



**Maria José de Oliveira Rodrigues Carvalho**    **Aprendizagem de Estatística no 3.º Ciclo do Ensino Básico: o caso do tema diagramas de extremos e quartis**



**Maria José de Oliveira Rodrigues Carvalho**    **Aprendizagem de Estatística no 3.º Ciclo do Ensino Básico: o caso do tema diagramas de extremos e quartis**

Tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Didática e Desenvolvimento Curricular, realizada sob a orientação científica da Professora Doutora, Adelaide de Fátima Baptista Valente Freitas, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e sob a coorientação científica do Professor Doutor José António da Silva Fernandes, Professor Associado do Instituto de Educação da Universidade do Minho

Dedico este trabalho ao marido, filhos e pais pelo incansável apoio.

## **o júri**

presidente

Professor Doutor Joaquim Arnaldo Carvalho Martins  
Professor Catedrático, Universidade de Aveiro

Professora Doutora María Del Carmen Batanero Bernabeu  
Professora Catedrática, Universidade de Granada

Professor Doutor José António da Silva Fernandes  
Professor Associado, Universidade do Minho

Professora Doutora Andreia Oliveira Hall  
Professora Associada, Universidade de Aveiro

Professora Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques  
Professora Auxiliar, Universidade de Lisboa

Professora Doutora Maria Teresa Bixirão Neto  
Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro

## **agradecimentos**

Chegado ao fim deste percurso, gostaria de expressar o meu agradecimento:

- à Professora Doutora Adelaide Freitas e ao Professor Doutor José António Fernandes, que aceitaram orientar-me neste desafio e cujo apoio, incentivo e generosidade foram inestimáveis;
- aos professores que permitiram a envolvimento dos seus alunos, que possibilitaram a realização deste trabalho;
- aos meus amigos por tantas vezes me terem encorajado, apoiado e incentivado a realizar este trabalho;
- aos meus pais que me ensinaram a perseguir os meus sonhos sem nunca pensar em desistir e em especial ao meu pai, pela constante presença;
- aos restantes familiares pelas palavras de incentivo, encorajamento, pelo apoio prestado e orgulho demonstrado, que tantas vezes me motivaram, nos momentos menos bons, quando fraquejei devido às dúvidas e incertezas com que me deparei;
- à Ana e ao Ricardo pelos momentos juntos que lhes “furtei”, com a certeza, porém, de que a minha valorização pessoal será um contributo precioso na sua educação;
- por último, um agradecimento especial ao Rui, pela compreensão nas minhas ausências e pelo incentivo neste projeto. Sem ele nada faria o mesmo sentido.

## palavras-chave

Aprendizagem de Estatística, atitudes em relação à Estatística, diagramas de extremos e quartis, intervenção de ensino, alunos do 8.º ano

## resumo

Esta investigação trata da aprendizagem de Estatística no 3.º ciclo do ensino básico e foca-se especialmente na aprendizagem do tema Diagramas de extremos e quartis, do 8.º ano de escolaridade. O estudo desenvolveu-se em três fases: diagnose, implementação e avaliação, seguindo-se uma abordagem mista, isto é, combinando abordagens quantitativas e qualitativas. Na fase de diagnose estudaram-se as respostas dadas por 332 alunos, de 18 turmas do 8.º ano, a um teste diagnóstico com questões sobre os temas Funções e Estatística e formuladas em contexto gráfico e tabelar. Nesta fase do estudo averiguou-se a existência de possíveis relações entre as dificuldades sentidas pelos alunos no tema Funções e no tema Estatística, procedendo-se também à análise semiótica das respostas dos alunos. Estes mesmos alunos responderam também a uma escala de atitudes, construída com base numa adequação da escala de Estrada (2002), com vista a avaliar as suas atitudes em relação à Estatística, sendo que esta escala adaptada será aplicada aos alunos da turma intervencionada. Na fase de implementação procedeu-se à análise descritiva das respostas dos alunos da turma 8.º ano que participou na intervenção de ensino sobre Diagramas de extremos e quartis, em que se privilegiou o recurso a situações-problema do quotidiano, em contexto gráfico e tabelar, incluídas em fichas de tarefas, o trabalho em díade e a autonomia dos alunos na sala de aula. Na terceira fase realizou-se a avaliação da intervenção de ensino, que incluiu a avaliação dos conhecimentos e das atitudes dos alunos, após a implementação da intervenção de ensino, e o estudo da idoneidade didática da intervenção, *a priori* e *a posteriori*, neste último caso recorrendo às ferramentas teóricas do Enfoque Ontosemiótico do conhecimento e do ensino da Matemática.

Na globalidade das três referidas fases do estudo formularam-se as seguintes questões de investigação:

1. As dificuldades de alunos do 8.º ano na interpretação gráfica e tabelar de funções repercutem-se nas suas dificuldades nos conteúdos estatísticos?
2. Quais as atitudes em relação à Estatística dos alunos do 8.º ano das escolas envolvidas na fase de diagnose?
3. Uma intervenção de ensino privilegiando a representação gráfica e tabelar dos dados em situações do quotidiano favorece a aprendizagem de Estatística no 8.º ano?

4. As dificuldades de alunos do 8.º ano na interpretação e análise da representação gráfica e tabelar das medidas de localização repercutem-se nas suas dificuldades, de construção, interpretação e análise dos diagramas de extremos e quartis?

Para responder às questões de investigação, na vertente quantitativa, codificaram-se as respostas em: resposta correta (C), parcialmente correta (PC) e incorreta (I), além das não respostas (NR); na vertente qualitativa recorreu-se à análise de conteúdo, estabelecendo-se categorias de respostas aquando da análise dos dados.

Da análise global dos resultados, ressalta que: i) existe associação entre as dificuldades dos alunos em Funções e Estatística e entre conceitos estatísticos mas esta não se revela ser forte; ii) a adaptação da escala de atitudes revelou ter boas características psicométricas e o constructo atitude ser multidimensional com quatro fatores: Discernimento e Conceção Estatística, Disposição e Valorização da Estatística, Comportamento e Utilidade da Estatística e Aptidão no Estudo da Estatística; iii) a estratégia de ensino revelou-se profícua na medida em que os resultados obtidos, em comparação com os obtidos na fase de diagnose, foram globalmente superiores, registando-se uma menor incidência de conflitos semióticos e verificando-se ainda uma maior predisposição para a aprendizagem da Estatística, de acordo com os resultados obtidos na aplicação da escala de atitudes, antes e depois da intervenção de ensino; iv) após a intervenção de ensino, as dificuldades dos alunos na interpretação e análise, em representação gráfica e tabelar, de medidas de localização diminuíram de forma notória, embora o mesmo não tenha acontecido no caso do Diagrama de extremos e quartis, constatando-se que as dificuldades na construção deste tipo de representação residem na análise da dispersão e simetria e estão relacionadas com a má escolha da escala e a falta de rigor da sua construção. Finalmente, na análise das respostas, verificaram-se erros a nível dos conceitos, dos procedimentos e da linguagem.

Recomendações emergentes do estudo apontam para a necessidade de dar maior atenção à lecionação do tema Diagrama de extremos e quartis, com base na exploração de mais situações-problema envolvendo os conceitos implicados. Recomenda ainda especial atenção à predisposição para a aprendizagem da Estatística, porquanto esta pode influir na aprendizagem dos conceitos estatísticos.

**keywords**

Statistical learning, attitudes towards Statistics, Boxplot, teaching intervention, 8th Grade Students

**abstract**

This thesis is focused on the learning of Statistics in the 3rd cycle of basic education and deals, in particular, with the learning of the theme Boxplots on the 8<sup>th</sup> grade. The study was developed in three stages: diagnosis, implementation and evaluation, and employed mixed approach combining quantitative and qualitative methods. The diagnosis stage studied the responses, given by 332 students of 18 8<sup>th</sup> grade classes, to a diagnosis test of questions on Functions and Statistics which were formulated in graphical and tabular contexts. During this stage, the existence of possible relations between the students' difficulties in the two themes Functions and Statistics was studied, also proceeding with a semiotic analysis of the students' responses. This group of students also answered to an attitude scale, adapted from Estrada's scale (2002), with the objective of evaluating their attitudes towards Statistics. The adapted scale was also applied on the studied 8th grade class. On the implementation stage, the research was focused on the studied class. This class was subject to a teaching intervention on the topic Boxplots privileging the resort to everyday problem-situations, in a graphical or tabular context, and including worksheets, pair works and students' classroom autonomy. During this second stage, a descriptive analysis was performed on the students' responses about Boxplots. In the third stage, an assessment of the teaching intervention was executed. Concretely, the students' knowledge and attitude before and after the implementation of the teaching intervention were compared, and the intervention's didactic suitability, *a priori* and *a posteriori*, was analyzed recurring to theoretical tools of the Ontossemiotic Focus of knowledge and Mathematics teaching. On the totality of the three aforementioned stages of the study, the following questions were formulated:

1. Do the difficulties of 8th grade students in graphical and tabular interpretation of functions have repercussions on their difficulties on Statistics contents?
2. Which are the 8th grade students' attitudes towards Statistics during diagnoses phase?
3. Does a teaching intervention highlighting graphical and tabular representation of everyday situations' data help the learning of Statistics in the 8th grade?
4. Do 8th grade students' difficulties in interpreting and analyzing graphical and tabular representations of localization measures have repercussions on their difficulties on constructing, interpreting and analyzing Boxplots?



From a global analysis, it stands out that: i) there is association between the difficulties of the students in Functions and Statistics and in Statistics concepts but it is not strong; ii) the adapted scale of attitudes revealed to have good psychometric characteristics and to be 4-dimensional with the factors: Discernment and Statistics Conception (DCE), Disposition and Valorization of Statistics (DVE), Behavior and Utility of Statistics (CUE) and Aptitude in the Study of Statistics (AEE);

iii) the teaching strategy revealed itself profitable seeing as the gotten results, in comparison to those gotten during diagnosis, were globally superior, with a register of less incidence in semiotic conflicts, also making for a noticeably larger predisposition to the learning of Statistics, according to results gotten in the application of the attitudes scale, before and after the teaching intervention; ; iv) after the teaching intervention, students' difficulties, in terms of interpreting and analyzing localization measures of data collections provided by graphical and tabular representations, lowered in a notorious way. Nevertheless, the same did not happen in the case of the boxplots, stating that the difficulties in constructing this type of representation reside in the analysis of dispersion and symmetry and are related with a poor choice for the scale accuracy and lack of rigor in its construction. Finally, in the responses' analysis, conceptual errors and failures in the procedures and language were detected.

Emerging recommendations of the study point towards the necessity of increasing the importance given to the teaching of the boxplot theme, based on the exploration of more problem-situations involving implied concepts. It is also recommended a special attention to the predisposition to the learning of Statistics, as a consequence it can influence the learning of Statistics concepts.

## ÍNDICE

|  |       |
|--|-------|
| SIGLAS E ACRÓNIMOS   | xvi   |
| LISTA DE QUADROS   | xviii |
| LISTA DE FIGURAS   | xx    |
| LISTA DE TABELAS   | xxiv  |
| CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO  | 1     |
| 1.1. Contextualização e motivação  | 1     |
| 1.2. Descrição Geral do Estudo   | 5     |
| 1.2.1. Finalidade e organização geral  | 5     |
| 1.2.2. Questões e objetivos do estudo  | 8     |
| 1.2.3. Estrutura geral da tese   | 11    |
| CAPÍTULO II – ENQUADRAMENTO TEÓRICO  | 15    |
| 2.1. Introdução do estudo da Estatística no currículo escolar português                    | 16    |
| 2.2. Marco Teórico   | 26    |
| 2.2.1. Sistema de práticas operativas e discursivas ligadas a tipos de problemas           | 27    |
| 2.2.2. Objetos emergentes e intervenientes do sistema de práticas                          | 33    |
| 2.2.3. Relações entre objetos em análise: função semiótica                                 | 37    |
| 2.2.4. Dimensões Normativa   | 40    |
| 2.2.5. Idoneidade didática   | 42    |
| 2.2.6. Níveis de análise didática dos processos de estudo matemático                       | 46    |
| 2.3. Antecedentes  | 48    |
| 2.3.1. A influência das atitudes face à Estatística na aprendizagem dos seus conceitos     | 48    |
| 2.3.2. As investigações sobre a Estatística  | 53    |
| 2.3.3. A representação estatística diagramas de extremos e quartis                         | 63    |
| 2.3.4. Pensamento funcional e relacional no estudo de representações de dados estatísticos | 67    |
| CAPÍTULO III – METODOLOGIA   | 75    |
| 3.1. Opções Metodológicas  | 76    |
| 3.1.1. Justificação das opções metodológicas   | 76    |
| 3.1.1.1. Metodologia qualitativa   | 78    |
| 3.1.1.2. O Estudo de Caso  | 82    |
| 3.1.1.3. Metodologia quantitativa  | 86    |
| 3.1.1.4. Metodologia mista   | 88    |

|  |   |     |
|--|---|-----|
| 3.2.   | Participantes do estudo-----  | 90  |
| 3.2.1.   | Caracterização do grupo de alunos envolvida na diagnose -----                         | 91  |
| 3.2.2.   | Caracterização do grupo de alunos envolvida na Intervenção de Ensino-----             | 93  |
| 3.3.   | Descrição do estudo -----   | 94  |
| 3.3.1.   | Escala de Atitudes Relativa à Estatística -----                                       | 95  |
| 3.3.2.   | Teste Diagnóstico -----   | 95  |
| 3.3.3.   | Instrumentos utilizados na Intervenção de Ensino -----                                | 97  |
| 3.3.3.1.   | As fichas de tarefas -----  | 101 |
| 3.3.3.2.   | Diário de Bordo -----   | 109 |
| 3.3.3.3.   | Observação -----  | 109 |
| 3.3.3.4.   | A entrevista -----  | 112 |
| 3.4.   | Métodos de análise de dados -----   | 114 |
| CAPÍTULO IV – A COMPREENSÃO DAS REPRESENTAÇÕES TABELARES E GRÁFICAS NA APRENDIZAGEM DA ESTATÍSTICA ----- |   | 119 |
| 4.1.   | Conhecimentos prévios dos alunos sobre conceitos de Estatística e Funções -----       | 120 |
| 4.1.1.   | Análise das respostas e raciocínios na questão 1 -----                                | 120 |
| 4.1.2.   | Análise das respostas e raciocínios na questão 2 -----                                | 125 |
| 4.1.3.   | Análise das respostas e raciocínios na questão 3 -----                                | 130 |
| 4.1.4.   | Análise das respostas e raciocínios na questão 4 -----                                | 136 |
| 4.1.5.   | Análise das respostas e raciocínios na questão 5 -----                                | 143 |
| 4.1.6.   | Análise das respostas e raciocínios na questão 6 -----                                | 152 |
| 4.1.7.   | Análise global das respostas -----  | 157 |
| 4.2.   | Relação das dificuldades em Funções, em Estatística e em Funções e Estatística --     | 158 |
| 4.2.1.   | Relação das dificuldades entre conceitos de Funções em contexto gráfico e tabelar     | 159 |
| 4.2.2.   | Relação das dificuldades entre conceitos de Estatística em contexto gráfico e tabelar | 160 |
| 4.2.3.   | Relação das dificuldades entre conceitos de Estatística e de Funções -----            | 162 |
| 4.3.   | Análise semiótica das respostas dos alunos na Estatística -----                       | 164 |
| 4.3.1.   | Conceito de mediana -----   | 164 |
| 4.3.1.1.   | Cálculo da mediana -----  | 165 |
| 4.3.1.2.   | Análise semiótica das respostas no caso da mediana-----                               | 167 |
| 4.3.1.2.1.   | Análise semiótica das respostas corretas-----   | 167 |
| 4.3.1.2.2.   | Análise semiótica das respostas parcialmente corretas e incorretas ---                | 169 |
| 4.3.2.   | Conceito de média-----  | 177 |

|   |  |     |
|---|--|-----|
| 4.3.2.1.  | Cálculo da média -----   | 177 |
| 4.3.2.2.  | Análise semiótica das respostas dos alunos no caso da média -----        | 178 |
| 4.3.2.2.1.  | Análise semiótica das respostas corretas-----                            | 179 |
| 4.3.2.2.2.  | Análise semiótica das respostas parcialmente corretas e incorretas ---   | 179 |
| 4.3.3.  | Valor mínimo e valor máximo -----  | 183 |
| 4.3.3.1.  | Identificação mínimo e máximo -----                                      | 183 |
| 4.3.3.2.  | Análise semiótica das respostas no caso dos valores mínimo e máximo- 184 |     |
| 4.3.3.2.1.  | Análise semiótica das respostas corretas-----                            | 184 |
| 4.3.3.2.2.  | Análise semiótica das respostas parcialmente corretas e incorretas ---   | 185 |
| 4.4.  | Síntese -----  | 187 |
| CAPÍTULO V – Adequação a alunos do 8.º ano da escala de atitudes em relação à Estatística |  | 195 |
| 5.1.  | A problemática da atitude -----  | 195 |
| 5.2.  | Motivação -----  | 197 |
| 5.3.  | Escala de atitudes em relação à Estatística -----                        | 199 |
| 5.3.1.  | A escala original -----  | 199 |
| 5.3.2.  | A escala modificada -----  | 200 |
| 5.4.  | Análise de propriedades psicométricas da EAE adaptada-----               | 204 |
| 5.4.1.  | Análise dos itens -----  | 206 |
| 5.4.2.  | Confiabilidade -----   | 208 |
| 5.4.3.  | Validade -----   | 209 |
| 5.4.4.  | Multidimensionalidade-----   | 210 |
| 5.5.  | Atitudes dos alunos em relação à Estatística na fase de diagnose -----   | 215 |
| CAPÍTULO VI – IMPLEMENTAÇÃO DA INTERVENÇÃO DE ENSINO -----                                |  | 219 |
| 6.1.  | A Intervenção de Ensino -----  | 219 |
| 6.1.1.  | Antes da Intervenção de Ensino-----                                      | 220 |
| 6.1.2.  | Durante a Intervenção de Ensino -----                                    | 222 |
| 6.1.3.  | Após a Intervenção de Ensino -----                                       | 253 |
| 6.1.3.1.  | Avaliação do Teste Final -----   | 253 |
| 6.1.3.2.  | Análise dos resultados do Teste Final segundo o contexto -----           | 282 |
| 6.1.3.2.1.  | Determinação da amplitude interquartil -----                             | 282 |
| 6.1.3.2.2.  | Construção de diagramas de extremos e quartis -----                      | 283 |
| 6.1.3.2.3.  | Interpretação de diagramas de extremos e quartis-----                    | 284 |
| 6.2.  | Síntese -----  | 288 |
| CAPÍTULO VII – AVALIAÇÃO DA INTERVENÇÃO DE ENSINO -----                                   |  | 291 |

|          |   |     |
|----------|---|-----|
| 7.1.     | Indicadores de idoneidade didática da intervenção de ensino -----             | 291 |
| 7.1.1.   | Idoneidade epistémica da intervenção de ensino -----                          | 292 |
| 7.1.2.   | Idoneidade cognitiva da intervenção de ensino-----                            | 295 |
| 7.1.3.   | Idoneidade interacional da intervenção de ensino-----                         | 297 |
| 7.1.4.   | Idoneidade mediacional da intervenção de ensino -----                         | 299 |
| 7.1.5.   | Idoneidade afetiva da intervenção de ensino -----                             | 300 |
| 7.1.6.   | Idoneidade ecológica da intervenção de ensino -----                           | 301 |
| 7.2.     | Análise <i>a priori</i> da idoneidade didática da intervenção de ensino ----- | 302 |
| 7.2.1.   | Idoneidade epistémica -----   | 302 |
| 7.2.1.1. | Situações-problema -----  | 302 |
| 7.2.1.2. | Linguagem-----  | 304 |
| 7.2.1.3. | Regras -----  | 304 |
| 7.2.1.4. | Argumentação -----  | 305 |
| 7.2.1.5. | Relações -----  | 306 |
| 7.2.2.   | Idoneidade cognitiva-----   | 306 |
| 7.2.2.1. | Conhecimentos prévios-----  | 306 |
| 7.2.2.2. | Diferenças individuais-----   | 307 |
| 7.2.2.3. | Aprendizagem-----   | 307 |
| 7.2.3.   | Idoneidade interacional -----   | 308 |
| 7.2.3.1. | Interações docente-discente -----   | 308 |
| 7.2.3.2. | Interação entre discentes -----   | 308 |
| 7.2.3.3. | Autonomia -----   | 309 |
| 7.2.3.4. | Avaliação formativa-----  | 309 |
| 7.2.4.   | Idoneidade mediacional-----   | 309 |
| 7.2.4.1. | Recursos materiais-----   | 310 |
| 7.2.4.2. | Número de alunos e condições de aula-----                                     | 310 |
| 7.2.4.3. | Tempo de ensino e aprendizagem -----  | 310 |
| 7.2.5.   | Idoneidade afetiva-----   | 310 |
| 7.2.5.1. | Interesse-----  | 311 |
| 7.2.5.2. | Atitude -----   | 311 |
| 7.2.5.3. | Emoções -----   | 311 |
| 7.2.6.   | Idoneidade ecológica -----  | 312 |
| 7.2.6.1. | Inovação-----   | 312 |
| 7.2.6.2. | Adaptações socioculturais -----   | 312 |

|   |  |     |
|---|--|-----|
| 7.2.6.3.                                  | Conexões intra e interdisciplinares -----  | 312 |
| 7.2.7.                                    | Síntese da análise da idoneidade didática a priori da intervenção de ensino -              | 313 |
| 7.3.                                      | Análise <i>a posteriori</i> da idoneidade didática da intervenção de ensino -----          | 314 |
| 7.3.1.                                    | Análise dos eventos significativos ocorridos na implementação de ensino----                | 314 |
| 7.3.2.                                    | Análise dos eventos significativos ocorridos na fase de avaliação-----                     | 318 |
| 7.3.3.                                    | Avaliação das aprendizagens alcançadas pelos alunos -----                                  | 319 |
| 7.3.3.1.                                  | Resultados obtidos pelos alunos no Teste Final -----                                       | 320 |
| 7.3.3.2.                                  | Resultados obtidos pelos alunos na Escala de Atitudes em Relação à Estatística             | 321 |
| 7.4.                                      | Análise retrospectiva-----   | 327 |
| 7.4.1.                                    | Comparação entre o plano proposto e as ocorrências didáticas observadas--                  | 328 |
| 7.4.1.1.                                  | Tipo de Situações-problema e práticas estatísticas-----                                    | 328 |
| 7.4.1.2.                                  | Elementos linguísticos -----   | 329 |
| 7.4.1.3.                                  | Elementos conceptuais -----  | 330 |
| 7.4.1.4.                                  | Propriedades e procedimentos -----   | 330 |
| 7.4.1.5.                                  | Argumentos-----  | 331 |
| 7.4.1.6.                                  | Processos-----   | 332 |
| 7.4.2                                     | Comparação entre o plano proposto e as ocorrências didáticas observadas na avaliação ----- | 332 |
| 7.4.2.1.                                  | Tipo de Situações-problema e práticas estatísticas-----                                    | 332 |
| 7.4.2.2.                                  | Elementos linguísticos -----   | 333 |
| 7.4.2.3.                                  | Elementos conceptuais -----  | 333 |
| 7.4.2.4.                                  | Propriedades e procedimentos -----   | 335 |
| 7.4.2.5.                                  | Argumentos-----  | 335 |
| 7.4.2.6.                                  | Processos-----   | 336 |
| 7.4.3.                                    | Análise da dimensão normativa-----   | 336 |
| 7.5.                                      | Idoneidade do processo de Estudo -----   | 337 |
| 7.5.1.                                    | Idoneidade Epistémica e Ecológica -----  | 337 |
| 7.5.2.                                    | Idoneidade cognitiva e afetiva-----  | 338 |
| 7.5.3.                                    | Idoneidade internacional e mediacional -----   | 339 |
| 7.6.                                      | Síntese -----  | 340 |
| CAPÍTULO VIII – SÍNTESE E CONCLUSÕES----- |  | 343 |
| 8.1.                                      | Síntese do estudo -----  | 343 |
| 8.2.                                      | Conclusões do estudo -----   | 346 |
| 8.2.1.                                    | Primeira questão de investigação -----   | 346 |

|   |  |     |
|---|--|-----|
| 8.2.2.  | Segunda questão de investigação -----      | 350 |
| 8.2.3.  | Terceira questão de investigação-----      | 351 |
| 8.2.4.  | Quarta questão de investigação -----       | 354 |
| 8.3.  | Reflexão, limitações e recomendações ----- | 356 |
| ANEXO I – RESUMO DO PROGRAMA DE METAS CURRICULARES DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO ----- |  | 377 |
| ANEXO II – CORRESPONDÊNCIA -----  |  | 380 |
| ANEXO III – PLANIFICAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DE INTERVENÇÃO DE ENSINO -----                |  | 387 |
| ANEXO IV – ESCALA DE ATITUDES -----   |  | 391 |
| ANEXO V – ENUNCIADO DAS FICHAS DE TAREFAS E FICHAS COM CRITÉRIOS DE CORREÇÃO- -----     |  | 400 |
| ANEXO VI – SLIDES E VÍDEOS -----  |  | 444 |
| ANEXO VII – ENUNCIADO DAS FICHAS DE AVALIAÇÃO E FICHAS COM CRITÉRIOS DE CORREÇÃO -----  |  | 455 |
| ANEXO VIII – GUIÃO DA ENTREVISTA-----   |  | 474 |
| ANEXO IX – ESTUDO DE ASSOCIAÇÃO FUNÇÕES E ESTATÍSTICA-----                              |  | 476 |

## SIGLAS E ACRÓNIMOS

- AEE – Aptidão no Estudo da Estatística  
AFE – Análise Fatorial Exploratória  
ATE – Aula Teórica-Exploratória  
ATS – Attitudes Toward Statistics Scale  
CC – Competência cognitiva  
CT – Competências Transversais  
CUE – Comportamento e Utilidade da Estatística  
DCE – Discernimento e Conceção Estatística  
DEB – Departamento de Educação Básica  
DEQ – Diagrama de Extremos e Quartis  
DVE – Disposição e Valorização da Estatística  
EAE – Escala de Atitude em Relação à Estatística Adotada  
EARE – Escala de Atitude em Relação à Estatística  
EB – Ensino Básico  
EOS – Enfoque Ontossemiótico  
FT – Ficha de Tarefas  
GAISE – Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education  
ID – Índice de Dificuldade  
IE – Intervenção de Ensino  
KMO – Kaiser-Meyer-Olkin  
ME – Ministério da Educação  
MEC – Ministério da Educação e Ciência  
ME-DEB – Ministério da Educação – Departamento do Ensino Básico  
NCTM – National Council of Teacher of Mathematics  
NEE – Necessidades Educativas Especiais  
OC – Orientação Curricular  
OE – Objetivos Específicos  
OG – Objetivos Gerais  
OTD – Organização e Tratamento de Dados



PIEDEQ – Planificação da Implementação da Intervenção de Ensino sobre o tema Diagramas de Extremos e Quartis

PMCMEB – Programa e Metas Curriculares Matemáticas para o Ensino Básico

PMEB – Programa de Matemática do Ensino Básico

PR – Pré-Requisitos

QI – Questão de Investigação

SAS – Statistics Attitude Survey

SPSS – Statistical Package for the Social Sciences

TD – Teste Diagnóstica

TF – Teste Final

## LISTA DE QUADROS

|  |     |
|--|-----|
| Quadro 1- Os objetivos de cada uma das questões de investigação e os respetivos métodos de recolhas de dados. .... | 10  |
| Quadro 2 - Plano geral da estrutura da tese. ....  | 13  |
| Quadro 3 – Dimensões metodológicas e os seus componentes (ME, 2007, p. 67).....                                    | 21  |
| Quadro 4 – Dimensões metodológicas e os seus componentes (MEC, 2013, pp. 6-27) .....                               | 23  |
| Quadro 5 – Dimensões metodológicas e os seus componentes (Godino, 2011).....                                       | 46  |
| Quadro 6 – Questões, objetivos e métodos de recolha de dados da investigação.....                                  | 77  |
| Quadro 7 – Pontos fortes e fracos da metodologia qualitativa .....   | 80  |
| Quadro 8 – Pontos fortes e fracos da metodologia quantitativa .....  | 87  |
| Quadro 9 – Paradigmas qualitativo e quantitativo da investigação .....   | 87  |
| Quadro 10 – Resumo da estrutura e atividades propostas pelo TD.....  | 96  |
| Quadro 11 – Distribuição dos alunos do 8.º ano em díades.....  | 98  |
| Quadro 12 – Conteúdos e propostas de trabalho explorados nas aulas da intervenção de ensino .....                  | 99  |
| Quadro 13 – Resumo da estrutura e atividades propostas nas FT e FTI.....   | 104 |
| Quadro 14 – Resumo da estrutura e atividades propostas no TF .....   | 106 |
| Quadro 15 – Classificação dos índices de dificuldades.....   | 120 |
| Quadro 16 – Análise semiótica de exemplos de categorias C1 e C2 nas questões 4, 5 e 6. ..                          | 169 |
| Quadro 17 – Análise semiótica de exemplos dos conflitos C1 e C2 nas três questões.....                             | 174 |
| Quadro 18 – Análise semiótica de exemplos dos conflitos C3 e C4 nas três questões.....                             | 175 |
| Quadro 19 – Análise semiótica de exemplos dos conflitos C5, C6 e C7 nas três questões.....                         | 176 |
| Quadro 20 – Análise semiótica de exemplos da categoria C3 nas questões 4c e 5c.....                                | 179 |
| Quadro 21 – Análise semiótica de exemplos dos conflitos C9 e C10 nas questões 4c e 5c. ...                         | 181 |
| Quadro 22 – Análise semiótica de exemplos dos conflitos C11 e C12 nas questões 4c e 5c. .                          | 182 |
| Quadro 23 – Análise semiótica de exemplos dos conflitos C13 nas questões 4c) e 5c).....                            | 183 |
| Quadro 24 –Análise semiótica de exemplos da categoria C4 nas questões 4d e 5d. ....                                | 185 |
| Quadro 25 – Análise semiótica de exemplos de categoria, C15 e C16 nas questões 4d e 5d.                            | 186 |
| Quadro 26 – Análise semiótica de exemplos de categoria, C17 e C18 nas questões 4d e 5d.                            | 187 |
| Quadro 27 – Composição da escala de Estrada (2002) em termos de fatores latentes .....                             | 200 |
| Quadro 28 – Itens traduzidos da escala EAE de Estrada (2002) e os correspondentes itens adaptados.....             | 202 |
| Quadro 29 – Afirmções proferidas pelos alunos para conceitos-base de estatística em revisão. ....                  | 225 |
| Quadro 30 – Exemplos de respostas dos grupos às alíneas da Tarefa 3 nas categorias PC e I. ....                    | 230 |

|   |     |
|---|-----|
| Quadro 31 – Exemplos de respostas dos grupos às alíneas da Ficha de Tarefas 2 nas categorias PC e I.....  | 235 |
| Quadro 32 – Exemplos de respostas dos grupos às alíneas das tarefas 8 à 10 nas categorias PC e I.....   | 238 |
| Quadro 33 – Exemplos de respostas dos grupos às alíneas da Tarefa 11 nas categorias PC e I.....   | 242 |
| Quadro 34 – Exemplos de respostas dos grupos às alíneas das tarefas 12 à 17 nas categorias PC e I.....  | 248 |
| Quadro 35 – Exemplos de respostas dos grupos às alíneas das Tarefa 18 nas categorias de PC e I.....   | 249 |
| Quadro 36 – Análise da idoneidade epistémica da intervenção de ensino nas componentes situação-problemas e linguagem. ....                      | 293 |
| Quadro 37 – Análise da idoneidade epistémica da intervenção de ensino nas componentes regras e argumentos. ....                                 | 294 |
| Quadro 38 – Análise da idoneidade epistémica da intervenção de ensino na componente relações. ....  | 295 |
| Quadro 39 – Análise da idoneidade cognitiva da intervenção de ensino nas componentes conhecimentos prévios e diferenças individuais. ....       | 296 |
| Quadro 40 – Análise da idoneidade cognitiva da intervenção de ensino nas componentes diferenças individuais (continuação) e aprendizagens. .... | 297 |
| Quadro 41 – Análise da idoneidade interacional da intervenção de ensino.....  | 298 |
| Quadro 42 – Análise da idoneidade mediacional da intervenção de ensino.....   | 299 |
| Quadro 43 – Análise da idoneidade emocional/afetiva da intervenção de ensino.....   | 300 |
| Quadro 44 – Análise da idoneidade ecológica da intervenção de ensino.....   | 301 |
| Quadro 45 – Síntese das ocorrências didáticas significativas no momento da implementação do ensino.....   | 316 |
| Quadro 46 – Síntese das ocorrências didáticas significativas no momento da aplicação do teste de avaliação. ....                                | 318 |
| Quadro 47 – Planificação da Unidade Temática “Diagrama de extremos e quartis” a implementar numa turma do 8.º ano.....                          | 388 |
| Quadro 48 – Apresenta-se os 28 itens traduzidos da escala original de Estrada (2002) e 23 itens do construto apresentado neste estudo. ....     | 392 |

## LISTA DE FIGURAS

|  |     |
|--|-----|
| Figura 1 – Tipos de significados institucionais e pessoais (Godino, Batanero & Font, 2007, p. 13) .....      | 31  |
| Figura 2 – Configuração de objetos primários (Font & Godino, 2008, p. 69) .....                              | 33  |
| Figura 3 – Modelo ontossemiótico dos conhecimentos matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2007, p.18) .....   | 37  |
| Figura 4 – Dimensões normativas. Tipo de normas (Godino, Batanero & Font, 2008, p.22) .....                  | 42  |
| Figura 5 – Dimensões de idoneidade didática (Godino, Batenero & Font, 2009, p. 24).....                      | 43  |
| Figura 6 – Diagrama de extremos e quartis. ....  | 64  |
| Figura 7 – Trabalho colaborativo entre pares .....   | 102 |
| Figura 8 – Esquema sobre os métodos de análise de dados de acordo com os momentos do estudo empírica.....    | 115 |
| Figura 9 – Enunciado da questão 1 proposta aos alunos.....   | 121 |
| Figura 10 – Resposta do aluno A78 à questão 1, alíneas 1a e 1b .....   | 122 |
| Figura 11 – Respostas dos alunos A146, A169 e A173, respetivamente, à questão 1, alínea 1c .....             | 122 |
| Figura 12 – Respostas dos alunos A7, A15, A152, respetivamente, à questão 1, alínea 1c .....                 | 123 |
| Figura 13 – Respostas dos alunos A26, A27 e A90, respetivamente, à questão 1, alínea 1d ...                  | 123 |
| Figura 14 – Resposta do aluno A119 à questão 1, alínea 1e.....   | 124 |
| Figura 15 – Resposta do aluno A150 à questão 1, alínea 1e.....   | 124 |
| Figura 16 – Resposta do aluno A29 à questão 1, alínea 1e.....  | 124 |
| Figura 17 – Resposta do aluno A6 à questão 1, alínea 1e.....   | 124 |
| Figura 18 – Respostas do aluno A271 à questão 1, alínea 1e .....   | 125 |
| Figura 19 – Respostas do aluno A81 e A165 à questão 1, alínea 1e .....                                       | 125 |
| Figura 20 – Enunciado da questão 2 proposta aos alunos.....  | 125 |
| Figura 21 – Respostas do aluno A180, A50 e A193 respetivamente, à questão 2, alínea 2a ...                   | 126 |
| Figura 22 – Respostas dos A82 e A39, respetivamente, à questão 2, alínea 2b .....                            | 127 |
| Figura 23 – Respostas dos alunos A152, A168 e A162, respetivamente, à questão 2, alínea 2c .....             | 127 |
| Figura 24 – Respostas dos alunos A45, A135 e A32, respetivamente, à questão 2, alínea 2d. 128                |     |
| Figura 25 – Respostas dos alunos A168, A39, A254, A155, e A276, respetivamente, à questão 2, alínea 2e ..... | 129 |
| Figura 26 – Respostas do aluno A38, A5, A1, e A10, respetivamente, à questão 2, alínea 2f..                  | 130 |
| Figura 27 – Enunciado da questão 3 proposta aos alunos.....  | 131 |
| Figura 28 – Respostas dos alunos A93, A60 e A90, respetivamente, à questão 3, alínea 3c ...                  | 132 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 29 – Respostas incorretas dos alunos A51, A112 e A166, respetivamente, à questão 3, alínea 3d .....              | 133 |
| Figura 30 – Respostas parcialmente corretas dos alunos A54, A87 e A134, respetivamente, à questão 3, alínea 3d .....    | 134 |
| Figura 31 – Respostas dos alunos A51, A155 e A127, respetivamente, à questão 3, alínea 3e                               | 135 |
| Figura 32 – Enunciado da questão 4 proposta aos alunos.....   | 136 |
| Figura 33 – Resposta dos alunos A277, A4, A159, A115 e A284, respetivamente, à questão 4, alínea 4a .....               | 137 |
| Figura 34 – Resposta dos alunos A168, A155 e A9, respetivamente, à questão 4, alínea 4a....                             | 138 |
| Figura 35 – Respostas dos alunos A19 e A15, respetivamente, à questão 4, alínea 4b .....                                | 138 |
| Figura 36– Respostas dos alunos A73, A155, A166 e A209, respetivamente, à questão 4, alínea 4b.....                     | 139 |
| Figura 37 – Respostas dos alunos A135, A123, A139, A132 e A171, respetivamente, à questão 4, alínea 4b .....            | 139 |
| Figura 38 – Resposta dos alunos A171 e A211 à questão 4, alínea 4c.....   | 140 |
| Figura 39 – Respostas dos alunos A155, A168 e A85, respetivamente, à questão 4, alínea 4c                               | 140 |
| Figura 40 – Respostas dos alunos A36, A67, A275 e A279, respetivamente, à questão 4, alínea 4c .....                    | 141 |
| Figura 41 – Respostas dos alunos A156 e A166, respetivamente, à questão 4, alínea 4d .....                              | 142 |
| Figura 42 – Respostas dos alunos A155, A15, A166 e A197, respetivamente, à questão 4, alínea 4e.....                    | 142 |
| Figura 43 – Enunciado da questão 5 proposta aos alunos.....   | 143 |
| Figura 44 – Respostas dos alunos A138, A147, A166, A174, A84 e A311, respetivamente, à questão 5, alínea 5a .....       | 145 |
| Figura 45 – Respostas dos alunos A36, A92 e A150, respetivamente, à questão 5, alínea 5a .                              | 146 |
| Figura 46 – Respostas dos alunos A171, A35, A123, A156, A272, A270 e A307, respetivamente, à questão 5, alínea 5b ..... | 147 |
| Figura 47 – Respostas dos alunos A28, A161 e A267, respetivamente, à questão 5, alínea 5b                               | 148 |
| Figura 48 – Resposta do aluno A287, à questão 5, alínea 5c.....   | 148 |
| Figura 49 – Respostas dos alunos A230, A171, A168, A34, A177, A197 e A96, respetivamente, à questão 5, alínea 5c .....  | 149 |
| Figura 50 – Respostas dos alunos A129, A156 e A100, respetivamente, à questão 5, alínea 5d .....                        | 150 |
| Figura 51 – Respostas dos alunos A13, A100, A101 e A6, respetivamente, à questão 5, alínea 5e .....                     | 151 |
| Figura 52 – Enunciado da questão 6 proposta aos alunos.....   | 152 |
| Figura 53 – Resposta dos alunos A159, A139, A112, A147 e A201, respetivamente, à questão 6, alínea 6a .....             | 153 |
| Figura 54 – Respostas dos alunos A79, A147 e A179, respetivamente, à questão 6, alínea 6c                               | 154 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 55 – Respostas dos alunos A34, A100, A123 e A156, respetivamente, à questão 6, alínea 6c.....   | 155 |
| Figura 56 – Respostas dos alunos A40, A87, A32 e A132, respetivamente, à questão 6, alínea 6d .....  | 156 |
| Figura 57 – Respostas dos alunos A58, A151 e A131, respetivamente, à questão 6, alínea 6d.....   | 156 |
| Figura 58 – Transformação linear usada para a uniformização das somas das pontuações, nos componentes e na escala global, ao intervalo de valores [0,1].....   | 215 |
| Figura 59 – Caixas de bigodes das somas das pontuações (transformadas) totais da escala e dos seus componentes dos alunos da fase de diagnose. A linha vermelha horizontal corresponde à pontuação neutra..... | 217 |
| Figura 60 – Tarefas 1, 2 e 3 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 1 .....   | 227 |
| Figura 61 – Tarefas 4 e 5 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 2 .....  | 231 |
| Figura 62 – Tarefas 6 e 7 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 2 .....  | 232 |
| Figura 63 – Tarefas 8, 9 e 10 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 3 .....  | 236 |
| Figura 64 – Tarefa 11 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 4.....   | 240 |
| Figura 65 – Tarefas 12 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 5 .....   | 243 |
| Figura 66 – Tarefas 14 e 16 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 5 .....  | 244 |
| Figura 67 – Tarefas 16 e 17 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 5 .....  | 245 |
| Figura 68 – Tarefas 18 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 5 .....   | 246 |
| Figura 69 – Tarefa 19 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 6.....   | 252 |
| Figura 70 – Enunciado da questão 1 proposta aos alunos.....  | 256 |
| Figura 71 – Resposta do aluno A29 à questão1, alínea 1.1a.....   | 256 |
| Figura 72 – Resposta do aluno A21 à questão1, alínea 1.1b .....  | 257 |
| Figura 73 – Resposta do aluno A17 à questão1, alínea 1.2.....  | 257 |
| Figura 74 – Resposta do aluno A19 à questão1, alínea 1.2.....  | 258 |
| Figura 75 – Resposta do aluno A32 à questão1, alínea 1.2.....  | 258 |
| Figura 76 – Enunciado da questão 2 proposta aos alunos.....  | 260 |
| Figura 77 – Resposta do aluno A20 à questão2, alínea 2.1b .....  | 261 |
| Figura 78 – Resposta do aluno A29 à questão2, alínea 2.1b .....  | 261 |
| Figura 79 – Resposta do aluno A14 à questão2, alínea 2.1b .....  | 262 |
| Figura 80 – Resposta do aluno A20 à alínea 2.2 .....   | 263 |
| Figura 81 – Resposta do aluno A16 à alínea 2.2 .....   | 264 |
| Figura 82 – Resposta do aluno A32 à alínea 2.2 .....   | 265 |
| Figura 83 – Resposta do aluno A14 à alínea 2.2 .....   | 265 |
| Figura 84 – Resposta do aluno A23 à alínea 2.2 .....   | 266 |
| Figura 85 – Resposta do aluno A23 à alínea 2.3 .....   | 267 |
| Figura 86 – Resposta do aluno A20 à alínea 2.3 .....   | 268 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 87 – Resposta do aluno A15 à alínea 2.3 .....  | 269 |
| Figura 88 – Resposta do aluno A34 (esquerda) e A28 (direita), respetivamente, à alínea 2.3. | 270 |
| Figura 89 – Enunciado da questão 3 proposta aos alunos.....                                 | 272 |
| Figura 90 – Resposta do aluno A16 à alínea c.....   | 272 |
| Figura 91 – Enunciado da questão 4 proposta aos alunos.....                                 | 274 |
| Figura 92 - Resposta do aluno A22 à alínea 4c.....  | 275 |
| Figura 93 - Resposta do aluno A20 à alínea 4c.....  | 275 |
| Figura 94 - Respostas dos alunos A25 (acima) e A24 (abaixo)à alínea 4d .....                | 277 |
| Figura 95 - Respostas dos alunos A18 (acima) e A15 (abaixo)à alínea 4e .....                | 278 |
| Figura 96 - Respostas dos alunos A22 (acima), A34 (meio) e A15 à alínea (abaixo) 4f.....    | 279 |

## LISTA DE TABELAS

|   |     |
|---|-----|
| Tabela 1 – Constituição da amostra de alunos.....   | 92  |
| Tabela 2 – Constituição da amostra de alunos envolvidos na intervenção de ensino .....  | 93  |
| Tabela 3 – Tabela de frequências absolutas (%) dos tipos de respostas nas alíneas da questão 1 e respetivo ID .....   | 121 |
| Tabela 4 – Tabela de frequências absolutas (%) dos tipos de respostas nas alíneas da questão 2 e respetivo ID .....   | 126 |
| Tabela 5 – Tabela de frequências absolutas (%) dos tipos de respostas nas alíneas da Questão 3 e respetivo ID .....   | 131 |
| Tabela 6 – Tabela de frequências absolutas (%) dos tipos de respostas nas alíneas da questão 4 e respetivo ID .....   | 136 |
| Tabela 7 – Tabelas de frequências absolutas (%) dos tipos de respostas nas alíneas da questão 5 e respetivo ID .....  | 144 |
| Tabela 8 – Tabela de frequências absolutas (%) dos tipos de respostas nas alíneas da questão 6 e respetivo ID .....   | 152 |
| Tabela 9 – Índices de dificuldade do TD por alíneas .....   | 157 |
| Tabela 10 – Associação, medida pelo coeficiente V de Cramér, nas respostas entre as questões sobre Funções .....  | 159 |
| Tabela 11 – Associação, medida pelo coeficiente V de Cramér, nas respostas entre as questões sobre Estatística .....  | 161 |
| Tabela 12 – Associação, medida pelo coeficiente V de Cramér, nas respostas entre as questões sobre Estatística e Funções .....  | 162 |
| Tabela 13 – Frequências absolutas (percentagens) dos tipos de respostas entre as alíneas 5b e 4b, entre 5b e 6c e entre 6c e 4b .....   | 165 |
| Tabela 14 – Frequências absolutas (percentagens) das categorias de respostas corretas em cada uma das questões 4b), 5b) e 6c) e em grupos de questões simultaneamente .....   | 168 |
| Tabela 15 – Frequências absolutas (percentagens) das categorias de conflitos semióticos identificados na questão 4b), na questão 5b), na questão 6c), simultaneamente em duas delas e simultaneamente nas três questões, e valor de prova (p) dos z-testes de comparação de proporções de cada tipo de conflito entre pares de questões ..... | 171 |
| Tabela 16 – Frequências absolutas (percentagens) dos tipos de respostas nas questões 4c e 5c.....   | 178 |
| Tabela 17 – Frequências absolutas (percentagens) da categoria de respostas corretas em cada uma das questões 4c e 5c e em ambas as questões simultaneamente .....   | 179 |
| Tabela 18 – Frequências absolutas (percentagens) das categorias de conflitos semióticos identificados na questão 4c, na questão 5c e simultaneamente nas duas questões, e valor de prova (p) dos z-testes de comparação de proporções de cada tipo de conflito entre as questões 4c e 5c.....   | 180 |
| Tabela 19 – Frequências absolutas (percentagens) dos tipos de respostas nas questões 4d) e 5d) .....  | 183 |
| Tabela 20 – Frequências absolutas (percentagens) das categorias de respostas corretas em cada uma das questões 4d) e 5d) e em ambas as questões simultaneamente.....  | 184 |
| Tabela 21 – Frequências absolutas (percentagens) das categorias de conflitos semióticos identificados na questão 4d, na questão 5d e simultaneamente nas duas questões, e valor de prova (p) dos z-testes de comparação de proporções de cada tipo de conflito entre questão 4d e 5d.....   | 185 |



|  |     |
|--|-----|
| Tabela 22 – Pontuação média, desvio padrão, correlação de cada item com o conjunto dos restantes, assimetria e curtose. Média e desvio padrão da pontuação média dos 25 ou 23 (excluídos os itens 23 e 25 assinalados a negrito) itens .....   | 207 |
| Tabela 23 – Medida de confiabilidade da escala quando excluído um item. Assinalado a negrito, quando se excluem os itens 23 e 25.....  | 209 |
| Tabela 24 – Pesos dos fatores extraídos pelo método das componentes principais e com rotação varimax para o modelo fatorial com os 23 itens selecionados para a escala adaptada. Em itálico estão assinalados os pesos (superiores ao valor limiar tomado de 0,4) para mais do que um fator por item ..... | 213 |
| Tabela 25 – Correspondência de itens entre a escala original EAE e a escala adaptada proposta.....   | 214 |
| Tabela 26 – Características das atitudes em relação à Estatística dos alunos na fase de diagnose, em termos globais (escala) e em termos de cada um dos seus quatro componentes. O valor de referência 0,5 representa a posição neutra.....  | 216 |
| Tabela 27 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas dos alunos da turma da Implementação de Ensino, em comparação com as dos 332 alunos dos dois agrupamentos  | 220 |
| Tabela 28 – Frequências absolutas (percentagem) dos conflitos semióticos (PC e I) dos alunos da turma .....  | 221 |
| Tabela 29 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas dos alunos em díade à Ficha de Tarefas 1 .....   | 228 |
| Tabela 30 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das díades, às Tarefas 4 e 5 .....   | 233 |
| Tabela 31 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das díades, às Tarefas 6 e 7 .....   | 234 |
| Tabela 32 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das díades, à Ficha de Tarefas 3 .....   | 237 |
| Tabela 33 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das díades, à Ficha de Tarefas 4 .....   | 241 |
| Tabela 34 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das díades, às tarefas 12 à 16.....  | 246 |
| Tabela 35 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das díades, às tarefas 17 e 18.....  | 247 |
| Tabela 36 – Frequências absolutas (percentagem) dos pontos alcançados pelos grupos na resolução das fichas de tarefas, após a análise das respostas dos alunos da turma da Intervenção de Ensino.....  | 250 |
| Tabela 37 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das díades .....   | 252 |
| Tabela 38 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas dos alunos no Teste Final  | 254 |
| Tabela 39 – Distribuição dos alunos segundo o tipo de respostas em 1c versus 4d.....   | 282 |
| Tabela 40 – Distribuição dos alunos segundo o tipo de respostas em 2.2 versus 4c.....  | 283 |
| Tabela 41 – Distribuição dos alunos segundo o tipo de respostas em 2.3 versus 4e.....  | 285 |
| Tabela 42 – Distribuição dos alunos segundo o tipo de respostas em 2.3 versus 4f.....  | 285 |
| Tabela 43 – Análise da idoneidade didática a priori do plano e dos documentos implementados na intervenção de ensino .....   | 313 |
| Tabela 44 – Análise dos resultados obtidos pelos alunos antes, durante e depois da implementação de ensino (avaliação escrita).....  | 320 |
| Tabela 45 – Frequências absolutas das pontuações das respostas dos alunos do 8.º ano aos 23 itens nas fases de diagnóstico e pós-intervenção .....   | 322 |

|   |     |
|---|-----|
| Tabela 46 – Resultados totais dos alunos e percentagem do máximo da pontuação da escala EAE adaptada de 23 itens a priori e a posteriori da intervenção pedagógica .....              | 323 |
| Tabela 47 – Resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov de uma amostra dos fatores a priori (antes) e a posteriori (depois) da intervenção de ensino .....                              | 323 |
| Tabela 48 – Resultados do teste de Wilcoxon de uma amostra dos fatores a priori (antes) e a posteriori (depois) da intervenção de ensino .....  | 324 |
| Tabela 49 – Comparação entre os resultados globais das componentes das atitudes avaliadas na escala de EAE adaptada, na Fase de Diagnose e na Fase de Pós-Intervenção de Ensino ..... | 325 |
| Tabela 50 – Comparação entre os resultados globais das componentes das atitudes avaliadas na escala de EAE adaptada, na Fase de Diagnose e na Fase de Pós-Intervenção de Ensino ..... | 326 |

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Neste capítulo explicitam-se as motivações para a realização deste estudo, que se centra no tema Estatística, um tema científico autónomo, com métodos e raciocínios próprios (Moore, 1991). Procura-se, ainda, dar a conhecer a lógica subjacente, no plano metodológico, ao percurso investigativo explorado, justificando as opções tomadas neste domínio e apresentando os princípios e procedimentos que orientaram a pesquisa que agora se apresenta.

Finalmente, desenvolvem-se as questões sobre a relevância e conceptualização da investigação, os aspetos transversais do referencial teórico que sustentam a investigação, assim como a forma como a tese foi estruturada.

#### 1.1. Contextualização e motivação

Aprender Estatística é de grande importância, já que ela influencia, cada vez mais, a vida das pessoas e das instituições. Segundo Fernandes (2009a) “a relevância da Estatística na sociedade tem-se repercutido no incremento do seu ensino nas escolas” (p. 1). Em muitas atividades comuns, como sejam a leitura de um jornal e a análise de uma pesquisa de opinião, nota-se a presença de conceitos científicos da Estatística (Estevam & Fürkotter, 2010).

Por outro lado, trata-se de uma disciplina científica autónoma, com métodos e raciocínios próprios (Moore, 1991), que quando não tidos em conta poderão dificultar, por vezes, a sua compreensão. A sua aprendizagem, em especial de gráficos estatísticos, é muito importante, devido à sua constante presença nos meios de comunicação e na Internet, sendo por isso natural que os alunos aprendam a ler e interpretar gráficos muito antes de ser feita a sua abordagem na escola (Arteaga, Batanero, Ortiz & Conteras, 2011).

De facto, os gráficos são uma excelente ferramenta de organização e representação de dados.

É de notar como o grande desenvolvimento da Estatística e das suas aplicações se tem repercutido no seu ensino nas escolas. No caso do ensino básico, o tema de Estatística, que se insere no domínio Organização e Tratamento de Dados (OTD), faz atualmente parte de todos os anos escolares do programa português da disciplina de Matemática (Ministério da Educação e Ciência, 2013), do 1.º ao 9.º ano, visando desenvolver nos alunos capacidades de interpretação, de avaliação crítica e de comunicação de informação estatística (Gal, 2002; Oliveira & Henriques, 2014).

Segundo Lopes (2004), o ensino da Estatística poderá contribuir para o desenvolvimento das capacidades de crítica e de autonomia, capacidades que estão indissociavelmente relacionadas com a construção e interpretação de gráficos estatísticos (Morais & Fernandes, 2011).

Assim, refletindo a comunicação social, enquanto meio onde a literacia estatística está muito presente (Arteaga, Batanero, Cañadas & Contreras, 2011; Espinel, González, Bruno & Pinto, 2009), o programa de Matemática incentiva a construção e interpretação de tabelas e gráficos estatísticos desde o primeiro ano de escolaridade (Ministério da Educação e Ciência, 2013), valorizando o aspeto gráfico no ensino e na aprendizagem da Estatística.

Na perspetiva de Pinker (1990), atualmente existe uma enorme variedade de representações gráficas (gráficos de barras, linhas, circulares, diagramas de caule-e-folhas, diagramas de extremos e quartis, diagrama de Venn, diagrama de árvore, árvores, pictogramas), cujo uso tem tido grande sucesso. Este autor refere que a compreensão de gráficos e o sucesso na sua leitura (extrair, de forma eficiente, informações neles contidos) depende de dois fatores: o primeiro encontra-se ligado à *eficiência do leitor*, dependendo da sua capacidade em processar as informações, da capacidade de memória e do processo inferencial; o segundo relaciona-se com a *eficácia do gráfico*, a sua capacidade de transmitir a informação e depende do tipo de gráfico, dos conceitos envolvidos e de sua complexidade semiótica.

Nesta perspetiva, na leitura de um gráfico intervêm uma série de processos que estão ligados à capacidade cognitiva do leitor: o *processo de reconhecimento* (reconhecer/identificar um gráfico como pertencendo a um tipo particular); o *processo de montagem da mensagem* (criar uma mensagem conceitual, isto é, informação disponível a ser extraída); o *processo de interrogação* (recuperar/codificar uma nova informação

baseada numa questão conceitual ou informação desejada); e o *processo inferencial* (aplicar as regras da inferência lógica e matemática para as entradas da mensagem conceitual) (Pinker, 1990).

Ainda segundo Pinker (1990), é a prática que faz desenvolver a habilidade para ler gráficos, já que a carga mental ao ler um gráfico nunca visto é muito maior do que sendo já conhecido, pois o *esquema gráfico* já estará armazenado na memória de longo prazo. Desta forma, quanto maior for o conhecimento de gráficos, maior o número de associações geradas entre as tendências quantitativas e os padrões visuais, produzindo um maior vocabulário mental e verbal associado à sua leitura.

Na construção de um gráfico é fundamental a sua compreensão, pois permite fundamentar cientificamente a sua construção e a sua escolha. (Fernandes, Morais & Lacaz, 2011). A construção gráfica não é fácil, sendo preciso que o gráfico informe, de forma inequívoca, compreensível, atrativa e coerente, sobre os dados que representa, pois de outro modo será de difícil interpretação (Ainley, 2000; Silva, 2006; Artega et al., 2011). É frequente serem apontadas dificuldades na interpretação de gráficos, designadamente ao nível de: *ler os dados*, que implica compreender os factos nele representados; *ler entre os dados*, que implica a interpretação e a organização da informação fornecida pelos dados; *ler para além dos dados*, que envolve fazer previsões e inferências da informação total dos dados do gráfico (Curcio, 1989; Espinel et al., 2009; Fernandes & Morais, 2011). Face às dificuldades reveladas, Espinel et al. (2009) recomenda que o ensino desta temática deva diferenciar o estudo dos gráficos, associando-os às variáveis qualitativas e quantitativas discretas e contínuas; recomenda a análise de gráficos estatísticos apresentados na comunicação social, por forma a que haja uma aprendizagem apropriada.

Potenciar ao máximo um gráfico é conseguir interpretá-lo e extrair o máximo possível de conclusões sobre os dados nele representados (Curcio, 1989). Alguns estudos apontam dificuldades dos alunos em representarem e relacionarem quantidades através de gráficos (Pais & Saraiva, 2011), outros insistem no porquê dessas dificuldades (Ponte & Fonseca, 2001; Serrano, Ortiz & Rodriguez, 2009) e, ainda, outros focam-se na aptidão dos alunos para os lerem e identificarem fatores que influenciam a sua compreensão (Friel, Curcio & Bright, 2001).

Diversos trabalhos de investigação abordam dificuldades dos alunos na representação gráfica e tabelar e na interpretação de enunciados envolvendo a noção de média e mediana. Tais dificuldades estão patentes, por exemplo, nas provas de avaliação

nacional (Sousa et al., 2010). Outro exemplo apontado como de difícil interpretação é gráfico de caule-e-folhas, considerado de fácil compreensão por ser uma representação que define uma distribuição mais próxima dos dados originais (Fernandes & Portela, 2004). Frequentemente os alunos manifestam dificuldades no domínio do pensamento estatístico (Luz, 2012), revelando, portanto, dificuldades na construção e interpretação deste tipo de gráficos.

Segundo Cazorla (2002), a eficácia de um dado gráfico depende, de entre outros fatores, dos conceitos estatísticos envolvidos na sua construção, donde quanto maior for o domínio do leitor dos conceitos e procedimentos estatísticos, maior será sua a eficácia na leitura de gráficos. Por exemplo, é fundamental que o leitor tenha a noção de mediana para poder aplicá-la na determinação dos quartis e para construir e interpretar diagramas de extremos e quartis (DEQ), pois lacunas a este nível podem estar na origem de dificuldades manifestadas pelos alunos na construção, interpretação e compreensão dos *diagramas* de extremos e quartis de acordo com Normas do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2008). A estas dificuldades Bivar, Grosso, Oliveira, e Timóteo (2013) acrescentam a que resulta de não existir uma definição universalmente aceite para a determinação dos primeiro e terceiro quartis. No entanto, apesar das dificuldades, alguns autores (Bakker, Biehler & Konold, 2005; Morais & Fernandes, 2011; Ministério da Educação e Ciência, 2013) consideram-no um tipo de gráfico de extrema relevância, já que envolve, em simultâneo, aspetos da centralização, dispersão e forma simétrica.

Relativamente à determinação das medidas de localização central (moda, média e mediana), embora estes conceitos sejam aparentemente simples, os alunos cometem frequentemente diversos erros. Por exemplo, na mediana, não efetuam a ordenação prévia dos dados e confundem-na com a moda ou até com a média (Batanero, 2000a). Batanero (2000a) refere que o facto de os alunos tenderem a usar um único procedimento na resolução de problemas e em cálculos, dificulta, em particular, a determinação da mediana, porquanto ela depende do número de dados ser par ou ímpar. Carvalho (1998) e Batanero (2000a) realçam o facto de os alunos estarem habituados a um único modelo de cálculo e a uma única solução para os problemas, o que, no caso da mediana, dificulta, porquanto ela depende de o número de dados ser par ou ímpar.

É igualmente importante e necessário que “o aluno compreenda que a média é *ponto de equilíbrio* de um dado conjunto de dados numéricos, enquanto que a mediana é o seu *meio*” (NCTM, 2008, p. 295). Sendo estes conceitos aparentemente simples, há, contudo, erros que os alunos cometem com bastante frequência: a troca do valor da

variável pelo maior valor da frequência, na moda; a determinação da mediana sem a ordenação prévia dos dados; a troca da moda pela mediana ou até mesmo pela média; a determinação da média dos valores das frequências, sem terem em conta os valores da variável (Boaventura & Fernandes, 2004; Fernandes & Barros, 2005).

Quanto à motivação e interesse pela problemática deste estudo, para além de ser um tema recente e muito atual, foi motivado pela reflexão em torno de vivências pessoais da profissão construída no desempenho de funções docentes. Procurou-se, por um lado, compreender as causas da dificuldade dos alunos, ao trabalharem os conceitos estatísticos, em contexto gráfico e tabelar, tentando “melhorar” o desempenho docente; por outro lado, com as alterações introduzidas no currículo nacional do ensino básico (Ministério da Educação e Ciência, 2013), importava conhecer as dificuldades manifestadas pelos alunos na aprendizagem do domínio Organização e Tratamento de Dados (OTD).

## 1.2. Descrição Geral do Estudo

### 1.2.1. Finalidade e organização geral

Pelo exposto constata-se que ainda há necessidade de realizar estudos para “melhorar” as aprendizagens dos alunos em Estatística e, para isso, compreender as dificuldades apresentadas por estes no estudo de medidas estatísticas de dados representados em gráficos e tabelas torna-se uma opção válida, dado o impacto que este tipo de representação tem no quotidiano atual.

A investigação que aqui se descreve foi desenhada com a finalidade de contribuir para um ensino inovador e eficaz para os alunos e para os professores, procurando-se integrar duas dimensões: o trabalho colaborativo (díade) e o trabalho individual. Ao longo do ano letivo 2014/2015 trabalhou-se, em colaboração com docentes de dois agrupamentos de escolas do distrito do Porto, no desenvolvimento de instrumentos (testes diagnóstico e de avaliação, Escala de Atitude em Relação à Estatística (EARE) e fichas de tarefas), tendo em vista aplicá-los a alunos do 8.º ano desses agrupamentos.

Na procura de respostas à problemática estabelecida, nos dois agrupamentos, foi implementado um teste diagnóstico, constituído por dois grupos de questões: um de funções e outro de estatística, em contexto gráfico e tabelar, e ainda uma escala de atitude adaptada da escala de atitude de Estrada (2002). Com o primeiro instrumento procurou-se relacionar as dificuldades apresentadas pelos alunos em Funções com as de Estatísticas,

em alunos do 8.º ano (332 alunos). Face aos resultados obtidos, num momento posterior, circunscreveu-se a procura de respostas à problemática numa turma do 8.º ano (23 alunos), de um dos dois agrupamentos, onde se implementou uma intervenção de ensino no conteúdo “diagrama de extremas e quartis”, com situações-problema ligadas ao real e privilegiando contextos gráficos e tabelares, cuja lecionação ficou a cargo do professor investigador. Quanto ao segundo instrumento, tratou-se da adequação da escala de atitude de Estrada (2002) à realidade portuguesa e ao público-alvo—alunos do 8.º ano. Esta escala foi aplicada aos alunos da turma onde decorreu a intervenção, antes e depois do ensino, com o objetivo de encontrar alterações na motivação e predisposição destes para a aprendizagem da Estatística.

O presente projeto inclui objetivos investigativos de orientação conceptual (compreender as dificuldades dos alunos em Estatística em contexto gráfico e tabelar e, em particular, na interpretação e análise de gráficos, diagramas e tabelas e na construção de DEQ), por um lado, e, por outro lado, apresenta objetivos investigativos de orientação para a aprendizagem (contribuir para a melhoria das experiências de aprendizagem dos alunos e a sua predisposição para a aprendizagem dos conceitos e conteúdos estatísticos). Para tal, a investigação envolveu o desenho e a implementação de estratégias que visaram promover aprendizagens mais significativas e um ensino colaborativo e reflexivo, sobretudo através da promoção do questionamento dos alunos.

Na linha da finalidade investigativa identificada, o trabalho empírico da presente investigação pode ser subdividido em três fases distintas:

Fase I (Diagnose) – Nesta fase e no início do ano letivo, sem ter sido abordado o domínio OTD desse ano, procedeu-se à recolha das respostas de 332 alunos participantes na investigação, relativamente à sua atitude em relação à Estatística, para conceber uma escala adaptada à realidade portuguesa e a alunos do ensino básico (8.º ano). Com essa escala pretendeu-se determinar a predisposição dos alunos para a aprendizagem da Estatística.

Na adequação da escala de atitude de Estrada (2002) à realidade portuguesa e ao público-alvo, alunos do 8.º ano, procedeu-se à elaboração do instrumento, à análise da dimensionalidade através da análise fatorial exploratória e à análise da consistência interna. A escala de atitude adequada foi usada para medir a atitude dos alunos face à Estatística da turma onde decorreu a intervenção de ensino, antes (*a priori*) e depois (*a posteriori*) da sua implementação.



Além da atitude, procurou-se também conhecer as dificuldades dos alunos nas medidas de localização, privilegiando os contextos gráfico e tabelar, de modo a estudar possíveis relações entre dificuldades em estatística e dificuldades em funções.

Para a recolha de dados sobre as dificuldades dos alunos elaborou-se um teste diagnóstico, com base em questões de provas de Matemática de avaliação externa, nacionais e de fichas de trabalho de outras escolas, atendendo ao atual programa de Matemática, com problemas/questões repartidos por dois grupos: um, sobre Funções, recorrendo a várias representações gráficas e tabelares; outro, sobre medidas de localização, sempre com ligação com o mundo real (Anexo VII). Foi efetuada uma análise semiótica das respostas dos 332 alunos, do 8.º ano de dois agrupamentos, com recurso às ferramentas do Enfoque Ontossemiótico (Godino, Batanero & Font, 2007) recolhidos. Estes resultados permitiram delinear o plano de implementação da intervenção de ensino, adaptada àquela realidade.

Fase II (Implementação) – É a fase em que ocorreu a intervenção de ensino, que foi implementada numa turma do 8.º ano, incidindo sobre o conteúdo DEQ e em que se privilegiou o trabalho em díade e os contextos gráficos e tabelares. Foram elaboradas as fichas tarefas (Anexo V) para os alunos da turma e implementadas no decurso da intervenção de ensino. Nos diferentes trabalhos desenvolvidos por Godino e colaboradores, no âmbito do Enfoque Ontossemiótico (EOS), tem sido destacado um conjunto de noções teóricas com o objetivo de “apontar ferramentas teóricas que analisam conjuntamente o pensamento matemático, os ostensivos que o acompanham, as situações e os fatores que condicionam o seu desenvolvimento”(Godino, Font, & Wilhelmi, 2008, p.11). Nesta investigação, os gráficos estatísticos e as medidas de tendência central são os objetos matemáticos de interesse no modelo EOS e de análise na perspetiva de prática matemática. O estudo terá como suporte uma análise sistemática de resoluções dos alunos em resposta a situações-problema propostas, envolvendo análises gráficas e tabelares. Após a implementação da intervenção de ensino procedeu-se à avaliação do impacto da implementação nas aprendizagens e na atitude face à Estatística dos alunos. Procedeu-se à construção de um segundo teste (Anexo VI) com questões relacionadas com os conceitos abordados durante o ensino, com o objetivo de avaliar as aprendizagens consolidadas e adquiridas.

É também nesta fase que se elaborou um guião de uma entrevista semiestruturada (Anexo VII), a aplicar aos alunos da intervenção após serem conhecidos os seus resultados. Promove-se, então, uma entrevista semiestruturada aos alunos cujos resultados se revelem pertinentes. Optou-se pela entrevista semiestruturada por ser a que melhor auxilia o investigador a manter-se próximo do problema em estudo e diminuir a dificuldade em organizar e analisar posteriormente os dados (Bogdan & Biklen, 2013). É ainda nesta fase que se realiza a entrevista e se aplica novamente o questionário de atitude face à estatística, com o objetivo de encontrar “melhorias” nas aprendizagens, esclarecer opções e justificações menos corretas, após concluído todo o trabalho.

Fase III (Avaliação) – É nesta fase que se procede à avaliação do grau de adequação do projeto de intervenção de ensino, desde a planificação (Anexo III), passando por todos os instrumentos aplicados, *a priori* e *a posteriori*, as interações observadas, a avaliação das aprendizagens e os seus resultados, até à análise do impacto dessas aprendizagens nas atitudes face à Estatística, sempre numa perspetiva de melhoria, de forma a analisar a idoneidade do processo de ensino em todas as suas fases. Esta idoneidade didática define-se como sendo a articulação coerente e sistemática de seis dimensões: Epistémica, Cognitiva, Interacional, Mediacional, Afetiva e Ecológica (Godino *et al.*, 2007).

### 1.2.2. Questões e objetivos do estudo

Na presente investigação, depois de definida a temática e constatada a sua pertinência, desenvolveu-se todo o desenho da investigação, desde as questões de investigação aos seus objetivos, com base em alguns princípios e fundamentos, que se apresentam de seguida.

Relativamente ao paradigma e natureza metodológica do estudo, face ao *porquê* das dificuldades dos alunos, e ao *como* melhorar a sua aprendizagem (Amado, 2013; Stake, 2012), a metodologia de investigação é de natureza Mista:

— Qualitativa Interpretativo-Naturalista (Coutinho, 2013), seguindo uma metodologia de Estudo de Caso (EC) descritivo, que favorece a profundidade do estudo. Utilizando-se este *design* de EC, é importante ter-se em conta os critérios de qualidade do estudo (Ponte, 2006), caracterizando-se pelo estudo detalhado das Medidas de localização em OTD, do programa de Matemática, onde é visada uma turma do 8.º ano, em contexto real, focando as tarefas por eles elaboradas em díade e a aprendizagem dos

alunos. A dimensão naturalista visa pensar a aprendizagem, interpretação e compreensão gráfica e tabelar e analisar o trabalho em pares (alunos) na sala de aula (Sampieri et al., 2013). Quanto ao papel do investigador, este recolherá dados descritivos dos participantes, no contexto onde a ação decorre, enquanto leciona as aulas, tendo na professora titular de turma uma assessora.

Nos diferentes trabalhos desenvolvidos por Godino e colaboradores (Godino *et al.*, 2007, 2008, 2009, entre outros) um conjunto de noções teóricas tem sido discriminadas com o objetivo de estudar os processos de estudo e de ensino da matemática. Em Godino *et al.* (2009) são descritos diferentes tipos de objetos e processos matemáticos, que, por sua vez, dão origem a diferentes configurações que intervêm na resolução de situações-problema. Para Godino *et al.* (2008), uma ontologia de objetos matemáticos contém, como ponto de partida do Enfoque Ontossemiótico (EOS), a formulação de uma teoria de objetos matemáticos incorporando aspetos base da matemática, como sejam a resolução de problemas, a linguagem simbólica e o sistema conceptual logicamente organizado. Aqueles autores referem ainda que a prática matemática não é mais do que toda a atuação ou expressão, seja ela verbal, gráfica ou outra, que pode ser realizada durante a resolução de um problema matemático, na comunicação e validação da solução obtida ou na generalização dessa solução a outros contextos ou problemas.

— Quantitativa, para promover explicações, predizer e controlar os fenómenos, procurando regularidades e leis através da objetividade dos procedimentos e da quantificação das medidas (Almeida & Freire, 2004). É, pois, através de estudos quantitativo-correlacionais que, segundo Almeida e Freire (2004), se procura compreender e prever fenómenos. É aqui que a utilização da linguagem matemática permite a sistematização das observações do mundo astronómico e físico, trabalhando-as de modo a construir novo conhecimento, que leva a descrições e modelos direcionados a uma construção abstrata que nem sempre traduz as situações observadas ou apenas as traduz parcialmente (Minayo & Sanches, 1993).

Assim, as duas perspetivas metodológicas possuem virtualidades inegáveis, mas também aspetos de menor valia, pelo que é através do recurso a ambas as metodologias que se podem ultrapassar barreiras epistemológicas em prol de uma integração metodológica, que permite encontrar a chave para um desenho metodológico cujas fraquezas de um método são contrabalançadas pelas forças de outro, numa simbiose e

complementaridade que conduz a melhores resultados, aproximando-se do conhecimento mais cabal da realidade em estudo (Sampieri, Collado & Lucio, 2013).

Neste sentido, no presente estudo assumem-se como questões de investigação (QI) as seguintes:

**QI1.** As dificuldades de alunos do 8.º ano na interpretação gráfica e tabelar de funções repercutem-se nas suas dificuldades nos conteúdos estatísticos?

**QI2.** Quais as atitudes em relação à Estatística dos alunos do 8.º ano das escolas envolvidas na fase de diagnose?

**QI3.** Uma intervenção de ensino privilegiando a representação gráfica e tabelar dos dados em situações do quotidiano favorece a aprendizagem de Estatística no 8.º ano?

**QI4.** As dificuldades de alunos do 8.º ano na interpretação e análise da representação gráfica e tabelar das medidas de localização repercutem-se nas suas dificuldades, de construção, interpretação e análise dos diagramas de extremos e quartis?

No Quadro 1 apresentam-se os objetivos e os métodos de recolha de dados adotados no estudo, segundo cada uma das questões de investigação.

Quadro 1- Os objetivos de cada uma das questões de investigação e os respetivos métodos de recolhas de dados.

| Questões de investigação | Objetivos  | Métodos de recolha de dados               |
|--------------------------|--|---|
| QI1                      | 1.1 Identificar dificuldades dos alunos em situações-problema do tema Funções (FSS) e do tema Estatística (OTD).   | Teste de diagnóstico                      |
|                          | 1.2 Relacionar as dificuldades dos alunos no tema Funções com as suas dificuldades no tema Estatística. (Estudar, descrevendo, as dificuldades dos alunos segundo diferentes subtemas, como por exemplo: interpretação de tabelas; interpretação de gráficos; conceitos; etc.).  |   |
|                          | 1.3 Estudar se a representação dos dados (tabelar e gráfica) afeta o cálculo correto de medidas de localização.  |   |
| QI2                      | 2.1 Construir uma escala de atitudes adaptada da escala de atitudes de Estrada (2002).   | Escala de atitudes                        |
|                          | 2.2 Estudar propriedades psicométricas (dimensionalidade e confiabilidade) da escala de atitudes dos alunos do 8.º ano em relação à Estatística.   |   |
| QI3                      | 3.1. Estabelecer uma intervenção de ensino de Estatística, para alunos do 8.º ano, privilegiando a representação gráfica e tabelar dos dados em situações do quotidiano.   | Fichas de Tarefas                         |
|                          | 3.2. Estudar a idoneidade didática planificação da intervenção de ensino (avaliação <i>a priori</i> ).   | Resoluções dos alunos                     |
|                          | 3.3. Estudar a idoneidade didática da intervenção de ensino implementada (avaliação <i>a posteriori</i> ).   | Interações em sala de aula                |
|                          | 3.4. Avaliar as atitudes dos alunos em relação à Estatística, antes e após a Intervenção de Ensino, verificando se existem mudanças significativas de atitude dos alunos envolvidos na intervenção de ensino.  | Escala de atitudes (antes e pós o ensino) |
|                          | 3.5. Comparar o desempenho dos alunos durante a Intervenção de Ensino com o seu conhecimento prévio (Teste Diagnóstico) e averiguar se após a Intervenção de Ensino houve alteração das suas atitudes em relação à Estatística (comparando as atitudes em termos evolutivos, antes e depois da intervenção).   |   |
| QI4                      | 4.1 Identificar dificuldades dos alunos em situações-problema do tema Estatística (OTD): na construção, interpretação e análise de diagramas de extremos e quartis de dados organizados em tabelas e em gráficos.  | Fichas de Tarefas                         |
|                          | 4.2 Averiguar a existência de dificuldades dos alunos na construção e análise de diagrama e extremos e quartis em função do tipo de representação gráfica ou tabelar dos dados (estudar e descrever as dificuldades dos alunos segundo diferentes subtemas, como por exemplo: interpretação de tabelas; interpretação de gráficos; conceitos; etc.). | Resoluções dos alunos                     |
|                          | 4.3 Comparar o desempenho dos alunos no subtema de medidas de localização, quando partindo de representações tabelares e gráficas dos dados, com o seu desempenho na representação dos diagramas de extremos e quartis.  | Teste Final<br>Entrevista semiestruturada |

Em síntese, o estudo tem como suporte a análise sistemática das respostas dos alunos às situações-problema propostas, envolvendo medidas de localização e de dispersão em contexto gráfico e tabelar, as suas atitudes em relação à Estatística e as interações ocorridas, avaliando-se a adequação do processo de estudo através das várias facetas da idoneidade didática do EOS.

### 1.2.3. Estrutura geral da tese

De seguida apresenta-se a estrutura geral da tese, descrevendo as diversas partes que constituem este documento.

No capítulo de Introdução apresenta-se uma breve contextualização do estudo e a sua pertinência face ao atual enquadramento no ensino básico, bem como as motivações que estiveram na base da sua realização. Descreve-se a finalidade investigativa, assim como os objetivos investigativos e as respetivas questões de investigação a que se pretende dar resposta.

O capítulo II constitui o Enquadramento Teórico da tese, o qual norteou todo o processo investigativo. Aí procede-se à discussão da fundamentação teórica deste estudo, tendo por base as ferramentas propostas por Godino (1999; 2012), segundo as três dimensões seguintes: epistemológica, baseando-se na teoria de significados matemáticos institucionais e pessoais (Godino & Batanero, 1994; 1998); semiótica-cognitiva, com o foco na teoria de funções semióticas (Godino, 2003); e educacional, tendo por base a teoria de percursos educativos (Godino, 1999).

No capítulo III abordam-se os procedimentos metodológicos adotados no estudo, mantendo a transparência e fundamentação das opções tomadas para atingir os objetivos de investigação estabelecidos.

O estudo empírico da tese integra os capítulos IV, V, VI e VII. Os dois primeiros capítulos fazem parte do estudo das aprendizagens e atitudes face à Estatística, respetivamente, enquanto que os outros dois integram o estudo do ensino e aprendizagem do tema Diagramas de Extremos e Quartis.

No capítulo IV organizam-se e analisam-se os dados recolhidos na fase de diagnose, com a aplicação do Teste Diagnóstico (TD) e a escala de atitude. O primeiro instrumento permitiu comparar percentagens de respostas dos alunos a cada uma das questões do TD, categorizadas em “corretas” (C), “parcialmente corretas” (PC), “incorretas” (I), bem como as “não respostas” (NR); seguidamente confrontaram-se dificuldades em Funções com dificuldades em Estatística, numa perspetiva quantitativa, e percentagens de

categorias de conflitos semióticos entre duas ou mais questões de Estatística, visando o estudo do desempenho dos alunos na determinação das medidas de localização em dados fornecidos sob forma tabelar versus gráfica, também segundo uma perspectiva quantitativa. A análise qualitativa focou-se na análise semiótica das respostas dos alunos, o que permitiu identificar conflitos semióticos inerentes às respostas parcialmente corretas e incorretas, com recurso ao EOS do conhecimento e do ensino da Matemática (Godino, Batanero & Font, 2007). Parte deste capítulo foi apresentado numa conferência internacional (Conferência internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa, 28-31/outubro/2015, Coimbra, Universidade de Coimbra) e deu origem a um artigo submetido a uma revista internacional.

No capítulo V descreve-se a adaptação à realidade portuguesa de alunos do 8.º ano a escala de atitude de Estrada (2002). Esta escala foi aplicada aos alunos do 8.º ano dos dois agrupamentos de escolas envolvidos no estudo. Com base nas 332 respostas desses alunos procede-se à elaboração da escala de atitude e à análise da dimensionalidade através da análise fatorial exploratória e à análise da consistência interna, adotando obviamente uma metodologia quantitativa.

No capítulo VI procede-se à descrição da implementação da intervenção de ensino, na qual os alunos trabalharam em díade e foram avaliados individualmente no final do ensino. Procede-se uma vez mais à categorização das respostas dos alunos, a cada uma das questões das Fichas de Tarefas e do Teste Final, em “corretas” (C), “parcialmente corretas” (PC) e “incorretas” (I), incluindo as “não respostas” (NR), numa perspectiva quantitativa. Seguidamente confrontaram-se as percentagens de categorias de conflitos semióticos, entre duas ou mais tarefas de Estatística, visando o estudo do desempenho dos alunos na determinação das medidas de localização e de dispersão, construção e análise de DEQ, em dados fornecidos sob forma tabelar e de gráfica, segundo uma perspectiva quantitativa e com recurso ao EOS do conhecimento e do ensino da Matemática (Godino, Batanero & Font, 2007). Parte deste capítulo foi apresentado numa conferência (IV Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola, 29/abril/2017, Vila Real, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro) e originou um artigo submetido a uma revista internacional.

Finaliza-se o estudo empírico com o capítulo VII, no qual se analisa a idoneidade do projeto de intervenção de ensino, desde a sua conceção à sua avaliação. No estudo da idoneidade *a priori* analisa-se a adequação do design e dos instrumentos implementados,

enquanto no estudo da idoneidade *a posteriori* se verifica a adequação didática, tendo em conta os momentos de interação e os resultados obtidos pelos alunos.

No último capítulo da tese, o capítulo VIII, apresentam-se as conclusões gerais de todo o estudo, discutem-se as suas limitações e implicações. São também sugeridas recomendações decorrentes dos resultados e das conclusões em termos de futuros estudos.

A seguir, no Quadro 2 apresenta-se uma breve síntese da estrutura global da tese.

Quadro 2 - Plano geral da estrutura da tese.

|                       |   |               |  |
|-----------------------|---|---------------|--|
| Introdução            |   | Capítulo I    | Contextualização e descrição global do estudo  |
| Enquadramento Teórico |   | Capítulo II   | A Estatística no currículo escolar português. O enfoque ontossemiótico e as suas ferramentas.  |
| Metodologia           |   | Capítulo III  | Contextualização paradigmática e caracterização metodológica do projeto de investigação.   |
| Estudo Empírico       | Aprendizagem e atitudes face à Estatística                    | Capítulo IV   | <u>A compreensão das representações tabelares e gráficas na aprendizagem da Estatística</u> – Conhecimento prévio dos alunos – Fase de diagnose e estudo das dificuldades estatísticas com análise semiótica e categorização do tipo de erro; relação destas dificuldades com as dificuldades em funções de alunos do ensino básico. |
|                       |   | Capítulo V    | <u>Adequação da escala de atitudes em relação à Estatística para estudantes</u> – Construção da escala de atitudes; análise da dimensionalidade da escala através da análise fatorial exploratória e análise da consistência interna.  |
|                       | Ensino e aprendizagem do tema Diagramas de Extremos e Quartis | Capítulo VI   | <u>Implementação da intervenção de ensino</u> – Em trabalho autónomo e colaborativo, em díade em sala de aula; trabalho individual não presencial, análise das dificuldades detetadas e avaliação das aprendizagens.   |
|                       |   | Capítulo VII  | <u>Avaliação da implementação da intervenção de ensino</u> – Idoneidade do projeto de intervenção de ensino <i>a priori</i> e <i>a posteriori</i> ; Análise da mudança de atitudes dos alunos face à Estatística, comparando a atitudes antes e depois da intervenção de ensino.   |
| Conclusões            |   | Capítulo VIII | Sínteses e conclusões.   |

Por fim, refira-se que a tese é acompanhada por um *CD-ROM* no qual constam os dados recolhido ao longo da investigação, bem como os resultados obtidos com estes que se revelaram pertinentes para o presente trabalho (Anexos).





## CAPÍTULO II

### ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Inicia-se este capítulo com uma breve resenha sobre a evolução do currículo escolar português, no que concerne à introdução da Estatística até à sua expansão como domínio inserido em OTD, no programa curricular de matemática.

De seguida apresenta-se a fundamentação teórica deste estudo, tendo por base as ferramentas propostas por Godino (1999; 2012), segundo as três dimensões seguintes: epistemológica, baseando-se na teoria de significados matemáticos institucionais e pessoais (Godino & Batanero, 1994, 1998); semiótico-cognitivo, com o foco na teoria de funções semióticas (Godino, 1998); e educacional, tendo por base a teoria de percursos educativos (Godino, 1999).

Para este estudo, o recurso às ferramentas teóricas centrou-se nas duas primeiras dimensões. A problematização da natureza de um objeto matemático depende do tipo de atividades realizadas na resolução do problema proposto. O trabalhar com símbolos matemáticos (significantes) está intimamente ligado à natureza das atividades realizadas na resolução dos problemas propostos, e à ação (interiorizada ou não) do sujeito, remetendo-a para entidades conceituais (significados).

O domínio da sintaxe da linguagem matemática é importante na instrução matemática, bem como também é essencial a compreensão da sua semântica, dada a natureza dos conceitos e proposições matemáticas e a sua relação com os contextos e situações-problema que surgem da resolução do problema. Essa modelização tem em conta, entre outros aspetos, os pressupostos: a diversidade de objetos envolvidos na atividade matemática, tanto em termos de expressão como de conteúdo; a diversidade de eventos e processos de interpretação; a diversidade dos contextos e

circunstâncias espaço-temporais e psicossociais que influem e relativizam esses processos (Cobo, 2003).

Segundo alguns autores (e.g., Godino, Batanero & Font, 2007; Font, Godino & Gallardo, 2012; Godino, 2012), o par (sistema de práticas, configuração de objetos e processos) contém noções-chave para realizar análises epistemológicas e cognitivas requeridas na didática da matemática. Estas ferramentas teóricas permitem formular o problema epistémico (conhecimento institucional, sociocultural) e cognitivo (conhecimento pessoal) do ensino da matemática nos seguintes termos:

— Que práticas matemáticas institucionais e que configurações de objetos e processos estimulados em tais práticas são necessárias para resolver um tipo de tarefas matemáticas? (Significado institucional de referência);

— Que práticas, objetos e processos matemáticos são utilizados por estudantes na resolução de um tipo de tarefas matemáticas? (Significado pessoal);

— Que práticas pessoais, objetos e processos envolvidos nestas realizadas pelos estudantes, são válidas segundo perspectiva institucional? (Competência, conhecimento, compreensão do objeto por parte do sujeito) (Godino, 2012, p. 52).

Por fim, neste faz-se apresenta-se a revisão de literatura, sobre o tema em estudo.

## 2.1. Introdução do estudo da Estatística no currículo escolar português

Na sociedade atual a Estatística ganha progressiva importância na sua aplicabilidade nos diversos domínios do saber, na perceção dos cidadãos e na gestão de informação. Atualmente em Portugal, no ensino básico, o estudo da Estatística insere-se no domínio matemático Organização e Tratamento de Dados (OTD) e ocorre em todos os anos de escolaridade, visando desenvolver, nos alunos, capacidades de interpretação, avaliação crítica e comunicação de informação estatística (Oliveira, & Henriques, 2014).

Batanero (2013) considera que as principais finalidades de se ensinar Estatística estão relacionadas com utilizar a Estatística para questionar, compreender o mundo e tomar decisões inteligentes.

Para conhecer as reais dificuldades dos alunos, nesta área, há vários estudos com alunos dos diversos níveis de ensino, desde o ensino básico ao universitário

(Batanero, Godino & Navas, 1997; Boaventura, 2003; Marques, Guimarães & Gitirana, 2011; Ribeiro, Correia & Fernandes, 2013) que evidenciam dificuldades, nomeadamente, na leitura, análise, elaboração e interpretação de gráficos ou tabelas e na utilização das medidas de localização, entre outras. Garfield e Ahlgren (1988) consideram que os alunos pensam a Estatística de modo semelhante à matemática, perspetivando as suas respostas como soluções únicas, o que constitui uma fonte de dificuldade pois a natureza da Estatística envolve alguma incerteza e as soluções oferecem apenas um certo grau de precisão.

O termo “Estatística” surgiu em meados do século XVIII (Branco, 2006), e durante muito tempo os países mais desenvolvidos utilizavam-na como ferramenta na organização dos dados provenientes de atividades do estado e na sua análise (Branco, 2000). Segundo este autor, o desenvolvimento dos primeiros métodos estatísticos surgiu, por um lado, da necessidade de novas investigações científicas e, por outro, da emergência e reconhecimento de problemas de natureza estatística nas mais diversas áreas científicas, industriais e em atividades governamentais, o que motivou o interesse pelo seu ensino (Branco, 2000).

Em Portugal, a inserção de Estatística como tema curricular do ensino secundário surgiu na década de sessenta do século passado, em resultado da reforma do ensino da matemática que ficou conhecida por Movimento da Matemática Moderna (Silva, 1964; Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). Posteriormente, em resultado da Reforma do Sistema Educativo de 1986, no início da década de 1990, do século passado, a Estatística foi também introduzida no ensino básico, embora com pouca relevância, em lugar discreto e marginal (Ponte & Fonseca, 2000; Branco, 2006). Neste último caso, mais concretamente, o tema de Estatística fazia parte dos programas da disciplina de matemática do 2.º e 3.º ciclo do ensino básico (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). Segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), o desenvolvimento do “pensamento estatístico e probabilístico, ao longo da escolaridade, constitui um aspeto importante, na formação que a escola deve proporcionar” (p. 94).

No programa de matemática para o 1.º ciclo (Ministério da Educação, 1990) não existia nenhum bloco específico de Estatística, apenas surgia implicitamente nos objetivos gerais: “Recolher dados simples e organizá-los de forma pessoal recorrendo a diferentes tipos de representação” e “Ler e interpretar informação com maior

facilidade” (ME, 1990, p. 128). O programa da disciplina estava organizado em três blocos temáticos: Números e Operações, Grandezas e Medidas e Espaço e Forma.

No que concerne ao 2.º ciclo do ensino básico, o programa de matemática (ME, 1991a) considerava a Estatística como um conteúdo de aprendizagem. Referia-se, então, a recolha, organização e interpretação de dados, a frequência absoluta, a moda, média aritmética e a representação da informação em tabelas e gráficos de barras, sendo recomendado que os alunos deviam retirar conclusões de experiências simples relacionadas com o conceito de moda e média aritmética.

Quanto ao programa do 3º ciclo (ME, 1991c), nele indicava-se, como objetivo geral, a recolha, organização, representação e interpretação de informação, a construção de tabelas de frequência, gráficos de barras, circulares e pictogramas. Relativamente às medidas de tendência central, preconizava-se que a média, moda e mediana devem constituir instrumentos para sintetizar e analisar informação.

Na reorganização curricular, o Departamento de Educação Básica (DEB) editou o Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais em 2001, no qual se explanaram as competências gerais e específicas das disciplinas. Na disciplina de matemática, no tema Estatística e Probabilidades, o currículo promove o desenvolvimento dos alunos ao longo de todos os ciclos, realçando os seguintes aspetos importantes:

a predisposição para recolher e organizar dados relativos a uma situação ou a um fenómeno e para os apresentar de modos adequados, nomeadamente através de tabelas e gráficos e utilizando as novas tecnologias; a aptidão para ler e interpretar gráficos à luz das situações a que dizem respeito e para comunicar os resultados das interpretações feitas; a tendência para dar resposta a problemas com base na análise de dados recolhidos e de experiências planeadas para o efeito; a aptidão para realizar investigações que recorram a dados de natureza quantitativa, envolvendo a recolha e análise de dados e elaboração de conclusões; a aptidão para usar processos organizados de contagem na abordagem de problemas combinatórios simples; a sensibilidade para distinguir fenómenos aleatórios e fenómenos deterministas e para interpretar situações concretas de acordo com essa distinção; o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentado (p. 64).

Saliente-se que não é referido nenhum aspeto específico neste tema, no 1.º ciclo do ensino básico, embora sejam referidos aspetos específicos para o 2.º e 3.º ciclos. Em relação ao segundo ciclo é dado relevo aos aspetos específicos:

a compreensão das noções de frequência absoluta e relativa, assim como a aptidão para calcular estas frequências em situações simples; a

compreensão das noções de moda e de média aritmética, bem como a aptidão para determiná-las e para interpretar o que significam em situações concretas; a sensibilidade para criticar argumentos baseados em dados de natureza quantitativa (p. 65).

No caso do terceiro ciclo, foram consideradas as seguintes competências específicas:

compreensão de noções de moda, média aritmética e mediana, bem como a aptidão para determiná-las e para interpretar o que significam em situações concretas; a sensibilidade para decidir quais das medidas de tendência central são mais adequadas para caracterizar uma dada situação; a aptidão para comparar distribuições com base nas medidas de tendência central e numa análise da dispersão dos dados; o sentido crítico face à apresentação tendenciosa de informação sob a forma de gráficos enganadores e a afirmações baseadas em amostras representativas; a aptidão para entender e usar de modo adequado a linguagem das probabilidades em casos simples; a compreensão da noção de probabilidade e a aptidão para calcular a probabilidade de um acontecimento em casos simples (p. 65).

Reforçando tais competências, referia-se que a finalidade global do ensino da Estatística é levar os alunos a dar valor e tomar consciência da importância do papel da Estatística na sociedade, fomentando neles o pensamento estatístico (Holmes, 2000).

Em relação às orientações metodológicas, o programa não referia nenhuma orientação relativamente à temática ao nível do 1.º ciclo do ensino básico. Já no programa do 2.º ciclo do ensino básico propunha-se que os alunos iniciassem o trabalho com as técnicas de recolha, organização e representação de dados estatísticos, em tabelas de frequência, gráficos de barras e pictogramas, o conceito de frequência absoluta, moda e média. O programa sugeria que os alunos realizassem trabalhos dentro e fora de sala de aula, em grupo ou individualmente; mas todas as atividades deviam atender aos interesses e vivências dos alunos, com temas da atualidade e transversais às diversas disciplinas (ME, 1991b), possibilitando o desenvolvimento do espírito crítico, face às informações do dia-a-dia.

Para o 3.º ciclo as orientações metodológicas recomendavam a realização de atividades de recolha, organização, representação e interpretação de dados, com construção de tabelas, gráficos de barras e gráficos circulares. Neste ciclo os alunos deviam aprofundar a análise de informação para formularem conjecturas, para tirarem conclusões, fundamentando-as. Aqui as medidas de tendência central têm um papel fundamental, pois podem ser utilizadas como instrumentos de análise e síntese de informação. Relativamente às probabilidades, as sugestões do programa remetem

para a resolução de problemas simples, envolvendo atividades relacionadas com jogos e envolvendo a organização de processos de contagem, com o intuito de familiarizar os alunos com a linguagem específica deste tema (Ponte & Fonseca, 2000). Uma vez mais as atividades desenvolvidas deviam estar orientadas para os interesses e vivências dos alunos, numa perspectiva de atualidade e em articulação com outras disciplinas (Ministério da Educação, 1991b).

A nível do ensino secundário, o programa sofreu ajustes (Ministério da Educação, 1997) e com a Reforma do Ensino Secundário foram estabelecidos novos programas: Matemática A (Ministério da Educação, 2002a), Matemática B (Ministério da Educação, 2002b) e Matemática Aplicada às Ciências Sociais (Ministério da Educação, 2001b). Neste último programa, a Estatística é mais aprofundada do que nos restantes.

Em 2001, Ponte e Fonseca (2000), num estudo comparativo entre currículos de três países, constataram que o currículo português deveria assumir que a Estatística é um elemento fundamental da formação para a cidadania, já que em Portugal a Estatística é encarada como um capítulo da matemática de menor importância, em comparação com os programas dos outros dois países. Estes autores recomendam que a estatística seja encarada “como um elemento fundamental da formação para a cidadania e, para isso, trazendo para o primeiro plano a Análise de Dados” (p. 22). Consideram ainda essencial que seja feita “uma mudança de perspectiva, deixando de encarar a Estatística como um capítulo “pobre” e pouco interessante da matemática, para passar a considerá-la como um elemento fundamental na formação básica da generalidade dos cidadãos (Idem).

Na perspectiva de Branco e Martins (2002), para que uma pessoa possa ser considerada estatisticamente informada, necessita de compreender a

necessidade de trabalhar dados (compreendendo que os dados não são unicamente números, mas números inseridos num determinado contexto), conhecendo a sua proveniência e a forma de os produzir; estar familiarizado com os termos e ideias básicas de Estatística Descritiva, nomeadamente métodos (medidas, tabelas e gráficos) para reduzir a informação contida nos dados; compreender noções básicas de Probabilidade; entender o mecanismo do processo inferencial ao tomar decisões estatísticas (p. 12).

A publicação, em 2007, do *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB) (ME, 2007), que introduziu modificações curriculares importantes, permitiu

melhorar a articulação entre os programas dos três ciclos, introduzindo alguns temas novos, tais como Organização e Tratamento de Dados (OTD), reforçando o estudo da Estatística em todos os ciclos, inculcando explicitamente ao nível do 1.º ciclo. Este programa vai mais longe nos conceitos estatísticos e “na complexidade dos conjuntos de dados a analisar, nas medidas de tendência central e de dispersão a usar, nas formas de representação de dados a aprender e no trabalho de planeamento, concretização e análise de resultados de estudos estatísticos” (ME, 2007, p. 7).

