *Bases Empíricas De Modelos Teóricos En Didáctica De Las Matemáticas: Reflexiones Sobre La Teoría De Situaciones Didácticas Y El Enfoque Ontológico Y Semiótico*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/bases_empiricas.pdf.

Wilson, P. S., Cooney, T. J., & Stinson, D. W. (2005). What constitutes good mathematics teaching and how it develops: Nine high school teachers´ perspectives? *Journal for Mathematics Teacher Education, 8,* 83–111.

Yackel, E., Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27(4),* 458-477.

Zuin, E. S. L. (2001). Cálculo: uma abordagem histórica. In: Laudares, J. B.; Lachini, J. (Org.). Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 13-36.

Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education 27(4),* 435-457.