Analisando o programa de matemática (ME, 2007) no tema OTD, constata-se que no 1.º ciclo o principal propósito é “desenvolver nos alunos a capacidade de ler e interpretar dados organizados na forma de tabelas e gráficos” (p. 26) e também proceder “à recolha, organizar e representar com o fim de resolver problemas em contextos variados relacionados com o seu quotidiano” (Idem); no 2.º ciclo, espera-se que o aluno deva ser capaz de “explorar, analisar, interpretar e utilizar informação de natureza estatística, selecionar e usar métodos estatísticos apropriados para recolher, organizar e representar dados, planear e realizar estudos que envolvam procedimentos estatísticos, interpretar os resultados obtidos e formular conjecturas a partir deles, utilizando linguagem estatística” (p.42); por fim, no 3.º ciclo, o programa propõe que os alunos no final deste ciclo consigam “compreender a informação de natureza estatística e desenvolver uma atitude crítica face a esta informação; ser capazes de planear e realizar estudos que envolvam procedimentos estatísticos, interpretar os resultados obtidos e formular conjecturas a partir deles, usando linguagem estatística; desenvolver a compreensão da noção de probabilidade; ser capazes de resolver problemas e de comunicar em contextos estatísticos e probabilísticos” (ME, 2007, p. 59). Para melhor visualizar a distribuição dos tópicos do tema OTD, a estudar ao longo do ensino básico, transcreve-se a tabela seguinte:

Quadro 3 – Dimensões metodológicas e os seus componentes (ME, 2007, p. 67)

| 1.º ciclo   |  | 2.º ciclo  | 3.º ciclo   |
|---|--|--|---|
| 1.º e 2.º ano   | 3.º e 4.º ano  |  |   |
| Representação e interpretação de dados<br>• Leitura e interpretação de informação apresentada em tabelas e gráficos | Representação e interpretação de dados e situações aleatórias<br>• Leitura e interpretação de informação | Representação e interpretação de dados<br>• Formulação de questões<br>• Natureza dos dados | Planeamento estatístico<br>• Especificação do problema<br>• Recolha de dados<br>• População e amostra |

---

|  |   |  |   |
|--|---|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Classificação de dados utilizando diagramas de Venn e de Carroll</li> <li>• Tabelas de frequências absolutas, gráficos de pontos e pictogramas</li> </ul> | <p>apresentada em tabelas e gráficos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Gráficos de barras</li> <li>• Moda</li> <li>• Situações aleatórias</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tabelas de frequências absolutas e relativas</li> <li>• Gráficos de barras, circulares, de linha e diagramas de caule-e-folhas</li> <li>• Média aritmética</li> <li>• Extremos e amplitude</li> </ul> | <p>Tratamento de dados</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Organização, análise e interpretação de dados – histograma</li> <li>• Medidas de localização e dispersão</li> <li>• Discussão de resultados</li> </ul> <p>Probabilidade</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória</li> <li>• Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento.</li> </ul> |
|--|---|--|---|

---

Relativamente à abordagem metodológica, o programa de matemática (ME, 2007) propõe, no 1.º ciclo, que o aluno tenha a oportunidade de realizar experiências com o intuito de organizar e tratar dados, para além de contactar, no seu dia-a-dia, com situações aleatórias, resolvendo problemas em variados contextos, problemas relacionados com o seu quotidiano. Em relação ao 2.º ciclo, o aluno alarga e aprofunda os tópicos estudados no ciclo anterior: recolhe, organiza, descreve, apresenta e interpreta dados de atividades com problemas identificados pelos alunos, na sua vida quotidiana, o que permite desenvolver a sua capacidade de compreender e de produzir informação estatística, que poderá utilizar na resolução de problemas e na tomada de decisões informadas e argumentadas. A nível do 3.º ciclo, espera-se que o aluno alargue o reportório das medidas estatísticas (tais como o estudo da mediana, quartis e amplitude interquartis) e das formas de representação de dados (através de diagramas de extremos e quartis), podendo realizar estudos estatísticos onde se compara dois ou mais conjuntos de dados, nas suas semelhanças e diferenças.

O *Programa e Metas Curriculares Matemáticas para o Ensino Básico* (PMCMEB) (AnexoI), que teve o seu início em 2013 (Ministério da Educação e Cultura, 2013) e continuando atualmente em vigor, introduziu modificações



curriculares. O domínio Álgebra tem início no 2.º ciclo e o domínio Funções, Sequências e Sucessões inicia-se no 3.º ciclo. No Quadro 4 apresentam-se os conteúdos do domínio OTD no ensino básico, distribuídos ao longo dos três ciclos por ano de escolaridade.

Quadro 4 – Dimensões metodológicas e os seus componentes (MEC, 2013, pp. 6-27)

| 1.º ciclo   | 2.º ciclo  | 3.º ciclo  |
|---|--|--|
| <u>1.º Ano</u>  | <u>5.º Ano</u>   | <u>7.º Ano</u>   |
| Representação de conjuntos<br>- Conjunto, elemento pertencente a um conjunto, cardinal de um conjunto;<br>- Diagramas de Venn com conjuntos disjuntos.                              | Gráficos cartesianos<br>- Referenciais cartesianos, ortogonais e monométricos;<br>- Abcissas, ordenadas e coordenadas;<br>- Gráficos cartesianos.  | Medidas de localização<br>- Sequência ordenada dos dados;<br>- Mediana de um conjunto de dados, definição e propriedades;<br>- Problemas envolvendo tabelas, gráficos e medidas de localização.  |
| Representação de dados<br>- Gráfico de pontos e pictograma em que cada figura representa uma unidade.   | Representação e tratamento de dados<br>- Tabelas de frequências absolutas e relativas;<br>- Gráficos de barras e de linhas;<br>- Média aritmética;<br>- Problemas envolvendo a média e a moda;<br>- Problemas envolvendo dados em tabelas, diagramas e gráficos. | <u>8.º Ano</u><br>Diagramas de extremos e quartis<br>- Noção de quartil;<br>- Diagramas de extremos e quartis;<br>- Amplitude interquartil;<br>- Problemas envolvendo gráficos diversos e diagramas de extremos e quartis.   |
| <u>2.º Ano</u>  | <u>6.º Ano</u>   | <u>9.º Ano</u>   |
| Representação de conjuntos<br>- Reunião e interseção de conjuntos;<br>- Diagramas de Venn e Carroll.  | Representação e tratamento de dados<br>- População e unidade estatística;<br>- Variáveis quantitativas e qualitativas;<br>- Gráficos circulares;   | <u>9.º Ano</u><br>Histogramas<br>- Variáveis estatísticas discretas e contínuas; classes determinadas por intervalos numéricos; agrupamento de dados em classes da mesma amplitude;<br>- Histogramas; propriedades;<br>- Problemas envolvendo a representação de dados em tabelas de frequência e histogramas. |
| Representação de dados<br>- Tabelas de frequências absolutas, gráficos de pontos, de barras e pictogramas em diferentes escalas;<br>- Esquemas de contagem ( <i>tally charts</i> ). | - Análise de conjuntos de dados a partir da média, moda e amplitude;<br>- Problemas envolvendo dados representados de diferentes formas.   |  |

---

### 3.º Ano

Representação e tratamento de dados

- Diagramas de caule-e-folhas;
- Frequência absoluta;
- Moda;
- Mínimo, máximo e amplitude;
- Problemas envolvendo análise e organização de dados, frequência absoluta, moda e amplitude.

### 4.º Ano

Tratamento de dados

- Frequência relativa;
- Noção de percentagem;
- Problemas envolvendo o cálculo e a comparação de frequências relativas.

### Probabilidade

- Experiências deterministas e aleatórias; universo dos resultados ou espaço amostral; casos possíveis;
- Acontecimentos: casos favoráveis, acontecimento elementar, composto, certo, impossível;
- Acontecimentos disjuntos ou incompatíveis e complementares;
- Experiências aleatórias com acontecimentos elementares equiprováveis;
- Definição de Laplace de probabilidade; propriedades e exemplos;
- Problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação de probabilidades de diferentes acontecimentos compostos, utilizando tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore;
- Comparação de probabilidades com frequências relativas em experiências aleatórias em que se presume a equiprobabilidade dos casos possíveis.

---

Constata-se que no domínio *Organização e Tratamento de Dados*, no 1.º ciclo, é dada “ênfase a diversos processos que permitem reportar e interpretar informação recolhida em contextos variados, aproveitando-se para fornecer algum vocabulário básico da Teoria dos Conjuntos, necessário à compreensão dos procedimentos efetuados. No 3.º ano é apresentada a noção de frequência absoluta e no 4.º ano a de frequência relativa, bem como a representação de números racionais sob forma de percentagem” (ME, 2013, p. 6). A nível do 2.º ciclo são retomadas “várias representações de conjuntos de dados e noções estatísticas elementares como a média, a moda e a amplitude. É o momento ideal para se introduzir a noção de gráfico

cartesiano de uma correspondência, que será naturalmente revisitada com mais profundidade no 3.º ciclo no contexto das funções” (ME, 2013, p. 14). No 3.º ciclo, neste domínio, introduzem-se algumas medidas de localização e dispersão de um conjunto de dados, faz-se uma iniciação às probabilidades e aos fenómenos aleatórios.

Com a revogação do PMEB (2007), as mudanças introduzidas pelo PMCMEB (2013) em OTD sugerem que, no que concerne à Estatística, se mantêm os desafios na implementação do seu ensino, embora com a introdução de Metas Curriculares neste novo programa se registre alguma diminuição da importância atribuída ao domínio da OTD e nesta viragem pedagógica se verifique a existência de um maior formalismo.

Segundo alguns autores (Henriques & Fernandes, 2014; Veloso, Brunheira & Rodrigues, 2014) as alterações propostas por este programa, no tema Estatística, ocorrem a vários níveis: da gestão de tempo, dos objetivos, dos conteúdos, das indicações metodológicas e de recursos.

Em relação à gestão de tempo, considerando que os tempos sugeridos no programa tendem a influenciar a importância dada ao respetivo tema, “é inferior aos dos restantes temas matemáticos (...) revela uma desvalorização da Estatística não compatível com a importância que ele tem adquirido nas recentes orientações curriculares internacionais e no anterior programa de 2007.” (Henriques & Fernandes, 2015, p. 60); quando se compara os objetivos, “no programa de 2007 são referidos *objetivos gerais* do tema, centrados na Estatística” (Henriques & Fernandes, 2015, p. 60), no programa de 2013 os objetivos enunciando, não são específicos do tema e apresentando-se genéricos, abstratos e comuns aos vários temas matemáticos; não existem alterações significativas quanto aos conteúdos entre os dois programas do ensino básico relativamente à Estatística; no que concerne às indicações metodológicas, na perspetiva de Veloso, Brunheira e Rodrigues (2014), as orientações retiram a liberdade metodológica, já que as que lhe estão associadas tem subjacente uma metodologia única, desvaloriza a intuição e o trabalho com situações reais e próximas dos alunos, empobrecendo as suas aprendizagens; na perspetiva de Henriques e Fernandes (2015) as indicações metodológicas “no programa de 2013, assume-se, explicitamente, a não especificação de sugestões metodológicas como forma de promoção da autonomia das escolas e dos professores” (p. 62), enquanto que no programa de 2007, são feitas muitas sugestões metodológicas, tanto em

termos de abordagem, como em termos de tarefas, sendo ainda visível o ênfase dado à realização de projetos e trabalhos de investigação, ao longo dos três níveis escolares do ensino básico. São também sugeridas tarefas relacionadas com o quotidiano, com outras disciplinas e no interesse do próprio aluno.

Em relação a recursos, se no programa de 2007, a referência ao uso da máquina de calcular e computador, nomeadamente a Internet e a material manipulável, no programa de 2013 deixa de ser dado esse ênfase, mantendo-se a recomendação do recurso a tabelas e diagramas para determinar e comparar probabilidade de acontecimentos compostos.

Em suma, da análise realizada por estes autores infere-se que no atual programa é maior a valorização da memorização na aprendizagem, para além de uma perspetiva mais formal. No programa de 2013 “não há referência às finalidades afetivas, que constavam no programa anterior, parece não reconhecer seu contributo para a aprendizagem” (Henriques & Fernandes, 2015, p. 64). Há ainda a salientar o facto de a desvalorização do trabalho de projetos investigativos e a tarefas relacionadas com o quotidiano, não seguirem as recomendações internacionais (GAISE, 2005; NCTM, 2008) e por muitos investigadores da área (e.g., Batanero et al., 2011, Fernandes et al., 2007, Oliveira & Henriques, 2014; MacGillivray & Pereira-Mendoza, 2011; Velez, Ponte, Serrazina, 2016).

## 2.2. Marco Teórico

Em diversos estudos, realizados nos últimos anos, é possível encontrar referências a novas abordagens, a modelos e ferramentas teóricas, entre as quais se encontra o Enfoque Ontosemiótico (EOS) do conhecimento e do ensino da Matemática, que tem vindo a ser desenvolvido por Godino e colaboradores na última década.

Godino, Batanero e Font (2007) apresentam um conjunto de ferramentas teóricas que unem o enfoque ontológico e semiótico do conhecimento e da aprendizagem da matemática, com base na importância da linguagem nos processos de comunicação e de interpretação face à diversidade dos objetos matemáticos intervenientes. O referido enfoque acolhe ferramentas teóricas que servem para analisar, conjuntamente, o pensamento matemático, os manifestos que o acompanham, as situações e os fatores que condicionam o seu desenvolvimento (Godino, Batanero & Font, 2007).

No presente estudo importa identificar e padronizar as dificuldades que os alunos sentem em conteúdos relacionados com as medidas de tendência central e na construção, interpretação e análise do diagrama de extremos e quartis. Para tal, recorrer-se-á às ideias do EOS implementadas por Godino e colaboradores. No EOS, a compreensão de qualquer conceito matemático está associada à competência do saber fazer, no sentido em que cada sujeito compreende determinado objeto matemático quando o usa de maneira adequada em diferentes práticas, e não no sentido de um processo meramente mental (Godino, Batanero & Font, 2007). Em Godino (2002) são estabelecidas noções teóricas sobre o conhecimento e sobre o ensino da matemática, com o objetivo de utilizá-las para descrever qualquer atividade matemática ligada à resolução de situações-problema. Importa aqui analisar, em particular, problemas relacionados com os conceitos de moda, média, mediana, quartis e diagrama de extremos e quartis, com dados numéricos não organizados ou representados em tabelas e gráficos.

#### 2.2.1. Sistema de práticas operativas e discursivas ligadas a tipos de problemas

A matemática, segundo a teoria desenvolvida por Godino e colaboradores, é concebida como um conjunto de *práticas* envolvendo *objetos matemáticos*. Godino e Batanero (1994) indicam que, associado a uma variedade de problemas existe associado um sistema de práticas prototípicas e que o significado dos *objetos matemáticos* tem origem nas práticas levadas a cabo por quem as realiza, ao resolver *problemas* relacionados com o objeto em causa, que, por sua vez, leva à sua consolidação e permite o cruzamento de relações entre distintos objetos (Godino & Batanero, 1994). Segundo Lester (1980), um problema é uma situação em que se pede a um indivíduo que realize uma tarefa para a qual não dispõe de um algoritmo facilmente acessível que determine completamente o método de solução. O indivíduo ao defrontá-lo tem algum critério para determinar o processo de resolução do problema, quando a tarefa é completada de forma satisfatória (Simon, 1978).

A *prática matemática* é toda a ação ou manifestação (linguística ou não) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução, validar a solução e generalizá-la a outros problemas e contextos (Godino & Batanero, 1994). Uma prática pessoal, tais como as atuações observáveis (manifestações empíricas) ou não diretamente observáveis (ações interiorizadas), é

significativa (no sentido de fazer sentido) se, para a pessoa, esta prática desempenha uma função para obter o objetivo de resolução de um problema.

Tome-se como noção primitiva a de situação-problema, definem-se os conceitos de *prática*, *objeto* (pessoal e institucional) e *significado*, com o intuito de tornar visível e operativo o caráter da matemática na gênese pessoal e institucional do conhecimento matemático, bem como da sua mútua interdependência.

Considera-se, antes de mais, a noção de instituição, como aquela que é constituída pelas pessoas envolvidas numa mesma classe de situações problemáticas. O compromisso mútuo com a mesma problemática contribui para a realização de práticas sociais partilhadas, que por sua vez estão ligadas à instituição para a qual contribuem. No caso de ser uma instituição matemática, ela reúne no seu seio pessoas que estão comprometidas na resolução de novos problemas matemáticos, isto é, são os produtores do “saber matemático”. Existem outras instituições implicadas com “situações matemáticas”, os “utilizadores” desse saber, designados por matemáticos aplicados, e ainda os professores de matemática (a escola do saber matemático).

Godino e Batanero (1994), os objetos matemáticos (por serem da instituição matemática), tais como, a descrição de problemas ou situações problemáticas, representações simbólicas, definições de objetos, enunciados de proposições e procedimentos, que são invariantes característicos do campo de ação, e argumentação, ligados às práticas matemáticas, são *objetos institucionais*. Estes são objetos emergentes do *sistema de práticas* associadas a um campo de problemas, que mais não é do que toda a atuação ou manifestação (linguística ou não) realizada na prática matemática. Tal emergência é progressiva ao longo do tempo, e num dado momento é reconhecido como objeto pela instituição, passando depois a sofrer transformações progressivas à medida que se vai ampliando o campo de problemas associado.

Refira-se ainda que os objetos institucionais são os constituintes do conhecimento objetivo, tendo em conta o conhecimento matemático como uma construção social, descrito por Ernest (1991, 1994), que considera que a base do conhecimento matemático é o conhecimento linguístico, convenções e regras, e a linguagem como sendo uma construção social, cujos processos sociais interpessoais são necessários para tornar um conhecimento matemático individual subjetivo, após aceitação dos pares, em um conhecimento matemático objetivo. Assim, a objetividade, em si própria, deve ser compreendida como um ato social.

De um campo de problemas podem emergir diversos objetos que, em consequência, estão mutuamente relacionados, assim como a variedade de situações problemáticas em que um mesmo conceito é aplicado (Vergnaud, 1990). Também os próprios objetos institucionalmente reconhecidos são fonte de novos problemas, podendo ser usados como ferramentas na resolução de outros (Douady, 1986). Ao considerar-se esta definição de objeto institucional considera-se a existência (cultural) de distintos objetos, segundo a instituição de referência, em situações onde a concepção *absolutista* da matemática contempla um único objeto.

Em relação ao sistema de práticas pessoais, refira-se que estas se associam a um campo de problemas, constituído pelas práticas prototípicas que uma pessoa realiza na tentativa de resolver um campo de problemas. O *objeto pessoal* é um emergente do sistema de práticas pessoais significativas associadas a um campo de problemas, e a emergência do objeto é progressiva ao longo da história do sujeito, como consequência da experiência e da aprendizagem. Estes objetos são os constituintes do conhecimento subjetivo (Ernest, 1991).

Assim, nas *práticas* envolvem-se diferentes tipos de objetos. Ao realizar, interpretar e avaliar uma prática matemática, está-se a configurar o sistema desses objetos que foram utilizados. No EOS, esse sistema é constituído por objetos definidos, entre eles, os seguintes seis que definem a tipologia de entidades primárias dos objetos ligados à prática matemática: situações-problema, linguagem, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos, que incluem os constructos cognitivos, tais como concepções, esquemas, representações internas, etc., que se referem a sistemas de práticas realizadas por uma pessoa.

Ora, nas práticas matemáticas temos objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) e não ostensivos (conceitos, proposições, etc.), os quais são representados em forma textual, oral, gráfica ou inclusivamente gestual. De tais práticas operativas e discursivas emergem novos objetos que provêm das mesmas, traduzindo a sua organização e estrutura. Se os sistemas de práticas são partilhados no seio de uma instituição, os objetos emergentes consideram-se *objetos institucionais*; se tais sistemas correspondem a uma pessoa, consideram-se *objetos pessoais*.

Quando se procede a uma reflexão sobre as aprendizagens dos alunos, de um certo objeto matemático, deve ter-se em conta que esse objeto pode ter significados diferentes para pessoas individuais ou instituições. Para Godino (1996), o problema

de compreensão está internamente ligado à forma como o conhecimento pessoal (do aluno) se relaciona com o conhecimento institucional. Segundo este autor,

o problema da compreensão está intimamente ligado a como se concebe o próprio conhecimento matemático. Esta explicação implica respostas a questões como: qual é a natureza do objeto matemático a compreender? Quantas formas ou maneiras de compreensão existem de cada um dos conceitos? Que aspetos ou componentes de conceitos matemáticos é possível e desejável que os alunos aprendem num momento e em que circunstâncias? Como esses componentes são desenvolvidos? (Godino, 1996, p. 418).

Segundo Godino (2000) e Font (2001), existem duas formas de entender a “compreensão”: como processo mental ou como competência. Estes dois pontos de vista respondem a concepções epistemológicas que são divergentes. Na didática da matemática, os enfoques cognitivos entendem a compreensão como “processo mental”. Entenda-se Didática da Matemática como um campo de investigação cujo fim é identificar, caracterizar e compreender os fenómenos e processos que condicionam o ensino e a aprendizagem da matemática (Godino, 2003). Para este autor, a Educação Matemática é ampla e vista como uma área geral, enquanto que a Didática da Matemática é mais restrita e vista como um campo científico.

Na perspectiva pragmática do EOS entende-se a compreensão como competência em vez de um processo mental, em que um sujeito compreende um determinado objeto matemático quando o usa de maneira competente em diferentes práticas. Por outro lado, o fato de se considerar que as funções semióticas têm um papel essencial no processo relacional entre entidades ou grupos de entidades, que se realiza nas práticas matemáticas (dentro de um determinado jogo de linguagem), permite entender no EOS a compreensão também em termos de funções semióticas (Godino, 2003). Assim, falar de conhecimento equivale a falar de conteúdo de uma (ou muitas) funções semióticas, originando uma variedade de tipos de conhecimentos em correspondência com a diversidade de funções semióticas que podem ser estabelecidas entre as diversas entidades introduzidas no modelo.

Os *objetos matemáticos* servem para indicar qualquer entidade ou coisa que se pretende referir ou falar, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que de alguma maneira intervêm na atividade matemática, como seja a resolução de problemas envolvendo, por exemplo, conceitos associados ao diagrama de extremos e quartis.



Os objetos de uma prática matemática podem originar entidades mais complexas como, por exemplo, teorias. Godino *et al.* (2009) referem que os objetos, na sua entidade primária, relacionando-se entre si, criam configurações de objetos intervenientes e emergentes dos *sistemas de práticas*.

A noção de *sistema de práticas* é útil para certas análises macro didáticas, e para proceder a uma análise mais profunda da atividade matemática é necessário que os objetos se relacionem uns com os outros formando configurações, definidas como redes de objetos envolvidos, sistemas emergentes de práticas e relações estabelecidas entre eles. Essas configurações podem ser epistémicas (redes de objetos institucionais) ou cognitivas (redes de objetos pessoais). Deste modo, as práticas e configurações de sistemas são propostas como instrumentos teóricos para descrever o conhecimento matemático em sua dupla versão: pessoal e institucional.

Na Figura 1 apresenta-se o resumo socio-epistémico e cognitivo do significado, entendido como sistemas de práticas, sendo que a sua utilização na análise de formação leva a introduzir diferentes tipos de significados institucionais e pessoais, como se pode observar na Figura 1 (Godino, Batanero & Font, 2007).

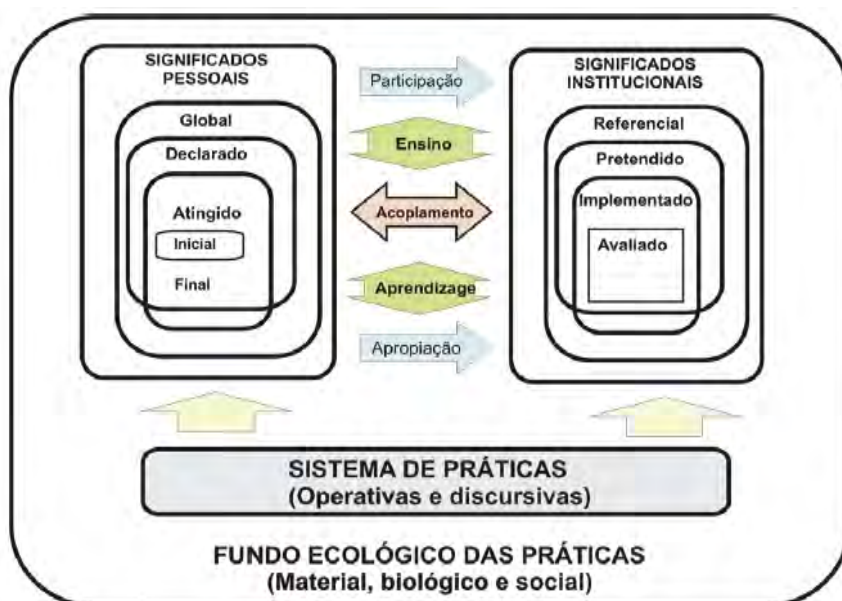


Figura 1 – Tipos de significados institucionais e pessoais (Godino, Batanero & Font, 2007, p. 13)

No caso do significado institucional, os autores estabeleceram os seguintes quatro tipos de significado:

— *Referencial*: sistema de referência de práticas utilizado como referência para desenvolver o significado pretendido. Em termos da instituição de ensino, este significado de referência será uma parte do significado holístico do objeto

matemático. A determinação de tal importância global requer um estudo histórico-epistemológico sobre a origem e evolução do objeto em questão, e tem que ter em conta a diversidade de contextos de uso, em que é posto em jogo o referido objeto. Por exemplo, no programa nacional português a abrangência da definição de mediana estudada a nível do ensino básico (7.º ano) é diferente da utilizada no secundário (10.º ano), por ser introduzido o conceito de dispersão;

— *Pretendido*: sistema de práticas incluídas no planeamento de um processo de estudo;

— *Implementado*: num processo de estudo específico, é o sistema de práticas efetivamente implementadas pelo professor;

— *Avaliado*: sistema de práticas que são utilizados pelos professores para avaliar a aprendizagem.

Em relação aos significados pessoais, são introduzidos os três seguintes tipos de significados:

— *Global*: é todo o sistema de práticas pessoais que um sujeito potencialmente pode manifestar em relação a um objeto matemático;

— *Declarado*: refere-se às práticas efetivamente expressadas através das avaliações propostas, incluindo tanto as “corretas” como as “incorretas” de um ponto de vista institucional;

— *Atingido*: corresponde às práticas expressas que são consistentes com as práticas institucionais estabelecidas. Na análise da variação dos significados pessoais, que ocorre em um processo de estudo, interessa observar os *significados iniciais* ou anteriores dos alunos e aqueles que alcançam no final do processo de estudo, que são os *significados finais*.

Na parte central da Figura 1 indicam-se as relações dialéticas entre o ensino e a aprendizagem, que supõem o acoplamento progressivo entre os significados pessoais e institucionais. Neste sentido, o ensino implica a participação do estudante na comunidade de práticas que suporta os significados institucionais, assumindo-se que aprendizagem, em última instância, supõe a apropriação pelo estudante desses significados (Godino, 2003).

### 2.2.2. Objetos emergentes e intervenientes do sistema de práticas

Godino e Batanero (1994) consideram que a configuração epistémica não é mais que o conjunto de objetos envolvidos na resolução de tarefas. Dentro dessa configuração distinguem-se a prévia e a emergente. Na realização de uma prática matemática e interpretação de seus resultados consideram-se os componentes do conhecimento que possibilitam a realização e avaliação dessa prática. Por exemplo, para resolver um problema envolvendo a noção de média e mediana examina-se o uso de *linguagens*, verbais e simbólicas, as quais são a parte ostensiva de uma sequência de *conceitos*, *proposições* e *procedimentos* que, por sua vez, intervêm na elaboração de *argumentos* que decidem se as ações que constituem a prática são satisfatórias. Assim, quando se realiza uma prática matemática, ativa-se um conjunto de elementos formado por: situações-problema, linguagens, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos, articulados na *configuração* da Figura 2.

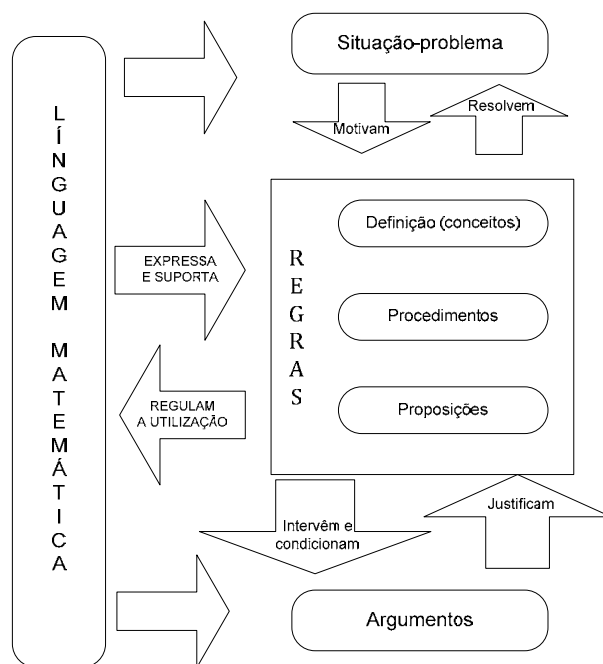


Figura 2 – Configuração de objetos primários (Font & Godino, 2008, p. 69)

Na Figura 2 apresentam-se os seis objetos matemáticos primários que articulados entre si formam configurações epistémicas (no caso das instituições) ou cognitivas (no caso das pessoas).

Font e Godino (2008) sugerem a seguinte tipologia de objetos matemáticos primários:

— *Situações-problema*, são aplicações extra matemáticas, tarefas, exercícios, problemas de onde emergem os objetos, ações que induzem uma atividade matemática. Por exemplo, problemas sobre medidas de localização cujos dados são apresentados em suporte diferente;

— *Linguagem* envolve termos como, expressões, notações, gráficos que se usam para representar os dados de um problema, as operações que se efetuam, os objetos matemáticos que se utilizam e a solução encontrada em seus diversos registos (escrito, oral, gestual, ...). Por exemplo, a expressão do cálculo da média e da mediana (símbolos e expressões associadas), gráficos de pontos, de barras, circulares, ... No estudo das medidas de tendência central e de dispersão a linguagem verbal (termos como média aritmética, média ponderada) tem um peso muito importante, sendo igualmente importante a linguagem simbólica (expressões associadas);

— *Conceitos e definições* são formulações introduzidas mediante descrições e definições (número, média, mediana, função, ...). Trata-se de práticas realizadas pelos alunos para resolver um problema matemático com uso implícito ou explícito de objetos matemáticos, que o aluno tem que se lembrar e aplicar (moda, média, mediana, máximo, mínimo);

— *Propriedades/Proposições* são enunciados sobre relações ou propriedades dos conceitos que se utilizam para resolver problemas matemáticos (os alunos têm que recordar que a determinação da mediana depende do número de dados e da ordenação destes);

— *Procedimentos* são algoritmos, operações, técnicas de cálculo que os alunos aplicam para a resolução do problema (os cálculos que os alunos têm de efetuar para determinar a média e algoritmo de determinação da mediana);

— *Argumentos* são enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos ou a solução dos problemas a outra pessoa, que podem ser dedutivos, indutivos, formais ou informais.

Cada um dos objetos matemáticos, antes referidos, encontra-se associado a um processo matemático: problematização, comunicação, definição, enunciação, algoritmização e argumentação (Godino, Batanero & Font, 2007).

Importa realçar que uma entidade primária, na perspetiva de entidade funcional e relacionadas com jogos de linguagem (marco institucional e contextos de uso) em particular, é uma questão não absoluta, pois pode-se atribuir um carácter recursivo, no

sentido de que cada objeto depende do nível de análise, já que pode estar composto por entidades dos demais tipos (por exemplo, o argumento pode colocar em jogo conceitos, proposições e procedimentos).

A Didática da Matemática estuda os processos de ensino e aprendizagem dos saberes matemáticos, sendo uma área científica que caracteriza os fatores que condicionam tais processos. Na opinião de Neto (2009), os significados que os alunos atribuem aos termos e símbolos matemáticos, aos conceitos e proposições, devem ser alvo de análise, assim como a construção dos seus significados como consequência de processos de ensino.

Godino, Bencomo, Font e Wilhelmi (2006) consideram que o EOS pode ajudar a superar algumas das limitações existentes, a nível da análise da cognição e do ensino da matemática. Pode considerar-se que se trata de uma expectativa, baseada na generalidade com que se definem as noções de problema matemático, prática matemática, instituição, objeto matemático, entre outras. São estas noções que permitem estabelecer conexões coerentes na procura de uma focagem unificada do modelo.

No EOS os objetos matemáticos que intervêm na prática matemática ocupam o lugar central. A sua modelização tem lugar em termos de sistema de práticas operativas e discursivas. Destas práticas emergem os diversos tipos de objetos matemáticos que, relacionados entre si, formam configurações. Finalmente, os objetos que intervêm nas práticas matemáticas e os emergentes das mesmas, segundo o jogo de linguagem em que participam, podem ser observados em cinco facetas ou dimensões duais:

— *Pessoal-institucional*. Se os sistemas de práticas são compartilhados no âmbito de uma instituição, os objetos emergentes são considerados “objetos institucionais”; se estes sistemas são específicos de uma pessoa são considerados como “objetos pessoais” (Godino & Batanero, 1994, p. 338).

— *Ostensivo-não ostensivo*. Entende-se por *ostensivo* qualquer objeto que é público e que, portanto, pode ser mostrado a outro ou materializado de alguma forma (associado a notações, símbolos, gráficos). O objeto ostensivo pode ser também pensado, imaginado por um sujeito ou estar implícito no discurso matemático (por exemplo, a ordenação dos dados para a obtenção da mediana);

— *Expressão-conteúdo*. antecedente e consequente de qualquer função semiótica. A atividade matemática e os processos de construção e uso dos

objetos matemáticos se caracterizam por serem essencialmente relacionais. Os distintos objetos não devem ser concebidos como entidades isoladas, senão colocadas em relação uns com os outros. A relação estabelece-se por meio de funções semióticas, entendidas como uma relação entre um *antecedente* (expressão, significante) e um *consequente* (conteúdo, significado) e instituídas por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com um certo critério ou código de correspondência;

— *Extensivo-intensivo. (exemplar-tipo)*. Um objeto que intervém em um jogo de linguagem como um caso particular (o exemplo específico de uma mediana) ou uma classe mais geral (por exemplo, as medianas de todas as amostras de uma população).

— *Unitário-sistémico*. Em algumas circunstâncias os objetos matemáticos participam como entidades unitárias (um dado), enquanto em outras intervêm como sistemas (a distribuição de dados) que devem ser decompostos para seu estudo.

Segundo Godino, Batanero e Font (2007), os objetos matemáticos que intervêm nas práticas matemáticas e os seus emergentes podem ser analisados segundo as facetas ou dimensões duais (Godino, 2002). Estes autores consideram que as dimensões são apresentadas e agrupadas em duplas que se complementam em termos dialéticos, sendo estes atributos aplicáveis aos diferentes objetos primários e secundários e permitindo obter “versões” de acordo com os seguintes processos epistémicos/cognitivos: institucionalização-personalização; generalização - particularização; análise / decomposição-síntese / reificação; materialização / concretização; idealização / abstração; expressão / representação significado.

Na Figura 3 estão representadas as diferentes noções teóricas, em que os seis tipos de elementos, acima referidos, entram em jogo, constituindo uma resposta operativa ao problema ontológico da representação e significação do conhecimento Matemático.

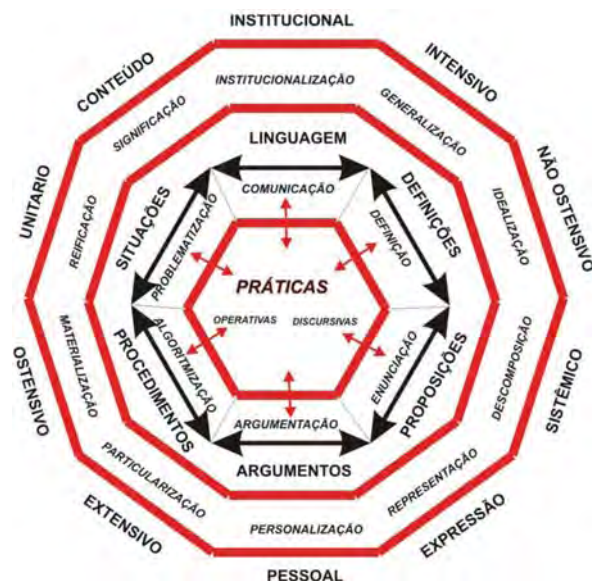


Figura 3 – Modelo ontossemiótico dos conhecimentos matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2007, p.18)

Todas as noções teóricas descritas (sistemas de práticas, instituições, processos, entidades emergentes, configurações, atributos contextuais, junto com a noção de função semiótica como entidade relacional básica) compõem a resposta operativa ao problema ontológico da representação e significado do conhecimento matemático (Godino, Batanero & Font, 2007).

### 2.2.3. Relações entre objetos em análise: função semiótica

A noção de função signo de Hjelmslev (1943) é retomada por Godino e seus colaboradores, ao considerá-la como a dependência entre um texto e suas componentes, e destas entre si. Considera-se que

um signo está constituído sempre por um (ou mais) elementos de um plano da expressão colocados convencionalmente em correlação com um (ou mais) elementos de um plano do conteúdo. Sempre que exista correlação deste tipo e seja reconhecida por uma sociedade humana, existe signo. [...] Uma função semiótica realiza-se quando dois *funtivos* (expressão e conteúdo) entram em correlação mútua [...] (Eco, 1995, pp. 83-84).

Tais noções são fundamentais para se definirem as correspondências (relações de dependência ou função) entre um antecedente (expressão, representante) e um conseqüente (conteúdo, representado), que são estabelecidas por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com um determinado critério ou código de correspondência. Esses códigos podem ser regras informando os sujeitos implicados sobre os termos que devem ser colocados em correspondência nas circunstâncias fixadas. Por

exemplo, ao proferir-se o termo “média” está subjacente a operação de adicionar todos os dados e dividir o resultado obtido pelo número de dados.

Ora tais relações de dependência entre expressão (“média”) e conteúdo (a operação e o seu resultado) podem ser do tipo representacional (por exemplo, se um objeto é colocado no lugar de outro para um determinado propósito; por exemplo, “média” representa todos os valores que lhe estão associados aos quais se aplica o algoritmo); instrumental (se um objeto usa outro ou outros como instrumento; por exemplo, na utilização de numerais para representar quantidades de uma certa grandeza e se operar com eles); e estrutural (se dois ou mais objetos compõem um sistema do qual emergem novos objetos; como por exemplo, a relação estrutural entre a “mediana” e os “quartis”). Assim, as funções semióticas e a ontologia matemática associada contemplam a natureza essencialmente relacional da matemática e generalizam, de maneira essencial, a noção de representação (Mayén, 2009).

Como já foi referido, o papel de representação não é exclusivamente assumido pela linguagem, podendo ser assumido também por qualquer tipo de objeto (situações-problema, conceitos, proposições, procedimentos e argumentos). Em qualquer caso, essa representação pode assumir o papel de expressão (verbal associada a um campo de problema) ou de conteúdo (gráfico de distribuição de dados) das funções semióticas. Tais funções semióticas correspondem a um instrumento relacional que facilita o estudo conjunto da manipulação de ostensivos matemáticos e do pensamento que a acompanha, característico das práticas matemáticas.

Já se referiu que os seis tipos de elementos de significado (situações-problema, linguagem, conceitos-definição, proposições, procedimentos e argumentos) estão relacionados entre si, e que formam configurações definidas como redes de objetos intervenientes e emergentes dos sistemas de práticas. Estas configurações podem ser epistémicas (redes de objetos institucionais) ou cognitivas (redes de objetos pessoais).

A constituição desses objetos e suas relações, tanto na sua faceta pessoal como institucional, tem lugar ao longo do tempo mediante processos matemáticos, os quais são interpretados como “sequências de práticas”. A construção dos objetos linguísticos, problemas, definições, proposições, procedimentos e argumentos têm lugar mediante os respetivos processos matemáticos primários, de comunicação,



problematização, definição, enunciação, realização de procedimentos (execução de algoritmos, rotinas...) e argumentação (Godino, 2003).

Ao analisar-se a compreensão de um dado objeto matemático, por determinado grupo de estudantes, importa definir o que se entende por “compreensão”. Segundo Sierpiska (1990), compreender um dado conceito é considerado como o ato de entender o seu significado; tal ato será a generalização e síntese de significados relacionados com certos elementos associados ao conceito. Esta autora salienta que a compreensão produz novas formas de conhecimento, tendo em conta quatro atos de compreensão: *Identificação* (ato de percepção súbita de objetos que pertencem à denotação do conceito — relacionado com o conceito em questão — ou para a identificação de um termo como tendo status científico); *Descriminação* (a diferenciação entre dois objetos, propriedades ou ideias que se confundiam antes); *Generalização* (consiste em perceber que algumas condições não são essenciais ou a possibilidade de estender o leque de aplicações); *Síntese* (consiste em adquirir as relações entre duas ou mais propriedades, eventos ou objetos e organizá-los num todo coerente).

Em termos gerais, para Sierpiska (1990), compreensão e obstáculos são dois lados da mesma moeda, sendo o lado negativo, os obstáculos, já que atende ao que está errado; na outra face, a compreensão, é o lado positivo, uma vez que busca novas formas de conhecimento. Refere ainda que, por vezes, alguns atos de compreensão são atos de superação de obstáculos e outros tornam-se atos de aquisição de novos obstáculos. Esta autora considera que atos de compreensão de um conceito matemático devem ser complementados por uma lista de obstáculos epistemológicos relativos ao conceito, proporcionando mais informações sobre o seu significado.

Tal como já foi referido antes, Godino e Linares (2000) e Font (2001) consideram compreensão como processo mental ou como competência. Ora, no posicionamento pragmático do EOS, entende-se a compreensão, basicamente, como competência e não tanto como processo mental, já que se considera que um sujeito compreende um determinado objeto matemático ao utilizá-lo de forma competente em diferentes práticas. Assim, o fato de se considerar que as funções semióticas têm um papel essencial no processo relacional entre entidades ou grupos de entidades, que se realiza nas práticas matemáticas (dentro de um determinado jogo de linguagem), implica que essas funções semióticas se relacionem com a noção de compreensão no EOS (Godino, 2003). Com efeito, Godino (1996) recorda que não

se pode observar diretamente a compreensão pessoal, mas apenas se pode observar as práticas pessoais (significados). Desta forma, quando se pretende analisar a compreensão de um dado objeto, por parte de um indivíduo, as práticas observadas são os indicadores empíricos que permitem efetuar essa avaliação.

Neste estudo procura-se avaliar o significado pessoal de alunos do 8.º ano, do ensino básico, das medidas de tendência central e de dispersão, tendo por referência as noções institucionais que são estabelecidas no Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013), e mais especificamente nas chamadas Metas Curriculares. Estas ferramentas são aplicadas em três momentos da tese: aquando da avaliação diagnóstica (Fase I), final (Fase III) e durante a aplicação antes da implementação didática do conteúdo Diagramas de extremos e quartis (Fase II).

#### 2.2.4. Dimensões Normativa

De acordo com Godino et al. (2006) todas as atividades sociais são reguladas por meio de normas, por convenções de forma explícita ou implícita. Ora, o processo de ensino e aprendizagem segue o mesmo princípio, levando o comportamento do professor e do aluno, a serem regulados por normas, hábitos, costumes, que fazem parte da dimensão normativa no EOS, no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

As normas têm sido alvo de investigações em Didática da Matemática, sobretudo pelos autores que baseiam os seus trabalhos no interacionismo simbólico (Blumer, 1969), introduzindo noções e padrões de interação, normas sociais e sociomatemáticas (Cobb & Bauersfeld, 1995; Yackel & Cobb, 1996). Brousseau (1998) desenvolveu a noção de contrato didático em diversos trabalhos, tornando-a numa peça chave na Teoria das Situações Didáticas. Trata-se, portanto, de considerar as normas, hábitos e convenções geralmente implícitas que regulam o funcionamento da sala de aula da disciplina matemática, considerando-as como “micro sociedade”, que condicionam em certa medida os conhecimentos construídos pelos alunos. Deste modo o foco de atenção, em tais aproximações, é referente às interações entre professor e alunos, na abordagem de temas específicos de matemática.

Em Godino et al. (2007) são abordados estudos sistemático em torno destas noções teóricas, segundo perspectiva unificada do conhecimento e da instrução matemática, proporcionadas pelo EOS, estabelecendo uma organização que identifica as suas conexões mútuas e as complementaridades, bem como, o

reconhecimento de novos tipos de normas, que contribuem para facilitar a análise dos processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Em Godino, Font, Wilhelmi e Castro (2007) adotam-se sob o ponto de vista global, em relação à dimensão normativa, em Didática de la Matemática, que permitem classifica-las segundo direções complementares:

1. O momento em que intervêm as normas: desenho curricular, planificação, implementação e avaliação. As normas podem manifestar-se no momento ou nas fases em que têm lugar a interação entre o professor e o aluno (implementação), mas também nos momentos da planificação, avaliação e na fase do desenho curricular, onde se configuram os objetos de referência que orientam e condicionam os significados pretendidos, implementados e avaliados.
2. As facetas ou dimensões do processo de estudo que se refere a norma: epistémica, cognitiva, internacional, mediacional, emocional/afetiva e ecológica. Assim é possível focar a atenção nas normas que regulam:
  - O trabalho do professor em relação com o saber matemático (entendido como o sistema de práticas institucionais);
  - O trabalho dos alunos em relação ao saber matemático (entendido como sistema de práticas pessoais).
  - O uso dos recursos tecnológicos e temporais (faceta mediacional);
  - A interação entre docente e discente e entre discente e discente;
  - A emoção das pessoas no processo de estudo;
  - A relação com o meio (sociocultural, político, laboral, ...) onde se desenrola o processo de instrução (faceta ecológica).

A Figura 4 sintetiza os diferentes tipos de normas identificadas pelo trabalho de Godino et al. (2008).



Figura 4 – Dimensões normativas. Tipo de normas (Godino, Batanero & Font, 2008, p.22)

De acordo com Godino, Batanero e Font (2008), estas diferentes facetas da dimensão normativa, permitem avaliar a pertinência das intervenções dos professores e alunos considerando o conjunto de normas, e sua tipologia, que condicionam o ensino e a aprendizagem; sugerem trocas nos tipos de normas, para melhorar o funcionamento e controle dos sistemas didáticos, com o objetivo de uma evolução dos significados pessoais frente aos significados institucionais pretendidos.

É, pois, considerado relevante fazer uso dessas normas para analisar projetos e experiências de ensino dentro de um processo de instrução matemática. Mais ainda, procura-se indagar e ampliar a compreensão sobre como avaliar adequadamente os processos de instrução matemática, implementados ou pretendidos. O EOS considera a idoneidade didática um instrumento de análise que permite explicar, descrever, orientar tal processo de maneira fundamentada. De seguida, apresentam-se os elementos que compõem a noção de idoneidade didática para um processo de instrução matemática.

#### 2.2.5. Idoneidade didática

Uma das preocupações expressas por educadores, relativamente à Estatística, relaciona-se com aspetos “afetivos” do processo ensino e aprendizagem. Gal, Ginsburg e Schau (1997) sustentam que a atitude dos alunos pode auxiliar ou prejudicar a aprendizagem de Estatística, conforme afeta o desenvolvimento do pensamento estatístico e a aplicação dos conceitos fora da sala de aula. Por exemplo, para ultrapassar o estado de ansiedade, ou uma atitude retraída ou frustrações do aluno são propostas estratégias tendentes a reduzir ou eliminar tais aspetos negativos (Gal & Ginsburg, 1994).

A noção de idoneidade didática, as suas dimensões (Epistémica, Cognitiva, Interacional, Mediacional, Afetiva e Ecológica), os componentes e critérios foram introduzidas no EOS (Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2007; Godino, Contreras & Font, 2006;) como ferramentas que permitiram “a passagem de uma didática descritiva-explicativa para uma didática de padrões de ensino, isto é, uma didática voltada para a intervenção eficaz em sala de aula” (Godino, 2011).

Entende-se por adequação didática (Godino, 2003; Godinho, Contreras & Font, 2006; Godino, et. al., 2007), que para Godino (2011) trata-se do critério de relevância ou adequação de um processo de instrução, cujo principal indicador empírico é a aproximação entre os significados pessoais, conseguidos pelos alunos, e os significados institucionais implementados. Para a sua operacionalização, são introduzidas seis dimensões cuja articulação coerente e sistemática determina a adequação de um processo de ensino (Godino *et al.*, 2007). Na Figura 5 resumem-se diferentes dimensões que compõem a idoneidade didática de um processo de instrução.

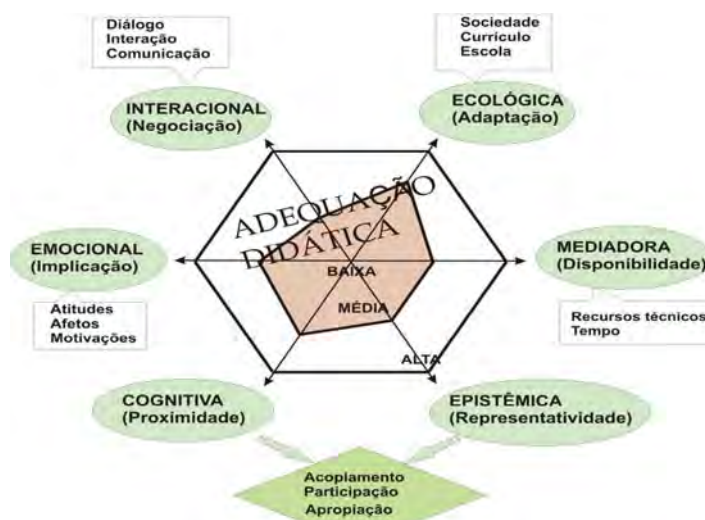


Figura 5 – Dimensões de idoneidade didática (Godino, Batenero & Font, 2009, p. 24)

Na Figura 5 o hexágono regular corresponde a um processo de estudo desejado ou programado, e, *a priori*, representa um grau máximo de adequações parciais. A forma hexagonal irregular interna corresponde às adequações efetivamente atingidas após a realização de um processo de estudo.

Esta ferramenta pode ser aplicada à análise de um processo pontual de estudo, implementado numa aula, ao planeamento ou ao desenvolvimento de uma unidade didática ou a um nível global, como seja o desenvolvimento de um curso ou de uma proposta curricular. Pode ainda ser usada na análise de materiais didáticos, como o livro de texto, em tarefas ou em “acessórios didáticos” pontuais.

A idoneidade didática de um processo de instrução define-se como sendo a articulação coerente e sistemática de seis dimensões, que são interpretadas do seguinte modo (Godino *et al.*, 2007):

— *Idoneidade epistémica*: refere-se ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados (ou pretendidos), com relação ao significado de referência. Indica a validade e o grau de representatividade do conteúdo, quanto ao significado do objeto em avaliação. Por exemplo, na determinação da mediana, a aprendizagem pode estar associada a tarefas rotineiras de aplicação de algoritmos (baixa *adequação*), ou pode considerar-se os diferentes tipos de situações de aplicação da mediana, incluindo a justificação dos algoritmos (alta *adequação*);

— *Idoneidade cognitiva*: expressa o grau em que os significados pretendidos/implementados são compatíveis com a “zona de desenvolvimento proximal” (Vygotsky, 1934) dos alunos, assim como a proximidade destes significados pessoais atingidos aos significados pretendidos/implementados. No caso do estudo dos *quartis*, através de um processo avaliativo, um alto grau de adequação cognitiva seria alcançado se os significados esperados pelo professor coincidissem com os significados pessoais de todos os alunos. Caso este conceito não tivesse sido adquirido pela maioria dos alunos, o professor iniciaria o processo de instrução trabalhando tais conceitos. Por exemplo, na resolução de problemas sobre a mediana é frequente os alunos, na sua determinação, não fazerem a ordenação prévia dos dados, o professor, com uma avaliação prévia, fica a conhecer se a maioria dos alunos domina o conceito e como o aplica, podendo potencial os conhecimentos dos alunos e evitar a persistência do erro.

— *Idoneidade interacional*: um processo de ensino e aprendizagem terá maior adequação do ponto de vista da interação se as configurações e percursos didáticos possibilitarem a identificação de potenciais conflitos semióticos (detetados a priori), por um lado, e permitirem resolver os conflitos que possam surgir durante o processo de instrução, por outro lado. Por exemplo, um processo de estudo realizado de acordo com a sequência de situações de ação, formulação, validação e institucionalização (Brousseau, 1997) será passível de produzir maior adequação semiótica que um processo perfeito que não atente às dificuldades dos estudantes;

— *Idoneidade mediacional*: grau de disponibilidade e adequação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e

aprendizagem. Por exemplo, se o professor e os alunos tivessem à sua disposição meios informáticos pertinentes e adequados ao estudo de um determinado tema (por exemplo o Cabri, para a Geometria plana, ou Excel para o estudo da Estatística), o processo de estudo com a utilização destes recursos teria potencialmente maior adequação mediacional do que outro tradicional, baseado exclusivamente na utilização do quadro, lápis e papel. Nesse sentido, um processo de ensino e aprendizagem, com um alto grau de adequação mediadora, seria uma aula onde o professor conduzisse os alunos ao significado pretendido antes de solicitar a resolução das tarefas;

— *Idoneidade emocional*: grau de implicação (interesse, motivação, ...) do aluno no processo de estudo. A adequação emocional está relacionada com fatores que dependem tanto da instituição como do aluno e de sua história escolar. Por exemplo, será maior esta adequação quanto mais interessantes e mais próximas da realidade dos alunos forem as situações-problema propostas;

— *Idoneidade ecológica*: grau em que o processo de estudo se ajusta ao projeto educativo da escola, à sociedade e aos condicionamentos do contexto no qual se desenvolve. É relevante, por exemplo, estabelecer conexões entre os conteúdos estatísticos de distintos níveis de ensino e com outros conhecimentos matemáticos e com outras áreas do saber, observando a matemática como um todo.

Daqui pode deduzir-se que a adequação de uma dimensão, por si só, não garante a adequação global do processo de ensino e aprendizagem. “A diversidade de coisas que se aprendem, requer diferentes apoios à aprendizagem (Spector, 2001, p. 391)”. Os distintos elementos podem interagir, o que sugere a extraordinária complexidade dos processos de ensino e aprendizagem, que, para atingir uma alta adequação, numa das dimensões, por exemplo a epistémica, pode requerer capacidades cognitivas que os alunos não possuem. Obtido o equilíbrio entre as dimensões epistémica e cognitiva, é necessário que o percurso didático otimize a identificação e solução de conflitos semióticos. Os recursos materiais e o tempo disponível também interagem com as situações-problema, a linguagem, etc.

Cada uma das facetas ou dimensões é formada por várias componentes como se exemplifica no Quadro 4.

Quadro 5 – Dimensões metodológicas e os seus componentes (Godino, 2011)

| DIMENSÕES            | COMPONENTES   |
|----------------------|---|
| Epistémica           | Situações-problema<br>Linguagem<br>Regras<br>Argumentos<br>Relações   |
| Cognitiva            | Conhecimentos prévios<br>Raciocínio lógico<br>Leitura/ Interpretação/análise/construção<br>Aprendizagens (avaliação sumativa) |
| Emocional ou afetiva | Interesses<br>Atitudes<br>Emoções   |
| Interacional         | Interações docente-discente (diálogo e comunicação)<br>Interação entre discentes<br>Autonomia<br>Avaliação formativa          |
| Mediacional          | Recursos materiais<br>Número de alunos<br>Condições da aula<br>Tempo de ensino e aprendizagem                                 |
| Ecológica            | Inovação<br>Adaptações sociocultural<br>Conexões intra e interdisciplinares   |

Alcançar uma elevada idoneidade didática num processo de estudo, bem como a sua avaliação, é um processo altamente complexo, pois, envolve várias dimensões, que por sua vez são estruturadas em diferentes componentes. Além disso, tanto as dimensões como os componentes não são diretamente observáveis, pelo que se devem inferir a partir de indicadores empíricos, que serão explicitados de seguida, tendo em atenção que neste trabalho, o recurso a estas ferramentas ocorre no momento de avaliar a implementação da intervenção de ensino do conteúdo Diagramas de extremos e quartis.

#### 2.2.6. Níveis de análise didática dos processos de estudo matemático

O sistema de ferramentas teóricas, desenvolvido pelo EOS, permite realizar diferentes tipos de análises dos processos de estudo matemático, contribuindo com



informações úteis para a preparação, implementação e avaliação desses processos. Em D'Amore, Font e Godino (2007) tais análises são descritas da seguinte forma: (1) análise do tipo de problemas e sistemas de práticas (significados sistêmicos); (2) elaboração das configurações de objetos e processos matemáticos; (3) análise das trajetórias e interações didáticas; (4) Identificação do sistema de normas e meta-normas que condicionam e tornam possível o processo de estudo; (5) avaliação da idoneidade didática do processo de estudo.

Em relação aos níveis de análise (Godinho, Batanero & Font, 2007), procura-se estudar as práticas matemáticas realizadas no processo de estudo analisado, já que a realização de uma prática é algo complexo que mobiliza diferentes elementos: o agente (instituição ou pessoa) que realiza a prática; o meio em que se realiza a prática (neste meio pode haver outros agentes, objetos, etc.). Não esquecendo que o agente realiza uma sequência de ações orientadas na resolução de um tipo de situação-problema, sendo necessário considerar mais alguns aspectos, como fins, intenções, valores, objetos e processos matemáticos.

Um segundo nível de análise centra-se nos objetos e processos que intervêm na realização das práticas, bem como naqueles que emergem delas. A sua finalidade é descobrir e descrever a complexidade ontossemiótica das práticas matemáticas como fator explicativo dos conflitos semióticos que se produzem na sua realização.

Num estudo de ensino de matemática, que é usualmente direcionado por um professor que interage com os alunos, a análise didática deve focar-se desde a situação-problema e das práticas matemáticas necessárias para sua resolução (análise 1), passando pelas configurações de objetos (epistêmicas e cognitivas) e processos matemáticos que possibilitam essas práticas (análise 2) até ao estudo das configurações didáticas e sua articulação em percursos didáticos.

Num terceiro nível (análise 3), a análise didática orientada deve-se centrar, sobretudo, na descrição de padrões de interação e na adequada relação com as aprendizagens dos estudantes (trajetórias cognitivas). As configurações didáticas e a sua articulação estão condicionadas pela complexa rede de normas e meta-normas (D'Amore et al., 2007), que para além de regular a dimensão epistêmica dos processos de estudo (análises 1 e 2), também regulam outras dimensões dos processos de estudo (cognitiva, afetiva, etc.).

Num quarto nível de análise (análise 4), considerado no EOS, pretende-se estudar esta complexa rede de normas e meta-normas que dão suporte e condicionam

os processos de estudo. Assim, este nível é o resultado de se considerar os fenómenos de natureza social que acontecem nos processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Estes níveis de análise descritos são ferramentas para uma didática descritiva – explicativa, que ajudam a compreender e responder a questões, tais como: o que está acontecendo aqui e porquê? Como a Didática da Matemática não se pode limitar a uma mera descrição, mas pretende uma melhor funcionalidade dos processos de estudo, são necessários critérios de idoneidade ou adequação que permitirem avaliar os processos de ensino efetivamente realizados e conduzir à sua melhoria. É a realização de uma ação que se pretende incorporar numa racionalidade axiológica, na educação matemática, que admita a análise, a crítica, a justificação da eleição dos meios e dos fins, a justificação, etc. Deste modo, considera-se necessário analisar 5 dos processos de estudo matemático a partir da avaliação da *idoneidade didática* (análise 5) (Godino, et al., 2006). Essa análise tem por base os quatro níveis de análises prévias, formando-se uma síntese orientada para identificar potenciais melhorias do processo de estudo em novas aplicações.

### 2.3. Antecedentes

#### 2.3.1. A influência das atitudes face à Estatística na aprendizagem dos seus conceitos

O termo “atitude” tem ganho relevo, como constructo, na área académica. Estrada (1999) realça as seguintes características da atitude: uma predisposição ou estado de ânimo (sem coincidir com conduta); inclui processos cognitivos e afetivos; é referencial, já que apela a um objeto do real; é relativamente estável; abrange todos os âmbitos ou dimensões do sujeito. Para esta autora a estatística estimula o desenvolvimento das potencialidades dos alunos, bem como capacidades cognitivas, afetivas, sociais e de aprendizagem (Estrada, 2001). Esta autora considera que as atitudes ocupam um lugar privilegiado no ato educativo por conduzir o processo perceptivo e cognitivo que permite a aprendizagem de qualquer conteúdo educativo, neste caso a aprendizagem da Estatística.

As primeiras investigações sobre atitudes consideraram a atitude como um constructo unidimensional, mas posteriormente foram utilizados modelos multidimensionais das atitudes. Wise (1985) usou apenas componentes

diferenciados, tais como as atitudes dos alunos do curso de Estatística básica (componente curso), aplicado ao estudo campo (componente campo). Outros autores (Auzmendi, 1992; Gil Flores, 1999; Gómez, 2000) consideravam que as atitudes assentavam em três fatores básicos que Estrada, Bazán e Aparicio (2012) designam por componentes pedagógicos: *componente cognitivo*, referente às concepções e crenças acerca da atitude face ao objeto (à Estatística); *componente afetiva ou emocional*, que se socorre das emoções e sentimentos que o objeto desperta, a Estatística, que são mais subjetivas (por exemplo, sentimentos de rejeição ou de interesse); *componente comportamental ou tendencial*, que representa a tendência para a ação ou a intenção de utilizar a Estatística de certa maneira (por exemplo, quando e como se utiliza a Estatística).

Outros trabalhos (e.g., Schau, 2003; Estela, 2002), partindo de um conceito pluridimensional de atitudes de professores face à Estatística, consideram para além dos componentes atrás descritas, também os componentes designados por antropológicos: *componente social*, relativo a atitudes relacionadas com a perceção e valorização do papel da Estatística no âmbito sociocultural de qualquer cidadão; *componente educativa*, que analisa o interesse da aprendizagem estatística e a visão da sua utilização e das dificuldades do aluno, que determinam a inclusão ou não da Estatística no currículo; *componente instrumental*, referente à atribuição de utilidade da Estatística a outras matérias, como forma de raciocínio e como componente cultural.

Segundo Gal, Ginsburg e Schau (1997), no ensino e aprendizagem da Estatística, os educadores devem ser capazes de avaliar os sentimentos e ideias, detetando aspetos positivos e negativos que os alunos vão desenvolvendo em torno dos conceitos estatísticos, de modo a garantir um ambiente funcional propício à resolução de problemas estatísticos. Assim, estes autores entendem como atitude o resultado de emoções e sentimentos vivenciados durante a aprendizagem do assunto em estudo.

Na perspetiva de Asch (1952), a atitude é a resposta conhecida ou as reações emocionais condicionadas cujos efeitos provocam predisposições orientadoras de decisões que o sujeito toma, face a possíveis alternativas, mediante novas condições. Ora as atitudes são aprendidas, portanto o sujeito necessita de ter contato com o objeto da atitude, neste caso a Estatística.

Thomas e Znaniecki (1996) consideram atitude como “processo de consciência individual que determina atividades reais ou possíveis do indivíduo no mundo social” (p. 21). Outros autores (Fishbein & Ajzen, 1975; Haddock & Maio, 2007; Oskamp e Schultz, 2009) consideram atitude como a predisposição aprendida para gerir de forma coerente, favorável ou desfavorável, um objeto. Para Eagly e Chaiken (1993), atitude engloba conceitos fundamentais da Psicologia Social e definem-na como tendência psicológica, que é expressa pela avaliação de uma entidade particular, com algum grau de aprovação ou desaprovação. Este conceito envolve uma decisão, em relação a um determinado objeto, motivo pelo qual eles reconhecem atitude como uma tendência psicológica avaliativa.

Alguns autores (Phillips & Caiken, 1993; Agne, Greenword & Miller, 1994) consideram que existe uma relação entre as atitudes e crenças dos professores e dos alunos, que influenciam o seu desempenho. Para Carl, Aklilu e Nicosia (2000) o desempenho dos alunos é condicionado pela sua atitude, por motivações e pelas estratégias de aprendizagem, que contribuem para o acentuar das dificuldades do ensino e aprendizagem. Aiken (2002) considera que de entre os muitos fatores que afetam a aprendizagem dos alunos, o que mais a influencia é o professor, uma vez que as suas capacidades, atitudes e personalidade podem ter um grande impacto sobre o ganho dos alunos das experiências escolares. Assim, é importante aferir as atitudes dos intervenientes (professores e alunos), quer em ambiente de aula, quer fora dela, relativamente a aspetos que influenciam a eficácia do ensino e aprendizagem.

Martins (2015) realizou um estudo com docentes de três distritos portugueses, num total de 1098 docentes do 1.º e 2.º ciclo do ensino básico português, com o objetivo de avaliar e caracterizar as atitudes relativamente à Estatística destes docentes. Para tal, escolheu e aplicou o instrumento de medida de atitudes, a escala EAEE, que assegura validade e fiabilidade, com adaptações para o contexto português. Este autor conclui que “a atitude em relação à Estatística por parte dos professores do 1.º ciclo e dos professores de matemática do 2.º ciclo do ensino básico em Portugal é, em geral, positiva, tanto a nível global, como ao nível das componentes” (Martins, 2015, p. 425).

Gal, Ginsburg e Schau (1997) consideram importante que os educadores avaliem as atitudes e crenças dos alunos sobre a Estatística, já que estas podem afetar (dificultar ou fomentar) o desenvolvimento de habilidades de pensamento estatístico, a aplicar pelos alunos no seu quotidiano. Neste sentido, as preocupações

manifestadas por Zimmer & Fuller (1996), em relação aos fatores que podem intervir na aprendizagem estatística, tais como a ansiedade e a atitude, consideram possíveis variáveis que influenciam o desempenho dos alunos. Potter (1995) sugere que para diminuir tais fatores influenciadores e melhorar a compreensão e a motivação dos alunos, o professor deve conversar com eles sobre a Estatística, relacionando-a com o cotidiano, mostrando a sua aplicabilidade, salientando que já são conhecedores dos conceitos estatísticos. No estudo realizado, este autor, constatou que todos os alunos com este envolvimento manifestavam nas atividades menos fadiga e menor nível de ansiedade do que os não envolvidos.

Para Feinberg e Halperin (1978) existe uma correlação entre a ansiedade geral, atitude em relação à matemática e conhecimento matemático com o desempenho estatístico, considerando que as causas de insucesso (em cursos de Estatística) podem estar relacionadas com uma combinação de variáveis afetivas e cognitivas.

Com o intuito de melhorar a atitude dos alunos face à Estatística, vários estudos (Garfield, 1993; Tishkovskaya & Lancaster, 2012; Roseth, Garfield & Ben-Zvi, 2008) realçam as vantagens do trabalho cooperativo e colaborativo no ensino e na aprendizagem da Estatística. Segundo Vasconcelos e Fernandes (2013), “o trabalho de pares permitiu um constante fluir de informação e fomentou o espírito de entreajuda nos alunos, levando à superação de muitas das suas dificuldades” (p. 141).

As vantagens do trabalho colaborativo entre alunos são evidenciadas como positivas, sobretudo nas atividades em díades, para a superação de dificuldades relativas à resolução de problemas na aula de matemática, por contribuírem para um decréscimo dessas dificuldades a partir da discussão com o seu colega (Damiani, 2008; Machado & César, 2012). Torna-se, então, importante “criar contextos de aprendizagem onde os estudantes possam aprender a trabalhar e a aprender juntos, preparando-se para uma aprendizagem autêntica e autodirigida, ao longo do seu ciclo de vida e nos mais variados contextos da sua existência” (Custódio, Soeiro, & Silva, 2010, p. 28).

Importa referir que o ato de aprender é tido como o cerne deste fenómeno. Segundo Custódio et al. (2010), aprender é apropriar-se, é tornar algo seu, é “interiorizá-lo”. Porém, aprender é também apropriar-se de um saber, de uma prática, de uma forma de relação com os outros e consigo mesmo. Esta relação com o saber vai para além da definição de aprendizagem que considera apenas o movimento

daquele que aprende, ou as características daquilo que é aprendido. Segundo os mesmos autores, o que importa é a conexão criada entre o sujeito e o saber e vice-versa (Fernandes, 1997; Pimenta, Faria, Pereira, Costa & Vieira, 2010).

Relativamente à planificação das atividades há que ter em conta os diferentes papéis dos sujeitos envolvidos: o aluno, enquanto aprendiz, requer motivação, reflexão metacognitiva e capacidade para analisar e aplicar os seus objetivos de aprendizagem. Deve partir dele a insistência para clarificação de dúvidas e a exigência de um grande esforço e compromisso para ler toda a informação que lhe vai sendo disponibilizada. O professor está ali essencialmente para manter a disciplina ativa, sempre atento à motivação dos alunos, a eficácia da disciplina depende dos seus conhecimentos e destrezas (Simão & Rodrigues, 2010).

De acordo com vários autores (Cooper, 2012; Coppé, 2010; Costa & Lins, 2010; Menezes & Ponte, 2009), a motivação é a temática que tem sido alvo de estudos nos últimos anos. A literatura sugere que a implementação do trabalho colaborativo, em sala de aula, é uma mais-valia para o ensino e aprendizagem da matemática, em especial no trabalho colaborativo entre pares.

O professor, enquanto representante da comunidade matemática, deve garantir: a qualidade, profundidade e pertinência das ideias em discussão; a criação de condições para que o aluno possa desenvolver competências críticas; a produção de informação ao nível da literacia estatística (Martinho, 2009). Daí a importância do professor ser tanto maior quanto a escola tem como uma das suas principais funções desenvolver no aluno uma atitude crítica e construtiva (Costa & Lins, 2010). É, pois, necessário criar oportunidades para que o aluno desenvolva a intuição, explore situações da vida real, aprenda a raciocinar, sendo, por isso, também importante o trabalho colaborativo entre professores. Deste modo, o trabalho colaborativo, nomeadamente em díade, assume-se como um facilitador na configuração desses ambientes, na medida em que os alunos são chamados a intervir no processo de ensino e aprendizagem, melhorando os desempenhos matemáticos e trabalhando de forma progressivamente mais autónoma. O trabalho em díade permite também laborar aspetos essenciais da comunicação (matemática), promovendo as interações sociais, nomeadamente entre pares (Machado & César, 2012).

Muitos autores (Coppé, 2010; Machado & César, 2012; Martinho, 2009) reconhecem os efeitos positivos do trabalho colaborativo em sala de aula para que os alunos consigam ultrapassar as suas dificuldades nos conceitos matemáticos,

melhorando também a sua atitude face à estatística (Martins, 2015). Na implementação da intervenção de ensino, realizada no 8.º ano, será descrito no capítulo VI.

### 2.3.2. As investigações sobre a Estatística

Atualmente a Estatística vem ganhando progressiva importância, seja a nível da sua aplicabilidade nos diversos domínios do saber, na gestão de informação ou na própria perceção dos cidadãos. Estudado nas escolas, este tema continua a revelar-se difícil para os alunos.

Strauss e Bichler (1988) realizaram uma investigação envolvendo 80 alunos, distribuídos por quatro grupos, tendo em conta a idade (8, 10, 12 e 14 anos), com 20 alunos em cada grupo. Cada criança foi entrevistada individualmente em uma sessão, durante 30 minutos, até ao máximo de 60 minutos, como o objetivo de analisarem as dificuldades na implementação das seguintes propriedades da média: (a) a média situa-se entre os valores extremos da distribuição; (b) a soma dos desvios dos dados em relação à média é zero; (c) a média é influenciada pelo valor de cada um dos dados; (d) a média não é necessariamente igual a um dos valores do conjunto dos dados; (e) o valor da média pode não ser inteiro; (f) os dados com valor nulo influenciam o valor da média; e (g) a média é um representante do conjunto de dados a que respeita. Os autores constataram que com o aumento da idade o grau de compreensão das propriedades variava e que as propriedades (a), (c) e (d) se revelaram menos difíceis. Os seus resultados sugerem que os alunos evoluem na compreensão com a idade, salientando que algumas das propriedades da média se lhes afiguram de mais difícil compreensão, como por exemplo: o facto de, no cálculo da média, os valores nulos da distribuição deverem ser tidos em conta; ou o facto de a média ser representativa dos dados a partir dos quais foi determinada (Strauss & Bichler, 1988).

Numa perspetiva semelhante, Leon e Zawojewski (1991) realizaram entrevistas com crianças e jovens entre os 8 e 14 anos, procurando saber o efeito da idade sobre a compreensão das seguintes propriedades: (a) a soma dos desvios em relação à média é zero; (b) a média é um valor representativo em relação às outras medidas de tendência central; e (c) os valores nulos devem ser considerados no cálculo da média. Estes autores constataram que, para muitos alunos de 14 anos, as

propriedades continuavam a ser demasiado abstratas, não podendo concluir que a idade pode influenciar a compreensão da média

Embora os conceitos como média, moda e mediana sejam aparentemente simples, os alunos erram com frequência, como por exemplo: na troca do valor da variável pelo maior valor da frequência, ou seja, com a moda; na determinação da mediana sem ordenação prévia dos dados; na troca da moda pela mediana ou até pela média; na determinação da média dos valores das frequências, sem atenderem aos valores da variável.

Em estudos com alunos do ensino básico constata-se que o conceito de média se tornou mais complexo apesar da simplicidade do seu algoritmo (Bright & Hoeffner, 1993). Bright e Hoeffner (1993) ao realizarem um estudo, com alunos do 7.º ano, constataram que grandes partes deles dificilmente entendiam o que significava o resultado “zero” da soma dos desvios em relação à média, e também não percebiam o impacto que o valor “zero” tinha na média de uma distribuição, já que o encaravam como elemento neutro, não o considerando, portanto, como um dado da distribuição. Estes autores também verificaram que os alunos dificilmente reconheciam em que circunstância a média resumia bem (ou não) os dados da distribuição, realçando ainda que a escolha da medida de tendência central que melhor resumia uma situação da vida real constituía também outra dificuldade para grande parte dos alunos.

Na mesma linha e num estudo com alunos do mesmo nível de ensino, Brocardo e Mendes (2001) concluíram que, apesar de os alunos compreenderem e aplicarem corretamente os algoritmos de cálculo da média e da moda, eles sentiam dificuldades na escolha daquela que melhor representava uma dada distribuição.

Carvalho (1996; 1998) constatou que alunos do 7.º ano, em tarefas habituais sobre a moda, mediana e média, cometiam erros no cálculo de qualquer medida de tendência central. Destacou os erros mais frequentes: na moda, os alunos substituíam os valores da variável estatística pelo correspondente valores da frequência absoluta; na mediana, determinavam o seu valor sem a ordenação prévia dos dados ou calculavam o valor central das frequências absolutas ordenadas por ordem crescente; calculavam a moda em vez da mediana; na média, determinavam o valor da média dos valores das frequências e nem sempre tinham em conta a frequência absoluta de cada valor.



Relativamente aos conceitos de moda, média e mediana, num estudo realizado com alunos do 7.º ano, Carvalho (1996) constatou que, no cálculo da mediana, os alunos não tiveram em conta a frequência absoluta ou não ordenaram previamente os dados; na determinação da média, numa tarefa estabelecida através de um gráfico, os alunos revelaram mais dificuldades, não tendo em conta a frequência absoluta dos valores da variável, embora, na determinação da moda, a visualização da barra mais alta tenha facilitado a sua identificação.

Também Carvalho e César (2000), num estudo realizado com alunos do 7º ano, envolvendo os conceitos de média e mediana, com dados não organizados e outros organizados em gráficos e tabelas de frequências, verificaram que a grande maioria dos alunos aplicaram com sucesso os procedimentos de cálculo da média e da mediana. No entanto, ao selecionarem a medida que melhor representava a distribuição, a partir dos argumentos matemáticos que relacionam estes conceitos com as suas propriedades, revelaram pior desempenho na mediana do que na média. Estas autoras sugerem que a maior compreensão sobre a média resulta da frequência com que é utilizada nos mais variados contextos sociais, o que não acontece com o conceito de mediana. Quanto à mediana, as incorreções identificadas prendem-se com a sua associação a metade da amplitude dos dados, com o cálculo da mediana dos valores da variável, com a identificação da mediana com 50% dos inquiridos, o que significa confundir a mediana com a sua localização e, ainda, a consideração do 0 (zero) como elemento neutro.

Cai (1995), num estudo que realizou com alunos de idades compreendidas entre 12 e 13 anos, observou que apenas metade deles foram capazes de determinar um valor desconhecido num pequeno conjunto de dados, organizados sob a forma de pictograma, para determinar um dado valor da média. Das respostas analisadas, o autor constatou que, dos métodos de raciocínio apresentados pelos alunos que encontraram o valor desconhecido, apenas 59% revelou uma utilização compreensiva do algoritmo (multiplicar o valor da média pelo número total de dados e subtrair a soma dos valores dados), e 35% recorreu a uma estratégia de tentativa-e-erro. Para Cai (1995), as respostas erradas agrupavam-se em quatro tipos de erro: erro menor, cometido por 11% dos alunos, que apresentaram processos de resolução corretos, mas com erros de cálculo, ou deram como resposta o número total de dados; violação da regra de paragem, cometido por 10% dos alunos, que utilizaram estratégias de tentativa-e-erro, sem conseguirem concluir nos casos em que o quociente não era a

média dada; uso incorreto do algoritmo, cometido por 34% dos alunos, em que eles aplicaram diretamente o algoritmo de cálculo da média; manipulação simbólica injustificada, cometido por 24% dos alunos, que consideram alguns dados da tarefa e trabalharam com eles sem atenderem ao contexto do problema.

Mais tarde, Cai (1998) realizou um estudo com 250 alunos do 6.º ano, utilizando um instrumento envolvendo a média e outro para medir o desempenho matemático, com o objetivo de entender a compreensão conceitual da média aritmética, incluindo o entendimento do algoritmo e a compreensão estatística do conceito. Para tal, efetuou a análise das respostas a cada uma das tarefas da média, criando uma codificação: resposta numérica, erro matemático, representação e estratégia de solução. Os resultados revelaram que a maioria dos alunos conhecia o algoritmo, no entanto só metade conseguiu aplicá-lo em problemas contextualizados, e os alunos que utilizaram a representação algébrica ou aritmética conseguiram obter melhor resultados do que aqueles que utilizaram a representação pictórica ou verbal.

Ribeiro, Correia e Fernandes (2013) desenvolveram um estudo numa turma do 7.º ano de escolaridade, com 19 alunos, recorrendo a trabalho de grupo e a tarefas abertas estatísticas diversificadas, com dados por organizar e outros organizados em tabelas e em diagrama de caule-e-folhas, envolvendo os conceitos de média, moda e mediana. A partir da discussão coletiva das resoluções, foram identificadas as seguintes estratégias de resolução: estratégia de compensação (12,5%), utilizada pelos alunos quando solicitados a encontrar um conjunto de dados que satisfizesse as medidas de tendência central conhecidas; estratégia de representação gráfica (10,4%), que foi adotada nas questões onde se pedia a determinação da mediana, e onde os alunos se socorriam do diagrama de caule-e-folhas como forma de ordenar os dados; estratégia aritmética (70,8%), utilizada com mais frequência pelos alunos nas questões em que era dada a média de um conjunto de dados, à qual era acrescentado um novo dado e pedida a determinação da nova média; e, por fim, estratégia de tentativa-e-erro (2,1%) e estratégia algébrica (4,2%), utilizadas na descoberta de um dado desconhecido a partir do conhecimento de duas médias, antes e depois de acrescentar o novo dado. Neste tipo de resoluções, a adoção da estratégia algébrica pode poupar tempo, pois nesta estratégia o aluno traduz o enunciado do problema para uma equação e resolve-a, enquanto que a estratégia de tentativa-e-erro se revela um pouco limitada, por depender da intuição do aluno, já que o aluno vai

experimentando diversos valores até encontrar o que corresponde ao valor pretendido e, portanto, pode retardar a obtenção de uma solução.

Cunha e Almeida (1996) realizaram uma investigação com alunos do 7.º e 10.º ano de escolaridade, a fim de se analisar algumas estratégias e possíveis dificuldades na aplicação de conhecimentos estatísticos a situações da vida real. As autoras detetaram dificuldades na adequação e na aplicação de conceitos recém-adquiridos a novas situações do quotidiano; registaram também dificuldades na aplicação de estratégias, usando gráficos e/ou tabelas na organização e tratamento da informação disponível. As autoras concluíram que a grande maioria das dificuldades reveladas estavam relacionadas com a falta de compreensão e de comunicação, clara e rigorosa, dos resultados obtidos, evidenciando, embora, capacidade de aplicação e de utilização dos conhecimentos estatísticos. Realçaram que as dificuldades se situavam mais a nível concetual (deficiente compreensão dos conceitos de variável e de população), linguístico (uso incorreto da terminologia com significados próximos e na comunicação das conclusões estabelecidas condicionadas pela capacidade de leitura, de escrita e de verbalização) e relacional (inexistência de articulação entre atividades interdisciplinaridades e deficiente capacidade de integrar e de estruturar os conhecimentos adquiridos na Escola e/ou fora dela). Em relação às medidas de tendência central, as autoras verificaram que os alunos dos dois grupos (alunos do 7.º e do 10.º) apresentavam dificuldades nestes conceitos. No caso da mediana, os alunos do 7.º ano consideraram-na como sendo o valor médio das frequências; no caso do conceito de moda, ele foi identificado como o maior valor da frequência. Cunha e Almeida (1996) consideraram que uma possível razão para tais erros poderia ser consequência de uma abordagem superficial ou demasiado intuitiva das medidas de tendência central.

Gattuso e Mary (1998) realizaram um estudo sobre a compreensão da média ponderada em estudantes do ensino básico, do 8º ao 10º ano (598 alunos de 13 a 15 anos), com dados apresentados sob a forma de uma série de números e através de uma tabela ou de um gráfico, tendo verificado maiores dificuldades neste último caso. Verificaram ainda que, ao longo da escolarização, se constata uma melhoria com a instrução; contudo, esta melhoria não se mostrou sistemática, uma vez que os alunos de 9.º ano, com instrução mais recente, apresentaram melhor desempenho do que os do 10.º ano. Além disso, mesmo sem instrução específica sobre a média ponderada, alguns alunos de 8.º ano conseguiram calculá-la corretamente.

Carvalho (2001) realizou um estudo *quase experimental*, em contexto de sala de aula, com o objetivo de estudar a influência do trabalho em díade no progresso e no desempenho académico de alunos e no seu desenvolvimento cognitivo. Neste estudo, realizado em dois anos letivos, participaram 533 alunos do 7.º ano, de idades compreendidas entre os 11 e 15 anos. Os alunos foram divididos em dois grupos: o grupo de controlo e o grupo experimental. As tarefas propostas eram problemas simples e questões abertas sobre Estatística, retiradas de livros de textos e habitualmente utilizadas pelos professores, que consistiam em tarefas de cálculo e de representação gráfica. O objetivo principal da autora era comparar os efeitos na aprendizagem, em Estatística, nos dois grupos, cujas metodologias e tarefas eram diferentes: no grupo de controlo, os alunos realizavam tarefas tradicionais, numa perspetiva tradicional; no grupo de experimental, os alunos trabalharam, em díade, com tarefas não-habituais. A autora pretendia verificar as implicações de agrupar os alunos de diferentes formas e ainda saber se isso faria coincidir os resultados com o desenvolvimento lógico do conhecimento estatístico, tendo por base uma série de instrumentos de avaliação que lhe permitiram situar os alunos dos dois grupos nos níveis correspondentes.

Carvalho (2001) verificou que os alunos que trabalharam em díade mostraram um avanço mais nítido no desenvolvimento lógico e nas competências estatísticas adquiridas; notou ainda que a formação de díades com alunos díspares foi a que mais beneficiou os alunos, tanto de níveis inferiores como superiores, em todos os conteúdos abordados ao longo da unidade de Estatística do 7.º ano de escolaridade. Esta autora constatou neste estudo dificuldades dos alunos idênticas àquelas que tinha observado em estudos anteriores (1996; 1998), Carvalho (2001) destacou também que pelo facto de neste estudo ter trabalhado com diferentes professores ao longo dos dois anos letivos, surgiram alguns erros e dificuldades dos alunos “influenciadas pela própria prática letiva” (p. 269), tais como, confusão do conceito de frequência absoluta com o de frequência relativa; apresentar a moda como o maior valor da frequência absoluta; determinar a mediana sem a ordenação prévia dos dados e/ou sem atender às frequências absolutas; na média adicionar os valores que a variável toma e dividir pelo número de parcelas ou adicionar as frequências absolutas e dividir pelo número de parcelas, para o caso do grupo que realizou as tarefas habituais. Os erros mais frequentes, no grupo de tarefas não-habituais: não ordenar os dados na determinação da mediana, sensibilidade para analisar o contexto da tarefa e decidir

entre uma média e uma mediana, como parâmetro mais adequado; interpretar a informação presente num gráfico; justificar argumentos sem ser através do cálculo dos parâmetros utilizados.

Dreyfus e Levy (1996) identificaram concepções erradas sobre a média num estudo com alunos de 11 e 12 anos. Com muita frequência, estes autores verificaram que os alunos consideraram a média como valor central, denotando uma confusão entre a média e a mediana; verificaram uma outra falha, embora menos frequente, na aplicação do algoritmo da determinação da média, pois adicionavam os valores da variável e dividiam por dois. Concluíram também que mesmo utilizando o computador para facilitar o desenvolvimento da compreensão e habilidade intelectual, relativamente às medidas de tendência central, as dificuldades permaneceram.

Num estudo envolvendo alunos com idade superior aos referidos anteriormente, Barr (1980) chama a atenção para as dificuldades de compreensão de estudantes, dos 17 aos 21 anos, sobre a mediana, em dados não organizados, já que 49% responderam incorretamente ao não determinarem o valor mediano de dados ordenados. Neste estudo, Barr (1980) tentou averiguar como é que os alunos compreendiam os conceitos de mediana e moda, tendo concluído que: a mediana representava o meio, mas não sabiam que meio; quando indicavam a mediana os dados não eram previamente organizados; a moda, apesar de não se revelar difícil, era, para muitos alunos, uma medida de dispersão e não de tendência central; para uns, a moda era o valor máximo das frequências e, para outros, a moda era o valor da variável, sem atender às frequências. Quando os dados estavam apresentados em forma de tabela de frequências, os alunos manifestaram dificuldades em determinar a mediana e a moda, já que se verificou que apenas 20% dos alunos determinou corretamente a mediana e cerca de 68% indicou corretamente a moda. Foi ainda detetado que os alunos não compreendiam que uma tabela de frequências resumia os dados, o que dificultou a passagem da tabela para a lista de valores, enquanto representação alternativa dos dados.

Boaventura e Fernandes (2004) realizaram um estudo envolvendo 181 alunos do ensino secundário, sobre os conceitos de moda, média e mediana, para identificarem dificuldades inerentes a estes conceitos, procurando ainda saber em que medida os manuais escolares atendiam às situações de maior dificuldade entretanto identificadas. Verificaram que os alunos manifestaram dificuldades e erros em todas

as medidas de tendência central, com destaque para a mediana, tal como tem sido referido na literatura, seguida da média e, por último, da moda. Salienta-se, ainda, que os alunos sentiram mais dificuldades ao ser-lhes pedido que estabelecessem uma relação entre as três estatísticas, tendo este estudo evidenciado também outras dificuldades, como: no cálculo de médias ponderadas; na determinação de um conjunto de dados conhecida a média, a mediana e a moda; ao decidirem sobre qual a possível medida a determinar e a informação necessária à sua determinação, perante dados apresentados na forma gráfica; na compreensão de algumas propriedades da média e da mediana; na localização das medidas de tendência central numa distribuição; e na atribuição de significados às medidas de tendência central. No que concerne aos manuais escolares, ficou patente que

não eram tratadas ou eram exploradas apenas superficialmente as situações que envolviam o estabelecimento de uma série de dados a partir de estatísticas dadas, a impossibilidade de aplicar as estatísticas a certos atributos, as propriedades da média e da mediana, em conjuntos genéricos de dados, e o significado das estatísticas e a sua localização num gráfico. (Boaventura & Fernandes, 2004, p. 103)

Mayén, Batanero e Díaz (2009), num estudo comparativo, com dados não organizados, entre alunos do secundário (idades 14-15) e alunos universitário de um mesmo curso (idades 17-18), verificaram que os alunos do ensino secundário mostraram melhor desempenho na determinação da mediana e os alunos do ensino superior foram mais assertivos na escolha de uma medida de tendência central (mediana ou média) que melhor resumia a distribuição. Sobre esta escolha da medida, estudos realizados em futuros professores (Groth & Bergner, 2006) e professores (Jacobbe, 2008) revelaram dificuldades em responder corretamente e fundamentar as suas opções. Estes autores deduziram que a escolha de uma medida que melhor representa um dado conjunto de dados requer conhecimentos sedimentados sobre as medidas e a sua adequação a cada situação, não se limitando à determinação da mediana baseada no conhecimento técnico do seu algoritmo de cálculo.

O estudo de Pollatsek, Lima e Well (1981), com alunos universitários, revela que estes alunos também tiveram dificuldades no cálculo da média aritmética simples e ponderada, e consideraram o valor zero como elemento neutro, pelo que ao ser acrescentado ao conjunto de dados não consideraram a alteração do valor da média. Segundo Barros (2004), as dificuldades “não diferem muito das dificuldades sentidas por alunos de níveis mais elementares” (p. 3).

Da análise das respostas de alunos do ensino superior, no cálculo da média ponderada, em situações onde foram dadas as médias parciais de dois grupos de diferente dimensão, Pollatsek *et al.* (1981) referem que muitos estudantes universitários têm dificuldades no cálculo de uma média ponderada global, tendo por base duas médias parciais, já que muitos determinam a média das médias (*lei do fecho*). Aqui, a maioria dos estudantes optou por determinar a média simples dos valores das duas médias dadas, sem ponderarem adequadamente os seus valores, considerando muitos deles que obter a média é um ato mais computacional do que conceptual, já que o reduzem à aplicação do seu algoritmo, em detrimento da obtenção “de uma compreensão do conceito básico subjacente” (p. 191). Devido a este facto, alguns autores (Batanero, Godino, Green, Holmes & Vallecillos, 1994) colocaram a hipótese de que a competência de cálculo estaria mais desenvolvida, subvalorizando-se o desenvolvimento da competência que permite compreender os mecanismos que levam à sua realização, o que é corroborado por outros autores (Batanero, 2000; Carvalho, 2001; Carvalho & César, 2001).

Num estudo realizado por Mevarech (1983), que envolveu 103 alunos do ensino superior, sem formação específica em matemática, procurou-se compreender o tipo de dificuldades dos alunos quando confrontados com problemas de Estatística Descritiva. Postos perante quinze situações que incluíam respostas, erradas ou corretas, os alunos tiveram que identificar os erros, indicar o que estava mal e resolver o problema corretamente. Os resultados obtidos revelaram que os alunos sabiam os algoritmos de determinação dos valores respetivos, no entanto, conscientes das situações incorretas, não as conseguiram resolver. Foram ainda detetadas dificuldades relativamente às notações utilizadas nas tarefas, como por exemplo no caso da média, já que cerca de 60% dos alunos não conseguiram identificá-la. Um outro aspeto importante, realçado por este estudo, foi o facto de se ter verificado que, quando os alunos iniciavam o estudo da média, da mediana e da moda, pela primeira vez, já eram conhecedores de certas operações aritméticas, como a adição e a multiplicação, e aplicavam as suas propriedades, mesmo quando estas não eram válidas, como se um número real se tratasse, no caso das médias aritméticas. Ficou claro que 65% dos estudantes usaram a lei do fecho na determinação da média total de grupos com tamanho diferente (propriedade estudada por Polatsek, Lima e Well, 1981); cerca de 80% aplicaram a propriedade associativa no cálculo da média total de três grupos; 60% não compreenderam a não existência de elemento inverso no

cálculo da média aritmética; e aproximadamente 30% consideraram o zero como elemento neutro, ou seja, que o valor da média não se altera quando se acrescenta o valor zero ao conjunto de dados. Tais resultados, obtidos sustentam a hipótese de que os estudantes conceptualizaram erradamente as operações de cálculo da média e da variância como duas operações binárias satisfazendo as quatro leis dos grupos aditivos (Mevarech, 1983). Ora, este modelo faz sentido para valores da média e da variância como simples números, esquecendo que eles são medidas de tendência central e de dispersão.

Refira-se que nos estudos realizados por Boaventura (2003) e Barros (2004) analisaram-se erros e dificuldades em Estatística, de alunos do 12º ano (participaram no estudo 181 alunos) e futuros professores do 1º e do 2º ciclo do ensino básico (participaram no estudo 37 futuros professores), com recurso a questionários como método de recolha de dados. Nestes estudos constatou-se que, no caso da moda, os estudantes do ensino secundário (e futuros professores), manifestaram dificuldades em identificar a moda, quando a variável em causa era qualitativa, confundindo-a com a respetiva frequência relativa ou absoluta (Barros, 2004; Boaventura & Fernandes, 2004). Na perspetiva de Carvalho (1996), “o conceito de *estar na moda*, presente no dia-a-dia destes alunos, *aquilo que há mais*, ao ser semelhante ao conceito estatístico de moda, *o valor que ocorre mais frequentemente num conjunto de dados*” (p. 170) poderão constituir mnemónicas que facilitam a sua compreensão.

Vários autores (Batanero, 2000a, 2000b; Boaventura, 2003; Cobo, 1998; Sousa, 2002) verificaram que a medida de tendência central onde os alunos manifestaram maiores dificuldades foi na mediana e na determinação da moda já que os alunos apresentaram mais respostas corretas. A este respeito, Batanero (2000) realça o facto de se usar um único modelo de cálculo no caso da média e da moda, o que não acontece no caso da mediana, porquanto ela depende de o número de dados ser par ou ímpar. A autora acrescenta ainda que a compreensão de um conceito (conhecimento da definição e propriedades) inclui ter-se a perceção dos problemas em que ele vai ser aplicado, reforçando a importância de uma compreensão relacional em detrimento de uma compreensão instrumental.

Batanero, Godino e Navas (1997) realizaram um estudo com 273 alunos universitários (futuros professores do 1.º ciclo e estudantes dos primeiros anos de cursos de pedagogia), em que procuravam avaliar os conhecimentos e dificuldades de compreensão de conceitos básicos de Estatística e Probabilidades, então incluídos



nos novos desenhos curriculares, para que, atempadamente, fossem detetadas fragilidades que requeressem um reforço na formação desses futuros professores. Da análise das respostas dadas pelos estudantes, a um questionário escrito com quatro itens de escolha múltipla, sobre distintos aspetos interpretativos da média aritmética, os autores observaram que as dificuldades manifestadas eram semelhantes às encontradas em estudantes de níveis inferiores. Especificamente, as dificuldades detetadas sobre distribuições com valores atípicos, a sua assimetria e as ligações entre a moda, média e mediana foram confirmadas, posteriormente, nas entrevistas realizadas com um número mais reduzido de alunos. Os autores atribuem o deficiente tratamento dos valores atípicos à descontextualização do ensino da Estatística, anteriormente recebido, e à falta de uma visão funcional dos conhecimentos adquiridos; ao possível desconhecimento das posições relativas da média, moda e mediana em distribuições assimétricas, o que leva a considerar que todas as distribuições devem ser simétricas; e à indecisão na escolha da medida de tendência central mais adequada para representar um dado conjunto de dados. Os alunos, na entrevista, nem sempre estiveram conscientes do efeito dos valores atípicos sobre a média, não reconhecendo que esse valor iria alterar a média e, em consequência, não poderia ser uma representação adequada do conjunto de dados.

Em termos globais, nos estudos realizados por Carvalho (2004), Barros (2004), Boaventura (2003) e Ribeiro, Correia e Fernandes (2013) identificaram-se dificuldades e erros em conteúdos elementares de Estatística, tais como: no cálculo da média, adicionar os valores dados sem ter em conta a ponderação destes valores e dividir pelo total de dados; calcular a média de duas médias dadas recorrendo à lei do fecho; considerar a média como sendo a soma dos valores dados; em determinar um conjunto de dados, conhecida a média, a mediana e a moda desse conjunto; em inverter o algoritmo do cálculo da média; selecionar para valores da moda a maior frequência em vez do valor da variável estatística que lhe corresponde; em aplicar as propriedades da média e da mediana; e em atribuir significados às medidas de localização.

### 2.3.3. A representação estatística diagramas de extremos e quartis

Em particular, estudar a representação estatística: o diagrama de extremos quartis (DEQ), tornou-se relevante e alguns autores (Bakker, Biehler & Konold, 2005; Morais & Fernandes, 2011; Ministério da Educação e Ciência, 2013)

consideram como sendo um tipo de gráfico de extrema relevância, já que envolve, simultaneamente, a centralização e dispersão. Mais concretamente, neste estudo analisam-se as respostas dadas por alunos do 8.º ano a questões envolvendo a construção e interpretação de DEQ.

Os DEQ são meios de representação de dados estatísticos que surgiram nos anos 70-80 do século passado, aquando dos desenvolvimentos da Estatística verificados no âmbito de Análise Exploratória de Dados (Tukey, 1977). A Análise Exploratória de Dados constitui uma primeira abordagem aos dados, com vista a identificar regularidades e tendências na coleção de dados, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas sobre a população de onde foram extraídos os dados, que poderão ser avaliadas ou testadas por meio de outros recursos estatísticos.

A construção do DEQ implica o conhecimento de cinco valores determinados a partir da coleção de dados: o valor mínimo (mín), o 1.º quartil ( $Q_1$ ); o 2.º quartil ( $Q_2$ , ou mediana); o 3.º quartil ( $Q_3$ ) e o valor máximo (máx). Seguidamente, representando esses valores na reta numérica, construindo o retângulo delimitado pelo 1.º e 3.º quartil e assinalando os valores mínimo e máximo, obtém-se o gráfico pretendido (Figura 1).

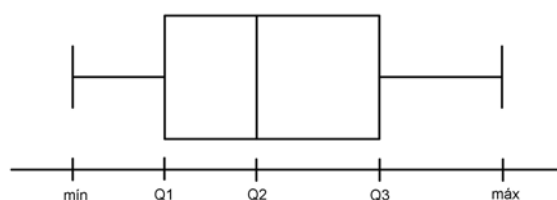


Figura 6 – Diagrama de extremos e quartis.

Conforme é evidenciado na literatura (e.g., Bakker et al., 2005; Edwards, Özgün-Koca & Barr, 2017), construir um DEQ conhecidos os cinco valores referidos não constitui uma dificuldade considerável para os alunos. Antes, as dificuldades dos alunos podem resultar da necessidade de determinar os respetivos quartis, até porque a determinação da mediana tem-se revelado mais difícil para os alunos do que a determinação da média e da moda (Boaventura & Fernandes, 2004; Fernandes & Barros, 2005).

Tendo em conta a definição dos quartis, conclui-se que este gráfico tem uma propriedade muito particular: entre quaisquer dois elementos consecutivos, dos cinco representados num DEQ, tem-se sempre cerca de 25% de dados. Ora, esta

propriedade pode ser usada para avaliar a concentração/dispersão dos dados em diferentes intervalos de extremos envolvendo os valores referenciados no gráfico e, em consequência, permite também avaliar a simetria/assimetria da distribuição correspondente aos dados que representa.

Apesar da sua relevância, esta propriedade dos DEQ não é facilmente adquirida pelos alunos, que tendem a considerar que os intervalos (entre valores consecutivos referenciados) com maiores amplitudes contêm também um maior número de dados. Segundo Edwards et al. (2017), este tipo de representação dos dados é contraintuitivo, no sentido que as aprendizagens anteriores sobre outros tipos de representações gráficas não contribuem para as novas aprendizagens implicadas. No DEQ, especificamente, Bakker et al. (2005) salientam que a extensão dos intervalos está inversamente relacionada com a densidade dos dados, isto é, as amplitudes dos intervalos serão tanto menores quanto mais próximos estiverem os dados uns dos outros. Deste modo, as frequências dos dados não são salientadas neste tipo de representação, tal como acontece nos gráficos de barras ou nos diagramas circulares que os alunos aprenderam antes, seja através de barras mais longas ou de setores circulares maiores, respetivamente. Diferentemente, nos DEQ podemos ter intervalos com amplitudes diferentes para a mesma percentagem de dados ou até intervalos menores para maiores percentagens de dados.

Para além da construção, também a leitura e interpretação dos DEQ podem-se constituir como ações mais ou menos difíceis para os alunos. Neste caso, a taxonomia de Curcio (1989) pode ser clarificadora das maiores/menores dificuldades dos alunos. Para tal, estes autores estabeleceram uma taxonomia envolvendo três níveis de leitura e interpretação de gráficos. No primeiro nível, *ler os dados*, espera-se que o aluno identifique dados apresentados explicitamente no gráfico, o que se realiza através da leitura de factos que nele estão representados. Neste nível não há interpretação dos gráficos e pretende-se que o aluno compreenda a escala e as unidades de medida. No segundo nível, *ler entre os dados*, espera-se que o aluno interprete e organize a informação fornecida pelos dados. Neste nível, o aluno deve combinar e integrar a informação e identificar relações matemáticas através de algum conhecimento prévio sobre o assunto tratado no gráfico. Como refere Curcio (1989), este é o nível mais comum na resolução de tarefas que envolvem a compreensão dos gráficos, esperando-se que o aluno identifique tendências no gráfico e relacione

ideias. Finalmente, no terceiro nível, *ler para além dos dados*, pressupõe-se que o aluno, ao ler a informação do gráfico, infira a informação total e tenha um conhecimento prévio aprofundado sobre o assunto referente aos dados do gráfico. Neste nível, o aluno deve conseguir responder a questões cujas respostas requerem o uso de informação implícita no gráfico, extrapolando, predizendo ou fazendo inferências. Ou seja, como refere Curcio (1989), pretende-se que o aluno se projete no futuro e coloque questões sobre os dados.

Em geral, segundo Friel et al. (2001), os alunos não têm dificuldades no primeiro nível, ler os dados, e revelam dificuldades nos dois níveis seguintes: ler entre os dados e ler além dos dados. No caso dos DEQ, Edwards et al. (2017) concluíram do seu estudo que os alunos do 6.º e 8.º ano foram capazes de ler no diagrama qualquer dos cinco valores subjacentes à sua construção, o que corresponde ao primeiro nível de Curcio (1989). No segundo nível, ler entre os dados, os alunos focam-se na estrutura dos DEQ, analisando a percentagem de dados e a concentração/dispersão em diferentes intervalos envolvendo valores típicos do diagrama, como sejam a amplitude total e a amplitude interquartil. Por último, no terceiro nível, ler para além dos dados, espera-se que os alunos façam previsões e extensões, como acontece quando são questionados sobre o valor que um dado pode tomar se sabemos que ele excede o terceiro quartil, ou quando os confrontamos sobre a simetria/assimetria da distribuição representada pelo DEQ. Diferentemente do que se verificou no primeiro nível, no estudo de Edwards et al. (2017) os alunos exibiram muitas dificuldades nos outros dois níveis.

As grandes dificuldades reveladas pelos estudantes, sobretudo na interpretação dos DEQ, levaram Bakker et al. (2004) a questionarem as possibilidades do seu ensino a alunos muito jovens, referindo que: 1) os DEQ não permitem, em geral, perceber casos individuais; 2) os DEQ operam de modo diferente das representações gráficas que os alunos encontraram antes; 3) a mediana não é uma estatística tão intuitiva para os alunos como foi pressuposto; e 4) os quartis dividem os dados em grupos de uma maneira que poucos alunos (ou mesmo professores) realmente compreendem.

#### 2.3.4. Pensamento funcional e relacional no estudo de representações de dados estatísticos

Em matemática, segundo Goldin (2008), uma representação pode ser vista como uma configuração (de caracteres, imagens, objetos concretos, ...) que representa algo. Na perspectiva de Goldin e Shteingold (2001), representações variadas de um mesmo conceito possibilitam a sua compreensão, contribuindo para um aumento do seu significado, pois se conceito for visto como parte de um sistema mais amplo, com significados e convenções estabelecidas, tal permite relacionar de forma significativa as representações pertencentes a esse mesmo sistema. Tais sistemas podem ter formas de representação interna ou externa (Goldin, 2008): a representação interna engloba as aptidões mentais dos indivíduos, tais como: a capacidade de construir imagens visuais e espaciais, ao proceder a representações tácteis e cinestésicas; o impulso de procura heurística, para a resolução de problemas; e as concepções e o afeto; a representação externa é referente a configurações observáveis, tais como: a linguagem natural normativa; os sistemas matemáticos gráficos, referentes a diagramas e de notação formal; os ambientes de aprendizagem estruturados, que podem incluir materiais manipuláveis concretos ou tecnologias; e as estruturas socioculturais, como as hierarquias políticas ou os sistemas educativos.

Ora, a comunicação em matemática estabelece-se segundo representações (Duval, 2006), cujos objetos matemáticos são abstratos, o que torna necessário o recurso a representações semióticas que conduzam à sua aprendizagem. É fundamental que o aluno consiga distinguir o objeto representado da sua representação, com vista a uma melhor compreensão dos conceitos. No que concerne à transformação de representações, Duval (2006) refere que essas transformações podem ser de dois tipos: o “tratamento”, que consiste nas transformações de representação no mesmo registo (e.g., simplificação de expressões algébricas); e a “conversão”, que compreende as transformações entre diferentes registos (passagem da representação tabelar para a representação gráfica). Estas duas formas de transformação, tão distintas, contribuem para a complexidade cognitiva subjacente ao processo de pensamento matemático (Duval, 2006).

A Estatística envolve a utilização de gráficos e tabelas, donde é fundamental a aprendizagem em Estatística destas representações. Por outro lado, devido à sua constante presença nos meios de comunicação e na Internet, é natural que os alunos

aprendam a ler e interpretar gráficos, antes mesmo da sua abordagem escolar. Embora os gráficos sejam um excelente meio de organização e comunicação de informação, eles originam dificuldades na sua interpretação, designadamente: na leitura dos dados, por implicar a compreensão dos factos neles diretamente representados; na leitura entre os dados, por implicar a comparação e transformação de dados neles explícitos; e na leitura para além dos dados, para fazer previsões e inferências da informação total dos dados do gráfico (Curcio, 1987; Espinel, González, & Pinto, 2009; Fernandes & Morais, 2011).

As dificuldades sentidas pelos alunos na representação gráfica e tabelar e na interpretação de enunciados, envolvendo a noção de média e mediana, estão patentes nas provas de avaliação nacional (Sousa, Ferreira, Castanheira, & Lourenço, 2010). E se alguns estudos apenas apontam tais dificuldades (Andrade, & Saraiva, 2012), outros salientam o porquê dessas dificuldades (Ponte, & Fonseca, 2001; Serrano, Ortiz, & Rodriguez, 2009), focando-se alguns na aptidão dos alunos para a leitura de gráficos e tabelas, e identificando fatores que influenciam a sua compreensão (Friel, Curcio, & Bright, 2001).

Algumas investigações mostram que a leitura e interpretação dos gráficos é complexa e que a sua compreensão não é espontânea, e mesmo com a intervenção de ensino não parece ser facilmente alcançado (Arteaga, 2011). Segundo Arteaga (2011), a simplicidade dos gráficos é apenas aparente, podendo ser considerados modelos matemáticos complexo. Para se alcançar uma boa competência gráfica é necessário desenvolver aptidões em diferentes domínios e vários conceitos matemáticos, tais como percentagens, frações, proporcionalidade e geometria (Watson, 2006).

Na construção de um gráfico, os alunos utilizam muitos conceitos e propriedades, consoante o tipo de gráfico que constroem (Ruiz, Arteaga & Batanero, 2009), o que contribui para o surgimento de dificuldades específicas na construção de gráficos, e também de tabelas, por envolver conceitos matemáticos diversificados, como escalas, origem dos eixos, variável independente e dependente, coordenadas, variáveis discretas e contínuas e distribuição de frequências (Espinel, González, Bruno & Pinto, 2009).

Um gráfico é composto por vários elementos (Kossilyn, 1985): o fundo do gráfico (serve de suporte ao gráfico e geralmente é branco); a estrutura do gráfico (constituída pelos eixos cartesianos, à exceção dos gráficos circulares, fornecendo a

informação das variáveis apresentadas e/ou relacionadas); conteúdos pictóricos (forma de apresentar os dados no gráfico, podendo ser linhas, barras, setores circulares, ...) e as legendas (que permitem contextualizar o gráfico). Por seu turno, Curcio (1987) refere que um gráfico fica definido pelas palavras que nele aparecem (o título e legendas que são a chave para compreender o contexto, as variáveis e as relações expressas no gráfico), o conteúdo matemático subjacente (conceito de área no gráfico de setores) e os contextos específicos usados em cada tipo de gráfico (num gráfico circular a relação entre a amplitude do setor à respetiva frequência).

Na interpretação de gráficos, Curcio (1989) estabeleceu três níveis distintos de compreensão para o desenvolvimento desta capacidade: leitura literal dos dados (nível 1), em que se toma conhecimento da representação em causa, permitindo compreender a escala, as unidades de medida e as respostas imediatas às questões, por observação da representação gráfica, identificando e classificando as variáveis em estudo; leitura entre os dados (nível 2), em que se interpreta e organiza a informação patente na representação, o que possibilita a construção de diferentes representações e ainda compreender e aplicar as propriedades das medidas de tendência central e de dispersão, para além de explicar o significado de valores obtidos e de estabelecer comparações entre os dados e as respetivas representações ou ainda combinar a informação do gráfico com conhecimentos matemáticos prévios; e leitura além dos dados (nível 3), a partir da qual se pode extrapolar, prever, ou inferir da informação apresentada na representação em causa, abrindo ainda a possibilidade de colocar questões.

Nesta mesma linha, Carvalho (2009) salienta que as tarefas que se enquadram no primeiro nível de compreensão permitem que o aluno apenas faça uma leitura dos dados representados, sem ser necessário qualquer interpretação dos mesmos, o que permite responder a estas questões de forma imediata uma vez que se trata de questões de baixo nível cognitivo; as tarefas do segundo nível de compreensão requerem do aluno uma interpretação e organização da informação provida no gráfico, o que exige a capacidade de extrair informação de um gráfico e estabelecer e comparar relações nos dados, levando a utilizar outros conhecimentos matemáticos, isto é, a fazer algumas inferências simples; as tarefas do terceiro nível exigem extrapolação, previsão ou inferência para responder a questões implícitas, retirando toda a informação contida nos dados representados graficamente.

Para Arteaga (2011), na leitura de gráficos podem identificar-se funções semióticas, as quais se definem como uma correspondência entre um antecedente (expressão ou significante) e um conseqüente (conteúdo ou significado) estabelecido por um sujeito. Este autor define quatro níveis de complexidade semiótica para analisar as produções gráficas: o nível 1 (representa apenas valores individuais), que possibilita apenas a extração de dados; o nível 2 (representa valores individuais da variável), que permite atingir um nível intermédio, superior à simples extração de dados, sem chegar à extração de tendências; o nível 3 (produz gráficos separados para cada distribuição), que possibilita a extração de tendências e o nível 4 (produz um gráfico conjunto para cada par de distribuições), que permite a análise da estrutura, tendo por base um estudo realizado com produções gráficas de futuros professores do ensino primário espanhol.

No primeiro nível, os alunos não conseguem analisar globalmente os dados, o que, numa análise semiótica deste tipo de gráfico, corresponde a uma utilização de conceitos, proposições e procedimentos menos complexos do que as representações relativas ao conjunto de dados da amostra ou população. Estabelecendo uma comparação com os níveis de Curcio (1989), apenas permite ler os dados, por se tratar apenas de valores da variável para um caso particular. No segundo nível, o gráfico possibilita responder a questões que exigem extração de dados, mas sem permitir a extração de tendências, por isso, a leitura gráfica é superior à do nível 1, por permitir visualizar todos os valores da variável e perceber a estrutura ou tendência dos dados. No terceiro nível, para cada par de variáveis são apresentados dois gráficos, o que permite efetuar comparações entre cada par de variáveis. O aluno constrói duas tabelas de frequências e a partir delas constrói os gráficos representantes de cada uma das distribuições. Ora, ao efetuar tais construções (dois gráficos separadamente) poderá dificultar a comparação entre as variáveis, em especial no caso de não ser utilizada a mesma escala de representação ou se forem utilizados gráficos de diferentes tipos para cada distribuição. No quarto nível, o aluno define as distribuições de cada par de variáveis e representa-as conjuntamente num mesmo gráfico, facilitando a sua comparação. Tal representação apresenta um maior grau de complexidade ao representar conjuntamente duas variáveis estatísticas (designado por análise da estrutura), o que facilita um nível superior de leitura do gráfico e permite comparar tendências, a divergência e a variabilidade das duas variáveis numa única imagem.



Aoyama (2006) desenvolveu, no Japão, um trabalho com 175 alunos, dos quais 80 eram do 10.º ano de escolaridade, para classificar as respostas dos alunos em diferentes níveis de interpretação de uma representação gráfica, segundo uma hierarquia de complexidade crescente. Os níveis apresentados por Aoyama (2006) foram os seguintes: idiossincrático (nível 1), em que os alunos não leem valores e características comuns na informação contida numa representação gráfica; leitura básica de um gráfico (nível 2), onde os alunos leem e reconhecem tendências na informação veiculada numa representação gráfica, mas revelam dificuldades nas justificações relativas ao contexto do problema; racional/literal (nível 3), em que os alunos fazem o referido anteriormente e também mostram competências para explicar significados segundo um dado contexto, sem contudo apresentarem competências para sugerir interpretações alternativas ou para discutir sobre a veracidade da informação apresentada ou de resultados obtidos; crítico (nível 4), que confere aos alunos competências para questionarem a veracidade dos resultados e avaliarem a informação fornecida em função do contexto do problema ou da situação em causa; hipotético e de modelação (nível 5), onde os alunos conseguem interpretar a informação contida numa representação gráfica e construir as suas próprias hipóteses explicativas ou modelos, deixando de ser meros leitores de informação. Com este estudo, Aoyama (2006) concluiu que a grande maioria dos alunos revela capacidades e conhecimentos relativos ao segundo e terceiro níveis, sugerindo que a Escola deve investir na Educação Estatística para que os alunos atinjam os níveis superiores, pois só assim os alunos são capazes de avaliar criticamente a informação com que são confrontados todos os dias através dos Mídia.

Segundo Pinker (1990), a leitura de gráficos depende de dois fatores importantes: da eficiência do leitor e da eficácia do gráfico. Entenda-se eficácia do gráfico como a possibilidade de o gráfico transmitir a informação desejada. Ora, essa informação, segundo Pinker (1990), será mais eficaz se esta estiver disponível e fácil de extrair. Na perspetiva deste autor, existem dois fatores que contribuem para este facto: o primeiro, depende da capacidade do sistema visual codificado, tal como no caso do gráfico de barras, já que com facilidade se pode identificar a moda (pela barra mais alta) e também detetar as diferenças extremas entre barras, já que se salienta um único atributo visual numa informação quantitativa; o segundo depende da probabilidade de codificação do atributo, isto é, no caso de se pretender extrair

tendências, a riqueza de atributos visuais associados a tendências quantitativas, no caso do gráfico de linhas, revela-se mais eficaz do que um gráfico de barras.

No que concerne à eficiência do leitor de gráficos, ela já depende do conhecimento prévio de gráficos: no caso de o leitor estar familiarizado com a leitura de gráficos, ele consegue construir esquemas gráficos mais ricos em atributos visuais, o que permitirá uma automática associação de atributos visuais à tendência quantitativa, e possibilita o aumento da probabilidade de codificação dos mesmos; no caso de o leitor não estar familiarizado com um determinado tipo de gráfico, certamente que condicionará a extração de informação do gráfico, exigindo uma série de processos para gerar o esquema gráfico, o que contribuirá para uma resposta mais lenta.

Na mesma linha, Cazorla (2002) realizou um estudo com 814 estudantes universitários, analisando fatores que interferem na leitura de gráficos estatísticos. Constatou que a informação de um gráfico poderá ser de fácil obtenção quando a descrição visual contém atributos ligados a signos de mensagens que revelam equações e mostram respostas à questão conceitual, isto é, quando a informação codificada por um padrão visual no gráfico é reconhecida pelo leitor. Nesta perspectiva, a autora considera que o tipo de gráfico condiciona as respostas fornecidas, designadamente: a utilização dos gráficos de linhas tende a ilustrar melhor a tendência e interações; as tabelas permitem realizar melhores extrações de valores absolutos da variável dependente; os gráficos de barras podem ser melhores que gráficos de linhas ou tabelas, quando se pretende ilustrar diferenças entre valores da variável dependente, todavia, o gráfico de barras oferece um maior grau de dificuldade para extrair a média.

Ponte (1984) desenvolveu um estudo onde identificou algumas estratégias e dificuldades dos alunos no campo da construção e interpretação de gráficos cartesianos e na análise das relações funcionais subjacentes a esses processos. Constatou que na interpretação de gráficos, a maioria dos alunos determinava coordenadas de pontos cujas variáveis eram discretas; os alunos foram pouco precisos sobretudo na estimação de valores da variável independente, quando os gráficos apresentavam funções contínuas; na construção de gráficos, foram detetadas dificuldades no trabalho com escalas, indecisão na escolha do tipo de gráfico, inexistência de uma escala uniforme na representação de variáveis uniformes e hesitação na escolha ou escolha inadequada da unidade; os alunos mostraram pouca

atenção à unidade utilizada na construção da escala, alguma confusão na escolha das unidades e na escolha inadequada das subdivisões da unidade de escala. Foram ainda detetadas dificuldades, por parte dos alunos, na identificação e na classificação de variáveis em contextos que lhe eram familiares, verificando-se que a globalidade dos alunos identificou de forma correta as variáveis associadas ao problema.

Num outro estudo, já antes referido (Boaventura & Fernandes, 2004), com alunos do 12.º ano (181 alunos), cujo objetivo era perceber as suas dificuldades em conceitos estatísticos, nomeadamente na média, mediana e moda. Os autores verificaram que os alunos apresentaram grandes dificuldades na leitura de gráficos, na determinação da média e da mediana a partir de dados representados em gráficos e na localização das estatísticas em gráficos, tendo-se verificado uma percentagem elevada de insucesso: 89,0% para a média, 87,3% para a mediana e 51,9 % para a moda, na questão em que se pedia para determinar, caso fosse possível, o valor de cada uma das medidas, em dados apresentados segundo um gráfico.

Morais (2010) realizou um estudo com alunos (180 alunos) do 9.º ano de escolaridade de um agrupamento de escolas do distrito de Braga, com o objetivo de compreender as opções de resolução dos alunos em tarefas envolvendo a construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos. Esta informação foi obtida através da aplicação de um teste. Relativamente à construção de gráficos estatísticos, Moraes (2010) concluiu que, de um modo geral, os alunos utilizaram vários tipos de gráficos nas respostas às questões colocadas, apesar de um número considerável de alunos não ter produzido qualquer tipo de gráfico nas respostas às questões colocadas. No que diz respeito à leitura e interpretação de gráficos estatísticos, Moraes (2010) concluiu que, no nível 1 (ler os dados), os alunos revelaram poucas dificuldades, o que já não aconteceu quando confrontados com questões de nível 2 (ler entre os dados) e 3 (ler além dos dados).

Na construção de um gráfico, Li e Shen (1994) verificaram que muitos alunos do ensino secundário não sentem necessidade de selecionar os tipos de gráficos adequados, conforme o fim a que se destinam, e, por vezes, omitem as escalas dos eixos (no horizontal, no vertical ou em ambos); não especificam a origem das coordenadas; não proporcionam divisões suficientes nas escalas dos eixos; e não lhes atribuem nomes. No estudo realizado por Arteaga (2008) constatou-se que apenas um terço dos participantes foi capaz de visualizar a posição central e a dispersão a partir do gráfico previamente construído. No entanto, o número de alunos que

conseguiu expressar uma conclusão correta, sobre a questão colocada no problema, foi ainda bastante menor (13%).

Ferreira (2012) realizou um estudo com 25 alunos do 10.º ano e com professores desse nível de ensino, com o intuito de analisar a influência das representações gráficas no ensino e aprendizagem de estatística, com base em respostas dos alunos num teste de diagnóstico, análise documental produzida pelos alunos, questionários e entrevistas. Concluiu-se desse estudo que os professores envolvidos no estudo valorizavam as representações gráficas no ensino da Estatística, mesmo deixando este tópico para as últimas aulas do ano letivo. Em relação à aprendizagem dos conteúdos de Estatística, verificaram-se, para a maioria dos alunos, duas situações: revelavam capacidade de ler os dados contemplados em representações gráficas e de ler entre os dados, portanto os dois primeiros níveis de leitura de Curcio.

Segundo Friel, Curcio e Bright (2001), a compreensão gráfica inclui componentes aritméticas e não aritméticas, o que obrigam a ter em conta conhecimentos numéricos, sobretudo a compreensão das operações, de medição e de classificação. Neste mesmo sentido, Arteaga, Batanero, Ortiz e Contreras (2011) referem ser prioritário desenvolver o sentido numérico para se evitarem erros na interpretação de gráficos e tabelas estatísticas. Também têm sido detetados erros concetuais e dificuldades de aplicação prática dos conhecimentos sobre as medidas de tendência central (Barros, 2004; Batanero, Godino & Navas, 1997).

Estes estudos revelaram ainda que algumas das dificuldades e erros dos alunos eram comuns a alunos dos vários níveis de escolaridade (Fernandes, Carvalho & Correia, 2011) e que, em vários conteúdos do tema Estatística, eles ocorrem sobretudo na interpretação de medidas estatísticas ou de gráficos.

## CAPÍTULO III

### METODOLOGIA

Neste capítulo apresentam-se os procedimentos metodológicos adotados no estudo, mantendo a transparência e fundamentação das opções tomadas para atingir os objetivos de investigação estabelecidos.

Na primeira secção, procura-se deixar alguns contributos para a delimitação daquilo que são as metodologias qualitativas e quantitativas, elucidando quais as suas potencialidades e limitações, e argumentando sobre a possibilidade da sua utilização simultânea.

Na segunda secção disserta-se sobre as opções metodológicas tomadas neste trabalho, sobre a escolha dos instrumentos de recolha de dados e sobre os procedimentos adotados na amostragem.

Na terceira secção alude-se ao processo de construção dos instrumentos de recolha de dados: o Teste Diagnóstico (TD) com questões relacionadas com o domínio de Organização e Tratamento de Dados (OTD) e com Funções Sequências e Sucessões (FSS); as Fichas de Tarefas sobre os conteúdos de medidas de tendência central e de dispersão, análise e construção do Diagrama de Extremos e Quartis com dados organizados em tabelas e gráficos; o Teste Final (TF) de avaliação de conhecimentos. Faz-se uma breve referencia à Escala de Atitudes em Relação à Estatística (EARE) adaptada de Estrada (2002) e ao guião da entrevista.

Na quarta secção apresenta-se a planificação da Intervenção de Ensino (IE), implementada numa turma do 8.º ano. Nesta fase do estudo foram ainda utilizados outros métodos de recolha de dados: recolha documental da resolução dos alunos em díade e entrevistas após a intervenção.

Por fim, na quinta secção apresentam-se os métodos de análise de dados.

### 3.1. Opções Metodológicas

Nesta secção justificam-se as opções metodológicas, referem-se os métodos de recolha de dados: o questionário, a análise documental e a entrevista, e indica-se ainda o número de intervenientes em cada um dos momentos do estudo. No que concerne ao seu tratamento de dados, refere-se a análise estatística e a análise de conteúdo, consoante a natureza dos dados envolvidos.

#### 3.1.1. Justificação das opções metodológicas

No estudo optou-se por um modelo de investigação misto, isto é, qualitativo-quantitativo. Seguidamente, referem-se os pressupostos, as vantagens e limitações das diferentes perspetivas metodológicas, no campo da Educação, citando autores que as sustentam e perseguindo os objetivos específicos da presente investigação.

Em termos gerais, as pesquisas em Educação não podem ignorar os quadros de referência paradigmáticos que as orientam, pelo que convidam a um debate sobre a contribuição das abordagens quantitativa e qualitativa, com o objetivo de aproximação à realidade estudada. Entenda-se paradigma como um sistema de crenças, princípios e postulados que informam, dando sentido e rumo às práticas de investigação (Serrano, 2004; Lincoln & Guba, 2006; Sampieri, Collado & Lucio, 2013).

De um modo geral, os objetos de estudo, em Educação apresentam-se de forma complexa: a perspetiva quantitativa/positivista é tida como ineficaz para a análise enredada dessas situações, por ser uma perspetiva adequada para trabalhar com dados objetivos, medíveis, e regularidades e tendências observáveis. Questiona-se, pois, se esta será a aproximação mais adequada no estudo de algo, como os processos humanos e sociais, que são abrangentes, dinâmicos e interligados. Já a perspetiva qualitativa/interpretativa visa a compreensão dos significados atribuídos pelos sujeitos às suas ações num dado contexto, pretendendo-se interpretar em vez de mensurar, procurando compreender a realidade tal como ela é vivida pelos sujeitos ou grupos, a partir dos seus valores, representações, crenças, opiniões, atitudes, hábitos (Sampieri, Collado & Lucio, 2013).

Autores como Serrano (2004), Lincoln e Guba (2006) e Sampieri et al. (2013) consideram que a abordagem mista complementa estes dois métodos (quantitativos e qualitativos), por efetuar uma melhor aproximação à realidade. Na perspetiva de Serrano (2004), a natureza, a temática e o dinamismo de uma investigação exigem uma opção

mais definida por uma das abordagens, não querendo com isso, efetuar uma rutura com a outra. A escolha da metodologia deve fazer-se em função da natureza do problema a estudar (Pacheco, 1995a; Serrano, 2004; Lincoln & Guba, 2006). Tal levou a considerar-se pertinente seguir uma metodologia de investigação mista. No Quadro 6 encontram-se as questões de investigação com os respetivos objetivos e os instrumentos considerados para a recolha de dados que suportam as opções metodológicas.

Quadro 6 – Questões, objetivos e métodos de recolha de dados da investigação

| Questões   | Objetivos   | Métodos de recolha de dados  |
|--|---|--|
| (Q11)<br>As dificuldades de alunos do 8.º ano na interpretação gráfica e tabelar de funções repercutem-se nas suas dificuldades nos conteúdos estatísticos?  | 1.1 Identificar dificuldades dos alunos em situações-problema do tema Funções (FSS) e do tema Estatística (OTD).<br>1.2 Relacionar as dificuldades dos alunos no tema Funções com as suas dificuldades no tema Estatística. (Estudar, descrevendo, as dificuldades dos alunos segundo diferentes subtemas, como por exemplo: interpretação de tabelas; interpretação de gráficos; conceitos; etc.).<br>1.3 Estudar se a representação dos dados (tabelar e gráfica) afeta o cálculo correto de medidas de localização.  | Teste de diagnóstico   |
| (Q12)<br>Quais as atitudes em relação à Estatística dos alunos do 8.º ano das escolas envolvidas na fase de diagnose?  | 2.1 Construir uma escala de atitudes adaptada da escala de atitudes de Estrada (2002).<br>2.2 Estudar propriedades (psicométricas, dimensionalidade e confiabilidade) da escala de atitudes dos alunos do 8.º ano em relação à Estatística.   | Escala de atitudes   |
| (Q13)<br>Uma intervenção de ensino privilegiando a representação gráfica e tabelar dos dados em situações do quotidiano favorece a aprendizagem de Estatística no 8.º ano?   | 3.1. Estabelecer uma intervenção de ensino de Estatística, para alunos do 8.º ano, privilegiando a representação gráfica e tabelar dos dados em situações do quotidiano.<br>3.2. Estudar a idoneidade didática da intervenção de ensino planificada (avaliação a priori).<br>3.3. Estudar a idoneidade didática da investigação de ensino implementada (avaliação a posteriori).<br>3.4. Estudar as atitudes dos alunos em relação à Estatística, comparando as atitudes dos alunos envolvidos na intervenção de ensino antes e depois dessa intervenção.<br>3.5. Comparar o desempenho dos alunos durante a intervenção de ensino com o seu conhecimento prévio (Teste Diagnóstico) e averiguar se após a intervenção de ensino houve alteração das suas atitudes em relação à Estatística (comparando as atitudes em termos evolutivos, antes e depois da intervenção). | Fichas de Tarefas<br>Resoluções dos alunos<br>Interações em sala de aula<br>Escala de atitudes (antes e pós a implementação) |
| (Q14)<br>As dificuldades de alunos do 8.º ano na interpretação e análise da representação gráfica e tabelar de medidas da localização repercutem-se nas suas dificuldades, de construção, interpretação e análise do diagrama de extremos e quartis? | 4.1 Identificar dificuldades dos alunos em situações-problema do tema Estatística (OTD) na construção, interpretação e análise do diagrama de extremos e quartis de dados organizados em tabelas e em gráficos.<br>4.2 Averiguar a existência de dificuldades dos alunos na construção e análise de diagrama e extremos e quartis em função do tipo de representação gráfica ou tabelar dos dados. (Estudar e descrevendo, as dificuldades dos alunos segundo diferentes subtemas, como por exemplo: interpretação de tabelas; interpretação de gráficos; conceitos; etc.).<br>4.3 Comparar o desempenho dos alunos no subtema de medidas de localização, quando partindo de representações tabelares e gráficas dos dados, com o seu desempenho na representação dos diagramas de extremos e quartis.  | Fichas de Tarefas<br>Resoluções dos alunos<br>Teste Final<br>Entrevista semiestruturada aos alunos                           |

O estudo em questão divide-se em dois momentos, que decorreram em períodos de tempo e com metodologias diferentes, embora no mesmo ano letivo (2014-2015): o

momento da avaliação prévia de conhecimento, decorreu em dezembro, no início do ano letivo, com uma perspetiva mais quantitativa positivista; o momento da intervenção de ensino, que decorreu em maio e junho, no fim do ano letivo, com uma perspetiva mais qualitativa ou interpretativa. Neste último caso seguiu-se uma metodologia de estudo de caso por se considerar o mais adequado, já que se pretende perceber os processos, os produtos, os fenómenos inerentes à problemática desta investigação.

#### 3.1.1.1. Metodologia qualitativa

Coutinho (2013) reforça que, para além da compreensão dos fenómenos, na sua totalidade e no contexto em que ocorrem, o foco do problema ganha relevo após o avanço da investigação e à medida que o investigador vai realizando as entrevistas, as observações diretas e, de forma mais intensa e sistemática, as indiretas. É de salientar que o termo qualitativo evidencia as qualidades das entidades e incide nos processos e significados. Num estudo qualitativo valoriza-se a qualidade socialmente construída da realidade, numa perspetiva construtivista, e há uma relação de proximidade entre o investigador, o objeto de estudo e os constrangimentos situacionais que direciona a investigação (Denzin & Lincoln, 2000).

Alguns autores (e.g., Bogdan & Biklen, 1994; Ludke & André, 1986; Merriam, 1998) referem que as pesquisas qualitativas enfatizam mais os processos do que os produtos e preocupam-se mais com a compreensão, já que, segundo Bogdan e Biklen (1994), “a preocupação central não é a de se os resultados são suscetíveis de generalização, mas sim a de que outros contextos e sujeitos a eles podem ser generalizados” (p. 66). Na mesma linha, Serrano (2004) salienta que a interpretação sobre como os factos e os fenómenos se manifestam é mais importante do que determinar causas para os mesmos.

Bogdan e Biklen (1994) destacam um conjunto de características associadas à investigação qualitativa: (i) o foco é perceber os significados construídos pelas pessoas, procurando compreender o seu mundo e as suas experiências; (ii) o investigador é o principal meio de recolha e de análise de dados, procurando maximizar as oportunidades de recolha de dados e de produção de informação significativa; (iii) envolve uma estratégia indutiva de investigação, pois permite construir teorias a partir da observação, e uma compreensão intuitiva adquirida no campo de investigação; e, finalmente, (iv) o seu produto é descritivo e rico, uma vez que usa palavras e imagens, em vez de números, para descrever o que o investigador aprendeu sobre o fenómeno em estudo.



Segundo Merriam (1998), a investigação qualitativa visa compreender e explicar o significado de fenómenos sociais, com intervenção mínima, num ambiente o mais natural possível, centrando-se nos processos e significados e na compreensão dos fenómenos.

As características principais da investigação qualitativa, na perspectiva de Janesick (2000), requerem que o investigador seja o instrumento de investigação, construindo uma narrativa que englobe as várias histórias dos participantes. Segundo Miles e Huberman (1994), o investigador apresenta-se como o “instrumento de medida” no estudo, o que permite analisar, contrastar, comparar e desvendar padrões “dentro” das palavras obtidas a partir da observação direta, entrevista ou documentos. Denzin e Lincoln (2005) acrescentam, ainda, que numa investigação qualitativa o investigador assume uma postura inquiridora, de procura de respostas para questões que enfatizam a forma como a experiência social é criada e como lhe dá significado. Já Sampieri, Collado e Lucio (2013) destacam, como características dos métodos qualitativos: a análise do comportamento humano, do ponto de vista do protagonista; a observação naturalista (não controlada); a subjetividade (perspetiva de *insider*); a orientação para a descoberta e para o processo; e o seu carácter exploratório, descritivo e indutivo.

Também segundo Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa conduz à obtenção de dados descritivos, recolhidos no contacto direto do investigador com a situação, onde os fenómenos ocorrem naturalmente, contexto esse que os influencia. Segundo estes autores, as principais características da investigação qualitativa são: (1) a recolha de dados em “ambiente natural”, sendo o investigador o “instrumento principal” dessa recolha; (2) a natureza descritiva dos dados recolhidos; (3) a preferência pelos processos, o “como”, em detrimento dos resultados ou produtos; (4) a análise indutiva dos dados e (5) a importância das perspetivas dos participantes, o que é “vital” (Bogdan & Biklen, 1994, pp. 47-51).

A utilização de uma metodologia qualitativa prevê uma análise profunda de significados, conhecimentos e atributos de qualidade, dos fenómenos estudados, mais do que a obtenção de resultados de medida. “Os dados são enquadrados e interpretados em contextos holísticos de situações, acontecimentos de vida ou experiências vividas, particularmente significativos para as pessoas implicadas” (Fidalgo, 2003, p. 178). Neste caso, o investigador estuda os fenómenos, no seu contexto natural, procurando interpretá-los, tendo em conta os significados atribuídos pelas pessoas envolvidas, conduzindo a recolha de materiais que descrevem momentos da vida dos indivíduos, com o objetivo de

serem interpretados de modo a aumentar a compreensão do fenómeno em estudo (Denzin & Lincoln, 2000).

Também Merriam (1988) refere que, na metodologia qualitativa, os intervenientes na investigação não são reduzidos a meras variáveis isoladas; pelo contrário, são vistos como parte de um todo, no seu contexto natural. É de salientar que quando se reduzem pessoas a dados estatísticos, ignoram-se determinadas características do comportamento humano. Esta autora refere ainda que para se conhecer melhor os seres humanos, a nível do seu pensamento, deverão utilizar-se dados descritivos, derivados dos registos e anotações pessoais sobre os comportamentos observados. Nesta perspetiva, e de acordo com este método, Brogdan e Taylor (1986) consideram que, o investigador deve estar completamente envolvido no campo de ação dos investigados, uma vez que, na sua essência, este método de investigação se baseia principalmente no conversar, ouvir e permitir a expressão livre dos participantes. Estes autores, seguindo a mesma linha de pensamento, acrescentam que a investigação qualitativa, ao permitir subjetividade ao investigador, na procura do conhecimento, abre-se a uma maior diversidade de procedimentos metodológicos.

Em síntese, no Quadro 7, apresentam-se os principais pontos fortes e fracos da metodologia qualitativa, tendo em conta Sampieri, Collado e Lucio (2013).

Quadro 7 – Pontos fortes e fracos da metodologia qualitativa

| <b>Pontos fortes</b>   | <b>Pontos fracos</b>   |
|--|--|
| Elevada validade interna                                       | Imprecisão dos dados   |
| Acesso à complexidade e contextualização                       | Nem todos os setores da comunidade científica os aceitam                                       |
| Significados profundos dos resultados                          | Por limitações técnicas da sua própria natureza não se adequando à generalização de resultados |
| Voltado para as experiências dos participantes                 | Lida com um número pequeno de casos  |
| Descrição, análise e desenvolvimento de temas                  |  |
| Interpretação  |  |
| Subjetividade devido ao investigador como meio de investigação |  |

Num estudo qualitativo, alguns autores (e.g., Castro & Bronfman, 1997; Sampieri, et al., 2013) consideram que os dados obtidos possibilitam ao investigador teorizar sobre o processo alvo de estudo, já que a imprecisão dos dados, devido à sua subjetividade, obriga o investigador a optar por permanecer, o mais próximo possível, dos discursos proferidos pelos sujeitos envolvidos no estudo, sendo este, um instrumento de análise fiel. A preocupação com a complexidade e a profundidade entram em contradição com a extensão, porque os estudos qualitativos trabalham frequentemente com casos isolados

ou com pequenas amostras, devido à contextualização e à própria natureza dos instrumentos de recolha e análise dos dados utilizados.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), na investigação qualitativa a teoria surge a partir da recolha, análise, descrição e interpretação dos dados, pois:

as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando. Uma teoria desenvolvida deste modo procede de ‘baixo para cima’ (em vez de ‘cima para baixo’), com base em muitas peças individuais de informação recolhida que são inter-relacionadas. (p. 50)

No caso da presente investigação, o desenho de pesquisa de enfoque qualitativo, aberto, flexível (Sampieri et. al., 2013), desenvolve-se durante o trabalho de campo em dois momentos: i) em dois agrupamentos de escolas com alunos do 8.º ano (n= 332), onde se aplicou os TD e EARE, cujos dados resultaram das respostas dos alunos a estes instrumentos; ii) em sala de aula, numa turma (n=23) do 8.º ano, onde decorreu a intervenção de ensino. Aqui, os dados recolhidos resultaram da resolução, pelos alunos, das Fichas de Tarefas, do Teste Final, da Escala de Atitudes em Relação à Estatística (antes e depois da intervenção) e das respostas a uma Entrevista. Em particular, a técnica de entrevista e a observação participante, utilizadas nesta investigação, colocam o investigador em contacto direto com os indivíduos, permitindo compreender com detalhe o que eles pensam sobre determinado assunto, neste caso, a Estatística. Para Serrano (2004), interessa “conhecer as realidades concretas nas suas dimensões reais e temporais, o aqui e o agora no seu contexto social” (p.32). No caso desta investigação existiu interação, entre o investigador e os fenómenos e entre o investigador e os participantes, em particular nos momentos ocorridos em sala de aula, uma vez que foi o próprio que implementou a intervenção e aplicou os instrumentos de recolha de dados, com a ajuda da professora titular da turma. Tal facto permitiu ao investigador aprimorar os dados recolhidos à medida que a pesquisa avançava, mediante o conhecimento que foi tendo dos participantes do estudo, através das observações efetuadas, aula a aula, das descrições individuais que foi registando e das produções escritas que foi obtendo. O processo de produção de conhecimentos, nesta perspetiva, dá-se à medida que se recolhem e analisam os dados (Bogdan & Biklen, 1994; Serrano, 2004). Assim, pode dizer-se que o desenvolvimento da investigação se vai afinando, porque:

no início há questões ou focos de interesses muito amplos, que no final se tornam mais diretos e específicos. O pesquisador vai precisando melhor

esses focos à medida que o estudo se desenvolve. (Ludke e André, 1986, p. 13)

Em relação à análise qualitativa dos dados da investigação, pode referir-se que foram interpretados pelo investigador, podendo estes refletir a sua subjetividade, o seu envolvimento e sua impressão pessoal. Por tal motivo, Bogdan e Biklen (1994) salientam que “os dados carregam o peso de qualquer interpretação” (p. 67). Deve ter-se em atenção que a subjetividade deve ser controlada, para não enviesar o conhecimento e a interpretação da realidade.

Nesta busca profunda de conhecimento da realidade, todos os detalhes são importantes (Ludke & André, 1986), porquanto os dados recolhidos, neste tipo de investigação, são sobretudo descritivos (Serrano, 2004), uma vez que a “descrição funciona bem, como método de recolha de dados, quando se pretende que nenhum detalhe escape ao escrutínio” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 49).

Assim, o intuito desta pesquisa foi descrever, interpretar e compreender as discrepâncias existentes *entre* os significados pessoais, captados nas respostas dos participantes, e os significados institucionais com recuso aos instrumentos do EOS, como foi anteriormente referido.

Contudo, é importante referir que a legitimação e aceitação dos estudos qualitativos foram questionadas por alguns investigadores e, mais especificamente, a fiabilidade dos resultados de investigação qualitativa é questionada por muitos defensores do método quantitativo (Sampieri, Collado & Lucio, 2013).

#### 3.1.1.2. O Estudo de Caso

Na investigação em Educação, o método de estudo de caso é muito utilizado e oferece inúmeras possibilidades de estudo, compreensão e melhoria da realidade social e profissional (Serrano, 2004; Yin, 2005).

Coutinho (2013) refere que “a característica que melhor identifica e distingue esta abordagem metodológica, é o facto de se tratar de um plano de investigação que envolve o estudo intensivo e detalhado de uma entidade bem definida: “caso” (p. 334). Refira-se que no presente estudo “o caso” é a turma do 8.º ano de escolaridade onde decorreu a intervenção de ensino. Para Amado e Freire (2013) “o caso” caracteriza-se por ser a unidade de estudo, na sua origem, e na sua evolução deve mostrar alguma estabilidade interna (Marcelo & Parrilla, 1991). Segundo Stake (2005), o estudo de caso consiste no “estudo da particularidade e da complexidade de um caso singular, para chegar a

compreender a sua abrangência” (p. 11). Yin (2010) define estudo de caso como “uma investigação empírica que estuda um fenómeno contemporâneo dentro do contexto de vida, especialmente quando as fronteiras entre o fenómeno e o contexto não são absolutamente evidentes” (p. 22). Segundo este autor, podem ser utilizadas múltiplas fontes para recolher evidências e informações, desde que sejam apropriadas e permitam compreender “o caso” no seu todo (Yin, 2005). Yin considera o estudo caso como a estratégia ou método “mais adequado para se saber o “como” e o “porquê” de acontecimentos atuais sobre os quais o investigador tem pouco ou nenhum controlo” (1994, p. 9).

O estudo de caso implica um conhecimento profundo de toda a realidade investigada, o que implica ter-se de recorrer a diferentes métodos e técnicas de recolha de dados. É de realçar que a multiplicidade de critérios e características inerentes ao estudo de caso conduzem a algumas classificações e tipificações. Para Yin (1994, 2005, 2010), segundo os objetivos e a natureza das informações finais, os estudos de caso classificam-se em: exploratórios, quando se conhece muito pouco da realidade em estudo e desde que os dados concorram para o esclarecimento e delimitação dos problemas ou fenómenos da realidade descrita; descritivos, por existir uma descrição densa e detalhada de um fenómeno em contexto natural; explicativos, sempre que se trate de determinar relações de causa e efeito em situações reais, ou seja, de que forma os factos acontecem, uns em função de outros; avaliativos, quando produz uma descrição densa, aclara significados e emite juízos.

De acordo com Yin (1994, 2005, 2010) e de Bogdan e Biklen (1994), distingue-se o estudo de caso único e o estudo de caso múltiplo ou comparativo: no primeiro, o investigador estuda uma realidade, um ambiente, enfim, um único caso; no segundo, o investigador estuda dois ou mais casos, sendo posteriormente “comparados e contrastados” (Bogdan e Biklen, 1994, p. 97).

Stake (2005), tendo em conta o propósito da investigação, propõe uma tipologia de estudos de caso que integra e distingue três tipos: o intrínseco, quando o investigador pretende estudar uma situação específica, na sua particularidade e complexidade, pois o interesse do investigador é compreender melhor um dado caso; o instrumental, quando o investigador utiliza o estudo do caso para aprofundar e compreender melhor um tema que é o objeto de estudo ou para melhor entender fenómenos externos; o coletivo, quando o investigador utiliza vários casos para, através da sua comparação, conseguir um

conhecimento mais profundo sobre um fenómeno ou uma situação real, tratando-se de um estudo intensivo de vários casos.

Yin (2005; 2010) adverte para o facto de os estudos de caso serem sobre unidades particulares ou pequenas unidades sociais, não sendo, assim, possível efetuar generalizações estatísticas. Contudo, Yin (2005) esclarece que a generalização analítica pode ser realizada e é a mais adequada, dado que o objetivo é ampliar e generalizar o modelo teórico encontrado a partir do estudo de caso. A generalização é referente a proposições teóricas e não proposições sobre populações (Yin, 2005; Amado & Freira, 2013). Na generalização no estudo de caso, Stake (2007) refere que

o verdadeiro objetivo do estudo de caso é a particularização, não a generalização. Pega-se no caso particular e fica-se a conhecê-lo bem, numa primeira fase não por aquilo em que difere dos outros, mas pelo que é, pelo que faz. A ênfase é colocada na singularidade, e isso implica o conhecimento de outros casos diferentes, mas a maior ênfase é posta na compreensão do próprio caso. (p.24)

Na perspetiva de Serrano (2004), a modalidade de estudo de caso possui um duplo tributo: por um lado, esta modalidade de investigação é apropriada para estudos exploratórios e compreensivos, centrados na descrição de uma situação, na explicação de resultados a partir de uma teoria, na identificação das relações entre causas e efeitos ou na validação de teorias; por outro lado, ilustra e analisa uma dada situação real e fomenta a discussão e a tomada de decisões convenientes, contribuindo para mudar ou melhorar, podendo servir, neste contexto, objetivos de aprendizagem e de formação.

Tendo em conta a posição de diversos autores, Amado e Freire (2013) salientam as características que melhor definem um estudo de caso: por um lado, é a focagem dos fenómenos a estudar dentro de um contexto (social, cultural, institucional, temporal, etc.); por outro lado, tem o objetivo de explicar/compreender o que lhe é específico e, de algum modo, determinado pelo contexto.

No estudo de caso qualitativo existem características fundamentais que são salientadas por Ludke e André (1986, pp. 18-20), que aqui são apresentadas e contextualizadas para o estudo atual:

— Visa a descoberta: o que se fundamenta no caráter aberto e revisível do conhecimento, já que o refinamento progressivo, envolvendo a exploração de uma primeira versão ou de uma sequência de tarefas em sala de aula, permite verificar o seu funcionamento e, em seguida, esta sequência de tarefas é sucessivamente revista e

analisada, com base na experiência, de modo a eliminar possíveis deficiências e falhas na implementação;

— Enfatiza a interpretação em contexto: há que levar sempre em consideração o contexto em que o caso se situa; se for centrado numa escola, por exemplo, ter-se-á em conta a história que a envolve e a situação geral no momento da pesquisa, etc.;

— Visa retratar a realidade de forma completa e profunda: atende-se à complexidade natural das situações, como no caso da docente que procedeu à implementação não ser a titular de turma, e as relações entre os intervenientes: investigadora com titular de turma; investigadora e alunos da turma sob investigação; e titular de turma e respetivos alunos;

— Usa uma variedade de fontes de informação, de abordagem e técnicas, resistindo à tirania do dogma metodológico;

— Permite generalizações naturalistas e ecológicas: um leitor do relatório final fica apto a estabelecer relações entre as conclusões de análise e a sua própria experiência em situações semelhantes;

— Procura representar os pontos de vista diferentes, e até em conflito, presentes numa situação: a pessoa do investigador tenta trazer para o estudo essa divergência de opiniões, revelando ainda o seu ponto de vista sobre a questão e justificando-o devidamente.

No presente estudo, cujo “caso” é a turma do 8.º ano, que será analisada em função do objetivo do estudo, como um todo, isto é, como uma unidade de análise, os autores Gomez, Flores e Jimenez (1996) designam um estudo de caso com tais características por *holistic* ou estudo de caso global.

Alguns autores (Serrano 2004; Yin, 2010) consideram que os estudos de caso possuem as virtudes antes descritas, enquanto outros encaram-nas como investigações empíricas (Yin, 1994) que têm por base o raciocínio indutivo (Bravo, 1998; Gomez, Flores & Jimenez, 1996), com forte dependência do trabalho de campo (Punch, 1998), e que, segundo Ponte (1994), não constituem um estudo experimental.

O estudo de caso tem sempre um cariz descritivo (Coutinho & Chaves, 2002) baseado no caso (Mertens, 1998), e por isso muitas vezes é associado à investigação qualitativa, o que, na perspetiva de vários autores, é uma conceção errada pois o estudo de caso pode ser incluído no quadro de outros paradigmas de investigação, como o positivista ou mesmo o crítico (Ponte, 1994; Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 1994;

Punch, 1998), chegando mesmo a ser considerado como uma modalidade de investigação mista (Bisquerra, 1989; Gomez, Flores & Jimenez, 1996).

### 3.1.1.3. Metodologia quantitativa

Numa investigação quantitativa pretende-se explicar, prever e controlar os fenómenos, procurando regularidades e leis através da objetividade dos procedimentos e da quantificação de objetos (Almeida & Freire, 2000).

Realce-se as características fundamentais do método quantitativo, que segundo alguns autores (Bisquerra, 1989; Creswell, 2009; Wiersma, 1995; Serapioni, 2000) são: (1) ênfase centrada nos factos — comparação, relações, causas, produtos e resultados; (2) investigação baseada na teoria — métodos controlados com base em testes, verificação e comparação de teorias e hipóteses; (3) plano de investigação estruturado e estático; (4) grande dimensão da amostra, com recurso a técnicas de amostragem probabilística; (5) investigador externo preocupado com as questões de objetividade; (6) validação de testes e medidas *standard* de observação objetiva do comportamento; (7) utilização de técnicas estatísticas na análise de dados; (8) orientação de tendência hipotético-dedutiva, voltada para os resultados e para a replicabilidade e possibilidade de generalização, o que permite prever, explicar e controlar fenómenos.

É através de estudos quantitativo-correlacionais que, segundo Almeida e Freire (2004), se procura compreender e prever fenómenos, por referência a constructos, tanto internos (testes) como externos (relação a variáveis do contexto). Um aspeto a salientar é a utilização da linguagem matemática que, desde muito cedo, permite a sistematização das observações do mundo físico, trabalhando-as de modo a construir novo conhecimento. É a Matemática que tem gerado maior objetividade, encarada pelas ciências sociais e humanas como uso da linguagem matemática e da quantificação. Contudo, a utilização desta linguagem leva a descrições e modelos direcionados a uma construção abstrata que nem sempre traduz as situações observadas ou apenas as traduz parcialmente (Minayo & Sanches, 1993).

As limitações do método experimental delimitam a sua transposição para o campo das ciências humanas, já que decorrem da maior complexidade dos fenómenos e objetos estudados. Por isso, a utilização isolada destes métodos pode contribuir para posições mecanicistas e reducionistas relativamente à explicação do conhecimento humano. Almeida e Freire (2004) salientam que alguns fenómenos são difíceis de estudar, já que podem ocorrer em situações irrepetíveis, tendo em conta que alguns resultados obtidos



contêm algum artificialismo que pouco tem a ver com a complexidade, a dinâmica e a natureza interativa dos fenómenos psicológicos.

Segundo Cardoso (2007), é frequente a crítica à metodologia quantitativa devido à ausência de problematização do papel social do investigador, dos efeitos sociais ou políticos da investigação, escondidos na objetividade das técnicas utilizadas e no raciocínio lógico e matemático utilizado. No entanto, para Serapioni (2000), a crítica está associada à falta de validade interna, devido à ambiguidade daquilo que é medido, porquanto frequentemente não atende à perspectiva do sujeito.

No Quadro 8 sistematizam-se os principais pontos fortes e fracos da metodologia quantitativa.

Quadro 8 – Pontos fortes e fracos da metodologia quantitativa

| <b>Pontos fortes</b>  | <b>Pontos fracos</b>                       |
|---|--|
| Elevada validade externa  | Baixa validade interna                     |
| Replicabilidade   | Não atende à perspectiva do sujeito        |
| Possibilidade de generalização                                    | Não atende à subjetividade do investigador |
| Recorre a procedimentos que facilitam a sua aceitação pelos pares |  |
| Abrange maior número de casos                                     |  |

Recorrendo a um quadro elaborado por Sampieri, Collado e Lucio, (2013, pp. 36-39), resumem-se, no Quadro 9, as características fundamentais dos paradigmas quantitativo e qualitativo para este estudo.

Quadro 9 – Paradigmas qualitativo e quantitativo da investigação

| <b>Paradigma quantitativo</b>   | <b>Paradigma qualitativo</b>  |
|---|---|
| Apoia-se na filosofia positivista, comportamentalista, empirista  | Apoia-se nas filosofias fenomenológica-naturalista, etnometodológica e interacionismo simbólico   |
| Estabelece relações e explica as mudanças.  | Compreende fenómenos sociais segundo as perspectivas dos participantes  |
| Os métodos e processos são específicos e pré-determinados. As decisões sobre as estratégias de investigação são rígidas | Os métodos e processos são flexíveis, o desenho da investigação é emergente, podendo ser modificadas as decisões ao longo da investigação |
| Apoia-se em desenhos correlacionais ou experimentais, de modo a reduzir os enviesamentos e as variáveis externas        | Admite a existência de subjetividade tanto na recolha de dados quanto na interpretação desses dados                                       |
| O papel do investigador deve ser, tanto quanto possível, de afastamento   | O investigador vive na imersão da situação e no fenómeno social, passado e futuro   |
| As investigações visam, maioritariamente, permitir generalizações   | As ações são fortemente influenciadas pelos contextos em que ocorrem; são generalizações conceituais                                      |
| Analisa-se os dados de forma dedutiva   | Analisa-se dados de forma indutiva  |
| Recolhem-se dados para confirmar hipóteses previamente construídas  | Não se recolhem dados para confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente  |
| Ênfase nos resultados ou produtos da investigação   | Ênfase maior no processo de investigação  |

---

|   |  |
|---|--|
| <p>As amostras são, na maioria dos casos, amplas, estratificadas, com grupo de controlo e de seleção aleatória, mas também podem se de conveniência</p> <p>Os métodos e as técnicas mais utilizadas são o experimental, questionário e entrevista estruturada</p> | <p>As amostras das investigações são pequenas, numericamente não representativas</p> <p>Os métodos mais utilizados são a observação participante, análise documental e entrevista aberta (semiestruturada, conversa informal, não-estruturada)</p> |
|---|--|

---

Entende-se que as duas perspetivas metodológicas possuem virtualidades inegáveis, mas também aspetos de menor valia, pelo que é através do recurso a ambas as metodologias que se podem ultrapassar barreiras epistemológicas em prol de uma integração metodológica, que permite encontrar a chave para um desenho metodológico cujas fraquezas de um método são contrabalançadas pelas forças de outro, numa simbiose e complementaridade que conduz a melhores resultados, aproximando-se do conhecimento mais cabal da realidade em estudo (Sampieri et al., 2013).

No que concerne à presente investigação, parte do desenho de pesquisa, mormente na sua parte inicial e final e associadas às questões de investigação Q1 e Q2, apresenta um grande enfoque quantitativo, estruturado e predeterminado, cuja amostra é constituída pelos alunos (n = 332) do 8.º ano de escolaridade dos dois Agrupamentos de Escolas. Os métodos de recolha de dados são o Teste Diagnóstico e a Escala de Atitudes em Relação à Estatística e o Teste Final. Refira-se que na fase inicial não existiu interação física entre o investigador, os fenómenos e os participantes, uma vez que a recolha foi efetuada por docentes titulares das turmas envolvidas. Os instrumentos, validados e confiáveis, foram criados com base na revisão de literatura (Estrada, 2002) e foram testados e ajustados.

#### 3.1.1.4. Metodologia mista

Enquanto os estudos quantitativos colhem dificuldades de legitimação e aceitação em certos setores de investigação, a fiabilidade dos resultados de investigação qualitativa é questionada por muitos defensores do método quantitativo (Sampieri, Collado & Lucio, 2013).

A metodologia mista fundamenta-se no paradigma em que se enquadra quase todos os estudos e pesquisas quantitativas e qualitativas (Sampieri et al., 2013). Na perspetiva de Greene (2007), a visão do paradigma misto baseia-se na abrangência de vários modelos que partilham o mesmo espaço e concorrem mutuamente para uma melhor compreensão do fenómeno estudado. Tal paradigma envolve uma “multiplicidade de perspetivas, premissas teóricas, tradições metodológicas, técnicas de recolha e análise de dados e

entendimentos e valores que constituem os elementos dos modelos mentais” (Sampieri et al., 2013, p. 555).

Recorde-se que paradigma é a busca de soluções práticas e trabalháveis, para realizar pesquisa, utilizando critérios e desenhos apropriados na formulação de uma situação e contexto específico. Assim, este paradigma apresenta-se pluralista, em que se aceita que tanto o enfoque quantitativo como o qualitativo são ambos muito úteis e frutíferos (Sampieri et al., 2013). Para Sampieri e Mendonza (2008) as aproximações ao conhecimento dos dois enfoques, parecendo uma contradição, podem, no entanto, corporizar apenas uma plataforma de complementaridade.

Em relação ao debate quantitativo-qualitativo, a ótica pragmática mostra que os temas-chave são ontológicos e epistemológicos (Sampieri et al., 2013). Por um lado, os pesquisadores quantitativos percebem a “verdade” como algo que descreve uma realidade objetiva, separada do observador e que espera ser descoberta; por outro lado, os pesquisadores qualitativos estão interessados na natureza mutante da realidade, criada por meio das experiências pessoais, sendo inseparáveis o pesquisador e o fenómeno estudado, ao integrarem ambos a realidade envolvente. Contudo, estes dois paradigmas, qualitativo-quantitativo, sendo diferentes, não são equiparáveis nem proporcionais (Sale, Leffeld & Brazil, 2008).

A oposição e o debate entre métodos quantitativos e qualitativos remontam à fundação das Ciências Sociais, verificando-se nos últimos 20 anos, por parte dos teóricos, tanto da abordagem quantitativa como da abordagem qualitativa, uma produção abundante dedicada à problematização dos métodos concorrentes, a qual radica mais profundamente em opções epistemológicas do que na prática da investigação no campo social (Serapioni, 2000). O facto de representarem paradigmas diferentes e não equiparáveis, não impede que diversos métodos possam ser articulados num mesmo estudo, desde que sirvam propósitos de complementaridade, já que cada método perspetiva diferentes ângulos do fenómeno (Sampieri et al., 2013). Sublinhe-se que ambas as metodologias pretendem responder às mesmas questões essenciais, ainda que não haja “contradição, assim como não há continuidade, entre investigação quantitativa e qualitativa. Ambas são de natureza diferente.” (Serapioni, 2000, p. 188). Nas palavras de Minayo e Sanches (1993):

nenhuma das duas, porém, é boa, no sentido de ser suficiente para a compreensão completa dessa realidade. Um bom método será sempre aquele, que permitindo uma construção correta dos dados, ajude a

refletir sobre a dinâmica da teoria. Portanto, além de apropriado ao objeto da investigação e de oferecer elementos teóricos para a análise, o método tem que ser operacionalmente exequível. (p. 239)

Na verdade, e sem se cair em partidarismos epistemológicos, a realidade da investigação, no terreno, tem revelado resultados positivos na combinação de ambas as abordagens. E dadas as forças e as limitações de cada um dos métodos, a sua combinação permite atingir um grau de validade, interna e externa, muito positiva, assegurando, por sua vez, que as políticas de ação desenhadas sejam concretas e adequadas aos sectores sociais que se pretende atingir. De facto, a validade de uma metodologia não pode ser aferida em abstrato, mas sim face ao problema e aos objetivos a que se pretende dar resposta. É, pois, a sua utilidade prática que determina a escolha dos métodos de investigação (Serapioni, 2000).

Assim, ao longo de um desenho de investigação, podem-se intercalar momentos de investigação quantitativa, que no presente estudo corresponde à diagnose, à implementação da intervenção e à avaliação final das aprendizagens, com momento de investigação qualitativa, aquando da análise e descrição das dificuldades. Na prática, os dois tipos de estudo podem favorecer a compreensão da realidade obtida. Segundo Sampieri e Mendonza (2008), não existe um processo misto; o facto é que, num estudo híbrido, estão presentes diversos processos. Estes enfoques integram-se em diferentes etapas: na formulação de problema, no desenho da pesquisa, na amostragem, na recolha de dados, nos procedimentos de análise de dados e/ou na interpretação dos resultados.

Tendo em conta as forças e as limitações de cada uma das metodologias, opta-se neste estudo pela realização de um estudo misto. Nas palavras de Minayo e Sanches (1993), as metodologias não são boas ou más em si mesmas, antes são mais ou menos adequadas à resolução de certos problemas, à prossecução de determinados objetivos e à realidade que nos propomos conhecer. Deste modo, a escolha metodológica não deve ser um dado de partida, mas sim uma construção a que se chega, tendo por base a análise da realidade que se pretende conhecer e os objetivos a atingir.

### 3.2. Participantes do estudo

Para a presente tese, a recolha de dados foi feita em dois Agrupamentos de Escolas do distrito do Porto, ambas do mesmo concelho, com escolas do 1.º ciclo, com pré-escolar, e cada uma com uma escola do 2.º e 3.º ciclo do Ensino Básico.

A escolha dos Agrupamentos resultou de amostragem por conveniência com base nos seguintes critérios: (i) serem Agrupamentos com características idênticas e terem a mesma tipologia de escolas; (ii) receberem alunos provenientes de meios socioeconómicos idênticos, com características familiares semelhantes e pertencentes ao mesmo conselho; (iii) serem Agrupamentos próximos da residência da professora investigadora, de modo a facilitar a recolha de dados.

Por questões éticas, e para facilitar a explicação, vão ser designados por Agrupamento A e Agrupamento B. O Agrupamento A é constituído por cinco Escolas do 1.º ciclo com Jardim-de-Infância (EB1/JI), uma Escola Básica do 2.º e 3.º ciclo (EB A) e uma Escola Secundária (ES A); o Agrupamento B é composto por cinco Escolas do Pré-escolar, cinco Escolas do 1.º ciclo e uma Escola Básica do 2.º e 3.º ciclo (EB B). O Agrupamento A tem uma população de 3250 alunos, do Pré-escolar ao 12.º ano, e o B tem uma população de 1823 alunos, do Pré-escolar ao 9.º ano.

A recolha de dados ocorreu em duas fases relacionadas e dependentes do tipo de estudo a realizar. Na primeira fase, para o estudo da diagnose e da predisposição dos alunos em relação à Estatística, os participantes do estudo corresponderam a todos os alunos de todas as turmas do 8.º ano do ensino básico das duas escolas selecionadas (num total de 18 turmas). Na segunda fase, os participantes corresponderam a todos os alunos de uma turma do 8.º ano escolhida para a intervenção de ensino.

Saliente-se que para a intervenção de ensino optou-se por um estudo de caso e, segundo este tipo de abordagem metodológica, não se privilegia uma amostragem aleatória e numerosa, mas sim criteriosa e intencional, pelo que a seleção da amostra está sujeita a determinados critérios que permitam à professora investigadora apreender o máximo sobre o fenómeno em estudo (Vale, 2000). Neste caso, a turma escolhida para a intervenção de ensino foi a turma do 8.º B da escola EB A do Agrupamento A, por ser aquela com o horário compatível com o da professora investigadora. A turma é constituída por 24 alunos.

### 3.2.1. Caracterização do grupo de alunos envolvida na diagnose

Todos os alunos das 18 turmas realizaram o TD e responderam à EARE (380 alunos), no entanto, nem todos os dados recolhidos (48 (13%) alunos) puderam ser utilizados, já que nem todos os alunos estiveram presentes no dia da recolha de dados (12 (25%) alunos) ou nem todos apresentaram as autorizações dos Encarregados de Educação devidamente assinadas: 28(58%) alunos apresentaram as autorizações por assinar e 8

(17%) alunos apresentaram as autorizações assinadas mas sem permissão da sua utilização. Assim, a amostra ficou constituída por 332 (87%) alunos, sendo 77 (23%) alunos da EB A, 149 (45%) alunos da ES A e 106 (32%) alunos da EB B.

Na Tabela 1 apresentam-se os dados referentes à constituição da amostra dos alunos, das Escolas participantes de ambos os Agrupamentos.

Tabela 1 – Constituição da amostra de alunos

| Agrupamento | Escola | Turmas do 8.º ano | Número de alunos da turma | Número de alunos com NEE | Número de alunos participantes | Género |     | Alunos a frequentar novamente o 8.º ano | Idade média |       |
|-------------|--------|-------------------|---------------------------|--------------------------|--------------------------------|--------|-----|---|-------------|-------|
|             |        |                   |                           |                          |                                | F      | M   |   |             |       |
| A           | EB A   | A(*)              | 19                        | 2                        | 13                             | 4      | 9   | 7                                       | 15,08       |       |
|             |        | B(*)              | 24                        | 2                        | 22                             | 9      | 13  | 3                                       | 13,68       |       |
|             |        | C                 | 20                        | 1                        | 20                             | 13     | 7   | 2                                       | 14,10       |       |
|             |        | D                 | 20                        | 0                        | 10                             | 3      | 7   | 8                                       | 15,60       |       |
|             |        | E(*)              | 19                        | 2                        | 12                             | 3      | 9   | 0                                       | 16,25       |       |
|             | ES A   | A                 | 26                        | 0                        | 26                             | 13     | 13  | 1                                       | 13,35       |       |
|             |        | B                 | 22                        | 0                        | 22                             | 10     | 12  | 5                                       | 14,00       |       |
|             |        | C                 | 20                        | 2                        | 20                             | 4      | 16  | 3                                       | 13,85       |       |
|             |        | D                 | 24                        | 0                        | 24                             | 10     | 14  | 1                                       | 13,25       |       |
|             |        | E(*)              | 24                        | 0                        | 14                             | 8      | 6   | 8                                       | 14,57       |       |
|             |        | F                 | 21                        | 1                        | 21                             | 11     | 10  | 4                                       | 13,57       |       |
|             |        | G                 | 22                        | 0                        | 22                             | 13     | 9   | 4                                       | 13,73       |       |
|             | B      | EB B              | A                         | 23                       | 0                              | 23     | 11  | 12                                      | 5           | 14,61 |
|             |        |                   | B                         | 20                       | 1                              | 20     | 5   | 15                                      | 0           | 15,55 |
| C(*)        |        |                   | 19                        | 1                        | 8                              | 2      | 6   | 0                                       | 13,00       |       |
| D           |        |                   | 20                        | 0                        | 19                             | 7      | 12  | 2                                       | 13,37       |       |
| E(*)        |        |                   | 19                        | 1                        | 16                             | 9      | 7   | 3                                       | 13,75       |       |
| F           |        |                   | 20                        | 0                        | 20                             | 8      | 12  | 2                                       | 13,30       |       |
| Total       |        | 18                | 380                       | 13                       | 332                            | 143    | 189 | 58                                      | 14,40       |       |

(\*) Alunos ausentes no dia da implementação da EARE e TD

Da análise da Tabela 1 e dos dados fornecidos pelos docentes titulares de turma, pode concluir-se que existem 189 (57%) alunos do género masculino e 143 (43%) do género feminino envolvidos no estudo. Verifica-se que existem 58 (17%) de alunos que se encontram pela segunda vez no 8.º ano e, destes, 6 (10%) são alunos com Necessidades Educativas Especiais (NEE), que se encontram a fazer o 8.º ano por disciplinas, encontrando-se, neste ano letivo, a fazer a segunda parte do currículo; 12 (21%) alunos são alunos que foram considerados de abandono escolar, dada a escassez de presenças que registaram, logo no primeiro período do ano letivo anterior; e 40 (69 %) alunos ficaram retidos no oitavo ano por terem um elevado número de níveis inferiores a três.

Há 13 (4%) de alunos com NEE, dos quais 7 (54%) frequentam o 8.º ano pela primeira vez e não estão inscritos à disciplina de Matemática. Saliente-se, ainda, que a média de idades da amostra é de 14,40 e que das 18 turmas envolvidas no estudo, 7 (39%) são turmas incompletas, dado que nem todos os alunos puderam ser considerados.

### 3.2.2. Caracterização do grupo de alunos envolvida na Intervenção de Ensino

Dos 24 alunos participantes na IE, 2 são alunos com necessidades educativas especiais (NEE), que se encontravam a frequentar o 8.º ano por disciplinas: um está a fazer o primeiro conjunto de disciplinas e não frequenta Matemática; o outro está a fazer o segundo conjunto e está a frequentar Matemática.

Responderam à EARE e ao TD 22 alunos dos 23 envolvidos na implementação da intervenção, pois um deles faltou à aula de Matemática no dia da aplicação do questionário de atitude. Este aluno foi depois assíduo às aulas, durante o período em que decorreu a IE. Na Tabela 2 apresentam-se os dados referentes à amostra de alunos da turma do 8.º ano, envolvidos na IE. Os participantes do estudo, por razões de anonimato (Almeida, 1996), serão designados pela letra A (de aluno) seguida de um número atribuído de acordo com a ordem chegada dos TD e EARE à professora investigadora, identificador assim o conjunto dos 332 alunos.

Tabela 2 – Constituição da amostra de alunos envolvidos na intervenção de ensino

| Identificação dos alunos | Género | Idade | Alunos a                       |                           | Nível no exame do 6.º ano | Nível no final do 7.º ano | Nível no final do 1.º período a Matemática | Nível no final do 2.º período a Matemática |
|--------------------------|--------|-------|--------------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|--|--|
|                          |        |       | frequentar novamente o 8.º ano | Nível no final do 6.º ano |                           |                           |  |  |
| A0*                      | M      | 15    | Sim                            | 2                         | 2                         | 2                         | 2  | 1  |
| A14                      | F      | 13    |                                | 3                         | 2                         | 2                         | 2  | 2  |
| A15                      | F      | 13    |                                | 5                         | 4                         | 5                         | 5  | 5  |
| A16                      | M      | 13    |                                | 4                         | 3                         | 5                         | 4  | 4  |
| A17                      | M      | 15    |                                | 5                         | 4                         | 4                         | 4  | 4  |
| A18                      | M      | 13    |                                | 5                         | 5                         | 5                         | 5  | 5  |
| A19                      | M      | 13    |                                | 3                         | 2                         | 3                         | 3  | 2  |
| A20                      | M      | 13    |                                | 4                         | 3                         | 3                         | 3  | 2  |
| A21                      | M      | 13    |                                | 2                         | 3                         | 3                         | 2  | 2  |
| A22                      | M      | 13    |                                | 5                         | 3                         | 3                         | 3  | 3  |
| A23                      | M      | 13    |                                | 3                         | 3                         | 3                         | 3  | 3  |
| A24                      | F      | 13    |                                | 4                         | 3                         | 3                         | 4  | 3  |
| A25                      | M      | 13    |                                | 5                         | 4                         | 4                         | 4  | 3  |
| A26                      | F      | 15    |                                | 2                         | 2                         | 3                         | 2  | 2  |
| A27                      | M      | 16    |                                | 2                         | 2                         | 2                         | 2  | 2  |
| A28                      | M      | 13    |                                | 4                         | 3                         | 3                         | 3  | 2  |
| A29                      | F      | 15    | Sim                            | 4                         | 4                         | 2                         | 2  | 2  |

|              |   |    |      |   |     |     |     |     |     |
|--------------|---|----|------|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| A30 **       | M | 14 | Sim  | 2 | 2   | 2   | 2   | 1   |     |
| A31          | M | 17 | Sim  | 2 | 2   | 2   | 2   | 1   |     |
| A32          | F | 13 |      | 4 | 4   | 3   | 2   | 2   |     |
| A33          | F | 13 |      | 2 | 2   | 3   | 3   | 3   |     |
| A34          | F | 13 |      | 4 | 2   | 4   | 3   | 3   |     |
| A35          | F | 14 |      | 2 | 2   | 2   | 2   | 1   |     |
| <b>Total</b> |   | 23 | 13,7 | 3 | 3,5 | 2,9 | 3,1 | 2,9 | 2,5 |

\*Aluno que faltou no dia da diagnose; \*\*Aluno com NEE.

Pela Tabela 2, resultado da análise dos dados fornecidos pela docente titular de turma, pode concluir-se que a maioria dos alunos (87%) se encontra a frequentar o 8.º ano pela primeira vez, 9 (39%) alunos são do género feminino e 14 (61%) do género masculino e a idade média é de 13,7. Pode ainda verificar-se que a maioria dos alunos apresenta resultados positivos à disciplina de Matemática em quatro momentos avaliativos (final do 6.º ano (65%), exame do 6.º ano (56%), final do 7.º ano (70%) e no final do 1.º período do 8.º ano (56%)), enquanto no final do 2.º período do 8.º ano menos de metade (44%) dos alunos obtém nível positivo. Outros resultados importantes podem ser destacados: 43% apresenta sempre nível superior ou igual a três e, destes, 20% mantêm sempre o mesmo nível (10% o nível cinco e 10% o nível três); 26% apresenta sempre nível inferior a três; 17% obtém o mesmo nível positivo no 6.º ano (avaliação interna e externa); 13% não apresentam oscilação nos níveis obtidos ao longo dos momentos de avaliação.

Comparando a avaliação interna com a avaliação externa, no 6.º ano, verifica-se que 11 (48%) alunos tiveram pior desempenho na avaliação externa; 1 aluno (4%) obteve melhor desempenho na avaliação externa; e os restantes 11 (48%) alunos mantiveram o seu desempenho. No que concerne à avaliação interna no 8.º ano, verifica-se que a maioria dos alunos (61%) mantém o mesmo nível no final dos dois primeiros períodos do ano letivo, 13% passaram de nível positivo para negativo e 43% apresentaram nível negativo nos dois períodos.

Segundo a docente titular de turma, a maioria dos alunos (52%) investe bastante no estudo da disciplina de Matemática e apresentam um comportamento adequado em sala de aula, o que pode denotar apoio familiar atento e presente.

### 3.3. Descrição do estudo

Os alunos e professores titulares das 18 turmas envolvidas tiveram conhecimento prévio deste estudo, pois, como refere Almeida (1995), “em investigação educacional a



colaboração voluntária deve, na grande maioria dos casos, ser consentida” (Almeida, 1995, p. 130). Os alunos mostraram-se muito entusiasmados e expectantes.

Por questões legais e éticas, foi solicitada autorização às Direções dos Agrupamentos de Escolas envolvidas para a realização do estudo e aos Encarregados de Educação dos alunos envolvidos no estudo para autorizarem a recolha de dados (Anexos II).

Como referido anteriormente, a professora investigadora não teve qualquer contacto com os alunos envolvidos e para a implementação do estudo realizaram-se reuniões individuais com cada um dos docentes titulares das turmas envolvidas (sete docentes, pois cada um destes tinha mais do que uma das turmas envolvidas), onde, entre outros temas, foram debatidos o tipo de linguagem utilizada nos instrumentos de recolha de dados (EARE e TD), a metodologia a utilizar na aplicação dos instrumentos e a forma de recolha das respostas dos alunos. Estas reuniões serviram também para recolher elementos relevantes sobre cada uma das 18 turmas.

### 3.3.1. Escala de Atitudes Relativa à Estatística

No próximo capítulo procede-se à construção da escala adaptada do original EAEE de Estrada (2002), visando um público-alvo em realidade portuguesa, constituída por 25 itens, com uma escala de Likert de 5 pontos, desde “totalmente em desacordo” até “totalmente de acordo”, implementada na fase de diagnóstico. A escala foi aplicada a 332 alunos, frequentadores do 8.º ano, numa aula de 50 minutos, supervisionada pelo professor titular de turma. Neste estudo avaliaram-se, atitudes de alunos sobre Estatística, procurando conhecer a sua predisposição para a aprendizagem da Estatística.

### 3.3.2. Teste Diagnóstico

Para a identificação dos eventuais conflitos semióticos dos alunos do 8.º ano, antes da leção dos temas Funções (domínio: Funções Sequências e Sucessões) e Estatística (domínio: Organização e Tratamento de Dados) correspondentes a esse ano de escolaridade, construiu-se o Teste Diagnóstico (TD), apresentado no (Anexo VI), o qual inclui aqueles dois temas com três situações problemas cada um, o primeiro tema sobre Funções e o segundo sobre Estatística, e envolvendo vários conceitos relacionados com Funções e Estatística, com a informação fornecida em forma tabelar ou gráfica. No Quadro 10 apresenta-se resumidamente a estrutura do TD.

Quadro 10 – Resumo da estrutura e atividades propostas pelo TD

| Tema        | Questão | Representação                      | N.º de alíneas | Proposta de atividade   |
|-------------|---------|------------------------------------|----------------|---|
| Funções     | Q1      | Gráfica<br>(gráfico cartesiano)    | 5              | Determinar uma imagem por $f$ , conhecido o objeto; um objeto, conhecida a sua imagem por $f$ ; um ponto do gráfico de $f$ ; a soma do número total de horas de sono; domínio de $f$ ; o contradomínio de $f$ . Indicar o valor máximo de $f$ . |
|             | Q2      | Tabelar<br>(tabela de frequências) | 6              | Determinar uma imagem por $f$ , conhecido o objeto; um objeto, conhecida a sua imagem por $f$ ; a soma das imagens; o domínio e contradomínio de $f$ . Indicar o valor máximo; o valor mínimo; e a variável independente da função $f$ .        |
|             | Q3      | Gráfica<br>(gráfico de linhas)     | 5              | Determinar uma imagem por $f$ , conhecido o objeto; um objeto, conhecida a sua imagem por $f$ ; o ponto de interseção dos dois gráficos e os domínios de duas funções por análise gráfica. Indicar a variável dependente da função $f$ .        |
| Estatística | Q4      | Tabelar<br>(tabela de frequências) | 5              | Determinar a média e a mediana.<br>Indicar a moda, o valor máximo e o valor mínimo.<br>Determinar um conjunto de dados, conhecidos os valores da moda e da mediana.   |
|             | Q5      | Gráfica<br>(gráfico de barras)     | 5              | Determinar a média e a mediana.<br>Identificar a variável, valores da variável, o valor máximo e o valor mínimo.<br>Determinar o valor de um novo dado, acrescentado a um conjunto de dados, sabendo o novo valor da média.                     |
|             | Q6      | Gráfica<br>(gráfico circular)      | 5              | Determinar a mediana, as frequências relativas e absolutas.<br>Identificar a moda e a variável estatística.<br>Determinar o efetivo total de alunos que respeitam determinadas condições envolvendo frequências relativas e absolutas.          |

Ao analisar o Quadro 10 constata-se que a maioria das questões do TD são sobre representações gráficas (67%). As mesmas propostas de atividades ocorrem em pelo menos duas das questões, constatando-se ainda que isso se verifica no caso de representações distintas. No caso do tema Funções existe coincidência nas atividades propostas em: 29% das atividades são transversais a todas as questões (determinar a imagem por  $f$  e um objeto conhecida a sua imagem por  $f$ ; 57% às questões Q1 e Q2 (determinar domínio, contradomínio e indicar o valor máximo); e 14% às questões Q2 e Q3 (indicar a variável). Em relação ao tema Estatística verifica-se que: 17% das atividades são transversais a todas as questões (determinar a mediana); 50% às questões Q4 e Q5 (determinar a média e indicar os valores máximo e mínimo); 17% às questões

Q4 e Q6 (indicar a moda) e às questões Q5 e Q6 (indicar a variável). Saliente-se que apenas no tema Estatística foram propostos problemas, um para cada uma das questões.

### 3.3.3. Instrumentos utilizados na Intervenção de Ensino

Nas várias reuniões, entre o professor titular de turma e a professora investigadora, analisaram-se os instrumentos de investigação a utilizar, elegeram-se as questões mais adequadas a executar pelos alunos, e decidiu-se qual a data de início do estudo. As decisões foram tomadas por consenso, contribuindo assim para uma consonância no desempenho individual no projeto.

A experiência decorreu nas aulas de Matemática (M), entre 05 de maio e 9 de junho de 2015. Saliente-se que, no início de maio decorreu uma aula (Aula 0) onde foi apresentado o projeto e evidenciada a aplicabilidade e utilidade dos conceitos estatísticos, para captar a anuência dos alunos (Potter, 1995).

Foram lecionadas 13 aulas, a última das quais foi reservada para a realização do Teste Final. Importa ainda frisar que cada aula teve a duração de 50 minutos e que o 8.º ano tem cinco tempos semanais. Para consolidar as aprendizagens e privilegiar o trabalho individual, os alunos resolvem uma Ficha de Tarefa individual, fora da sala de aula, a decorrer de 2 a 8 de junho.

Foi implementada uma metodologia de trabalho em díade (com os alunos em pares), uma vez que revela importantes vantagens, como Veloso (1993) salienta: o “trabalho de grupo deverá ocupar um lugar de relevo na aprendizagem da Matemática” pois “ajuda a desenvolver capacidades fundamentais, do ponto de vista da Educação Matemática, como por exemplo, de argumentar, de construir uma justificação para os próprios pontos de vista, de criticar as opiniões dos colegas, de ouvir, compreender e aproveitar as ideias dos outros, e de organizar o trabalho” (p.11). Também nas Normas do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2008) observa-se que se deve proporcionar aos alunos mais oportunidades de trabalhar em pequenos ou grandes grupos. O trabalho de grupo proporciona aos alunos a possibilidade de interagirem, confrontando, sem medos, as suas opiniões, refletindo e partilhando entre si pontos de vista, e desenvolvendo a capacidade de trabalho em equipa, indispensável na sociedade atual. A reforçar as vantagens da implementação do trabalho de grupo, Ponte, Guimarães, Leal, Canavarro e Abrantes (1997) referem que:

trabalhar em pequenos grupos permite aos alunos expor as suas ideias, ouvir os seus colegas, colocar questões, discutir estratégias e soluções, argumentar e criticar outros argumentos. Em pequeno grupo, torna-se mais fácil arriscar os seus pontos de vista, avançar com as suas descobertas e exprimir o seu pensamento. Por isso, destinar mais tempo ao trabalho em pequenos grupos nas aulas de Matemática é uma das orientações curriculares mais salientes. (p. 93)

Partilha da mesma ideia Ponte (1997), referindo ser mais vantajoso e natural trabalhar em grupo, já que a interação entre os alunos facilita a aprendizagem.

O trabalho presencial foi desenvolvido pelos alunos, em díade, mantendo a planta da sala e as parcerias habituais, por sugestão da docente titular de turma, pois naquele final do ano letivo existiam focos de animosidade entre os pares.

Foram construídos 11 grupos, um dos quais tinha três alunos, para evitar que um aluno realizasse o trabalho sozinho. No Quadro 11 estão registados os códigos dos alunos das diferentes díades.

Quadro 11 – Distribuição dos alunos do 8.º ano em díades

| Grupo  | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Alunos | A21 | A33 | A0* | A22 | A31 | A30 | A23 | A26 | A15 | A32 | A20 |
|        | A16 | A24 | A27 | A29 | A28 | A34 | A19 | A35 | A17 | A14 | A18 |
|        |     |     |     |     |     |     |     |     | A25 |     |     |

Na formação das díades teve-se em conta as recomendações da professora titular de turma, as características individuais de cada um dos alunos, bem como o seu conhecimento matemático, a sua capacidade de trabalho autónomo e a sua aptidão para comunicar, tendo presente que uma pequena diferença, a nível de conhecimento cognitivo e a nível de desenvolvimento de estudo autónomo, será mais favorável ao crescimento cognitivo e ao desenvolvimento da autonomia, corroborando a ideia de que os grupos de trabalho deverão ter níveis de conhecimento e de desempenho autónomo semelhantes para produzirem novos conhecimentos, tal como Azmitia (1988) concluiu nos seus estudos. Este autor descobriu que quando estudantes de níveis inferiores eram colocados em grupos com colegas de nível mais elevado de conhecimento, os primeiros melhoravam muito os seus conhecimentos, o que já não acontecia com os colegas de níveis de conhecimento similares. Assim, criaram-se grupos heterogéneos em relação ao conhecimento e à capacidade de autonomia, privilegiando a harmonia no discurso e na comunicação.

Os conteúdos abordados na experiência foram: as medidas de tendência central e de dispersão, com dados não agrupados, não organizados, ou organizados em gráficos e

tabelas. No quadro que se segue encontram-se a sistematizados os conteúdos abordados em cada aula e as respetivas propostas de trabalho.

Quadro 12 – Conteúdos e propostas de trabalho explorados nas aulas da intervenção de ensino

| Aula | Ano 2015   | Conceitos trabalhados  | Propostas de trabalho   |
|------|------------|--|---|
| 0    | 4 de maio  | Apresentação do Projeto;<br>Apresentação de artigos de diversas áreas onde o diagrama de extremos e quartis é aplicado.  | Apresentação de slides  |
| 1    | 25 de maio | Revisão de conceitos: moda, média e mediana; organização de dados em tabelas de frequências e gráficos.  | Registo dos conceitos no caderno diário, após debate em grande grupo dos conceitos.<br>Formação dos grupos  |
| 2    | 26 de maio | Dados não organizados: identificar a variável e os seus valores; determinar a moda, média e mediana; valor mínimo e máximo e amplitude.<br>Dados organizados em gráfico de pontos: identificar a amostra.<br>Dados organizados em diagrama de caule-e-folhas: interpretar esta representação e determinar frequências absolutas e relativas; resolver problemas; determinar as medidas de tendência central e identificar aquela que melhor caracteriza a amostra em estudo. | Realização, em diáde, da FT1; apresentação de resoluções pelos grupos   |
| 3    | 28 de maio | Gráficos de pontos: determinar as medidas de tendência central; resolver problemas.<br>Gráfico de barras: identificar a variável e os seus valores; determinar frequências; determinar a moda, média e mediana; determinar os valores mínimo, máximo e a amplitude.  | Realização, em diáde, da FT2; apresentação de resoluções pelos grupos e discussão de resoluções para consolidação de conceitos  |
| 4    |            | Gráficos de linhas: identificar variável; comparar resultados; determinar os valores máximo, mínimo, média, moda, mediana e amplitude; identificar a medida de tendência central que melhor representa a situação apresentada.<br>Gráfico circular: determinar média, moda e mediana; construir o gráfico de pontos.   |   |
| 5    | 29 de maio | Determinar os quartis em dados não organizados e em dados organizados em gráfico de barras.  | Apresentação do conceito através de e um exemplo, para chegar à generalização do conceito.<br>Realização, em diáde, da FT3; apresentação de resoluções pelos grupos e discussão de resoluções para consolidação de conceitos. |
| 6    | 1 de junho | Dados organizados em tabela de dupla entrada: determinar a amplitude, média, mediana, percentagens e quartis; construir gráficos de pontos; construir o diagrama de extremos e quartis.  | Realização, em diáde, da FT4;   |
| 7    | 2 de junho | Dados organizados em diagramas de extremos e quartis: comparar distribuições; determinar valores da distribuição; analisar e interpretar os diagramas quanto à sua simetria e dispersão.   | Apresentação de resoluções da FT4 pelos grupos e discussão de resoluções para consolidação de conceitos.<br>Distribuição da Ficha de Tarefas Individual   |
| 8    | 4 de junho | Dados não organizados: determinar um valor desconhecido da distribuição, segundo determinadas condições, para se obter determinado quartil ou determinado gráfico de pontos.   | Realização, em diáde, da FT5  |
| 9    |            | Dados organizados em diagrama de extremos e quartis: identificar o conjunto de dados que representa; comparar distribuições, analisá-lo e interpretá-lo quanto à sua simetria e dispersão.   |   |
| 10   | 5 de junho | Dados organizados em diagrama de extremos e quartis: identificar o conjunto de dados que representa; comparar distribuições e interpretar os diagramas de dispersão.<br>Gráfico de barras: identificar o gráfico que melhor representa a distribuição; determinar a média, mediana e quartis.  | Realização, em diáde, da FT5; apresentação de resoluções pelos grupos e discussão de resoluções para consolidação de conceitos.   |

|    |            |  |  |
|----|------------|--|--|
| 11 | 8 de junho | Tabela de dupla entrada: construção de diagrama de extremos e quartis, amplitude interquartil, valor máximo e mínimo; interpretação da tabela. Dados organizados em diagrama de extremos e quartis: identificar o conjunto de dados que representa; comparar distribuições e interpretá-los; construir um gráfico de pontos.   | Conclusão da apresentação de resoluções pelos grupos e discussão de resoluções para consolidação de conceitos. Recolha e esclarecimento de dúvidas sobre a Ficha de Tarefas Individual |
| 12 |            | Dados organizados ou não organizados: determinar a moda, média, mediana, quartis, amplitude e amplitude interquartil; construir o diagrama de extremos e quartis; interpretar gráficos e tabelas.  | Esclarecimento de dúvidas  |
| 13 | 9 de junho | Dados não organizados: identificar a variável e os seus valores; determinar a moda, média e mediana; mínimo e máximo; amplitude e amplitude interquartil; resolução de um problema sobre a média. Dados organizados em gráfico de barras: interpretar o gráfico e determinar a moda, média, mediana e frequências relativas acumuladas; construir o diagrama de extremos e quartis. Dados organizados em tabela de frequências: interpretar a tabela e completá-la; determinar a moda, máximo, mínimo e os quartis. Dados organizados em diagrama de extremos e quartis: comparar duas distribuições e interpretar os gráficos; construir um diagrama de extremos e quartis com dados não organizados, analisá-lo e interpretá-lo quanto à sua simetria e dispersão. | Teste Final  |

Ao longo das aulas do tema de OTD foram recolhidos registos áudio, registadas as intervenções pertinentes, no diário de bordo, e recolhidos os trabalhos realizados pelos alunos. Os primeiros tinham como objetivo captar as interações dos alunos no trabalho em diáde, durante a realização das tarefas, enquanto os registos no diário de bordo pretendiam aceder aos momentos de discussão das tarefas realizadas.

Durante as aulas, os alunos, individualmente, apresentaram as resoluções de cada tarefa proposta. Contudo, alguns alunos tiveram necessidade de recorrer a discussões prévias, com as professoras, que decorreram depois de concretizarem as suas respostas e, em último recurso, tendo por base as respetivas resoluções. Ao solicitar-se a cada aluno a resolução de cada uma das fichas, criaram-se condições para que cada um, em grupo e individualmente, pudesse esclarecer as suas dúvidas e, deste modo, proceder à sedimentação e articulação dos conceitos lecionados.

A necessidade de realizar uma ficha de tarefas individual prende-se com o facto de, segundo Santos (2000), se privilegiar o trabalho individual. Para este autor são reconhecidas as suas virtualidades no trabalho individual, como por exemplo o facto de os indivíduos temporariamente se isolarem para fins muito específicos, como seja a reflexão. Na perspetiva de Hargreaves (1993), deve aceitar-se a existência daqueles que trabalham melhor sozinhos e respeitá-los. O trabalho individual evita a dispersão e distração, evitando ainda alguma perda de tempo, bem como o choque de personalidades

e a procura de liderança que pode resultar em conflito. Por outro lado, combate-se, de forma eficaz, a falta de produtividade de alguns membros do grupo/díade, que provoca o desequilíbrio produtivo da equipa. A assimilação de conceitos de forma individual é útil para cada um sentir as próprias dificuldades, melhorando assim o contributo individual dentro do trabalho da díade.

#### 3.3.3.1. As fichas de tarefas

As tarefas propostas (Anexo V) foram analisadas e discutidas entre o professor titular de turma, responsável pela turma participante no estudo, e a investigadora. Foram eles que, em conjunto, construíram as fichas de tarefas (FT), exploradas em sala de aula, a ficha de tarefa individual (FTI) e a ficha de avaliação (FA).

O trabalho colaborativo, em pares, influencia o ensino e a aprendizagem (EA) dos alunos na disciplina de Matemática. O trabalho colaborativo foi efetuado, fora da sala de aula, por docentes empenhados na construção de atividades/instrumentos a serem depois resolvidas, em sala de aula, por alunos que trabalhavam colaborativamente, também em díade. Entenda-se por sala de aula

um espaço para investigação, para a busca de pistas que componham a construção do saber, que é um dos valiosos papéis da dúvida e, também, uma instância socializante, uma vez que nos permite estabelecer contato com uma imensa diversidade de seres e formas pensantes que precisam ser ouvidas e, conseqüentemente, respeitadas. É, ainda, um laboratório de formação e informação intelectual, passando a ser uma via que nos possibilita perceber outros caminhos. (Bezerra, 2001, p. 2)

Na perspetiva de Menezes e Ponte (2009), os resultados mostram que a investigação colaborativa das práticas comunicativas, em Matemática, favoreceu o desenvolvimento profissional dos professores em várias dimensões, como sejam o seu conhecimento didático e práticas de sala de aula, a reflexão e a colaboração, permitindo-lhes o exercício da sua profissão com maior autonomia. O trabalho colaborativo é apresentado por Rojas, Carretero e Álvares (2012) como uma ferramenta de grande utilidade para alcançar os objetivos da matemática, especialmente quando se trata de ambientes dirigidos pelos próprios estudantes. Ele acrescenta ainda que, no estudo implementado, surgiu um valioso contributo para melhorar a motivação e a satisfação nas aulas de matemática, melhorando a capacidades de adaptação dos alunos que assim realizam mais rapidamente o trabalho. Com o trabalho em grupo pretende-se que os alunos desenvolvam a autonomia e a

capacidade de comunicação uma vez que estes necessitam de convencer os colegas de grupo da sua estratégia e precisam de ter uma boa capacidade argumentativa.

Os autores que se têm dedicado ao estudo do ensino e da aprendizagem da Estatística sugerem que “os trabalhos em pequenos grupos revelam ser a forma ideal para fazer Estatística nas aulas de Matemática” (Carvalho, 2006, p. 12). Segundo Carvalho (2001), o trabalho colaborativo nas díades “facilitou a apropriação de conhecimentos e a mobilização de competências estatísticas, nomeadamente porque há estratégias que são descobertas através de uma colaboração e que os alunos se revelam capazes de continuar a utilizar quando voltam a trabalhar individualmente (p. 472).

Para Matos e Serrazina (1996), o trabalho em grupo deve ser cada vez mais valorizado como forma de trabalho dos alunos, por se acreditar que este promove mais reflexão e discussão entre os alunos. É importante referir que o trabalho em grupo “permite ao professor interagir com os alunos de forma mais intensa, tira partido das características dos alunos quanto à sociabilidade, dá oportunidade aos alunos de trocarem ideias e, finalmente, desenvolve a sua capacidade de comunicação e raciocínio” (NCTM, 1991, p. 80).

Para uma melhor visão do que se pretende com o trabalho realizado colaborativamente, pelos e entre os agentes desta intervenção de ensino, construiu-se um esquema (Figura 7), onde são visíveis as conexões que se estabeleceram.

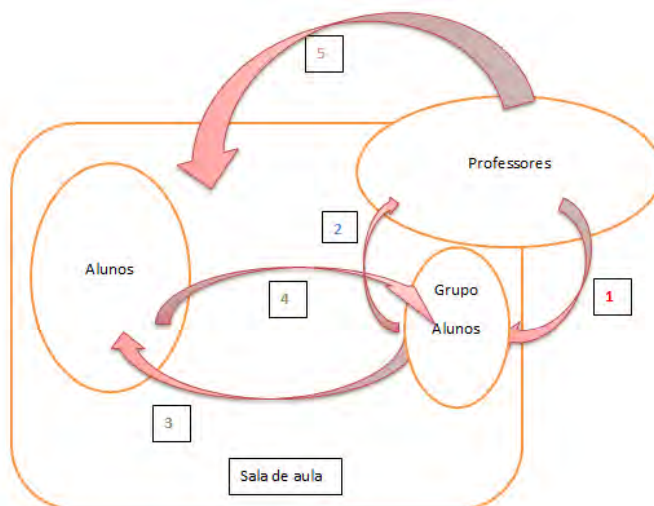


Figura 7 – Trabalho colaborativo entre pares

No esquema pode observar-se a sala de aula, dinamizada por dois atores: o aluno, a quem se destina o ato de ensinar, e o professor, incumbido de mediar a aprendizagem dos seus alunos. O trabalho do professor tem início fora da sala de aula; neste caso



concreto, o trabalho será realizado em grupo de docentes e de forma colaborativa, com vista ao trabalho colaborativo entre grupos de alunos, na sala de aula (1). O feedback do trabalho colaborativo entre alunos irá influenciar o trabalho colaborativo docente (2). É evidente que o contributo do trabalho colaborativo entre alunos enriquece o seu próprio conhecimento (3) que, de forma individual, contribui para melhorar a aprendizagem colaborativa do grupo de alunos (4). Em termos globais, o grau de qualidade do trabalho colaborativo entre professores, fora da sala de aula, dinamiza ou condiciona o trabalho colaborativo dentro da aula, influenciando no ensino e na aprendizagem dos alunos.

É reconhecida a valorização do trabalho de grupo, já que, como foi referido, é o método de trabalho que permite expor os alunos aos pontos de vista de outro membro do grupo, promovendo a reflexão e a discussão como parte essencial do processo de se tornarem práticos competentes e reflexivos (Petocz & Reid, 2007). Esta estratégia privilegia e encoraja os alunos a participar posteriormente nas discussões em grande grupo, aquando da correção das tarefas.

Ora, na elaboração das FT houve sempre a preocupação de ir ao encontro dos temas e metas curriculares previstos no programa de Matemática do 8.º ano de escolaridade, tendo sempre em atenção as dificuldades identificadas na diagnose realizada antes da implementação e adaptaram-se tarefas do manual escolar, dos testes intermédios e das provas de final de ciclo, para as adequar à realidade da turma, com o objetivo de potenciar os conhecimentos e melhorar o desempenho de cada aluno da turma (Vygotsky, 1996).

Para Vygotsky (1996), a zona de desenvolvimento proximal (ZDP) é a distância entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial, que é determinado pela capacidade de resolver problemas de modo autónomo, que é distinta da capacidade de solucionar problemas com ajuda de um indivíduo mais experiente. São as aprendizagens colhidas na ZDP que fazem com que se amplie, ainda mais, tudo o que contribui para um maior desenvolvimento, pelo que, para este autor, tais processos são indissociáveis. É justamente nesta zona de desenvolvimento proximal que a aprendizagem vai ocorrer. Assim, a função de um docente será favorecer esta aprendizagem, servindo de mediador entre o aluno e o mundo.

As tarefas foram organizadas e apresentadas aos alunos, através de cinco fichas de trabalho em díade (FT) presencial e de uma ficha de trabalho individual (FTI) ou FT6 não presencial e ainda uma Teste Final (TF) de avaliação. No Quadro 13 resumem-se as várias tarefas propostas.

Quadro 13 – Resumo da estrutura e atividades propostas nas FT e FTI

| Ficha | Tarefa         | Representação                   | N.º de alíneas | Atividades propostas   |
|-------|----------------|---------------------------------|----------------|--|
| FT1   | T1             | Dados não organizados           | 3              | Determinar a média, a mediana, o máximo e o mínimo.<br>Indicar a moda, a variável estatística e os valores da variável.<br>Determinar: o efetivo total; frequência relativa; a média; a mediana.<br>Indicar a moda, a variável estatística e os valores da variável.                                     |
|       | T2             | Diagrama de caule-e-folhas      | 5              | Identificar o gráfico de pontos que corresponde à situação apresentada.<br>Mostrar a veracidade de uma dada afirmação relacionada com a situação-problema.<br>Determinar a média e a mediana.  |
|       | T3             | Dados não organizados           | 4              | Indicar a moda.<br>De entre a moda, a média e a mediana indicar aquela que melhor representa uma amostra num determinado contexto.   |
| FT2   | T4             | Gráfico de pontos               | 5              | Determinar o efetivo total, a média e a mediana.<br>Indicar a moda, o máximo e indicar valor lógico de uma dada afirmação relacionada com a situação-problema.<br>Determinar um conjunto de dados, conhecida a moda e a média desses dados.<br>Determinar a média, a mediana e as frequências relativas. |
|       | T5             | Gráfico de barras               | 5              | Indicar a moda, o valor máximo, o valor mínimo, a variável estatística e os valores da variável.<br>Determinar um dado desconhecido, conhecidas as médias antes e depois de introduzido esse dado.   |
|       | T6             | Gráfico de linha                | 5              | Determinar: a média; a mediana; comparar frequências relativas.<br>Indicar: a moda, valor máximo; valor mínimo; a variável.<br>Problema: de entre a mediana e moda, indicar aquela que melhor representa uma amostra num determinado contexto.   |
|       | T7             | Gráfico circular                | 4              | Determinar a média, a mediana e frequências absolutas dadas as frequências relativas.<br>Indicar a moda.<br>Construir um gráfico de pontos.  |
| FT3   | T8             | Dados não organizados           | 4              | Determinar os quartis.   |
|       | T9             | Dados não organizados           | 5              | Determinar a amplitude, a média, a mediana, o 1.º e o 3.º quartil e a amplitude interquartil.<br>Indicar a moda.<br>Construir um gráfico de pontos.  |
|       | T10            | Gráfico de barras               | 3              | Determinar o efetivo total, a média, a mediana e a amplitude interquartil.<br>Indicar a moda.  |
| FT4   | T11 a), b), c) | Tabela de Dupla entrada         | 9              | Determinar a frequência relativa, a amplitude, a amplitude interquartil, a média e a mediana.<br>Indicar a moda, a variável estatística e os valores da variável.<br>Construir o gráfico de pontos e o diagrama de extremos e quartis.   |
|       | T11 d)         | Diagramas de extremos e quartis | 5              | Determinar a amplitude, a amplitude interquartil e a mediana.<br>Indicar o valor máximo e o valor mínimo.<br>Comparar diagramas de extremos e quartis quanto à sua dispersão e simetria.   |
|       | T11 e)         | Gráfico de pontos               | 1              | Identificar o gráfico de pontos que corresponde à situação apresentada.  |
| FT5   | T12            | Dados não organizados           | 5              | Determinar um valor desconhecido, conhecido o 1.º e o 3.º quartil e a simetria do gráfico de pontos.<br>Construir o diagrama de extremos e quartis.  |
|       | T13            | Diagramas de extremos e quartis | 1              | Indicar o conjunto de dados que corresponde à representação dada.  |
|       | T14            | Diagramas de extremos e quartis | 4              | Comparar diagramas de extremos e quartis quanto à sua dispersão, simetria e amplitudes.<br>Comentar uma afirmação que envolve a noção dispersão e valores da distribuição.   |
|       | T15            | Diagramas de extremos e quartis | 1              | Construir um diagrama de extremos e quartis.   |
|       | T16            | Gráfico de barras               | 3              | Determinar a média.<br>Comentar a simetria da distribuição.<br>Identificar o diagrama de extremos e quartis que corresponde à distribuição dada.   |

|     |     |                                 |   |   |
|-----|-----|---------------------------------|---|---|
|     | T17 | Diagramas de extremos e quartis | 5 | Comparar diagramas de extremos e quartis quanto aos valores extremos e amplitudes;<br>Determinar frequências relativas.<br>Identificar quartis.<br>Explicar raciocínios quanto ao quartil do conjunto de dados numéricos. |
|     | T18 | Tabela de dupla entrada         | 4 | Construir dois diagramas de extremos e quartis.<br>Comparar diagramas de extremos e quartis quanto à sua dispersão, simetria e amplitudes.  |
| FTI | T19 | Diagramas de extremos e quartis | 8 | Comparar diagramas de extremos e quartis quanto à sua dispersão, simetria, valores extremos e amplitudes.<br>Indicar valores da distribuição em determinado contexto.<br>Construir um diagrama de extremos e quartis.     |

Ao analisar o Quadro 13 verifica-se que a maioria das tarefas apresenta dados organizadas (76%), dos quais a maioria são diagramas de extremos e quartis (37%), segue-se o gráfico de barras (19%), depois o gráfico de pontos (13%) e tabelas (13%) e, por fim, surgem os gráficos circular (6%) e de linha (6%) e diagrama de caule-e-folha (6%).

As primeiras duas Fichas de Tarefas (FT1) e (FT2) tiveram como objetivo rever conceitos lecionados em anos anteriores e colmatar falhas diagnosticadas nas respostas dos alunos ao Testes Diagnóstico; a terceira Ficha de Tarefas (FT3) focou-se na noção de Quartis e na sua aplicação a dados não organizados e dados organizados; a quarta Ficha de Tarefas (FT4) focou-se na construção, análise e interpretação dos diagramas de extremos e quartis; a quinta Ficha de Tarefas (FT5) englobava todos os conceitos abordados e trabalhados nas aulas com o objetivo de consolidá-los. A Ficha de Tarefas Individual (FTI) tinha por objetivo proporcionar aos alunos um momento de estudo e trabalho individual, para que cada um consolidasse os seus conhecimentos e trabalhasse os conteúdos por forma a esclarecer as suas dúvidas (Azmitia, 1988) sobre diagramas de extremos e quartis. Por fim, o Teste Final (TF, Anexo VIII) propunha testar conhecimentos dos alunos e foi construído tendo por base as tarefas desenvolvidas em sala de aula, e foi realizado na última aula, após terem sido dados os esclarecimentos solicitados sobre os conteúdos lecionados. No Quadro 14 apresenta-se o resumo da estrutura do TF.

Quadro 14 – Resumo da estrutura e atividades propostas no TF

| Questão | Representação  | N.º de alíneas | Atividades propostas  |
|---------|--|----------------|---|
| Q1      | Dados não organizados                                  | 4              | Determinar a média, a mediana, amplitude e a amplitude interquartil.<br>Indicar a moda, a variável estatística e os valores da variável.<br>Determinar o valor de um dado, conhecidos os outros dados e o valor da média da distribuição com a inclusão do novo dado. |
| Q2      | Gráfico de barras                                      | 5              | Determinar o efetivo total, a frequência relativa, a média e a mediana.<br>Indicar a moda.<br>Construir o diagrama de extremos e quartis.<br>Analisar o diagrama de extremos e quartis quanto à dispersão e à simetria.   |
| Q3      | Tabela de frequências                                  | 3              | Determinar as frequências relativas e absolutas.<br>Indicar a moda e os quartis.  |
| Q4      | Diagrama de extremos e quartis e dados não organizados | 6              | Determinar a amplitude e a amplitude interquartil.<br>Construir o diagrama de extremos e quartis.<br>Analisar os diagramas de extremos e quartil quanto à dispersão e à simetria.   |

Ao analisar o Quadro 14 verifica-se que a maioria das tarefas apresenta dados organizadas (60%). As mesmas propostas de atividades verificam-se em pelo menos duas das questões com representações diferentes. Verifica-se que a determinação dos quartis e a indicação da moda são tarefas propostas em todas as questões. Consta-se, ainda, que em 50% das questões é solicitada a determinação da mediana e da média (Q1 e Q2); a construção do diagrama de extremos e quartis e a respetiva análise (Q2 e Q4); a determinação da amplitude (Q1 e Q4); e a determinação de frequências (Q2 e Q3).

Todas as fichas de trabalho previstas foram aplicadas e todos os conceitos do tópico em estudo foram abordados. Cada uma das FT era constituída por várias tarefas subordinadas ao mesmo tema e nela se propunha a construção e/ou a análise de um gráfico ou tabela, onde os alunos eram “encorajados a explorar, a fazer tentativas (...); a ler, escrever e discutir matemática, e ainda a conjecturar, testar e construir argumentos sobre a validade de uma conjectura” (NCTM, 1991, p. 6). As fichas foram numeradas para uma identificação mais rápida e foi-lhe dado um título que refletia, de um modo geral, os conteúdos abordados.

Os alunos, quando sentiram necessidade, puderam recorrer ao manual e/ou à ajuda dos docentes e/ou aos seus colegas de turma. Em todos os grupos, foi distribuído a cada aluno um exemplar das fichas e outro onde eram registadas as suas respostas definitivas, que era recolhida pela investigadora durante a aula.

A análise documental era realizada no final de cada uma das aulas, em diáde de docentes, com o objetivo de verificar as falhas e dificuldades dos alunos. Esta é uma das

técnicas frequentes, importante nas pesquisas em educação. De acordo com Meirinhos e Osório (2010),

o recurso a fontes documentais relacionadas com a temática é uma estratégia básica num estudo de caso. Estas fontes podem ser diversas: relatórios, propostas, planos, registos institucionais internos, comunicados, dossiers, etc. A informação recolhida pode servir para contextualizar o caso, acrescentar informação ou para validar evidências de outras fontes (p. 62).

Após a recolha das resoluções a aula ganhava uma outra dinâmica, com recurso às respostas apresentadas pelos alunos. Em regime de voluntariado, um aluno de um dos grupos, apresentava a sua resolução, explicando os conceitos aplicados e os raciocínios utilizados. Entretanto, os restantes grupos discutiam a resolução apresentada e propunham outras resoluções. No final registavam-se as conclusões mais pertinentes na ficha de trabalho de cada um dos alunos, ou no caderno diário da disciplina. Com o decorrer do estudo, essa correção em conjunto foi-se tornando cada vez mais difícil de realizar, uma vez que os alunos trabalhavam ao seu próprio ritmo

Na perspetiva de Ponte (2005), às tarefas cabe um papel importante em sala de aula, uma vez que, quando bem construídas, elas podem gerar a ação do aluno. Este autor categoriza as duas dimensões fundamentais das tarefas, segundo o grau de desafio matemático e o grau de estrutura: o grau de desafio, relaciona-se com a perceção da dificuldade da tarefa, variando entre “reduzido” e “elevado”; o grau de estrutura varia entre “aberto” e “fechado”. Ponte (2005) entende tarefa fechada como sendo “aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas” (p. 8).

Para que os objetivos das tarefas sejam atingidos, o professor deve, por um lado, variar o tipo de tarefas “escolhendo-as em função dos acontecimentos e da resposta que vai obtendo dos alunos” (Ponte, 2005, p. 1), e, por outro, ter em conta o tempo de realização e os materiais a usar, não esquecendo que as tarefas devem estimular “o sentido crítico dos alunos” (Fernandes, Carvalho & Ribeiro, 2007, p. 31). Segundo Carvalho (2006), os alunos que são confrontados com tarefas e situações estatísticas não rotineiras aplicam uma grande riqueza e variedade de estratégias nas suas resoluções, revelando o modo como constroem o significado estatístico.

Na sua perspectiva, Ribeiro (2006) refere que o Ensino da estatística deve ter como meta dotar os alunos de espírito crítico e criar cidadãos participativos na sociedade, sendo pois “fundamental que o professor use exemplos reais e interessantes e estimule o sentido crítico dos alunos, permitindo-lhes experimentar e criticar um variado tipo de situações, na sala de aula para ficarem melhor preparados para as diversas situações da sua vida” (p. 47).

Já Batanero (2002) alerta para o contributo negativo das intuições no campo das probabilidades e da estatística, que nos enganam com frequência, como revelaram os estudos de Kahneman, Slovic e Tversky (1982). A autora lembra que as intuições erróneas não se corrigem com um ensino expositivo, nem com a resolução de problemas rotineiros, não bastando a mera seleção de boas tarefas, pelo que é necessário prestar atenção à forma como estas são propostas e à condução da sua realização em sala de aula (Ponte, 2005).

É importante referir que “o professor tem assim um papel fundamental, tanto na planificação das atividades como na sua condução, ao envolver os alunos no trabalho que se está a realizar e em manter, ao longo do mesmo, o seu interesse pelas questões esclarecedoras e estimulantes que realiza” (Carvalho, 2006, p. 14). Neste estudo dá-se relevo às tarefas que enfatizam o raciocínio e o pensamento estatístico, a interpretação e a capacidade crítica e de reflexão” (Fernandes, 2009, p. 4), já que se apresentam tarefas abertas e desafiantes que proporcionam aos alunos condições ótimas para desenvolver diferentes estratégias de resolução.

Uma outra estratégia, também usada neste estudo, foi a discussão coletiva realizada no final da resolução de cada Ficha de Tarefas, momento em que os alunos foram convidados a partilhar e a explicar as suas resoluções aos colegas da turma. Neste estudo, tais momentos serviram para que os alunos conhecessem, discutissem e validassem as estratégias dos colegas, consolidando conhecimentos ao esclarecerem possíveis dúvidas. Para facilitar a moderação das discussões, as docentes socorreram-se das indicações do modelo apresentado por Smith, Hughes, Engle e Stein (2009), que refere cinco práticas: (1) antecipar as resoluções dos alunos em tarefas matemáticas desafiantes; (2) monitorizar o trabalho dos alunos e o seu envolvimento nas tarefas; (3) selecionar determinados alunos para apresentarem o seu trabalho; (4) sequenciar as resoluções dos alunos que serão apresentadas; (5) estabelecer conexões entre resoluções e ideias matemáticas. Desta forma consegue-se mais facilmente moderar e incentivar as discussões coletivas.

Como já foi referido, os documentos produzidos pelos alunos serviram de base ao estudo, completando-se esta com a recolha das notas de campo (diário de bordo) e as observações realizadas, aula a aula, para obtenção de dados mais significativos sobre a forma de construção dos conhecimentos e sobre as dificuldades dos alunos.

### 3.3.3.2. Diário de Bordo

Na perspetiva de Bogdan e Biklen (1994), o diário do bordo é destinado ao registo das notas de campo, onde o investigador vai registando os apontamentos retirados das suas observações no decorrer das ações. Estes autores referem que essas notas são o relato e/ou descrição escrita do que o pesquisador escuta, vê, experiencia e pensa durante a recolha de dados, enquanto vai refletindo sobre estes, num estudo qualitativo (Bogdan & Biklen, 1994).

Na mesma linha, Rodríguez, Flores e Jiménez (1999) referem que o diário de bordo é um instrumento reflexivo e de análise, onde o investigador regista não só as notas de campo, mas também as suas reflexões sobre tudo o que o rodeia e se relaciona com o que investiga. Assim, este instrumento é considerado por estes autores um registo de observação direta, podendo existir grelhas de observação, nas quais se registam factos de forma mais sistematizada.

Foi utilizado este instrumento para a recolha de dados e informações diárias, o que corroborou o relato e ajudou na reflexão sobre os problemas e obstáculos que foram surgindo no decurso do trabalho e sobre a melhor forma de os superar.

### 3.3.3.3. Observação

A observação possibilita um contacto pessoal e direto com a realidade onde o professor se move e com a prática que desenvolve, permitindo a deteção de aspetos não revelados pelas entrevistas ou questionários. É, pois, na observação que o investigador pode ver o mundo através dos olhos dos participantes, viver no seu espaço e captar a abrangência dos seus termos, bem como o peso da cultura no seu próprio ambiente (Denzin & Lincoln, 2000). Ela consiste na recolha sistemática de informação através do contacto direto com situações específicas (Aires, 2011). Uma das características da observação é o seu não-intervencionismo, ou seja, o observador não manipula nem estimula os seus sujeitos.

Na opinião de Merriam (1988),

a observação é a melhor técnica a utilizar quando uma atividade, acontecimento ou situação podem ser observados em primeira mão, quando uma perspectiva nova é desejável, ou quando os participantes não são capazes ou não estão dispostos a discutir o tópico em estudo. (p. 89)

Para Cohen e Manion (1998) a observação, para ser considerada um instrumento válido de investigação, necessita de ser sistemática e controlada, o que implica a existência de um plano de trabalho cuidadoso a realizar, e uma especial atenção por parte do observador. Por isso, determinar com antecedência “o que” observar e “como” observar é de extrema importância, bem como decidir o grau de participação do observador e o tempo de duração das investigações.

Segundo Lessard-Hébert *et al.* (1994), existe diferença entre observação participante passiva e observação participante ativa. Na primeira situação o observador não participa nos acontecimentos, limitando-se a assistir, do exterior, registando os dados, durante o período em que decorre a observação; na segunda situação o observador está envolvido nos acontecimentos e o registo da observação é feita após eles terem ocorrido.

Tendo em conta que a observação pode ter um papel fulcral em várias metodologias de investigação, pareceu à investigadora ser a técnica mais indicada para melhor compreender os fenómenos de interesse, ao permitir a recolha e interpretação dos dados diretamente no ambiente da pesquisa. Por isso, optou-se por uma posição de observação participante, por ser aquela em que o investigador, intencionalmente, faz parte da situação a ser investigada e, em consequência, influencia os acontecimentos em observação (Atkinson & Hammersley, 1994). É este um modo de se conseguir descrever os comportamentos dos seres vivos no seu meio natural. De igual forma, é um instrumento útil e dos mais utilizados para obter dados sobre qualquer realidade social de grupos humanos, onde o investigador se encarrega de observar, acompanhar, compartilhar e participar, ainda que em escala reduzida, nas rotinas dos participantes (Guash, 1997).

Segundo Aires (2011), a observação qualitativa é naturalista por se integrar no contexto da ocorrência, entre os sujeitos que interagem livremente, pois “a observação qualitativa não se realiza a partir de um projeto de pesquisa rígido; a sua maior virtualidade reside mesmo no seu carácter flexível e aberto” (p. 25).

No contexto deste estudo qualitativo, a observação participativa era inevitável, uma vez que a investigadora lecionou as treze aulas da IE na turma onde se realizou o estudo. Assim, ela apoiou os alunos na execução das tarefas, acompanhou as discussões, em



grupos mais restritos, e moderou as discussões em grande grupo. Esta relação de proximidade com os alunos foi bastante ativa, observando o seu comportamento e o seu trabalho, dialogando com eles, apoiando-os na resolução das tarefas e na superação das dificuldades. Destaca-se que, na maioria das vezes, as observações foram efetuadas após alguma interação com os alunos, quando estes colocavam questões, quando era dada alguma orientação ou quando eram apoiados nas suas dificuldades. Como a professora titular de turma se encontrava em sala de aula, ela colaborou no registo de ocorrências e no apoio prestado aos alunos, sendo os registos partilhados com a investigadora no final da aula.

Cedo foi abandonada a ideia de proceder ao registo áudio-vídeo, devido à inexistência de uma câmara de vídeo adequada para captação de som e imagem, com qualidade, e ainda por conhecimento de experiências malsucedidas noutras atividades, pelo que o registo se cingiu à forma escrita, de notas, por parte da investigadora. É de notar que as características das turmas, ruidosas e irrequietas, provocaram uma recolha áudio sem um mínimo de qualidade: gravações confusas, devido ao “ruído” produzido pelas intervenções desordenadas dos alunos. Assim, ficou-se pelo registo escrito, tentando obter o máximo de dados descritivos sobre o que aconteceu dentro da sala de aula, para possibilitar melhores respostas às questões em estudo.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), os registos das observações devem conter uma parte descritiva e outra mais reflexiva. A parte descritiva é um registo pormenorizado do que ocorreu durante a observação, e deve incluir: i) a descrição dos participantes; ii) a reconstrução dos diálogos, fazendo uso das próprias palavras dos participantes, destacando gestos, entoações e indecisões; iii) a descrição dos locais; iv) a descrição de algum acontecimento especial que tenha ocorrido, com a indicação dos intervenientes; v) a descrição das atividades, com indicação dos comportamentos dos participantes que estão a ser observados e a sequência em que ocorreram; vi) os comportamentos do observador, já que, sendo o principal instrumento de recolha de dados, deve indicar as suas atitudes e as suas conversas com os participantes. A parte reflexiva deve incluir, ainda segundo Bogdan e Biklen (1994), as observações pessoais do observador, ocorridas durante a recolha de dados, as suas especulações, sentimentos, ideias, problemas e dúvidas que possam surgir, surpresas e deceções. Neste sentido, Merriam (1988) considera que o observador também deve incluir nos seus registos o que não aconteceu, principalmente se devesse ter acontecido. Ora, tendo em conta que ao realizar-se a observação participante poderia ser mais difícil a construção dos registos, no decorrer das

aulas optou-se por indicar o que foi possível registar durante a sessão, completando, logo após, a observação, tal como aconselham Bogdan e Biklen (1994).

O registo de observação das aulas, bem como de outras situações e informações pertinentes, recolhidas na escola, foi efetuado diretamente, em suporte digital, e criou-se, para cada aula, um Registo de Observação da Sessão e, em cada um deles, registaram-se os seguintes aspetos importantes: i) a data e a hora da sessão; ii) a organização e disposição dos alunos em grupos na sala de aula; iii) as tarefas, bem como o tempo despendido na sua introdução, realização e discussão; iv) a relação e comunicação professor-aluno, ou seja, a intervenção do professor e dos alunos, e o tipo de apoio que os alunos solicitavam ao professor; v) a relação e os termos em que os alunos comunicavam entre si, assim como o facto de estes esclarecerem e colocarem dúvidas uns aos outros; vi) o comportamento dos alunos, dando particular atenção à motivação e ao seu empenho, bem como à realização das atividades de acordo com o planeado; vii) as limitações de tempo; viii) o raciocínio feito pelos alunos e a forma como faziam a ligação entre os conceitos estatísticos; ix) a autonomia de cada aluno, dentro do grupo, na realização de tarefas (Carvalho, 2010).

Estes registos eram complementados com a discussão e reflexão havida com a professora titular de turma, antes e após as aulas. Dado pretender-se que a presença da investigadora fosse o mais natural possível, de modo a que os alunos procedessem à sua atividade normal e a vissem como professora da turma, na sala de aula, esta presença não se fixou em nenhum grupo em especial. Circulou pelos diferentes grupos, sempre que solicitada. A professora titular de turma ficou a apoiar os grupos onde se encontrava o aluno com NEE, por serem à partida o que necessitava de mais apoio e aquele que sempre revelara mais dificuldades.

#### 3.3.3.4. A entrevista

A entrevista é uma interação verbal entre, pelo menos, duas pessoas: o entrevistador, que pede informação para, a partir de uma sistematização e interpretação adequada, tirar ilações sobre o estudo em causa, e o entrevistado, que faculta as respostas.

Considera-se que a entrevista foi uma fonte de informação importante para melhor compreender as dificuldades e os erros que alguns alunos revelaram no teste final. Segundo Stake (2007), o pesquisador qualitativo tem, na entrevista, um instrumento adequado para captar realidades diversificadas nos estudos de caso (Yin, 2005), já que “é utilizada para recolher dados descritivos, na linguagem do próprio sujeito, permitindo ao

investigador desenvolver intuitivamente uma ideia sobre a maneira como os sujeitos interpretam aspectos do mundo” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 134).

Corroborando esta visão, Fontana e Frey (1994) afirmam que “entrevistar é uma das formas mais comuns e poderosas de tentar compreender outros seres humanos” (p. 361) e consideram as entrevistas como conversas intencionais, entre duas pessoas, dirigidas pelo investigador que assume o papel de entrevistador, com o objetivo de obter informação sobre o participante em questão, que será o entrevistado (Fontana & Frey, 2000).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), a grande vantagem da entrevista é permitir captar imediatamente a informação desejada sobre assuntos diferenciados. Ela permite ainda aprofundar e esclarecer as questões levantadas por outras técnicas de recolha de dados, como sejam as observações e a análise de documentos. Podem realizar-se entrevistas estruturadas, semiestruturadas, ou não estruturadas (Bogdan & Biklen, 1994). Optou-se pela entrevista semiestruturada por ser a que melhor ajuda o investigador a manter-se próximo do problema em estudo, porquanto diminui a dificuldade em organizar e analisar posteriormente os dados (Bogdan & Biklen, 1994). A entrevista semiestruturada desenvolve-se a partir de um esquema básico, que permite ao investigador adaptar-se ao entrevistado (Fontana & Frey, 2000).

Segundo Ghiglione e Matalon (2005), a linguagem utilizada deve ser acessível ao entrevistado e constituir, para ele, um suporte com sentido, que irá motivar as suas respostas. Para o entrevistador a informação recolhida deve ser tão alargada quanto possível. Na mesma linha, Vázquez e Angulo (2003), comparando a entrevista semiestruturada com a estruturada, referem que a primeira não pressupõe uma especificação, verbal ou escrita, do tipo de perguntas a formular, nem, necessariamente, da ordem de formulação, enquanto a segunda apresenta uma estrutura pré-estabelecida rígida. Flick (2004) aponta algumas vantagens das entrevistas semiestruturadas sobre as estruturadas, referindo que estas últimas limitam o ponto de vista do sujeito ao impor quando, em que sequência e como tratar os assuntos.

Em suma, as entrevistas semiestruturadas não seguem uma ordem pré-estabelecida na formulação de perguntas, deixando maior flexibilidade para as colocar no momento mais apropriado e em consonância com as respostas do entrevistado. O entrevistador pode formular e reformular as questões para melhor entendimento do entrevistado, permitindo-lhe ter a oportunidade de observar atitudes, reações e condutas, durante a entrevista.

O guião da entrevista (Anexo VIII) foi construído após a análise das respostas dos alunos ao TF, para assim incluir questões para confrontá-los com as suas resoluções apresentadas no momento avaliativo. O guião foi previamente preparado, com perguntas abertas, flexível, de modo a permitir uma recolha de dados sistemática, num ambiente natural de conversa (Bogdan & Biklen, 1994). Para Stake (2005), numa entrevista, mais importante do que registar, é ouvir, para se fazer depois os registos necessários e se pedir esclarecimentos. Segundo Bogdan e Biklen (1994), um aspeto importante a analisar, durante as entrevistas, é a comunicação não-verbal: gestos, expressões, entoações, hesitações, alterações de ritmo, cuja captação é importante para a compreensão do que foi dito.

A entrevista foi focada nos dados obtidos das respostas dos alunos ao TF, sem, contudo, ser dissociada das dificuldades que o aluno manifestou durante a intervenção de ensino, nem das superações reveladas, para assim se promover uma reflexão sobre as falhas verificadas e o contributo positivo deste estudo para o aluno. Saliente-se que a entrevista foi conduzida segundo os objetivos definidos pela investigadora que, ao pretender apenas ouvir narrar a realidade, de acordo com um esboço que estabeleceu, não permitiu que o entrevistado se desviasse do objetivo traçado.

Todas as entrevistas foram realizadas no mesmo dia, gravadas em áudio e transcritas para o computador. Para que o entrevistado tomasse consciência e refletisse sobre o fenómeno, objeto da sua entrevista, seguiu-se a seguinte estratégia: repetição do que os entrevistados haviam dito; repetição da pergunta; pedidos de explicitação e/ou justificação; escuta ativa, mesmo quando os entrevistados pareciam estar a desviar-se do assunto; e reforços variados.

#### 3.4. Métodos de análise de dados

Na procura de respostas válidas, para as questões em estudo, a investigadora organizou todo o material recolhido ao longo do estudo (Fichas de Tarefas, Teste Diagnóstico e Final; registo de observações e entrevistas, efetuadas pela investigadora) em suporte digital, que foi submetido a uma análise pormenorizada e indutiva. A análise dos dados centrou-se nos diversos papéis dos diferentes intervenientes no estudo, tendo bem presente que se trata de um processo complexo e multifacetado, pois envolvia “o trabalho com os dados, a sua organização, a divisão em unidades manipuláveis, a síntese, a procura de padrões, a descoberta dos aspetos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 205).

A análise de dados é um processo de compreensão e sistematização da informação recolhida através dos instrumentos utilizados. Ela permite uma melhor compreensão por parte da investigadora do material recolhido e também possibilita estabelecer uma organização com o objetivo de responder às questões propostas. Neste trabalho existiram três momentos de análise distintos momento da diagnose, momento da implementação da intervenção de ensino e momento de avaliação da implementação da intervenção de ensino. A Figura 8 que se apresenta de seguida descreve as metodologias utilizadas na análise dos dados recolhidos em cada um dos momentos.

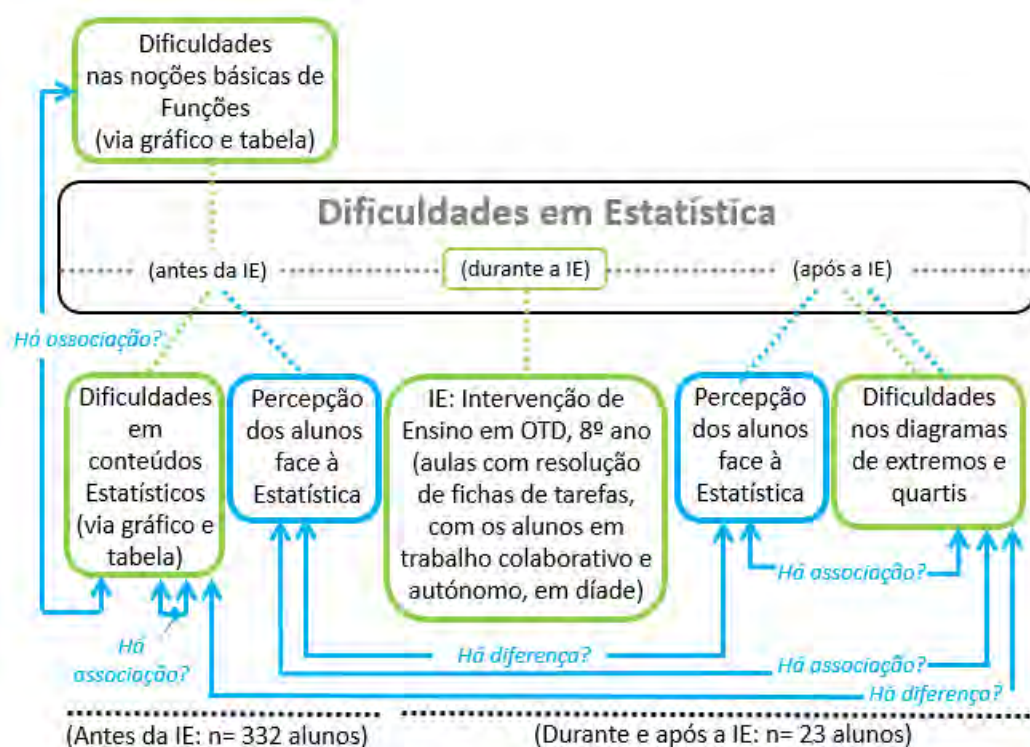


Figura 8 – Esquema sobre os métodos de análise de dados de acordo com os momentos do estudo empírica

Neste esquema procurou-se evidenciar os momentos de trabalho empírico, as ligações e a metodologia aplicada. Observando a Figura 8 destacam-se duas cores a verde que simboliza a análise dos dados qualitativos e azul a análise dos dados quantitativos.

Segundo Ludke e André (1986), analisar os dados qualitativos significa trabalhar todo o material obtido na pesquisa realizada. No primeiro momento, que decorreu antes da Intervenção de Ensino (IE), durante a recolha de dados, foi realizada uma primeira análise a fim de se poderem organizar e interpretar os elementos recolhidos.

Atendendo ao carácter misto da metodologia adotada, a análise dos dados foi essencialmente descritiva e interpretativa, com vista a obter-se uma caracterização, o mais completa possível, das situações em estudo e uma melhor compreensão das mesmas, com

o objetivo de responder às questões propostas, por um lado; por outro lado e com o propósito de averiguar associações das dificuldades procedeu-se a testes estatísticos.

No primeiro momento (antes da IE), aplicou-se os instrumentos Escala de Atitudes em Relação à Estatística (EARE) e o Teste Diagnóstico (TD) sobre Funções e Estatística. Com o TD iniciou-se recolha de dados relativa às dificuldades dos alunos nos conceitos estatísticos, sobre medidas de tendência central e sobre funções, que decorreu em três fases:

– Numa primeira fase, foram analisados segundo uma perspetiva qualitativa com recurso às ferramentas teóricas do enfoque ontossemiótico (EOS) do conhecimento e do ensino da matemática, que servem para analisar, conjuntamente, o pensamento matemático, os manifestos que o acompanham, as situações e os fatores que condicionam o seu desenvolvimento (Godino, Batanero & Font, 2007). Deste modo, procurou-se os conflitos semióticos, a partir da análise semiótica de respostas dos 332 alunos, a três situações-problema, envolvendo os conceitos de média, mediana, moda, máximo, mínimo as representações tabelar e gráfica e procedendo-se à sua categorização;

– Numa segunda fase, foram analisados segundo uma perspetiva quantitativa, para averiguar a existência de associação das dificuldades entre conceitos, entre representações gráficas e tabelar e entre os temas Funções e Estatística, aplicando-se o teste não paramétrico de coeficiente V de Cramér ((Murteira, Ribeiro, Silva.& Pimenta, 2010), que verifica se há associações significativas entre tipos de respostas relativas aos entre conceitos de Funções (gráfico versus tabelar), de Estatística (gráfico versus tabelar) e de Funções e Estatística;

– Numa terceira fase efetuaram-se testes estatísticos (z-testes) na comparação de duas proporções e o teste de McNemar (Pestana & Velosa, 2010) em tabelas  $2 \times 2$  ou o teste de homogeneidade marginal em tabelas  $k \times k$  ( $k > 2$ ) para avaliar se há mudança na categoria das respostas dos alunos entre questões, numa análise segundo a perspetiva quantitativa (Murteira et al., 2010).

Ainda neste momento, com recurso ao programa SPSS (Versão 24), procedeu-se à recolha de dados para a caracterização das atitudes e conceções dos alunos em relação à Estatística, antes da experiência de ensino, através da Escala de Atitudes em Relação à Estatística (EARE), procedendo-se à sua análise segundo uma perspetiva quantitativa. Para analisar características dos itens da escala, foi calculada a pontuação média e o desvio padrão de cada item, assim como a correlação de cada item com o conjunto dos restantes itens e a confiabilidade da escala (usado o coeficiente alfa de Cronbach) quando

cada item é eliminado da escala e para comparar médias, efetuou-se um teste-t de amostras emparelhadas, através da medida de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) (Murteira, Silva & Pimenta, 2010).

No segundo momento, durante a implementação da intervenção de ensino, foram elaborados registos a partir de notas tiradas no momento da observação, das gravações áudio realizadas durante as aulas e transcritas as interações entre alunos, entre alunos e professor; foram também analisadas as respostas dos alunos através das Fichas de Tarefas, realizadas em díade, com recuso às ferramentas do EOS e a categorização realizada no momento anterior, numa perspetiva qualitativa.

Procedeu-se a análises semióticas das respostas dos alunos nas FT. Assim, foi possível conhecer as fragilidades dos alunos envolvidos na IE e durante a sua implementação, descobrir o significado pessoal global dos alunos e encontrar nas suas respostas um número significativo de resoluções com mesmo tipo de respostas, pois era suposto a resolução ser comum. Deste modo, sendo as tarefas suficientemente representativas para avaliar os conteúdos propostos, pode fazer-se uma melhor inferência sobre o desempenho dos alunos. Aqui, a análise dos dados na perspetiva quantitativa, resume-se à construção de tabelas de frequência sobre o índice de dificuldade (ID) e sobre diferentes tipos de respostas (correta, parcialmente correta e incorreta) e as não respostas, em cada uma das suas alíneas.

No terceiro momento, implementou-se a avaliação das aprendizagens dos alunos sobre DEQ, realizou-se a entrevista e implementou-se novamente a EARE, com o objetivo de averiguar possíveis mudanças na perceção sobre a Estatística. Ora, em relação às atitudes dos alunos face à estatística, comparou-se os dados recolhidos antes da IE com os recolhidos depois da implementação da IE, comparando-os de modo a averiguar mudanças significativas, segundo perspetiva quantitativa.

Quanto às respostas recolhidas a partir do TF, procedeu-se à sua análise semiótica e a entrevista realizada a alunos com respostas não corretas, completou essa análise. Assim, foi possível conhecer as fragilidades dos alunos envolvidos na IE, após esta ter decorrido, descobrir o significado pessoal global dos alunos, sobre a temática diagrama de extremos e quartis, com base em representações gráficas e tabelares, bem como o seu conhecimento as suas dificuldades representativas do tema.

Na perspetiva de Aiken (2002), tanto as entrevistas como os questionários são designados por “medidas explícitas”, cuja utilização favorece a perceção que os participantes têm das suas atitudes ao revelá-las, evitando alterações dos seus

comportamentos. Ora, no caso da observação direta do comportamento, o à-vontade do participante pode ser condicionado pelo observador, o observado poderá tentar agradar, mostrando-se pouco genuíno e revelando uma conduta socialmente adequada.

Também neste momento se processa à avaliação da idoneidade da IE, de acordo com as ferramentas do EOS, os critérios propostos por Godino, Contreras e Font (2006) e aos critérios indicados por Batanero e Díaz (2005), sempre que estes sejam aplicáveis.

Batanero e Díaz (2005) referem que a possibilidade de se proceder a generalizações, em cada uma das etapas, depende da representatividade e da variabilidade da amostra recolhida.



## CAPÍTULO IV

### A COMPREENSÃO DAS REPRESENTAÇÕES TABELARES E GRÁFICAS NA APRENDIZAGEM DA ESTATÍSTICA

Neste capítulo procede-se à organização e análise dos dados recolhidos, na fase de diagnose, com a aplicação do Teste Diagnóstico (TD).

Nas duas primeiras secções apresentam-se os resultados obtidos no TD pelos 332 alunos: na primeira, tratam-se as suas respostas, de acordo com as categorias pré-estabelecidas; na segunda, procura-se compreender as dificuldades de alunos do 8.º ano na interpretação gráfica e tabelar de funções e perceber até que ponto tais dificuldades se constituem como um obstáculo na aprendizagem de conteúdos estatísticos. Na terceira secção descreve-se a análise semiótica das respostas dos alunos no Grupo 2 (G2) do Teste Diagnóstico (TD), relativo à Estatística e que engloba as questões Q4, Q5 e Q6. Por fim, na quarta secção procede-se a uma breve síntese dos resultados obtidos.

Parte deste capítulo foi apresentado numa conferência internacional (I Conferência internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa, 28-31/outubro/2015, Coimbra, Universidade de Coimbra) encontrando-se o artigo publicado nas atas e foi redigido um artigo submetido para publicação:

Carvalho, M. J., Fernandes, J.F, Freitas, A. Desempenho de alunos do 8.º ano em medidas de localização segundo as representações tabelar e gráfica. Atas da I Conferência Internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa. Coimbra: Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

Carvalho, M.J., Fernandes, J.A. & Freitas, A. (2017). Determinação da Mediana em Contexto Tabelar e Gráfico. (Submetido a revista internacional junho/2017).

#### 4.1. Conhecimentos prévios dos alunos sobre conceitos de Estatística e Funções

Analisando as respostas dos 332 alunos do 8.º ano, às 31 alíneas distribuídas pelas 6 questões do TD, verifica-se que a medida de adequação da amostra  $KMO = 0,869$ , o que é considerado um valor ótimo (Hutcheson & Sofroniou, 1999), já que o coeficiente alfa de Cronbach é superior a 0,8, donde se conclui existir uma boa consistência interna.

No que concerne ao índice de dificuldade (ID) (este é igual ao quociente entre número de alunos que responderam corretamente pela globalidade da amostra), ele traduz a proporção de sujeitos que consegue realizar corretamente a alínea proposta, sendo que a sua análise é realizada, questão a questão, tendo em conta a escala definida por Baquero (1974).

Quadro 15 – Classificação dos índices de dificuldades.

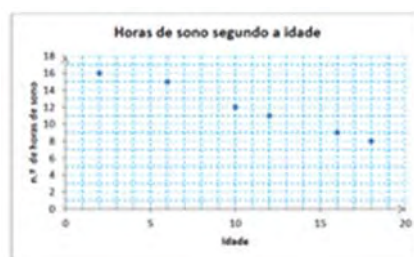
| Classificação  | Limites ID        |
|----------------|-------------------|
| Muito fáceis   | Maior que 0,74    |
| Fáceis         | Entre 0,55 e 0,74 |
| Médios         | Entre 0,45 e 0,54 |
| Díficeis       | Entre 0,25 e 0,44 |
| Muito díficeis | Menor que 0,25    |

Nesta secção apresenta-se a análise em termos globais, por questão, as frequências dos diferentes tipos de respostas (correta, parcialmente correta e incorreta) e as não respostas, em cada uma das suas alíneas; depois, dentro de cada questão, procede-se a uma análise por alínea, destacando as dificuldades reveladas pelos alunos.

##### 4.1.1. Análise das respostas e raciocínios na questão 1

A questão 1 faz parte do grupo temático Funções e foi proposta com o objetivo de confrontar o aluno com a sua capacidade de leitura de dados, a partir do gráfico de uma função de domínio finito. Na questão avalia-se a competência do aluno para identificar os conceitos associados à função  $f$  definida graficamente: objeto, imagem, domínio, contradomínio e máximo.

1. Na figura seguinte está representada graficamente a função  $f$ , em que à idade de cada um de seis jovens amigos se faz corresponder o número de horas que ele deve dormir diariamente.



De acordo com o gráfico, indica:

- O número de horas que deve dormir por dia o Bruno, que tem 10 anos de idade;
- A idade da Catarina, sabendo que ela dorme 8 horas por dia;
- O máximo do número de horas de sono diárias e a idade em que ocorre;
- O número total de horas de sono diárias de todos os seis amigos;
- O domínio e o contradomínio da função  $f$ .

Figura 9 – Enunciado da questão 1 proposta aos alunos

Na Tabela 3 encontram-se contabilizadas, em termos de frequência absoluta e em percentagem, os tipos de respostas apresentadas pelos alunos, segundo as categorias de resposta: correta, parcialmente correta e incorreta, em cada uma das alíneas desta questão. Incluem-se, ainda, as frequências de não respostas em cada uma das alíneas.

Tabela 3 – Tabela de frequências absolutas (%) dos tipos de respostas nas alíneas da questão 1 e respetivo ID

| Tipo de respostas    | Alíneas  |          |          |          |          |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                      | a        | b        | c        | d        | e        |
| Correta              | 307 (92) | 292 (88) | 214 (64) | 227 (68) | 52 (16)  |
| Parcialmente correta | 0 (0)    | 0 (0)    | 56 (17)  | 4 (1)    | 54 (16)  |
| Incorreta            | 24 (7)   | 38 (11)  | 32 (10)  | 65 (20)  | 76 (23)  |
| Não resposta         | 1 (1)    | 2 (1)    | 30 (9)   | 36 (11)  | 150 (45) |
| <b>ID</b>            | 0,92     | 0,88     | 0,64     | 0,68     | 0,16     |

Da Tabela 3 conclui-se que a maioria dos alunos respondeu corretamente a cada uma das alíneas de 1a a 1d desta questão. Como se pode verificar, o ID das alíneas são classificadas em: muito fácil, alíneas 1a e 1b, com  $ID > 0,74$ ; fácil, alíneas 1c e 1d, com  $0,55 < ID < 0,74$ ; e muito difícil, alínea 1e, com  $ID < 0,25$ .

A alínea 1e mostrou ser a mais difícil, com a maioria dos alunos (84%) a não apresentar a resposta correta, sendo que 45% destes omitem mesmo qualquer resposta.

As respostas parcialmente corretas e as respostas incorretas foram alvo de uma análise mais atenta, procurando enquadrar o tipo de incorreções cometidas.

Face aos resultados observados na questão 1, poder-se-á afirmar que a maioria dos alunos manifestou mais dificuldades em identificar o domínio e contradomínio de uma função  $f$  definida graficamente (alínea 1e).

Nas alíneas 1a e 1b, as 62 respostas incorretas devem-se à leitura errada dos valores (imagem e/ou o objeto) nos eixos cartesianos, devido à dificuldade de estabelecer relações entre objetos e imagens numa função. Todos os casos incorretos apresentam este tipo de incorreção. Na Figura 10 ilustram-se as respostas incorretas de um dos 14 alunos que respondem incorretamente às duas alíneas simultaneamente.

- a) O número de horas que deve dormir por dia o Bruno, que tem 10 anos de idade;      «R: O Bruno deve dormir 13h.  
*R: O Bruno deve dormir 13h.*
- b) A idade da Catarina, sabendo que ela dorme, 8 horas por dia;      R: A Catarina tem 16 anos.»  
*R: A Catarina tem 16 anos.*

Figura 10 – Resposta do aluno A78 à questão 1, alíneas 1a e 1b

Nesta resposta o aluno revela dificuldades na identificação da ordenada e da abcissa, correspondentes, respetivamente, à imagem e ao objeto.

Na alínea 1c o aluno teria que identificar dois valores: um relacionado com a “idade” (variável independente), o outro relacionado com o número máximo de “horas de sono” (variável dependente). As respostas em análise (incorretas e corretas parcialmente) foram divididas em dois grupos: completas e incompletas. Na primeira situação, encontramos três tipos de respostas: ambos os valores apresentados são incorretos; ambos os valores são corretos, mas não há evidência da resposta ser correta; apenas um dos valores está correto. Na Figura 11 apresentam-se três exemplos de uma destas respostas.

- e) O máximo do número de horas de sono diárias e a idade em que ocorre;      «O máximo número de horas +e 16horas que  
*O máximo número de horas é 16 horas que ocorre com 3 anos*      ocorre com 3 anos
- e) O máximo do número de horas de sono diárias e a idade em que ocorre;      2 anos – 16 horas    10 horas – 12 horas  
*2 anos – 16 horas    10 anos – 12 horas    4 anos – 9 horas*      16 anos – 9 horas    6 anos – 15 horas  
*6 anos – 15 horas    8 anos – 11 horas    18 anos – 8 horas*
- c) O máximo do número de horas de sono diárias e a idade em que ocorre;      18 horas e a idade é 20 anos»  
*18 horas e a idade é 20 anos*

Figura 11 – Respostas dos alunos A146, A169 e A173, respetivamente, à questão 1, alínea 1c

Na primeira resposta, o aluno identifica corretamente apenas o valor máximo do número de horas de sono diárias, não conseguindo identificar o objeto correspondente, revelando dificuldades na identificação das coordenadas de pontos no gráfico, o que se verificou em 36% dos alunos; na segunda, o aluno identifica todos os pontos do gráfico, mas não evidencia a resposta correta, revelando ter facilidade em destacar os pontos do gráfico, mas dificuldade na interpretação do enunciado. Esta situação surgiu em 11% das respostas; na terceira, a resposta identifica os valores máximos das escalas dos eixos cartesianos, mas evidencia dificuldades na compreensão do que é pedido, optando por registar os valores máximos dos eixos, confundindo as variáveis a que se referem raciocínio apresentado por 16% dos alunos.

Na segunda situação, o aluno apenas apresenta um valor, que nem sempre é o valor correto, podendo ser o valor da variável independente ou o valor da variável dependente. Para ilustrar esta situação, apresentam-se, na Figura 12, três exemplos de respostas dos alunos.

|   |  |
|---|--|
| e) O máximo do número de horas de sono diárias e a idade em que ocorre:   | «2 anos  |
| e) O máximo do número de horas de sono diárias e a idade em que ocorre:<br>O máximo de horas de sono diárias são 16 horas | O máximo de horas se sono diários são 16 horas |
| e) O máximo do número de horas de sono diárias e a idade em que ocorre:<br>Aos 18 anos                                    | Aos 18 anos»                                   |

Figura 12 – Respostas dos alunos A7, A15, A152, respetivamente, à questão 1, alínea 1c

Aqui o aluno identifica corretamente apenas um dos valores solicitados: na primeira resposta, o da variável independente; na segunda resposta, o da variável dependente e na última resposta, o aluno identifica erradamente o valor da variável independente. Estas respostas evidenciam, mais uma vez, que os alunos têm dificuldades na identificação das coordenadas de um ponto a partir do gráfico.

Em termos globais, face ao número total de respostas incorretas e parcialmente corretas (88), dadas pelos alunos, e aqui ilustradas, constata-se que: 63% deles responderam corretamente a apenas um dos valores solicitados; 26% responderam incorretamente, apresentando apenas um valor errado como resposta; e 11% identificaram corretamente todos os pontos do gráfico, mas sem responderem ao que foi solicitado. Assim, as 88 respostas apresentadas pelos alunos, com incorreções, evidenciam dificuldades na articulação entre a compreensão do enunciado e a análise gráfica, sobretudo na identificação dos respetivos pares ordenados correspondentes aos pontos aí representados.

Na alínea 1d pretende-se determinar o total de todos os valores do contradomínio. As respostas incorretas (65) devem-se à errada identificação dos valores operados (30%) ou à atribuição de um valor incorreto (64%), sem qualquer justificação para tal.

|  |  |
|--|--|
| d) O número total de horas de sono diárias de todos os seis amigos:<br>$16 + 15 + 12 + 9 + 11 + 8 = 56$<br>R: 56 horas | «16 + 15 + 12 + 9 + 11 + 8 = 56<br>R: 56 horas |
| d) O número total de horas de sono diárias de todos os seis amigos:<br>82 horas  | 82 horas                                       |
| d) O número total de horas de sono diárias de todos os seis amigos:<br>$16 + 14:30 + 12 + 10:30 + 8:30 + 8 = 68.9$ h   | $16 + 14:30 + 12 + 10:30 + 8:30 + 8 = 68.9$ h» |

Figura 13 – Respostas dos alunos A26, A27 e A90, respetivamente, à questão 1, alínea 1d

Em relação às respostas parcialmente corretas (4), elas devem-se a erros de cálculo (6%), como se pode constatar, na Figura 13, onde se encontra ilustrado um exemplo de cada uma das situações referidas. Na primeira resposta verifica-se que o aluno identificou todos os valores corretos, no entanto a soma está incorreta; na resposta do meio constata-se que o aluno atribuiu um valor errado, sem qualquer evidência de como foi obtido; na

última resposta o aluno identificou incorretamente os valores, pois considerou uma escala diferente da representada. Estas respostas revelam dificuldades no algoritmo da adição e na leitura do gráfico, para identificação das coordenadas dos pontos.

Na alínea 1e o aluno teria que identificar dois conjuntos de valores: o Domínio e o Contradomínio. Nas 130 respostas analisadas, constatou-se que: 25% dos alunos trocam a noção de domínio pela de contradomínio da função  $f$ , 52% reconhece que o domínio está associado à variável independente e o contradomínio à variável dependente da função  $f$ ; 13% apresenta uma resposta correta apenas a um dos dois conceitos e 10% apresenta os dois conceitos associados a um valor. Na Figura 14, 15, 16 e 17 são ilustradas estas três categorias de resposta, recorrendo, para tal, a exemplos de respostas de diferentes alunos.

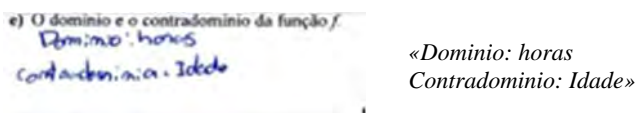


Figura 14 – Resposta do aluno A119 à questão 1, alínea 1e

A resposta do aluno A119 (Figura 14) revela dificuldades no âmbito dos conceitos pois associa o domínio à variável dependente e o contradomínio à variável independente.



Figura 15 – Resposta do aluno A150 à questão 1, alínea 1e

O aluno A150 (Figura 15), tal como o aluno A119, revela associar a noção de domínio à variável dependente e a de contradomínio à variável independente, sendo embora mais preciso na identificação da variável dependente; ambos os alunos não identificam os elementos que fazem parte do domínio e contradomínio.

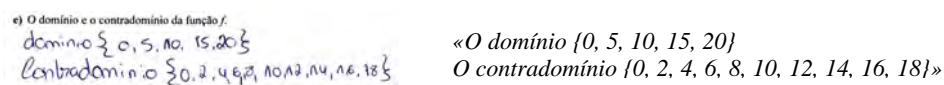


Figura 16 – Resposta do aluno A29 à questão 1, alínea 1e

O aluno A29 (Figura 16) revela saber que a noção de domínio está associada à variável independente, e o contradomínio à variável dependente; no entanto, não é capaz de aplicar essas noções à situação formulada.



Figura 17 – Resposta do aluno A6 à questão 1, alínea 1e

O aluno A6 (Figura 17) identifica corretamente o contradomínio, embora não apresente o conjunto ordenado.

e) O domínio e o contradomínio da função  $f$ .

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

$$D' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

« $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ »  
« $D' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$ »

Figura 18 – Respostas do aluno A271 à questão 1, alínea 1e

O aluno A271 (Figura 18) identificou todos os valores dos eixos, tendo o cuidado de associar a noção de domínio à variável independente e o contradomínio à variável dependente.

e) O domínio e o contradomínio da função  $f$ .

Domínio = 2 anos  
C. Domínio = 18 anos

e) O domínio e o contradomínio da função  $f$ .

domínio 16 contradomínio 18

«Domínio = 2 anos»  
«C Domínio = 18 anos»  
«domínio 16 contradomínio 18»

Figura 19 – Respostas do aluno A81 e A165 à questão 1, alínea 1e

Finalmente, os dois alunos A81 e A165 (Figura 19) associam as noções de domínio e contradomínio a um valor, não reconhecendo o domínio com o conjunto dos valores assumidos pela variável independente, nem o contradomínio com o conjunto dos valores assumidos pela variável dependente.

Em termos globais, pode dizer-se que esta questão se revelou fácil, com ID = 0,66, apesar da alínea e) se ter revelado muito difícil.

#### 4.1.2. Análise das respostas e raciocínios na questão 2

Através da questão 2, cujo objetivo era confrontar o aluno com a sua capacidade de leitura dos dados, avalia-se a competência de o aluno identificar os conceitos associados à função  $f$ , definida por uma tabela: objeto, imagem, variável, domínio, contradomínio, mínimo e máximo.

2. O João estava à janela do seu quarto e durante seis minutos contou o número de carros que, em cada minuto, passaram na rua. Com os dados obtidos, o João definiu a função  $f$  pela seguinte tabela, em que ao tempo em minutos faz corresponder o número de carros:

| Tempo (minutos) | 1.º | 2.º | 3.º | 4.º | 5.º | 6.º |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| N.º de carros   | 6   | 5   | 10  | 0   | 6   | 12  |

De acordo com a tabela, responde às seguintes questões:

- Qual o número de carros que o João contabilizou durante o quinto minuto?
- Em que minuto ou minutos o João contabilizou seis carros?
- Qual o número máximo de carros que o João registou num minuto? E o número mínimo?
- Quantos carros passaram na rua durante os seis minutos?
- Qual a variável independente da função  $f$ ?
- Indica o domínio e o contradomínio da função  $f$ .

Figura 20 – Enunciado da questão 2 proposta aos alunos

Na Tabela 4 encontram-se contabilizados, em termos de frequência absoluta e em percentagem, os tipos de respostas apresentadas pelos alunos segundo as categorias

correta, parcialmente correta e incorreta, bem como as não respostas, em cada alínea desta questão.

Tabela 4 – Tabela de frequências absolutas (%) dos tipos de respostas nas alíneas da questão 2 e respetivo ID

| Tipo de respostas    | Alíneas  |          |          |          |          |          |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                      | a        | b        | c        | d        | e        | f        |
| Correta              | 310 (93) | 244 (73) | 213 (64) | 193 (58) | 62 (18)  | 78 (23)  |
| Parcialmente correta | 0 (0)    | 73 (22)  | 62 (19)  | 1 (0)    | 0 (0)    | 27 (9)   |
| Incorreta            | 14 (4)   | 10 (3)   | 42 (13)  | 128 (39) | 92 (28)  | 58 (17)  |
| Não resposta         | 8 (3)    | 5 (2)    | 15 (4)   | 10 (3)   | 178 (54) | 169 (51) |
| ID                   | 0,93     | 0,73     | 0,64     | 0,58     | 0,18     | 0,23     |

Ao analisar-se a Tabela 4, conclui-se que a maioria dos alunos respondeu corretamente a cada uma das alíneas de 2a a 2d desta questão. Os alunos denotam mais dificuldades nas duas últimas alíneas 2e e 2f; na alínea 2e, a maioria dos alunos (82%) não respondeu corretamente, e destes, 54% não apresentou qualquer resposta; na alínea 2f, a maioria dos alunos (68%) também não apresentou a resposta correta, sendo que 51% deles nem sequer respondeu.

Em termos de ID, as várias alíneas classificam-se do seguinte modo: muito fácil, a alínea a), com  $ID > 0,74$ ; fácil, as alíneas 2b, 2c e 2d, com  $0,55 < ID < 0,74$ ; e muito difícil, as alíneas 2e e 2f, com  $ID < 0,25$ .

Face aos resultados observados na questão 2, conclui-se que a maioria dos alunos sentiu dificuldades em identificar a variável independente e o domínio e contradomínio de uma função  $f$ , em contexto tabelar. Pode salientar-se, ainda, que as respostas imprecisas (parcialmente corretas e incorretas) observadas indiciam que os alunos nem sempre leem corretamente o enunciado que lhes é apresentado.

De seguida fez-se uma análise, por alínea, das respostas incorretas e das parcialmente corretas, procurando enquadrar os tipos de incorreções cometidas.

No caso da alínea 2a, o número de respostas incorretas é residual e deve-se essencialmente à confusão entre numeral cardinal e ordinal. Como se pode observar, três alunos consideram o número total de carros nos primeiros cinco minutos e os outros dois apresentam a resposta com um número ordinal. A Figura 21 ilustra um exemplo de cada tipo destas respostas.

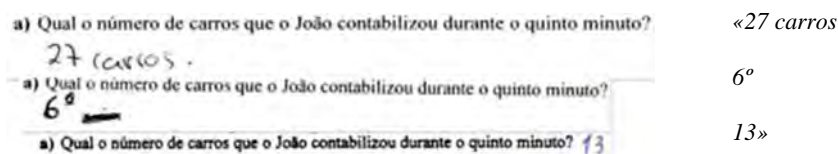


Figura 21 – Respostas do aluno A180, A50 e A193 respetivamente, à questão 2, alínea 2a

Nestas respostas os alunos revelam dificuldades na interpretação dos dados em suporte tabelar, já que eles adicionam todas as observações efetuadas entre o primeiro



minuto e o quinto (primeira resposta), correspondendo a 36% das respostas incorretas; na segunda resposta (50%) o aluno confunde o numeral cardinal com ordinal. Destas respostas conclui-se que o aluno tem dificuldade de estabelecer relações entre objetos e imagens, numa função definida por uma tabela; na terceira resposta (14%) o aluno parece atribuir um valor ao acaso.

Na alínea 2b a análise recai sobre as respostas parcialmente corretas e incorretas (83). As respostas foram agrupadas em dois tipos: num deles, os alunos respondem corretamente apenas a um dos valores solicitados ou apresenta corretamente só um desses valores (89%); no outro, os alunos trocam o valor do objeto pelo da imagem de  $f$  (11%). Na Figura 22 ilustra-se com um exemplo cada uma destas respostas imprecisas.

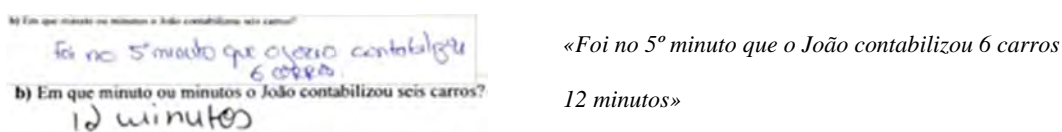


Figura 22 – Respostas dos A82 e A39, respetivamente, à questão 2, alínea 2b

A primeira resposta está incompleta pois o aluno não considera que no primeiro minuto também foram contabilizados seis carros. Já na segunda resposta, o aluno parece ter dificuldade em compreender a noção de função, como correspondência unívoca do conjunto dos objetos para o das imagens, parecendo interpretar a relação no sentido inverso.

Também na alínea 2c, as respostas incorretas e parcialmente corretas (104) foram alvo de uma atenção mais pormenorizada. No total de respostas com incorreções, verificase, na maioria delas, que apresentam apenas um dos valores solicitados ou, registando os dois, um deles ou ambos estão incorretos (53%); outro tipo de incorreção teve origem na interpretação errada do enunciado, já que alguns alunos tomam “o primeiro minuto” como valor do número de carros por minuto (28%); há ainda alunos que apresentam dificuldades em identificar o valor da imagem solicitada, pois indicam valores do objeto (19%) e não da imagem, como se pretendia. Na Figura 23 apresentam-se exemplos de cada um dos tipos de respostas imprecisas.

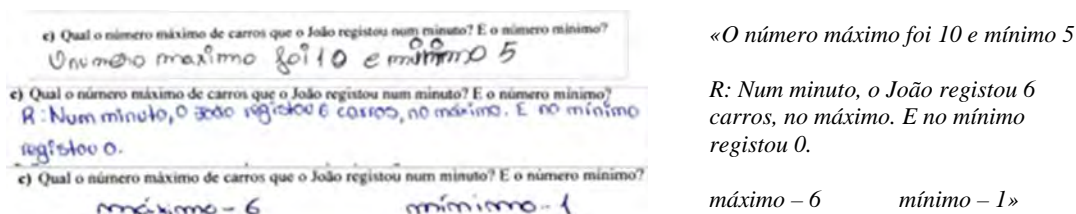


Figura 23 – Respostas dos alunos A152, A168 e A162, respetivamente, à questão 2, alínea 2c

Na primeira resposta, nenhum dos valores apresentados é correto. O aluno não selecionou corretamente os dados organizados na tabela, talvez por desconhecimento das

noções de máximo e mínimo. A segunda resposta reflete uma interpretação incorreta do que é solicitado, interpretando “primeiro minuto” como “por minuto” no caso do máximo; no caso do mínimo, o aluno apresenta a resposta correta. A terceira resposta apresentada revela confusão entre os valores do objeto e da imagem de  $f$ . Aqui, o aluno apresenta uma solução que pode indiciar confusão entre objetos (domínio) e imagens (contradomínio).

Na alínea 2d, das 129 respostas incorretas ou parcialmente corretas, a maioria das respostas (87%) apresenta a mesma incorreção: interpretação errada do enunciado, uma vez que os alunos consideraram “os seis minutos” como sendo “o sexto minuto”, revelando confusão entre numeral ordinal e numeral cardinal; alguns alunos cometem erros de cálculo (11%); e ainda outros apresentam dificuldades em associar o valor solicitado ao conjunto dos valores do contradomínio de  $f$ , pois o atribuem ao conjunto dos valores do domínio de  $f$  (2%). Na Figura 24 apresentam-se exemplos de cada um dos tipos de respostas incorretas.

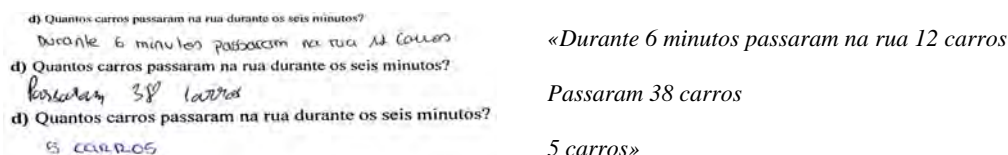


Figura 24 – Respostas dos alunos A45, A135 e A32, respetivamente, à questão 2, alínea 2d

A primeira resposta revela dificuldade em distinguir “sexto minuto” de “seis minutos”. Já a segunda resposta é reveladora de um erro de cálculo. Finalmente, a terceira resposta revela um valor associado ao número de carros observados no quinto minuto, sugerindo que o aluno troca objeto por imagem, levando-o a cometer o erro.

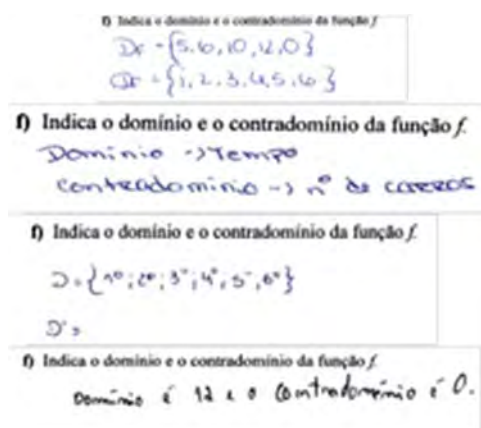
As 92 respostas incorretas à alínea 2e foram alvo de uma análise mais atenta, agrupando-se em cinco grupos: confusão entre a variável independente e a variável dependente da função  $f$  (35%); confusão entre variável independente e contradomínio da função  $f$  (14%); confusão entre variável independente e domínio da função  $f$  (13%); atribuição dos valores 0, 6 e 12 à variável independente da função  $f$  (29%); apresentação de conceito associado a um valor do domínio e/ou contradomínio (9%). Na Figura 25 apresentam-se exemplos de cada um dos tipos de respostas incorretas referidas.

|   |   |
|---|---|
| e) Qual a <b>variável independente</b> da função $f$ ?                  | «R: A variável independente são os carros.»                     |
| R: A variável independente são os carros.                               |   |
| e) Qual a <b>variável independente</b> da função $f$ ?                  |   |
| 12  | 12  |
| e) Qual a <b>variável independente</b> da função $f$ ?                  |   |
| $\sqrt{3} f = \{1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ\}$ | $VI = \{1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ, 6^\circ\}$ |
| e) Qual a <b>variável independente</b> da função $f$ ?                  |   |
| $\{0, 5, 10, 0, 6, 12\}$  | $\{6, 5, 10, 0, 6, 12\}$  |
| e) Qual a <b>variável independente</b> da função $f$ ?                  | «é o número 6»  |
| é o número 6  |   |

Figura 25 – Respostas dos alunos A168, A39, A254, A155, e A276, respetivamente, à questão 2, alínea 2e

A primeira resposta revela confusão do aluno entre a variável independente e variável dependente da função  $f$ , pois associa a variável independente ao conjunto das imagens da função  $f$ . Na segunda resposta o aluno apresenta a variável independente de  $f$  como sendo o número máximo de carros registados num minuto. Poder-se-á concluir que ele tem dificuldade em distinguir variável de valor da variável. Na terceira resposta o aluno apresenta o domínio da função  $f$  como sendo a variável independente, revelando confusão entre as duas noções. Na quarta resposta o aluno apresenta o contradomínio da função  $f$  como sendo a variável independente da função  $f$ . Dois aspetos a salientar nesta resposta: primeiro, o aluno ignora que a noção de variável independente está relacionada com o domínio; segundo, o aluno confunde variável com os seus valores. Por último, na quinta resposta, o aluno atribui o valor 6, que pode ser um valor do domínio ou do contradomínio da função  $f$ , revelando desconhecer a noção de variável independente de uma função.

Na última alínea desta questão, alínea 2f, a maioria dos alunos (77%) não apresenta a resposta pretendida, omitindo 51% deles a resposta. Da análise das respostas incorretas e parcialmente corretas (85), conclui-se que: 45% dos alunos trocam o domínio pelo contradomínio da função  $f$ ; 38% entende que o domínio está associado à variável independente e o contradomínio à variável dependente da função  $f$ , sem apresentarem os respetivos conjuntos de valores; 4% apresenta corretamente o domínio da função  $f$ , sem identificar o seu contradomínio; e ainda 13% apresenta os dois conceitos, associados a um valor do domínio e/ou do contradomínio. Na Figura 26 apresentam-se exemplos destes tipos de respostas.



« $D_f = \{5, 6, 10, 12, 0\}$   $CD_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ »

Domínio  $\rightarrow$  tempo      Contradomínio  $\rightarrow$  n.º de carros

$D = \{1^\circ; 2^\circ; 3^\circ; 4^\circ; 5^\circ; 6^\circ\}$        $D' =$

Domínio é 12 e o Contradomínio é 0»

Figura 26 – Respostas do aluno A38, A5, A1, e A10, respetivamente, à questão 2, alínea 2f

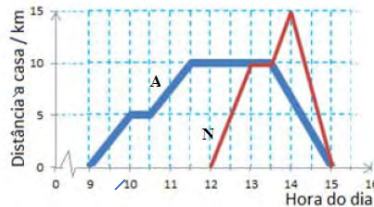
A primeira resposta revela a troca entre o domínio e o contradomínio da função  $f$ . Na segunda resposta o domínio aparece associado à variável independente e o contradomínio à variável dependente da função  $f$ , sem que o aluno indique os valores que essas variáveis assumem. Assim, o aluno confunde as variáveis independente e dependente, respetivamente, com domínio e contradomínio. A terceira resposta é incompleta, pois o aluno responde corretamente apenas à pergunta sobre o domínio da função  $f$ , parecendo sentir dificuldades na identificação das imagens correspondentes aos objetos, talvez devido ao facto de existirem valores da variável dependente repetidos. Finalmente, a quarta resposta evidencia uma associação do domínio e do contradomínio da função  $f$  aos valores máximo e mínimo do contradomínio, revelando algum conflito entre os conceitos.

Em termos globais, pode concluir-se que esta questão é considerada fácil, com ID = 0,55, e ligeiramente mais difícil do que a questão 1 (ID= 0,66).

#### 4.1.3. Análise das respostas e raciocínios na questão 3

A questão 3 é a última do tema Funções, e foi proposta com o objetivo de avaliar a capacidade do aluno de ler dados num gráfico de funções. Nesta questão avalia-se a competência de o aluno comparar dois gráficos e identificar os conceitos associados às funções definidas graficamente: objeto, imagem, variável, domínio, contradomínio, mínimo e máximo.

3. O Nuno (N) convidou a sua amiga Ana (A) para almoçar no dia do seu aniversário, tendo decidido encontrarem-se num restaurante que havia sido inaugurado há pouco tempo. O restaurante escolhido fica à mesma distância das casas dos dois amigos. Nos gráficos seguintes, representados na figura em baixo, estão indicadas as distâncias a casa de cada um dos amigos observadas na deslocação ao restaurante e regresso, sendo que o gráfico de traço mais espesso se refere à viagem da Ana (A) e o de traço mais fino refere-se à viagem do Nuno (N).



De acordo com o gráfico, indica:

- A que horas saiu o Nuno de casa?
- A que horas a Ana encontrou o Nuno?
- Qual dos dois amigos chegou primeiro ao restaurante? E a que horas chegou?
- Qual dos amigos esteve mais tempo fora de casa? Justifica.
- Qual a variável dependente das funções representadas graficamente?

Figura 27 – Enunciado da questão 3 proposta aos alunos

Na Tabela 5 encontram-se contabilizados, em termos de frequência absoluta e em percentagem, os tipos de respostas apresentadas pelos alunos segundo as categorias: correta, parcialmente correta e incorreta, em cada uma das alíneas desta questão. Apresentam-se, ainda, as frequências de alunos que não apresentam qualquer resposta nas várias alíneas da questão.

Tabela 5 – Tabela de frequências absolutas (%) dos tipos de respostas nas alíneas da Questão 3 e respetivo ID

| Tipos de respostas   | Alíneas  |          |          |          |          |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                      | a        | b        | c        | d        | e        |
| Correta              | 300 (90) | 6 (2)    | 58 (18)  | 144 (43) | 64 (19)  |
| Parcialmente correta | 0 (0)    | 282 (85) | 93 (28)  | 125 (38) | 4 (1)    |
| Incorreta            | 13 (4)   | 31 (9)   | 133 (40) | 28 (8)   | 63 (19)  |
| Não resposta         | 19 (6)   | 13 (4)   | 48 (14)  | 35 (11)  | 201 (61) |
| ID                   | 0,90     | 0,02     | 0,18     | 0,43     | 0,19     |

Analisando a Tabela 5, conclui-se que a categoria resposta correta contém a maioria das respostas dos alunos apenas na alínea 3a (90%). Os alunos apresentam mais dificuldades nas duas alíneas 3b, 3c e 3e, dado que a maioria dos alunos não apresenta a resposta correta: 98% para a alínea 3b, dos quais 4% não apresenta qualquer resposta, 82% para alínea 3c, dos quais 14% não redige qualquer resposta e 81% para a alínea 3e, dos quais 61% não apresenta qualquer resposta. Esta constatação é corroborada pelo ID, já que a classificação obtida é: muito fácil, alíneas 3a, com  $ID > 0,74$ ; difícil, alínea 3d, com  $0,25 < ID < 0,44$ ; e, muito difícil, alíneas 3b, 3c e 3e, com  $ID < 0,25$ . No caso da alínea 2b, salienta-se que apenas seis alunos responderam de forma correta ( $ID = 0,02$ ).

Face aos resultados observados, pode concluir-se que a maioria dos alunos manifesta dificuldades em identificar a variável dependente e os pontos de interseção das

duas funções, e ainda, estabelecer comparações entre as funções, definidas graficamente. Deve ainda salientar-se que as respostas observadas indiciam que os alunos nem sempre leem corretamente o texto do enunciado apresentado, o que origina respostas imprecisas ou incompletas, sobretudo na comparação entre os gráficos.

Seguidamente fez-se uma análise das respostas parcialmente corretas e incorretas, por alínea, procurando caracterizar os tipos de incorreções cometidas. No caso da alínea a), o número de respostas incorretas é de 13% e deve-se essencialmente à troca dos percursos dos dois amigos, pois os cinco alunos responderam todos “9h”.

Na alínea 3b a análise recai sobre as respostas parcialmente corretas e incorretas (313). Em todas elas é indicado apenas uma das duas respostas esperadas e agrupam-se em dois tipos: atribuição do valor correto; e atribuição do valor incorreto. Assim, 90% dos alunos apresenta apenas um dos dois valores solicitados, omitindo o outro, talvez por esquecimento (13 horas ou 15 horas), e 10% atribui um valor errado por interpretação incorreta do gráfico (variando entre 11 e 13:30).

Comparativamente com as duas alíneas anteriores, na alínea 3c verifica-se um aumento das respostas incorretas. Na análise das respostas incorretas e as parcialmente corretas (226), verifica-se existirem três tipos de resposta: aquela em que é referido o nome dos dois amigos (38%); aquela em que é referido o nome do amigo solicitado, mas em que a hora especificada é incorreta (34%); e aquela em que é referido o nome do amigo incorretamente (27%). Na Figura 28, ilustram-se estas últimas três situações, com exemplos das respostas com falhas ou completamente erradas.

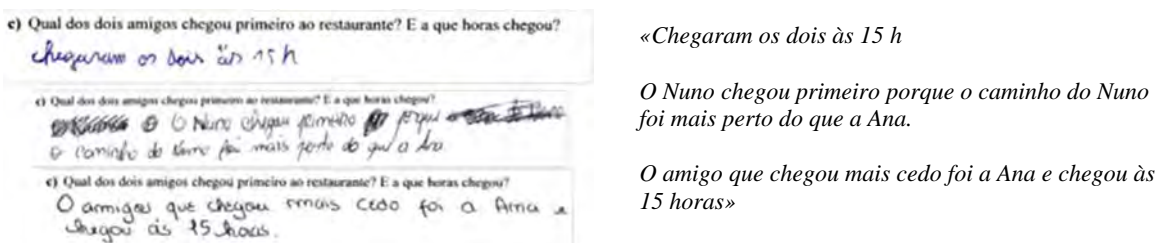


Figura 28 – Respostas dos alunos A93, A60 e A90, respetivamente, à questão 3, alínea 3c

Todas as respostas evidenciam dificuldades na análise gráfica das duas funções em estudo. Na primeira e na última, os alunos não conseguiram associar a “distância de casa” com o momento de paragem registada nos gráficos (o restaurante), mostrando dificuldades na análise e interpretação gráfica; na segunda, o aluno associa o facto de o Nuno ter saído mais tarde, como morando mais próximo do restaurante, ignorando o que o gráfico ilustrava e o referido no enunciado.

No que concerne às respostas dos alunos à alínea 3d, constata-se que 43% dos alunos responde de forma correta ao que é solicitado. Efetuando uma análise das respostas incorretas e parcialmente corretas (153), verifica-se que existem dois tipos de respostas: aquelas em que é referido o nome do amigo solicitado, mas sem qualquer justificação dessa resposta ou com uma justificação pouco adequada (69%); e aquelas em que é referido incorretamente o nome do amigo, ou dos dois amigos, sem qualquer justificação ou com uma justificação incorreta (31%). Na Figura 29 exemplificam-se os tipos de resposta com incorreções, que enquadram o tipo de erros cometidos nas respostas incorretas da alínea 3d.

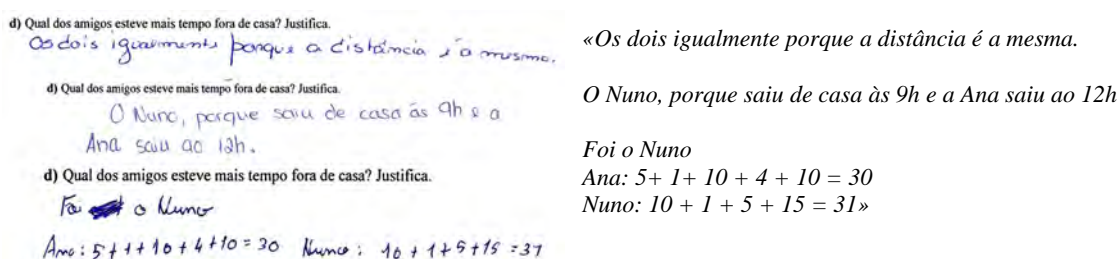
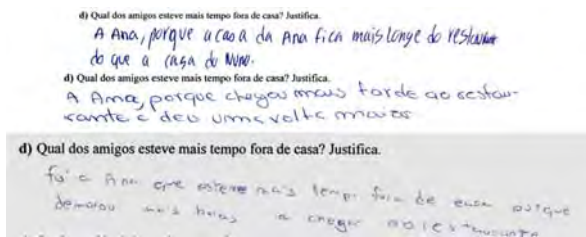


Figura 29 – Respostas incorretas dos alunos A51, A112 e A166, respetivamente, à questão 3, alínea 3d

A primeira resposta foi dada por 15% dos alunos que apresentaram uma resposta incorreta. Embora estes alunos revelem ter lido o enunciado da questão, não foram capazes de efetuar uma adequada análise gráfica. A segunda resposta foi dada também por 31% dos alunos que apresentaram uma resposta incorreta, revelando, na análise gráfica das funções, ter trocado o gráfico correspondente da viagem da Ana pelo da viagem do Nuno. Por último, na terceira resposta, apenas um aluno (4%) procedeu à justificação por este processo: o aluno comparou os dois gráficos, contabilizando o número de km que cada um dos amigos efetuou, e não o número de horas que cada um ficou fora de casa.

Estas respostas revelam que os alunos têm dificuldades em distinguir o conceito de tempo e de distância, ao analisarem um gráfico, podendo indiciar dificuldades nos conceitos de variável independente e de dependente.

Na Figura 30 exemplificam-se os tipos de resposta com imprecisões, mas com justificação pertinentes, que enquadram o tipo de erros cometidos nas respostas parcialmente corretas da alínea 3d.



«A Ana, porque a casa da Ana fica mais longe do restaurante do que a casa do Nuno.

A Ana, porque chegou mais tarde ao restaurante e deu uma volta maior.

Foi a Ana que está mais tempo fora de casa porque demorou mais horas a chegar ao restaurante.»

Figura 30 – Respostas parcialmente corretas dos alunos A54, A87 e A134, respetivamente, à questão 3, alínea 3d

A primeira resposta foi dada por 31% dos alunos, que apresentaram uma justificação à resposta parcialmente correta, revelando ter dificuldades na interpretação do enunciado ao considerarem que a distância entre o restaurante e a casa de cada um deles era diferente, denotando dificuldades em distinguir o espaço percorrido e o tempo gasto a fazê-lo. No caso da segunda resposta, que foi dada por 6% dos alunos que apresentaram uma resposta parcialmente correta, eles revelam ter lido o enunciado da questão, mas falharam na realização de uma adequada análise gráfica. Nestas duas primeiras respostas, os alunos confundem as noções de tempo e de espaço percorrido, pelo facto de o gráfico correspondente ao percurso da Ana abranger mais tempo, das 9 às 15, o que os leva a considerar que o espaço percorrido é maior. Por fim, a terceira resposta foi dada por 13% dos alunos que apresentaram uma resposta parcialmente correta. Embora estes alunos revelem que o maior tempo fora de casa é relativo a Ana, eles erram ao julgar que a chegada ao restaurante é às 15 horas. Este erro decorre da dificuldade de analisar funções graficamente, associando que o restaurante se localiza no ponto de interseção dos dois gráficos com o eixo das abcissas.

Salienta-se que a maioria dos alunos (60%), cuja resposta se enquadra na categoria “parcialmente correta”, apresenta o nome do amigo solicitado (Ana) sem qualquer justificação para tal resposta.

Em relação à última alínea da questão 3, alínea e, as respostas parcialmente corretas e incorretas (67) agrupam-se em três tipos de erros: confusão entre a variável dependente e variável independente (58%); confusão entre variável dependente e atribuição de valores do domínio (31%); confusão entre a variável dependente e a distância ao restaurante (11%). Na Figura 31 apresentam-se exemplos de cada um dos tipos de respostas acima referidos.



- e) Qual a variável dependente das funções representadas graficamente? *A hora do dia.* «A hora do dia.
- e) Qual a variável dependente das funções representadas graficamente? *{0, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}* {0, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}
- e) Qual a variável dependente das funções representadas graficamente? *A distância do restaurante.* A distância do restaurante.»

Figura 31 – Respostas dos alunos A51, A155 e A127, respetivamente, à questão 3, alínea 3e

Na primeira resposta o aluno revela confusão entre a variável dependente e independente das funções representadas graficamente. Na segunda resposta o aluno apresenta, como variável dependente das funções, um conjunto de valores dos domínios das funções, o que denota dificuldade em distinguir domínio e variável. Por último, na terceira resposta, o aluno apresenta a variável dependente das funções gráficas como a distância ao restaurante e não a casa. Talvez seja esta a principal razão para os alunos darem respostas erradas sobre a localização do restaurante, já que assim este terá que ficar sobre o eixo das abcissas.

Globalmente, e nesta questão que os alunos revelam mais dificuldades (ID=0,34), sendo também nesta questão que se encontra a alínea com ID mais baixo (alínea b)), revelando que os alunos apresentam dificuldades na análise de gráficos, sobretudo em localizar os pontos de interseção destes.

Analisando globalmente as primeiras três questões do teste diagnóstico, versando o tema Funções, constata-se que os alunos têm dificuldades na obtenção de informação a partir da análise de uma dada representação de função (gráfico ou tabela). Tanto na análise gráfica como na análise tabelar, os alunos cometem erros, revelando, por vezes, que estes não dependem da representação da função em análise, mas das dificuldades sentidas com a noção de função e com as noções a ela associados, tais como: objeto e imagem; domínio/contradomínio e variável dependente/independente.

Os resultados parecem indicar que os alunos têm mais dificuldades em indicar o domínio e contradomínio (1e e 2f) quando os dados são apresentados em suporte gráfico (ID= 0,16) do que sob a forma de tabelar (ID= 0,23), embora em ambas as situações se tenham revelado muitas dificuldades. Em relação à indicação da variável (2e e 3e), os alunos apresentam também grandes dificuldades, mas neste caso não parece que o tipo de representação se repercuta no índice de dificuldade, já que para a representação tabelar ID= 0,18 e gráfica ID= 0,19.

#### 4.1.4. Análise das respostas e raciocínios na questão 4

Incluída no grupo temático Estatística, a questão 4, com dados organizados em tabela, tem por objetivo confrontar o aluno com a sua capacidade de leitura de dados numa tabela de frequência, avaliando também a sua competência para identificar e/ou aplicar os conceitos associados aos dados organizados na tabela: moda, média, mediana, mínimo e máximo.

|  |    |    |    |    |
|--|----|----|----|----|
| 4. A tabela seguinte apresenta a distribuição das idades dos alunos de uma turma do 8.º ano:   |    |    |    |    |
| Idade  | 13 | 14 | 15 | 16 |
| N.º de alunos  | 6  | 4  | 5  | 5  |
| <p>a) Qual a moda das idades dos alunos da turma? Justifica.</p> <p>b) Qual a mediana das idades dos alunos da turma? Justifica.</p> <p>c) Determina a média das idades dos alunos da turma.</p> <p>d) Qual a idade máxima dos alunos da turma? E a idade mínima?</p> <p>e) Desta turma foram escolhidos cinco alunos para representarem a escola numa competição desportiva. Relativamente às idades desses cinco alunos, sabe-se que a moda é 13 anos e a mediana é 14 anos. Quais as idades possíveis dos cinco alunos?</p> |    |    |    |    |

Figura 32 – Enunciado da questão 4 proposta aos alunos

Na Tabela 6 encontram-se registados, em termos de frequência absoluta e de percentagem, os tipos de respostas apresentadas pelos alunos segundo as categorias correta, parcialmente correta e incorreta, em cada uma das alíneas desta questão. Além disso, apresentam-se ainda as frequências de alunos que não apresentam qualquer resposta às várias alíneas desta questão.

Tabela 6 – Tabela de frequências absolutas (%) dos tipos de respostas nas alíneas da questão 4 e respetivo ID

| Tipo de respostas    | Alíneas  |          |         |          |          |
|----------------------|----------|----------|---------|----------|----------|
|                      | a        | b        | c       | d        | e        |
| Correta              | 130 (39) | 34 (10)  | 60 (18) | 271 (82) | 49 (15)  |
| Parcialmente Correta | 112 (34) | 36 (11)  | 27 (8)  | 6 (2)    | 71 (22)  |
| Incorreta            | 66 (20)  | 133 (40) | 130(39) | 27 (8)   | 48 (14)  |
| Não resposta         | 24 (7)   | 129 (39) | 115(35) | 28 (8)   | 164 (49) |
| ID                   | 0,39     | 0,10     | 0,18    | 0,82     | 0,15     |

Analisando a Tabela 6, conclui-se que a “resposta correta” foi dada pela maioria dos alunos apenas na questão 4d (82%). Os alunos apresentam mais dificuldades nas alíneas a) ( $34 + 20 = 54\%$ ), 4b ( $11 + 40 = 51\%$ ), 4c ( $8 + 39 = 47\%$ ) e 4e ( $22 + 14 = 36\%$ ), dado que em todas estas alíneas a maioria dos alunos apresenta uma resposta incorreta ou não respondeu. Em termos de não respostas, observaram-se percentagens de 7 %, 39%, 35% e 49%, que no caso da alínea 4e é superior à soma das percentagens de respostas imprecisas.

Face aos resultados observados na questão 4, pode concluir-se que a maioria dos alunos manifesta dificuldades em identificar a moda e em determinar a média e a mediana, bem como em justificar os seus valores. Este resultado é corroborado pelo ID, uma vez

que a maioria das alíneas, 4b, 4c e 4e, se revelou muito difícil ( $ID < 0,25$ ), enquanto a alínea 4a se revelou fácil ( $0,25 < ID < 0,44$ ) e a alínea 4d muito fácil ( $ID > 0,74$ ).

Seguidamente faz-se uma análise, por alínea, às respostas parcialmente corretas e às incorretas, tentando caracterizar o tipo de erros cometidos pelos alunos.

No caso da alínea 4a, constata-se que na categoria “parcialmente correta” (112) os alunos referem corretamente a moda (13 anos de idade). Da análise efetuada, agruparam-se as respostas em dois tipos: sem justificação (31%) ou com justificação inadequada (34%). Relativamente a esta última, a resposta dos alunos é sempre a mesma: “a maioria dos alunos da turma tem 13 anos”. De facto, numa turma de 20 alunos, há 6 alunos com 13 anos, o que está longe de ser a maioria.

No que concerne às respostas da categoria “incorreta” (66), elas agruparam-se em seis tipos de resposta: atribuir valores incorretos, sem qualquer justificação (12%); atribuir um valor incorreto, com justificação (11%); identificar o valor da média em vez da moda (1%); identificar o valor do máximo em vez da moda (1%); referir ausência de moda (3%); indicar duas modas (7%). Na Figura 33 ilustram-se os dois primeiros tipos de resposta.

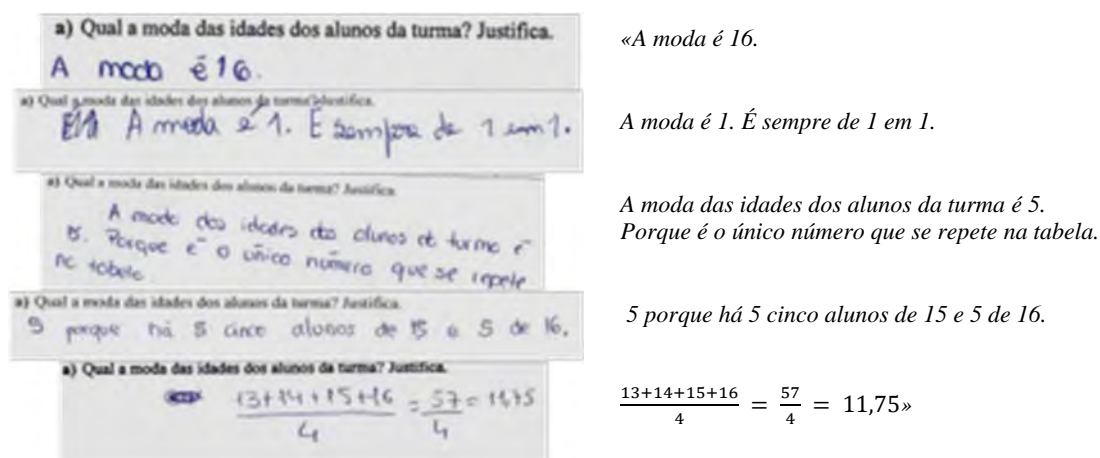
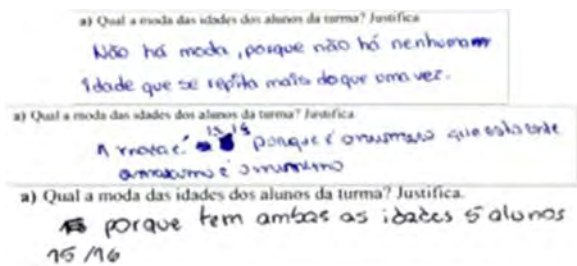


Figura 33 – Resposta dos alunos A277, A4, A159, A115 e A284, respetivamente, à questão 4, alínea 4a

Na primeira resposta, o aluno apresenta dificuldades em distinguir máximo de moda, embora pareça conhecer a noção de valor da variável; na segunda resposta, o aluno revela dificuldades entre moda e escala numérica, manifestando desconhecimento da noção de variável; na terceira e quarta respostas, os alunos manifestam dificuldades em distinguir variável de frequência absoluta, parecem reconhecer que a moda é o valor mais frequente, mas não conseguem, contudo, aplicá-lo corretamente na situação; na última resposta, o aluno revela dificuldade em distinguir a moda da média, embora a tenha identificado erradamente. Na Figura 34 ilustram-se os dois últimos tipos de resposta.



«Não há moda, porque não há nenhuma idade que se repita mais do que uma vez.»

A moda é 14, 15 porque é o número que está entre o máximo e o mínimo

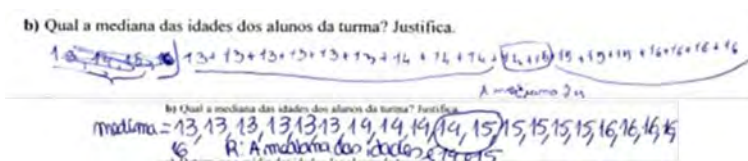
porque tem ambos as idades 5 alunos 15/16»

Figura 34 – Resposta dos alunos A168, A155 e A9, respetivamente, à questão 4, alínea 4a

Na primeira resposta, o aluno parece não conseguir interpretar os dados organizados em tabela, pois não relaciona a variável com a respetiva frequência absoluta; na segunda resposta, o aluno revela conhecer que a moda é um valor da variável e que tal valor está associado ao número de repetições desse valor, contudo, não consegue interpretar os dados organizados em tabela; e na terceira resposta, o aluno sabe que a moda é um dos valores da variável, mas associa-o a valores centrais, podendo indiciar alguma confusão com a noção de mediana.

Na alínea 4b os alunos manifestam grandes dificuldades na determinação da mediana, já que 39% não apresenta qualquer resposta e apenas 10% dos alunos responde corretamente (a mediana é 14,5).

Seguidamente apresenta-se a análise das respostas dos alunos incluídas nas categorias parcialmente corretas (11%) e incorretas (40%). As respostas da categoria “parcialmente corretas” classificam-se em dois grupos: um, de resposta correta, sem qualquer justificação (4%); o outro, sem resposta final, mas com os valores centrais identificados (18%). Na Figura 35 apresentam-se duas respostas ilustrativas desta última situação.



«13+13+13+13+13+13+14+14+14+14+14+15+15+15+16+16+16.  
A mediana 29»

mediana = 13,13,13,13,13,13,14,14,14,14,15,15,15,15,16,16,16,16,16  
R: A mediana das idades é 14 e 15»

Figura 35 – Respostas dos alunos A19 e A15, respetivamente, à questão 4, alínea 4b

As respostas evidenciam que os alunos reconhecem a necessidade de ordenar os dados para se determinar a mediana. No entanto, depois de realizada esta ação, não aplicam corretamente a definição. Na primeira resposta, o aluno parece revelar alguma confusão entre moda e média; na segunda, o aluno revela desconhecer a forma como se determina o valor central, a mediana. Em ambas as respostas, os alunos identificam os

dois valores centrais, visto tratar-se de uma série com um número par de dados, mas não determinam a sua média, que seria o valor da mediana pretendida.

Em relação às respostas “incorretas”, a maioria dos alunos responde com um valor errado sem qualquer justificação (48%). As restantes respostas revelam confusão entre a noção de mediana e os conceitos de: dados organizados (6%), moda (4%), média (3%), máximo (1%), mínimo (7%), amplitude (1%) e frequência absoluta (8%).

Nas Figura 36 e 37 apresentam-se respostas ilustrativas destas situações.

b) Qual a mediana das idades dos alunos da turma? Justifica.

4 5 6 13 14 15 16  
 $6 + 13 : 2 = 12,5$

b) Qual a mediana das idades dos alunos da turma? Justifica.

~~16 - 13 = 3~~

b) Qual a mediana das idades dos alunos da turma? Justifica.

4, 5, 5, 6  
 $\frac{55}{4} = 13,75$

Qual a mediana das idades dos alunos da turma? Justifica.

A mediana é 14,5

13 14 15 16  
 $\frac{14+15}{2} = 14,5$

A mediana é 14,5  $\frac{13+15}{2} = 14,5$

Figura 36– Respostas dos alunos A73, A155, A166 e A209, respetivamente, à questão 4, alínea 4b

Na primeira resposta, o aluno revela ter a noção de mediana, mas aplica-a erradamente ao ordenar todos os valores que constam na tabela, como se estes fossem dados simples, ignorando as frequências com que cada um desses valores aparece. Já na segunda resposta o aluno determinou a amplitude da amostra em vez da mediana. Na terceira resposta, o aluno mostra confundir a mediana com a média, considerando tratar-se de dados simples e, conseqüentemente, ignorando a repetição desses dados. Por fim, na última resposta, o aluno revela ter noção de mediana, sem ter em conta a frequência absoluta.

b) Qual a mediana das idades dos alunos da turma? Justifica.

é o 15 e o 16, porque é o número de idades que se repete.

b) Qual a mediana das idades dos alunos da turma? Justifica.

$6+4+5+5=20$   
 $20:4=5 \rightarrow$  mediana

b) Qual a mediana das idades dos alunos da turma? Justifica.

$\frac{13+6+14+4+15+5+16+5}{4} = 72,25$

b) Qual a mediana das idades dos alunos da turma? Justifica.

16 pois é o valor máximo.

b) Qual a mediana das idades dos alunos da turma? Justifica.

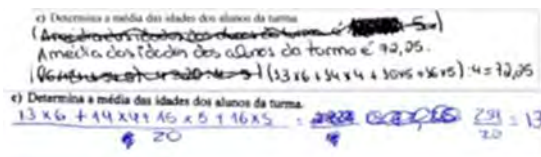
A mediana das idades dos alunos da turma é 14 anos, porque tem o menor n.º de alunos.

Figura 37 – Respostas dos alunos A135, A123, A139, A132 e A171, respetivamente, à questão 4, alínea 4b

Nas duas primeiras respostas, os alunos revelam ter a noção de moda, sentindo dificuldade em distinguir moda de mediana. Na segunda resposta o aluno, em vez de mediana, determina a média das frequências correspondentes aos valores da variável.

Também na terceira resposta o aluno determina erradamente a média em vez de determinar a mediana. Na quarta resposta, o aluno confunde as noções de mediana e de máximo. Na quinta resposta o aluno parece desconhecer a noção de mediana, já que refere um valor errado, justificando-o com o mínimo valor da frequência.

Na alínea 4c constata-se que existem 60 (18%) respostas corretas, um aumento em relação à alínea anterior, e que 115 (35%) alunos não respondem. Das restantes respostas, 130 (39%) pertencem à categoria “incorreta” e 27 (8%) são da categoria “parcialmente correta”. Analisando as respostas desta categoria verificam-se que (17%) apresentam dois tipos de falhas: na primeira situação, os alunos (7%) apenas determinam a soma dos valores das idades e, depois disso, ou abandonam a resolução ou dividem esse valor pelo número de valores distintos da variável, cometendo erros de cálculo (10%). Na Figura 38 exemplifica-se uma destas situações.



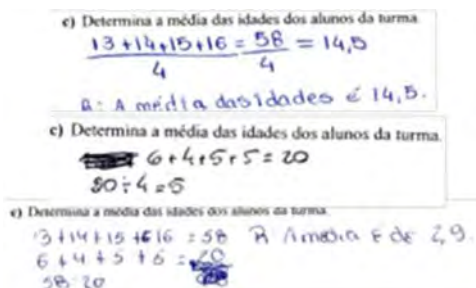
«A média das idades dos alunos da turma +e 72,25.  
(13×6+14×4+15×5+16×5):4 = 72,25

$$\frac{13 \times 6 + 14 \times 4 + 15 \times 5 + 16 \times 5}{20} = \frac{259}{20} = 12,95$$

Figura 38 – Resposta dos alunos A171 e A211 à questão 4, alínea 4c

Na primeira resposta o aluno não considera o número total de alunos, mas sim o número total de valores da variável idade. Na segunda resposta o aluno comete um erro de cálculo na soma das idades dos alunos.

Ainda na alínea 4c, nas respostas incorretas, verificam-se erros de vários tipos. Contudo, aquele que a maioria dos alunos comete (33%) é a atribuição de um valor de entre aqueles que figuram na tabela, sem qualquer justificação. É também muito frequente, um outro tipo de resposta, quando os alunos utilizam apenas: os valores da frequência absoluta (12%); ou os valores da variável (22%); ou tomam a frequência absoluta para designar o número total de alunos (6%). Na Figura 39 ilustram-se estas últimas três situações, com exemplos de respostas incorretas.



$$\frac{13+14+15+16}{4} = \frac{58}{4} = 14,5$$

R: A média das idades é 14,5

$$6+4+5+5 = 20$$

$$20:4 = 5$$

$$13+14+15+16 = 58$$

$$6+4+5+5 = 20$$

$$58:20 = 2,9$$

R: A moda é de 2,9.»

Figura 39 – Respostas dos alunos A155, A168 e A85, respetivamente, à questão 4, alínea 4c

Na primeira resposta, o aluno determina a média dos quatro valores da frequência absoluta correspondentes à frequência das idades dos alunos da turma; desta forma o aluno não implica toda a informação no cálculo de uma média ponderada, e trata-a como numa média simples. Na segunda resposta, o aluno determina a média dos quatro valores distintos da variável; tal como na resposta anterior, ele não usa toda a informação, no cálculo da média ponderada, optando pelo cálculo de média simples, porém com uma diferença na resposta: enquanto aqui são usados os distintos valores da variável, na anterior foram usadas as frequências. Na última resposta, o aluno determina a soma dos quatro valores distintos da variável e determina o número total de alunos, revelando desconhecer a noção de média ponderada. De seguida, divide a soma dos valores da variável pelo número total de alunos, ignorando que o resultado deverá situar-se entre os valores máximo e mínimo das idades dos alunos da turma.

É de referir que dois alunos (0,6%) respondem à alínea 4c com resoluções que não se enquadram em nenhum grupo de respostas referido anteriormente. Na Figura 40 ilustram-se esses tipos de respostas.

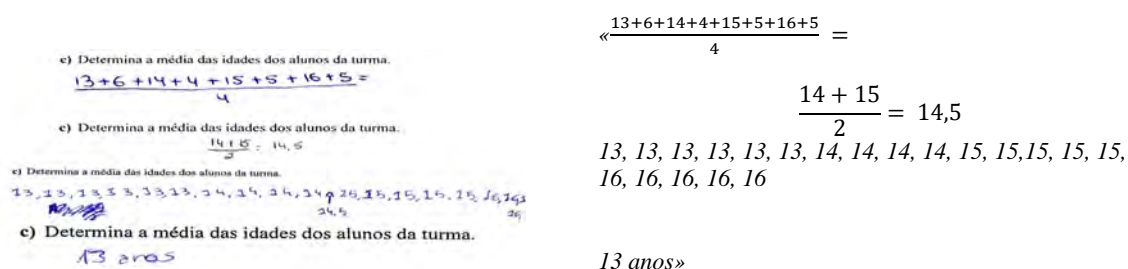


Figura 40 – Respostas dos alunos A36, A67, A275 e A279, respetivamente, à questão 4, alínea 4c

Na primeira resposta, o aluno revela dificuldades em aplicar a noção de média ao adicionar os valores da variável com a respetiva frequência absoluta, quando deveria multiplicá-los e dividi-los, depois, pelo número total de alunos da turma e não pelo número de valores distintos da variável; na segunda e terceira resposta, os alunos confunde a mediana com a média (3%). Na quarta resposta, o aluno revela confusão entre moda e média (3%).

Na alínea 4d constata-se que existem 271 respostas corretas e apenas 28 alunos não respondem à alínea. Das restantes, as respostas parcialmente corretas (6) devem-se ao facto de os alunos apresentarem corretamente apenas um dos valores pedidos (a idade máxima ou a idade mínima); e as respostas incorretas (27) apresentam erros que mereceram uma análise mais cuidada. Assim, umas respostas (13) associam o valor máximo e mínimo, respetivamente, ao valor máximo e mínimo da frequência absoluta, enquanto os restantes alunos (14) associam o valor máximo e mínimo da variável idade

correspondente, respetivamente, ao valor máximo e mínimo da frequência absoluta (Figura 41).

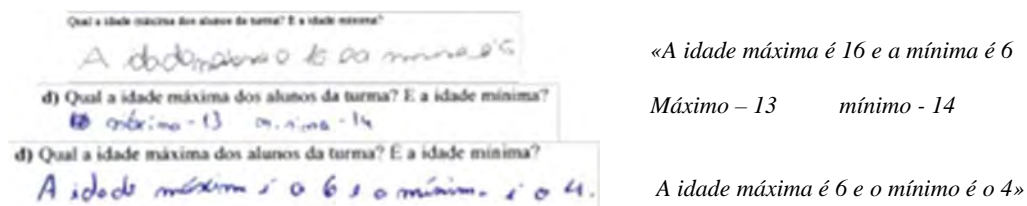


Figura 41 – Respostas dos alunos A156 e A166, respetivamente, à questão 4, alínea 4d

Na primeira resposta, o aluno responde com valores da variável estatística correspondentes, respetivamente, aos valores máximo e mínimo da frequência absoluta; enquanto na segunda, o aluno apresenta os valores máximo e mínimo da frequência absoluta, não os relacionando com os respetivos valores da variável. Embora em ambas respostas os alunos revelem ter a noção de máximo e mínimo, não aplicam corretamente essas noções à situação proposta.

Na alínea 4e constata-se que apenas 49 alunos respondem corretamente e 164 alunos não respondem. Existem ainda respostas parcialmente corretas (71) ou incorretas (48), que se agrupam em três tipos: atender apenas à noção de moda (55%); atender apenas à noção de mediana (5%); registar um (8%) ou mais (19%) valores, de entre os referidos no enunciado, sem referir os valores solicitados (4%) e sem darem qualquer justificação (8%); e ainda aqueles que determinam a média das idades referidas no enunciado (1%). Na Figura 42 ilustram-se, com exemplos, os diferentes tipos das respostas referidas.

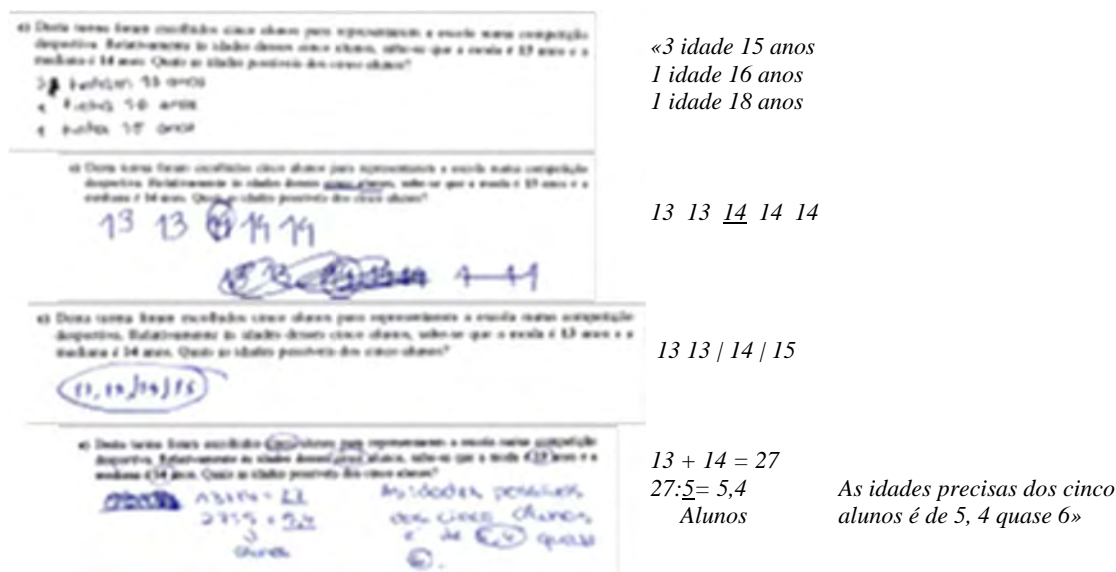


Figura 42 – Respostas dos alunos A155, A15, A166 e A197, respetivamente, à questão 4, alínea 4e



Na primeira resposta, o aluno revela dificuldade em conjugar os conceitos de moda e de mediana, optando por atender apenas à moda, ignorando a mediana e usando outras idades referidas no enunciado para representar os cinco alunos solicitados.

Na segunda resposta, o aluno revela dificuldade em articular os conceitos de moda e de mediana, optando, neste caso, por atender apenas à mediana e considerando apenas os valores referidos no enunciado da alínea.

Na terceira resposta, o aluno faz uma tentativa para responder à alínea, mas considera apenas quatro idades. Parece reconhecer a noção de moda, mas não a evidencia plenamente

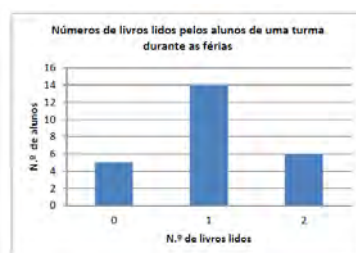
Finalmente, na quarta resposta, o aluno determina a média dos valores apresentados no enunciado, talvez por ser a única medida de localização central que não era referida no enunciado.

Globalmente, na questão 4 que os alunos apresentam um ID baixo (0,33), sendo por isso classificada como difícil.

#### 4.1.5. Análise das respostas e raciocínios na questão 5

Incluída no grupo temático Estatística, a questão 5, em que se apresentam os dados organizados num gráfico, tem por objetivo confrontar o aluno com a sua capacidade de leitura de dados neste contexto. Nesta questão avalia-se também a competência do aluno para identificar e/ou aplicar os conceitos associados aos dados organizados num gráfico de barras: moda, média, mediana, mínimo e máximo.

5. No gráfico seguinte está representada a distribuição do número de livros lidos durante as férias pelos alunos de uma turma.



- Indica a variável em estudo e os valores que ela toma.
- Qual a mediana do número de livros lidos pelos alunos nas férias? Justifica.
- Qual o número médio de livros lidos pelos alunos nas férias.
- Qual o número mínimo de livros lidos pelos alunos nas férias? E o número máximo?
- No final do primeiro período entrou um novo aluno para a turma. Com a entrada do novo aluno a média do número de livros lidos pelos alunos da turma passou a ser **exatamente de 1 livro**. Quantos livros leu esse novo aluno durante as férias? Justifica.

Figura 43 – Enunciado da questão 5 proposta aos alunos

Na Tabela 7 encontram-se registados, em termos de frequência absoluta e em percentagem, os tipos de respostas apresentadas pelos alunos em cada uma das alíneas desta questão, segundo as categorias: correta, parcialmente correta e incorreta. Além dos diferentes tipos de resposta, apresentam-se também as frequências de não respostas.

Tabela 7 – Tabelas de frequências absolutas (%) dos tipos de respostas nas alíneas da questão 5 e respetivo ID

| Tipos de respostas   | Alíneas  |          |          |          |          |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                      | a        | b        | c        | d        | e        |
| Correta              | 43 (13)  | 40 (12)  | 40 (12)  | 175 (53) | 19 (6)   |
| Parcialmente correta | 85 (26)  | 79 (23)  | 4 (1)    | 51 (15)  | 34 (10)  |
| Incorreta            | 44 (13)  | 55 (17)  | 160 (48) | 47 (14)  | 72 (22)  |
| Não resposta         | 160 (48) | 158 (48) | 128 (39) | 59 (18)  | 207 (62) |
| ID                   | 0,13     | 0,12     | 0,12     | 0,53     | 0,06     |

Analisando a Tabela 7, conclui-se que a categoria “não responde” apresenta a maior frequência nas alíneas 5a, 5b, 5c e 5e. Os alunos apresentam mais dificuldades nas alíneas 5a, 5b, 5c e 5e, dado que a maioria dos alunos ( $13 + 48 = 63\%$ ,  $17 + 48 = 65\%$ ,  $48 + 39 = 87\%$  e  $22 + 62 = 84\%$ , respetivamente) não apresenta nenhum resultado correto, e, destes, 48%, 48%, 39% e 62%, respetivamente, não apresenta qualquer resposta.

Face aos resultados observados na questão 5, pode concluir-se que a maioria dos alunos manifesta dificuldades em identificar a variável e os seus valores (ID= 0,13) e em determinar a média (ID= 0,12) e mediana (ID=0,12), e também em justificar as suas respostas. A alínea 5e, com ID= 0,06, revela-se a mais difícil deste conjunto de alíneas.

Seguidamente fez-se uma análise, por alínea, das respostas parcialmente corretas e das incorretas, procurando caracterizar os tipos de erros cometidos.

No caso da alínea 5a foram alvo de uma análise mais profunda 129 respostas com imprecisões. Na categoria “incorretas” (13%) destacam-se os seguintes tipos de resposta: atribuição do valor da variável com maior frequência absoluta (15%); atribuição do valor máximo da variável (2%); designação da variável dependente/independente (3%); atribuição da maior frequência absoluta ao valor da variável (5%); identificação de frequência absoluta como variável em estudo (8%); número de valores distintos que a variável toma (2%). Na Figura 44 apresentam-se exemplos destes tipos de resposta.

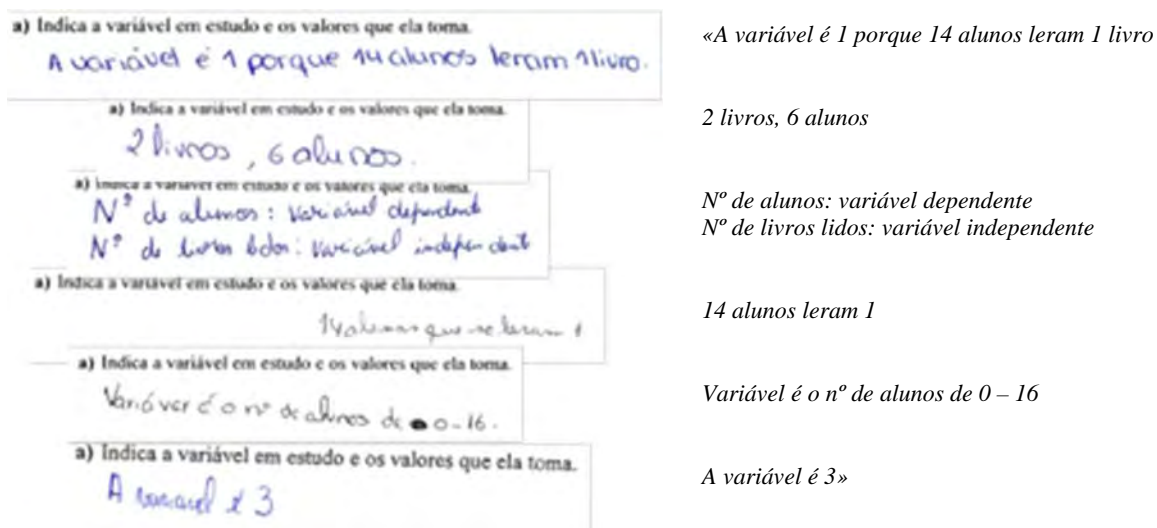


Figura 44 – Respostas dos alunos A138, A147, A166, A174, A84 e A311, respetivamente, à questão 5, alínea 5a

Analisando as respostas de cada um dos alunos, conclui-se que: na primeira, o aluno refere o valor da variável com maior frequência absoluta, revelando confundir a noção de variável e de moda; na segunda, o aluno refere o valor máximo da variável, o que sugere confusão entre a noção de variável e a de máximo; na terceira, o aluno refere as variáveis dependente e independente, relativas aos respetivos eixos coordenados, interpretando o gráfico numa perspetiva funcional; na quarta, tal como na primeira, o aluno refere o valor da frequência absoluta mais elevado e o correspondente valor da variável, sem indicar, neste caso, o que seria a variável; na quinta, o aluno revela dificuldades em identificar a variável em estudo ao tomar a frequência absoluta, destacando como seus valores a escala do eixo; na sexta, o aluno revela dificuldade na interpretação do enunciado, já que considera “quantos valores a variável toma” e não “que valores a variável toma”.

Analisando as respostas “parcialmente corretas” (26%) verifica-se que elas estão incompletas, sendo catalogáveis em três tipos: identificação apenas da variável (42%); identificação apenas dos valores da variável (19%); confusão da variável com valores da frequência absoluta (4%). Na Figura 45 ilustram-se, com exemplos, algumas destas respostas.

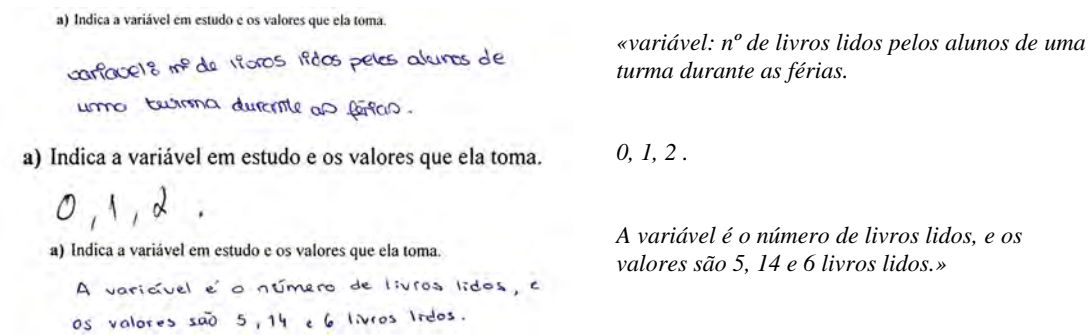
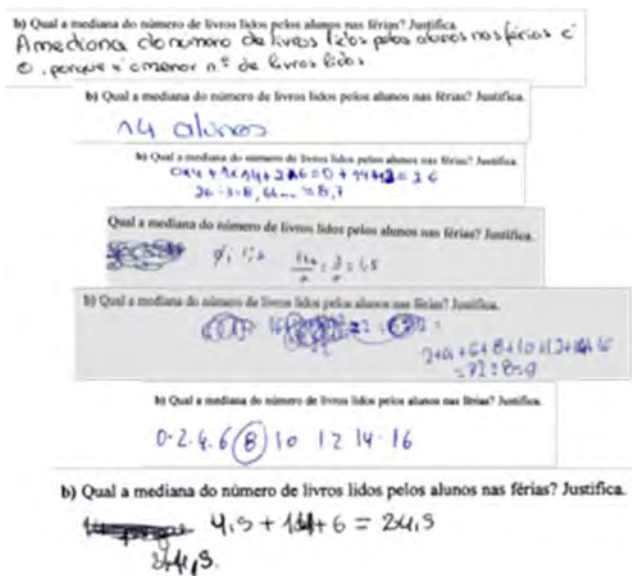


Figura 45 – Respostas dos alunos A36, A92 e A150, respetivamente, à questão 5, alínea 5a

Da análise destas respostas conclui-se: na primeira, o aluno identifica corretamente a variável em estudo, mas omite os valores que a variável toma, não completando a resposta; na segunda, o aluno não a completa, pois, embora identifique os valores que a variável toma, não identifica a variável em estudo; na terceira, o aluno evidencia dificuldades em identificar os valores da variável, indicando as frequências absolutas correspondentes a esses valores em vez dos próprios valores.

No caso da alínea 5b obtiveram-se 134 respostas com imprecisões (40%), relativas às categorias “incorreta” e “parcialmente correta”, as quais foram alvo de uma análise mais aprofundada. Na categoria “incorreta” destacam-se os seguintes tipos de resposta: atribuição de apenas um dos valores da variável (0 ou 2, cuja percentagem é 13% e 6%, respetivamente); atribuição do valor da frequência absoluta como sendo um valor da variável (10%); atribuição do valor da média (4%); determinação da mediana sem atender à frequência absoluta (3%); determina a média dos valores do eixo vertical (1%); determina a mediana dos valores do eixo vertical (2%); atribui o valor da mediana à soma das frequências absolutas (1%). Na Figura 46 apresentam-se exemplos de respostas dos tipos antes referidos.



«A mediana do número de livros lidos pelos alunos nas férias é 0, porque é o menor n.º de livros lidos.

14 alunos

$$0 \times 4 + 1 \times 14 + 2 \times 6 = 0 + 14 + 12 = 26$$

$$26 \div 3 = 8,66... \approx 8,7$$

$$\phi; 1; 2 \quad \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$2+4+6+8+10+12+14+16$$

$$= 72 : 8 = 9$$

0 . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16

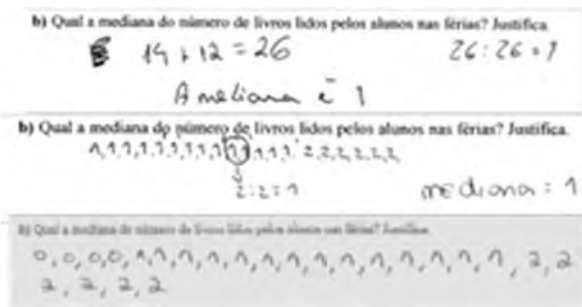
$$4,5 + 14 + 6 = 24,5$$

$$24,5$$

Figura 46 – Respostas dos alunos A171, A35, A123, A156, A272, A270 e A307, respetivamente, à questão 5, alínea 5b

Da análise das respostas, constata-se que: na primeira, o aluno relaciona a mediana com o menor valor da variável, mostrando assim não saber a noção de mediana; na segunda, o aluno evidencia dificuldades em aplicar essa mesma noção, assumindo-o como o valor máximo da frequência absoluta; na terceira, o aluno revela confundir a noção de mediana e de média, mas comete erros; na quarta, o aluno mostra conhecer que, para determinar a mediana, os dados devem ser ordenados, mas considera apenas os valores da variável, não tendo em conta a respetiva frequência absoluta, e não tem em conta o número ímpar de dados que considera; na quinta, o aluno determina a média dos valores do eixo vertical; na sexta resposta, o aluno determina a mediana dos valores do eixo vertical; na sétima, o aluno revela dificuldades na identificação dos valores da variável e no conceito de mediana, já que apresenta a soma dos valores da frequência absoluta, embora com um deles errado (designou 4,5 em vez de 5).

Nas respostas “parcialmente corretas” verifica-se que o valor da mediana está correto, mas sem qualquer justificação, ou incorreto. Seguidamente agruparam-se as respostas em quatro tipos: indicação apenas do valor da mediana (42%); identificação da mediana, mas com justificação incorreta (9%); identificação da mediana com os valores da frequência absoluta (6%); ordenação dos valores da variável, mas sem evidenciar o valor da mediana (3%). Na Figura 47 apresentam-se três exemplos destas respostas.



«14 + 12 = 26                      26:26 = 1  
A mediana é 1

1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2  
2:2 = 1                      mediana=1

0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2»

Figura 47 – Respostas dos alunos A28, A161 e A267, respectivamente, à questão 5, alínea 5b

Na primeira resposta, o aluno determina, erradamente, o número total de alunos da turma, parecendo confundir a noção de mediana com a noção de média. Na segunda resposta, parcialmente correta, o aluno indica corretamente o valor da mediana, contudo, na sua determinação não considera todos os dados. Na terceira, o aluno reconhece que na determinação da mediana os valores da variável têm que estar ordenados, porém desconhece outros atributos da noção de mediana.

Na alínea 5c obtiveram-se apenas 4 (1%) respostas da categoria “parcialmente correta” e ocorreram 160 (48%) respostas da categoria “incorreta”. Estas duas categorias foram alvo de uma análise mais aprofundada. Na primeira categoria observa-se apenas um tipo de resposta: determinação da média com erro de cálculo no número total de alunos (2%). Na Figura 48 apresenta-se um exemplo.

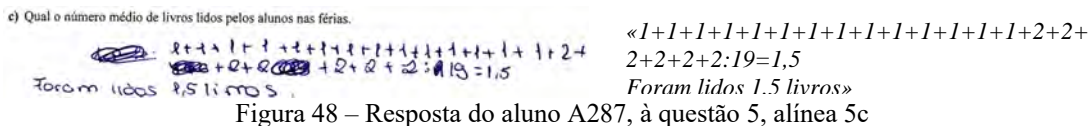


Figura 48 – Resposta do aluno A287, à questão 5, alínea 5c

A resposta revela que o aluno sabe determinar a média, mas erra no cálculo do número total de alunos, revelando dificuldade na análise do gráfico.

Na categoria “incorreta”, as respostas permitiram criar dois grupos: as que apresentam justificação; e as restantes. Relativamente ao primeiro grupo, realça-se que as justificações apresentadas pelos alunos corroboram as respostas dadas. Assim, nos vários tipos de resposta constam: determinação da média das frequências absolutas (2%); determinação da média, considerando o número total de valores distintos da variável (4%); determinação da média sem atender à frequência absoluta dos valores da variável (9%); determinação da média, ignorando que o zero é o elemento absorvente (4%); determinação da média, ignorando o conceito de média ponderada (5%); determinação da média dos valores do eixo vertical (1%); determinação da média, ignorando a existência do valor zero (6%). Saliente-se que este último tipo de erro já surgiu na questão 4, alínea 5c. Na Figura 49 ilustram-se, com exemplos, as situações referidas.



ao máximo e mínimo com a frequência absoluta; 20% apresenta corretamente o máximo e o mínimo com o valor 1; 24% apresenta o mínimo corretamente e o máximo com o valor 1; 13 % apresenta apenas o valor da frequência absoluta do valor 0 da variável. Na Figura 50 apresentam-se exemplos destes tipos de resposta.



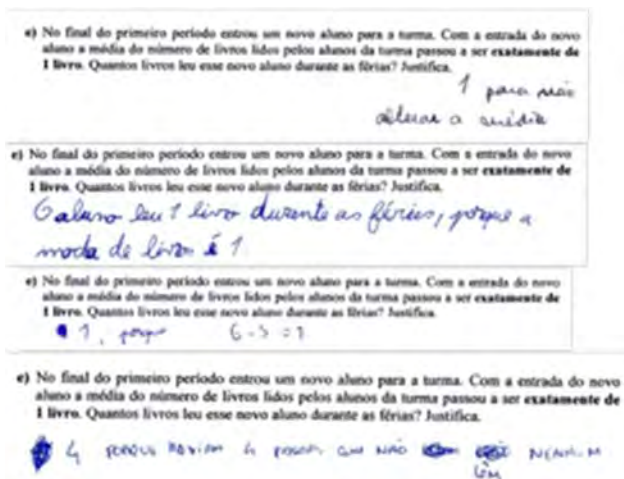
Figura 50 – Respostas dos alunos A129, A156 e A100, respetivamente, à questão 5, alínea 5d

Na primeira resposta, o aluno reconhece que o máximo e o mínimo são valores da variável, no entanto ignora o valor zero da variável. Na segunda, o aluno não recorre aos valores da variável, identificando o valor máximo e o valor mínimo das frequências absolutas dos valores da variável. Na última, o aluno mostra conhecer que as noções de máximo e mínimo estão relacionadas com o valor da variável, sendo possível que o máximo indicado corresponda ao valor da variável com maior frequência absoluta.

Por último, analisaram-se as respostas da alínea e), em que 34 (10%) delas são da categoria “parcialmente correta” e 72 (22%) da categoria “incorreta”. Na categoria “incorreta” criaram-se dois grupos de respostas: um, com justificação; outro, com as restantes.

Relativamente ao primeiro grupo, as justificações apresentadas pelos alunos corroboram as respostas dadas (11%), enquanto 8% apresentam a resposta “foi 1 livro”. Nas respostas apresentadas verifica-se: preocupação de não alterar a média (2%); confusão entre moda e média (3%); tentativa de igualar os valores absolutos mais baixos (2%); tentativa de reduzir a frequência absoluta do valor 0 da variável (2%). Na Figura 51 ilustram-se, com exemplos, as situações referidas.





«1 para não alterar a média

O aluno leu 1 livro durante as férias, porque a moda de livros é 1.

1, porque  $6-5=1$

4 porque haviam 4 pessoas que não leram nenhum»

Figura 51 – Respostas dos alunos A13, A100, A101 e A6, respetivamente, à questão 5, alínea 5c

Na primeira resposta, o aluno parece basear-se no erro cometido na determinação da média na alínea 5c ao ignorar as frequências absolutas dos valores da variável na determinação da média, obtendo assim a média desses valores. Na segunda, o aluno atribui à moda o valor que a média deverá tomar, obtendo, desse modo, a resposta à pergunta. Na terceira, o aluno revela que as frequências absolutas dos valores das variáveis 0 e 2 são aquelas que apresentam frequências absolutas mais baixas e que a diferença entre elas é 1, donde tal valor igualaria as duas frequências absolutas, ficando cada um dos valores da variável com 6 observações. Na última resposta, a quarta, o aluno revela conhecer a noção de média, ao pretender que o novo aluno leia o número de livros por forma a compensar aqueles que não leram nenhum; no entanto, comete o erro de leitura do gráfico, ao referir 4 e não 5, e não tem em conta que há 6 alunos que leram 2 livros.

Relativamente ao segundo grupo, os alunos indicaram um determinado número de livros, sem apresentarem qualquer justificação: 1 livro (20%); 2 livros (12%); e 14 livros (8%), que é o número correspondente à maior frequência absoluta. Já as respostas incluídas na categoria “parcialmente corretas” apresentam o valor pretendido sem justificação para suportar a resposta (15%) ou apresentam justificação correta e omitem o valor pedido (17%).

Em termos gerais, pode inferir-se que os alunos sentem dificuldades em identificar a variável e os respetivos valores, já que há alunos que as confundem com máximo, variável dependente/independente e com a moda. Em relação à noção de moda, média e mediana, e à sua aplicação a dados organizados em suporte gráfico, os alunos manifestam dificuldade tanto na definição como na sua aplicação, pois algumas das respostas demonstram confusão entre os três conceitos. Salienta-se que os alunos não erram apenas

na interpretação dos valores registados e organizados no gráfico, confundem também o valor da variável com o da frequência absoluta, a média e a mediana e o valor “0 livros” da amostra causou muitos problemas, já que as respostas realçam dificuldades na sua operacionalização e na sua inclusão como dado da amostra.

Globalmente, nesta questão os alunos apresentam um ID=0,19, que é inferior a 0,25, pelo que a questão é classificada como muito difícil. Nesta questão, apenas a alínea d apresenta uma dificuldade média, com ID= 0,53, enquanto nas restantes se registam ID muito baixos, classificando-se como muito difíceis.

#### 4.1.6. Análise das respostas e raciocínios na questão 6

A última questão do teste diagnóstico, questão 6, foi proposta com o objetivo de avaliar a capacidade do aluno de leitura dos dados a partir de um gráfico circular. Na questão avalia-se a competência do aluno em identificar ou aplicar os seguintes conceitos associados: variável, moda, mediana, frequência absoluta e frequência relativa.

6. O número de irmãos dos alunos de uma turma distribuiu-se de acordo com o seguinte diagrama circular.

Distribuição do número de irmãos dos alunos de uma turma

| Número de Irmãos | Frequência Relativa (%) |
|------------------|-------------------------|
| 0 irmãos         | 30%                     |
| 1 irmão          | 60%                     |
| 2 irmãos         | 10%                     |

a. Qual é a variável em estudo?  
 b. Qual a moda do número de irmãos dos alunos da turma? Justifica.  
 c. Qual a mediana do número de irmãos dos alunos da turma? Justifica.  
 d. Calcula a percentagem de alunos da turma que têm **pelo menos** 1 irmão.  
 e. Indica um valor possível para o número de alunos da turma com **exatamente 1 irmão**, sabendo que o número total de alunos da turma é superior a 14 e inferior a 21.

Figura 52 – Enunciado da questão 6 proposta aos alunos

Na Tabela 8 encontram-se os tipos de respostas apresentadas pelos alunos, em frequência absoluta e em percentagem, a cada uma das alíneas desta questão.

Tabela 8 – Tabela de frequências absolutas (%) dos tipos de respostas nas alíneas da questão 6 e respetivo ID

| Tipo de Respostas    | Alíneas  |          |          |          |          |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
|                      | a        | b        | c        | d        | e        |
| Correta              | 94 (28)  | 111 (33) | 18 (6)   | 102 (31) | 11 (3)   |
| Parcialmente correta | 44 (13)  | 131 (40) | 80 (24)  | 0 (0)    | 33 (10)  |
| Incorreta            | 44 (13)  | 28 (8)   | 60 (18)  | 113 (34) | 61 (18)  |
| Não resposta         | 150 (45) | 62 (19)  | 174 (53) | 117 (35) | 227 (69) |
| ID                   | 0,28     | 0,33     | 0,06     | 0,31     | 0,03     |

Analisando a tabela (Tabela 8), conclui-se que a categoria “não resposta” é a mais frequente nas alíneas 6a, 6c, 6d e 6e. Os alunos apresentam mais dificuldades nas alíneas 6a, 6c, 6d, 6e (58%, 71%, 69% e 87%, respetivamente), dado que a maioria dos alunos apresentou nessas alíneas uma resposta “incorreta” ou “não resposta”. De entre estas duas categorias, salientam-se ainda as elevadas percentagens de não respostas às alíneas 6a, 6c, 6d e 6e, respetivamente, 45%, 53%, 35% e 69%.

Face aos resultados observados na questão 6, cujos dados são apresentados através de gráfico circular, pode-se concluir que a maioria dos alunos tem dificuldades em identificar a variável estatística, a moda e a mediana, e em justificar as suas respostas.

Tendo em conta os ID das diversas alíneas, verifica-se que se classifica em difícil nas alíneas 6a, 6b e 6d, com  $0,25 < ID < 0,44$ , e em “muito difícil” nas duas alíneas restantes, 6c e 6e, com ID quase nulo.

De seguida fez-se uma análise, por alínea, das respostas “parcialmente corretas” e “incorretas”, procurando aprofundar os erros e dificuldades dos alunos.

Na alínea 6a observaram-se 44 (13%) respostas “parcialmente corretas” e 44 (13%) respostas “incorretas”. Na categoria “parcialmente correta” destaca-se um único tipo de resposta: “distribuição do número de irmãos dos alunos da turma” (50%), o que revela dificuldades na compreensão da noção de variável. Adicionalmente, parece que estes alunos se focaram no título do gráfico.

Na categoria “incorreta” há vários tipos de respostas, que permitiram construir oito grupos: indica o valor da moda (8%); indica o máximo (13%); indica o mínimo (8%); designa variável independente (3%); refere apenas a palavra “irmão” (6%); indica 60% no valor da frequência relativa (8%); indica os valores da variável (3%). Na Figura 53 apresentam-se cinco respostas, de outros tantos alunos, que refletem os primeiros tipos de resposta.

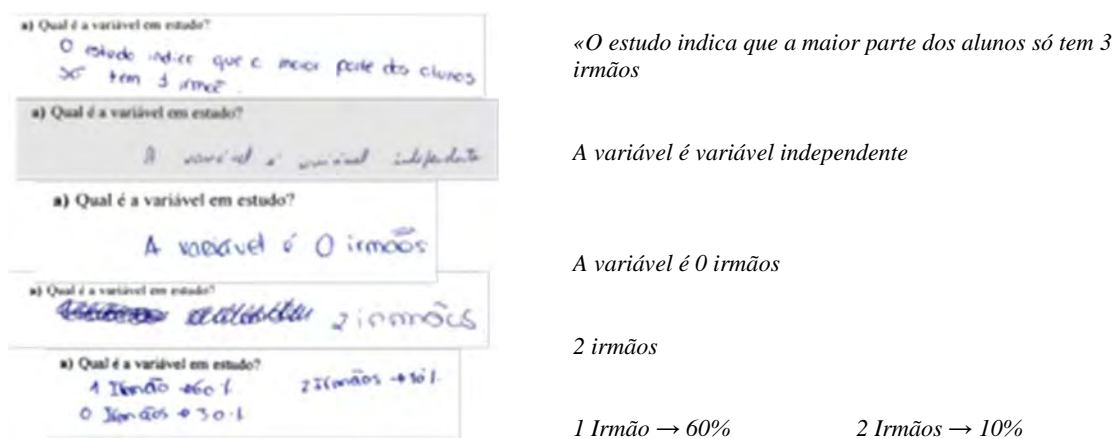


Figura 53 – Resposta dos alunos A159, A139, A112, A147 e A201, respetivamente, à questão 6, alínea 6a

Na primeira resposta o aluno revela desconhecer a noção de variável, já que a considera como sendo o valor da variável que apresenta maior percentagem, confundindo os conceitos de moda e variável. Na segunda resposta o aluno parece ter relacionado esta pergunta com a outra temática de estudo, as Funções, ao adotar a designação de “variável independente”. Na terceira e quarta respostas é clara a confusão entre as noções de máximo/mínimo e de variável: na primeira, o aluno indica o valor mínimo da variável, enquanto na segunda indica o seu valor máximo. Na última resposta, o aluno indica as percentagens dos valores da variável, não identificando a variável em estudo.

No caso da alínea 6b verifica-se um total de 131 (40%) respostas “parcialmente corretas” e 28 (8%) respostas “incorretas”, cuja análise mais detalhada se apresenta de seguida. Na categoria de resposta “parcialmente correta” constata-se que todas as respostas são do mesmo tipo: referem apenas que a moda é “1 irmão”, sem qualquer justificação (70%) ou com justificação incorreta (13%). Relativamente à categoria de resposta “incorreta”, destacam-se dois tipos de resposta: aquela em que refere a moda como sendo 0 irmãos (1%) ou 2 irmãos (8%) e outra em que se refere 60% como moda (1%), identificando-se, assim, a moda com o valor da frequência em vez do valor correspondente da variável.

Ao analisar as respostas da alínea 6c, verifica-se que 80 (24%) dessas respostas são “parcialmente corretas” e 60 (18%) são “incorretas”. No caso das respostas “parcialmente corretas”, os alunos apresentam respostas corretas sem referirem qualquer justificação (43%) ou com justificação incorreta (14%).

Na categoria “incorreta” as respostas agruparam-se da seguinte forma: “a mediana é 2 irmãos” (17%); “a mediana é 0 irmãos” (12%); “a mediana é 30%” (3%); “a mediana é 60%” (1%) sem qualquer justificação. Na Figura 54 apresentam-se exemplos destes tipos de respostas.

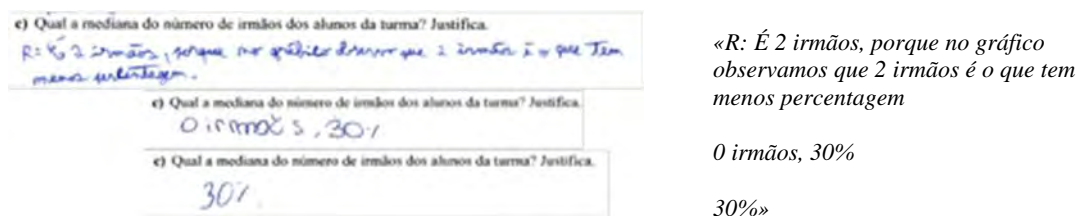


Figura 54 – Respostas dos alunos A79, A147 e A179, respetivamente, à questão 6, alínea 6c

Na primeira resposta o aluno mostra saber que a mediana está associada ao valor da variável, mas revela confusão entre os conceitos de variável, mediana e mínimo, já que a frequência relativa é apontada como sendo ela a definir a mediana. No caso das duas últimas respostas, pode-se conjecturar que o valor 30% resultou da seleção do valor central

da série ordenada dos valores das percentagens, tendo um dos alunos indicado o valor correspondente da variável e o outro a própria percentagem.

Ainda neste tipo de respostas, há alunos (10%) que referem um outro valor diferente dos já destacados. Na Figura 55 apresentam-se quatro exemplos de respostas deste tipo.

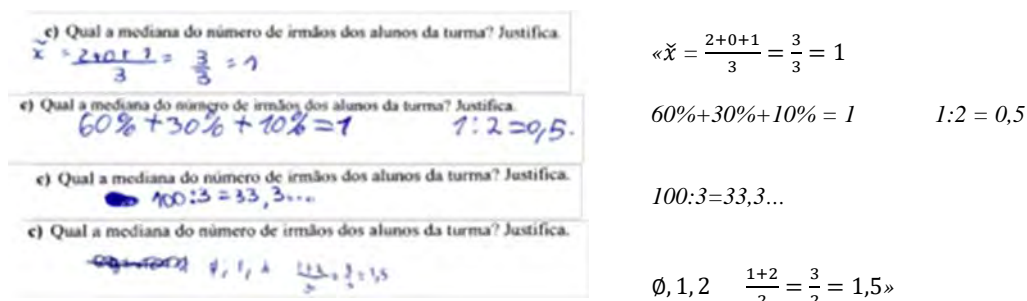
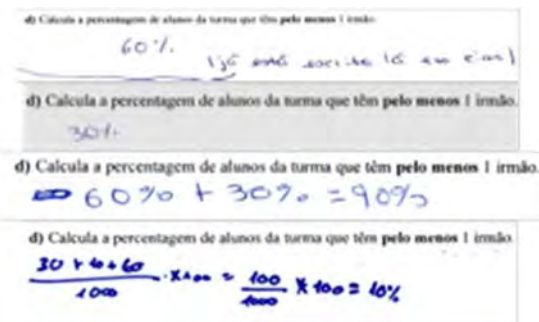


Figura 55 – Respostas dos alunos A34, A100, A123 e A156, respetivamente, à questão 6, alínea 6c

Na primeira resposta o aluno revela claramente que confunde média com mediana, muito embora o cálculo da média esteja errado, ao considerar apenas os valores da variável e ignorando as suas frequências. O aluno, na segunda resposta, revela um raciocínio, com vários erros: comete um erro de cálculo na soma das percentagens e, de seguida, obteve 0,5, que poderia ser interpretado como sendo 50% desta soma, remetendo para a mediana. Assim, o aluno revela desconhecer que a mediana está associada a valores da variável, evidenciando dificuldades nos dois conceitos. Na terceira resposta, o aluno reconhece que a soma das frequências relativas é 100%, parecendo confundir a noção de mediana com a de média, embora esta última pareça estar mal assimilada, já que se recorre às frequências e não aos valores da variável. Na última resposta, o aluno demonstra saber que a mediana está relacionada com a variável e que os dados da amostra têm que ser ordenados, mas desconhece que a mediana tem que ter em conta a frequência de cada um dos valores. Em alternativa, o aluno poderá ter determinado a média dos valores da variável, excluindo o zero.

No caso da alínea 6d observa-se um total de 113 (34%) respostas “incorretas. Nestas respostas, a maioria (70%) centra-se no facto de os alunos escreverem simplesmente 60% e não somarem as duas percentagens  $60+10\% = 70\%$ . Pela justificação de alguns alunos (7%), pode-se presumir que existe dificuldade na interpretação da expressão “pelo menos 1 irmão”. As restantes respostas dos alunos foram reunidas em cinco grupos: resposta 90% (6%); resposta 10% sem justificação (5%); resposta 10% com justificação (4%); resposta 30% (2%). Há ainda respostas que não se enquadram em nenhum dos tipos anteriores (6%). Nas Figuras 56 e 57 ilustram -se, com exemplos, algumas das respostas referidas.



«60% (já está escrito lá cima)

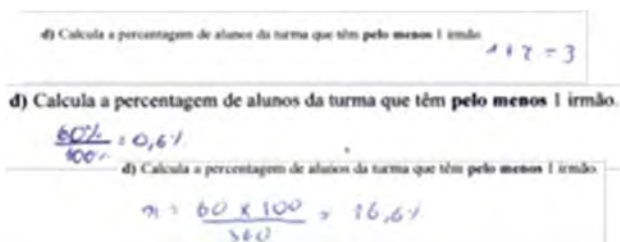
30%

$60\% + 30\% = 90\%$

$\frac{30 + 10 + 60}{1000} \times 100 = \frac{100}{1000} \times 100 = 10\%$ »

Figura 56 – Respostas dos alunos A40, A87, A32 e A132, respetivamente, à questão 6, alínea 6d

Na primeira resposta o aluno revela desconhecer o significado de “pelo menos”, identificando apenas uma das percentagens possíveis. As respostas dos dois alunos seguintes, embora diferentes, parecem querer revelar que ambos associam “pelo menos” ao “no máximo”, já que ambos incluem a percentagem 30% correspondente no gráfico circular ao valor 0 da variável. Na última resposta o aluno obtém 10%, determinando a soma das percentagens, aparentemente para determinar uma percentagem (pelo produto entre a frequência relativa por 100), e baralhando as noções de permilagem (atendendo ao denominador) e de percentagem.



« $1+2=3$

$\frac{60\%}{100\%} = 0,6\%$

$x = \frac{60 \times 100}{360} = 16,6\%$ »

Figura 57 – Respostas dos alunos A58, A151 e A131, respetivamente, à questão 6, alínea 6d

Na primeira resposta o aluno parece desconhecer como determinar a percentagem solicitada, revelando conhecer o significado de “pelo menos”. Na segunda resposta o aluno tenta relacionar a parte (percentagem de 1 irmão) com o todo (100%), mas não discute o resultado final, levando a pensar que o aluno tem dificuldades em trabalhar a frequência relativa, que é o valor que ele obteve. Por fim, o aluno parece determinar um resultado com recurso à regra de três simples, determinando a percentagem de um setor circular de 60 graus.

Por último, analisaram-se as respostas da alínea 6e, em que se verificaram 33 (10%) respostas “parcialmente corretas” e 61 (18%) respostas “incorretas”, isto para além das 227 (69%) “não respostas”. Nesta alínea esperava-se uma resolução dos alunos em dois passos: primeiro, a atribuição de um valor possível, representativo do número de alunos da turma; segundo, a verificação do valor representativo do número de alunos com um irmão.

Salienta-se que há duas soluções possíveis para o número de alunos com 1 irmão,  $9 = 0,6 \times 15$  ou  $12 = 0,6 \times 20$ , pois para outros valores possíveis não se obtém em valor inteiro. Adicionalmente, para que o problema faça sentido, a turma terá que ter 20 alunos dado que  $10\% \times 15 = 1,5$ . Ora, a maioria dos alunos respondentes (18%) limitou-se a indicar um número, que nem sempre é o correto (91%). As respostas que apenas referem o número total de alunos (15 ou 20), dentro do intervalo referido (9%), ou um valor possível para o número de alunos com 1 irmão (5%), mas sem qualquer fundamentação (3%), enquadram-se na categoria “parcialmente corretas”, enquanto as outras respostas se integram na categoria “incorretas”. As respostas desta última categoria são agrupadas em três grupos: aquelas que conduzem a um valor inteiro; aquelas que correspondem a uma dízima; e aquelas que apresentam uma percentagem. Assim, 18 (19%) alunos apresentaram um resultado que implicaria que a turma tivesse 30 alunos, situando-se fora do intervalo dado; os alunos que referem 6 (3%), 7(6%), 8 (4%), 14 (10%), 16 (10%), 17 (11%) ou 19 (10%) alunos, seja para o número de alunos com um irmão ou para o número de alunos da turma, resulta num valor não inteiro; por fim, os alunos que referem 60% (3%) ou 40% (4%) revelam dificuldade em determinar a frequência absoluta a partir da frequência relativa.

As respostas às duas últimas alíneas revelam que os alunos têm dificuldade em trabalhar os dados tendo por base as suas frequências relativas. Por fim, foi na última alínea que se observou o maior número de não respostas e também foi nessa alínea que as respostas se revelaram menos compreensíveis.

#### 4.1.7. Análise global das respostas

Globalmente, esta questão revelou-se muito difícil, com  $ID = 0,20$ , sendo na alínea e) desta questão que se regista o ID mais baixo, com  $ID = 0,03$ , de entre todas as que se referem ao tema de Estatística.

Da análise do Quadro 15, onde se apresentam os ID de todas as linhas do TD, verifica-se que aquelas com menor ID são: alínea b) ( $ID = 0,02$ ), da Q3; alínea e) ( $ID = 0,06$ ), da Q5 sobre Estatística; e alíneas c) ( $ID = 0,06$ ) e e) ( $ID = 0,03$ ), da Q6 sobre Estatística. Todas estas alíneas apresentam dados sob a forma de gráfico.

Tabela 9 – Índices de dificuldade do TD por alíneas

| Questão | Alíneas |      |      |      |      |       | Global |
|---------|---------|------|------|------|------|-------|--------|
|         | a       | b    | c    | d    | e    | f     |        |
| Q1      | 0,92    | 0,88 | 0,64 | 0,68 | 0,16 | _____ | 0,66   |
| Q2      | 0,93    | 0,73 | 0,64 | 0,58 | 0,18 | 0,23  | 0,55   |
| Q3      | 0,90    | 0,02 | 0,18 | 0,43 | 0,19 | _____ | 0,34   |
| Q4      | 0,39    | 0,10 | 0,18 | 0,82 | 0,15 | _____ | 0,33   |
| Q5      | 0,13    | 0,12 | 0,12 | 0,53 | 0,53 | _____ | 0,19   |
| Q6      | 0,28    | 0,33 | 0,06 | 0,31 | 0,03 | _____ | 0,20   |

Da análise do Tabela 9, de entre todas as líneas, conclui-se que 42% se revelaram muito difíceis; 20% difíceis; 6% de dificuldade média; e 16% fáceis ou muito fáceis (16%). Daqui resulta que, globalmente, o TD se revelou difícil, com ID global de 0,38.

Em termos gerais, as respostas do tema Estatística levam a concluir que os alunos revelaram dificuldades em identificar a moda, já que algumas das respostas demonstram um conhecimento confuso, sendo esse valor considerado como o valor da frequência absoluta ou como o valor máximo da variável em estudo.

Salienta-se, ainda, que nem sempre os alunos interpretam os valores registados e organizados na tabela como já estando organizados, utilizando-os, por isso, como se fossem dados simples. Há ainda a referir que os alunos revelaram mais dificuldades na identificação da moda para dados organizados em gráfico (ID=0,33) do que em tabela (ID=0,41). Também a mediana e a média constituem conceitos que muitos alunos confundem pois, embora evidenciem conhecimentos destes conceitos, sentem dificuldades na sua aplicação. Verificaram-se dificuldades em todas as alíneas envolvendo a mediana, isto é, em 4b (ID=0,10), 5b (ID= 0,12) e 6c (ID=0,06), assim como em todas as alíneas envolvendo a média, ou seja, em 4c (ID=0,18) e 5c (ID=0,12).

Nas próximas secções compararemos o desempenho dos alunos nos temas Funções e Estatística e realizaremos análises semióticas das respostas dos alunos no tema Estatística.

#### 4.2. Relação das dificuldades em Funções, em Estatística e em Funções e Estatística

Nesta secção averigua-se a existência de associação no desempenho dos alunos em Funções (G1), em Estatística (G2) e em Funções e Estatística, por alíneas e por contexto gráfico e tabelar. Para averiguar a existência de associação das dificuldades entre conceitos, entre representações tabelar e gráficas e entre os temas Funções e Estatística aplicou-se o coeficiente V de Cramér (Murteira et al., 2010), e o correspondente teste não paramétrico (onde a hipótese nula é o coeficiente é nulo) para avaliar a significância da associação entre conceitos de Funções (gráfico versus tabelar), de Estatística (gráfico



versus tabular) e de Funções e Estatística. Para cada uma das situações foi reproduzida uma tabela resumo do Anexo IX.

#### 4.2.1. Relação das dificuldades entre conceitos de Funções em contexto gráfico e tabular

Na Tabela 10 apresentam-se os resultados da análise da associação no desempenho das questões sobre Funções, observando-se: 1) maior associação entre alíneas com dados organizados em gráficos ( $V$  Cramér  $< 0,55$ ) do que entre alíneas com dados em representação tabular ( $V$  Cramér  $< 0,47$ ); 2) associação entre dados organizados em tabelas com dados organizados em gráficos ( $V$  Cramér  $< 0,53$ ).

Tabela 10 – Associação, medida pelo coeficiente  $V$  de Cramér, nas respostas entre as questões sobre Funções

|                 |   | Q1<br>(Gráfico) |                 | Q2<br>(Tabela)  |                 |                 | Q3<br>(Gráfico) |                 |
|-----------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|                 |   | a               | e               | a               | b               | e               | f               | a               |
| Q1<br>(Gráfico) | b | <b>0,543***</b> | 0,088           | 0,114           | 0,226**         | 0,043           | 0,125           | 0,162**         |
|                 | b | 0,105           | 0,136*          | <b>0,462***</b> |                 | 0,125           | 0,151**         | 0,292***        |
|                 | c | 0,119           | 0,138*          | <b>0,339***</b> | <b>0,358***</b> | 0,148*          | 0,164**         | 0,198***        |
| Q2<br>(Tabela)  | d | 0,084           | 0,137*          | <b>0,392***</b> | <b>0,354***</b> | 0,132           | 0,134*          | 0,184**         |
|                 | e | 0,064           | 0,370***        | 0,105           | 0,125           |                 | 0,445***        | 0,089           |
|                 | f | 0,137           | <b>0,462***</b> | 0,12            | 0,151**         | <b>0,445***</b> |                 | 0,150*          |
| Q3<br>(Gráfico) | b | 0,137           | 0,137*          | 0,217***        | 0,206***        | 0,166**         | 0,138*          | <b>0,464***</b> |
|                 | e | 0,098           | 0,279***        | 0,085           | 0,115           | <b>0,536***</b> | <b>0,354***</b> | 0,114           |

\*  $0,01 \leq p < 0,05$ ;

\*\*  $0,001 \leq p < 0,01$ ; \*\*\*  $p < 0,001$

Numa análise mais detalhada às respostas às questões Q1 e Q3 constata-se que na primeira questão os alunos que não conseguem identificar no gráfico a idade, conhecido o número de horas dormidas (1b) ( $V$  Cramér = 0,54), também não identificam o número de horas, conhecida a idade (1a); na terceira questão os alunos que manifestam dificuldades em identificar a hora correspondente à intersecção dos gráficos (3b) ( $V$  Cramér = 0,46), também revelam dificuldades em identificar o objeto solicitado (3a).

Em relação à associação de dados organizados em tabelas, constata-se que: na questão Q2, os alunos que manifestam dificuldades em responder à alínea 2b (identificação do objeto, conhecida a imagem) também revelam dificuldades na resposta à alínea 2a (identificação da imagem conhecido o objeto) ( $V$  Cramér = 0,46); aqueles que revelam dificuldade na alínea 2c (identificação do máximo e mínimo) também revelam dificuldades nas alíneas 2a e 2b ( $0,33 < V$  Cramér  $< 0,36$ ); e aqueles que revelam dificuldades na alínea 2d (determinação do efetivo total), também revelam nas alíneas 2a

e 2b ( $0,33 < V \text{ Cramér} < 0,40$ ), já que apresentam dificuldades em considerar a tabela como sendo uma tabela de frequências. Há alunos que ao apresentarem dificuldades na alínea 2f (identificar domínio/contradomínio), também revelaram na alínea 2e (identificar a variável independente); e ao manifestarem dificuldades em identificar o domínio e contradomínio, também revelaram dificuldades na identificação da variável independente da função em contexto tabelar ( $V \text{ Cramér} = 0,45$ ). Parece, desta análise, que o tipo de organização dos dados condiciona o desempenho dos alunos, sendo a associação maior para dados organizados em gráfico do que em tabela.

Quanto às dificuldades manifestadas pelos alunos nas questões Q1e Q2 e nas questões Q2 e Q3, verifica-se que existe associação entre as alíneas 2f e 1e ( $V \text{ Cramér} = 0,46$ ), pois os alunos que manifestaram dificuldade em identificar o domínio e o contradomínio na 2f, também o revelaram na alínea 1e; aqueles alunos que revelaram dificuldade em identificar a variável dependente na alínea 3e também revelam dificuldade na identificação da variável independente na alínea 2e ( $V \text{ Cramér} = 0,54$ ) e na identificação do domínio e contradomínio na alínea 2f ( $V \text{ Cramér} = 0,35$ ). Nesta situação parece que o tipo de contexto não influencia a resposta de identificar a variável independente.

#### 4.2.2. Relação das dificuldades entre conceitos de Estatística em contexto gráfico e tabelar

Na Tabela 11 averigua-se a existência de associação entre as respostas sobre Estatística, com dados organizados em tabela e gráficos. Aqui observa-se: 1) maior associação entre alíneas com dados organizados em gráficos ( $V \text{ Cramér} < 0,48$ ) do que entre alíneas com dados em representação tabelar ( $V \text{ Cramér} < 0,37$ ); 2) existe ainda associação entre dados organizados em tabelas com dados organizados em gráficos ( $V \text{ Cramér} < 0,46$ ).

Tabela 11 – Associação, medida pelo coeficiente V de Cramér, nas respostas entre as questões sobre Estatística

|                 |   | Q4 (Tabela)     |                 | Q5 (Gráfico)    |                 |                 | Q6 (Gráfico)    |                 |                 |
|-----------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
|                 |   | c               | e               | b               | c               | d               | e               | b               | c               |
| Q4<br>(Tabela)  | b | <b>0,359***</b> | <b>0,361***</b> | <b>0,445***</b> | <b>0,384***</b> | 0,162**         | 0,297***        | 0,136*          | <b>0,347***</b> |
|                 | c |                 | 0,292***        | 0,280***        | <b>0,375***</b> | 0,174***        | 0,246***        | 0,145*          | 0,228***        |
|                 | e | 0,292***        |                 | <b>0,370***</b> | <b>0,362***</b> | 0,211***        | <b>0,353***</b> | 0,194***        | 0,256***        |
| Q5<br>(Gráfico) | c | 0,375***        | 0,362***        | <b>0,378***</b> |                 | <b>0,375***</b> | <b>0,361***</b> | 0,257***        | 0,226***        |
| Q6<br>(Gráfico) | c | 0,228***        | 0,256***        | <b>0,482***</b> | 0,226***        | 0,204***        | 0,284***        | 0,282***        |                 |
|                 | d | 0,244***        | 0,324***        | <b>0,345***</b> | <b>0,331***</b> | 0,342***        | 0,302***        | <b>0,355***</b> | <b>0,424***</b> |

\* 0,01 ≤ p < 0,05; \*\* 0,001 ≤ p < 0,01; \*\*\* p < 0,001

Da análise da Tabela 11 pode dizer-se que as associações existentes são não fortes (isto é, no sentido do valor de V Cramér ser inferior a 0,5). Assim, para dados organizados em tabela (Q4), verifica-se existência de associação entre os conceitos de mediana (4b) e de média (4c) (V Cramér = 0,36) e entre os conceitos de mediana (4b) e de moda/mediana (4e) (V Cramér = 0,36). Nestas situações verifica-se que quando o aluno apresenta dificuldade na determinação da mediana, também o revela na determinação da média.

Relativamente a dados organizados em gráfico (Q5 e Q6) constata-se que existe associação não forte, entre várias alíneas. Relativamente à Q5, verifica-se a existência de associação não forte na Q5 relativamente às alíneas 5c com 5b, 5d e 5e. Estes resultados parecem indicar que os alunos que manifestam dificuldades na alínea 5c (sobre a média), também o sentem na alínea 5b (sobre mediana) (V Cramér = 0,38) e, na alínea d) (sobre máximo e mínimo) (V Cramér = 0,38) e, na alínea e) (sobre média) (V Cramér = 0,36). Em relação à Q6 verifica-se que a associação não forte existe entre três alíneas: alínea 6d (determinação de percentagem) com a alínea 6b (sobre moda) (V Cramér = 0,36) e com a alínea 6c (sobre a mediana) (V Cramér = 0,42). Tais situações parecem sugerir que os alunos que apresentam dificuldades na determinação da percentagem, também revelam dificuldades em responder sobre a moda ou sobre mediana.

Desta primeira análise parece resultar que, sendo a associação não forte, nos dados em gráfico, ligeiramente superior aos dados em tabela, ela sugere que as dificuldades podem depender do tipo de representação.

Da análise da Tabela 11, relativamente às questões Q4 e Q5 e Q6 constata-se que existe associação não forte entre:

- Q4b (sobre mediana) e a Q5b (sobre mediana), Q4c (sobre média) e entre a Q6c (sobre mediana). Isto é, os alunos que revelam dificuldades na determinação da mediana na Q4, também o revelam na Q5 (V Cramér = 0,45) e também o revelam na Q6 (V Cramér

= 0,36). Esta situação parece indicar que as dificuldades reveladas não parecem depender do tipo de representação dos dados;

- na determinação da média na Q4c e na Q5c (V Cramér = 0,38), o que sugere independência do contexto da representação dos dados;

- na questão que relaciona moda/mediana (Q4e) com mediana (Q5b) e com média (Q5c e Q5e), apresenta associação não forte com V Cramér igual a 0,37, 0,36 e 0,35, respetivamente.

Pode-se referir que os alunos apresentam dificuldades na determinação das medidas de tendência central, em qualquer contexto de representação de dados, tabelar e gráfico.

#### 4.2.3. Relação das dificuldades entre conceitos de Estatística e de Funções

Na Tabela 12 averigua-se a existência de associação entre respostas sobre Estatística e sobre Funções, observa-se: 1) maior associação entre alíneas com dados organizados em gráficos (V Cramér < 0,31) do que entre alíneas com dados em representação tabelar (V Cramér < 0,26); 2) existe associação entre dados organizados em tabelas com dados organizados em gráficos (V Cramér < 0,23).

Tabela 12 – Associação, medida pelo coeficiente V de Cramér, nas respostas entre as questões sobre Estatística e Funções

|                 |   | Q1 (Gráfico)    |                 | Q2 (Tabela)     |                 | Q3 (Gráfico)    |  |
|-----------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--|
|                 |   | e)              | d)              | e)              | c)              | d)              |  |
| Q4<br>(Tabela)  | b | <b>0,206***</b> | 0,116           | 0,193***        | 0,114           | 0,177***        |  |
|                 | c | <b>0,254***</b> | <b>0,202***</b> | <b>0,225***</b> | 0,125           | 0,162**         |  |
|                 | d | 0,109           | 0,195***        | 0,188***        | 0,157**         | <b>0,230***</b> |  |
|                 | e | <b>0,211***</b> | 0,145*          | 0,199***        | 0,158**         | 0,195***        |  |
| Q5<br>(Gráfico) | a | <b>0,222***</b> | 0,112           | <b>0,303***</b> | 0,146**         | 0,139*          |  |
|                 | b | <b>0,201***</b> | 0,087           | <b>0,206***</b> | 0,136*          | 0,151**         |  |
|                 | c | <b>0,247***</b> | 0,102           | <b>0,218***</b> | 0,115           | 0,129           |  |
|                 | e | <b>0,202***</b> | 0,124           | 0,185***        | 0,157**         | 0,131*          |  |
| Q6<br>(Gráfico) | a | 0,172***        | 0,114           | <b>0,268***</b> | 0,107           | 0,165**         |  |
|                 | c | 0,128           | 0,091           | 0,133           | 0,15**          | <b>0,246***</b> |  |
|                 | d | <b>0,208***</b> | 0,163**         | 0,189***        | <b>0,204***</b> | <b>0,216***</b> |  |

\* 0,01 ≤ p < 0,05;

\*\* 0,001 ≤ p < 0,01;

\*\*\* p < 0,001

Da análise da Tabela 12 conclui-se que a associação existente é não forte em todas as alíneas:

- Para a moda não se observa tendência na associação entre nenhuma das alíneas (Q4a, Q6b) com as restantes;

- Para a média (Q4c, Q5c e Q5e) observa-se tendência de associação com a identificação de domínio/contradomínio (Q1e) e com a interpretação de comparação de objetos num gráfico (Q3d) e ainda, com a identificação da variável independente (Q2e) de uma função;

- Para a mediana (para gráfico com eixo das abcissas (xx) e das ordenadas (yy) (Q5b) e tabelar (Q4b) observa-se similar tendência que a observada para a média (com a identificação de domínio/contradomínio (Q1e) e a identificação da variável independente (Q2e) de uma função mas com uma associação mais fraca;

-A identificação da variável (Q5a) e Q6a), em gráfico, está associada à identificação de variável independente, em tabela (Q2e);

- A identificação do domínio/contradomínio (Q1e) está associada ao cálculo da média (Q4c e Q5c e Q5e) e da mediana (Q4b e Q5b) em dados tabelares e gráficos;

- A identificação da variável (independente (Q2e) está associada ao cálculo da média (Q4c, Q5c e Q5e) (tabelar e gráfica);

- A identificação da variável independente (Q2e) está associada ao cálculo da mediana (tabelar (Q4b));

- Em contexto gráfico, a identificação de máximo/mínimo (Q5d) parece estar associado à interpretação de comparação de objetos num gráfico (Q3d)

- No diagrama circular, as medidas moda (Q6b) e mediana (Q6c) estão associadas à interpretação de comparação de objetos num gráfico (Q3c);

- No gráfico circular, a determinação da “percentagem de alunos que têm pelo menos um irmão” (Q6d) está associada à identificação do domínio/contradomínio (Q1e) e à interpretação da comparação de objetos num gráfico (Q3c), (Q3c e Q3d).

Desta análise, a associação entre tabelas dos dois domínios (Estatística e Funções) é ligeiramente menor em contexto tabelar ( $V$  Cramér  $< 0,23$ ) do que em contexto Gráfico ( $V$  Cramér  $< 0,25$ ). Mas, quando se confronta os dois contextos, verifica-se que, na existência de associação entre ambos, ela é um pouco mais elevada ( $V$  Cramér  $< 0,31$ ) do que verificado nas duas situações anteriores (apenas contexto tabelar e apenas contexto gráfico). Na comparação entre alíneas, registam-se algumas associações não fortes, entre as medidas de tendência central no domínio Estatística, com a identificação de domínio/contradomínio ( $V$  Cramér  $< 0,26$ ) e de variável independente ( $V$  Cramér  $< 0,22$ ), sem atender ao suporte de organização de dados. Aqui, a dificuldade manifestada pelos alunos na determinação da variável em estudo (Q5a) e Q6a)) parece estar relacionada com

a dificuldade em identificar variável independente em suporte tabelar (Q2e)) ( $V$  Cramér  $<0,31$ ).

#### 4.3. Análise semiótica das respostas dos alunos na Estatística

Nesta secção, o foco foi analisar as respostas de 332 alunos do 8.º ano, antes de ter sido lecionado o tema de Estatística correspondente desse ano de escolaridade, a três situações-problema, envolvendo os conceitos de média, mediana, moda, máximo, mínimo as representações tabelar e gráfica, quer em termos das respostas corretas quer na identificação de possíveis conflitos semióticos.

O principal objetivo desta secção consistiu em averiguar o efeito da representação dos dados (tabelar ou gráfica) no cálculo das medidas de localização. Para tal, foi efetuada uma análise semiótica das respostas dos 332 alunos na resolução de duas questões envolvendo a noção de mediana, com os dados apresentados sob a forma de tabela (Q 4) e sob a forma de gráficos: barras (Q4) e circular (Q6).

Para tal estabeleceu-se a tabela de contingência de  $4 \times 4$  das categorias de respostas corretas (C), parcialmente corretas (PC) e incorretas (I). Depois, procedeu-se à análise semiótica das respostas às duas questões por cada aluno, segundo a categoria de respostas corretas e a categoria de respostas não corretas. Nesta última categoria identificaram-se possíveis conflitos semióticos, quantificando-se os conflitos semióticos aqui reconhecidos e categorizados em cada uma das questões, e as respostas dos alunos que exibiram o mesmo conflito nas duas questões simultaneamente.

Assumindo-se que as respostas dos 332 alunos podem ser representativas do universo de respostas, efetuaram-se testes estatísticos (z-testes) na comparação de duas proporções (quando o número de alunos envolvidos no cálculo de tais proporções é superior a 30) e o teste de McNemar (Pestana & Velosa, 2010) em tabelas  $2 \times 2$  ou o teste de homogeneidade marginal em tabelas  $k \times k$  ( $k > 2$ ) para avaliar se há mudança na categoria das respostas dos alunos entre questões. Considerou-se haver evidência estatisticamente significativa quando o valor de prova  $p$  do teste correspondente é inferior ao nível de significância  $\alpha=0.05$  (Murteira et al., 2010).

##### 4.3.1. Conceito de mediana

As três questões têm uma alínea sobre a determinação da mediana, no caso da questão 4 em representação tabelar e no caso das questões 5 e 6 em representação gráfica.

#### 4.3.1.1. Cálculo da mediana

Q4b Qual a mediana das idades dos alunos da turma? Justifica. (versão tabelar)  
 Q5b Qual a mediana do número de livros lidos pelos alunos nas férias? Justifica. (versão gráfica barras).  
 Q6c Qual a mediana do número de irmãos dos alunos da turma? Justifica. (versão gráfica circular).

No cálculo da mediana (Tabela 13) prevalece a “não resposta” na alínea 5b (47,6%) e na alínea 6c (52,4%), enquanto na alínea 4b predomina a “resposta incorreta” (40,1%). Dos 332 alunos apenas 6% determinaram corretamente a mediana simultaneamente às questões 4b e 5b; 3,3% simultaneamente às questões 5b e 6c e, 1,5% simultaneamente nas questões 4b e 6c. O número de “respostas corretas” é ligeiramente superior na alínea 5b (12,0%), comparando com a alínea 4b (10,2%), e bastante superior, comparando com a alínea 6c (5,5%), o que revela maior dificuldade na obtenção da mediana com dados em tabela do que em gráfico de barras. Comparando os resultados entre os dois tipos de gráficos, os alunos manifestam maior dificuldade na determinação da mediana em gráfico circular. Recorde-se que a resposta é considerada correta quando a indicação correta da mediana é acompanhada de justificação adequada. Na ausência da justificação ou quando esta não é adequada, apesar da indicação correta do valor da mediana, a resposta é considerada “parcialmente correta”.

Tabela 13 – Frequências absolutas (percentagens) dos tipos de respostas entre as alíneas 5b e 4b, entre 5b e 6c e entre 6c e 4b

|            |    | Questão 4b   |              |               |               | Questão 6c  |              |              |               | Total         |
|------------|----|--------------|--------------|---------------|---------------|-------------|--------------|--------------|---------------|---------------|
|            |    | C            | PC           | I             | NR            | C           | PC           | I            | NR            |               |
| Questão 5b | C  | 20<br>(6,0)  | 13<br>(3,9)  | 6<br>(1,8)    | 1<br>(0,3)    | 11<br>(3,3) | 17<br>(5,2)  | 3<br>(0,9)   | 9<br>(2,6)    | 40<br>(12,0)  |
|            | PC | 8<br>(2,4)   | 12<br>(3,6)  | 41<br>(12,3)  | 18<br>(5,5)   | 5<br>(1,5)  | 41<br>(12,3) | 19<br>(5,7)  | 14<br>(4,3)   | 79<br>(23,8)  |
|            | I  | 0<br>(0,0)   | 5<br>(1,5)   | 44<br>(13,3)  | 6<br>(1,8)    | 0<br>(0,0)  | 9<br>(2,6)   | 32<br>(9,7)  | 14<br>(4,3)   | 55<br>(16,6)  |
|            | NR | 6<br>(1,8)   | 6<br>(1,8)   | 42<br>(12,7)  | 104<br>(31,3) | 2<br>(0,7)  | 13<br>(3,9)  | 6<br>(1,8)   | 137<br>(41,2) | 158<br>(47,6) |
| Questão 6c | C  | 5<br>(1,5)   | 5<br>(1,5)   | 6<br>(1,8)    | 2<br>(0,7)    |             |              |              |               | 18<br>(5,5)   |
|            | PC | 21<br>(6,3)  | 16<br>(4,7)  | 26<br>(7,8)   | 17<br>(5,2)   |             |              |              |               | 80<br>(24,0)  |
|            | I  | 0<br>(0,0)   | 2<br>(0,7)   | 49<br>(14,8)  | 9<br>(2,6)    |             |              |              |               | 60<br>(18,1)  |
|            | NR | 8<br>(2,4)   | 13<br>(3,9)  | 52<br>(15,7)  | 101<br>(30,4) |             |              |              |               | 174<br>(52,4) |
| Total      |    | 34<br>(10,2) | 36<br>(10,8) | 133<br>(40,1) | 129<br>(38,9) | 18<br>(5,5) | 80<br>(24,0) | 60<br>(18,1) | 174<br>(52,4) | 332           |

Analisando o interior da Tabela 13, observa-se que, no cálculo das medianas, o mais frequente (31,3%, para as alíneas 5b e 4b, 30,4% para as alíneas 6c e 4b e 41,2% para as alíneas 5b e 6c) é encontrar não respostas em ambas as alíneas.

Saliente-se que não existe evidência estatística de diferenças significativas entre as percentagens dos diferentes tipos de resposta de 5b e 4b ( $p=0,459$ ). Em termos de ausência de resposta, 31,3% dos alunos não responderam a ambas as questões, sendo as propensões para não responder significativamente diferentes nas três questões (questão 4b: 38,9%; questão 5b: 47,6%; questão 6c: 52,4%;  $p=0,023$ ), o que reforça a grande dificuldade dos alunos no cálculo da mediana em ambas as situações, maior em contexto gráfico.

Extraída da Tabela 13 a subtabela de contingência de  $2 \times 2$  relativa às respostas de tipo PC e I (4b e 5b), conclui-se pela existência de mudança significativa nas categorias das respostas não corretas ( $p=0,000$ ), sendo que as percentagens de respostas parcialmente corretas são significativamente diferentes nas duas questões (questão 4b: 10,8%; questão 5b: 23,8%;  $p=0,000$ ), assim como as percentagens de respostas incorretas (questão 4b: 40,1%; questão 5b: 16,6%;  $p=0,000$ ). Observa-se que quando os dados estão sob a forma tabelar surge uma menor percentagem de respostas parcialmente corretas e uma maior percentagem de respostas incorretas. Agregando as respostas do tipo PC e I numa só categoria (respostas não corretas), constata-se que as proporções de ocorrência de respostas não corretas são significativamente diferentes nas duas questões (questão 4b: 50,9%; questão 5b: 40,4%;  $p=0,006$ ), sendo maior na questão 4, onde os dados estão organizados em tabela.

No caso das alíneas 6c e 4b, nas respostas não corretas, constata-se que também existe evidência estatística de diferenças significativas entre as suas percentagens ( $p=0,000$ ). Extraída da Tabela 13 a subtabela de contingência de  $2 \times 2$ , destas questões, relativa às respostas de tipo PC e I, conclui-se pela existência de mudança significativa nas categorias das respostas não corretas ( $p=0,000$ ), tal como na situação referida anteriormente, sendo que as percentagens de respostas parcialmente corretas são significativamente diferentes nas duas questões (questão 4b: 10,8%; questão 6c: 24,0%;  $p=0,000$ ), assim como as percentagens de respostas incorretas (questão 4b: 40,1%; questão 6c: 18,1%;  $p=0,000$ ). Observa-se, assim, que quando os dados estão sob a forma tabelar surge uma menor percentagem de respostas parcialmente corretas e uma maior percentagem de respostas incorretas. Agregando as respostas do tipo PC e I numa só categoria (respostas não corretas), constata-se que as proporções de ocorrência de respostas não corretas são significativamente diferentes nas duas questões (questão 4b: 50,9%; questão 6c: 42,1%;  $p=0,000$ ), sendo maior na questão 4, onde os dados estão organizados em tabela.



Em termos de ausência de resposta, 30,4% dos alunos não responderam a ambas as questões, sendo as propensões para não responder significativamente diferentes nas duas questões (questão 4b: 38,9%; questão 6c: 52,4%;  $p=0,000$ ), o que reforça a grande dificuldade dos alunos no cálculo da mediana em ambas as situações, maior em contexto gráfico.

No caso das alíneas 5b e 6c, ambas em contexto gráfico, constata-se que não existe evidência estatística de diferenças significativas entre as suas percentagens ( $p=0,087$ ). Em termos de ausência de resposta, 41,2% dos alunos não responderam a ambas as questões, sendo as propensões para não responder significativamente diferentes nas duas questões (questão 5b: 47,6%; questão 6c: 52,4%;  $p=0,000$ ), o que reforça a grande dificuldade dos alunos no cálculo da mediana em situações em contexto gráfico.

Extraída da Tabela 13 a subtabela de contingência de  $2 \times 2$  relativa às respostas de tipo PC e I (5b e 6c), conclui-se pela não existência de mudança significativa nas categorias das respostas não corretas ( $p=0,087$ ), sendo que as percentagens de respostas parcialmente corretas são pouco diferentes nas duas questões (questão 5b: 23,8%; questão 6c: 24,0%;  $p=0,087$ ), assim como as percentagens de respostas incorretas (questão 5b: 16,6%; questão 6c: 18,1%;  $p=0,087$ ). Quando se agrega as respostas do tipo PC e I numa só categoria (respostas não corretas), constata-se que as proporções de ocorrência de respostas não corretas também não são significativamente diferentes nas duas questões (questão 5b: 40,4%; questão 6c: 42,1%;  $p=0,087$ ).

#### 4.3.1.2. Análise semiótica das respostas no caso da mediana

Para a análise semiótica das respostas, consideram-se, primeiramente, as respostas corretas e, a seguir, as respostas não corretas, estas últimas com o objetivo de identificar possíveis conflitos semióticos surgidos nas respostas às questões propostas.

##### 4.3.1.2.1. Análise semiótica das respostas corretas

No conjunto das respostas corretas foram identificadas duas categorias de resposta: categoria C1 e categoria C2. Na categoria C1 as respostas exibem uma ordenação dos dados antes da identificação do valor correto da mediana, para a série de dados em número par na questão 4b e em número ímpar na questão 5b. Na categoria C2 as respostas corretas demonstram a obtenção da mediana sem exibição de ordenação dos dados, mas com justificação adequada. As frequências de respostas corretas nas duas

categorias, para cada uma das questões, assim como as frequências de alunos que responderam corretamente e de forma similar às duas questões encontram-se sumariadas na Tabela 14.

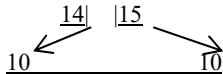
Tabela 14 – Frequências absolutas (percentagens) das categorias de respostas corretas em cada uma das questões 4b), 5b) e 6c) e em grupos de questões simultaneamente

| Categorias   | Questão 4b<br>(n=34) | Questão 5b<br>(n=40) | Questão 6c<br>(n=18) | Questões 4b e 5b<br>(n=20) | Questões 4b e 6c<br>(n=5) | Questões 5b e 6c<br>(n=11) | Questões 4b, 5b e 6c<br>(n=5) |
|--|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| <b>C1.</b> Aplicar o algoritmo no cálculo da mediana, com evidência da ordenação dos dados.                                | 31 (91)              | 39 (98)              | 4 (22)               | 20 (100)                   | 1 (20)                    | 3 (27)                     | 1 (20)                        |
| <b>C2.</b> Aplicar o algoritmo no cálculo da mediana, sem evidência da ordenação dos dados, mas com justificação adequada. | 3 (9)                | 1 (2)                | 14 (78)              | 0 (0)                      | 0 (0)                     | 3 (27)                     | 0 (0)                         |

Constata-se que as respostas corretas estão concentradas na categoria C1, para as questões 4b e 5b, não havendo diferenças significativas entre as proporções de respostas corretas na categoria C1 destas duas questões (questão 4b: 91%; questão 5b: 98%;  $p=0,231$ ); mais ainda, todos os alunos que responderam corretamente a ambas as questões incluem-se na categoria C1. Quanto à questão 6c, a resposta correta situa-se mais na categoria C2, havendo diferenças significativas entre as proporções de resposta nas questões 4b e 6c (questão 4b: 9%; questão 6c: 78%;  $p= 0,000$ ); já o único aluno que respondeu corretamente a ambas as questões inclui-se em C1.

No Quadro 16 apresentam-se exemplos de respostas corretas nas categorias C1 e C2, reportadas na Tabela 14, e para ambos os contextos, tabelar (questão 4b) e gráfico (questão 5b e 6c).

Quadro 16 – Análise semiótica de exemplos de categorias C1 e C2 nas questões 4, 5 e 6.

|              | <i>Expressão</i>   | <i>Conteúdo</i>  |
|--------------|--|--|
| Categoria C1 | <p>Questão 4b (versão tabelar). Resolução do aluno A251:</p> <p>13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15,<br/>15, 16, 16, 16, 16, 16</p> <p><math>14 + 15 = 29</math><br/><math>29/2 = 14,5</math><br/>R: A mediana das idades é 14,5.</p>   | <p>-Os alunos leem os enunciados (processo de interpretação) e identificam corretamente o(s) valor(es) pretendido(s) (particularização do problema). Os alunos identificam corretamente a questão como sendo uma questão sobre a mediana (reconhecer um campo de problemas). Reconhecem a necessidade de ordenar os dados (aplicar a definição e propriedades) para obter a mediana.</p>   |
|              | <p>Questão 5b) (versão gráfico de barras). Resolução do aluno A233:</p> <p>0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2</p> <p>R: A mediana do número de livros lidos é 1.</p>   | <p>-No caso do aluno A251, ele identifica os valores centrais (particularização adequada de um conceito para o caso par) e determina a sua média aritmética (discriminação adequada da definição).</p> <p>-No caso do aluno A233, ele identifica o valor central (particularização adequada de um conceito para o caso ímpar).</p>   |
|              | <p>Questão 6c) (versão gráfico circular). Resolução do aluno A153:</p> <p>0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2</p> $\frac{1 + 1}{2} = 1$  | <p>-No caso do aluno A153, ele considera que a amostra tem 10 alunos, identifica os valores centrais (particularização adequada de um conceito para o caso par) e determina a sua média aritmética (discriminação adequada da definição).</p> <p>-Todos revelam reconhecer que a mediana é apenas um valor central (aplicação adequada da definição).</p>  |
| Categoria C2 | <p>Questão 4b (versão tabelar). Resolução do aluno A61:</p>  <p><math>\frac{14+15}{2} = 14,5</math>, R: A mediana das idades é 14,5.</p>   | <p>-Os alunos leem os enunciados (processo de interpretação) e identificam corretamente o(s) valor(es) pretendido(s) (particularização do problema). Os alunos identificam corretamente a questão como sendo uma situação-problema sobre a mediana (reconhecer um campo de problemas). Nenhum aluno reconheceu a necessidade de exibir todos os dados e ordená-los (aplicar a definição de dados organizados) para determinar a mediana.</p> |
|              | <p>Questão 5b (versão gráfico de barras). Resolução do aluno A13:</p> <p>A mediana é 1, pois há tantos dados antes de si como depois de si (14 para cada lado).</p>  | <p>-No caso do aluno A61, ele identifica os valores centrais (particularização adequadamente de um conceito para o caso par), determina a sua média aritmética (discriminação adequada da definição).</p>  |
|              | <p>Questão 5b (versão gráfico de barras. Resolução do aluno A294:</p> <p>Dado que são 5 alunos com 0 livros lidos, 14 alunos com 1 livro lido, num total de 25 alunos, metade destes ficam nos alunos com 1 livro lido.</p> <p>R: A mediana do número de livros lidos é 1.</p>   | <p>-No caso dos alunos A13 e A294, eles identificam o valor central (particularização adequada de um conceito para o caso ímpar), analisando o gráfico de barras, e justificaram tendo em conta as frequências absolutas (interpretação adequada do gráfico).</p>  |
|              | <p>Questão 6c (versão gráfico circular). Resolução do aluno A55: 1 irmão, pois é neste setor que se encontra os 50%.</p> <p>Questão 6c (versão gráfico circular). Resolução do aluno A273:</p> <p>Vai ser 1 irmão pois <math>30 + 10 + 60 = 100</math>, então está entre dois uns e vai ser <math>(1 + 1) / 2 = 1</math></p> | <p>-No caso dos alunos A55 e A273, eles identificam que no setor correspondente a 1 irmão se situa 50% da amostra (particularização adequada de um conceito), analisando o gráfico circular, e justificaram tendo em conta as frequências relativas (interpretação adequada do gráfico).</p>   |

#### 4.3.1.2.2. Análise semiótica das respostas parcialmente corretas e incorretas

No conjunto das respostas não corretas (categorias PC e I) foram identificados sete conflitos semióticos, comuns às questões 4b, 5b e 6c, mas não necessariamente comuns a um mesmo aluno para as duas ou três questões, como veremos mais à frente. Na categoria  $\bar{C}1$  (Tabela 14) os alunos reconhecem o conjunto correto de dados e o algoritmo de cálculo da mediana, mas não concluem, identificando os valores centrais no

conjunto de dados ordenados sem determinar a sua média (na questão 4c, o número de dados é par) ou sem indicar o valor (final) da mediana. Na categoria  $\bar{C}2$  os alunos ilustram, de alguma forma, o procedimento correto para a determinação da mediana, mas aplicam-no a um conjunto de dados incorreto como, por exemplo, o conjunto dos valores da variável em estudo sem atender às suas frequências absolutas. Na categoria  $\bar{C}3$  os alunos indicam valores incorretos para a mediana ou valores corretos determinados de forma incorreta pois ordenaram os valores da variável, ou apenas uma parte destes, e ainda as respectivas frequências absolutas. Na categoria  $\bar{C}4$  os alunos revelam desconhecer o algoritmo do cálculo da mediana, e aplicam-no a um conjunto de dados incorreto. Na categoria  $\bar{C}5$  os alunos determinam uma estatística diferente da mediana, tendo sido observado que os alunos tomam a média (8% na questão 4b, 12% na questão 5b e 4% na questão 6c), a moda (5% na questão 4b e 7% na questão 6c), o máximo (1% na questão 4b, 4% na questão 5b e 11% na questão 6c) e o mínimo (2% na questão 4b, 6% na questão 5b e 11% na questão 6c), revelando não discriminar tais medidas da mediana. Na categoria  $\bar{C}6$  os alunos consideram o número total de alunos como sendo a mediana. Na categoria  $\bar{C}7$  os alunos identificam a mediana com o valor 14, que representa um dos valores centrais da variável idade na questão 4b, e a frequência absoluta do valor central da variável, que corresponde à moda na questão 5b. Uma última categoria  $\bar{C}8$  foi adicionada para incluir as restantes respostas, constituída por respostas sem sentido, tais como respostas associadas a um qualquer valor da frequência absoluta, sem qualquer justificação ou com erros de interpretação do enunciado por tomarem um dado valor da tabela (questão 4b) ou um valor dos eixos do gráfico de barras (questão 5b), e ainda as respostas com o valor correto da mediana, mas sem qualquer explicação sobre a sua obtenção, podendo resultar de uma atribuição ao acaso.

Na Tabela 15 apresentam-se as frequências das oito categorias descritas e as frequências de alunos que exibiram simultaneamente o mesmo tipo de conflito semiótico nas questões 4b e 5b (102 respostas), nas questões 4b e 6c (93 respostas), nas questões 5b e 6c (101 respostas) e nas três questões (56 respostas) parcialmente corretas ou incorretas.

Tabela 15 – Frequências absolutas (percentagens) das categorias de conflitos semióticos identificados na questão 4b), na questão 5b), na questão 6c), simultaneamente em duas delas e simultaneamente nas três questões, e valor de prova (p) dos z-testes de comparação de proporções de cada tipo de conflito entre pares de questões

| Categorias<br>(conflitos semióticos)  | Q4b<br>(n=169) | Q5b<br>(n=134) | Q6c<br>(n=140) | Q4b e<br>Q5b<br>(n=102) | Valor<br>de<br>prova | Q4b e<br>Q6c<br>(n=93) | Valor<br>de<br>prova | Q5b e<br>Q6c<br>(n=101) | Valor<br>de<br>prova | Q4b,<br>Q5b e<br>Q6c<br>(n=56) |
|---|----------------|----------------|----------------|-------------------------|----------------------|------------------------|----------------------|-------------------------|----------------------|--------------------------------|
| ̄C1. Iniciar a aplicação do algoritmo do cálculo da mediana no conjunto de dados, sem concluir.                 | 30 (18)        | 4 (3)          | 1 (1)          | 2 (2)                   | 0,000                | 0 (0)                  | 0,000                | 0 (0)                   | 0,000                | 0 (0)                          |
| ̄C2. Aplicar o algoritmo do cálculo da mediana, mas sem identificar corretamente o conjunto de dados.           | 14 (8)         | 23 (17)        | 21(15)         | 1 (1)                   | 0,019                | 1 (1)                  | 0,064                | 1 (1)                   | 0,000                | 2 (4)                          |
| ̄C3. Identificar corretamente o conjunto de dados e aplicar incorretamente o algoritmo do cálculo da mediana.   | 7 (4)          | 9 (7)          | 0(0)           | 1 (1)                   | 0,320                | 0 (0)                  | 0,000                | 0 (0)                   | 0,000                | 0 (0)                          |
| ̄C4. Identificar incorretamente o conjunto de dados e aplicar incorretamente o algoritmo do cálculo da mediana. | 5 (3)          | 3 (2)          | 11(8)          | 0 (0)                   | 0,698                | 0 (0)                  | 0,000                | 1 (1)                   | 0,035                | 0 (0)                          |
| ̄C5. Determinar outra medida estatística que não a mediana.   | 27 (16)        | 31 (23)        | 42 (30)        | 19 (19)                 | 0,116                | 2 (2)                  | 0,003                | 17 (17)                 | 0,199                | 4 (7)                          |
| ̄C6. Identificar o número total de dados com a mediana.   | 23 (14)        | 3 (2)          | 3 (3)          | 0 (0)                   | 0,000                | 0 (0)                  | 0,000                | 0 (0)                   | 0,000                | 0 (0)                          |
| ̄C7. Identificar o valor da mediana com o valor catorze.  | 38 (22)        | 3 (2)          | 0 (0)          | 0 (0)                   | 0,000                | 0 (0)                  | 0,000                | 0 (0)                   | 0,000                | 0 (0)                          |
| ̄C8. Outras respostas.  | 25 (15)        | 58 (44)        | 59 (43)        | 3 (3)                   | 0,000                | 0 (0)                  | 0,000                | 30 (30)                 | 0,849                | 1 (2)                          |

Da Tabela 15 verifica-se que, relativamente à questão 4b (contexto tabelar), entre 169 respostas não corretas, o tipo de conflito semiótico mais frequente é ̄C7 (22%) e os dois tipos menos frequentes correspondem ambos à aplicação incorreta do algoritmo do cálculo da mediana (̄C3: 4%; ̄C4: 3%). Na questão 5b (contexto gráfico de barras), entre as 134 respostas não corretas dessa questão, para além do conflito pouco informativo ̄C8, o mais frequente é ̄C2 (23%). No caso da questão 6c (contexto gráfico circular), entre as 140 respostas não corretas dessa questão, para além do conflito pouco informativo ̄C8, o mais frequente é ̄C5 (30%), correspondendo à determinação de uma estatística diferente da mediana.

Analisando as respostas simultaneamente a duas ou mais questões verifica-se que:

— Considerando os 102 alunos com respostas não corretas simultaneamente às questões 4b e 5b, constata-se que apenas 26% destes apresentaram o mesmo tipo de conflito semiótico na determinação da mediana. Essa percentagem praticamente é absorvida pela categoria  $\bar{C}5$  (com 19%; as restantes são residuais), não havendo respostas exibindo os conflitos das categorias  $\bar{C}4$ ,  $\bar{C}6$  e  $\bar{C}7$  (0%) simultaneamente nas duas questões, e pelo mesmo aluno. Comparando as proporções de alunos em cada tipo de conflito semiótico entre as duas questões, constata-se haver diferenças significativas para todos os conflitos, exceto  $\bar{C}3$ ,  $\bar{C}4$  e  $\bar{C}5$  (onde  $p > 0,05$ ).

— Tomando os 93 alunos com respostas não corretas simultaneamente às questões 4b e 6c, constata-se que apenas 3% destes apresentaram o mesmo tipo de conflito semiótico na determinação da mediana. Essa percentagem é muito baixa e recai sobre a categoria  $\bar{C}2$  (1%) e  $\bar{C}5$  (2%), não havendo respostas exibindo os conflitos das restantes categorias simultaneamente nas duas questões, e pelo mesmo aluno. Comparando as proporções de alunos em cada tipo de conflito semiótico entre as duas questões, constata-se haver diferenças significativas para todos os conflitos, exceto  $\bar{C}2$  (onde  $p > 0,05$ ).

— Dos 101 alunos com respostas não corretas simultaneamente às questões 5b e 6c, constata-se que apenas 49% destes apresentaram o mesmo tipo de conflito semiótico na determinação da mediana. Essa percentagem praticamente é absorvida pela categoria  $\bar{C}8$  (com 30%; as restantes são residuais), não havendo respostas exibindo os conflitos das categorias  $\bar{C}1$ ,  $\bar{C}3$ ,  $\bar{C}6$  e  $\bar{C}7$  simultaneamente nas duas questões, e pelo mesmo aluno. O facto de existir tão elevada percentagem de respostas simultâneas às duas questões na  $\bar{C}8$  prende-se com o facto de nas duas questões os alunos apresentarem simultaneamente a mediana sem qualquer justificação. Comparando as proporções de alunos em cada tipo de conflito semiótico entre as duas questões, constata-se haver diferenças significativas para todos os conflitos, exceto  $\bar{C}5$  e  $\bar{C}8$  (onde  $p > 0,05$ ).

— Tendo em conta os 56 alunos com respostas não corretas simultaneamente às questões 4b, 5b e 6c, constata-se que apenas 13% destes apresentaram o mesmo tipo de conflito semiótico na determinação da mediana. Essa percentagem praticamente é absorvida pela categoria  $\bar{C}5$  (com 7%; as restantes são residuais), não havendo respostas exibindo os conflitos das categorias  $\bar{C}1$ ,  $\bar{C}3$ ,  $\bar{C}4$ ,  $\bar{C}6$  e  $\bar{C}7$  simultaneamente nas três questões, e pelo mesmo aluno.

Salienta-se ainda que o número de alunos incluídos no conflito  $\bar{C}8$  é mais frequente nas questões em contexto gráfico (5b: 44%; 6c: 43%) do que na questão em contexto tabelar (4b: 15%).

Da categorização dos conflitos descritos no Quadro 17 reconhece-se que a agregação dos conflitos  $\bar{C}1$  e  $\bar{C}2$  (designada por  $\bar{C}1+\bar{C}2$ ) constitui o conjunto das respostas onde, embora não seja apresentado o valor correto da mediana, não se detetam erros no procedimento algorítmico do cálculo da mediana, sendo que o aluno ou não o conclui ou conclui-o corretamente. Similarmente, reconhece-se que a agregação dos conflitos  $\bar{C}3$  e  $\bar{C}4$  (designada por  $\bar{C}3+\bar{C}4$ ) corresponde às respostas não corretas, onde a aplicação do algoritmo de cálculo da mediana foi incorreta e a agregação dos conflitos  $\bar{C}2$  e  $\bar{C}4$  (designada por  $\bar{C}2+\bar{C}4$ ) corresponde às respostas não corretas onde foi considerado um conjunto de dados incorreto na determinação da mediana em cada questão. Analisando as proporções dessas três categorias agregadas de conflitos, conclui-se que: (i) relativamente à agregação  $\bar{C}1+\bar{C}2$ , não existem diferenças significativas entre as proporções de respostas não corretas com aplicação correta do algoritmo do cálculo da mediana nas questões 4b e 5b (questão 4b:  $44/169=26,0\%$ ; questão 5b:  $27/134=20,1\%$ ;  $p=0,230$ ) e nas questões 4b e 6c (questão 4b:  $44/169=26,0\%$ ; questão 6c:  $22/140=15,7\%$ ;  $p=0,028$ ); (ii) relativamente à agregação  $\bar{C}3+\bar{C}4$ , não existem diferenças significativas entre as proporções de respostas não corretas com aplicação incorreta do algoritmo do cálculo da mediana nas questões 4b e 5b (questão 4b:  $12/169=7,1\%$ ; questão 5b:  $12/134=9,0\%$ ;  $p=0,553$ ) e nas questões 4b e 6c (questão 4b:  $12/169=7,1\%$ ; questão 6c:  $11/140=7,9\%$ ;  $p=0,000$ ) observam-se diferenças estatisticamente significativas; e (iii) relativamente à agregação  $\bar{C}2+\bar{C}4$ , existem diferenças significativas entre as proporções de respostas não corretas provenientes da identificação errada do conjunto de dados a considerar nas questões 4b e 5b (questão 4b:  $19/169=11,2\%$ ; questão 5b:  $26/134=19,4\%$ ;  $p=0,047$ ) e não nas questões 4b e 6c (questão 4b:  $19/169=11,2\%$ ; questão 6c:  $21/140=15\%$ ;  $p=0,327$ ). Seguidamente exemplificam-se análises semióticas de respostas parcialmente corretas e incorretas de situações correspondentes às categorias de conflitos semióticos listadas na Tabela 15.

No Quadro 17 apresentam-se análises semióticas de exemplos dos conflitos  $\bar{C}1$  e  $\bar{C}2$ , onde o algoritmo do cálculo da mediana é aplicado corretamente, mas não concluído ou é concluído, mas aplicado a um conjunto errado de dados.

Quadro 17 – Análise semiótica de exemplos dos conflitos C1 e C2 nas três questões.

|             | <i>Expressão</i>  | <i>Conteúdo</i>   |
|-------------|---|---|
| Conflito C1 | <p>Questão 4b (versão tabelar). Resolução do aluno A15:<br/>13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 16</p> <p>R: A mediana das idades é 14 e 15</p> | <p>-Os alunos leem os enunciados (processo de interpretação) e identificam corretamente os valores centrais, associando-os ao valor da variável (particularização do problema). Os alunos identificam corretamente a questão como sendo uma situação-problema sobre o cálculo da mediana (reconhecer um campo de problemas). Reconhecem a necessidade de ordenar (A15 e A267) os dados (aplicar a definição e propriedades) para a determinação da mediana e os três alunos sentem necessidade de identificar os valores centrais (propriedade).</p>  |
|             | <p>Questão 5b (versão gráfico de barras). Resolução do aluno A267:<br/><br/>0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2</p>                                     | <p>-No caso do aluno A15, o conflito surge por ele não determinar a média aritmética dos valores centrais da amostra (particularização inadequada de um conceito) e por não reconhecer que a mediana é apenas um valor central (discriminação inadequada da definição).</p> <p>-No caso do aluno A267, o conflito surge por ele não atender ao número par de dados (discriminação inadequada do conceito) e que a mediana depende desse número ser par ou ímpar (expressão e particularização de conceitos).</p>  |
|             | <p>Questão 6c) (versão gráfico circular). Resolução do aluno A256:<br/><br/><math display="block">\frac{1 + 1}{2} =</math></p>  | <p>-No caso do aluno A256 o conflito surge por não justificar o motivo da escolha do valor da variável (aplicação insuficiente da definição e propriedades) e por não ter concluído o seu raciocínio. O aluno reconhece que a mediana é só um valor central.</p>  |
|             |   | <p>-Os alunos A15 e A267 não revelam conhecer que a mediana é um só valor central (aplicação inadequada da definição).</p>  |
| Conflito C2 | <p>Questão 4b (versão tabelar). Resolução do aluno A209:<br/><br/>A mediana é 14,5<br/>13 14 15 16<br/><math display="block">\frac{14 + 15}{2} = 14,5</math></p>                        | <p>-Todos os alunos leem o enunciado (processo de interpretação), identificam corretamente o problema de cálculo da mediana (reconhecer um campo de problemas), consideram necessário ordenar os dados (propriedade) para determinar a mediana (definição) e identificam dois valores centrais no caso par (particularização do problema).</p>  |
|             | <p>Questão 4b (versão tabelar). Resolução do aluno A73:<br/><br/>4, 5, 5, 6, 13, 14, 15, 16<br/><math display="block">6 + 13 \div 2 = 12,5</math></p>                                   | <p>-Os alunos A209 e A73 reconhecem a necessidade de determinar a média aritmética dos dois valores centrais (propriedade) e determinam-na (expressão e particularização de conceitos).</p> <p>-O conflito do aluno A209 surge quando não considera as frequências absolutas dos valores da variável (particularizar um conceito). O conflito do aluno A73 surge quando não distingue o valor da variável da respectiva frequência dos valores da variável utilizando indiscriminadamente todos os valores que surgem na tabela de frequências, ordenando-os (definição de mediana) e determinando os valores centrais da mediana desse conjunto de dados (particularizar um conceito). Um outro conflito deste aluno surge quando determina a média aritmética dos valores centrais (propriedade), ao não respeitar a prioridade das regras operatórias (linguagem).</p> |
|             | <p>Questão 5b (versão gráfica de barras). Resolução do aluno A198:<br/><br/>0, 1, 2<br/>↑</p>   | <p>-Os alunos A198 e A270 demonstram a aplicação correta do algoritmo do cálculo da mediana (aplicar a definição de mediana ao caso ímpar).</p>   |
|             | <p>Questão 5b (versão gráfico de barras). Resolução do aluno A270:<br/><br/>0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16</p>   | <p>-O conflito do aluno A198 surge quando o aluno não considera a frequência absoluta de cada um dos valores da variável (particularização de um conceito). No caso do aluno A270 o conflito surge quando considera os valores do eixo vertical do gráfico de barras em vez dos valores do eixo horizontal para a variável em estudo (confusão entre conceitos), aplicando o algoritmo do cálculo da mediana corretamente (processo de algoritmização).</p>   |
|             | <p>Questão 6c (versão gráfico circular). Resolução do aluno A230:<br/><br/>0, 1, 2, a mediana é 1</p>   | <p>-Os alunos A230 e A54 aplicam corretamente o algoritmo do cálculo da mediana (aplicar a definição de mediana ao caso ímpar).</p>   |
|             | <p>Questão 5b (versão gráfico circular). Resolução do aluno A54:<br/><br/>A mediana é 30%, porque é a segunda com mais percentagem</p>  | <p>-O conflito do aluno A230 surge quando o aluno não considera a frequência absoluta de cada um dos valores da variável (particularização de um conceito), atribuindo para tal um número adequado de alunos à turma. No caso do aluno A54, o conflito surge quando considera as frequências relativas e não os valores da variável (confusão entre conceitos), aplicando o algoritmo do cálculo da mediana corretamente (aplicar a definição).</p>   |
|             |   |   |



No Quadro 18 apresentam-se análises semióticas de exemplos das categorias  $\bar{C}3$  e  $\bar{C}4$ , onde o algoritmo do cálculo da mediana não é aplicado corretamente.

Quadro 18 – Análise semiótica de exemplos dos conflitos  $\bar{C}3$  e  $\bar{C}4$  nas três questões.

|                     | <i>Expressão</i>   | <i>Conteúdo</i>  |
|---------------------|--|--|
| Conflito $\bar{C}3$ | <p>Questão 4b (versão tabelar). Resolução do aluno A194:<br/> <del>13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 16</del></p>                                      | <p>-Os alunos leem o enunciado (processo de interpretação) e ordenam (propriedade) os dados para determinar a mediana (aplicam a definição e reconhecem um campo de problemas), constatando a necessidade de identificar o valor central (propriedade).</p>  |
|                     | <p>Questão 5b (versão gráfico de barras). Resolução do aluno A161:<br/>           1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, <b>1</b>, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2<br/> <math>2 \div 2 = 1</math>, mediana = 1</p> | <p>-No caso do aluno A194, o conflito surge quando aplica incorretamente o algoritmo de cálculo da mediana (algoritmo), já que aplica o algoritmo para o caso ímpar (identificação inadequada de propriedades).</p> <p>-No caso do aluno A161, o conflito surge ao ordenar os valores da variável, pois ignora o valor "0" (inadequada particularização de um conceito), obtendo um conjunto de dados par, ao qual aplica corretamente a noção de mediana (aplica a definição de mediana ao caso par).</p>   |
| Conflito $\bar{C}4$ | <p>Questão 4b (versão tabelar). Resolução do aluno A166:<br/> <del>4</del>, 5, 5, <del>6</del></p> $\frac{55}{4} = 13,75$  | <p>-Os alunos leem o enunciado (processo de interpretação), ordenam (propriedade) os dados para determinar a mediana (aplicar a definição e reconhecer um campo de problemas), reconhecendo a necessidade de identificar o valor central (propriedade).</p> <p>-O aluno A166, ao aplicar o algoritmo da mediana (aplicar a definição), exhibe o primeiro conflito, já que utiliza os valores das frequências absolutas e não os valores da variável (particularização inadequada de um conceito); o segundo conflito emerge no cálculo esperado da média aritmética dos dois valores centrais (aplicação inadequada do algoritmo) pois para esse cálculo não considera no numerador a adição dos dois valores centrais e no denominador considera o número total de dados (inadequada particularização de conceitos), obtendo um valor incorreto para a mediana dos dados considerados; o terceiro conflito emerge do resultado obtido, pois o aluno revela desconhecer que o valor da mediana deve situar-se entre os valores centrais (propriedade inadequada de conceitos).</p> |
|                     | <p>Questão 5b (versão gráfica de barras). Resolução do aluno A96:<br/>           5, <b>14</b>, 6</p> $\frac{14}{2} = 7$  | <p>-O primeiro conflito revelado pelo aluno A96 surge ao considerar o conjunto de frequências absolutas como valores da variável em estudo (particularização inadequada de um conceito) na aplicação do algoritmo de determinação da mediana e emerge ainda um outro conflito ao considerar metade do valor central (aplicação inadequada do algoritmo).</p>   |
|                     | <p>Questão 6c (versão gráfico circular. Resolução do aluno A156):<br/>           0, 1, 2<br/> <math>(1+2)/2 = 3/2 = 1,5</math></p>   | <p>-O primeiro conflito revelado pelo aluno A96 surge ao considerar o conjunto de frequências absolutas como valores da variável em estudo (particularização inadequada de um conceito) na aplicação do algoritmo de determinação da mediana e emerge ainda um outro conflito ao considerar metade do valor central (aplicação inadequada do algoritmo).</p> <p>-O aluno A156, ao aplicar o algoritmo da mediana (aplicar a definição), exhibe o primeiro conflito, já que utiliza os valores da variável sem ter em conta as frequências relativas (particularização inadequada de um conceito); o segundo conflito emerge quando aplica incorretamente o algoritmo de cálculo da mediana (algoritmo), já que aplica o algoritmo para o caso par (identificação inadequada de propriedades).</p>  |

No Quadro 19 apresentam-se as análises semióticas de cinco exemplos dos conflitos  $\bar{C}5$ ,  $\bar{C}6$  e  $\bar{C}7$ .

Quadro 19 – Análise semiótica de exemplos dos conflitos  $\bar{C}5$ ,  $\bar{C}6$  e  $\bar{C}7$  nas três questões.

|  | Expressão  | Conteúdo   |
|--|--|--|
| Conflito $\bar{C}5$  | Questão 4b (versão tabelar). Resolução do aluno A256:<br>$\frac{13 \times 6 + 14 \times 4 + 15 \times 5 + 16 \times 6}{4} = 72,25$   | -Os alunos leem o enunciado (processo de interpretação), mas não identificam a mediana como a medida de localização central referida no problema (reconhecimento incorreto do campo de problemas).   |
|  | Questão 4b (versão tabelar). Resolução do aluno A135:<br>16 pois é o valor mais alto.  | -O aluno A256 apresenta um conflito na sua resolução ao determinar a média em vez de determinar a mediana (confusão entre conceitos). Nesse processo, representa o conceito de forma adequada (linguagem), mas outro conflito emerge da noção de média ao aplicar incorretamente o seu algoritmo de cálculo (algoritmo), já que divide o valor da soma dos valores da variável pelo número de valores distintos e não pelo número total de alunos (aplicação inadequada de conceito).  |
|  | Questão 5b (versão gráfico de barras). Resolução do aluno A28:<br>$14 + 12 = 26$<br>$26 \div 26 = 1$<br>A mediana é 1  | -O aluno A135 revela um conflito quando indica o valor do máximo do conjunto de dados (particularização incorreta ao problema) em vez de determinar a mediana (confusão entre conceitos).  |
|  | Questão 5b (versão gráfico de barras). Resolução do aluno A171:<br>A mediana do número de livros lidos pelos alunos nas férias é 0, porque é o menor número de livros lidos. | -No caso do aluno A28, o seu primeiro conflito surge quando identifica dois valores 14 e 12 (produto entre a frequência absoluta e o valor da variável para os valores da variável 1 e 2) (particulariza ao problema na determinação da média) em vez de determinar a mediana (confusão entre conceitos). Reconhece que o zero é o elemento neutro da adição e o elemento absorvente da multiplicação (propriedade), apesar de não o expressar; outro conflito emerge da indicação do número total de alunos da turma, já que é 25 e não 26. Por fim, indica o valor da mediana que, apesar de ser correto, foi determinado de forma incorreta (particularização inadequada de um conceito). |
|  | Questão 5b (versão gráfico de barras). Resolução do aluno A272:<br>$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 =$<br>$= 72 \div 8 = 9$  | -O aluno A171 indica para a mediana o mínimo do conjunto de dados (confusão entre conceitos), originando o primeiro conflito; outro conflito surge da justificação apresentada (aplicação inadequada da definição), já que associa ao menor número de livros lidos (talvez à menor frequência absoluta).   |
|  | Questão 6c (versão gráfico circular). Resolução do aluno A101:<br>2 irmãos, porque é o número que tem menos irmãos.  | -O aluno A272 apresenta um primeiro conflito ao considerar a média, de um conjunto de dados, e não a mediana (confusão entre conceitos), aplicando incorretamente o algoritmo do cálculo da média (algoritmo); outro conflito emerge ao adicionar os valores do eixo vertical do gráfico de barras como sendo o conjunto de dados correto (confusão entre conceitos e inadequada particularização de um conceito) e assume incorretamente que o “0” não influencia o valor da média (aplicação de propriedade), ao não o incluir.  |
|  | Questão 6c (versão gráfico circular). Resolução do aluno A100:<br>$60\% + 30\% + 10\% = 1$<br>$1 \div 2 = 0,5$   | -O aluno A101 indica para a mediana o máximo do conjunto de dados (confusão entre conceitos), originando o primeiro conflito; outro conflito surge da justificação apresentada (aplicação inadequada da definição), já que associa ao menor número de irmãos (talvez à menor frequência absoluta).   |
|  | Questão 6c (versão gráfico circular). Resolução do aluno A262:<br>a mediana é 1 porque os 60% são mais alunos  | -O aluno A100 apresenta um primeiro conflito ao considerar a média, de um conjunto de dados, e não a mediana (confusão entre conceitos), aplicando incorretamente o algoritmo do cálculo da média (algoritmo) e revelando dificuldade na obtenção do número total de alunos da turma (inadequada particularização de um conceito); outro conflito emerge ao adicionar os valores da frequência relativa do gráfico circular como sendo o conjunto de dados correto (confusão entre conceitos e inadequada particularização de um conceito) e assume incorretamente “1” como soma.  |
|  |  | -O aluno A262 revela um conflito quando indica o valor da mediana (particularização correta ao problema), mas justificando como sendo o valor modal (confusão entre conceitos).  |
|  | Conflito $\bar{C}6$  | Questão 4b (versão tabelar). Resolução do aluno A218:<br>A mediana é 20.   |
| Questão 5b (versão gráfico de barras). Resolução do aluno A223:<br>A mediana é $5 + 14 + 6 = 25$ |  | -O conflito dos alunos A218 e A223 surge ao considerarem a mediana como sendo o número total de alunos (particularização inadequada de um conceito).   |
| Questão 6c (versão gráfico circular). Resolução do aluno A127:<br>A mediana é 3 irmãos.          |  | -O conflito do aluno A127 surge ao considerar a mediana como sendo o número total dos valores da variável (particularização inadequada de um conceito).  |
|  | -Um outro conflito dos três alunos emerge do facto de não considerarem que a mediana é um valor compreendido entre os valores mínimo e máximo da variável.                   |  |

|                     |  |   |
|---------------------|--|---|
| Conflito $\bar{C}7$ | Questão 4b (versão tabelar). Resolução do aluno A30: A mediana é 14.           | -Os alunos leem o enunciado (processo de interpretação), mas não identificam o problema como sendo sobre o cálculo de mediana (reconhecer um campo de problemas inadequadamente).<br>-O conflito do aluno A30 surge ao considerar a mediana como sendo o primeiro valor central (particularização inadequada de um conceito). |
|                     | Questão 5b (versão gráfico de barras). Resolução do aluno A35: A mediana é 14. | -O conflito dos alunos A35 surge ao considerar a mediana como sendo a frequência absoluta do valor da mediana (particularização inadequada de um conceito). Um outro conflito emerge de o aluno não considerar que a mediana é um valor compreendido entre os valores mínimo e máximo da variável.                            |

Estes três tipos de conflitos compreendem as respostas onde a mediana é confundida com outra medida de localização (como a média, a moda, o mínimo ou o máximo), o número total de dados ou ainda frequências absolutas de valores observados da variável. Saliente-se que, numa análise mais detalhada das respostas não corretas incluídas na categoria  $\bar{C}5$ , constatou-se que 19% dos 102 alunos e 17% dos 101, referidos na Tabela 15, que exibiram simultaneamente o conflito  $\bar{C}5$  nas duas questões 4b e 5b e nas questões 5b e 6c, respetivamente, optaram pela mesma medida de localização nas duas questões, nomeadamente: todo o aluno que optou, na questão 4b, pela determinação da média (13%) ou pela indicação do valor mínimo (4%) ou do valor máximo (2%), também o fez na questão 5; quando um aluno optou, na questão 5, pela determinação da média (3%) ou pela indicação do valor mínimo (6%) ou do valor máximo (7%), também o fez na questão 6. Pela mesma tabela constata-se ainda que no caso da determinação da mediana, nas questões 4b e 5b, o conflito  $\bar{C}5$  apresenta um valor residual (2%) e dos 93 alunos, dois alunos que optaram na questão 4 pela indicação do valor mínimo, também o fizeram na questão 6.

#### 4.3.2. Conceito de média

Das três tarefas em análise apenas as questões 4c) (representação tabelar) e 5c) (representação gráfica) apresentam uma alínea sobre a determinação da média.

##### 4.3.2.1. Cálculo da média

4c Determina a média das idades dos alunos da turma. (versão tabelar)  
5c Qual o número médio de livros lidos pelos alunos nas férias. (versão gráfica)

No cálculo da média, ao analisar-se a Tabela 16, relativa aos 332 alunos, constata-se que predomina a resposta “incorreta” nas questões 4c (39,1%) e 5c (48,2%). Na representação tabelar existem mais respostas “corretas” (18,0%) do que na representação gráfica (12,0%). Salienta-se ainda que, entre o cálculo da mediana e da média, é nesta que há maior percentagem de respostas corretas (8,4%) em ambas as alíneas, não influenciando

no desempenho a forma de apresentação dos dados e não havendo evidência estatística de diferenças significativas entre as duas questões ( $p=0,070$ ).

Tabela 16 – Frequências absolutas (percentagens) dos tipos de respostas nas questões 4c e 5c

| Questão 4c | Questão 5c |         |            |            | Total      |
|------------|------------|---------|------------|------------|------------|
|            | C          | PC      | I          | NR         |            |
| C          | 28 (8,4)   | 1 (0,3) | 19 (5,7)   | 12 (3,6)   | 60 (18,0)  |
| PC         | 9 (2,7)    | 2 (0,6) | 7 (2,1)    | 9 (2,7)    | 27 (8,1)   |
| I          | 2 (0,6)    | 1 (0,3) | 87 (26,2)  | 40 (12,0)  | 130 (39,1) |
| NR         | 1 (0,3)    | 0 (0,0) | 47 (14,2)  | 67 (20,3)  | 115 (34,8) |
| Total      | 40 (12,0)  | 4 (1,2) | 160 (48,2) | 128 (38,6) | 332        |

Em termos de ausência de resposta, constata-se que 20,3% dos alunos não responderam a ambas as questões, sendo as propensões para não responder são muito próximas em ambas (questão 4c: 34,8%; questão 5c: 38,6%;  $p=0,295$ ), o que reforça a grande dificuldade dos alunos no cálculo da média em ambas as situações, ligeiramente maior em contexto gráfico e semelhante ao verificado no caso da mediana.

Procedendo de forma análoga ao ponto anterior (determinação da mediana), a subtabela de contingência de  $2 \times 2$  relativa às respostas de tipo PC e I, agregadas como respostas não corretas da Tabela 16, conclui-se pela existência de mudança significativa nas categorias das respostas não corretas ( $p=0,000$ ), sendo que as percentagens de respostas parcialmente corretas são significativamente diferentes nas duas questões (questão 4c: 8,1%; questão 5c: 1,2%;  $p=0,000$ ), assim como as percentagens de respostas incorretas (questão 4c: 39,1%; questão 5c: 48,2%;  $p=0,019$ ). Observa-se que quando os dados estão sob a forma gráfica surge uma menor percentagem de respostas parcialmente corretas e uma maior percentagem de respostas incorretas. Constata-se que as proporções de ocorrência de respostas não corretas não são significativamente diferentes nas duas questões (questão 4c: 47,2%; questão 5c: 49,4%;  $p=0,587$ ), sendo maior na questão 5c, onde os dados estão organizados em gráfico.

#### 4.3.2.2. Análise semiótica das respostas dos alunos no caso da média

Para a análise semiótica das respostas procede-se de forma análoga ao efetuado anteriormente: analisam-se, em primeiro lugar, as respostas corretas; e de seguida analisam-se as respostas não corretas, com o objetivo de identificar possíveis conflitos semióticos surgidos nas respostas às duas questões propostas.

#### 4.3.2.2.1. Análise semiótica das respostas corretas

No conjunto das respostas corretas foi identificada apenas uma categoria de resposta, a categoria C3. Nesta categoria, as respostas corretas resultaram da determinação da média ponderada com justificção adequada. As frequências de respostas corretas na categoria, para cada uma das questões, assim como as frequências de alunos que responderam corretamente e de forma similar às duas questões encontram-se na Tabela 17.

Tabela 17 – Frequências absolutas (percentagens) da categoria de respostas corretas em cada uma das questões 4c e 5c e em ambas as questões simultaneamente

| Categoria  | Questão 4c<br>(n=60) | Questão 5c<br>(n=40) | Questões 4c e 5c<br>(n=28) |
|--|----------------------|----------------------|----------------------------|
| C3. Aplicar o algoritmo no cálculo da média ponderada, com justificção adequada. | 60 (100)             | 40 (100)             | 28 (100)                   |

Constata-se que responderam, simultaneamente, de forma correta às duas questões 28 alunos, o que representa apenas 8% dos 332 alunos.

No Quadro 20 estão registadas análises de respostas corretas na categoria C3 para ambos os contextos, tabelar (questão 4c) e gráfico (questão 5c).

Quadro 20 – Análise semiótica de exemplos da categoria C3 nas questões 4c e 5c.

|              | Expressão   | Conteúdo   |
|--------------|---|--|
| Categoria C3 | Questão 4c (versão tabelar). Resolução do aluno A16:<br>$\frac{13 \times 6 + 14 \times 4 + 15 \times 5 + 16 \times 5}{20} = \frac{289}{20} = 14,45$ | -Os alunos leem os enunciados (processo de interpretação) e identificam corretamente o(s) valor(es) pretendido(s) (particularização do problema). Os alunos identificam corretamente a questão como sendo uma questão sobre a média (reconhecer um campo de problemas).  |
|              | A média é 14,45   |  |
|              | Questão 5c (versão gráfico de barras). Resolução do aluno A318:<br>$\frac{0 \times 5 + 1 \times 14 + 2 \times 6}{25} = 1,04$                        | -Os alunos A16 e A318 identificam as frequências absolutas de cada um dos valores da amostra (particularização adequada de um conceito), o valor total de alunos da turma e aplicam o algoritmo da média ponderada (discriminação adequada da definição).<br>-Todos revelam reconhecer que a média é um valor que se encontra entre os valores mínimo e máximo do conjunto de dados (aplicação adequada da definição). |
|              | O número médio de livros lidos é de 1,04  |  |

#### 4.3.2.2.2. Análise semiótica das respostas parcialmente corretas e incorretas

De seguida, descrevem-se os conflitos semióticos exibidos nas respostas não corretas dos alunos: relativamente aos PC, 8,1% em 4b e 1,2% em 5b; em relação à I, 39,1% em 4b e 48,2% em 5b. No Tabela 18 apresentam-se frequências para cada tipo de resposta categorizada.

Tabela 18 – Frequências absolutas (percentagens) das categorias de conflitos semióticos identificados na questão 4c, na questão 5c e simultaneamente nas duas questões, e valor de prova (p) dos z-testes de comparação de proporções de cada tipo de conflito entre as questões 4c e 5c

| Categorias (conflitos semióticos)  | Questão 4c<br>(n=157) | Questão 5c<br>(n=164) | Valor de<br>prova | Questões 4c e 5c<br>(n=30) |
|--|-----------------------|-----------------------|-------------------|----------------------------|
| <b>C̄9.</b> Reconhecer o algoritmo do cálculo da média, no conjunto de dados solicitados, sem determinar o valor médio.  | 11 (7)                | 28 (17)               | 0,006             | 2 (7)                      |
| <b>C̄10.</b> Aplicar o algoritmo do cálculo da média, mas sem identificar corretamente o conjunto de dados               | 53 (34)               | 34 (21)               | 0,009             | 19 (62)                    |
| <b>C̄11.</b> Identificar corretamente o conjunto de dados, mas sem aplicar corretamente o algoritmo do cálculo da média. | 16 (10)               | 33 (20)               | 0,013             | 2 (7)                      |
| <b>C̄12.</b> Identificar incorretamente o conjunto de dados e aplicar incorretamente o algoritmo do cálculo da média.    | 9 (6)                 | 2 (1)                 | 0,026             | 2 (7)                      |
| <b>C̄13.</b> Aplicar outra medida estatística que não a média.   | 16 (10)               | 18 (11)               | 0,819             | 2 (7)                      |
| <b>C̄14.</b> Outras respostas  | 52 (33)               | 49 (30)               | 0,532             | 3 (10)                     |

Da Tabela 18 verifica-se que, relativamente às questões 4c (contexto tabelar com 157 respostas não corretas) e 5c (contexto gráfico com 164 respostas não corretas), o tipo de conflito semiótico mais frequente é C̄10 (questão 4c: 34%; questão 5c: 21%) e o menos frequente correspondem à aplicação incorreta do algoritmo do cálculo da média, C̄12 (4: 6%; 5: 1%). Tomando os 30 alunos com respostas não corretas simultaneamente às duas questões, constata-se que todos apresentaram o mesmo tipo de conflito semiótico na determinação da média, sendo a maior parte inserida na categoria C̄10 (com 62%) simultaneamente nas duas questões, e pelo mesmo aluno. Comparando as proporções de alunos em cada tipo de conflito semiótico entre as duas questões, constata-se haver diferenças significativas para todos os conflitos, exceto C̄13 e C̄14 (onde  $p > 0,05$ ).

Da categorização dos conflitos descritos na Tabela 18 reconhece-se que a agregação dos conflitos C̄9 e C̄10 (designada por C̄9+C̄10) constitui o conjunto das respostas onde, embora não seja apresentado o valor correto da média, não se detetam erros no procedimento algorítmico do cálculo desta, sendo que o aluno ou não o conclui ou conclui-o corretamente. Similarmente, reconhece-se que a agregação dos conflitos C̄11 e C̄12 (designada por C̄11+C̄12) corresponde às respostas não corretas onde a aplicação do algoritmo de cálculo da média foi incorreta e a agregação dos conflitos C̄10 e C̄12 (designada por C̄10+C̄12) corresponde às respostas não corretas onde foi considerado um conjunto de dados incorreto na determinação da média. Analisando as proporções dessas três categorias agregadas de conflitos, conclui-se que: (i) relativamente à agregação C̄9+C̄10, não existem diferenças significativas entre as proporções de respostas não corretas com aplicação correta do algoritmo do cálculo da mediana nas questões 4c e 5c (questão 4c :64/157=40,8%; questão 5c: 62/164=37,8%;  $p= 0,587$ ); (ii) relativamente à

agregação  $\bar{C}11+\bar{C}12$ , não existem diferenças significativas entre as proporções de respostas não corretas com aplicação incorreta do algoritmo do cálculo da mediana nas questões 4c e 5c (questão 4c:  $25/157=15,9\%$ ; questão 5c:  $35/164=21,3\%$ ;  $p=0,213$ ); e (iii) relativamente à agregação  $\bar{C}10+\bar{C}12$ , existem diferenças significativas entre as proporções de respostas não corretas provenientes da identificação errada do conjunto de dados a considerar nas questões 4c e 5c (questão 4c:  $62/157=39,5\%$ ; questão 5c:  $36/164=22,0\%$ ;  $p=0,001$ ). Seguidamente exemplificam-se análises semióticas de respostas parcialmente corretas e incorretas correspondentes às categorias de conflitos semióticos listadas na Tabela 18. No Quadro 21 apresentam-se análises semióticas de exemplos dos conflitos  $\bar{C}9$  e  $\bar{C}10$ , onde o algoritmo do cálculo da média é aplicado corretamente, mas não concluído ou é concluído mas aplicado a um conjunto errado de dados.

Quadro 21 – Análise semiótica de exemplos dos conflitos  $\bar{C}9$  e  $\bar{C}10$  nas questões 4c e 5c.

|                      | Expressão   | Conteúdo  |
|----------------------|---|---|
| Conflito $\bar{C}9$  | <p>Questão 4c (versão tabular). Resolução do aluno A36:</p> $\frac{13 + 6 + 14 + 4 + 15 + 5 + 16 + 5}{4} =$   | <p>-Os alunos leem o enunciado (processo de interpretação) e identificam a medida que é solicitada (reconhecem e particularizam-lhe um campo deste).</p> <p>-O primeiro conflito do aluno A36 surge da aplicação do algoritmo de cálculo da média (expressão), considerando que os valores que figuram na tabela são referentes a dados não organizados (inadequada interpretação da tabela). Ao aplicar o algoritmo, no cálculo da média ponderada (procedimento), o aluno reconhece que os valores da amostra têm que ser adicionados (definição); contudo indica a adição dos valores da variável pela respetiva frequência absoluta (confusão entre média ponderada e média aritmética simples).</p> <p>-O aluno A187 revela reconhecer que o algoritmo de cálculo a aplicar é o da média ponderada (definição) aplicando-o de forma incorreta (linguagem e expressão).</p> <p>-Nas duas resoluções surgem outro conflito que emerge da indicação errada do número total de alunos da turma (particularizam o problema relativamente ao número total de alunos), ao considerar o número de valores distintos da variável e não o número total de alunos (procedimento inadequada). Os alunos não concluem as suas resoluções (procedimento).</p>  |
|                      | <p>Questão 5c (versão gráfica). Resolução do aluno A187:</p> $(0 \times 5 + 1 \times 14 + 2 \times 6)/3$  |   |
| Conflito $\bar{C}10$ | <p>Questão 4c (versão tabular). Resolução do aluno A85:</p> $13 + 14 + 15 + 16 = 58$ $6 + 4 + 5 + 5 = 20$ $58 \div 20$ <p>R: A média é de 2,9</p>                     | <p>-Os alunos leem o enunciado (processo de interpretação) e identificam o que lhes é solicitado (reconhecer um campo de problema e particularizar ao problema).</p> <p>-O aluno A85 determina corretamente o número total de alunos (particularização de conceito) e o conflito surge ao aplicar o algoritmo do cálculo da média (definição e expressão) sem atender às frequências absolutas dos valores da variável na determinação da soma das idades (inadequada aplicação de propriedade). Um outro conflito emerge do resultado obtido, pois o aluno revela desconhecer que o valor médio se situa entre os valores mínimo e máximo das idades da turma (propriedade inadequada).</p> <p>-O aluno A34 aplica corretamente a definição de média aritmética (definição e expressão) e o conflito surge quando ele aplica o algoritmo do cálculo da média (linguagem) sem atender às frequências absolutas de cada um dos valores da variável (inadequada aplicação da definição).</p> <p>-O aluno A197 apresenta um conflito quando aplica o algoritmo de cálculo da média aritmética (definição) dos valores do eixo vertical do gráfico (linguagem) em vez dos valores da variável (confusão na escolha do conjunto de dados do problema).</p> |
|                      | <p>Questão 5c (versão gráfica). Resolução do aluno A34:</p> $\frac{0+1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ <p>R: O número médio de livros lidos pelos alunos nas férias é 1.</p> |   |
|                      | <p>Questão 5c (versão gráfica). Resolução do aluno A197:</p> $\frac{0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16}{9} = \frac{72}{9} = 8$                                     |   |

No Quadro 22 apresentam-se análises semióticas de exemplos de respostas não corretas das categorias  $\bar{C}11$  e  $\bar{C}12$ , onde o algoritmo do cálculo da média não é aplicado corretamente.

Quadro 22 – Análise semiótica de exemplos dos conflitos  $\bar{C}11$  e  $\bar{C}12$  nas questões 4c e 5c.

|                      | <i>Expressão</i>   | <i>Conteúdo</i>   |
|----------------------|--|---|
| Conflito $\bar{C}11$ | <p>Questão 4c (versão tabelar).<br/>Resolução do aluno A170:<br/>A média das idades dos alunos da turma é 72,25.<br/><math>(13 \times 6 + 14 \times 4 + 15 \times 5 + 16 \times 5) \div 4 = 72,25</math></p>             | <p>-Os alunos leem o enunciado (processo de interpretação) e identificam o que lhes é solicitado (particularizar o problema e reconhecer um campo de problemas). Revelam conhecer a noção de média ponderada (definição) e o respetivo algoritmo de cálculo (linguagem) e determinam corretamente a soma das idades dos alunos (A170) e a soma do número de livros lidos da turma (A171) (linguagem e algoritmo).<br/>-O aluno A170 apresenta um conflito emergente na indicação errada do número total de alunos da turma (particulariza o problema) ao considerar o número de valores distintos da variável e não o número total de alunos (procedimento inadequado). Um outro conflito emerge do resultado obtido, pois o aluno revela desconhecer que o valor médio deve situar-se entre o valor mínimo e o valor máximo das idades da turma (propriedade inadequada).<br/>-O aluno A171 mostra um conflito na indicação errada do número total de alunos da turma (particulariza o problema) ao considerar o número de valores distintos da variável e não o número total de alunos (procedimento inadequado). Um outro conflito emerge do resultado obtido, pois o aluno revela desconhecer que o valor médio deve situar-se entre os valores mínimo e máximo do número de livros lidos pelos alunos da turma (propriedade inadequada).</p>   |
|                      | <p>Questão 5c (versão gráfica).<br/>Resolução do aluno A171:<br/>O número médio de livros lidos pelos alunos nas férias é 8,7.<br/><math>(5 \times 0 + 1 \times 14 + 2 \times 6) \div 3 = 26 \div 3 \cong 8,7</math></p> |   |
| Conflito $\bar{C}12$ | <p>Questão 4c (versão tabelar).<br/>Resolução do aluno A203:<br/><math display="block">\frac{13 + 14 + 15 + 16}{10} = 43,6</math></p>  | <p>- Os alunos leem o enunciado (processo de interpretação) e identificam o que lhes é solicitado, a determinação da média (particularizar ao problema), identificando corretamente o problema (reconhecer um campo de problemas). Revelam conhecer a noção de média aritmética (definição) e o respetivo algoritmo de cálculo (linguagem). Nas duas situações tem lugar o primeiro conflito quando os alunos não têm em conta as frequências absolutas (confusão entre média ponderada e média aritmética).<br/>-Outro conflito emerge do facto do aluno A203 expressar incorretamente a soma das idades dos alunos da turma (linguagem), por ignorar as frequências absolutas dos valores da variável (procedimento inadequado), e um outro conflito emerge da indicação errada do número total de alunos da turma (particulariza o problema), ao considerar metade do número total de alunos (procedimento inadequado).<br/>-Mais um conflito emerge do facto do aluno A201 expressar incorretamente a soma dos livros lidos pelos alunos da turma (linguagem), por optar por adicionar as frequências absolutas dos valores da variável, ignorando os respetivos valores da variável (procedimento inadequado). Novo conflito emerge da leitura do gráfico (processo de interpretação), já que a frequência do valor “0” é “5” e não “4,5” (linguagem) e um outro conflito emerge da indicação errada do número total de alunos da turma (particulariza o problema), ao considerar o valor um como número total de alunos (procedimento inadequado).<br/>-Os dois alunos apresentam ainda um outro conflito emergente do resultado obtido, pois revelam desconhecer que o valor médio deve situar-se entre os valores mínimo e máximo da variável respetiva (propriedade inadequada).</p> |
|                      | <p>Questão 5c (versão gráfica).<br/>Resolução do aluno A201:<br/>Número médio é 24,5<br/><math display="block">\frac{4,5 + 6 + 14}{1} = 24,5</math></p>  |   |

No Quadro 23 apresentam-se as análises semióticas de quatro exemplos do conflito  $\bar{C}13$ , que compreendem as respostas onde a média é confundida com outra medida de localização (como a mediana, o mínimo ou o máximo). Saliente-se que, numa análise mais detalhada das respostas não corretas incluídas na categoria  $\bar{C}13$ , constatou-se que 10% dos 30 alunos referidos na Tabela 16, que exibiram simultaneamente o conflito  $\bar{C}14$  nas duas questões, optaram pela mesma medida de localização nas duas questões, nomeadamente: todo o aluno que optou, na questão 4c, pela indicação do valor do mínimo (7%), também o fez na questão 5c.



Quadro 23 – Análise semiótica de exemplos dos conflitos C13 nas questões 4c) e 5c).

|              | Expressão  | Conteúdo   |
|--------------|--|--|
| Conflito C13 | Questão 4c (versão tabelar).<br>Resolução do aluno A275:<br>13, 13, 13, 13, 13, 13, 14,<br>14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16,<br>16, 16, 16<br>14,5 | -O aluno A275 na sua resposta revela um conflito entre conceitos, ao determinar a mediana em vez da média (inadequada particularização). Reconhece a necessidade de identificar os valores centrais (propriedade), aplicando corretamente o algoritmo de cálculo da mediana (linguagem), para um conjunto de dados par (particularizar um conceito). |
|              | Questão 4c (versão tabelar).<br>Resolução do aluno A279:<br>13 anos  | -O aluno A279 revela um conflito quando indica o valor mínimo ou a moda (ambos coincidem) em vez do valor médio (conflito de conceitos).<br>-No caso da resposta do aluno A258, o conflito surge ao considerar o número máximo em vez de determinar a média (inadequada particularização de um conceito).  |
|              | Questão 5c (versão gráfica).<br>Resolução do aluno A258:<br>O número médio é 2   | -Para o aluno A262, o conflito surge quando indica o valor mínimo em vez do valor médio (conflito de conceitos).   |
|              | Questão 5c (versão gráfica).<br>Resolução do aluno A262.<br>0 livros   |  |

#### 4.3.3. Valor mínimo e valor máximo

Das três questões em análise apenas as questões 4 (representação tabelar) e 5 (representação gráfica) é solicitada a indicação do valor do mínimo e do máximo.

##### 4.3.3.1. Identificação mínimo e máximo

4d Qual a idade máxima dos alunos da turma? E a idade mínima? (versão tabelar)  
5d Qual o número mínimo e livros lidos pelos alunos nas férias? E o número máximo? (versão gráfica barras)

Na Tabela 19 estão registadas as respostas dos 332 alunos sobre a indicação dos valores mínimo e máximo. Na tabela de contingência de 4×4 apresentam-se as contagens e as percentagens dos tipos de respostas (C, PC, I, NR) observadas nas questões envolvendo uma representação tabelar versus uma representação gráfica, onde se conclui o facto os dados estarem representados de forma distinta, não parece existir alteração significativa de categoria de resposta entre as questões 4d e 5d ( $p=0,453$ ).

Tabela 19 – Frequências absolutas (percentagens) dos tipos de respostas nas questões 4d) e 5d)

| Questão 4d | Questão 5d |           |           |           | Total      |
|------------|------------|-----------|-----------|-----------|------------|
|            | C          | PC        | I         | NR        |            |
| C          | 158 (47,6) | 44 (13,4) | 37 (11,1) | 32 (9,6)  | 271 (81,7) |
| PC         | 2 (0,6)    | 0 (0,0)   | 2 (0,6)   | 2 (0,6)   | 6 (1,8)    |
| I          | 12 (3,6)   | 5 (1,5)   | 6 (1,8)   | 4 (1,2)   | 27 (8,1)   |
| NR         | 3 (0,9)    | 2 (0,6)   | 2 (0,6)   | 21 (6,3)  | 28 (8,4)   |
| Total      | 175 (52,7) | 51 (15,5) | 47 (14,1) | 59 (17,7) | 332        |

Em termos globais, tanto na questão 4d como na questão 5d prevalece a resposta correta, sendo a percentagem de respostas corretas ligeiramente maior na questão 4d

(81,7%) do que na questão 5d (52,7%), não havendo, porém, evidência estatística de diferenças significativas entre estas duas percentagens ( $p=0.553$ ), e indicam corretamente os valores máximo e mínimo em ambas as questões 4d e 5d 47,6% dos alunos.

Quando se extrai da Tabela 19 a subtabela de contingência de  $2 \times 2$  relativa às respostas de tipo PC e I (respostas não corretas), conclui-se pela existência de alteração significativa nas categorias das respostas não corretas ( $p=0.000$ ), sendo que as percentagens de respostas parcialmente corretas são significativamente diferentes nas duas questões (questão 4d: 1,8%; questão 5d: 15,5%;  $p=0.000$ ), assim como as percentagens de respostas incorretas (questão 4d: 8,1%; questão 5d: 14,1%;  $p=0.000$ ). Constata-se também que as proporções de ocorrência de respostas não corretas (agregado das respostas PC e I) são significativamente diferentes nas duas questões (questão 4c: 9,9%; questão 5d: 29,6%;  $p=0,006$ ), sendo maior na questão 5d, onde os dados estão organizados em gráfico.

#### 4.3.3.2. Análise semiótica das respostas no caso dos valores mínimo e máximo

Começa-se a análise semiótica das respostas pelas respostas corretas e, de seguida, continua-se com as respostas não corretas, estas últimas com o objetivo de identificar possíveis conflitos semióticos surgidos nas respostas.

##### 4.3.3.2.1. Análise semiótica das respostas corretas

No conjunto das respostas corretas foi identificada apenas uma categoria de resposta, a categoria C4. Nesta categoria as respostas corretas demonstram claramente a obtenção dos valores mínimo e máximo. As frequências de respostas corretas na categoria, para cada uma das questões, assim como as frequências de alunos que responderam corretamente e de forma similar às duas questões estão registadas na Tabela 20.

Tabela 20 – Frequências absolutas (percentagens) das categorias de respostas corretas em cada uma das questões 4d) e 5d) e em ambas as questões simultaneamente

| Categorias   | Questão 4d)<br>(n=271) | Questão 5d)<br>(n=175) | Questões 4d) e 5d)<br>(n=158) |
|--|------------------------|------------------------|-------------------------------|
| <b>C4.</b> Indica de forma clara os valores do mínimo e do máximo. | 271 (100)              | 175 (100)              | 158 (100)                     |

Na Tabela 20 apresentam-se exemplos de respostas corretas da categoria C4, reportada na Quadro 24, e para ambos os contextos, tabelar (questão 5d) e gráfico (questão 4d).

Quadro 24 –Análise semiótica de exemplos da categoria C4 nas questões 4d e 5d.

|              | Expressão   | Conteúdo   |
|--------------|---|--|
| Categoria C4 | Questão 4d (versão tabelar). Resolução do aluno A310: | -Os alunos leem os enunciados (processo de interpretação) e identificam corretamente o(s) valor(es) pretendido(s) (particularização do problema). Os alunos identificam corretamente a questão como sendo uma questão sobre identificação de valores extremos da amostra (reconhecer um campo de problemas). |
|              | O mínimo é 13 anos e o máximo é 16 anos               |  |
|              | Questão 5d (versão gráfica). Resolução do aluno A185: | -Os alunos A310 e A185 identificam os valores da variável (particularização adequada de um conceito), que correspondem aos extremos da amostra (aplicação adequada da definição).  |
|              | Mínimo = 0 livros lidos<br>Máximo = 2 livros lidos    | -Ambos os alunos revelam reconhecer que o menor valor da variável corresponde ao mínimo e que o maior valor corresponde ao máximo (aplicação adequada da definição).   |

#### 4.3.3.2.2. Análise semiótica das respostas parcialmente corretas e incorretas

Analisadas as respostas não corretas dos 332 alunos, sobre a identificação dos valores extremos da amostra, na questão 4d (contexto tabelar) e questão 5d (contexto gráfico), foram identificados cinco tipos de conflitos semióticos nas respostas não corretas dos alunos (questão 4d: 8,1% PC e 39,1% I; questão 5d: 1,2% PC e 48,2% I). Na Tabela 21 apresentam-se as frequências e percentagens para cada tipo de conflito e as frequências de alunos que exibiram simultaneamente o mesmo tipo de conflito semiótico nas duas questões.

Tabela 21 – Frequências absolutas (percentagens) das categorias de conflitos semióticos identificados na questão 4d, na questão 5d e simultaneamente nas duas questões, e valor de prova (p) dos z-testes de comparação de proporções de cada tipo de conflito entre questão 4d e 5d

| Categorias (conflitos semióticos)   | Questão 4d<br>(n=33) | Questão 5d<br>(n=98) | Valor de prova | Questões 4d e 5d<br>(n=1) |
|---|----------------------|----------------------|----------------|---------------------------|
| <b>C15.</b> Identificar o valor máximo correto e o valor mínimo incorreto ou não o referir                              | 5 (16)               | 24(24)               | 0,264          | 0(0)                      |
| <b>C16.</b> Identificar o valor mínimo correto e o valor máximo incorreto ou não o referir                              | 1 (3)                | 2 (2)                | 0,742          | 0(0)                      |
| <b>C17.</b> Identificar o valor máximo e mínimo das frequências   | 15 (45)              | 23(23)               | 0,016          | 1 (8)                     |
| <b>C18.</b> Identificar o valor máximo e mínimo correspondentes aos valores máximo e mínimo das respectivas frequências | 12 (36)              | 40(41)               | 0,651          | 0(0)                      |
| <b>C19.</b> Outras respostas  | 0 (0)                | 9 (10)               | 0,071          | 0(0)                      |

Da análise da Tabela 21 constata-se que relativamente à questão 4d (contexto tabelar), entre 33 respostas não corretas, o tipo de conflito mais frequente é  $\bar{C}17$  (45%), enquanto que na questão 5d (contexto gráfico), entre as 98 respostas não corretas dessa questão, o conflito mais frequente é  $\bar{C}18$  (41%). Em relação às respostas não corretas simultâneas às duas questões, constata-se que apenas um aluno (8%) apresenta o mesmo tipo de conflito semiótico na identificação dos valores extremos ( $\bar{C}17$ ).

Comparando as proporções de alunos em cada tipo de conflito semiótico entre as duas questões, constata-se que o número de alunos incluídos no conflito  $\bar{C}19$  é mais

frequente na questão 5d (10%) do que na questão 4d (0%). Constata-se também haver diferenças significativas apenas para o conflito  $\bar{C}17$ , por apresentar  $p < 0,05$ .

Na Tabela 21, da categorização dos conflitos aí descritos, reconhece-se que a agregação das categorias  $\bar{C}15$  e  $\bar{C}16$  (designada por  $\bar{C}15+\bar{C}16$ ) constitui o conjunto de respostas onde os alunos reconhecem o conjunto correto de dados, mas apenas identificam corretamente um dos valores, o máximo ou o mínimo. A agregação das categorias  $\bar{C}17$  e  $\bar{C}18$  (designada por  $\bar{C}17+\bar{C}18$ ) corresponde às questões não corretas na identificação de valores extremos em que os alunos ilustram, de alguma forma, o procedimento correto para a identificação desses valores, mas aplicam-no a um conjunto de dados incorreto como, por exemplo, o conjunto das frequências absolutas dos valores da variável. Analisando as proporções dessas duas categorias agregadas de conflitos, conclui-se que: (i) relativamente à agregação  $\bar{C}15+\bar{C}16$ , não existem diferenças significativas entre as proporções de respostas não corretas com identificação incorreta de um dos valores extremos, máximo ou mínimo (questão 4d:  $6/33=18,1\%$ ; questão 5d:  $26/98=26,5\%$ ;  $p=0,334$ ); (ii) relativamente à agregação  $\bar{C}17+\bar{C}18$ , não existem diferenças significativas entre as proporções de respostas não corretas com identificação incorreta do dois extremos, máximo e mínimo (questão 4d:  $27/33=81,8\%$ ; questão 5d:  $63/98=64,3\%$ ;  $p=0,060$ ).

A categoria  $\bar{C}19$  foi adicionada para incluir as restantes respostas, sendo constituída por respostas sem sentido, tais como respostas associadas a um qualquer valor da frequência absoluta, sem qualquer explicação sobre a sua obtenção e podendo resultar de uma atribuição ao acaso. Saliente-se que nenhum aluno, em nenhuma das questões, determinou outra estatística diferente da solicitada.

No Quadro 25 apresentam-se análises semióticas de exemplos dos conflitos  $\bar{C}15$  e  $\bar{C}16$ , onde o aluno identifica corretamente apenas um dos valores pedidos.

Quadro 25 – Análise semiótica de exemplos de categoria,  $\bar{C}15$  e  $\bar{C}16$  nas questões 4d e 5d.

|                      | Expressão   | Conteúdo   |
|----------------------|---|--|
| Conflito $\bar{C}15$ | Questão 4d (versão tabelar).<br>Resolução do aluno A249:<br>A idade máxima é 16 e a mínima é 5. | -Os alunos leem o enunciado (processo de interpretação), identificam o que lhes é solicitado (reconhecer um campo de problemas) e indicam corretamente o valor máximo (particularizar ao problema).<br>-O aluno A249 ao identificar incorretamente o valor mínimo da idade da turma revela um conflito entre conceitos, já que indica como valor mínimo o valor da frequência absoluta correspondente ao valor máximo (particularizar um conceito). Outro conflito emerge da interpretação incorreta da tabela, pois o aluno considera dados não organizados em tabela (inadequada interpretação da tabela), daí não distinguir valor da variável de frequências absolutas (confusão entre conceitos). |
|                      | Questão 5d (versão gráfica).<br>Resolução do aluno A282:<br>1 número mínimo e 2 número máximo.  | -O aluno A282 revela conflito ao identificar incorretamente o valor mínimo do número de livros lidos pelos alunos da turma, já que ignora o valor "0" da variável (aplicação inadequada da propriedade).   |

|                      |  |  |
|----------------------|--|--|
| Conflito $\bar{C}16$ | Questão 4d (versão tabular).<br>Resolução do aluno A278:<br><br>A idade máxima é 10 e a mínima é 13. | - Os alunos leem o enunciado (processo de interpretação) e identificam o que lhe é solicitado (reconhecer um campo de problemas), indicando corretamente o mínimo (particularizar ao problema).<br>-O conflito surge quando o aluno A278 identifica incorretamente o valor máximo da idade da turma (definição), não se entendendo bem de onde surge o valor 10, a não ser o facto de ser metade do número total de alunos da turma (conflito entre conceitos). Outro conflito emerge de o aluno ter confundido o mínimo com valor superior ao do máximo (aplicação incorreta de definição). |
|                      | Questão 5d (versão gráfica).<br>Resolução do aluno A122:<br>É 0 livros                               | -O aluno A122 apresenta um conflito ao identificar incorretamente o valor máximo das idades da turma (definição), não se entendendo bem de onde surge este valor, a não ser o facto considerar que o mínimo coincide com o máximo (inadequada aplicação da definição).   |

No Quadro 26 apresentam-se análises semióticas de exemplos dos conflitos  $\bar{C}17$  e  $\bar{C}18$ , onde o aluno não identifica corretamente qualquer um dos extremos solicitados.

Quadro 26 – Análise semiótica de exemplos de categoria,  $\bar{C}17$  e  $\bar{C}18$  nas questões 4d e 5d.

|                      | Expressão   | Conteúdo  |
|----------------------|---|---|
| Conflito $\bar{C}17$ | Questão 4d (versão tabular).<br>Resolução do aluno A166:<br><br>A idade máxima é o 6 e o mínimo é o 4.  | -Os alunos leem o enunciado (processo de interpretação), identificam o que lhe é solicitado (reconhece um campo de problemas) e reconhecem a noção de valor máximo e valor mínimo de um conjunto de dados numérico (particulariza ao problema).<br>-O primeiro conflito dos alunos surge ao identificarem incorretamente o valor máximo e mínimo (definição), já que consideram tais valores do conjunto das frequências absolutas e não dos valores da variável (conflito entre conceitos). Um outro conflito emerge da aplicação dos conceitos a um conjunto de dados que não o solicitado, pois os alunos referem-se às frequências absolutas (conflito de conceitos).   |
|                      | Questão 5d (versão gráfica).<br>Resolução do aluno A148:<br><br>O número mínimo é 5 e o número máximo de livros lidos é 14.                       |   |
| Conflito $\bar{C}18$ | Questão 4d (versão tabular).<br>Resolução do aluno A156:<br><br>Máximo – 13      mínimo – 14  | -Os alunos leem o enunciado (processo de interpretação), identificam o que lhe é solicitado (reconhecer um campo de problemas), no entanto indicam, incorretamente, pelo menos um dos valores pedidos (inadequada particularização do problema).<br>-O conflito do aluno A156 surge ao identificar incorretamente o valor máximo da idade da turma (definição). Outro conflito emerge de o aluno ter identificado o mínimo como valor superior ao máximo (aplicação incorreta de definição). Um outro conflito surge ao designar os valores máximo e mínimo tendo em conta a dimensão da frequência absoluta (a maior frequência absoluta - 6 alunos com 13 anos, com a menor frequência absoluta 4 alunos com 14 anos) (conflito entre conceitos). |
|                      | Questão 5d (versão gráfica).<br>Resolução do aluno A230:<br><br>O número mínimo de livros lidos pelos alunos nas férias é 0 e, número máximo é 1. | -O conflito do aluno A230 surge ao identificar incorretamente o número máximo de livros lidos pelos alunos da turma (linguagem). O valor expresso pelo aluno surge pelo facto de este referir-se à maior barra do gráfico, assim como o mínimo se refere à menor barra (inadequada particularização do problema).   |

#### 4.4. Síntese

A análise das respostas dos 332 alunos do 8.º ano, considerando a categorização das respostas em “correta”, “parcialmente correta” e “incorreta”, além da categoria “não resposta”, permitiu avaliar o conhecimento dos alunos face a seis questões sobre a

Funções e Estatística. Num primeiro momento procedeu-se à análise das respostas PC e I dos alunos, nas duas temáticas, agrupando-se os resultados em tabelas de contingência, por questão, e ilustrando, em cada questão, as respostas mais frequentes. Nessa análise constatou-se que nas questões sobre Funções as dificuldades dos alunos eram predominantemente sobre a identificação do domínio/contradomínio (na questão 1e com 16% de alunos a responder corretamente), a identificação de variável dependente (nas questões 2e e 3e com 15% e 19%, respetivamente, de respostas corretas) e a interpretação de comparação de objetos num gráfico (questão 3b, com uma percentagem de respostas corretas muito baixo, 2%). Nas questões sobre Estatística, os alunos revelaram maior dificuldade nas questões referentes às medidas de tendência central. No caso da determinação da mediana, os alunos revelaram maior dificuldade em contexto gráfico (questão 6c, com 6% de respostas corretas) do que em contexto tabelar (questão 4b, com 10% de respostas corretas), sendo o desempenho dos alunos ligeiramente melhor quando os dados estão organizados em gráfico de barras (questão 5b), com 12% de respostas corretas); na determinação da média, o desempenho dos alunos revelou-se melhor em contexto tabelar (questão 4c, com 18% de respostas corretas) do que em contexto gráfico (questão 5c, com 12% de respostas corretas). Por último, verificou-se que na resolução dos problemas (questões 4e, 5e e 6e) o melhor desempenho na questão 4e (15% de respostas corretas), que relaciona os conceitos de moda e mediana, em suporte tabelar; o problema sobre média, em suporte gráfico, apresenta desempenho inferior (questão 5e, com 6% de respostas corretas); e o pior desempenho verifica-se na questão 6e (3% de respostas corretas), com os dados em segundo gráfico circular e envolvendo a interpretação de comparação de objetos neste tipo de gráfico.

Se se atender aos três níveis de Curcio (1989), observa-se, pela análise de respostas apresentadas na primeira secção, que a maioria dos alunos consegue *ler os dados* representados em gráfico/tabela, mas apenas uma minoria deles conseguiu *ler além dos dados* representados em gráfico/tabela, corroborando a perspetiva de que os gráficos/tabelas estatísticos constituem objetos matemáticos complexos em termos semióticos (Batanero et al., 2010).

No domínio das Funções, verifica-se uma associação entre contexto tabelar (identificação de domínio/contradomínio e identificação de variável independente) e entre contexto gráfico (identificação de objetos ou imagens, sendo conhecido um deles, entre as questões Q1 e Q3), em que esta associação sugere que o tipo de organização dos dados condiciona o desempenho dos alunos, sendo esta associação maior para dados

organizados em gráfico do que em tabela. Contudo, confrontando os dois contextos, a associação existente revela que as dificuldades na determinação do domínio/contradomínio em contexto gráfico se repetem em contexto tabelar, e o mesmo acontece na identificação do tipo de variável, parecendo sugerir que, nesta associação, o contexto não influencia o desempenho dos alunos.

No domínio da Estatística, em contexto tabelar, a associação existente na mediana e na média sugere que quando o aluno apresenta dificuldade numa das medidas, também revela na outra medida. E no contexto gráfico as associações aparecem entre a média e a mediana e a identificação do máximo/mínimo; e associação entre a frequência relativa (Q6) e a mediana e a moda. Sendo esta associação não forte, entre dados organizados em gráfico ligeiramente superior à associação entre dados organizados em tabela, tal parece sugerir que as dificuldades podem depender do tipo de representação; porém, quando se confrontam os dois contextos verifica-se que nenhum deles evidencia maior associação no que concerne às dificuldades dos alunos na determinação das medidas de tendência central.

Entre os domínios Estatística e Funções, as associações existentes são também não fortes e de menor associação que nos dois casos anteriores. Em geral, verifica-se que a associação entre tabelas dos dois domínios (Estatística e Funções) é, no contexto tabelar, ligeiramente inferior ao contexto gráfico, no que concerne aos conteúdos de medidas de tendência central e na identificação do domínio/contradomínio e de variável independente, sem confronto com o tipo de suporte de organização de dados.

Foi ainda realizada a análise semiótica das respostas dos alunos nas questões sobre Estatística, relativas à determinação da mediana, da média e dos valores máximo e mínimo em dados organizados numa tabela de frequências (questão 4) e em dados representados num gráfico de barras (questão 5) e gráfico circular (questão 6). Comparando as respostas dos alunos em contexto tabelar e gráfico, não se registaram diferenças significativas. Analisando com mais detalhe as respostas, constata-se que, tendencialmente, um aluno que determina corretamente a mediana, fá-lo bem nos dois contextos (Quadro 16), evidenciando nas suas respostas, em ambos os casos, a ordenação dos dados. Contudo, os alunos revelaram maior facilidade na ordenação dos dados em contexto tabelar (18%) do que em contexto gráfico (3% (gráfico de barras) + 1% (Gráfico circular)) na determinação da mediana (conflito  $\bar{C}1$ ), o que é corroborado pelo estudo de Arteaga (2008). Também nos estudos de Barr (1980), com dados por organizar, e de Carvalho (1996), com dados organizados em tabela de frequências e gráficos de barras,

se constata que poucos são os alunos que têm em conta a prévia ordenação dos dados na determinação da mediana.

Ao restringir-se a análise às respostas não corretas, os resultados permitem concluir que um aluno que erra em ambos os contextos não tende a manter o mesmo tipo de resposta, o que significa que, nestas circunstâncias, o tipo de dificuldade é diferente, entre os contextos. Segundo Ribeiro (2006), as dificuldades na determinação da mediana ocorrem em diversos contextos, mas os alunos apresentam maiores dificuldades em dados organizados (tabelar ou gráfico) do que em dados não organizados.

Na avaliação dos conflitos semióticos, também se conclui que raramente um aluno demonstra o mesmo tipo de conflito nos dois contextos, exceto quando confunde o conceito e determina outra medida estatística em vez da mediana (conflito  $\bar{C}5$ ), o que ocorre com maior frequência nas questões cujos dados estão organizados em gráfico (de barras (23%) e circular (30%) do que nas questões com dados organizados em tabela de frequências (16%). Saliente-se que todo o aluno que optou, na questão 4, pela determinação da média (13%) ou pela indicação do valor do mínimo (4%) ou do valor máximo (2%), também o fez na questão 5. Tal significa que o contexto afeta o desempenho dos alunos que têm dificuldades na determinação correta da mediana, em ambos os contextos, mas por motivos ou causas diferentes. Enquanto determinar a média em vez da mediana é um dos erros mais frequentes em outros estudos (Batanero, 2000), já a troca da mediana pela moda não se verificou neste estudo, não corroborando os resultados obtidos por Barros (2004) e Mayén, Cobo, Batanero e Balderas (2007).

Em termos globais, verificou-se uma frequência significativa de “não respostas” na determinação da mediana em contexto gráfico e de respostas não corretas quando os dados estão organizados em tabela. Este resultado corrobora o que Batanero (2000) realça sobre o facto de os alunos tenderem a usar um único procedimento na determinação da mediana, embora ela dependa do número de dados ser par ou ímpar.

Das respostas analisadas foram identificados oito conflitos semióticos na determinação da mediana, verificando-se em cinco deles ( $\bar{C}1$ ,  $\bar{C}2$ ,  $\bar{C}6$ ,  $\bar{C}7$  e  $\bar{C}8$ ) proporções de ocorrência significativamente diferentes entre os contextos tabelar e gráfico. A análise permitiu ainda aferir que os dois contextos (tabelar e gráfico) não afetam a aplicação correta ou incorreta do algoritmo de cálculo da mediana por parte dos alunos que apresentaram respostas não corretas, mas dificulta a identificação correta do conjunto de dados a considerar na determinação da mediana.



Os resultados aqui obtidos, relativamente às dificuldades na determinação da mediana, corroboram as conclusões de outros estudos (Boaventura, 2003), bem como a dificuldade na interpretação da mediana (Artega *et al.*, 2011; Fernandes, Carvalho & Correia, 2011).

No caso da determinação da média, ao analisar detalhadamente as respostas constata-se que, tendencialmente, um aluno que determina corretamente a média, o faz bem nos dois contextos (Tabela 14), evidenciando em ambos os contextos dificuldade em aplicar o algoritmo ao conjunto correto de dados. Contudo, os alunos revelaram maior facilidade na determinação da média a dados em contexto tabelar (34%) do que em contexto gráfico (21%) (conflito  $\bar{C}10$ ), o que é corroborado pelos estudos de Carvalho e César (2000) e de Brocardo e Mendes (2001).

Ao restringir-se a análise às respostas “não corretas”, os resultados permitem concluir que um aluno que erra em ambos os contextos, não tende a manter tipo de resposta, o que significa que um aluno denota dificuldade em ambos os contextos, mas o tipo de dificuldade é diferente entre os contextos.

Da avaliação dos conflitos semióticos conclui-se que raramente um aluno demonstra o mesmo tipo de conflito nos dois contextos, exceto quando confunde o conceito determinando outra medida estatística em vez da média (conflito  $\bar{C}13$ ) e isso ocorre com maior frequência, embora ligeira, nas questões cujos dados estão organizados em gráfico (11%) do que nas questões com dados organizados em tabela (10%). Salienta-se, ainda, que todo o aluno que optou, na questão 4b, pela determinação da mediana (1%) ou pela indicação da moda (2%), também o fez na questão 5b. Tal significa que o contexto afeta o desempenho dos alunos que têm dificuldades na determinação correta da média em ambos os contextos, mas por motivos ou causas diferentes. Especificamente o erro de determinar a moda em vez da média é um dos erros mais frequentes em outros estudos (Batanero *et al.*, 1994).

Em relação às respostas sobre a identificação dos valores máximo e mínimo, constata-se que, tendencialmente, um aluno que os identifica corretamente, fá-lo bem nos dois contextos (Tabela 18), evidenciando poucas dificuldades em indicar os valores máximo e mínimo corretamente em ambos os contextos. Contudo, na identificação do máximo e do mínimo os alunos revelaram mais dificuldade em contexto tabelar (45%) do que em gráfico (23%); já na indicação dos valores mínimo e máximo (conflito  $\bar{C}17$ ), eles revelaram ter mais facilidade na sua identificação em contexto tabelar (36%) do que em contexto gráfico (41%) (conflito  $\bar{C}18$ ).

Os resultados aqui obtidos corroboram as conclusões de outros estudos sobre a determinação das medidas de tendência central (Boaventura, 2003; Barros, 2004; Cai, 1985; Carvalho, 1996, 2004; Li & Shen, 1994; Pollatsek *et al.*, 1981), bem como a sua interpretação (Arteaga *et al.*, 2011; Boaventura, 2003; Watson & Moritz, 2000; Fernandes, Carvalho & Correia, 2011).

Em termos globais, face às dificuldades reveladas e aos erros cometidos pelos alunos, verifica-se que a nível de conhecimento e aplicação dos conceitos de medidas de localização há, embora ligeiro, um melhor desempenho dos alunos no cálculo da mediana em representação gráfica. Opostamente, na indicação dos valores máximo e mínimo e na determinação da média, na resolução de problemas envolvendo tais medidas, verifica-se uma ligeira melhoria dos alunos nas respostas corretas quando a representação é tabelar. Salienta-se, ainda, que na determinação da mediana a categoria mais frequente foi “não responde”, o que aconteceu em todas as três questões (4b, 5b e 6c). Pelo contrário, na determinação da média prevalece a resposta “incorreta”, mais na representação gráfica do que na representação tabelar, o que aponta que o tipo de representação influencia o desempenho dos alunos e que o tipo de conceito interfere no número de alunos que respondem. Tal como sustentam Carvalho e César (2000), o facto de os alunos terem respondido mais às questões sobre a média do que sobre a mediana talvez se deva à utilização mais frequente do conceito média em diversos contextos sociais.

Na análise dos conflitos semióticos das respostas PC e I constatou-se que os erros cometidos na determinação da mediana parecem estar relacionados com a forma de apresentação dos dados, embora as falhas apareçam em ambas, já que existe uma maior predominância de respostas imprecisas na determinação da mediana no caso da questão 4b (50,9%) do que na questão 5b (40,4%) e do que na questão 6c (42,1%). Na determinação da média, os contextos tabelar e gráfico parecem não influir, já que as falhas aparecem nos dois contextos e, apesar de na sua determinação, os alunos revelarem maior dificuldade em contexto gráfico (49,2%) do que em contexto tabelar (47,2%). Refira-se, ainda, que os alunos revelaram conhecer os algoritmos de cálculo da média e da mediana, embora os tenham aplicado automaticamente, sem atenderem à especificidade do conjunto de dados do enunciado (conflito  $\bar{C}2$  e  $\bar{C}12$ ). Tal desempenho parece indicar que os alunos não compreendem as referidas noções, corroborando o referido por Batanero (2000a). De facto, nem sempre os alunos interpretam bem os dados do gráfico, confundindo o valor da variável com o da frequência absoluta e, tanto na média como na mediana, o valor “0 livros” da amostra causou muitos problemas, tal como também foi

verificada por Pollatsek, Lima e Well (1981) e por Cai (1995). Muitas respostas dos alunos, neste estudo, corroboram com as conclusões apresentadas por Li e Shen (1994) na determinação da média, uma vez que nem sempre foi considerada a sua ponderação, revelando dificuldade no significado de média, como também foi constatado por Watson e Moritz (2000).

Relativamente à indicação do valor máximo e mínimo, os resultados revelam alguma dificuldade na indicação dos seus valores pois muitos alunos utilizam os valores da frequência absoluta em detrimento dos valores da variável, sobretudo nos dados em gráfico. Foi, no entanto, nestas duas questões que os alunos tiveram melhor desempenho.

Em todas as categorias, relativas a conflitos semióticos, observou-se que muitos alunos tendem a apresentar um resultado numérico, ainda que totalmente desadequado, tal como se verificou no estudo de Boaventura (2003).



ADEQUAÇÃO A ALUNOS DO 8.º ANO DA ESCALA DE ATITUDES EM  
RELAÇÃO À ESTATÍSTICA

Neste capítulo apresenta-se uma adequação de um instrumento de avaliação das atitudes em relação à Estatística para estudantes portugueses do 8.º ano, a qual resultou de uma adaptação da *Escala de Actitudes hacia la Estadística* (EAE, Estrada, 2002) em versão portuguesa e contextualizada para estudantes daquele nível académico. Usando a escala adaptada, exploram-se as atitudes dos 332 alunos participantes na fase de diagnose da investigação.

Parte deste capítulo foi apresentado numa conferência internacional (XIV Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia, 6-8/setembro/2017, Braga, Universidade do Minho), tendo ainda sido submetido um artigo para publicação numa revista científica [Carvalho, M. J., Freitas, A. & Fernandes, J. A. Atitudes em relação à Estatística de alunos do 8.º ano de escolaridade, submetido em maio/2017 à *Revista de Estudos e Investigación en Psicología e Educación* (REIPE)].

### 5.1. A problemática da atitude

Na sua aceção, o termo “atitude” pressupõe disposição para reagir de forma coerente, favorável ou desfavorável, perante um objeto (Fishbein & Ajzen, 1975; Haddock & Maio, 2007; Oskamp e Schultz, 2009). Deste modo, a atitude está intrinsecamente associada ao comportamento, sendo que lhe podem ser referenciadas propriedades como a direção (favorável ou positiva e desfavorável ou negativa) e a intensidade (alta ou baixa) correspondendo à sua mensuração (Sampieri, Collado & Lucio, 2013). Tal como acontece com muitos outros constructos, trata-se de um conceito teórico não observável.

O termo “atitude” tem ganho relevo, como constructo, na área acadêmica. Nas primeiras investigações, a atitude foi tida como um constructo unidimensional, passando posteriormente a ser visto como multidimensional. Na área da Estatística, em particular, é referência obrigatória o trabalho de Estrada (1999), pela revisão de literatura efetuada sobre a temática. Esta autora realizou um estudo sobre as atitudes dos professores do 1.º ciclo em formação inicial e em exercício, centrando-se na medição e caracterização das suas atitudes em relação à Estatística. Para esse efeito, Estrada (2002) propôs e elaborou um questionário com 28 itens, o qual designou por *Escala de Actitudes hacia la Estadística* (EAE, Estrada, 2002), provando conter boas características psicométricas. A construção da EAE teve por base três instrumentos de medição de atitudes: escala SAS de Roberts e Bilderback (1980), escala ATS de Wise (1985) e a escala de Auzmendi (1992), e incorpora componentes pedagógicos e antropológicos (Estrada, 2002).

Segundo Estrada (2011), as escalas de atitudes são objetivas permitindo determinar as diferenças de intensidade na preferência em relação a um determinado objeto de atitude. Esta autora privilegia a investigação da atitude no ato educativo, em particular na Estatística, argumentando que os processos percetivo e cognitivo contribuem para a aprendizagem de qualquer conteúdo educativo. Efetivamente, o conceito de “atitude” que aquela autora realça corresponde a uma propensão ou estado de ânimo que inclui processos cognitivos e afetivos, é referencial ao remeter para um objeto real, é bastante estável e abrange todos os âmbitos ou dimensões do sujeito.

Vários autores (e.g., Auzmendi, 1992; Gil Flores, 1999; Gómez, 2000) assumiram a atitude assente em três fatores básicos, os quais Estrada, Bazán e Aparicio (2012), quando analisados no contexto educativo da Estatística, designam por componentes pedagógicas: a cognitiva (atitude face ao objeto); a afetiva (emoções face ao objeto: rejeição/interesse); e a comportamental (apetência para usar o objeto: quando/como). Há ainda outros trabalhos (e.g., Estela, 2002; Schau, 2003) que, partindo da atitude de professores face à Estatística, consideram as componentes: social (valorização do seu papel sociocultural, para qualquer cidadão), educativa (visão da sua utilização e dificuldades do aluno, que determinam a sua inclusão ou não no currículo), instrumental (utilidade da Estatística, aplicada a outras áreas como forma de raciocínio).

Há vantagens na utilização de escalas de atitudes na forma escrita e de carácter objetivo, tais como: a preservação do anonimato; a concessão de tempo ao sujeito para pensar na resposta antes de responder; a possibilidade de serem aplicadas a várias pessoas em simultâneo; a obtenção de alguma uniformização, pois cada sujeito responde

exatamente às mesmas perguntas. Em termos gerais, os dados recolhidos por esta via são analisados e interpretados de forma mais fácil que os recolhidos sob a forma de respostas orais ou respostas abertas, podendo ainda ser aplicados por interposta pessoa, sem comprometer a fiabilidade dos resultados (Gairin, 1987).

Para medir a reação do sujeito é usual utilizar-se a escala de Likert, estabelecida por Rensis Likert em 1932. Esta escala é formada num conjunto de itens apresentados como afirmações relacionadas com um objeto de atitude, normalmente numa escala de cinco ou sete pontos, em que se pede que o participante indique, segundo a escala, o seu nível de concordância. No presente estudo foi usada uma escala de cinco pontos, que é a mais usual, tendo como pontuações possíveis (no sentido de uma atitude positiva): 1 para “totalmente em desacordo”; 2 para “desacordo”; 3 para “nem em desacordo nem de acordo” (indeciso ou indiferente); 4 para “acordo”; e 5 para “totalmente de acordo”. Se a resposta for no sentido de uma atitude negativa, tem como pontuações possíveis: 5 para “totalmente em desacordo”; 4 para “desacordo”; 3 para “nem em desacordo nem de acordo” (indeciso ou indiferente); 2 para “acordo”; e 1 para “totalmente de acordo” (Sampieri, Collado & Lucio, 2013).

Segundo Sampieri, Collado e Lucio (2013), a direção das afirmações é muito importante para a codificação das alternativas, já que uma afirmação positiva quantifica favoravelmente o objeto de atitude, evidenciando que quanto mais participantes concordarem com a afirmação, mais favorável é a atitude. Se a afirmação for negativa, quantifica desfavoravelmente o objeto de atitude e quanto mais participantes concordarem com a opção, menos favorável será a atitude. Na escala de Likert a pontuação total da atitude, para cada sujeito, define-se pela soma ou pela média das pontuações de todos os itens (depois de inverter a pontuação nos itens onde a concordância corresponde a uma atitude desfavorável), valor esse que se tomará como a intensidade da atitude, e que será considerada mais baixa ou mais alta conforme o número de itens concordantes ou um valor abaixo ou acima do valor médio.

## 5.2. Motivação

Segundo Gal, Ginsburg e Schau (1997), no ensino e aprendizagem da Estatística, compete aos educadores avaliar, no aluno, os seus sentimentos e ideias em torno dos conceitos estatísticos, com vista a facilitar a sua capacidade de resolução de problemas e a melhorar as suas atitudes e crenças sobre o tópico Estatística, pois estas podem afetar o desenvolvimento de habilidades de pensamento estatístico no seu cotidiano. Vão neste

sentido também as preocupações de Zimmer e Fuller (1996) face aos fatores de ansiedade e atitude. Na perspectiva de Asch (1952), a atitude é a resposta conhecida, influenciadora das decisões do sujeito, perante alternativas com novas condições.

No caso da EAE de Estrada (2002), estabelecida originalmente no universo de professores do primeiro ciclo de língua castelhana, em formação, a determinação da direção da predisposição de um professor face à Estatística torna-se profícua na medida em que as suas atitudes, positiva ou negativa, poderão condicionar o ensino e a aprendizagem dos seus alunos (Estrada, 2007; Estrada, Batanero, & Lancaster, 2011). Na perspectiva de Estrada, Bazán e Aparício (2012),

o estudo das atitudes face à Estatística surge da preocupação pelo produto educacional considerado global, mas também quando se considera o estudo das aprendizagens dos alunos, dos estudantes futuros professores. Assim, os estudos sobre as atitudes em estudantes, por exemplo, confirmam o impacto das atitudes negativas, como componente afetiva, nas aprendizagens cognitivas (pp. 6-7).

Segundo Estrada (2007), as atitudes, positivas ou negativas, podem ser transmitidas de maneira consciente pelo professor aos alunos e afetar as suas aprendizagens. Torna-se assim importante ter instrumentos validados e fiáveis que permitam avaliar as atitudes de um professor, em formação ou em funções, independentemente do ciclo que leciona.

Recentemente Martins (2015) realizou um estudo envolvendo 1098 docentes do 1.º ciclo e professores de Matemática do 2.º ciclo do ensino básico, de três distritos de Portugal, visando avaliar e caracterizar as suas atitudes face à Estatística. Para tal, escolheu e aplicou a EAE, com adaptações ao contexto português, tendo concluído que, em relação à Estatística, tal corpo de professores tem uma atitude “em geral, positiva, tanto a nível global, como ao nível das componentes” (Martins, 2015, p. 425). A EAE foi também aplicada por Aparício e Bazán (2006, 2008) a professores em exercício, e por Aliaga (2009) a professores em formação. A EAE foi ainda adaptada ao universo de estudantes universitários, tendo sido aplicada em vários países de língua castelhana (Estrada, Batanero, Bazán & Aparício, 2009), e ainda em Portugal, numa versão em português (Martins, Estrada & Nascimento, 2012) a professores do 1.º e 2.º ciclo.

Não existe, contudo, conhecimento de aplicação da EAE num universo mais jovem, nomeadamente a nível de estudantes do ensino básico. Nesta tese, onde o estudo empírico incide sobre alunos do 8.º ano, em que a aprendizagem de conteúdos estatísticos se inicia no 1.º ciclo, é natural pressupor que eles possam ter sofrido influências positivas ou negativas, ao longo dos anos dos seus professores que lecionaram o domínio de OTD.



Assim, antes da implementação da intervenção didática proposta na presente tese, importa conhecer as atitudes em relação à Estatística dos alunos envolvidos; e, após a intervenção, importa saber se houve mudança de tais atitudes. Assim, o propósito deste capítulo reside na construção de um instrumento de medida das atitudes de alunos do 8.º ano de escolaridade em relação à Estatística. Este instrumento será aplicado na turma do 8.º ano onde decorrerá a implementação de ensino, para avaliar, em particular, as atitudes dos alunos antes e após a intervenção de ensino proposta na presente tese. Para tal, pretende-se analisar as características psicométricas e a multidimensionalidade da escala obtida para garantir que este instrumento está adequado aos objetivos propostos.

### 5.3. Escala de atitudes em relação à Estatística

Para a construção do instrumento de medida optou-se por se proceder a ajustes e adaptações da EAE original de Estrada (2002) para o público-alvo da presente investigação (estudantes portugueses do 8.º ano). A escolha desta escala justifica-se por ter demonstrado boas características psicométricas, quando aplicado em contexto social e académico espanhol, que parece ser semelhante ao português, e também por ter sido já aplicada positivamente noutros contextos que não o de Espanha, como, por exemplo, no Peru (Estrada et al., 2009) e em Portugal (Martins, 2015).

#### 5.3.1. A escala original

A construção original da EAE (Estrada, 2002), em versão espanhola (Anexo IV), teve por base três instrumentos de medição de atitudes: a escala SAS de Roberts e Bilderback (1980); a escala ATS de Wise (1985) e a escala de Auzmendi (1992). A EAE incorpora componentes pedagógicos e antropológicos, sendo constituída por 28 itens, definidos segundo a escala de Likert de cinco pontos, correspondentes às cinco respostas de "1: discordo totalmente" a "5: concordo totalmente". Os 28 itens estão descritos em 9 afirmações de forma positiva e 19 de forma negativa para evitar o problema de aceitação por parte dos sujeitos da forma de "concordo", independentemente do tipo de item que seja incluído (Morales, 1988).

Na versão original, a EAE é fiável apresentando evidências de multidimensionalidade estabelecida por quatro componentes (fatores) latentes, os quais se encontram listados no Quadro 27.

Quadro 27 – Composição da escala de Estrada (2002) em termos de fatores latentes

| Componente            | Itens (versão original)         |
|-----------------------|---------------------------------|
| Afetividade           | 1, 2, 11, 14, 15, 21            |
| Competência Cognitiva | 3, 9, 20, 23, 24, 27            |
| Valorização           | 5, 7, 8, 10, 12, 13, 16, 19, 25 |
| Dificuldades          | 4, 6, 17, 18, 22, 26, 28        |

Ainda na escala original, e após uma análise de pareceres realizados por especialistas, a EAE, sofreu algumas alterações: reduziu o número de itens e estes foram distribuídos por dimensões antropológicas e pedagógicas (Estrada, Bazán & Aparício, 2010; 2013).

### 5.3.2. A escala modificada

Tendo como foco, nesta investigação, o aluno do ensino português do 8.º ano de escolaridade, procedeu-se à tradução e a uma adequação, ao público-alvo, dos enunciados dos 28 itens originais da EAE. Primeiramente, os 28 itens originais foram traduzidos. Embora não sendo propósito desta tese comparar fatores subjacentes aos instrumentos de medição das atitudes em relação à Estatística por parte de populações distintas (professores *versus* alunos), a seguir listam-se os itens traduzidos distribuídos por fatores latentes (Quadro 27) identificados por Estrada quando aplicada a EAE a professores de Matemática em formação e em exercício.

*Afetividade* (AF), com 6 itens que regulam os sentimentos positivos e negativos relativos à Estatística:

- 1 - Eu gosto da Estatística.
- 2 - Eu sinto-me inseguro/a quando resolvo problemas de Estatística.
- 11- Os conceitos estatísticos não se aplicam fora da sala de aula.
- 14 - Eu fico sob *stress* durante as aulas de Estatística.
- 15 - Desfruto das aulas de Estatística.
- 21 - A Estatística assusta-me.

*Competência Cognitiva* (CC), com 6 itens que regulam conhecimentos e habilidades na aplicação Estatística:

- 3 - Não compreendo/entendo lá muito bem a Estatística devido à minha maneira de pensar.
- 9 - Eu não faço a mínima ideia para que serve a Estatística.
- 20 - Eu cometo muitos erros matemáticos em Estatística.

23 - Eu consigo aprender Estatística.

24 - Eu compreendo/entendo as fórmulas estatísticas.

27 - Eu tenho dificuldade em compreender conceitos estatísticos.

*Valorização (V)*, com 9 itens referentes à importância da Estatística no mundo e na vida cotidiana:

5 - A Estatística não serve para nada.

7 - A Estatística é um requisito na minha formação profissional.

8 - Os conhecimentos sobre as técnicas estatísticas facilitam-me o acesso ao mundo laboral.

10 - A Estatística não é útil ao profissional “típico”.

12 - Os conceitos estatísticos não se aplicam fora da sala de aula.

13 - Eu utilizo a Estatística na minha vida cotidiana.

16 - As conclusões estatísticas raramente são apresentadas na vida do dia-a-dia.

19 - Na minha profissão a Estatística não terá nenhuma utilidade.

25 - A Estatística não é importante na minha vida.

*Dificuldades (D)*, com 7 itens referentes a problemas de aprendizagem na Estatística enquanto tema de estudo:

4 - As fórmulas estatísticas são fáceis de entender.

6 - A Estatística é um assunto complicado.

17 - A maioria das pessoas aprende rapidamente a Estatística.

18 - Aprender Estatística requer muito método/disciplina.

22 - A Estatística envolve muitos cálculos.

26 - A Estatística é altamente técnica.

28 - A maioria das pessoas deve aprender uma nova maneira de pensar para fazer Estatística.

Estes 28 itens ficaram assim traduzidos depois de uma análise preliminar de adequabilidade das afirmações quanto à compreensão dos alunos, avaliada por dois professores do ensino básico e dois do ensino universitário; seguidamente, esses mesmos professores analisaram a contextualização das perguntas ao público-alvo. Três itens (7, 8, 10) foram eliminados por terem sido apontados como não se enquadrando no contexto do público-alvo. Posteriormente, os restantes 25 itens foram submetidos a 4 alunos do 8.º ano, escolhidos aleatoriamente de uma turma de uma escola do distrito do Porto não pertencente a nenhum dos agrupamentos escolhidos para a realização do estudo. Os alunos não revelaram dificuldades na compreensão dos itens e responderam dentro do

tempo estipulado para o efeito. Assim, optou-se por considerar o conjunto desses 25 itens traduzidos e adaptados como instrumento (Quadro 28) a ser usado nesta pesquisa. Nessa versão adaptada da escala com 25 itens, a numeração dos itens foi atualizada com a remoção daqueles três itens e mantendo a ordem original (concretamente: item  $i$  original manteve-se como sendo item  $i$  adaptado, para  $i < 7$ ; item 9 original passou a ser item 7 adaptado; item  $i$  original passou a ser item  $i - 3$  adaptado, para  $i > 11$ ). Foi mantida a ordem dos itens da escala original uma vez que, paralelamente ao texto das questões, a ordem pela qual são colocadas é também importante. No Quadro 29 transcreve-se a tradução final considerada de cada um dos 28 itens da EAE original e o item correspondente adaptado com a respetiva numeração sequencial na escala adaptada. Note-se que a adequação dos itens corresponde a ligeiras modificações das diversas afirmações ajustadas ao contexto juvenil pretendido (alunos do 8.º ano).

Quadro 28 – Itens traduzidos da escala EAE de Estrada (2002) e os correspondentes itens adaptados.

| Itens traduzidos de Estrada (2002)   | Itens adaptados para alunos do 8.º ano  |
|--|---|
| 1.Eu gosto da Estatística.   | 1.Eu gosto da Estatística.  |
| 2.Eu sinto-me inseguro quando tenho de resolver problemas de Estatística.                  | 2.Sinto-me inseguro quando resolvo problemas de Estatística.                            |
| 3.Eu tenho dificuldades de compreensão em Estatística por causa da forma como eu penso.    | 3.Tenho dificuldades de compreender a Estatística por causa da minha maneira de pensar. |
| 4.As fórmulas estatísticas são fáceis de compreender.                                      | 4.As fórmulas estatísticas são fáceis de compreender.                                   |
| 5.A Estatística não tem qualquer valor.  | 5.A Estatística não serve para nada.  |
| 6.A Estatística é um assunto complicado.   | 6.A Estatística é um tópico complicado.   |
| 7.A Estatística é uma parte necessária da minha formação profissional.                     | ----  |
| 8.O conhecimento das técnicas estatísticas vai facilitar-me arranjar um emprego no futuro. | ----  |
| 9.Eu não faço ideia do que se pode fazer com a Estatística.                                | 7.Eu não faço ideia do que se pode fazer com a Estatística.                             |
| 10.A Estatística não é útil ao profissional típico.  | ----  |
| 11.Eu fico frustrado/a quando faço testes de Estatística na aula.                          | 8.Eu fico frustrado/a quando faço testes de Estatística.                                |
| 12.Eu não utilizo o pensamento estatístico na minha vida fora da escola.                   | 9.Os conceitos estatísticos não se aplicam fora da escola.                              |
| 13.Eu utilizo a Estatística na minha vida do dia-a-dia.                                    | 10.Eu utilizo a estatística na minha vida do dia-a-dia.                                 |
| 14.Eu fico sob <i>stress</i> durante as aulas de Estatística.                              | 11.Eu fico tenso nas aulas quando o tópico é Estatística.                               |

---

|   |   |
|---|---|
| 15.Sempre que estudei Estatística na escola, gostei.  | 12.Eu gosto das aulas em que se estuda Estatística.                                       |
| 16.As conclusões estatísticas raramente são apresentadas na vida do dia-a-dia.              | 13.As conclusões estatísticas raramente se observam na vida.                              |
| 17.A Estatística é um assunto que a maioria das pessoas aprende rapidamente.                | 14.A estatística é um tópico que a maioria dos alunos aprende rapidamente.                |
| 18.Aprender Estatística requer muito método.  | 15.Aprender Estatística requer muita disciplina no estudo.                                |
| 19.A Estatística não terá nenhuma utilidade na minha profissão.                             | 16.Não usarei estatística na minha futura profissão.                                      |
| 20.Eu cometo muitos erros matemáticos em Estatística.                                       | 17.Cometo muitos erros quando trabalho com a Estatística.                                 |
| 21.A Estatística assusta-me.  | 18.A Estatística assusta-me.  |
| 22.A Estatística envolve cálculos complexos.  | 19.A Estatística requer muito cálculo.  |
| 23.Eu consigo aprender Estatística.   | 20.Eu consigo aprender Estatística.   |
| 24.Eu compreendo as fórmulas estatísticas.  | 21.Eu compreendo as fórmulas estatísticas.  |
| 25.A Estatística é insignificante na minha vida.  | 22.A estatística não é importante na minha vida.  |
| 26.A Estatística é altamente técnica.   | 23.A estatística é bastante técnica.  |
| 27.Eu acho difícil compreender conceitos estatísticos.                                      | 24.Eu acho difícil compreender os conceitos estatísticos.                                 |
| 28.A maioria das pessoas tem de aprender uma nova maneira de pensar para fazer Estatística. | 25.A maioria dos alunos deve mudar a sua maneira de pensar para fazer uso da Estatística. |

---

A versão modificada da escala (de agora em diante designa EAE adaptada) contém 7 afirmações que expressam uma atitude favorável (afirmações positivas, itens 1, 4, 10, 12, 14, 20 e 21) e as restantes 18 são afirmações que expressam uma atitude negativa (afirmações negativas) em relação à Estatística. Cada item tem uma escala tipo Likert com cinco possibilidades de resposta, incluindo uma alternativa neutra. Em relação aos itens de afirmações positivas, a pontuação é assim atribuída: discordo totalmente (1), discordo (2), indiferente (3), concordo (4) e concordo totalmente (5); nos itens de afirmações negativas inverte-se a pontuação: discordo totalmente (5), discordo (4), indiferente (3), concordo (2) e concordo totalmente (1).

Na perspetiva clássica, a pontuação total de uma escala é o resultado da soma dos valores obtidos em cada item, após a inversão da pontuação dos itens negativos. Assim, no caso de versão adaptada da EAE, com 25 itens, os valores da pontuação (total) podem variar entre 25 e 125, sendo 75 o valor associado a uma pontuação neutra (i.e., atitude não favorável nem desfavorável relativamente à Estatística).

#### 5.4. Análise de propriedades psicométricas da EAE adaptada

A avaliação das qualidades psicométricas de uma medida é usualmente realizada investigando-se a estrutura fatorial (uni ou multidimensional) do constructo e estimando-se a sua sensibilidade psicométrica, validade e confiabilidade.

Embora a versão modificada tenha sido obtida de uma escala confiável e válida (Estrada, 2002), é importante referir que uma qualquer modificação de uma escala naquelas condições pode comprometer a sua confiabilidade e validade como escala de medição do constructo pretendido (neste caso, a atitude). Entende-se por confiabilidade de um instrumento o grau em que o instrumento produz resultados consistentes e coerentes, e por validade como o facto de o instrumento medir a característica para a qual foi efetivamente construído.

Para Sampieri, Collado e Lucio (2013) existem fatores que podem afetar a confiabilidade e a validade dos instrumentos de medição, provocando erros de medição, tais como: a improvisação; a utilização de instrumentos desenvolvidos fora do contexto (exemplo: cultural e temporal); a sua aplicação inadequada aos respondentes; os aspetos técnicos do instrumento, tanto nos itens que o compõem, como nas instruções e condições de aplicação do mesmo. O primeiro fator está relacionado com a criação apressada de um instrumento de medição, improvisado este que pode levar à criação de instrumentos pouco válidos; o segundo fator está relacionado com a tradução de instrumentos, mesmo quando são traduzidos para uma nova linguagem pois tal não corresponde a uma validação; o terceiro fator está relacionado com a linguagem utilizada, já que esta tem que ser adequada ao nível do participante, tendo o cuidado de não evidenciar diferenças em relação ao género, idade, conhecimento, entre outros; o quarto relaciona-se com a clareza e ordem dos itens: o tipo e tamanho de letra, nas instruções de preenchimento, onde não podem existir ambiguidades para um preenchimento adequado; por fim, quando o instrumento é aplicado, as condições físicas do local da aplicação devem ser tidas em conta: luz, temperatura, ruído, dia da semana e hora.

Existem ainda outros fatores que podem fragilizar um instrumento de medição como, por exemplo, a organização do questionário, o contexto do estudo ou a indicação (subtil ou implícita) das hipóteses em estudo, que podem conduzir o sujeito a direcionar a sua resposta nesse sentido, e a possibilidade de respostas pouco honestas por parte de alguns sujeitos, com o propósito de apenas impressionar.

Segundo Bohner e Wänke (2002), existem fatores que podem originar dois tipos de erro: o aleatório e o sistemático. A má interpretação ou a leitura errada das questões, o facto de a medição ser feita em diferentes momentos ou a existência de erros de introdução dos dados no ficheiro são fatores que conduzem a erros do tipo aleatório, que provocam variabilidade na medição e o conseqüente aumento da inconstância da pontuação. Quanto aos fatores do tipo sistemático, como a inclusão de outros constructos que não fazem parte do constructo que se pretende medir, eles podem contribuir, por exemplo, para o aumento ou diminuição da pontuação da escala sem que isso corresponda a um aumento ou diminuição da característica latente que se pretende realmente medir.

Relativamente à versão EAE modificada, para que a medição da escala seja a melhor, torna-se de todo conveniente estudar a existência da influência de erros de tipo aleatório e sistemático. A confiabilidade de um instrumento de medida será tanto maior quanto menor for o risco de introdução de erros aleatórios; a validade será tanto maior quanto menor for o risco de introdução, na medição da atitude, de erros aleatórios e sistemáticos (Sampieri, Collado & Lucio, 2013). Convém ainda acrescentar que a existência de um alto grau de confiabilidade de um instrumento não é condição suficiente para garantir um alto grau de validade.

Para analisar propriedades psicométricas da EAE adaptada, esta foi aplicada a 332 alunos (143 do sexo feminino e 189 do sexo masculino) de dois agrupamentos de escolas do distrito do Porto, no início do ano letivo de 2014-2015, que se encontravam a frequentar o 8.º ano de escolaridade e antes da lecionação do tema de Estatística. A estes dois agrupamentos são-lhes atribuídos características socioeconómicas, estruturas organizacionais e de gestão similares entre eles. A idade dos alunos envolvidos na investigação estava compreendida entre os 12 e os 18 anos, com uma média de 14,4 anos. Para evitar fatores que poderiam fragilizar o instrumento, acima listados, houve o cuidado de envolver os docentes titulares de cada uma das turmas, por forma a implementar os questionários no mesmo período de tempo, em salas com condições idênticas e com o mesmo procedimento (questões que poderiam suscitar dúvidas, tempo de execução, sinónimos de palavras, ...).

Porque o questionário contém itens com enunciado positivo (itens 1, 4, 10, 12, 14, 20 e 21) e enunciado negativo, relativamente a atitudes face à Estatística, procedeu-se a um pré-processamento das respostas aos 18 itens de enunciado negativo, que consistiu na inversão das pontuações dadas nesses itens (da forma: 5 – *pontuação dada*), com vista a permitir comparações entre itens e análises de resultados com um único ponto

referencial, neste caso, ser uma escala analisada e transformada no sentido positivo. Desse modo, as pontuações entre itens são comparáveis, sendo uma pontuação de 4 ou 5 indicativa de uma atitude positiva do aluno face à Estatística, a pontuação 3 indicativa de uma atitude neutra e pontuações abaixo de 3 indicativas de uma atitude negativa em relação à Estatística.

As respostas pré-processadas foram submetidas a uma análise estatística usando o programa SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences* - versão 22) como recurso computacional.

#### 5.4.1. Análise dos itens

A sensibilidade psicométrica dos itens corresponde a verificar o poder de classificação de uma escala. Segundo Maroco (2014), a sensibilidade psicométrica dos itens é considerada adequada quando os valores absolutos de assimetria e de curtose da distribuição dos valores desses itens são inferiores a 3 e 7 respetivamente.

Considerando as respostas dadas pelos 332 alunos aos 25 itens que constituem a EAE adaptada, para além dos coeficientes assimetria e curtose, foram ainda calculadas a pontuação média e o desvio padrão de cada item, assim como a correlação de cada item com o conjunto dos restantes itens. Um item pouco correlacionado com o conjunto dos restantes corresponderá a um item não associado com o que mede o conjunto dos restantes itens, o que sugere que tal item seja eliminado. Na Tabela 22 encontram-se os valores das medidas amostrais observados nos 332 alunos analisados na fase de diagnose para cada um dos 25 itens que constituem a escala adaptada.



Tabela 22 – Pontuação média, desvio padrão, correlação de cada item com o conjunto dos restantes, assimetria e curtose. Média e desvio padrão da pontuação média dos 25 ou 23 (excluídos os itens 23 e 25 assinalados a negrito) itens

| Item          | M    | Med | DP   | Correlação<br>item-total<br>restante | Assimetria | Curtose |
|---------------|------|-----|------|--------------------------------------|------------|---------|
| 1*            | 3,37 | 3   | 0,97 | 0,53                                 | -0,37      | 0,04    |
| 2             | 3,02 | 3   | 1,04 | 0,52                                 | 0,02       | -0,55   |
| 3             | 3,25 | 3   | 1,09 | 0,61                                 | -0,05      | -0,88   |
| 4*            | 3,18 | 3   | 1,12 | 0,63                                 | -0,16      | -0,61   |
| 5             | 3,90 | 4   | 1,06 | 0,57                                 | -0,74      | -0,07   |
| 6             | 3,08 | 3   | 1,06 | 0,59                                 | -0,05      | -0,56   |
| 7             | 3,49 | 4   | 1,13 | 0,56                                 | -0,48      | -0,54   |
| 8             | 3,39 | 3   | 1,07 | 0,72                                 | -0,10      | -0,59   |
| 9             | 3,64 | 4   | 1,08 | 0,56                                 | -0,40      | -0,54   |
| 10*           | 2,82 | 3   | 1,08 | 0,29                                 | 0,01       | -0,48   |
| 11            | 3,38 | 3   | 0,94 | 0,54                                 | -0,05      | -0,13   |
| 12*           | 3,25 | 3   | 1,02 | 0,54                                 | -0,23      | -0,08   |
| 13            | 3,32 | 3   | 0,96 | 0,39                                 | -0,14      | -0,29   |
| 14*           | 3,25 | 3   | 1,05 | 0,45                                 | -0,19      | -0,54   |
| 15            | 2,73 | 3   | 0,92 | 0,29                                 | 0,27       | -0,16   |
| 16            | 3,11 | 3   | 1,09 | 0,36                                 | -0,18      | -0,37   |
| 17            | 3,10 | 3   | 1,04 | 0,64                                 | -0,05      | -0,51   |
| 18            | 3,75 | 4   | 1,07 | 0,57                                 | -0,50      | -0,38   |
| 19            | 2,80 | 3   | 1,00 | 0,32                                 | 0,28       | -0,25   |
| 20*           | 3,68 | 4   | 0,98 | 0,52                                 | -0,62      | 0,19    |
| 21*           | 3,28 | 3   | 0,96 | 0,60                                 | -0,31      | -0,12   |
| 22            | 3,37 | 3   | 1,06 | 0,54                                 | -0,29      | -0,20   |
| <b>23</b>     | 2,78 | 3   | 0,81 | <b>-0,02</b>                         | 0,05       | 0,88    |
| 24            | 3,16 | 3   | 0,98 | 0,71                                 | -0,10      | -0,35   |
| <b>25</b>     | 2,67 | 3   | 0,93 | <b>-0,06</b>                         | 0,14       | 0,16    |
| Total<br>(25) | 3,23 | 3   | 0,32 | —                                    | —          | —       |
| Total<br>(23) | 3,37 | 3   | 0,30 | —                                    | —          | —       |

\* Item com afirmação compreendendo uma atitude positiva. M: média; Med: mediana; DP: desvio padrão.

Pela Tabela 22 verifica-se que:

i) na maioria dos itens (exceto os itens 10, 15, 19, 23, 25) os alunos atribuíram uma pontuação, em média, ligeiramente superior à pontuação neutra (3) com assimetrias ligeiramente negativas, o que indicia que os 332 alunos apresentam atitudes tendenciosamente positivas com atribuições de pontuações mais concentradas acima de 3;

ii) os itens que apresentam pontuação média abaixo de 3, isto é, os itens 10, 15, 19, 23, 25, apresentam assimetria ligeira positiva, o que revela que as eventuais atitudes ligeiramente negativas, dos 332 alunos da fase de diagnose em relação à Estatística, resultam de atribuições de pontuações mais concentradas abaixo da pontuação neutra nesses itens;

iii) os valores de assimetria e curtose estão, em valor absoluto, abaixo de 3 e 7 respetivamente, pelo que os dados não indiciam a existência de problemas de sensibilidade psicométrica dos itens;

iv) contudo, os itens 23 e 25 apresentam uma correlação quase nula com o conjunto dos restantes itens, indiciando que estes dois itens não estão correlacionados com o constructo que se pretende medir. Retirando os itens 23 e 25 da escala, verificou-se (dados não apresentados) que o domínio de variação da correlação entre cada item e o conjunto dos restantes passa a variar entre 0,30 (para o item 19) e 0,73 (para o item 8), ou seja, aumenta os valores das correlações. Estes factos sugerem que os itens 23 e 25 sejam redundantes para a escala das atitudes face à Estatística pelo que podem ser retirados da escala. Observa-se, mais ainda, que embora a pontuação média da escala com os 25 itens seja positiva (superior a 3), um valor médio positivo mais elevado da escala com uma menor variabilidade ( $DP=0,30$ ) é obtido quando aqueles 2 itens são retirados.

Optando por considerar a escala constituída pelos 23 itens, conclui-se que os 332 estudantes apresentam uma pontuação média global por item de 3,37 com desvio padrão de 0,30, o que leva a crer que os alunos participantes na fase de diagnose apresentam, em média, uma ligeira tendência para exibirem atitudes positivas em relação à Estatística.

Curiosamente, a média global (3,23 com os 25 itens e 3,37 com os 23 itens), observada neste estudo (3,21 e 3,22, respetivamente) não é substancialmente diferente do que observada no estudo inicial de Estrada (2002), a qual foi obtida em públicos-alvo diferentes.

#### 5.4.2. Confiabilidade

Para medir a confiabilidade da escala adaptada, baseada na sua consistência interna e com o objetivo de representar o grau de correlação entre os seus vários itens, analisou-se o valor do índice alfa de Cronbach (Hair, Black, Babin & Anderson, 2009). Este índice pode ser interpretado como a média dos coeficientes de correlação das pontuações de todas as possíveis metades dos itens da escala, com as outras respetivas metades. Desta forma, mantêm-se todas as restantes condições, fazendo com que o alfa de Cronbach aumente consoante o aumento do número de itens da escala. Segundo Bohner e Wänke (2002), os índices de consistência interna só são indicadores de fiabilidade com significado para escalas em que cada item for visto como representante do constructo em estudo, de forma igualitária, como é o caso da escala de Likert, a qual foi usada na EAE (versão original e versão adaptada). Tomando as respostas dos 332

alunos da fase de diagnose, calcularam-se os valores do coeficiente alfa de Cronbach para a escala adaptada, quer tomando todos os 25 itens do questionário quer excluindo 1 item (qualquer, de cada vez), quer ainda excluindo os itens 23 e 25 como sugerido acima. Os valores obtidos encontram-se na Tabela 23.

Tabela 23 – Medida de confiabilidade da escala quando excluído um item. Assinalado a negrito, quando se excluem os itens 23 e 25

| Item | Alfa de Cronbach<br>(item omitido) | Item             | Alfa de Cronbach<br>(item omitido) |
|------|------------------------------------|------------------|------------------------------------|
| 1*   | 0,893                              | 14*              | 0,895                              |
| 2    | 0,893                              | 15               | 0,898                              |
| 3    | 0,891                              | 16               | 0,897                              |
| 4*   | 0,890                              | 17               | 0,890                              |
| 5    | 0,892                              | 18               | 0,892                              |
| 6    | 0,892                              | 19               | 0,897                              |
| 7    | 0,892                              | 20*              | 0,893                              |
| 8    | 0,899                              | 21*              | 0,892                              |
| 9    | 0,892                              | 22               | 0,893                              |
| 10*  | 0,898                              | <b>23</b>        | <b>0,903</b>                       |
| 11   | 0,893                              | 24               | 0,889                              |
| 12*  | 0,893                              | <b>25</b>        | <b>0,905</b>                       |
| 13   | 0,896                              | Total (25 itens) | 0,898                              |
|      |                                    | Total (23 itens) | 0,910                              |

\* Item com afirmação compreendendo uma atitude positiva.

Pela Tabela 23 verifica-se que avaliando a confiabilidade da escala, com os 25 itens, obtém-se o valor 0,898 para o coeficiente alfa de Cronbach, que corresponde a um bom nível de consistência interna. Contudo, retirando os itens 23 e 25, o alfa de Cronbach passa a tomar um valor superior, de 0,910. Portanto, os dados levam a sugerir que os itens 23 e 25 não sejam úteis para avaliar as atitudes dos alunos em relação à Estatística.

#### 5.4.3. Validade

No presente estudo apenas foi considerada a validade de conteúdo da escala adaptada, tendo sido todos os 25 itens considerados, pelos quatro professores que avaliaram a tradução dos itens, como potenciais indicadores para mensurar as atitudes em relação à Estatística dos alunos.

Importa explicitar que não foram efetuados estudos de validação da versão adaptada da escala confrontando-a com outras escalas que meçam, teoricamente, o mesmo constructo “atitude” (validação convergente) ou outro distinto (validação divergente). Para estudar a validação convergente e divergente os estudantes deveriam preencher outros dois questionários, o que não foi efetuado por não ser este o foco central da presente tese. Também, poder-se-ia dividir a amostra dos 332 estudantes em duas subamostras e usar uma subamostra para obter o modelo fatorial e sobre a outra subamostra realizar a validação (convergente) da escala. Contudo, considerou-se que este

procedimento iria enfraquecer os resultados uma vez que o modelo fatorial seria construído com base numa amostra de pequena dimensão. Por exemplo, usando a proporção usual de 3:2 ter-se-ia 199 (60% de 332) alunos para análise fatorial exploratória (i.e., construção do modelo fatorial) e 133 (40% de 332) alunos para a análise fatorial confirmatória (i.e., avaliação do ajustamento do modelo fatorial à estrutura dos dados) e validação. Segundo vários autores, a amostra deve ter tamanho suficiente, sendo geralmente sugerido ter entre 5 e 100 indivíduos por variável (Pestana & Gageiro, 2000; Hair et al., 2009). Na perspetiva de Williams et al. (2012), é vantajoso ter-se pelo menos 300 casos para a realização de uma análise fatorial.

#### 5.4.4. Multidimensionalidade

Pese embora os conteúdos dos 25 itens tenham sido considerados como válidos para o constructo a medir, face aos resultados da confiabilidade, optou-se por definir a escala adaptada pelos 23 itens (retirando os itens 23 e 25, Tabela 23) e, nestas condições, estudar a multidimensionalidade da escala.

Para analisar a multidimensionalidade da escala adaptada realizou-se uma análise fatorial exploratória (AFE) por ser o procedimento mais utilizado no desenvolvimento, avaliação e estudo da robustez de instrumentos psicológicos (Floyd & Widaman, 1995). O recurso à AFE é geralmente usado quando não se possui uma teoria prévia subjacente. Quando se quer confirmar ou refutar a estrutura fatorial de determinado instrumento, recorre-se à análise fatorial confirmatória (Brown, 2006).

Embora fosse interessante avaliar a possibilidade dos 4 fatores subjacentes ao constructo “atitude”, identificados por Estrada na população de professores de Matemática em formação e em exercício, serem também observados sobre a população dos alunos, importa sublinhar que não foi esse o ponto de partida na adequação da EAE que aqui se apresenta. Efetivamente, nesta tese, optou-se por realizar uma AFE com vista a identificar os fatores subjacentes ao constructo “atitude” na população dos 332 estudantes, considerados na fase de diagnose, do 8.º ano de escolaridade (público-alvo de estudo), em vez de realizar uma análise fatorial confirmatória dos 4 fatores encontrados por Estrada sobre a população adulta de professores sobre a qual foi analisada a EAE original. A realização da análise fatorial confirmatória tem por objetivo saber se os quatro fatores que o modelo deteta coincidem com os inicialmente criados. A escolha pela AFE deve-se ao fato de, de acordo com as pesquisas realizadas pela investigadora, não existir nenhuma análise que identifique fatores associados ao constructo numa faixa etária mais

jovem, onde o interesse da componente profissional não está, em geral, implicitamente presente, contrariamente às populações adultas: professores ou estudantes universitários, onde são conhecidos estudos de construção e adaptação de escalas de atitudes.

A AFE é uma técnica multivariada que procura identificar variáveis que têm por base o mesmo conceito ou fator (a identificar), indicando quais delas estão correlacionadas entre si e as que não estão e, desta forma, diminuir a complexidade dos dados e sua interpretação (Hair et al., 2009).

A estrutura de correlação dos itens do questionário permite definir um modelo fatorial sobre os itens. A adequação desse modelo fatorial pode ser avaliada através da medida de Kaiser-Meyer-Olkin (KMO), sendo considerado o modelo muito bom quando o valor do índice KMO é superior a 0,9 (Hair et al., 2009).

Na AFE a variância de cada item resulta da variabilidade dos fatores comuns (comunalidade) e fatores não comuns ou únicos (variância única), esperando-se que as comunalidades sejam próximas da unidade. As variáveis (i.e., os itens do questionário) que fazem parte de um mesmo fator partilham uma variância comum, isto é, são influenciadas pelo mesmo constructo subjacente (Brown, 2006). Na determinação do número de fatores a reter no modelo fatorial, a regra de Kaiser é uma das mais usadas (Hair et al., 2009).

A fim de facilitar a interpretação dos fatores, o ideal é os itens estarem fortemente associados a poucos fatores comuns (valores elevados dos pesos fatoriais, também chamados de cargas fatoriais ou *loadings*), com menor influência de fatores únicos. Na presente análise foram considerados pesos fatoriais superiores a 0,4. Quando há pesos fatoriais intermédios, para os aumentar ou eliminar, é usual aplicar métodos de rotação. Segundo Damásio (2012), “as rotações fatoriais têm o objetivo de facilitar a interpretação dos fatores, visto que muitas vezes as variáveis analisadas apresentam cargas fatoriais elevadas em mais de um fator. O objetivo das rotações fatoriais é, portanto, encontrar uma solução o mais simples e interpretável possível, na qual cada variável apresente carga fatorial elevada em poucos fatores, ou em apenas num” (p. 220).

Neste estudo aplicou-se a rotação varimax, que é um método ortogonal (i.e., conduz a fatores não correlacionados). Este método de rotação varimax tem como objetivo maximizar “a variância dos coeficientes de estrutura (...) para cada fator, que tende a (a) limitar o número de indicadores com altas correlações com esse fator e (b) distribuir uniformemente os indicadores através dos fatores (...) que, geralmente, produz uma estrutura simples na maioria dos estudos (...), onde os fatores não estão

correlacionados” (Kline, 2013, p. 185). A utilização do método de rotação varimax permite garantir a menor deformação possível na estrutura das relações entre as variáveis (Afifi & Clark, 1990).

sando as respostas providenciadas pelos 332 alunos aos 23 itens, realizou-se uma AFE. Os dados indicaram o excelente valor de 0,918 para a medida de adequação de amostragem KMO de um modelo fatorial. Seguidamente, usando o critério de Kaiser, foram retidos quatro fatores latentes (F1, F2, F3 e F4) no modelo. Por fim, aplicando a rotação varimax, para melhor interpretação dos fatores retidos, obtiveram-se as seguintes percentagem de variabilidade explicada para cada fator: 17,3% para F1, 17,2% para F2, 13,6% para F3 e 7,7% para F4, acumulando um total de 55,8% de variabilidade explicada pelo modelo fatorial com os quatro fatores. Na Tabela 24 encontram-se os pesos fatoriais de F1, F2, F3 e F4, nos 23 itens da escala adaptada, e as respectivas comunalidades. Embora o valor de 55,8%, obtido para a percentagem acumulada de variabilidade dos itens, explicada pelo modelo com os quatro fatores, assim como as comunalidades dos 23 itens não tomem valores substancialmente elevados (ver Tabela 24), o valor KMO de 0,918 obtido mostra a adequação de ajuste de um modelo de análise fatorial aos dados. Consequentemente, os resultados evidenciam que a escala com os 23 itens é multidimensional sendo definida pelos quatro fatores F1, F2, F3 e F4. Na Tabela 24 encontram-se reportados os seus pesos fatoriais após rotação.

Tabela 24 – Pesos dos fatores extraídos pelo método das componentes principais e com rotação varimax para o modelo fatorial com os 23 itens selecionados para a escala adaptada. Em itálico estão assinalados os pesos (superiores ao valor limiar tomado de 0,4) para mais do que um fator por item

| Item | Fatores      |              |              |              | Comunalidade |
|------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
|      | F1           | F2           | F3           | F4           |              |
| 1    |              | 0,601        |              |              | 0,488        |
| 2    | 0,430        |              |              |              | 0,383        |
| 3    | 0,688        |              |              |              | 0,586        |
| 4    | <i>0,413</i> | <i>0,668</i> |              |              | 0,627        |
| 5    | <i>0,430</i> |              | <i>0,611</i> |              | 0,597        |
| 6    | <i>0,545</i> | <i>0,420</i> |              |              | 0,486        |
| 7    | <i>0,560</i> |              | <i>0,443</i> |              | 0,563,       |
| 8    | 0,636        |              |              |              | 0,644        |
| 9    |              |              | 0,702        |              | 0,611        |
| 10   |              | <i>0,483</i> | <i>0,489</i> |              | 0,526        |
| 11   | 0,666        |              |              |              | 0,528        |
| 12   |              | 0,812        |              |              | 0,694        |
| 13   |              |              | 0,656        |              | 0,571        |
| 14   |              | 0,750        |              |              | 0,589        |
| 15   |              |              |              | 0,828        | 0,705        |
| 16   |              |              | 0,686        |              | 0,495        |
| 17   | <i>0,517</i> |              |              | <i>0,426</i> | 0,584        |
| 18   | 0,699        |              |              |              | 0,583        |
| 19   |              |              |              | 0,567        | 0,369        |
| 20   |              | 0,518        |              |              | 0,400        |
| 21   |              | 0,714        |              |              | 0,617        |
| 22   |              |              | 0,715        |              | 0,607        |
| 23   | 0,519        |              |              |              | 0,616        |

Como critério para identificar os quatros fatores do modelo foram suprimidos os pesos fatoriais inferiores a 0,4. Usando este critério, na Tabela 24 observa-se que há seis itens para os quais não foi possível atribuir um único fator (itens: 4, 5, 6, 7, 10, 17; pesos assinalados em itálico na Tabela 24). Este facto indica que existem correlações moderadas entre esses itens em mais do que um fator; conseqüentemente, tal significa que cada um desses itens irá influenciar a identificação de mais do que um fator latente no modelo fatorial.

O fator F1 é definido com base nos itens 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 17, 18, 23 e pode ser denominado por “Discernimento e Conceção Estatística (DCE)”, pois os itens fazem referência a aspetos relacionados com a forma como o aluno concebe e enfrenta a Estatística. Desta forma, na medida em que o sujeito apresenta uma maior disposição e entendimento positivo do papel da Estatística, espera-se que a compreenda melhor e manifeste uma disposição mais favorável para o seu estudo.

O fator F2 é formado com base nos itens 1, 4, 6, 10, 12, 14, 20, 21 e pode ser denominado por “Disposição e Valorização da Estatística (DVE)”, pois os itens fazem referência a aspectos relacionados com o gosto pela Estatística e disposição para a sua aprendizagem. Neste sentido, à medida que o sujeito apresente uma concorrência, disposição e valorização acadêmica adequada, espera-se que apresente uma atitude mais positiva em relação à Estatística.

O fator F3 é formado com base nos itens 5, 7, 9, 10, 13, 16, 22 e pode ser denominado por “Comportamento e Utilidade da Estatística (CUE)”, pois os itens fazem referência a aspectos relacionados com a aplicação prática e cotidiana da Estatística. Deste modo, quanto mais o sujeito valorizar a utilidade da Estatística, no mundo que o rodeia, mais se espera que ele descubra exemplos da sua aplicabilidade.

Finalmente, o fator F4 é formado pelos itens 15, 17, 19 e pode ser designado por “Aptidão no Estudo da Estatística (AEE)”, pois os itens fazem referência a aspectos relacionados com competências em Estatística. Aqui, à medida que o sujeito referencie maior aptidão sobre a Estatística, espera-se que ele melhor aplique as suas competências para aprender Estatística.

A título de curiosidade, confrontaram-se os itens que definem os quatro fatores nas escalas original *versus* adaptada. Colocando em paralelo os itens que (mais) influenciam a formação de cada um dos quatro fatores na escala adaptada e na escala original EAE (Tabela 25), verifica-se que apenas o fator “Comportamento e Utilidade da Estatística” (CUE) na escala adaptada e Valorização (V) na escala original demonstram serem ambos construídos com base (principalmente) nos mesmos itens (5, 9,10,13,16 e 22). Este fato leva a conjecturar que a utilidade da Estatística, sob o ponto de vista dos alunos da faixa etária do 8.º ano de escolaridade, é transcrita pela valorização da Estatística, sob o ponto de vista dos professores. Esta conjectura, na comparação de modelos fatoriais, ambos 4-dimensional, sob públicos-alvo distintos (jovem *versus* adulto) sugere novas investigações, nomeadamente a realização de uma análise fatorial confirmatória dos fatores da escala adaptada com base numa amostra de alunos do 8.º ano de escolaridade realizada a nível nacional.

Tabela 25 – Correspondência de itens entre a escala original EAE e a escala adaptada proposta

| Fatores | DCE          | DVE      | CUE                     | AEE    |
|---------|--------------|----------|-------------------------|--------|
| AF      | 2, 8, 11, 18 | 1, 12    |                         |        |
| CC      | 3,7, 17, 24  | 20, 21   | 7                       | 17     |
| V       | 5            | 10       | 5, 9, 10, 13, 16,<br>22 |        |
| D       | 4, 6         | 4, 6, 14 |                         | 15, 19 |



## 5.5. Atitudes dos alunos em relação à Estatística na fase de diagnose

Estabelecida a escala EAE adaptada, exploram-se agora o comportamento dos 332 alunos em fase de diagnose, com base na pontuação total da escala (definida pelos 23 itens) e nas pontuações parciais em cada um dos seus quatro componentes, DCE (definido por 11 itens: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 17, 18, 24), DVE (definido por 8 itens: 1, 4, 6, 10, 12, 14, 20, 21), CUE (definido por 7 itens: 5, 7, 9, 10, 13, 16, 22) e AEE (definido por 3 itens: 15, 17, 19). Assume-se que cada pontuação é obtida do ponto de vista clássica (i.e., dado pela soma das pontuações dos correspondentes itens que constituem cada componente e a escala).

Uma vez que as somas das pontuações dos componentes e da escala resultam da adição de pontuações de distintos números de itens, a fim de permitir a comparação de valores entre componentes e entre componentes e escala, é sugerida aqui uma transformação linear das somas (parciais e total) das pontuações de modo a que o domínio de variação de qualquer soma tenha sempre o mesmo domínio, nomeadamente, entre 0 e 1, e portanto, comparável. Assim, uma pontuação (parcial ou total) transformada num valor superior (inferior, respetivamente) a 0,5 corresponderá a uma atitude positiva (negativa, respetivamente). A transformação usada está ilustrada na Figura 58 e a sua fórmula é dada por:

$$Soma\ transformada = \frac{1}{Max - min} (Soma - min)$$

onde *Soma* representa a soma das pontuações, *Max* representa a soma de pontuações máximas possíveis de obter (igual a 5 × (número de itens a somar)) e *min* representa a soma de pontuações mínimas possíveis de obter (igual a 1 × (número de itens a somar)).

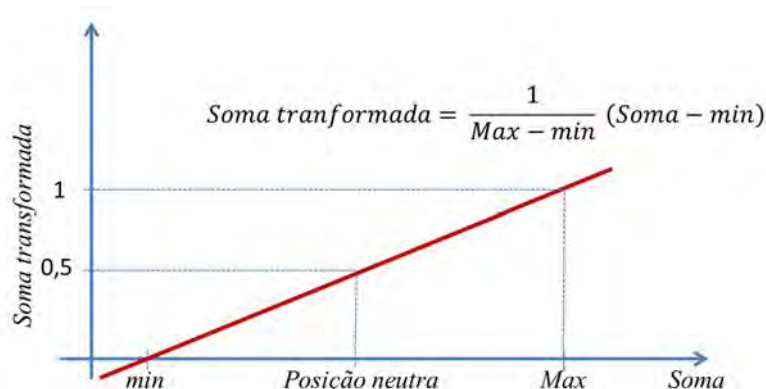


Figura 58 – Transformação linear usada para a uniformização das somas das pontuações, nos componentes e na escala global, ao intervalo de valores [0,1]

Transformadas as somas parciais e total, foram calculadas algumas medidas descritivas. Na Tabela 26 apresentam-se a média, a mediana e o desvio padrão dos valores

(transformados) dessas somas de pontuações observadas por componente e na escala global.

Tabela 26 – Características das atitudes em relação à Estatística dos alunos na fase de diagnose, em termos globais (escala) e em termos de cada um dos seus quatro componentes. O valor de referência 0,5 representa a posição neutra

| Componentes | N. de itens | Média | Desvio Padrão |
|-------------|-------------|-------|---------------|
| DCE         | 11          | 0,584 | 0,182         |
| DVE         | 8           | 0,560 | 0,177         |
| CUE         | 7           | 0,595 | 0,180         |
| AEE         | 3           | 0,470 | 0,182         |
| Escala      | 23          | 0,569 | 0,150         |

Considerando o valor de referência 0,5 como pontuação neutra, da análise da Tabela 26 constata-se médias positivas e muito próximas da pontuação neutra para todos os componentes e a nível global (escala), exceto no componente Aptidão no Estudo da Estatística (AEE). Pode-se dizer então que os alunos avaliados na fase de diagnose demonstram globalmente, em média, uma atitude favorável, embora muito ligeira, em relação à Estatística, manifestando disposição positiva para o tema Estatística, com concepções favoráveis a conceber a Estatística e a reconhecer a sua aplicação no quotidiano, mas apontam aspetos negativos nos seus conhecimentos e habilidades em Estatística indiciando dificuldades na aprendizagem nessa temática.

Relativamente à dispersão das somas das pontuações, e ainda da Tabela 26, constata-se valores do desvio padrão entre 0,150 e 0,182, havendo menor dispersão nas somas das pontuações totais da escala. Para visualizar a distribuição das somas das pontuações atribuídas por componentes e na escala global, construíram-se ainda caixas de bigodes comparativas (Figura 59).

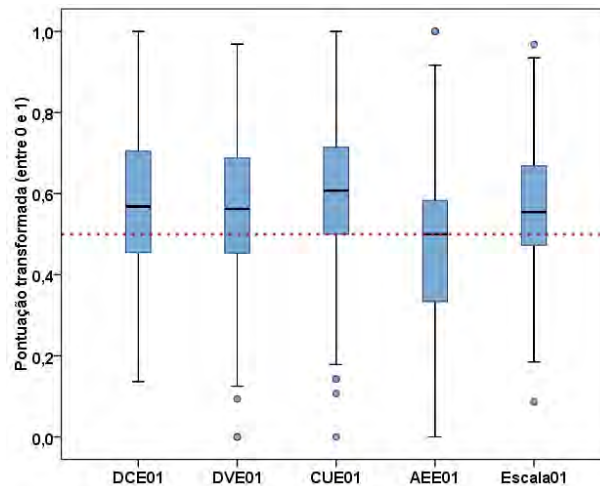


Figura 59 – Caixas de bigodes das somas das pontuações (transformadas) totais da escala e dos seus componentes dos alunos da fase de diagnose. A linha vermelha horizontal corresponde à pontuação neutra

Da Figura 59 é visível a menor dispersão de resultados na escala, como se constata também da Tabela 26. Contudo, aquela representação gráfica revela a existência de alguns alunos com resultados fora do padrão dos restantes (observações atípicas assinaladas por pontos nas caixas de bigodes, correspondendo a somas extremas muito abaixo ou muito acima da pontuação neutra), em todos os componentes exceto para o componente Discernimento e Conceção Estatística (DCE). Por outro lado, a caixa sem os ditos bigodes (i.e., o intervalo interquartil) para o componente AEE (“AEE01” no gráfico, com limite inferior da caixa igual ao primeiro quartil e igual a 0,33 e com limite superior da caixa igual terceiro quartil e igual a 0,58) se destaca por estar numa posição ligeiramente mais abaixo relativamente às restantes caixas. Estas constatações indicam que, relativamente às atitudes em relação à Estatística dos alunos da fase de diagnose, alguns (poucos) alunos revelam atitudes muito negativas ou muito positivas, diferenciadas do padrão geral dos restantes alunos e, por outro lado, volta a reforçar que é nas competências em Estatística, que corresponde à capacidade de aprender Estatística e suas dificuldades, onde grande parte dos alunos exibem um parecer menos favorável em relação à Estatística.



## CAPÍTULO VI

### IMPLEMENTAÇÃO DA INTERVENÇÃO DE ENSINO

Neste capítulo descreve-se a Intervenção de Ensino realizada, onde foi lecionado o tema Extremos e quartis, que corresponde aos conteúdos de Estatística incluídos no 8.º ano. Após esta implementação, destaca-se ainda o desempenho estatístico dos alunos da turma envolvida na intervenção, e avalia-se a sua perceção e atitude sobre a Estatística, comparando os resultados atingidos, pela turma, com os recolhidos na fase de diagnose.

Parte deste capítulo foi apresentado numa conferência (IV Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola, 29/abril/2017, Vila Real, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro) encontrando-se o artigo publicado nas atas e foi elaborado um artigo para publicação:

Carvalho, M.J., Freitas, A. & Fernandes, J.A. (2017). Construção de diagramas de extremos e quartis por alunos do 8.º ano. Comunicação oral no IV Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola. Vila Real: Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.

Carvalho, M.J., Fernandes, J.A. & Freitas, A. (2017). Representação e Interpretação de Dados em Diagramas de Extremos e Quartis. (Submetido a revista internacional em junho/2017).

#### 6.1. A Intervenção de Ensino

O principal objetivo da Intervenção de Ensino (IE) foi a aprendizagem do tema extremos e quartis, que envolve conceitos estatísticos como máximo, mínimo e quartis. Atendendo aos resultados da fase de diagnose, procurou-se, por um lado, colmatar as falhas diagnosticadas na aplicação do Teste Diagnóstico (TD) sobre as medidas de localização e, por outro, pretendeu-se alterar a atitude dos alunos face à Estatística. Antes e no final da intervenção foi proposto aos alunos o preenchimento da Escala de Atitudes Face à Estatística (EAE adaptada), com o objetivo de conhecer as alterações do seu posicionamento.

### 6.1.1. Antes da Intervenção de Ensino

Para um melhor enquadramento da IE, apresentam-se na Tabela 27 os resultados obtidos pelos alunos da turma intervencionada no teste de diagnóstico, relativamente ao tema de Estatística. Nessa Tabela procede-se à comparação, em termos de respostas C, PC, I e NR, entre o grupo turma intervencionado e o grupo dos 332 alunos que foram apresentados e analisados no capítulo anterior.

À partida, é esperado um comportamento idêntico do grupo turma intervencionado, dado que esta turma faz parte do Agrupamento A e da Escola EB A.

Tabela 27 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas dos alunos da turma da Implementação de Ensino, em comparação com as dos 332 alunos dos dois agrupamentos

|           |    | Tipo de resposta |          |           |           | ID    |        |
|-----------|----|------------------|----------|-----------|-----------|-------|--------|
|           |    | C                | PC       | I         | NR        | Turma | Global |
| Questão 4 | a) | 5(22,7)          | 10(45,5) | 6(27,3)   | 1(4,5)    | 0,23  | 0,39   |
|           | b) | 5(22,7)          | 5(22,7)  | 9 (40,1)  | 3(13,6)   | 0,23  | 0,10   |
|           | c) | 9 (40,1)         | 2 (9,0)  | 6(27,3)   | 5(22,7)   | 0,40  | 0,18   |
|           | d) | 19(86,4)         | 1(4,5)   | 1(4,5)    | 1(4,5)    | 0,86  | 0,82   |
|           | e) | 8 (36,4)         | 4(18,0)  | 5(22,7)   | 5(22,7)   | 0,36  | 0,15   |
| Questão 5 | a) | 4(18,0)          | 6(27,3)  | 2 (9,0)   | 10 (45,5) | 0,18  | 0,13   |
|           | b) | 6(27,3)          | 3(13,6)  | 3(13,6)   | 10 (45,5) | 0,27  | 0,12   |
|           | c) | 7 (31,8)         | 0(0,0)   | 6(27,3)   | 9 (40,1)  | 0,32  | 0,12   |
|           | d) | 12(54,5)         | 3(13,6)  | 2 (9,0)   | 5(22,7)   | 0,55  | 0,53   |
|           | e) | 5(22,7)          | 0(0,0)   | 4(18,0)   | 13(59,0)  | 0,23  | 0,06   |
| Questão 6 | a) | 2 (9,0)          | 4(18,0)  | 3(13,6)   | 13 (59,0) | 0,09  | 0,28   |
|           | b) | 4(18,0)          | 10(45,5) | 1(4,5)    | 7 (31,8)  | 0,18  | 0,33   |
|           | c) | 2 (9,0)          | 4(18,0)  | 3(13,6)   | 13 (59,0) | 0,09  | 0,06   |
|           | d) | 4(18,0)          | 0(0,0)   | 10 (45,5) | 8 (36,4)  | 0,18  | 0,31   |
|           | e) | 1(4,5)           | 1(4,5)   | 2 (9,0)   | 18 (81,1) | 0,05  | 0,03   |

Analisando a Tabela 27 verifica-se que os índices de dificuldade (ID) da turma e dos alunos dos agrupamentos são iguais em 47% das alíneas (4a, 4b, 4d, 5a, 5e, 6c e 6e), superiores em 33% (4c, 4e, 5b, 5c, 5d) e inferiores em 20% (6a, 6b e 6d), revelando que os alunos da turma apresentaram mais dificuldades na questão 6 (gráfico circular). Salienta-se ainda que, para os alunos da turma, 86% das alíneas se revelaram muito difíceis (60%) ou difíceis (26%), registando-se apenas 14% de alíneas fáceis (7%) ou muito fáceis (7%). Constata-se uma vez

mais que o ID da turma é ligeiramente superior ao registado pelos alunos dos agrupamentos, já que registaram melhorias do ID em 61% das alíneas.

Em relação ao tipo de resposta, constata-se ainda que tanto os 332 alunos, como os alunos da turma apresentam dificuldades (C+CP <11 alunos da turma), na determinação da mediana (4b), 5b) e 6 c)); na comparação entre os dois grupos, verifica-se que na indicação dos valores máximo e mínimo, os resultados são francamente positivos. Verifica-se ainda que a questão com melhor resultado é a questão 4 (contexto tabelar), já que a maioria das questões apresenta desempenho igual ou superior a 11 respostas corretas ou parcialmente corretas. Das duas questões 5 e 6 (contexto gráfico), onde os alunos da turma intervencionada revela maior dificuldades (C+CP < 11 alunos da turma) é na questão 6, cujo contexto é um gráfico circular, já que a quase totalidade das alíneas revela que C+CP < 11 alunos.

Quanto aos resultados obtidos pelos alunos do grupo turma, verifica-se que é na determinação da média e da mediana que estes apresentam mais respostas não corretas (I+NR ≥ 11 alunos), pelo que se procedeu à análise dos conflitos semióticos nas suas respostas. Na Tabela 28 apresenta-se o resumo dos conflitos semióticos revelados pelos 22 alunos da turma de intervenção (dos 23 alunos, 1 aluno faltou à diagnose) na fase de diagnose. A construção da tabela baseou-se nos resultados da diagnose, procurando-se apenas nestes, os alunos que pertenciam à turma intervencionada.

Tabela 28 – Frequências absolutas (percentagem) dos conflitos semióticos (PC e I) dos alunos da turma

| Conteúdo | Categorias (conflitos semióticos)  | Frequências absolutas de respostas (percentagens) |
|----------|--|---|
| Mediana  | Ā1. Iniciar a aplicação do algoritmo do cálculo da mediana no conjunto de dados, sem concluir.                   | 9 (33,3)  |
|          | Ā2. Aplicar o algoritmo do cálculo da mediana, mas sem identificar corretamente o conjunto de dados.             | 5 (18,5)  |
|          | Ā3. Identificar corretamente o conjunto de dados e aplicar incorretamente o algoritmo do cálculo da mediana.     | 0 (0,0)   |
|          | Ā4. Identificar incorretamente o conjunto de dados e aplicar incorretamente o algoritmo do cálculo da mediana.   | 1 (3,7)   |
|          | Ā5. Determinar outra medida estatística que não a mediana.   | 5 (18,5)  |
|          | Ā6. Identificar o número total de dados com a mediana.   | 1 (3,7)   |
|          | Ā7. Identificar o valor da mediana com o valor catorze.  | 2 (7,4)   |
| Média    | Ā9. Reconhecer o algoritmo do cálculo da média, no conjunto de dados solicitados, sem determinar o valor médio.  | 3 (21,4)  |
|          | Ā10. Aplicar o algoritmo do cálculo da média, mas sem identificar corretamente o conjunto de dados.              | 4(28,6)   |
|          | Ā11. Identificar corretamente o conjunto de dados, mas sem aplicar corretamente o algoritmo do cálculo da média. | 0(0,0)  |
|          | Ā12. Identificar incorretamente o conjunto de dados e aplicar incorretamente o algoritmo do cálculo da média.    | 5(35,7)   |
|          | Ā13. Aplicar outra medida estatística que não a média.   | 2(14,3)   |
|          | Ā15. Identificar o valor máximo correto e o valor mínimo incorreto ou não o referir.                             | 2 (28,6)  |

|                  |   |          |
|------------------|---|----------|
| Valores extremos | Ī16. Identificar o valor mínimo correto e o valor máximo incorreto ou não o referir.                              | 2 (28,6) |
|                  | Ī17. Identificar o valor máximo e mínimo das frequências.   | 3 (42,9) |
|                  | Ī18. Identificar o valor máximo e mínimo, correspondentes aos valores máximo e mínimo das respetivas frequências. | 1(14,2)  |
| Outras respostas | Ī8, Ī14, Ī19. Outras respostas.   | 4 (8,3)  |

Da análise da Tabela 28 e das respostas dos alunos, verificou-se que apenas 3 alunos da turma (13,6%) apresentaram o mesmo conflito simultaneamente em duas alíneas: o aluno A22 na questão 4 e 6, determinao da mediana ( $\bar{C}1$ ); o aluno A27 na questão 4 e 5, indicao dos valores máximo e mínimo ( $\bar{C}16$ ); o aluno A32 na questão 4 e 5, determinao da média ( $\bar{C}12$ ).

Destaca-se ainda que, na determinao da mediana e da mdia, a maioria das respostas revelam que os alunos aplicam corretamente o algoritmo da mediana, mas nem sempre o aplicam ao conjunto de dados correto e que alguns alunos confundem a mediana com outra medida de localizao.

Para o estudo das respostas dos alunos da turma do 8.o ano, vo continuar com a identificao atribuída no momento da diagnose, pelo que os 23 alunos da turma serão designados por A0 (aluno que não realizou a diagnose) e de A14 a A35.

### 6.1.2. Durante a Interveno de Ensino

Como foi referido no capítulo anterior, a primeira aula decorreu no dia 4 de maio, que constituiu o primeiro contacto da investigadora com o grupo turma. Nessa altura, os alunos ficaram a conhecer quem lecionaria as aulas (a investigadora), a forma como estas decorreriam (em díade), o tema a abordar (Estatística), a representao gráfica base (gráfico de pontos), o conteúdo novo a aprender (gráfico de extremos e quartis) e a aplicabilidade e impacto que a representao de dados estatísticos apresenta num diagrama de extremos e quartis.

#### Aula 0 (4 de maio)

A professora investigadora apresentou, informalmente e em termos genéricos, a durao da implementao (de 25 de maio a 9 de junho) dos conteúdos estatísticos a abordar, solicitando aos alunos uma breve revisão de mterias relacionadas, para as terem presentes e para as poderem aplicar corretamente aos novos conceitos, facilitando assim a sua aprendizagem nas aulas da IE. Nesta altura, o aluno A0 afirmou que a Estatística que se lecionava na escola de pouco servia, agora e no futuro; quando estivessem a trabalhar, para nada serviria. Outros alunos (A15, A26, A29 e A30) contestaram tal afirmao e apresentaram



situações do seu cotidiano (recorrendo aos manuais escolares de História e Geografia (A30), jornais (A29), televisão e Internet (A15) e manual escolar de matemática (A26)), onde eram observadas aplicações da Estatística).

Curiosamente, os alunos confundiram gráfico de pontos com gráfico cartesiano e ficaram surpreendidos pela simplicidade do gráfico de pontos “até um bebé sabe fazer e ler esse gráfico” (A0). Assim, perante a participação dos alunos, tornou-se mais fácil falar das novas aprendizagens e da aplicação de conceitos que já tinham estudado.

Perante o interesse dos alunos sobre a aplicação e utilidade da representação estatística que iriam apender e com o objetivo de os motivar, a investigadora projetou um conjunto de slides (Anexo VI), mostrando “onde”, “como”, “quando” e por “quem” era utilizado o diagrama de extremos e quartis. Justificou tal apresentação, referindo que, academicamente, era bastante utilizada a representação de extremos e quartis, pois apesar de não descrever em pormenor a distribuição que representa, resume, contudo, o seu comportamento quanto à dispersão, medidas de localização e simetria; que a sua utilização é generalizada e muito referida por cientistas de vários países e em diversas línguas. Foram sendo projetados alguns artigos para que os alunos vissem a representação que iriam aprender na intervenção de ensino. Potter (1995) sugere que para melhorar a compreensão e para promover a motivação dos alunos, o professor deve conversar com eles sobre a Estatística, relacionando-a com o cotidiano, mostrando a sua aplicabilidade e salientando que já são conhecedores dos conceitos estatísticos. Os alunos do grupo turma revelaram-se entusiasmados e prontos para a aprendizagem dos novos conceitos.

O desafio que lhes foi lançado baseava-se na resolução de um conjunto de fichas de tarefas em díade, que deveriam realizar de forma autónoma. No final da resolução, a ficha seria recolhida para posterior análise, pelo que cada grupo teria três fichas iguais: uma para cada aluno e outra para entregar à investigadora. Assim, no momento da resolução das tarefas das fichas, os dois alunos teriam que preencher duas fichas: uma para entregarem à investigadora e a outra para si próprios, para apresentarem e corrigirem as conclusões.

Claro que estas resoluções implicavam uma prévia revisão, apresentação e aplicação de conceitos trabalhados em anos anteriores, com exemplos práticos. No caso da apresentação de novos conceitos, estes eram trabalhados previamente em grupo turma e só depois as díades/grupos trabalhavam autonomamente as tarefas.

A resolução das situações-problema (algo muito característico da atividade humana), traduz exatamente a concretização máxima da ideia de autonomia e, segundo Tavares (1993,

p. 45), “a estrutura de resolução de problemas, para atingir o seu objetivo, desenvolve-se em três grandes momentos: a) ponto de partida; b) processo; c) ponto de chegada”. Numa perspectiva psicológica, este autor afirma que “a estrutura e a articulação da resolução de problemas fazem-se através de processos de assimilação, acomodação e modelação, segundo os quais o sujeito resolve os mais variados problemas a níveis sensoriais-motores, pré-operatórios e operatórios, a um maior ou menor grau de abstração e de adaptação à realidade circundante” (Tavares, 1993, p. 46). Acrescenta ainda que a resolução de situações-problema é uma prioridade, no que diz respeito ao processo de aprendizagem, permitindo desenvolver nos estudantes capacidades metacognitivas de “aprender a pensar”.

Na opinião de Novais e Cruz (1989), o que deverá entender-se por situação-problema é algo de que não se conhece a solução; questões que necessitam de uma ou mais respostas que tenham de ser elaboradas pelo sujeito em que o recurso à memória é insuficiente; é algo que exige criar um método para descobrir as respostas; é um projeto pessoal. Os seus fundamentos sugerem que, quando os estudantes procuram uma solução para uma determinada situação-problema, estão a resolver essa situação-problema e, simultaneamente, a desenvolver as suas capacidades cognitivas e metacognitivas, já que o aluno durante a resolução da situação-problema poderá controlar esses processos, aplicá-los a outras ocasiões e avaliar a sua eficácia. Segundo Bransford, Sherwood, Vye e Rieser (1986), existem cinco componentes no processo de resolução de problemas: Identificar (Identify); Definir (Define); Explorar (Explore); Agir (Act); Olhar e Aprender (Look and Learn) (citado em Novais & Cruz, 1989, p. 72).

Os alunos foram informados de que, durante todo o processo da IE, teriam de comunicar matematicamente, justificar conjeturas e propriedades, organizar dados e aplicar conceitos a situações-problema, em contextos gráficos e tabelares. Assim, o aluno deverá, primeiramente, identificar a situação-problema (reconhecer a sua existência), para depois a definir com o maior rigor possível. Posteriormente, deverá proceder a uma exploração de soluções admissíveis, dando lugar à execução de um plano que permitirá a verificação dessas mesmas soluções (ativação da estratégia). Por último, deverá observar o resultado das experiências levadas a cabo, aprendendo a partir da avaliação dos resultados dessas atividades realizadas. A comunicação Matemática surge por fim, quer por escrito quer oralmente, no momento em que os alunos registam as suas observações e conclusões ou quando as expõem ou as debatem.

No que concerne à realização da investigação é fundamental o papel do professor-investigador, pois ele é aquele que é capaz de despertar nos alunos atitudes de investigação,

tais como: curiosidade, necessidade de discutir e aprofundar os seus conhecimentos; procurar a solução para os problemas e pôr em prática novos caminhos para os resolver. Tudo isto requer que o professor, na sua vida pessoal, manifeste também este tipo de atitude, pois “é impossível que um professor, incapaz de viver ele próprio uma experiência de investigação autêntica, chegue a poder promover e garantir um trabalho de investigação correto com os alunos” (Tonucci, 1976, p. 30).

Na implementação das aulas (Anexo III) foram efetuados registos da relação entre os conteúdos lecionados e a realização das fichas de tarefas. Esta aprendizagem exigiu dos alunos uma grande concentração e articulação entre os conhecimentos prévios e os novos conhecimentos.

Os alunos souberam ainda que, no último dia da IE, seriam submetidos a uma ficha final de avaliação individual, que entraria na sua avaliação final do 3.º período e permitiria ainda, à investigadora, analisar as respostas com objetivo de avaliar as aprendizagens efetuadas. Também uma semana antes do final da IE, os alunos teriam uma ficha de resolução individual, resolvida fora das aulas, com trabalho extra-aula, a ser entregue ao professor-investigador, em data a anunciar na altura.

#### Aula 1 (25 de maio)

Na primeira aula (Quadro 29), que aconteceu a 25 de maio, a investigadora projetou slides (Anexo VI) com conceitos-base: moda, média, mediana (definição); aplicação destes conceitos em contextos variados, como sejam dados não organizados, dados organizados em tabela e gráficos. A intervenção de alguns alunos foi bastante reveladora. Os alunos mais participativos tinham realizado uma revisão de conceitos, conforme o sugerido na aula anterior. Antes da revelação de cada slide, a investigadora solicitava à turma a colaboração sobre cada um dos conceitos-base, a fim de avaliar o grau de assimilação das noções, pelos alunos, esclarecendo-os sobre os mesmos. No Quadro 29 ilustram-se as participações orais dos alunos.

Quadro 29 – Afirmações proferidas pelos alunos para conceitos-base de estatística em revisão.

| Conceito             | Afirmção   |
|----------------------|--|
| Variável estatística | É o valor que vai variando (A23), que pode ser um número ou uma letra ou um mês ou uma cor ou outra coisa qualquer (A32).      |
| Dados                | Os dados podem ser números ou outra coisa (A15), podem refletir uma qualidade ou uma quantidade (A0).                          |
| Frequência absoluta  | É o número de dados que pertencem a um valor da variável (A25).  |
| Frequência relativa  | Pode ser uma dízima, uma fração ou uma percentagem (A14) e está relacionada com o número total de elementos do conjunto (A15). |

|                            |   |
|----------------------------|---|
| Gráfico de pontos          | É quando se marcam duas coordenadas (x, y) (A14).   |
| Pictograma                 | É um gráfico de barras mas em desenhos (A23), tem que ter legenda e título (A18).   |
| Gráfico de barras          | Desenham-se barras todas iguais, mas separadas (A22) e a altura delas corresponde ao número de elementos iguais do conjunto de dados (A23). Tem sempre que ter um título e os eixos identificados e a escala pode não ser iguais (A15). |
| Gráfico circular           | É um círculo que está dividido por setores (A16). Cada um deles está relacionado com a percentagem e a divisão tem um ângulo (A32). Tem que ter legenda e título (A23).   |
| Gráfico de linha           | É quando se unem os pontos do gráfico de pontos (A32).  |
| Diagrama de caule-e-folhas | É uma linha vertical e depois dela coloca-se o último algarismo e só se pode utilizar quando o conjunto é de números (A30). Tem que ter legenda (A0).   |
| Amplitude                  | É a diferença entre o máximo e o mínimo de um conjunto de dados (A15).  |
| Máximo e mínimo            | Quando os dados são representados por números, é o maior e o menor desses valores (A30).  |
| Máximo e mínimo            | Quando os dados são representados por números, é o maior e o menor desses valores (A30).  |
| Moda                       | É o valor dos dados que aparece mais vezes (A0).  |
| Média                      | Quando os dados são representados por números, é o resultado da soma dos dados todos a dividir pelo número total desses dados (A15).  |
| Mediana                    | Quando os dados são representados por números, é o número que divide o conjunto em duas partes iguais (A15), nem sempre é um número inteiro e pode ser a média de dois números (A23).   |

---

Após o registo dos conteúdos revistos nesta aula, foram anunciados os onze grupos, formados de acordo com o que foi referido no terceiro capítulo. Foi ainda explicitado aos alunos a metodologia das aulas seguintes (cada díade teria três fichas, uma das quais seria entregue à investigadora antes da correção), o material que deveriam utilizar e o número de tarefas a explorar (19 tarefas). Foi também referido que o recurso ao gráfico de pontos seria uma constante, por ser uma representação gráfica simples, tornando-se o ponto de partida para trabalhar novos conceitos. O recurso a este tipo de representação permite aos alunos um trabalho mais autónomo.

### Aula 2 (26 de maio)

Foram concedidos 20 minutos aos alunos para procederem à resolução da Ficha de Tarefas 1 (FT1) (Anexo V), que continha tarefas de aplicação dos conceitos revistos na primeira aula, como se pode constatar na Figura 60.

**Tarefa 1.** Três amigos, Ana, Bruno e Carlos, lançaram 10 vezes um dado, tendo cada um deles registado o número de pontos obtidos:

Ana

1 3 4 4 5 2 2 3 2 2

Bruno

3 3 2 6 5 2 2 4 2 6

Carlos

1 3 1 4 6 2 2 5 4 5



- Qual a variável em estudo? E que valores toma?
- Qual o número máximo e o número mínimo de pontos obtidos por cada um dos amigos?
- Determina a média, a moda e a mediana do número de pontos que cada um dos três amigos obteve.

**Tarefa 2.** Uma professora pediu a 40 alunos, de duas das suas turmas, para resolverem um problema de matemática. O problema era classificado para 20 pontos. A professora avaliou a resolução de cada aluno e registou no diagrama de caule-e-folhas seguinte apenas as pontuações superiores a zero.

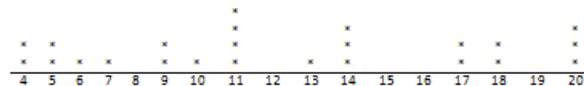
```

0 | 4 4 5 5 6 7 9 9 9
1 | 1 1 1 1 3 4 4 4 7 7 8 8
2 | 0 0 0
    
```

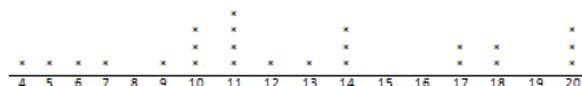
1|0 representa 10 pontos

- Mostra que 60% dos alunos obtiveram uma pontuação superior a zero.
- Quantos alunos obtiveram zero pontos?
- No total de alunos, qual a percentagem dos alunos que obtiveram a pontuação total, isto é, 20 pontos?
- Determina a média, a mediana e a moda de dados representados no diagrama de caule-e-folhas.
- Três alunos usaram um gráfico de pontos para visualizar a distribuição das pontuações consideradas no diagrama de caule-e-folhas dado. Dos três gráficos seguintes, obtidos pelos alunos, identifica o gráfico correto:

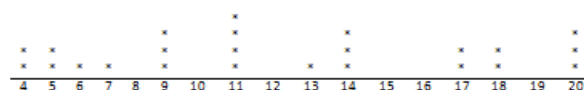
[A]



[B]



[C]



**Tarefa 3.** Na loja *Vestir Bem* há cinco empregados cujos vencimentos constam da lista seguinte:

580 580 580 680 1580

- Determina a média, a moda e a mediana dos vencimentos dos cinco empregados.
- Se um dos empregados quisesse pedir um aumento de vencimento, qual ou quais das medidas anteriormente calculadas deveria usar para justificar esse pedido?
- Se fosses o patrão da loja e não quisesse aumentar o vencimento a nenhum empregado, qual ou quais das medidas anteriormente calculadas escolherias para contrariar a necessidade de aumento?
- Após a entrada de um novo empregado, a média dos vencimentos dos empregados da loja passou a ser de 790€. Qual é o vencimento do novo empregado, sabendo que os restantes cinco empregados da loja mantiveram os seus vencimentos?

Figura 60 – Tarefas 1, 2 e 3 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 1

Durante a sua resolução, alguns grupos solicitaram a presença de uma das docentes (titular de turma ou a investigadora), sobretudo por sentirem dificuldades na Tarefa 3, o que é corroborado pelos resultados registados na Tabela 29.

Tabela 29 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas dos alunos em díade à Ficha de Tarefas 1  
Tipo de resposta (n=11)

|                    |          |    | C          | PC       | I        | NR       | ID       |
|--------------------|----------|----|------------|----------|----------|----------|----------|
| Ficha de Tarefas 1 | Tarefa 1 | a) | 7 (63,6)   | 2 (18,2) | 1 (9,1)  | 1 (9,1)  | 0,64     |
|                    |          | b) | 11 (100,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1        |
|                    |          | c) | 7 (63,6)   | 4 (36,4) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0,64     |
|                    | Tarefa 2 | a) | 11 (100,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1        |
|                    |          | b) | 11 (100,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1        |
|                    |          | c) | 10 (90,9)  | 0 (0,0)  | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 0,91     |
|                    |          | d) | 6 (54,5)   | 5 (45,5) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0,55     |
|                    | Tarefa 3 | e) | 10 (90,9)  | 0 (0,0)  | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 0,91     |
|                    |          | a) | 8 (72,7)   | 2 (18,2) | 0 (0,0)  | 1 (9,1)  | 0,73     |
|                    |          | b) | 1 (9,1)    | 0 (0,0)  | 8 (72,7) | 2 (18,2) | 0,09     |
|                    |          | c) | 1 (9,1)    | 0 (0,0)  | 8 (72,7) | 2 (18,2) | 0,09     |
|                    |          |    | d)         | 4 (36,4) | 2 (18,2) | 1 (8,7)  | 4 (36,4) |

Da Tabela 29 realça-se que apenas em três alíneas (25%) os grupos responderam todos corretamente: 1b (identificação do máximo e mínimo); 2a (determinação da frequência relativa); e 2b (determinação da frequência absoluta do valor zero da variável). Também em cinco alíneas (41%) há grupos que optam por não responder: 1a (Identificação da variável e dos seus valores); 3a (determinação dos valores centrais); 3b e 3c (conjeturar para além do que os dados revelam); 3d (conhecidas a média de um conjunto de dados e um novo dado, determinar a nova média de todos os dados). Salienta-se que em termos de índice de dificuldade (ID), os resultados nas duas primeiras tarefas (T1 com dados não organizados e T2 com dados organizados em diagrama de caule-e-folhas) revelaram-se fáceis ( $0,55 < ID < 0,74$ ) ou muito fáceis ( $ID > 0,74$ ) em todas as suas alíneas; em relação à T3 (dados não organizados), os alunos apresentaram mais dificuldade, já que apenas a alínea 3a) foi fácil para os alunos e as alíneas 3b, 3c e 3d revelaram-se difíceis ( $0,25 < ID < 0,44$ ) ou muito difíceis ( $ID < 0,25$ ).

Estes resultados deixam transparecer que os alunos não têm dificuldades na determinação do valor mínimo e máximo, em dados não organizados (1b). Também nas questões 2a e 2b, em que era solicitado aos alunos que trabalhassem com o valor nulo da variável, com dados organizados em diagrama de caule-e-folhas, os alunos não revelam dificuldades em interpretar o diagrama, nem a trabalhar com o valor nulo.

Já nas alíneas 1a e 1c há grupos que apresentaram respostas PC, o que se deve ao facto de os alunos apenas responderem corretamente a um dos conceitos solicitados: na alínea 1a identificam corretamente a variável em estudo, embora não identifiquem os seus valores, de forma correta, já que referem que “os valores são de 1,6” (G4 e G8); na alínea 1c determinam corretamente a moda e a média, contudo, na determinação da mediana aplicam corretamente o algoritmo, mas sem a respetiva ordenação (G1, G3, G6 e G10). Este conflito semiótico enquadra-se na categoria  $\bar{C}3$ , referido em capítulo anterior. No caso da alínea 1a, apenas um grupo respondeu incorretamente “A face do dado” (G1). Na Tarefa 1, o G7 não apresenta qualquer resposta.

Quanto à segunda tarefa, verifica-se que os alunos apresentam mais dificuldades na alínea 2d, já que determinam corretamente a moda e a média, mas não conseguiram aplicar o algoritmo da mediana (G5) ou da média (G3) a dados organizados num diagrama de caule e folhas: “a mediana é 0” (G2), revelando o conflito semiótico  $\bar{C}8$ ; “a mediana é  $1+1=2$ ,  $2:2=1$ ” (G5) e “ $\frac{11+13}{2}=12$ ” (G6), que apresentam conflitos semióticos  $\bar{C}2$  e  $\bar{C}3$ , respetivamente; “ $\frac{0 \times 16 + 2 \times 4 + 6 + 7 + 3 \times 9 + 4 \times 11 + 13 + 3 \times 14 + 2 \times 17 + 2 \times 18}{24} = 6,9$ ” (G8) e “a média é 0” (G3), revelando ambos o conflito semiótico  $\bar{C}14$ . As respostas incorretas verificam-se nas alíneas 2c e 2e: na alínea 2c a resposta “3 alunos” (G10) está incorreta pois não apresenta a percentagem correspondente a estes três alunos e no caso da alínea 2e a opção assinalada foi a A (G3), sem qualquer justificação, revelando falta de atenção na análise gráfica.

No que concerne à Tarefa 3, cujos dados estavam previamente ordenados, constatou-se que os alunos necessitaram de maior apoio, para responderem às alíneas 3b, 3c e 3d. Nestas alíneas pretendia-se que os alunos apresentassem, justificando, a medida de localização que melhor caracterizava a situação apresentava. Aqui os alunos revelaram muitas dificuldades em responder corretamente às alíneas.

Durante a resolução as díades foram solicitando ajuda das docentes:

G1: Eu calculei a média de cada uma das medidas. Na 3b e 3d posso escolher uma delas, certo? Como justifico?

Professora: Sim, tens que optar por uma delas. Pela medida que optares, deves dizer por que o fazes.

G10: Como a moda e a mediana são iguais tanto faz escolher uma ou outra, certo?

Professora: Mas a tua escolha só depende do valor? Qual dos conceitos melhor justifica a tua opção? Vê o que foi referido na aula anterior sobre cada uma das medidas.

G1, G2, G4, G5, G8, G9, G10: Na alínea 3d) não entendo o que tenho que fazer.

Professora: Vamos analisar o algoritmo da média. Quantos elementos tem?

G1, G2, G4, G5, G8, G9, G10: Agora são 6.

Professora: Todos são conhecidos?

G1, G2, G4, G5, G8, G9, G10: Não, só um é que não é conhecido, x, certo?

Professora: apliquem então o algoritmo. Vamos lá trabalhar...

Enquanto os alunos discutiam a melhor forma de resolver a tarefa, as docentes “circularam” pela sala, o que permitiu verificar que, à menor dificuldade, solicitavam a ajuda, revelando alguma insegurança e falta de autonomia. Após a orientação prestada pelas professoras aos alunos, era expectável que estes não cometessem tantos erros, no entanto tal não se verificou. Apesar da ajuda, os alunos obtiveram respostas que se enquadravam nas categorias PC e I, que são apresentadas no Quadro 30.

Quadro 30 – Exemplos de respostas dos grupos às alíneas da Tarefa 3 nas categorias PC e I.

| Tarefa 3 | Resposta  |
|----------|---|
| a)       | G2 e G3 respondem corretamente a duas das três medidas tendência central pedidas, não determinaram a mediana (PC).  |
| b)       | G1, G8, G9: “A média, pois é o valor mais alto.” (I).<br>G2, G5, G6: “A média, porque mostra que é bastante superior a 580, sendo 800.” (I)<br>G4, G7: “A medida que deveria usar é a média.” (I)   |
| c)       | G1, G3, G7: “A moda ou mediana, pois os valores são os mesmos.” (I)<br>G2, G4, G8, G9: “A moda, porque mostra que 580 tem sido mais constante que os outros valores.” (I)<br>G6: “A mediana, pois 50% dos funcionários recebem 580€.” (I) |
| d)       | G6 e G8: $\frac{x+580+580+580+680+1580}{6} = 790\text{€}$ (PC)<br>G2: “O vencimento do novo funcionário é 10€ a menos que os outros cinco empregados, pois a média dos outros empregados é 10€ mais elevado.” (I)                         |

Da análise das respostas constata-se que a maioria dos alunos trocou a opção e a argumentação das respostas entre as alíneas 3b e 3c. Estas questões representavam situações novas, de aplicação de conceitos, e embora tenham trocado a opção, a argumentação adequasse a esta, mas não ao contexto apresentado. Estas respostas podem estar relacionadas com o facto de eles ainda não estarem no mercado de trabalho ou por desconhecem a existência de situações idênticas entre os seus familiares e amigos. No caso da alínea 3d, as respostas PC devem-se a erros de cálculo e a resposta I reflete uma análise pouco cuidada do contexto da tarefa. Constata-se, nesta alínea, um número mais elevado de não respostas.

No final da aula os alunos foram partilhando as suas respostas, as resoluções foram justificadas, os erros foram corrigidos e registaram no caderno diário as respostas corretas comprovadas pelas docentes.


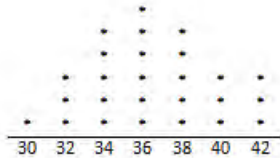
### Aulas 3 e 4 (28 de maio)

Nestas aulas foi solicitado a cada um dos grupos a realização da FT2, cujos conceitos a aplicar relacionavam-se, uma vez mais, com as medidas de localização. No entanto, agora,



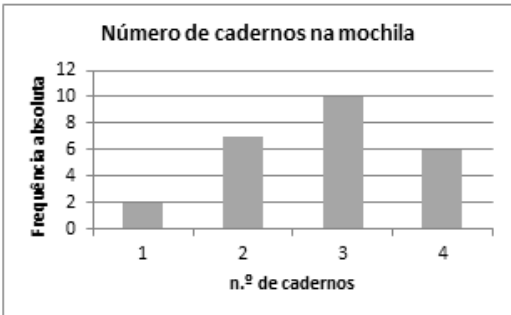
todas as tarefas encontravam-se em contextos gráficos, como se pode constatar nas Figuras 61 e 62.

**Tarefa 4.** A Diretora de Turma da Verónica registou as idades das mães dos alunos no gráfico de pontos seguinte:

- Quantos alunos tem a turma da Verónica?
- Quantas mães têm, no máximo, 38 anos?
- Indica a moda e determina a mediana do conjunto de idades registadas.
- Indica o valor lógico da seguinte afirmação: “A média de idades das mães dos alunos da turma da Verónica é superior à mediana”.
- Dessa turma foram selecionadas cinco mães para representar a escola numa competição culinária. Relativamente às idades dessas cinco mães, sabe-se que a moda é 36 anos e a mediana é 38 anos. Quais as idades possíveis das cinco mães?

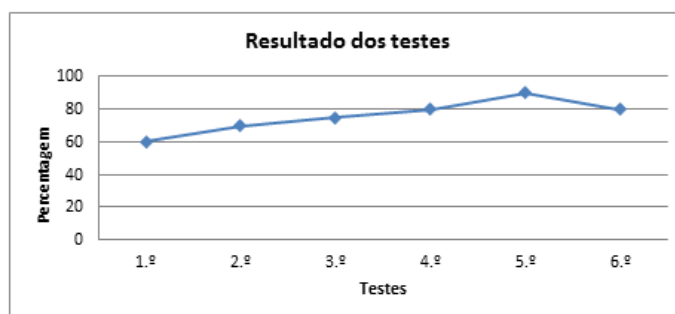
**Tarefa 5.** O gráfico de barras mostra o número de cadernos que os alunos da turma do 8.º H levaram, na mochila, para a escola no dia 15 de abril de 2015.



- Indica a variável em estudo e os valores que ela toma?
- Qual o número mínimo de cadernos que os alunos transportaram nas suas mochilas naquele dia? E o número máximo?
- Qual a percentagem de alunos que levaram dois cadernos na mochila naquele dia?
- Calcula a média, a moda e a mediana do número de cadernos que os alunos do 8.º H levaram na mochila naquele dia.
- Nesse dia, 15 de abril, a professora de Matemática do 8.º H também trouxe os seus cadernos numa mochila. Acrescentando os cadernos que a professora transportava nesse dia, a média do número de cadernos transportados nas mochilas, pelos alunos e pela professora, nesse dia, passou a ser 3. Quantos cadernos transportava a professora? Justifica.

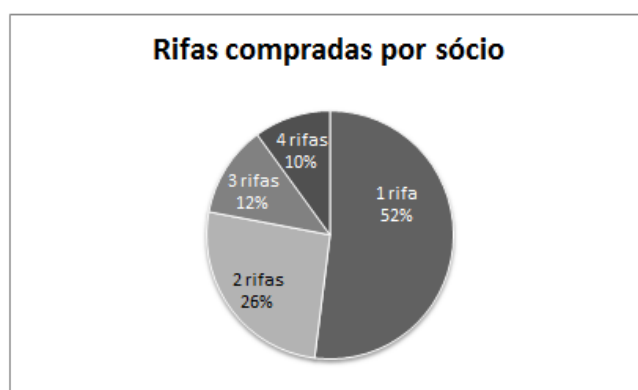
Figura 61 – Tarefas 4 e 5 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 2

**Tarefa 6.** Durante o passado ano letivo, a Verónica fez seis testes à disciplina de Matemática. Com os resultados obtidos construiu um gráfico de linhas para poder observar a sua evolução nessa disciplina.



- Qual a variável em estudo?
- Qual foi o melhor resultado obtido pela Verónica nos testes realizados na disciplina de Matemática? E o pior?
- Determina a média dos resultados obtidos pela Verónica nos seis testes de Matemática realizados.
- Poder-se-á afirmar que a aluna é pouco constante nos resultados obtidos nos seis testes à disciplina de Matemática? Justifica.
- A professora de Matemática determinou a classificação final da Verónica através da mediana dos resultados dos seis testes. A professora afirmou que assim não prejudicaria a sua classificação final. Porém, a Verónica preferia que a professora considerasse a moda da classificação dos seus testes. Concordas com a Verónica? Justifica.

**Tarefa 7.** No clube desportivo *Os Atletas* vai ser sorteada uma viagem aos *Jogos Verão 2015*. O número de rifas vendidas a cada sócio do clube desportivo variou de 1 a 4. O gráfico circular mostra, de entre os 50 sócios que compraram rifas, a percentagem dos que compraram 1, 2, 3 e 4 rifas.



- Determina o número de sócios que compraram 2 rifas.
- No conjunto dos sócios que compraram rifas,
  - Determina o número de rifas que, em média, cada sócio comprou;
  - Indica a moda e a mediana do número de rifas compradas pelos sócios.
  - Constrói o gráfico de pontos para representar a distribuição do número de rifas vendidas aos sócios.

Figura 62 – Tarefas 6 e 7 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 2

Na terceira aula, os alunos realizaram as quatro tarefas propostas na ficha, ficando para a quarta aula a apresentação das resoluções e o registo das respostas corretas no caderno diário.

Como anteriormente, a postura das professoras manteve-se, foram “circulando” pela sala, foram observando e ouvindo os alunos, enquanto estes discutiam a melhor forma de resolver as tarefas, o que permitiu constatar que à menor dificuldade eles solicitavam a ajuda das professoras, revelando uma vez mais alguma insegurança e falta de autonomia. As

docentes procuraram remeter sempre as dúvidas para os registos das aulas anteriores, mas constataram que a maioria dos alunos revelava dificuldades na interpretação do enunciado:

G1, G3, G8, G9: Não entendo o que quer dizer “no máximo 38 anos”, é para dizer as mães que têm 38 anos?

Professora: Pensa um bocadinho. O que quer dizer “no máximo”, no contexto do problema?

G1, G3, G8, G9: Até, certo?

G4, G5, G7, G9, G11: Como é que sabemos que a mediana é ou não superior à média?

Professora: Nesta tarefa o que falta calcular?

G4, G5, G7, G9, G11: Claro que é a média (gargalhadas).

G1, G3, G5, G6: Na 4e posso colocar qualquer idade ou tem que ser aquelas que estão no gráfico? Pode-se repetir mais do que um grupo de idades?

Professora: Ora vamos lá ler com mais atenção o enunciado.

G2, G6, G8, G11: Nesta alínea (5e) resolve-se como na ficha 1, na tarefa dos cadernos, certo?

Professora: Verifiquem o enunciado e a resolução anterior.

No final da aula foram recolhidas as fichas de cada diáde. Nas Tabelas 30 e 31, estão registadas as respostas das categorias C, PC e I de cada uma das alíneas das quatro tarefas e ainda as NR da FT2.

Tabela 30 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das diádes, às Tarefas 4 e 5

|                    |          | Tipo de resposta (n=11) |            |          |          |          |      |
|--------------------|----------|-------------------------|------------|----------|----------|----------|------|
|                    |          | C                       | PC         | I        | NR       | ID       |      |
| Ficha de Tarefas 2 | Tarefa 4 | a)                      | 11 (100,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1    |
|                    |          | b)                      | 8 (72,7)   | 1 (9,1)  | 2 (18,2) | 0 (0,0)  | 0,73 |
|                    |          | c)                      | 10 (90,9)  | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0,91 |
|                    |          | d)                      | 6 (54,5)   | 3 (54,5) | 0 (0,0)  | 2 (18,2) | 0,55 |
|                    |          | e)                      | 7 (63,6)   | 2 (18,2) | 0 (0,0)  | 2 (18,2) | 0,64 |
|                    | Tarefa 5 | a)                      | 4 (36,4)   | 4 (36,4) | 2 (18,2) | 1 (9,1)  | 0,36 |
|                    |          | b)                      | 9 (81,8)   | 1 (9,1)  | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 0,82 |
|                    |          | c)                      | 9 (81,8)   | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 2 (18,2) | 0,82 |
|                    |          | d)                      | 8 (72,7)   | 2 (18,2) | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 0,73 |
|                    |          | e)                      | 4 (36,4)   | 1 (9,1)  | 1 (9,1)  | 5 (45,5) | 0,36 |

Tabela 31 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das diades, às Tarefas 6 e 7

|                    |          | Tipo de resposta (n=11) |           |          |          |          | ID   |
|--------------------|----------|-------------------------|-----------|----------|----------|----------|------|
|                    |          | C                       | PC        | I        | NR       | ID       |      |
| Ficha de Tarefas 2 | Tarefa 6 | a)                      | 9 (81,8)  | 0 (0,0)  | 2 (18,2) | 0 (0,0)  | 0,82 |
|                    |          | b)                      | 10 (90,9) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1 (9,1)  | 0,91 |
|                    |          | c)                      | 10 (90,9) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1 (9,1)  | 0,91 |
|                    |          | d)                      | 8 (72,7)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 3 (27,2) | 0,73 |
|                    |          | e)                      | 9 (81,8)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 2 (17,4) | 0,82 |
|                    | Tarefa 7 | a)                      | 6 (54,5)  | 0 (0,0)  | 1 (9,1)  | 4 (36,4) | 0,55 |
|                    |          | b1)                     | 3 (27,2)  | 2 (18,2) | 1 (9,1)  | 5 (45,5) | 0,27 |
|                    |          | b2)                     | 4 (36,4)  | 2 (18,2) | 0 (0,0)  | 5 (45,5) | 0,36 |
|                    |          | b3)                     | 4 (36,4)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 7 (63,6) | 0,36 |
|                    |          |                         |           |          |          |          |      |

Pela análise da Tabela 30 e 31 constata-se que os alunos apresentaram mais dificuldades nas alíneas 5e (determinação de nova média ao ser introduzido um novo dado, conhecida a anterior), 7b1 (determinação da frequência absoluta a partir da frequência relativa), 7b2 (determinação da mediana e a moda) e 7b3 (construção do gráfico de pontos). Também se verifica que apenas numa questão (5%) todos os alunos respondem corretamente, e em treze alíneas (68%) há pelo menos um grupo que não apresenta qualquer resposta (19%), embora os conteúdos trabalhados na ficha estejam registados no caderno.

Analisando o ID das questões desta ficha, constata-se que a maioria das alíneas foram acessíveis aos alunos, já que as T4 (dados em gráfico de pontos) e T6 (dados em gráfico de linhas) se revelaram fáceis (4b, 4d, 4e e 6d) ou muito fáceis (4a, 4c, 6a, 6b, 6c e 6e). Já no caso das T5 (dados em gráfico de barras) e T7 (dados em gráfico circular), para além de alíneas fáceis (5d e 7a) ou muito fáceis (5b, 5c, 5d), apresentam também alíneas que se revelaram difíceis (5a, 5e, 7b1, 7b2, 7b3). Portanto, a ficha parece ser acessível, tendo os alunos manifestado mais dificuldades em interpretar os gráficos e extrair deles conclusões sobre os dados nele representados, quando estes são circulares e de barras.

Verifica-se, ainda, que o número de grupos que não apresentam qualquer resposta é maior nas alíneas 5e e em todas as alíneas da Tarefa 7. Por um lado, isto denota pouco empenho dos alunos na resolução das alíneas, pois os conteúdos foram trabalhados em sala de aula e estão registados no caderno, podendo sempre ser consultados para esclarecer dúvidas; por outro lado, a representação em gráfico de barras e circular pode ter influenciado o desempenho dos alunos. É de salientar que estes dois tipos de gráficos estiveram presentes no TD (Q5 e Q6, respetivamente) e o desempenho na aula foi notoriamente melhor do que no TD

(Tabela 31). Analisando as respostas dos alunos nas categorias PC e I, construiu-se o Quadro 31 com exemplos deste tipo de respostas.

Quadro 31 – Exemplos de respostas dos grupos às alíneas da Ficha de Tarefas 2 nas categorias PC e I.

| Resposta |  |
|----------|--|
| Tarefa 4 | b) G1, G3: “5 mães” (I);<br>G2: “21 mães” (PC)   |
|          | c) G4: “30, 32, 32, 32, 34, 34, 34, 34, 34, 36, 36, 36, 36, 36, 38, 38, 38, 38, 38, 40, 40, 42, 42, 42<br>A mediana é 36” (PC)<br>(Conflito semiótico $\bar{C}2$ )   |
|          | d) G4, G6, G7: $\frac{30+32 \times 3+34 \times 5+36 \times 6+38 \times 5+40 \times 3+42 \times 3}{26} = 36,46$ “ (PC)  |
| Tarefa 5 | e) G6: “pode ser 30, 32, 34 e 36” (PC)<br>G2: “É possível haver 2 mães de 36 anos e tem de ter pelo menos uma mãe com 38 anos e 40 e 42 anos” (PC)   |
|          | a) G2: “número de cadernos na mochila no dia 15 de abril de 2015” (PC)<br>G4, G5, G8: “número de cadernos na mochila no dia 15 de abril de 2015 e os valores são entre 1 e 4” (PC)<br>G6: “A variável é 1, 2, 3, 4” (I)<br>G3: “é 3” (I)   |
|          | b) G7: “mínimo: 1 e máximo: 3” (PC)<br>G3: “1” (I)   |
| Tarefa 6 | d) G1: “Moda = mediana = 3 e Média = $\frac{2+7+10+4}{4}$ “(PC) (Conflito semiótico $\bar{C}10$ )<br>G3: “Moda = mediana = 3” (PC)<br>G6: “Moda = 3, Média = $\frac{2+7+10+4}{4} = 6,25$ ” (Conflito semiótico $\bar{C}10$ ) “e Mediana 2, 7, 10, 6<br>logo $\frac{7+10}{2} = 45$ ” (Conflito semiótico $\bar{C}2$ )<br>G2: “ $\frac{2+14+30+24+x}{25} = 3 \Leftrightarrow 70 + x = 75 \Leftrightarrow x = 5$ ” (PC) |
|          | e) G6: “ $\frac{2+7+10+6+x}{5} = 3 \Leftrightarrow 25 + x = 15 \Leftrightarrow x = 25 - 15 \Leftrightarrow x = 10$ ” (I)   |
|          | a) G2, G3: “Os seis testes à disciplina de matemática que a Verónica fez” (I).   |
| Tarefa 7 | a) G1: “ $\frac{12 \times 50}{100} = 6$ ” (I)  |
|          | b1) G2, G6: “1 rifa: 26 sócios; 2 rifas: 13 sócios; 3 rifas: 6 sócios; 4 rifas: 5 sócios, logo a média é $\frac{26+13+6+5}{4} = 12,5$ ” (PC)<br>G8: “ $\frac{1 \times 52+2 \times 26+3 \times 12+4 \times 10}{4} = 45$ ” (I)   |
|          | b2) G2: “A moda é 1 e a mediana 5 sócios, 6 sócios, 13 sócios, 26 sócios, logo $\frac{6+13}{2} = 9,5$ ” (PC)<br>G6: “A moda é 1 e a mediana é 10%, 12%, 26%, 52%, logo $\frac{12+26}{2} = 19$ ” (PC)<br>(Conflito semiótico $\bar{C}2$ )<br>G8: “Moda 12 (PC)  |

Neste quadro constata-se que há alunos que apresentam os mesmos conflitos semióticos anteriormente revelados no TD, que, apesar de terem sido trabalhados nas aulas anteriores, alguns alunos tendem a persistir neles. Todos os dados encontravam-se organizados em gráficos, sendo o gráfico circular aquele onde os alunos revelaram maior dificuldade na determinação da mediana e média, enquanto o gráfico de pontos facilitou a

determinação destas medidas. Quanto às dificuldades observadas persiste o conflito semiótico  $\bar{C}2$ , revelado pelos grupos G6 e G7, para o caso da determinação da mediana e os grupos G1 e G6 apresentaram o conflito semiótico  $\bar{C}10$ , quando determinam a média.

As docentes comprovaram o registo das respostas corretas nos cadernos individuais dos alunos.

Aula 5 (29 de maio)

As tarefas propostas nesta aula tinham por base a aplicação do conceito quartil, como se constata na Figura 63.

**Tarefas 8.** Determina os quartis de cada um dos seguintes conjuntos de dados numéricos:

- a) 12, 7, 8, 7, 13, 6, 4
- b) 6, 13, 7, 8, 10, 11, 12, 8, 13
- c) 2, 9, 6, 7, 8, 4, 4, 8
- d) 8, 10, 7, 7, 8, 12, 11, 10, 10, 7

**Tarefa 9.** A empresa *Douro Doce* faz saquinhos contendo 50 bombons. Para controlo da qualidade da produção, são recolhidas diariamente amostras de 11 saquinhos e contabilizado o número de bombons dentro de cada saquinho. Os resultados observados na amostra recolhida ontem foram os seguintes:

51   50   52   51   52   44   50   50   52   51   50

- a) Relativamente a esta amostra, determina a amplitude, a moda, a média e a mediana.
- b) Constrói o gráfico de pontos da distribuição do número de bombons dos 11 saquinhos.
- c) Relativamente a esta amostra, determina:
  - 1)  $q_1$  primeiro quartil;
  - 2)  $q_3$  terceiro quartil;
  - 3)  $a$  amplitude interquartil

**Tarefa 10.** Observa o gráfico de barras relativo às idades dos alunos de uma turma do 8.º ano.

| Idade | Frequência absoluta |
|-------|---------------------|
| 13    | 5                   |
| 14    | 9                   |
| 15    | 3                   |
| 16    | 1                   |

- a) Quantos alunos tem a turma?
- b) Determina a média, a moda e a mediana das idades dos alunos da turma.
- c) Recorrendo aos dados do gráfico dado, determina a amplitude interquartil das idades dos alunos da turma.

Figura 63 – Tarefas 8, 9 e 10 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 3

Foi nesta aula que o conceito de “quartil” foi apresentado, a partir do gráfico de pontos da alínea 7b3, da ficha anterior (FT2). Mas, com o intuito de melhor exemplificar os conceitos e de motivar os alunos, momentos antes dos alunos iniciarem a realização da ficha de tarefas, a investigadora apresentou o vídeo suporte do manual escolar, onde era exemplificada a determinação dos quartis para um conjunto de dados par e ímpar, localizado na plataforma “escola virtual”. Os alunos reagiram positivamente e logo que lhes foi entregue a FT3, começaram a aplicar os conceitos, sendo os resultados registados na Tabela 32.

Tabela 32 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das díades, à Ficha de Tarefas 3

|                    |           | Tipo de resposta (n=11) |            |          |          |          |      |
|--------------------|-----------|-------------------------|------------|----------|----------|----------|------|
|                    |           | C                       | PC         | I        | NR       | ID       |      |
| Ficha de Tarefas 3 | Tarefa 8  | a)                      | 10 (90,9)  | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0,91 |
|                    |           | b)                      | 10 (90,9)  | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0,91 |
|                    |           | c)                      | 9 (81,8)   | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 1 (9,1)  | 0,82 |
|                    |           | d)                      | 7 (63,6)   | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 3 (27,2) | 0,64 |
|                    | Tarefa 9  | a)                      | 9 (81,8)   | 1 (9,1)  | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 0,82 |
|                    |           | b)                      | 5 (45,5)   | 4 (36,4) | 0 (0,0)  | 2 (17,4) | 0,55 |
|                    |           | c1)                     | 10 (90,9)  | 0 (0,0)  | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 0,92 |
|                    |           | c2)                     | 9 (81,8)   | 0 (0,0)  | 2 (9,1)  | 0 (0,0)  | 0,82 |
|                    |           | c3)                     | 8 (72,7)   | 0 (0,0)  | 3 (27,2) | 0 (0,0)  | 0,73 |
|                    | Tarefa 10 | a)                      | 11 (100,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1    |
|                    |           | b)                      | 11 (100,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1    |
|                    |           | c)                      | 5 (45,5)   | 2 (18,2) | 1 (9,1)  | 3 (27,2) | 0,46 |

“Circulando” na sala de aula, as professoras foram ajudando os alunos na resolução das primeiras duas alíneas, pois os alunos determinavam os quartis sem organizarem previamente os dados. Após este ajuste, os alunos trabalharam em díade, autonomamente. No final da aula foram recolhidas as fichas de cada uma das díades, cujos resultados estão registados na Tabela 32, segundo o tipo de respostas apresentadas pelos alunos da díade, nas tarefas da FT3.

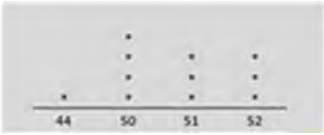
Pela análise da Tabela 32 constata-se que os alunos apresentaram mais dificuldades nas alíneas: 8d (determinar os quartis); 9b (construir o gráfico de pontos); e 10c (determinar a amplitude interquartil). Neste conjunto de tarefas (8, 9 e 10), houve um menor número de alunos a optarem por não responder nestas alíneas (33%) que na situação anterior (68%).

Procedendo-se à análise das alíneas desta ficha quanto ao ID, verifica-se que todas as alíneas das tarefas T8, T9 (dados não organizados) e T10 (dados em gráfico de barras) se

revelaram fáceis (8d, 9b e 9c3) ou muito fáceis (8a, 8b, 8c, 9a, 9c1, 9c2 10a e 10b) e apenas a alínea 10c se revelou de índice de dificuldade médio ( $0,45 < ID < 0,54$ ). Em relação à ficha anterior (FT2), os alunos melhoram o seu desempenho. Aqui o gráfico de barras não se revelou um obstáculo, apesar de os conceitos estarem a ser trabalhados pela primeira vez.

Analisando as respostas dos alunos nas categorias PC e I, construiu-se o Quadro 32, com exemplos das respostas apresentadas pelos grupos no momento do trabalho autónomo em díade.

Quadro 32 – Exemplos de respostas dos grupos às alíneas das tarefas 8 à 10 nas categorias PC e I.

| Resposta  |   |
|-----------|---|
| Tarefa 8  | a) G1: na resposta apenas determina a mediana (o 2.º quartil) e de forma correta. (PC)  |
|           | b) G1: na resposta apenas determina a mediana (o 2.º quartil) e de forma correta. (PC)  |
|           | c) G1: na resposta apenas determina a mediana (o 2.º quartil) e de forma correta. (PC)  |
|           | d) G1: na resposta apenas determina a mediana (o 2.º quartil) e de forma correta. (PC)  |
| Tarefa 9  | a) G1: “amplitude: 44-52 e média: Média = $\frac{44+50 \times 4 + 51 \times 3 + 52 \times 3}{11} = 2192,36$ ” (PC) (conflito semiótico $\bar{C}9$ )<br>G3: “moda= 52; mediana= 52, Média = 507”; amplitude = NR (I) |
|           | b) G1, G2, G5, G9: Como é ilustrado abaixo os alunos não apresentam a escala correta  |
|           | G   |
|           | c1) G3: “42” (I)  |
| Tarefa 10 | c2) G2: “44, 50, 50, 50, 50, 51, 51, 51, 52, 52, 52 2.º Q: 51” (I)<br>G3: “50” (I)  |
|           | c3) G1, G3: “2.º Q: 51” (I)<br>G2: “51, 51, 52, 52, 52 3.º Q: 52” (I)   |
|           | c) G1: “16-13 = 3” (I)<br>G5: “1.º Q: 50 e 3.º Q: 52, logo a amplitude interquartil é 52 – 50 = 2” (PC)<br>G10: “13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14 1.º Q: 13<br>14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 16 3.º Q: 14” (PC) |

Ao analisarmos as respostas não corretas, verifica-se que há alunos com dificuldades na determinação da mediana (G1, G2, G3 e G10), que se refletiram no seu desempenho aquando da determinação dos quartis. Constata-se, ainda, que 36% dos grupos não construíram corretamente o gráfico de pontos, uma vez que não representaram corretamente a escala. O G5 respondeu à 10c com os dados da tarefa 9, revelando distração na leitura do enunciado. Também é visível que os G1, G2 e G3 são os que apresentam mais dificuldades na resolução das tarefas propostas, apesar do anterior registo dos conteúdos e das resoluções das fichas anteriores.



Aula 6 (1 de junho) e aula 7 (2 de junho)

Os alunos na Tarefa 11 foram convidados a trabalhar os Diagrama de Extremos e Quartis (DEQ), como se constata nas Figuras 64.

**Tarefa 11.** Apresenta-se, a seguir, a pauta relativa à avaliação final do 1.º período da turma da Verónica.

| Alunos | Classificações das disciplinas |        |          |          |           |            |                   |                |                 |                 |
|--------|--------------------------------|--------|----------|----------|-----------|------------|-------------------|----------------|-----------------|-----------------|
|        | Português                      | Inglês | Espanhol | História | Geografia | Matemática | Ciências Naturais | Físico-química | Educação Visual | Educação Física |
| A      | 3                              | 4      | 4        | 5        | 3         | 2          | 3                 | 2              | 3               | 3               |
| B      | 3                              | 4      | 4        | 4        | 3         | 3          | 4                 | 2              | 4               | 4               |
| C      | 2                              | 4      | 3        | 3        | 3         | 3          | 3                 | 3              | 3               | 2               |
| D      | 4                              | 2      | 3        | 4        | 3         | 3          | 3                 | 2              | 4               | 3               |
| E      | 4                              | 5      | 5        | 5        | 4         | 4          | 4                 | 4              | 4               | 3               |
| F      | 5                              | 5      | 5        | 5        | 4         | 5          | 5                 | 5              | 4               | 3               |
| G      | 4                              | 3      | 4        | 5        | 4         | 4          | 4                 | 4              | 4               | 3               |
| H      | 3                              | 3      | 3        | 3        | 2         | 2          | 2                 | 2              | 4               | 3               |
| I      | 2                              | 2      | 3        | 3        | 2         | 2          | 2                 | 2              | 3               | 3               |
| J      | 2                              | 3      | 3        | 3        | 2         | 2          | 3                 | 2              | 3               | 3               |
| K      | 3                              | 4      | 4        | 3        | 3         | 2          | 4                 | 2              | 3               | 3               |
| L      | 4                              | 5      | 5        | 5        | 4         | 4          | 4                 | 3              | 5               | 4               |
| M      | 2                              | 2      | 2        | 3        | 2         | 1          | 3                 | 1              | 3               | 3               |
| N      | 5                              | 5      | 5        | 4        | 5         | 5          | 5                 | 5              | 4               | 3               |
| O      | 4                              | 4      | 4        | 4        | 4         | 4          | 4                 | 4              | 4               | 5               |
| P      | 2                              | 2      | 3        | 3        | 3         | 2          | 3                 | 2              | 4               | 4               |
| Q      | 3                              | 3      | 4        | 4        | 4         | 4          | 4                 | 4              | 4               | 5               |
| R      | 2                              | 3      | 4        | 3        | 3         | 3          | 3                 | 3              | 3               | 3               |
| S      | 2                              | 3      | 4        | 4        | 3         | 2          | 3                 | 2              | 4               | 4               |
| T      | 4                              | 4      | 4        | 4        | 5         | 5          | 5                 | 5              | 5               | 4               |

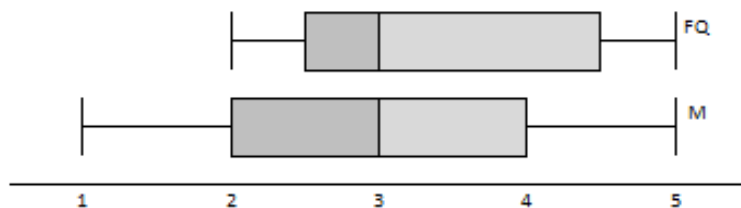
a) Em relação aos dados apresentados na tabela, responde às seguintes questões:

- 1) Qual a amplitude para os níveis observados na turma à disciplina de Português?
- 2) Qual a média dos níveis da turma à disciplina de Educação Física?
- 3) Qual a percentagem de alunos da turma com nível igual ou superior a 3, à disciplina de Matemática?
- 4) Qual é a amplitude interquartil dos níveis da turma à disciplina de Inglês? E de Espanhol?
- 5) Qual o primeiro quartil dos níveis obtidos pelo aluno A?
- 6) Qual a mediana dos níveis obtidos pelo aluno A? E pelo aluno M?
- 7) Qual o terceiro quartil dos níveis obtidos pelo aluno M? E pelo aluno A?

b) Representa os níveis das disciplinas de Inglês e Espanhol através de gráficos de pontos.

c) Constrói o diagrama de extremos e quartis correspondente a cada gráfico de pontos construídos em b).

d) Os dois diagramas de extremos e quartis, que se seguem, representam os níveis obtidos, pelos alunos da turma da Verónica, na avaliação final do 2.º período, nas disciplinas de Físico-Química (FQ) e de Matemática (M).



Considerando os dois diagramas, responde às seguintes questões:

- 1) Qual a disciplina em que se obteve o nível mais baixo? E o nível mais alto?
- 2) Qual a mediana dos níveis obtidos pela turma em cada uma das disciplinas, FQ e M?
- 3) Entre que valores se situam aproximadamente 25% dos níveis mais baixos à disciplina de Físico-Química? E entre que valores se situam aproximadamente 75% dos níveis mais elevados à disciplina de Matemática?
- 4) Para cada uma das disciplinas, FQ e M, calcula a amplitude e a amplitude interquartil dos níveis obtidos.
- e) Em relação aos níveis obtidos na disciplina de Matemática, antes representados no gráfico de extremos e quartis, a Verónica pensou em distribuições que poderiam ser representados pelo diagrama de extremos e quartis, usou quatro gráficos de pontos que poderiam melhor visualizar essas distribuições. Dos quatro gráficos seguintes, construídos por ela, identifica, justificando, aquele que não pode ser representado pelo diagrama apresentado:

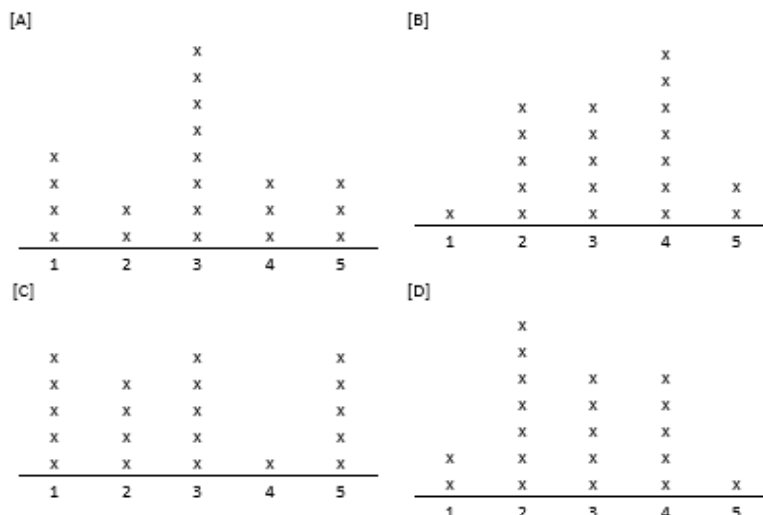


Figura 64 – Tarefa 11 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 4

Nesta ficha, com os dados organizados numa tabela, os alunos revelaram muita dificuldade nas alíneas d3 (interpretação do diagrama de extremos e quartis) e f (análise comparativa de dados em tabela), como pode ver-se na Tabela 33.

Antes de os alunos terem acesso à tarefa, a investigadora apresentou o vídeo de suporte ao manual escolar, da plataforma “escola virtual”. Os alunos reagiram positivamente e assim que lhes foi entregue a ficha de tarefas 4, os alunos começaram a trabalhar. Nesta tarefa, os

alunos apenas solicitaram ajuda na alínea c), relativa à construção dos diagramas de extremos e quartis, e foram autônomos na resolução do resto da ficha.

Tabela 33 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das diades, à Ficha de Tarefas 4

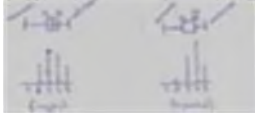
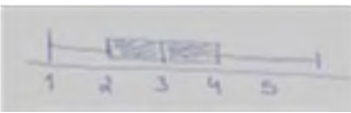
|                    |           | Tipo de resposta (n=11) |            |          |          |          |      |
|--------------------|-----------|-------------------------|------------|----------|----------|----------|------|
|                    |           | C                       | PC         | I        | NR       | ID       |      |
| Ficha de Tarefas 4 | Tarefa 11 | a1)                     | 11 (100,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1    |
|                    |           | a2)                     | 9 (81,8)   | 1 (9,1)  | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 0,82 |
|                    |           | a3)                     | 8 (72,7)   | 0 (0,0)  | 2 (17,4) | 1 (9,1)  | 0,73 |
|                    |           | a4)                     | 8 (72,7)   | 3 (27,2) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0,73 |
|                    |           | a5)                     | 7 (63,6)   | 2 (17,4) | 2 (17,4) | 0 (0,0)  | 0,64 |
|                    |           | a6)                     | 9 (81,8)   | 0 (0,0)  | 2 (17,4) | 0 (0,0)  | 0,82 |
|                    |           | a7)                     | 8 (72,7)   | 3 (27,2) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0,73 |
|                    |           | b)                      | 10 (90,9)  | 0 (0,0)  | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 0,91 |
|                    |           | c)                      | 7 (63,6)   | 1 (9,1)  | 1 (9,1)  | 2 (17,4) | 0,64 |
|                    |           | d1)                     | 6 (54,5)   | 4 (36,4) | 0 (0,0)  | 1 (9,1)  | 0,55 |
|                    |           | d2)                     | 8 (72,7)   | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 3 (27,2) | 0,73 |
|                    |           | d3)                     | 2 (17,4)   | 2 (17,4) | 2 (17,4) | 5 (45,5) | 0,17 |
|                    |           | d4)                     | 11 (100,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1    |
|                    |           | e)                      | 11 (100,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1    |
|                    |           | f)                      | 4 (36,4)   | 0 (0,0)  | 4 (36,4) | 3 (27,2) | 0,36 |

Antes da correção desta ficha, os alunos, em grande número, questionaram as professoras sobre a construção dos diagramas, pelo que as expectativas, quanto aos resultados, eram elevadas. Pela análise da Tabela 33, verifica-se que apenas em três alíneas (20%) todos os grupos responderam corretamente: 11a.1 (determinar a amplitude), 11d.3 (interpretar o diagrama) e 11e (identificar o gráfico de pontos associado ao diagrama), e em sete alíneas (47%), pelo menos um grupo (9%) não apresentou qualquer resposta.

Tendo em conta que os dados da questão estão organizados de duas formas: tabela e DEQ, analisa-se agora o ID. Em relação ao contexto tabelar, constata-se que a maioria das alíneas revelou-se fácil (11a.3, 11a.4, 11a.5, 11a.7, 11c) ou muito fácil (11a.1, 11a.2, 11a.6, 11b, 11e), tendo-se apenas revelado difícil alínea 11f; quando os dados estavam organizados em DEQ, os alunos revelaram muitas dificuldades na alínea 11d.3, enquanto que as restantes alíneas se revelaram fáceis (11d.1, 11d.2) ou muito fáceis (11d.4). Estes resultados indicam que os alunos entenderam e aplicaram com facilidade os conceitos recém-lecionados. As maiores dificuldades dos alunos, observadas nas alíneas 11d.3 e 11f envolviam comparar os dados da tabela, tratando-se de questões que exigem a leitura da tabela e comparação entre os dados.

Fazendo uma análise mais profunda das respostas dos alunos nas categorias PC e I, construiu-se o Quadro 33 com exemplos de respostas apresentadas pelos grupos durante o trabalho autónomo e antes da partilha e debate das resoluções e do registo em caderno diário.

Quadro 33 – Exemplos de respostas dos grupos às alíneas da Tarefa 11 nas categorias PC e I

|           |     | Resposta   |
|-----------|-----|--|
| Tarefa 11 | a2) | G1: “Média = $\frac{2 \times 1 + 3 \times 8 + 4 \times 5 + 5 \times 4}{20} = \frac{66}{20} = 3,3$ ” (PC) (conflito semiótico C14)<br>G3: “4” (I) (confusão com o número de níveis obtidos na disciplina)   |
|           | a3) | G2: “ $x = \frac{4 \times 100}{20} = 20\%$ ” (I)<br>G3: “50%” (I)  |
|           | a4) | G3, G4, G7: “Não consideram os quartis como um valor (PC)<br>Inglês: 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5,<br>1.ºQ                      2.ºQ                      3.ºQ<br>Espanhol: 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5”<br>1.ºQ                      2.ºQ                      3.ºQ                                    |
|           | a5) | G2, G4, G7: “2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5 (PC) 1.º Q = 2,5”<br>G3: “5” (I)   |
|           | a6) | G1, G3:<br>“A = $\frac{1 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 2 + 5 \times 3}{10} = \frac{36}{10} = 3,6$ e M = $\frac{1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 4}{10} = \frac{22}{10} = 2,2$ ” (I) (Conflito semiótico C5)   |
|           | a7) | G3, G9: (PC)<br>“A: 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5    Me = $\frac{3+4}{2} = 3,5$ M: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3    Me = $\frac{2+2}{2} = 2$ ”<br>1.ºQ    2.ºQ    3.ºQ<br>G8:<br>“A: 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5    Me = $\frac{3+4}{2} = 3,5$ M: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3    Me = $\frac{2+2}{2} = 2$ ”<br>1.ºQ    2.ºQ    3.ºQ<br>R: 3.ºQ de A = 3,5 e de M = 3” (PC) |
|           | b)  | G3: (I)<br>“Inglês: 4,4,4,2,5,5,3,3,2,3,4,5,2,5,4,2,3,3,3,4 e Espanhol: 4,4,3,3,5,5,4,3,3,3,4,5,2,5,4,3,4,4,4,4”<br>G11: Construiu bem o gráfico de pontos mas no diagrama toma como valor mínimo 1, quando deveria ser 2.    G8: Apresenta um diagrama de extremos e quartis qualquer, sem qualquer rigor e muito pouco claro.  |
|           | c)  |  (PC)  (I)  |
|           | d1) | G2, G4, G7, G8: (PC)<br>“O nível mais alto foi a FQ e o mais baixo foi a M.” (O valor mais alto é registado em ambas as disciplinas.)<br>G2: “25% dos níveis mais baixos de FQ é entre 0, 2 e o 3 e 75% dos níveis mais altos de matemática é entre 3, 4 e 5” (I).   |
|           | d3) | G6: “FQ: entre o 1 e o 3 e M entre o 2 e o 5” (PC)<br>G8: “FQ: entre o 1 e o 2,5 e M entre o 4 e o 5” (PC)<br>G9: “FQ = 2,5 e M = 4” (I)   |
|           | f)  | G2, G4, G7: “Na turma do gráfico B porque tem uma média maior e mais alunos com níveis positivos.” (I) (não se socorrem da tabela, mas dos gráficos de pontos da alínea e).<br>G6: “Educação Física porque tem 6 cincos” (I)   |

Na análise das respostas não corretas, verifica-se que há alunos com dificuldades na determinação dos quartis: os grupos G2, G3, G4 e G7, por não considerarem que o valor de cada um deles é dado por um número apenas (45%); os grupos G8 e G11 falham na representação do diagrama de extremos e quartis. Constatou-se, ainda, que 36% dos grupos não construíram corretamente o gráfico de pontos, uma vez que não representaram a escala corretamente. Também é evidente que os G1, G2 e G3 são os que apresentam mais dificuldades nas resoluções das tarefas propostas.

Refira-se que, nesta altura, foi entregue aos alunos a FT6, para ser resolvida individualmente como trabalho de casa e entregue na última aula.

Aulas 8 e 9 (4 de junho), aula10 (5 de junho) e aula 11 (8 de junho)

Na primeira destas aulas (aula 8), os alunos receberam a última ficha de tarefas, dispondo de duas aulas para a sua realização em diáde. Pretendia-se que os alunos aplicassem todos os conceitos trabalhados nas sete aulas anteriores, abrangendo as várias tarefas da ficha em contextos variados. De seguida, apresentam-se nas Figuras 65, 66, 67 e 68 os enunciados das tarefas propostas aos alunos.

**Tarefa 12.** A seguir apresenta-se um conjunto de 13 dados, em que  $k$  representa um número natural menor do que 10.

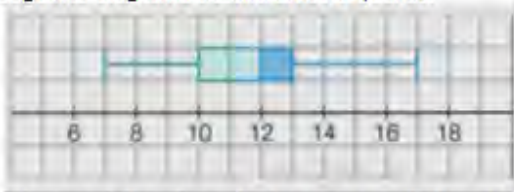
8    6    4    7    3    4    5    6    6    7    8    5     $k$

1) Relativamente ao conjunto de dados, que valores pode tomar  $k$  para que:

- o terceiro quartil seja 7;
- o primeiro quartil seja 4;
- o gráfico de pontos seja simétrico;
- o gráfico de pontos seja enviesado para a direita.

2) Considera que  $k = 8$  e constrói o diagrama de extremos e quartis. Observando o gráfico obtido, que podes afirmar em relação à sua simetria?

**Tarefa 13.** Considera o seguinte diagrama de extremos e quartis:

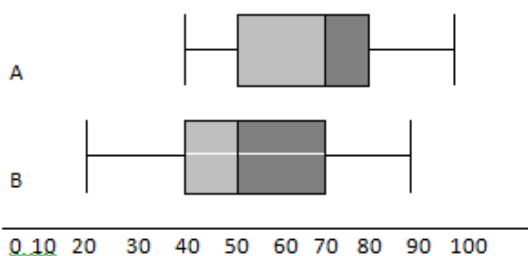


Qual dos conjuntos de dados seguintes não poderá ser representado pelo diagrama?

|                               |  |
|-------------------------------|--|
| [A] 7, 10, 12, 13, 13, 17     | [B] 7, 8, 10, 11, 12, 12, 12, 13, 13, 15, 17 |
| [C] 7, 10, 10, 12, 13, 13, 17 | [D] 7, 8, 10, 11, 11, 12, 13, 13, 13, 15, 17 |

Figura 65 – Tarefas 12 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 5

**Tarefa 14.** A professora de Matemática da turma da Verónica (turma A) é também professora da Turma do Orlando (turma B). A professora representou as classificações obtidas nas duas turmas num teste de Matemática através dos diagramas seguintes.



- Em que turma se verificou a classificação mais elevada? E a mais baixa?
- Em que turma é maior amplitude das classificações?
- Indica a percentagem de alunos da turma A que obtiveram uma classificação positiva no teste. Explica o teu raciocínio.
- O Observando os diagramas, o Orlando afirmou: “Na turma B há mais alunos com classificação entre 50% a 70% do que entre 40% e 50%.”  
Ao ouvir isto, a Verónica contestou dizendo: “O que acabaste de dizer não corresponde à verdade, já que existe, aproximadamente, o mesmo número de alunos nos dois intervalos.”  
Qual dos dois alunos tem razão? Explica o teu raciocínio.

**Tarefa 15.** Os rapazes e as raparigas de uma dada turma foram cronometrados durante uma prova de atletismo. O diagrama de extremos e quartis abaixo informa sobre a distribuição dos tempos realizados pelas raparigas.



Sabe-se que:

- Pelo menos 25% dos rapazes demoraram 12 segundos ou menos a efetuar a prova;
- A amplitude interquartil dos rapazes é a mesma que a da raparigas;
- A razão entre as medianas das raparigas e dos rapazes é de 8:7.

Completa o diagrama de extremos e quartis, relativo aos rapazes, onde já estão assinalados o maior e menor tempo gasto pelos rapazes na prova.

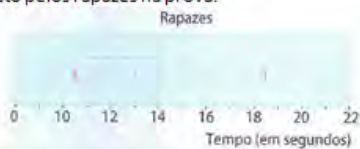
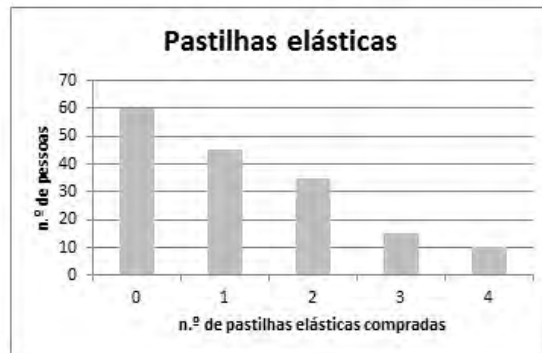


Figura 66 – Tarefas 14 e 16 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 5

**Tarefa 16.** No gráfico de barras da figura abaixo está registado o número de pastilhas elásticas compradas pelas pessoas que entraram num determinado quiosque durante o dia 20 de abril de 2015.

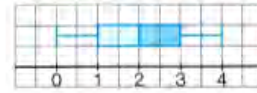


- Determina o número médio de pastilhas elásticas compradas por pessoa, no dia 20 de abril.
- Atendendo ao gráfico de barras e aos valores da média e da mediana do número de pastilhas elásticas compradas pelas pessoas, naquele dia, que conclusão podes tirar quanto à simetria da distribuição?
- Um dos seguintes diagramas de extremos e quartis traduz a distribuição do número de pastilhas elásticas compradas pelas pessoas. Identifica-o e para cada um dos diagramas rejeitados indica a razão ou razões por que o rejeitaste.

[A]



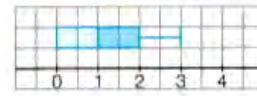
[B]



[C]

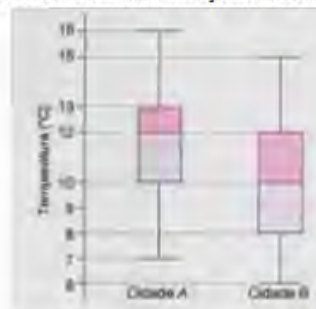


[D]



**Tarefa 17.** Os seguintes diagramas dizem respeito às temperaturas, em graus Celsius, em duas cidades A e B, no mês de março.

Temperaturas no mês de março nas cidades A e B



- Qual a cidade que registou a temperatura mais alta?
- Qual das cidades teve maior amplitude térmica? Justifica.
- Durante aproximadamente quantos dias a temperatura na cidade A foi, no máximo, 13°C? Explica o teu raciocínio.
- Indica os quartis das temperaturas de cada uma das cidades.
- Qual a percentagem de dias em que a temperatura na cidade B foi inferior ou igual à temperatura que corresponde ao segundo quartil da temperatura da cidade A? Explica o teu raciocínio.
- Observando os diagramas de extremos e quartis, a Filipa afirmou: "Durante cerca de metade dos dias do mês de março as temperaturas, na cidade A, atingiram no máximo 12°C". Concordas com esta afirmação? Justifica.

Figura 67 – Tarefas 16 e 17 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 5

**Tarefa 18.** As temperaturas *mínima* e *máxima* registadas em cada uma das diferentes estações meteorológicas de Portugal, num dia de primavera, constam do quadro seguinte.

|                    |    |    |    |    |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------------------|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Temperatura mínima | 9  | 14 | 10 | 12 | 8 | 14 | 13 | 12 | 12 | 14 | 12 | 14 | 15 | 15 | 16 | 15 | 15 |
| Temperatura máxima | 13 | 16 | 13 | 15 | 9 | 17 | 14 | 16 | 14 | 16 | 16 | 19 | 23 | 18 | 18 | 18 | 21 |

- Representa, através de um diagrama de extremos e quartis, a distribuição das temperaturas *mínimas* e a distribuição das temperaturas *máximas*.
- Observando os diagramas de extremos e quartis, o que podes dizer das temperaturas situadas no intervalo interquartil de cada uma das distribuições?
- Compara, quanto à dispersão, as distribuições das temperaturas *mínimas* e das temperaturas *máximas* a partir dos respectivos diagramas de extremos e quartis.
- Compara, quanto à simetria, as distribuições das temperaturas *mínimas* e das temperaturas *máximas* a partir dos respectivos diagramas de extremos e quartis.

Figura 68 – Tarefas 18 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 5

As docentes tiveram aqui uma participação muito reduzida, constatando as dúvidas que foram apresentadas pelos alunos e remetendo-os depois para as fichas resolvidas antes e também para o registo das aulas efetuado no caderno. Os tipos de respostas apresentadas pelos grupos às questões da FT5 foram registados nas Tabelas 34 e 35.

Tabela 34 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das diades, às tarefas 12 à 16

|                    |           | Tipo de resposta (n=11) |            |          |          |          |      |
|--------------------|-----------|-------------------------|------------|----------|----------|----------|------|
|                    |           | C                       | PC         | I        | NR       | ID       |      |
| Ficha de Tarefas 5 | Tarefa 12 | 1a)                     | 8 (72,7)   | 3 (27,2) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0,73 |
|                    |           | 1b)                     | 9 (81,8)   | 2 (17,4) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0,82 |
|                    |           | 1c)                     | 10 (90,9)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1 (9,1)  | 0,91 |
|                    |           | 1d)                     | 11 (100,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1    |
|                    |           | 2)                      | 5 (45,5)   | 0 (0,0)  | 3 (27,2) | 3 (27,2) | 0,46 |
|                    | Tarefa 13 |                         | 10 (90,9)  | 0 (0,0)  | 1 (9,1)  | 0 (0,0)  | 0,91 |
|                    | Tarefa 14 | a)                      | 11 (100,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1    |
|                    |           | b)                      | 8 (72,7)   | 0 (0,0)  | 3 (27,2) | 0 (0,0)  | 0,73 |
|                    |           | c)                      | 6 (54,5)   | 0 (0,0)  | 2 (17,4) | 4 (36,4) | 0,55 |
|                    |           | d)                      | 7 (63,6)   | 2 (17,4) | 1 (9,1)  | 1 (9,1)  | 0,64 |
|                    | Tarefa 15 |                         | 11 (100,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 1    |
|                    | Tarefa 16 | a)                      | 8 (72,7)   | 0 (0,0)  | 3 (27,2) | 0 (0,0)  | 0,73 |
|                    |           | b)                      | 8 (72,7)   | 0 (0,0)  | 2 (17,4) | 1 (9,1)  | 0,73 |
|                    |           | c)                      | 5 (45,5)   | 4 (36,4) | 1 (9,1)  | 1 (9,1)  | 0,46 |



Tabela 35 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das díades, às tarefas 17 e 18  
 Tipo de resposta (n=11)

|           |    | C          | PC       | I       | NR       | ID   |
|-----------|----|------------|----------|---------|----------|------|
| Tarefa 17 | a) | 11 (100,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0) | 0 (0,0)  | 1    |
|           | b) | 10 (90,9)  | 1 (9,1)  | 0 (0,0) | 0 (0,0)  | 0,91 |
|           | c) | 5 (45,5)   | 0 (0,0)  | 0 (0,0) | 6 (54,5) | 0,46 |
|           | d) | 7 (63,6)   | 0 (0,0)  | 0 (0,0) | 4 (36,4) | 0,66 |
|           | e) | 5 (45,5)   | 0 (0,0)  | 0 (0,0) | 6 (54,5) | 0,46 |
|           | f) | 4 (36,4)   | 1 (9,1)  | 1 (9,1) | 5 (45,5) | 0,36 |
| Tarefa 18 | a) | 4 (36,4)   | 3 (27,2) | 0 (0,0) | 4 (36,4) | 0,36 |
|           | b) | 5 (45,5)   | 1 (9,1)  | 0 (0,0) | 5 (45,5) | 0,46 |
|           | c) | 6 (54,5)   | 0 (0,0)  | 0 (0,0) | 5 (45,5) | 0,55 |
|           | d) | 4 (36,4)   | 1 (9,1)  | 1 (9,1) | 5 (45,5) | 0,36 |

Como se pode constatar, nestas alíneas os ID são mais díspares: a maioria das alíneas (75%) revelou-se fácil (12.1a,14b, 14c, 14d, 16a, 16b, 17d, 18c) ou muito fácil (12.1b, 12.1c, 12.1d, 13, 14a, 15, 16a, 16b, 17a, 17b); algumas alíneas (21%) revelaram-se de dificuldade média (12.2, 16c, 17c, 17e, 18b); poucas alíneas (4%) foram avaliadas como difíceis (17f, 18a, 18d) e nenhuma foi considerada muito difícil. Uma vez mais os alunos apresentavam alguma facilidade na resolução das tarefas propostas, manifestando, no entanto, dificuldades na construção do DEQ com dados não organizados e na análise dos diagramas de extremos e quartis quanto ao posicionamento dos quartis, à dispersão e à simetria.

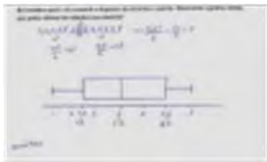
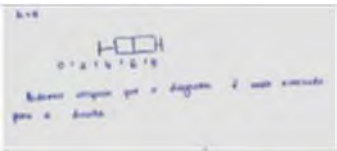
Analisando os resultados da tabela e atendendo às respostas recolhidas, verifica-se que os grupos responderam todos corretamente apenas a quatro alíneas (17% das alíneas): 12.1d (atribuição de valores de modo a enviesar a distribuição); 14a (comparação de valores extremos em diagramas); 15 (conclusão do diagrama); e 17a (comparação entre diagramas). Muitos grupos (19%) continuam a deixar alíneas sem qualquer resposta (58%). No entanto, há alíneas (50%) em que a maioria das soluções se enquadraram nas respostas C. Já as alíneas 12.2 (construção do diagrama), 16c (análise do diagrama), 17f (comparação entre diagramas), 18a (construção de diagramas) e 18d (análise de diagramas quanto à simetria) parecem ser as alíneas onde os alunos apresentaram menor número de respostas corretas.

Nesta fase, estes resultados revelam, para além de alguma dificuldade, grande falta de persistência, pouca autonomia para investigar os conceitos e alguma falta de empenho em pesquisar as respostas, já que em várias alíneas (21%) as respostas ou não estão corretas ou não é dada qualquer resposta: 1c (atribuir valores de modo a tornar simétrica a distribuição); 17c (extrapolar dados a partir da análise do diagrama); 17d (indicar os quartis do diagrama);

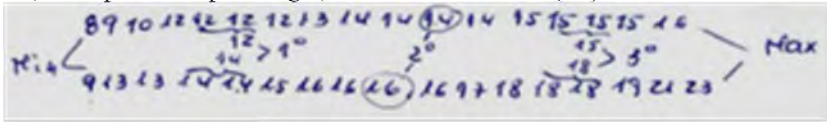
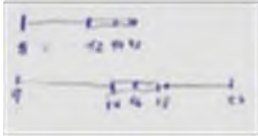
17e (analisar o diagrama quanto à dispersão) e 18c (comparar diagramas quanto à dispersão). Salienta-se que em duas alíneas (17c e 17e) a maioria dos grupos optou por não responder às questões.

Seguidamente, procedeu-se à análise das respostas incorretas e parcialmente corretas, registando exemplos destas respostas no Quadro 34 e 35.

Quadro 34 – Exemplos de respostas dos grupos às alíneas das tarefas 12 à 17 nas categorias PC e I.

|           |     | Resposta   |
|-----------|-----|--|
| Tarefa 12 | 1a) | G1: “K=4”;<br>G5, G11: “K=6” (PC)  |
|           | 1b) | G1: “K=4”;<br>G4: “K=2” (PC)   |
| Tarefa 13 | 2)  | Falta de rigor e erro de escala. (I)<br>G7:  G2, G8:                            |
|           |     | G3: “[B]” (I)  |
| Tarefa 14 |     | Confusão entre Amplitude da distribuição e Amplitude interquartil<br>G4, G6: “A: 80-50 = 30 e B: 70-40=30” (I)   |
|           | b)  | Confusão entre Amplitude e determinação da média<br>G7: “ $\frac{50+80}{2} = 65$ e $\frac{40+70}{2} = 55$ ” (I)  |
| Tarefa 16 | c)  | G2: “Turma A” (I)<br>G4: “Todos os alunos, 100%.”  |
|           | d)  | G1, G3: “Verónica” (PC)<br>G5: “Tem o Orlando. Porque o 1.º Q é mais pequeno do que o 3.ºQ, logo o Orlando tem razão” (I)  |
| Tarefa 17 |     | G1: (I)<br>“ $\frac{0 \times 60 + 1 \times 45 + 2 \times 35 + 3 \times 15 + 4 \times 10}{5} = 40$ ” (Conflito Semiótico $\bar{C}10$ )  |
|           | a)  | G8: (I)<br>“ $\frac{0 \times 60 + 1 \times 45 + 2 \times 35 + 3 \times 15 + 4 \times 10}{10} = 20$ ” (Conflito Semiótico $\bar{C}10$ )<br>G3: (I)<br>“ $\frac{0+1+2+3+4}{5} = 2$ ” (Conflito Semiótico $\bar{C}12$ )                               |
|           | b)  | G5, G8: “Como há mais pessoas que compraram do que as que não compraram, a distribuição é desequilibrada.” (I)   |
|           | c)  | G5, G6, G8: “[A]” (PC)<br>G3: “[D]” (I)<br>G1: “[B]” (I)   |
|           | b)  | G3: “Igual amplitude” (PC)   |
|           | f)  | G2: “Não concordo, pois não é possível afirmar a partir do diagrama que metades dos dias atingiram no máximo 12 °C, o valor que corresponde à mediana.” (identifica a mediana, mas não a aplica) (PC)<br>G9: “Não, porque foram 75% dos dias.” (I) |

Quadro 35 – Exemplos de respostas dos grupos às alíneas das Tarefa 18 nas categorias de PC e I.

| Resposta  |  |
|-----------|--|
| Tarefa 18 | <p>G7, G8: Apresentam pouco rigor, como se ilustra abaixo (PC)</p>  <p>a)</p>  <p>b)</p> <p>G1: “Tmáxima: m=9 e M= 23; Tmínima: m= 8 e M= 16” (PC)</p> <p>G2: “Concentrados da 1.ª e dispersos na 2.ª” (PC)</p> <p>d)</p> <p>G2: “O diagrama de temperatura máxima é o mais simétrico, sendo os seus valores bastante regulares.” (PC)</p> <p>G8: “São simétricos.” (I)</p> |

Verifica-se que há um número significativo de grupos (19%) que optam por não responder a todas as alíneas da ficha. Há ainda a referir que os primeiros seis grupos são aqueles que revelam mais fragilidades na construção, interpretação e comparação entre diagramas de extremos e quartis. Associadas a estas fragilidades, juntam-se as dificuldades na determinação da média (conflitos semióticos  $\bar{C}10$  e  $\bar{C}12$ ), bem como na definição e localização da mediana, além da confusão entre amplitude da distribuição e amplitude interquartil.

O debate sobre a resolução desta ficha foi o mais participado e aquele que permitiu verificar que nem todos os alunos estavam a trabalhar afincadamente. Uma vez mais, as docentes, no final da aula, verificaram se os cadernos continham todos os registos da aula. Foi recordado que a entrega da ficha de tarefas individual ocorreria aquando da avaliação final. Depois desta aula as docentes analisaram os resultados globais dos grupos, preparando, desta forma, a aula para esclarecimento de dúvidas que antecedia a aula de avaliação.

Na Tabela 36 encontram-se registados os resultados e os ID globais por FT e por grupo, que foram realizadas pelos alunos ao longo da intervenção de ensino.

Tabela 36 – Frequências absolutas (percentagem) dos pontos alcançados pelos grupos na resolução das fichas de tarefas, após a análise das respostas dos alunos da turma da Intervenção de Ensino

|                  |              | Resultados globais das Fichas das Tarefas |        |      |      |      |      |      |      |      |      |      |                     |         | ID   |  |
|------------------|--------------|---|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---------------------|---------|------|--|
|                  |              | Grupos de trabalho (Díades)               |        |      |      |      |      |      |      |      |      |      | Total de pontos (%) |         |      |  |
| Ficha de Tarefas | Máximo       | Tarefas                                   | 1      | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |                     | 11      |      |  |
| 0 ≤ FT1 ≤ 24     | 6            | T1  | 3      | 6    | 5    | 5    | 6    | 5    | 4    | 5    | 6    | 5    | 6                   | 56(85)  | 0,36 |  |
|                  | 10           | T2  | 10     | 9    | 7    | 9    | 9    | 9    | 10   | 10   | 10   | 8    | 10                  | 101(92) | 0,45 |  |
|                  | 8            | T3  | 4      | 1    | 1    | 1    | 3    | 3    | 2    | 4    | 4    | 0    | 8                   | 31(35)  | 0,09 |  |
| 0 ≤ FT2 ≤ 38     | 10           | T4  | 5      | 9    | 4    | 8    | 10   | 10   | 7    | 8    | 10   | 9    | 10                  | 90(82)  | 0,36 |  |
|                  | 10           | T5  | 5      | 8    | 3    | 9    | 7    | 4    | 3    | 9    | 10   | 8    | 10                  | 76(69)  | 0,18 |  |
|                  | 10           | T6  | 8      | 8    | 0    | 10   | 10   | 10   | 10   | 10   | 10   | 6    | 10                  | 92(84)  | 0,63 |  |
|                  | 8            | T7  | 0      | 6    | 0    | 0    | 8    | 4    | 0    | 4    | 8    | 0    | 8                   | 38(43)  | 0,27 |  |
|                  | 8            | T8  | 4      | 8    | 5    | 4    | 8    | 8    | 6    | 8    | 8    | 8    | 8                   | 75(85)  | 0,63 |  |
| 0 ≤ FT3 ≤ 24     | 10           | T9  | 6      | 5    | 0    | 8    | 9    | 10   | 10   | 10   | 9    | 10   | 10                  | 87(79)  | 0,45 |  |
|                  | 6            | T10                                       | 4      | 6    | 4    | 6    | 5    | 6    | 4    | 4    | 6    | 5    | 6                   | 56(85)  | 0,45 |  |
|                  | 30           | T11                                       | 18     | 20   | 7    | 21   | 29   | 26   | 18   | 24   | 27   | 27   | 29                  | 246(75) | 0,00 |  |
| 0 ≤ FT4 ≤ 30     | 12           | T12                                       | 6      | 8    | 8    | 9    | 9    | 6    | 8    | 8    | 10   | 10   | 9                   | 91(69)  | 0,18 |  |
|                  | 2            | T13                                       | 2      | 2    | 0    | 2    | 2    | 2    | 2    | 2    | 2    | 2    | 2                   | 20(91)  | 0,90 |  |
|                  | 8            | T14                                       | 5      | 6    | 7    | 4    | 6    | 4    | 6    | 6    | 8    | 6    | 8                   | 66(73)  | 0,18 |  |
|                  | 2            | T15                                       | 2      | 2    | 2    | 2    | 2    | 2    | 2    | 2    | 2    | 2    | 2                   | 22(100) | 1,00 |  |
|                  | 6            | T16                                       | 0      | 6    | 2    | 6    | 3    | 5    | 6    | 5    | 6    | 3    | 6                   | 48(73)  | 0,45 |  |
|                  | 12           | T17                                       | 4      | 7    | 3    | 6    | 4    | 4    | 12   | 12   | 10   | 12   | 12                  | 86(65)  | 0,36 |  |
|                  | 10           | T18                                       | 1      | 6    | 0    | 0    | 0    | 0    | 7    | 5    | 8    | 8    | 8                   | 43(39)  | 0,00 |  |
|                  | 24           | FT1                                       | 17     | 16   | 13   | 15   | 18   | 17   | 16   | 19   | 20   | 13   | 24                  | 188(71) |      |  |
| 0 ≤ FT5 ≤ 56     | 38           | FT2                                       | 18     | 31   | 7    | 27   | 35   | 28   | 20   | 31   | 38   | 23   | 38                  | 296(71) |      |  |
|                  | 24           | FT3                                       | 14     | 19   | 9    | 18   | 22   | 24   | 20   | 22   | 23   | 23   | 24                  | 218(83) |      |  |
|                  | 30           | FT4                                       | 18     | 20   | 7    | 22   | 29   | 26   | 19   | 24   | 27   | 22   | 29                  | 243(74) |      |  |
|                  | 52           | FT5                                       | 24     | 41   | 22   | 33   | 30   | 27   | 47   | 44   | 50   | 47   | 51                  | 416(73) |      |  |
|                  | 0 ≤ FT ≤ 168 | 168                                       | Total  | 91   | 127  | 58   | 114  | 134  | 122  | 121  | 140  | 158  | 128                 | 166     |      |  |
|                  |              |   | Global | (54) | (76) | (35) | (68) | (80) | (73) | (73) | (83) | (94) | (76)                | (99)    |      |  |

Antes da análise dos dados registada na Tabela 36, importa referir que a cada resposta é associado um valor entre 0 a 2: 0 (zero) pontos atribuídos às não respostas e às respostas

incorretas, 1 (um) ponto às parcialmente incorretas e 2 (dois) pontos às respostas corretas, o que conduz a que cada um dos grupos obtenha no máximo 168 pontos. Da análise da Tabela 40 verifica-se que: nenhum grupo obteve a pontuação máxima; a maioria dos grupos (G2, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10 e G11) apresenta mais de metade das respostas corretas; um grupo (G3) apresenta globalmente poucas respostas corretas (34%) e outro grupo (G1) apresenta cerca de metade de respostas corretas (53%).

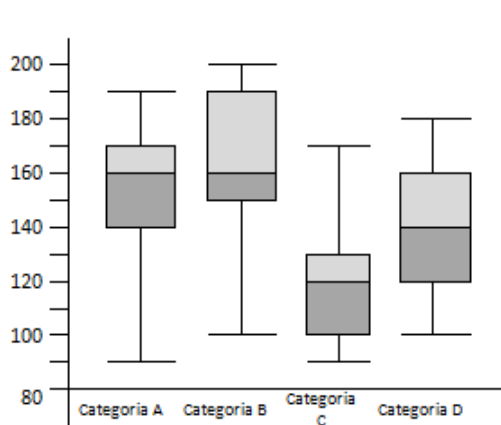
Analisando-se os resultados globais em termos de índice de dificuldade (ID) por tarefa, constata-se que mais de metade das tarefas apresenta um índice de dificuldade inferior ou igual a 0,45. As tarefas cujo índice é inferior a 0,25 são consideradas muito difíceis, o que acontece com: T3, T12 e T18 (todas com dados não organizados); T5 (dados organizados em gráfico de barras); T11 (dados organizados em tabela) e T14 (dados organizados em diagrama de extremos e quartis). Já as tarefas cujo índice é superior ou igual a 0,25 e inferior a 0,44 são consideradas difíceis, o que acontece com: T1 (dados não organizados); T4 (dados organizados em gráfico de pontos); T7 (dados organizados em gráfico de circular) e T17 (dados organizados em diagrama de extremos e quartis). As tarefas de índice de dificuldade médio, com ID superior a 0,44 e inferior a 0,55, são quatro: T2 (dados organizados em diagrama de árvore); T9 (dados não organizados) e T10 e T16 (ambas com dados organizados em gráfico de barras)). Apenas quatro tarefas foram consideradas fáceis ou muito fáceis: T6 (dados organizados em gráfico de linhas) e T8 (dados não organizados) apresentam um ID compreendido entre 0,54 e 0,74, por isso são as tarefas fáceis, enquanto que T13 e T15 (ambos com dados organizados em diagrama de extremos e quartis), por apresentarem ID superiores correspondem a tarefas muito fáceis.

Constata-se, portanto, que não há nenhuma ficha de tarefas que se destaque pela negativa, embora haja tarefas que se revelaram mais difíceis para os alunos. Nestas tarefas, as respostas dependeriam da interpretação desses dados e de ler para além dos dados; porém, as dificuldades detetadas, não parecem depender da forma como os dados são apresentados.

### Aulas 12 e 13 (9 de junho)

Na aula 12 foram recolhidas as Fichas de Tarefas Individuais, tendo-as entregado apenas oito alunos (A15, A17, A18, A24, A25, A29, A33 e A34); os restantes quinze comprometeram-se a entregar, no dia seguinte, o que nunca aconteceu, apesar da insistência das docentes. De seguida apresenta-se o enunciado da Tarefa 19.

**Tarefa 19.** No Agrupamento de Escolas da Luísa realizou-se o concurso de Matemática “O Sabichão”. Este concurso é dirigido a quatro categorias de alunos: categoria A, destinada aos alunos do 3.º e 4.º ano (1.º ciclo); categoria B, destinada aos alunos do 5.º e 6.º ano (2.º ciclo); categoria C, destinada aos alunos do 7.º, 8.º e 9.º ano (3.º ciclo) e categoria D, envolvendo os alunos do 10.º, 11.º e 12.º ano (secundário). Os alunos realizaram uma prova escrita com uma pontuação total de 200 pontos. Os organizadores do concurso apresentaram as classificações obtidas pelos alunos participantes, em cada uma das categorias, através dos diagramas de extremos e quartis seguintes.



Considerando os quatro diagramas, responde às seguintes questões:

- Em que categoria se verificou a pontuação mais elevada? E a mais baixa?
- Em que categoria se verificou a maior amplitude das classificações?
- E qual apresenta a menor amplitude interquartil?
- Indica a percentagem de alunos da categoria C que obtiveram uma pontuação superior ou igual a 130 pontos. Explica a tua resposta.
- Nas categorias A e B, o que podes afirmar sobre a percentagem de alunos com pontuação igual ou inferior a 180 pontos? Explica a tua resposta.
- Compara, quanto à dispersão, as distribuições das categorias A, B, C, D a partir dos respectivos diagramas de extremos e quartis.
- Compara, quanto à simetria, as distribuições das categorias A, B, C, D a partir dos respectivos diagramas de extremos e quartis.
- Escolhe uma das categorias e constrói um gráfico de pontos que poderá ser representado pelo diagrama de extremos e quartis dessa categoria.

Figura 69 – Tarefa 19 propostas aos alunos, na Ficha de Tarefas 6

Na Tabela 37 foram registados os resultados das respostas à Tarefa 19 dos 8 alunos que entregaram as fichas de tarefas.

Tabela 37 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas das diádes

|                    |           | Tipo de resposta (n=8) |           |          |          |         |      |
|--------------------|-----------|------------------------|-----------|----------|----------|---------|------|
|                    |           | C                      | PC        | I        | NR       | ID      |      |
| Ficha de Tarefas 6 | Tarefa 19 | a)                     | 8(100,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0) | 1    |
|                    |           | b)                     | 8(100,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0) | 1    |
|                    |           | c)                     | 8(100,0)) | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0) | 1    |
|                    |           | d)                     | 6 (75,0)  | 0 (0,0)  | 2 (25,0) | 0 (0,0) | 0,75 |
|                    |           | e)                     | 6 (75,0)  | 0 (0,0)  | 2 (25,0) | 0 (0,0) | 0,75 |
|                    |           | f)                     | 6 (75,0)  | 2 (25,0) | 0 (0,0)  | 0 (0,0) | 0,75 |
|                    |           | g)                     | 7 (87,5)  | 1(12,5)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0) | 0,88 |
|                    |           | h)                     | 8(100,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0)  | 0 (0,0) | 1    |

Da análise da Tabela 37 destaca-se que as tarefas resolvidas pelos oito alunos apresentam um ID de muito fácil, o que parece indicar que os alunos que não entregaram a ficha não se empenharam para a resolver, já que apenas 8 alunos procuraram resolvê-la, consultando os seus apontamentos. Salienta-se que as alíneas onde os alunos revelaram mais dificuldades são a 19d, 19e, 19f e 19g. Da análise das respostas apresentadas pelos alunos, verifica-se que na alínea 19d os alunos A33 e A34 reponderam à pergunta através da regra de três simples, tendo como referência a amplitude da distribuição: “80 (170 - 90) corresponde a 100%, assim como 40 (170-130) corresponde a  $x$  Logo  $x= 50\%$ ”; na alínea 19e os mesmos alunos voltam a utilizar a regra de três simples de forma análoga à alínea 19d. Quanto às alíneas 19f e 19g verifica-se que a resposta PC apresenta-se incompleta, pois os alunos referem apenas a categoria que apresenta o DEQ é simétrico (A17). Constatou-se ainda que o trabalho realizado pelos alunos não foi cuidado, limitando-se a responder às alíneas de resposta imediata, sem procurar completar àquelas que exigiam mais atenção, trabalho e rigor.

Também nesta aula foram esclarecidas as poucas dúvidas apresentadas pelos alunos, as quais se centraram, essencialmente, na determinação da média, mediana e quartis e ainda na interpretação de dados organizados no diagrama de extremos e quartis.

A realização do teste final decorreu na aula 13 e os alunos só puderam utilizar a máquina de calcular na realização do teste. Os resultados obtidos pelos alunos nesse teste são alvo de análise na próxima secção.

### 6.1.3. Após a Intervenção de Ensino

Depois da intervenção de ensino, era fundamental avaliar os conhecimentos, compreender as perceções e verificar a atitude face à Estatística dos alunos através da implementação de um teste final, de uma entrevista e de uma escala de atitude, respetivamente. Com o Teste Final pretendeu-se saber se as fragilidades sobre os conteúdos de estatística persistiam; a entrevista foi implementada em alunos cujas dificuldades, reveladas no teste, se tenham destacado como uma constante, procurando compreender aspetos mais pontuais sobre os conflitos semióticos apresentados; a escala de atitude permitiu verificar se, com a sua aplicação antes e depois da Intervenção de Ensino, os alunos mantinham ou alteravam a sua atitude face à Estatística.

#### 6.1.3.1. Avaliação do Teste Final

Nesta secção analisam-se as respostas e os raciocínios apresentados pelos alunos em cada uma das questões do teste final. O teste é constituído por quatro questões, num total de dezoito alíneas, foi resolvido pela turma intervencionada numa aula de 50 minutos e os resultados encontram-se registados na Tabela 38.

Tabela 38 – Frequências absolutas (percentagem) das respostas dos alunos no Teste Final

|             |           | Tipo de resposta (n=23) |           |           |           |           | ID   |
|-------------|-----------|-------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|------|
|             |           | C                       | PC        | I         | NR        |           |      |
| Teste Final | Questão 1 | 1a)                     | 14 (60,9) | 6 (26,1)  | 3(13,0)   | 0(0,0)    | 0,61 |
|             |           | 1b)                     | 19 (82,6) | 0 (0,0)   | 3(13,0)   | 1(4,3)    | 0,83 |
|             |           | 1c)                     | 18 (78,3) | 0 (0,0)   | 1(4,3)    | 4 (17,4)  | 0,78 |
|             |           | 2)                      | 8 (34,8)  | 10 (43,5) | 1(4,3)    | 4 (17,4)  | 0,35 |
|             | Questão 2 | 1a)                     | 20 (87,0) | 0 (0,0)   | 3(13,0)   | 0 (0,0)   | 0,87 |
|             |           | 1b)                     | 10 (43,5) | 0 (0,0)   | 10 (43,5) | 3(13,0)   | 0,44 |
|             |           | 1c)                     | 19 (82,6) | 3(13,0)   | 0 (0,0)   | 1(4,3)    | 0,83 |
|             |           | 2)                      | 11 (47,8) | 8 (34,8)  | 1(4,3)    | 3(13,0)   | 0,48 |
|             |           | 3)                      | 0 (0,0)   | 7 (30,4)  | 6 (26,1)  | 10 (43,5) | 0,00 |
|             | Questão 3 | a)                      | 20 (87,0) | 2 (8,7)   | 0 (0,0)   | 1(4,3)    | 0,87 |
|             |           | b)                      | 20 (87,0) | 0 (0,0)   | 2 (8,7)   | 1(4,3)    | 0,87 |
|             |           | c)                      | 18 (78,3) | 0 (0,0)   | 4 (17,4)  | 1(4,3)    | 0,78 |
|             | Questão 4 | a)                      | 8 (34,8)  | 7 (30,4)  | 3(13,0)   | 5 (21,7)  | 0,35 |
|             |           | b)                      | 10 (43,5) | 8 (34,8)  | 0 (0,0)   | 5 (21,7)  | 0,44 |
|             |           | c)                      | 6 (26,1)  | 10(43,5)  | 1 (4,3)   | 6 (26,1)  | 0,26 |
|             |           | d)                      | 1(4,3)    | 4(17,4)   | 7 (30,4)  | 11 (47,8) | 0,04 |
| e)          |           | 0(0,0)                  | 6 (26,1)  | 7 (30,4)  | 10 (43,5) | 0,00      |      |
| f)          |           | 0 (0,0)                 | 6 (26,1)  | 5 (21,7)  | 12 (52,2) | 0,00      |      |

Na Tabela 38 encontram-se contabilizadas, em termos de frequência absoluta e percentagem, os tipos de respostas apresentadas pelos alunos, segundo as categorias de resposta: correta, parcialmente correta e incorreta, em cada uma das alíneas de cada uma das questões (Anexo VII). Além disso, apresentam-se ainda as frequências de alunos que não apresentam qualquer resposta nas alíneas.

Salienta-se que nas questões se apresentam os dados de diferentes formas: a questão 1 com dados não organizados; a questão 2 em gráfico de barras; a questão 3 numa tabela e DEQ e a questão 4 em DEQ e dados não organizados.

Da análise da Tabela 38, tendo em conta o ID, verifica-se que as alíneas revelaram índices de dificuldade díspares: a maior parte das alíneas (45%) revelou-se fácil (1.1a) ou



muito fácil (1.1b, 1.1c, 2.1a, 2.1c, 3a, 3b e 3c); menos alíneas (11%) apresentam-se de dificuldade média (2.1b e 2.2); e novamente uma grande parte (44%) revelou-se difícil (1.2, 4a, 4b, 4c) ou muito difícil (2.3, 4d, 4e e 4f). Nestes dois últimos grupos encontram-se as questões sobre a análise dos DEQ, onde se solicitava ao aluno que analise estas representações gráficas quanto à dispersão e à simetria. São também questionados sobre o intervalo interquartil e a posição dos quartis, e ainda é apresentado um problema. Era por isso exigido aos alunos que lessem o gráfico para além dos dados.

Uma vez mais, salienta-se que, na maioria das alíneas, há ainda muitos alunos que não apresentam qualquer resposta, havendo apenas uma alínea (2.1a) em que todos os alunos elaboraram uma resposta.

Ainda da análise da Tabela 38 pode-se concluir que a maioria dos alunos apresenta uma resposta correta ou parcialmente correta (C + PC) à maioria das alíneas; contudo, há alíneas em que se não se verifica, sendo a maioria correspondente a respostas incorretas ou não respostas (I + NR), como acontece no caso das alíneas 2.1b, 2.3, 4d, 4e e 4f.

Ao observarmos na Tabela 38, questão a questão, constata-se que, na primeira delas, onde se solicitava a determinação da moda, média e mediana em dados não organizados, os alunos revelaram mais dificuldades, já que poucos alunos (34,8%) responderam corretamente à questão; na segunda questão, os alunos manifestaram dificuldades em duas alíneas: na 2.1b, cujo objetivo era determinar uma frequência relativa acumulada em percentagem, e na 2.3, onde se solicitava a análise do diagrama de extremos e quartis construído em 2.2; na terceira questão, os alunos não manifestaram grandes dificuldades; já na quarta questão, a última do teste, os alunos revelaram muitas dificuldades na maioria das alíneas.

Os alunos que revelaram dificuldades nas questões foram entrevistados, com o objetivo de se compreender o motivo do erro cometido. Inicialmente, foi solicitado a cada aluno que lesse a questão integral do teste, sem dar qualquer resposta; depois solicitou-se que oralmente referisse como responderia a determinada alínea e, por fim, apresentava-se a resposta dada pelo aluno no teste, aguardando-se explicações, sobretudo no caso de divergências nas respostas. Estas entrevistas foram realizadas antes dos alunos receberem as cópias dos testes, com a respetiva classificação. Uma vez que o final do ano estava próximo, alguns alunos (A0, A27, A30 e A31) deixaram de frequentar a escola, pelo que não foi possível falar com eles.

Tendo em atenção a Tabela 38, pode concluir-se que 22% dos alunos da turma intervencionada, em termos globais, não obtiveram resultados favoráveis, já que não

apresentaram resposta correta em metade das questões e apenas 17% dos alunos obtiveram mais de 75%.

Procede-se, de seguida, a uma análise mais pormenorizada às respostas parcialmente corretas e incorretas dos alunos em cada uma das alíneas. A questão 1 (Figura 70), em que se apresentam dados não organizados, sobre a pesagem de mochilas, num determinado dia, tem por objetivo avaliar a capacidade dos alunos para identificarem a variável em estudo e aplicarem as noções estatísticas de amplitude, amplitude interquartil e média.

1. Um grupo de 13 amigos decide fazer a *pesagem* das mochilas, que transportavam no dia 20 de abril, contendo os livros, cadernos e outros materiais referentes às disciplinas desse dia. Feita a *pesagem*, em quilogramas, de cada uma das mochilas, obtiveram-se os seguintes *pesos*:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 5 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

1.1 Relativamente ao conjunto de dados, responde:

- Qual a variável em estudo? E que valores toma?
- Determina a amplitude do *peso* das mochilas dos alunos.
- Determina a amplitude interquartil do *peso* das mochilas dos alunos.

1.2 A Emília chegou um pouco mais tarde no dia em que foi efetuada a *pesagem* das mochilas dos seus amigos. Com o *peso* da sua mochila a média dos *pesos* passou a ser de **exatamente** três quilogramas. Qual o *peso* da mochila da Emília?

Figura 70 – Enunciado da questão 1 proposta aos alunos

Nesta questão, analisando a Tabela 38, verifica-se que na alínea 1.1a todos os alunos com resposta PC (26,1%) escreveram: “A variável em estudo é o peso das mochilas e de valores de 1 a 5”, revelando dificuldades em distinguir entre uma variável quantitativa discreta de uma variável contínua, como se ilustra, de seguida, na Figura 71.

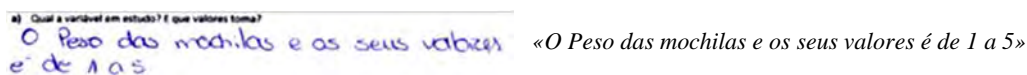


Figura 71 – Resposta do aluno A29 à questão 1, alínea 1.1a

O aluno considera todos os valores entre 1 e 5, quando os valores da variável são apenas 1, 2, 3, 4 e 5. Este aluno foi entrevistado, tendo referido depois ter lido a questão:

- Professora: Como responderias à alínea a?  
A29: A variável é o peso das mochilas, não é?  
Professora: E quais são os valores que essa variável toma?  
A29: São todos os valores de 1 a 5!?  
Professora: Então um dos valores é o 2,5 kg, concordas?  
A29: Claro que não! Ele não faz parte dos dados...  
Professora: Certo! Mas está entre 1 e 5, concordas?  
A29: Ok! Já entendi o erro. Tinha que dizer 1, 2, 3, 4 e 5, certo?

E os alunos com resposta incorreta (13,0%) apresentaram apenas um dos valores da variável, “5”, revelando não ter compreendido a pergunta formulada, já que consideraram o número de valores que a variável toma ou o seu valor máximo, que são coincidentes. Estes

alunos não foram entrevistados. Na alínea 1.1b, os alunos que responderam de forma incorreta, dividem-se em dois grupos: no primeiro (apenas A0), determinam o quociente entre o valor máximo e o número de valores que a variável toma (4,3%), no segundo, determinam a média (4,3%). Na Figura 72 ilustra-se este tipo de resposta.

Figura 72 – Resposta do aluno A21 à questão1, alínea 1.1b

Professora: Por favor lê o enunciado.

A21: Todo?

Professora: Sim, todo.

Professora: Como resolves a alínea 1.1b?

A21: Procuo o valor máximo e o valor mínimo e depois subtraí-os. O valor obtido é a amplitude.

Professora: Observa a resposta que escreveste no teste.

A21: A média!?!.. Que disparate... Peço desculpa! Estava distraído...

Na alínea 1.1c existe apenas uma resposta incorreta (4,3%), já que o aluno (A0) indica uma percentagem, 49%, sem qualquer outra explicação.

Da análise das respostas à alínea 1.2, aquelas que se enquadram nas categorias parcialmente corretas e incorretas, constatou-se que apenas um aluno (4,3%) determinou a mediana, como se pode ilustrar na Figura 71, dez alunos (43,5%) revelam conhecer a noção de média, dos quais cinco (21,7%) não aplicam o algoritmo corretamente ao novo conjunto de dados (Figura 73) e os outros cinco (21,7%) subtraem à média pretendida a média da amostra dada (Figura 74).

«1,1,2,2,2,2,2,3,3,4,4,5,5

$E = 3$

$$\frac{3 + 3}{2} = 3$$

O Peso da mochila da Emília é 3»

Figura 73 – Resposta do aluno A17 à questão1, alínea 1.2

Quando este aluno foi questionado sobre esta alínea na entrevista, ele revelou saber aplicar o algoritmo da média e como aplicá-lo no contexto apresentado, como se pode constatar no diálogo seguinte:

Professora: Por favor lê o enunciado e responde à alínea 1.2.

A17: Tem que ser aplicada a média...

Professora: Sim, mas como procedes?

A17: Bem, tenho que acrescentar mais um peso, certo? Ficam a ser 14 dados. Depois vou atribuindo um valor de cada vez até encontrar o valor que dá 3, que pode ser um valor da variável ou não.

Professora: Observa a resposta que escreveste no teste.

A17: A mediana? Já entendi porque tive esta nota. Estava nervoso...

No teste (Figura 73) outro aluno determina a mediana em vez da média, começa por organizar os dados por ordem crescente, mas aplica incorretamente o algoritmo, já que o faz como se o número de dados fosse par.

1.2 A Emília chegou um pouco mais tarde no dia em que foi efetuada a pesagem das mochilas dos seus amigos. Com o peso da sua mochila a média dos pesos passou a ser de exatamente três quilogramas. Qual o peso da mochila da Emília?

$1+1+2+2+2+2+2+3+3+4+4+5+5 = \frac{36}{13} = 27,60230769 \rightarrow$   
*mochila sem Emília*

$1+1+2+2+2+2+2+3+3+4+4+5+5 = \frac{39}{13} = 3 \rightarrow$  *mochila com Emília*

R: A mochila da Emília pesa 3 quilos»

Figura 74 – Resposta do aluno A19 à questão1, alínea 1.2

Este aluno na entrevista revelou conhecer a noção de média e como aplicar o seu algoritmo, a avaliar pelo que referiu:

Professora: Por favor lê o enunciado e responde à alínea 1.2.

A19: Tem que ser aplicada a média várias vezes, até se encontrar o número que tem por média 3, certo?

Professora: De que valores estás a falar?

A19: De valores superiores a 2, porque a média dos dados é superior a dois e queremos um valor ainda maior, certo?

Professora: Sim. Observa o que respondeste no teste.

A19: Ah! Esqueci-me de acrescentar um dado ao total.

A resposta deste aluno (Figura 75) revela dificuldades na aplicação do algoritmo da média, já que não aplica o algoritmo corretamente ao novo conjunto de dados, pois não atualiza o número total de dados, apesar de considerar mais um elemento (conflito semiótico  $\bar{C}11$ ).

1.2 A Emília chegou um pouco mais tarde no dia em que foi efetuada a pesagem das mochilas dos seus amigos. Com o peso da sua mochila a média dos pesos passou a ser de exatamente três quilogramas. Qual o peso da mochila da Emília?

Média =  $1+1+2 \times 5 + 3 \times 3 + 4 \times 2 + 5 \times 2 = \frac{36}{13} = 2,760230769$

$3 - 2,760230769 = 0,23764231 \approx 0,24 \text{ kg}$

R: O peso da mochila da Emília é aproximadamente 0,24 kg.»

Figura 75 – Resposta do aluno A32 à questão1, alínea 1.2

Este aluno revela conhecer a noção de média, aplicando corretamente o seu algoritmo, no entanto, não consegue aplicar os seus conhecimentos à nova solicitação, subtraindo à média pretendida a média encontrada. Na entrevista este aluno revelou alguma indecisão sobre o que lhe foi solicitado na alínea e sobre a noção de média, mas mostrou saber aplicar o algoritmo da média:

Professora: Por favor lê o enunciado e responde à alínea 1.2.

A32: Tem que ser aplicada a média dos 13 dados e encontrar o outro valor da média, 3.

Professora: Sim, mas como procedes?

A32: Pois já não sei.

Professora: Diz por palavras tuas o que entendes por média de um conjunto de dados, por exemplo, este conjunto.

A32: A média?! Somam-se todos os dados e divide-se pelo número de dados, certo?

Professora: Nesta alínea como procedes?

A32: Depois de calcular a média dos 13 dados temos mais um dado e passam a 14...

Professora: E qual dos valores da variável é que te permite obter a média pedida?

A32: Só tentando... começo no 1 e depois vou aos outros, até dar, certo?

Professora: Sim, podes responder por esse processo. Mas a que outros valores te referem?

A32: Todos, os cinco: 1, 2, 3, 4 e 5.

Professora: Ora, então tenta lá resolver a questão. Aqui tens a máquina de calcular.

A32: Só estes valores não dão. Tenho que ir para os valores que não estão nos dados?

Professora: Tenta lá.

A32: É, tem que ser superior a 5, é o valor 6.

Professora: Agora, vê o que fizeste no teste.

A32: Pois, na altura foi o que me pareceu ser o mais correto, mas depois como deu um valor estranho, avancei para as outras questões. Depois não tive mais tempo, mas não risquei, pois poderia contar qualquer coisa.

Nas respostas analisadas, os alunos revelam dificuldades na interpretação do que lhes é solicitado, já que eles não apresentam a resposta correta, “a mochila da Emília tem 6kg de peso. O aluno A17, ao determinar a mediana, em vez da média, revela conflito entre os conceitos (conflito semiótico  $\bar{C}13$ ). E, como aplica incorretamente o algoritmo da mediana, revela também dificuldades na aplicação da mediana (conflito semiótico  $\bar{C}3$ ); os A19 e A23 revelam saber aplicar o algoritmo da média, no entanto, o primeiro não altera o número total, quando há a introdução de um novo dado (conflito semiótico  $\bar{C}12$ ) e o segundo, depois de determinar a média dos dados iniciais, subtrai-a à média pretendida, com a inclusão do novo dado.

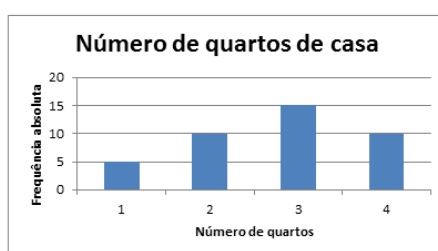
Este tipo de pergunta já tinha sido trabalhado em dois momentos anteriores: no momento da diagnose (Q5e com dados organizados em gráfico de barras) e no momento da intervenção (alínea 5e com dados organizados em gráfico de barras), pelo que seria expectável obter melhores resultados. Comparando os três momentos na(s) categoria(s) de respostas não incorretas (C+PC, salienta-se que foi no teste em análise que os resultados foram melhores.

Em síntese, as dificuldades e erros cometidos pelos alunos na aplicação do algoritmo da média continuam presentes. No entanto, comparando as categorias de respostas não incorretas

das Tabela 33, 36 e 42 tem-se que, neste tipo de pergunta, obteve-se: 22,7% na alínea 5e da Questão 5 do TD; 47,8% na alínea 5e da FT5; e, 78,3% na alínea 1.2 no TF.

No que concerne à questão 2 (Figura 76), nas alíneas 2.1a e 2.1c os alunos revelam menos dificuldades. Nesta questão, em que se apresentam dados sobre o “número de quartos da casa que habita”, organizados num gráfico de barras, tem por objetivo principal avaliar a realização do aluno na construção e análise de diagramas de extremos e quartis, partindo de dados organizados graficamente.

2. Na escola do João foi realizado um inquérito onde constava a seguinte questão: “Quantos quartos tem a casa que habita?” O João apresentou os resultados obtidos nesta pergunta do inquérito através do seguinte gráfico de barras:



2.1 De acordo com o gráfico, responde às seguintes questões:

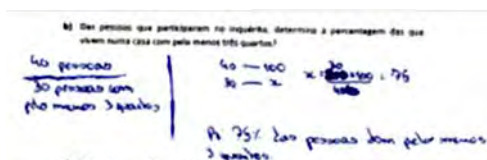
- Quantas pessoas responderam à questão mencionada?
- Das pessoas que participaram no inquérito, determina a percentagem das que vivem numa casa com pelo menos três quartos?
- Determina a moda, a média e a mediana do número de quartos referidos pelas pessoas inquiridas.

2.2 Constrói o diagrama de extremos e quartis do número de quartos referidos pelas pessoas inquiridas.

2.3 Observando o diagrama de extremos e quartis da questão anterior retira duas conclusões sobre a distribuição do número de quartos das casas.

Figura 76 – Enunciado da questão 2 proposta aos alunos

Na primeira alínea, 2.1a, os alunos deviam determinar o número total de pessoas inquiridas, o erro de cálculo  $5+10+15+10=30$  levou 13% de respostas para a categoria “Incorreta”; na segunda alínea (2.1b) os alunos revelaram mais dificuldade, já que existem tantas respostas corretas como incorretas (43,5%). As respostas incorretas dividem-se em três grupos: determinar a percentagem das pessoas cuja habitação tem 3 quartos (13,0%); determinar a percentagem das pessoas cuja habitação tem no máximo 3 quartos (21,7%); e determinar a percentagem correspondente a três quartos no conjunto das 15 casas com três quartos. Nas Figuras 77, 78 e 79 ilustram-se as respostas referidas.



«40 pessoas 40---100  
 30 pessoas com 30---x  
 Pelo menos 3 quartos  
 $x = \frac{30 \times 100}{40} = 75$   
 R: 75% das pessoas tem pelo menos 3 quartos»

Figura 77 – Resposta do aluno A20 à questão2, alínea 2.1b

Veja-se a resposta dada pelo aluno A20, sobre a alínea 2.1b, no momento da entrevista:

Professora: Por favor lê o enunciado e responde à alínea 2.1b.

A20: Ora bem... tenho que encontrar o número de pessoas nestas condições, certo?

Professora: Sim, mas como procedes?

A20: Pois já não sei. Posso voltar a ler?

Professora: Sim, claro.

A20: Bom, tenho que somar as pessoas que têm um, dois e três quartos. Depois divido o resultado pelo número total de inquiridos e depois multiplico por cem, certo?

Professora: Pois, não sei. O que quer dizer com “pelo menos três quartos”?

A20: Que podem ter três quartos ou menos.

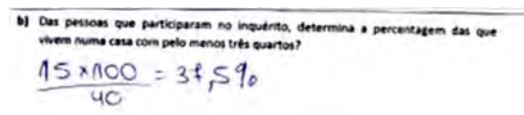
Professora: Para ti, dizer “pelo menos três quartos” é o mesmo que ter “no máximo três quartos”?

A20: Não!? Quer dizer que pode ter mais do que três quartos, claro. Já vi que errei.

Professora: Sim, tiveste dificuldade em interpretar o enunciado, agora e no teste, como podes ver pela resposta que escreveste.

Na resposta dada pelo aluno A20, no teste, verifica-se que o aluno interpreta incorretamente o enunciado, já que considera “pelo menos três quartos” como sendo “no máximo três”, determinando corretamente a correspondente percentagem.

No teste, o aluno A29, determina a percentagem de pessoas cuja habitação tem três quartos, revelando dificuldades em interpretar o enunciado, nomeadamente, na expressão “pelo menos três quartos”, como se ilustra na Figura 78:



$$\left\langle \frac{15 \times 100}{40} = 37,5\% \right\rangle$$

Figura 78 – Resposta do aluno A29 à questão2, alínea 2.1b

Este aluno, ao ser entrevistado revela saber determinar uma percentagem, mas têm dificuldades em interpretar o enunciado:

Professora: Depois de leres o enunciado da questão2, refere como procedes para responder à alínea 2.1b.

A29: São 15 pessoas em 40 inquiridos. O que dá zero vírgula qualquer coisa. Esse valor para dar uma percentagem, multiplica-se esse resultado por 100, e pronto.

Professora: Pois, não sei. O que quer dizer “pelo menos três quartos”?

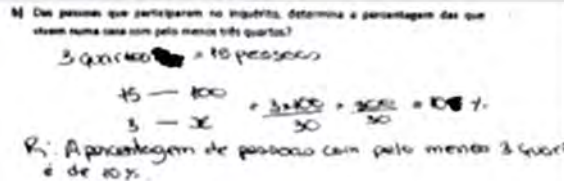
A29: Que podem ter mais que três quartos, não é?

Professora: Sim é isso. Vê como respondeste no teste.

A29: Já percebi. Tinha que juntar as pessoas com três e com quatro quartos, primeiro. O resto está certo, não é?

Professora: Sim. Deverias ter feito isso.

O aluno A14, determina a percentagem correspondente a três quartos no conjunto das 15 casas com três quartos, revelando dificuldades em entender o que lhe é solicitado.



«3 quartos – 10 pessoas  
15---100  
3---x     $x = \frac{3 \times 100}{30} = \frac{300}{30} = 10\%$   
R: A percentagem de pessoas com pelo menos 3 quartos é de 10%.»

Figura 79 – Resposta do aluno A14 à questão2, alínea 2.1b

Este aluno revelou dificuldades em explicar a resolução que apresentou no teste (Figura 79):

Professora: Depois de leres o enunciado da questão 2, refere como procedes para responder à alínea 2.1b.

A14: O número de pessoas com habitações com três quartos é 15 pessoas em 40 inquiridos. Logo, o máximo corresponde ao máximo em percentagem, 100%. Espere, não é nada disso.

Professora: Então como é que deves fazer?

A14: Os 40 inquiridos é que correspondem a 100% e os 15 que têm habitações com três quartos é que quero saber a percentagem. Depois multiplico em cruz os conhecidos e divido pelo par do desconhecido.

Professora: Sim, para saber um dos extremos, multiplicam-se os meios e divide-se pelo outro extremo conhecido. Mas porquê 15? O que entendes por “pelo menos três quartos”?

A14: No mínimo? Podem ter três ou quatro quartos, claro.

Professora: Vê como respondeste no teste.

A14: O que faz aqui este três?! Ah! Já sei, são 3 quartos, não?!... Mas não faz sentido...

Professora: Pois, porquê três quartos?

A14: Encontrei a percentagem de 3 quartos, para nada...

Nestas respostas os alunos revelam dificuldades na interpretação do termo “pelo menos”, considerando-o como “no máximo” (A20) ou “exatamente” (A29) ou ignoram-no por completo (A14).

Na alínea 2.1c esperava-se que os alunos determinassem a moda, a média e a mediana, e a maioria dos alunos (82,6%) respondeu corretamente, contudo há 13% de respostas parcialmente corretas, que resultam de não determinarem a média, embora as restantes estejam corretamente determinadas.



Nas duas perguntas sobre o diagrama de extremos e quartis (2.2 e 2.3) há muitos alunos que revelaram dificuldades, tanto na sua construção, como na sua análise; porém, da análise da Tabela 38 conclui-se que os alunos apresentaram mais dificuldades na alínea 2.3 do que na alínea 2.2. Nesta última alínea, muitos alunos não evidenciaram dificuldades na construção do diagrama de extremos e quartis, já que 43,5% deles apresentaram respostas corretas. Na categoria de respostas incorretas destacam-se as seguintes respostas: atribuição dos valores dois e três da variável ao primeiro e terceiro quartil (4,3%), respetivamente, e a consideração dos valores mínimo e máximo da frequência absoluta (4,3%), como se ilustra nas respostas das Figuras 80 e 81.

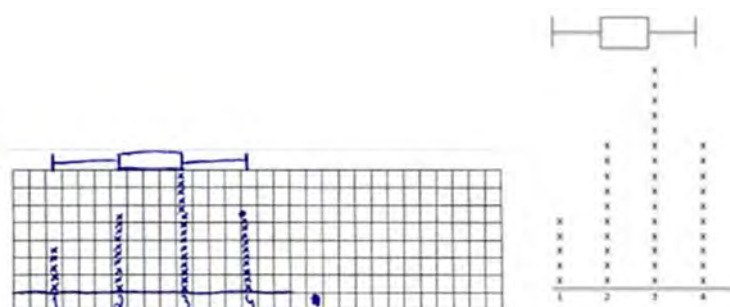


Figura 80 – Resposta do aluno A20 à alínea 2.2

Quando o aluno A20 foi entrevistado, revelou saber determinar os quartis e desenhar o diagrama de extremos e quartis, como se pode constatar:

Professora: Depois de leres o enunciado da questão 2, refere como procedes para responder à alínea 2.2.

A20: Tenho que determinar os quartis, e depois colocá-los no retângulo do diagrama e os bigodes ficam com o valor mínimo para extremo inferior e o valor máximo para extremo superior.

Professora: Desculpa, podes explicar melhor?

A20: Os dados do gráfico vão ser divididos em quatro grupos: do extremo inferior (o mínimo) ao primeiro quartil, deste à mediana, da mediana ao terceiro quartil e deste ao extremo superior (o máximo), certo?

Professora: Sim, mas como procedes?

A20: O mínimo é um, o máximo é quatro e a mediana é 3. A mediana dos dados entre um e o vigésimo elemento, a mediana é 2 e do vigésimo primeiro ao último elemento é 3,5. Agora é só desenhar o diagrama.

Professora: Vê como respondeste no teste.

A20: Ah! Utilizei o gráfico de pontos. Mas, o diagrama está muito incompleto.

Professora: Pois. Observa bem, não é só incompleto...

A20: Ok! Só estão marcados os extremos e o primeiro quartil corretamente. O resto está mal.

Na resposta o aluno A20 evidencia conhecer o gráfico de pontos e a noção da “forma” do diagrama de extremos e quartis. No entanto, não usa corretamente a noção de quartis (não

apresenta a sua determinação), confundindo-os com os valores da variável, já que atribui ao primeiro quartil o valor 2 e ao terceiro quartil o valor 3, não definindo o segundo quartil que tinha sido determinado corretamente na alínea anterior (coincidente com o terceiro quartil).

A resposta do aluno A16 (Figura 81) revela confusão entre variável e frequência absoluta, uma vez que ele atribui o valor mínimo à menor das frequências absolutas e o valor máximo à maior das frequências absolutas do número de quartos das habitações dos inquiridos.

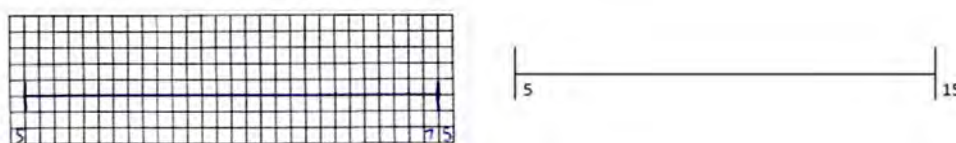


Figura 81 – Resposta do aluno A16 à alínea 2.2

Este aluno revela dificuldades na interpretação do gráfico de barras e na identificação de variável estatística, como se pode constatar na entrevista, que confirma a confusão detetada no teste escrito:

Professora: Depois de leres o enunciado da questão 2, refere como procedes para responder à alínea 2.2.

A16: Eu não entendi a pergunta no teste. Não sei quais são os valores que tenho de utilizar, os do eixo horizontal ou do eixo vertical.

Professora: Qual é a variável?

A16: São os números de quartos das habitações?

Professora: Sim. Cujos valores são...

A16: 1, 2, 3 e 4. Vendo o gráfico, quer dizer que há cinco pessoas com habitação com um quarto, dez com dois quartos e assim sucessivamente, certo?

Professora: Exatamente! Então como é que fazes a alínea 2.2?

A16: O mínimo é um e o máximo é quatro. Depois é só encontrar a mediana e os quartis.

Professora: Como procedes para determinares os quartis?

A16: Bem a mediana divide o conjunto de dados ao meio, por isso só pode ser 3. Agora divido os dois subconjuntos em dois; inferior à mediana é o  $Q1=2$  e o  $Q3=\frac{3+4}{2}=3,5$ .

Professora: Vê como respondeste no teste.

A16: Eu disse que não tinha entendido quais eram os números a utilizar, mas agora já sei como fazer. Obrigada!

Na categoria de respostas parcialmente corretas destacam-se dois tipos de resposta incompleta: a determinação incorreta dos quartis e conseqüente construção do diagrama de acordo com esse erro (26,1%); e a determinação correta dos quartis, com identificação incorreta dos valores mínimo e máximo, construindo o diagrama de acordo com esse erro (8,7%). Nas Figuras 82, 83 e 84 apresentam-se exemplos destes tipos de respostas.

Na resposta o aluno A32 (Figura 82) revela dificuldades na determinação dos quartis, mais precisamente: determina de forma correta o primeiro e segundo quartil, mas determina incorretamente o terceiro quartil (coincidente com o segundo quartil). Seguidamente constrói o diagrama de extremos e quartis tendo em conta os resultados obtidos.



Figura 82 – Resposta do aluno A32 à alínea 2.2

Contudo, na entrevista, o aluno A32 não revela dificuldades em responder à alínea 2.2:

Professora: Depois de leres o enunciado da questão 2, refere como procedes para responder à alínea 2.2.

A32: Depois de identificar os valores: mínimo, máximo, Q1, Q2 e Q3 é só desenhar o diagrama.

Professora: Identifica cada um desses valores, por favor.

A32: O mínimo é um, e é o extremo inferior, o máximo é quatro, e é o extremo superior, e a mediana é três. A mediana dos primeiros vinte dados é dois e dos outros vinte dados é a metade da soma de três com quatro, três virgula cinco.

Professora: Vê como respondeste no teste.

A32: Foi à pressa e depois não vim alterar.

Ao responder à alínea 2.2, o aluno A14 (Figura 83) revela dificuldades na interpretação do gráfico de barras, já que atribuiu ao valor máximo um valor que não consta do gráfico.

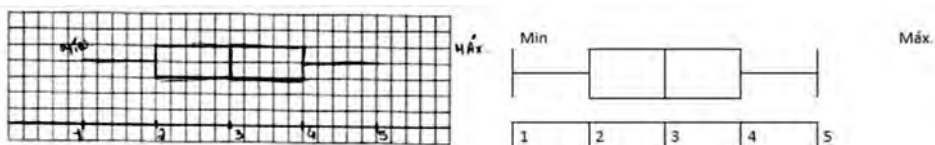


Figura 83 – Resposta do aluno A14 à alínea 2.2

Aqui, na resposta do aluno A14 determina-se erradamente o terceiro quartil, parecendo entender-se que o terceiro quartil e o máximo não poderiam coincidir, o que o levou a acrescentar um outro valor à variável. Na entrevista o aluno revelou saber como proceder, para responder à alínea 2.2:

Professora: Depois de leres o enunciado da questão 2, refere como procedes para responder à alínea 2.2.

A14: Primeiro temos que identificar os valores: mínimo, que é o um, máximo é o quatro, o primeiro quartil é o dois, o segundo quartil, que é o três, e o terceiro quartil... tenho que determinar, é o ... três e meio. Depois é só desenhar o diagrama, por cima da escala.

Professora: Agora observa como respondeste no teste.

A14: Já tinha tocado... A sério?! Até acrescentei um número que não está no gráfico de barras, ridículo.

O aluno A23, nesta resposta (Figura 84), evidencia dificuldades em associar os valores extremos do diagrama ao mínimo e máximo dos valores da variável, já que atribuiu o valor 0

ao mínimo e o valor 5 ao máximo; porém determina corretamente o primeiro e o segundo quartil.

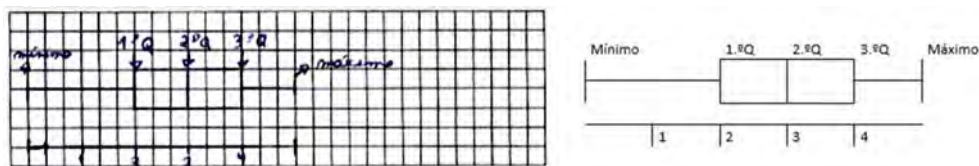


Figura 84 – Resposta do aluno A23 à alínea 2.2

Este aluno, na entrevista, revela conhecer como determinar os quartis e como desenhar o diagrama, como se pode constatar a seguir:

Professora: Depois de leres o enunciado da questão 2, refere como procedes para responder à alínea 2.2.

A23: Primeiro indicamos os valores extremos, isto é, o máximo e o mínimo e depois os quartis, e assim temos os valores que dividem os dados em quatro partes iguais: mínimo, o um; máximo, o quatro; primeiro quartil, o dois; segundo quartil, o três e o terceiro quartil, que é a média aritmética entre o três e o quatro. Depois é só desenhar o diagrama, por cima da escala numérica

Professora: Agora observa como respondeste no teste.

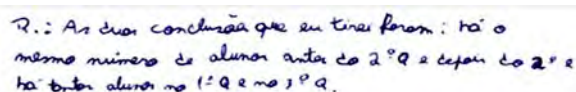
A23: Só estão corretos os dois primeiros quartis. Onde estava com a cabeça ... até acrescentei valores. Desculpe professora.

Para além de dificuldades em identificar corretamente os valores extremos, os erros cometidos pelos alunos na construção do diagrama de extremos e quartis têm por base a determinação incorreta do primeiro e/ou do terceiro quartil (13%) ou o facto de estes não serem sequer determinados (26,1%).

Na alínea 2.3, ao solicitar-se ao aluno uma análise do diagrama, pretendia-se que eles apontassem duas conclusões: uma, relativa à simetria; outra, relativa à dispersão da distribuição das respostas dos inquiridos ou outra, sobre a localização dos quartis. Nesta alínea, a maioria dos alunos apresentou uma resposta incorreta, ou não respondeu. Salienta-se, ainda, que não existe nenhuma resposta com conclusões válidas, donde se pode concluir que a maioria dos alunos revelou dificuldades na análise e interpretação do diagrama de extremos e quartis, não conseguindo estabelecer as duas conclusões da distribuição organizada desta forma.

Relativamente aos alunos que não responderam (43,5%), 8,7% deles não tinham construído o diagrama solicitado na alínea 2.2 e os restantes 26,1%, apesar de terem construído o diagrama, também não responderam. De seguida, analisou-se mais profundamente as 13 (56,5%) respostas parcialmente corretas ou incorretas. Na categoria das respostas incorretas destacam-se as seguintes respostas: conclusão que remete para a análise gráfica (8,7%); e

conclusão que remete para a noção de mediana (4,3%). Nas Figura 85, 86 e 87 apresentam-se exemplos destes tipos de respostas.



R.: As duas conclusões que eu tirei foram: há o mesmo número de alunos antes do 2.º Q e depois do 2.º e há tantos alunos no 1.º Q e no 3.º Q.

«As duas conclusões que eu tirei foram: há o mesmo número de alunos antes do 2.º Q e depois do 2.º e há tantos alunos no 1.º Q e no 3.º Q»

Figura 85 – Resposta do aluno A23 à alínea 2.3

Na sua resposta (Figura 85), o aluno A23 evidencia conhecer a noção de mediana (segundo quartil) e a sua função, revelando, no entanto, dificuldades na definição dos outros quartis, já que associa o valor do primeiro quartil e do terceiro quartil a número de alunos (frequência), igual nos dois casos. Embora não se perceba a origem dessa frequência, o aluno pode estar a referir-se ao número de alunos compreendidos entre o extremo mínimo e o primeiro quartil, no caso do primeiro quartil, e entre o terceiro quartil e o extremo máximo, no caso do terceiro quartil. Na entrevista o aluno acrescentou outras conclusões, que não registou no teste, ao analisar o seu diagrama (Figura 85):

Professora: Depois de leres o enunciado da questão 2, refere como procedes para responder à alínea 2.3.

A23: Ora bem, devo considerar o diagrama que desenhei, certo?

Professora: Exatamente!

A23: Em relação à dispersão, a amplitude interquartil é de 1,5, certo? Podemos falar disto?

Professora: Sim, é o que se pretende. Que outra conclusão pode ser tirada?

A23: Existe pouca dispersão?!

Professora: Observando o diagrama que construístes, que podes afirmar quanto à simetria?

A23: Não me parece simétrico... a cauda da “baleia” está voltada para a esquerda.

Professora: Tens razão há um enviesamento para a esquerda. Como provas o que afirmas?

A23: A distância da mediana ao mínimo é de 9 quadrículas e ao máximo é de 6.

Professora: Na tua justificação, recorrendo aos resultados da alínea anterior (média, mediana e moda), que podes referir?

A23: Moda= Mediana = 3 e a média é menor, porque é 2,75.

Professora: então podemos concluir que...

A23: Já não me lembro bem... há ligeiro enviesamento, é isso?

Professora: Sim para a esquerda. Observa a resposta que registaste no teste.

A23: Também são verdadeiras, mas não estão perfeitas, é verdade.

Professora: a primeira conclusão está correta, mas quanto à segunda não consigo entender o que querias dizer, podes explicar, por favor?

A23: No primeiro quarto do retângulo, que vai do 1.º Q ao 2.º Q, tem o mesmo número de dados que no segundo quarto, que vai do 2.º Q ao 3.º Q.

Professora: Mas não é isso que está escrito, como podes ler.

A23: Fui trapalhão.

O aluno A20 limita-se a fazer uma análise do gráfico de barras (Figura 76), destacando os valores da variável com menor frequência absoluta (habitações com um quarto) e com maior frequência absoluta (habitação com três quartos).



A maioria das pessoas tem 3 quartos em casa  
A minoria das pessoas tem 1 quarto em casa

«A maioria das pessoas tem 3 quartos em casa.  
A minoria das pessoas tem 1 quarto em casa»

Figura 86 – Resposta do aluno A20 à alínea 2.3

O aluno A20 na entrevista, foi conduzido à análise do diagrama de extremos e quartis (Figura 86) que construiu, pelo que conseguiu responder de forma diferente, daquela que fez no teste:

Professora: Depois de leres o enunciado da questão 2, refere como procedes para responder à alínea 2.3.

A20: Qual deve ser o diagrama que tenho que analisar?

Professora: Aquele que desenhaste no teste. Este!

A20: Mas este não está correto!

Professora: Mas no teste foi este que construístes, julgando estar correto, é sobre este que terás que fazer a tua análise.

A20: O gráfico está dividido em três partes e não quatro...

Professora: quer dizer então que há dois quartis coincidentes, quais são eles?

A20: O segundo e o terceiro. Então não há simetria... e a dispersão ... é pequena, pois  $3-2 = 1$ . É isso?

Professora: Tens razão! No teu diagrama há um enviesamento para a esquerda e a análise sobre a dispersão está correta. Atendendo ao que determinaste na alínea anterior 2.1c, que podes referir sobre a simetria?

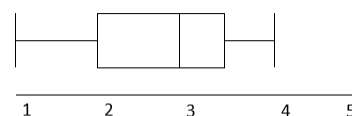
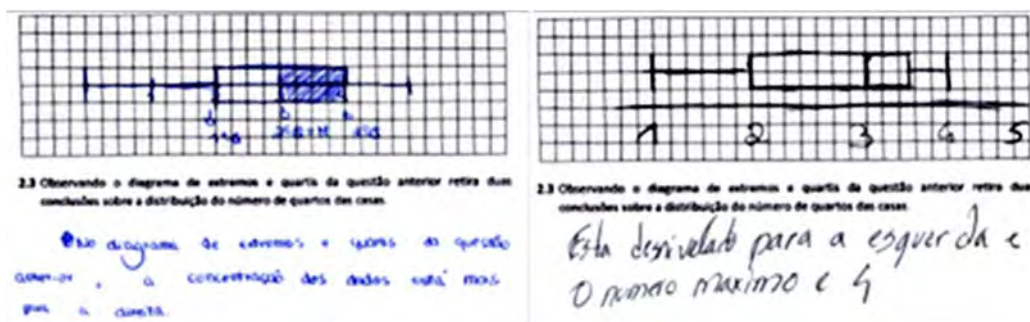
A20: A moda e a média são 3 e a mediana é menor, pois deu 2,75, não há simetria, certo?

Professora: Sim, há um enviesamento ligeiro para a esquerda. Observa a resposta que registaste no teste.

A20: Só olhei para o gráfico de pontos, porque sabia que faltava um quartil e como não descobri o erro deixei ficar assim.

Na sua resposta (Figura 87), o aluno A15 foca a sua conclusão na dispersão da distribuição dos dados obtidos pelo inquérito. Apesar de ter determinado corretamente os quartis e de ter construído corretamente o diagrama de extremos e quartis, ele designa o quartil como sendo um intervalo de dados e não determina nem a amplitude interquartil (como era esperado), nem a amplitude.





No diagrama de extremos e quartis da questão anterior, a concentração dos dados está mais para a direita

Esta desviado para a esquerda e o número máximo é 4

Figura 88 – Resposta do aluno A34 (esquerda) e A28 (direita), respetivamente, à alínea 2.3

O aluno A34 apesar de ter construído um diagrama de extremos e quartis sem rigor e incorreto, ao analisá-lo, focou-se na concentração dos dados; o aluno A28 também não foi rigoroso na construção do diagrama, embora o máximo, o mínimo e os quartis estejam bem assinalados, focou a sua análise na simetria. Nas entrevistas, constata-se que o aluno A34 revelou mais dificuldade em interpretar o diagrama e em detetar os erros cometidos na sua construção, mostrando ter memorizado a representação do diagrama e não compreendido o seu conceito, enquanto que o aluno A28 revelou saber representar e apontar as falhas do seu diagrama, embora manifestasse dificuldades na interpretação deste. Transcreve-se, a seguir, as duas entrevistas:

Professora: Para responderes à alínea 2.3, tem em conta o diagrama que construístes no teste.

A34: Sendo a mediana o valor três, à sua direita, os dados estão mais concentrados do que à sua esquerda. Pode-se dizer que não existe simetria, também.

Professora: Para ti a simetria e dispersão são conceitos iguais?

A34: Não!... um tem a ver com a diversidade dos dados e a outra com a simetria do diagrama, em relação à mediana.

Professora: Agora, atendendo ao teu diagrama, analisa-o quanto à simetria e à dispersão?

A34: Já disse que não é simétrico, pois o mínimo está mais distante da mediana do que está do máximo. Os dados estão mais ao menos dispersos.

Professora: A análise parece-me bem, como justificas a dispersão?

A34: Os valores não são muito afastados. Professora: Mas continuas a não justificar a tua resposta. Poderias determinar a amplitude interquartil, por exemplo, já que detém informação de 50% dos dados e não depende dos valores extremos. Quanto à construção do diagrama, este não está correto. Sabes dizer-me porquê?

A34: Não?! Estão representados os extremos e os quartis, desenhei o retângulo...



Professora: Quanto a isso, está bem, mas que dados o diagrama representa?

A34: Os do inquérito, deste gráfico de barras...

Professora: Então vamos analisá-los. Quais são os valores máximo e mínimo dos dados representados na forma de gráfico de barras?

A34: O mínimo é 1 e o máximo é 4.

Professora: Vejamos agora os extremos inferior (valor mínimo) e superior (valor máximo) do diagrama que desenhaste no teste.

A34: Já entendi! Estão errados, por isso não representa o mesmo conjunto de dados.

Professora: Vê a tua resposta à alínea 2.3.

A34: Está incompleto! Só falei da concentração e mal.

Professora: Para responderes à alínea 2.3, observa o diagrama que construístes no teste.

A28: É enviesado para a esquerda e quanto à dispersão, os dados entre o primeiro quartil e o terceiro variam pouco, por isso, os dados são concentrados.

Professora: Era essa resposta que deveria ter sido escrita no teste, mas mesmo assim está incompleta. Podes justificar devidamente o que afirmas?

A28: Bem, para a dispersão, basta determinar a amplitude interquartil,  $3,5 - 2 = 1,5$ , é um valor pequeno e podemos ver que existe maior concentração dos valores superiores ou iguais a Q2 do que inferiormente ou igual a si, pois a amplitude no primeiro caso é de 1 e do segundo é 2; em relação à simetria, a média é inferior à mediana, logo há enviesamento para a esquerda.

Professora: Repara na tua resposta no teste.

A28: A primeira está correta e a segunda observação também. Não falei sobre a dispersão.

Professora: De facto referes ter a noção correta de simetria, no entanto, não sustentas a tua afirmação, como fizeste agora, por isso não está correta.

A28: Pois falta também isso...

Professora: Aproveito para referir que o diagrama de extremos e quartis que foi construído no teste, embora correto, não apresenta muito rigor. O que falta destacar?

A28: Não referi os valores máximo para o extremo superior, mínimo para o extremo inferior e os quartis que definem o retângulo e a amplitude interquartil, nem como os determinei, certo?

Em síntese, as dificuldades e erros cometidos pelos alunos, na análise do diagrama de extremos e quartis refletem dificuldades na interpretação deste tipo de gráfico, já que não são capazes de extrair conclusões da distribuição assim representada, embora revelam ter uma perceção intuitiva (34,8%) dos conceitos de simetria e dispersão. Também não utilizam as medidas estatísticas adequadas para sustentar as suas observações, mesmo quando determinadas na alínea anterior, como no caso da média e mediana para a simetria. É importante realçar que os alunos revelaram dificuldades em construir o diagrama de extremos

e quartis, por apresentarem dificuldades na determinação dos quartis (4,3%), sobretudo do terceiro quartil, e dos extremos máximo e mínimo (8,7%).

Na questão 3 (Figura 89), em que se apresenta os dados numa tabela de frequências, pretende-se determinar as frequências em falta e identificar a moda, o máximo, o mínimo e os quartis.

| Número de irmãos | Freq. absoluta | Freq. Relativa (%) |
|------------------|----------------|--------------------|
| 0                | 20             |                    |
| 1                | 16             | 16%                |
| 2                | 27             | 27%                |
| 3                |                | 15%                |
| 4                | 22             |                    |

3. Num inquérito feito a um grupo de jovens sobre o número de irmãos, obtiveram-se os resultados apresentados na tabela ao lado.

a) Completa a tabela.

b) Determina a moda do número de irmãos.

c) Tendo em conta o seguinte diagrama de extremos e quartis, que corresponde à distribuição do número de irmãos dada, determina os valores de  $a, b, c, d, e$ .

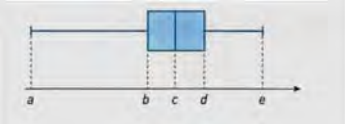
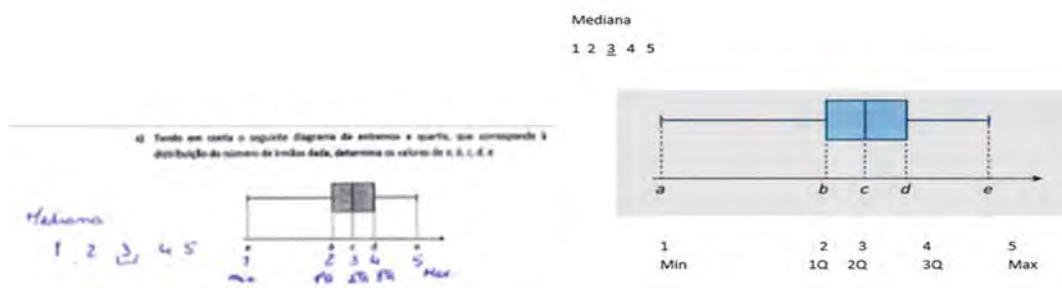


Figura 89 – Enunciado da questão 3 proposta aos alunos

Foi nesta questão que se obtiveram melhores resultados, tendo a maioria dos alunos respondido corretamente a todas as alíneas. Contudo, o aluno A31 não respondeu a nenhuma das alíneas e alguns alunos responderam de forma parcialmente correta: 8,7% à alínea 3b e 17,4% à alínea 3c. Continuando a análise, verifica-se que a resposta dada pelos alunos A27 e A35 reflete um conflito entre máximo e moda, já que referem que a “moda é 4”.

Em relação à alínea 3c, as respostas PC dos alunos (17,4%) revelam dificuldade na identificação correta do conjunto de dados, embora apliquem corretamente o seu algoritmo (conflito semiótico  $\bar{C}2$ ), tal como se pode constatar na Figura 90.



Mediana  
1 2 3 4 5

d) Tendo em conta o seguinte diagrama de extremos e quartis, que corresponde à distribuição do número de irmãos dada, determina os valores de  $a, b, c, d, e$ .

Mediana  
1 2 3 4 5

1 Min 2 1Q 3 2Q 4 3Q 5 Max

Figura 90 – Resposta do aluno A16 à alínea c

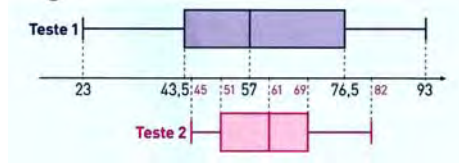
Nesta resposta, o aluno A16 ignora o valor zero da variável e a frequência absoluta de cada um dos valores e como existem cinco letras  $a$  que atribuir valores, acrescenta um valor à variável, o valor 5. Solicitou-se ao aluno que explicasse o seu raciocínio, aquando da entrevista e constatou-se que ele mantém dificuldades na determinação da mediana:

Professora: Após a leitura da segunda questão, resolve a alínea 3c, por favor.  
A16: A variável tem valores, logo é um para cada uma das letras.  
Professora: Como?! Representa-me agora o diagrama de extremos e quartis, que representa os dados da tabela.  
A16: O valor mínimo é zero e o valor máximo é cinco. A mediana da distribuição é três e assim temos o conjunto de valores divididos em duas partes iguais, isto é, 50% para cada um dos lados da mediana.  
Professora: Como determinas a mediana?  
A16: Ordeno os valores: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e o valor que fica no centro é a mediana.  
Professora: De facto é a mediana do conjunto de dados que referiste. Quantas pessoas foram inquiridas sobre o número de irmãos?  
A16: 100 pessoas!?  
Professora: Então como se determina a mediana desses 100 dados?  
A16: ordenam-se esses 100 dados e encontra-se os dois valores centrais e depois determina-se a média aritmética deles e esse valor é a mediana.  
Professora: Então determina-a agora.  
A16: É o valor três, como já tinha determinado.  
Professora: É uma coincidência, já que os conjuntos de dados não são iguais. Continua a explicar como determinas os outros dois quartis, por favor.  
A16: A mediana é então três e agora divido os 50 dados ao meio de cada um dos lados da mediana. Isto é, encontro o vigésimo quinto e o vigésimo sexto e determino a média aritmética dos dados antes da mediana e depois desta.  
Professora: Vê como respondeste no teste.  
A16: Já entendi, apesar dos dados serem os mesmos, o meu erro foi a forma como os determinei, é isso?  
Professora: Claro, os conjuntos de dados não são iguais.

Em síntese, pode concluir-se que há alunos que ainda revelam dificuldades em determinar as medidas de localização, apesar de terem sido bastante trabalhadas ao longo da intervenção de ensino.

Na questão 4 (Figura 91), apresentam-se três distribuições: duas organizadas em diagramas extremos e quartis, e uma não organizada. O objetivo principal desta questão é avaliar a capacidade do aluno em organizar os dados num diagrama de extremos e quartis, comparando o diagrama obtido com os outros dois, em termos de amplitude interquartil, amplitude, de dispersão e de simetria.

4. No 1.º período, os alunos da turma da Emília, fizeram três testes à disciplina de Matemática. Os resultados, em percentagem, dos dois primeiros testes estão representados nos diagramas de extremos e quartis apresentados a seguir.



Os resultados do **terceiro teste** (teste 3) foram os seguintes:

30 58 82 35 67 84 65 77 52 36 40  
 52 67 63 84 43 91 57 65 45 52

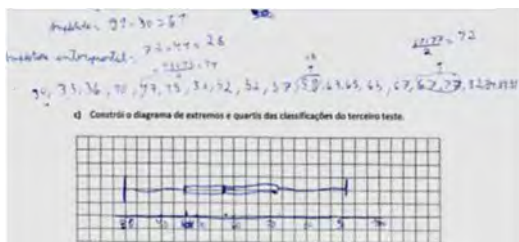
- Em qual dos dois primeiros testes podes garantir que houve pelo menos 75% dos alunos com positiva? Porquê?
- Determina a amplitude e a amplitude interquartil das classificações do terceiro teste.
- Constrói o diagrama de extremos e quartis das classificações do terceiro teste.
- Observando o intervalo interquartil de cada um dos diagramas de extremos e quartis, o que podes dizer dos resultados obtidos nos testes de Matemática?
- Compara, quanto à dispersão, as distribuições dos resultados obtidos nos dois primeiros testes de Matemática.
- Compara, quanto à simetria, as distribuições dos resultados obtidos nos dois primeiros testes de Matemática.

Figura 91 – Enunciado da questão 4 proposta aos alunos

Na Tabela 38 observa-se que os alunos apresentaram dificuldades na maioria das alíneas, mais acentuadas nas alíneas 4d, 4e e 4f. Nestas alíneas, muitos alunos apresentaram respostas incorretas ou não responderam (78,2%, 73,9% e 73,9%, respetivamente, nas alíneas 4d, 4e e 4f). Nestas três alíneas os alunos revelaram dificuldades em estabelecer comparações entre as três distribuições, no que respeita ao intervalo interquartil, à dispersão e à simetria, verificando-se frequências muito baixas de respostas corretas (4,3% nas alíneas 4d e 0% na alínea 4e e 4f).

Já o desempenho dos alunos, nas alíneas 4a, 4b e 4c, foi mais positivo. Na alínea 4a, a maioria das respostas são corretas ou parcialmente corretas (65,2%). As respostas parcialmente corretas (30,4%) são aquelas em que não foi apresentada a justificação requerida, ou foi apresentada uma justificação incorreta. Também na alínea 4b, a maioria dos alunos apresentaram respostas corretas ou parcialmente corretas (78,3%), sendo mesmo aquela em que os alunos tiveram melhor desempenho. Neste caso, as respostas parcialmente corretas devem-se a erros de cálculo. Salienta-se ainda a não existência de respostas incorretas e a menor percentagem de não respostas, podendo, pois, concluir-se que os alunos apresentaram menos dificuldades na determinação da amplitude e da amplitude interquartil. Finalmente, na alínea c novamente a maioria das respostas são corretas ou parcialmente corretas (69,6%), devendo-se as respostas PC à falta de rigor dos alunos na construção gráfica (Figura 92).

Como se observa na figura, nesta resposta o aluno A22 desenha o diagrama de extremos e quartis sem qualquer rigor.



«amplitude = 91-30=61  
 Amplitude interquartil: 72-44 = 28  
 30 35 36 40 43 45 52 52 52 57 58 63 65 65 67 67 77 82 84 84 91

$$\frac{43+45}{2} = 44 \quad 2Q \quad \frac{67+77}{2} = 72»$$

Figura 92 - Resposta do aluno A22 à alínea 4c

Na entrevista procurou-se compreender se o aluno sabia desenhar o diagrama de extremos e quartis ou se conhecia apenas a sua estrutura. Posteriormente pediu-se ao aluno que analisasse a construção do diagrama realizada no teste.

Professora: Lê com atenção a questão quatro do teste e descreve a construção do diagrama de extremos e quartis, por favor.

A22: Primeiro temos que ordenar os dados e identificar o mínimo e máximo, depois determina-se a mediana. Faço o segmento de reta cujos valores extremos coincidem com os valores do mínimo e do máximo e estabeleço a escala. Vê?

Professora: Sim, estou a ver. Continua.

A22: O quartil em falta, é o valor central dos dez dados que antecedem a mediana, para o primeiro quartil, e dos dez depois da mediana, para o terceiro quartil.

Professora: Como determinas cada um dos quartis?

A22: Ordeno vinte e um dados 30, 35, 36, 40, 43, 45, 52, 52, 52, 57, 58, 63, 65, 65, 67, 67, 77, 82, 84, 84, 91; a mediana é o 58. Quanto ao primeiro quartil tem-se  $\frac{43+45}{2} = 44$  e o terceiro quartil é  $\frac{67+77}{2} = 72$ .

Professora: Agora desenha o diagrama e compara-o com o que construístes no teste.

A22: O que fiz agora está mais direitinho.

O aluno A22, na sua entrevista, revelou saber representar o diagrama de extremos e quartis esclarecendo, deste modo, o que tinha feito no teste.

As três respostas incorretas resultaram de os alunos terem representado um diagrama de extremos e quartis que não representa a distribuição dada, como se pode observar na Figura 93.



«amplitude interquartil: 72-44 = 28  
 30 35 36 40 43 45 52 52 52 57 58 63 65 65 67 67 77 82 84 84 91

$$\frac{43+45}{2} = 44 \quad 2Q \quad \frac{67+77}{2} = 72»$$

Figura 93 - Resposta do aluno A20 à alínea 4c

Nesta resposta o aluno limita-se a organizar os dados num gráfico de pontos depois de ter determinado corretamente o 1.º e o 3.º quartil. Começa por assinalar incorretamente a mediana e a partir daí constrói o diagrama sem atender aos valores anteriormente determinados, revelando não ter compreendido o significado desta representação. Na entrevista revelou dificuldades na determinação dos quartis, o que remete para dificuldades na determinação do valor da mediana (conflito semiótico  $\bar{C}1$ ), como se pode constatar de seguida:

Professora: Lê com atenção a questão 4 do teste e constrói o diagrama de extremos e quartis, por favor.

A20: Primeiro ordena-se os 21 dados: 30, 35, 36, 40, 43, 45, 52, 52, 52, 57, 58, 63, 65, 65, 67, 67, 77, 82, 84, 84, 91; o mínimo: 30 vai ser o extremo inferior e o máximo: 91 vai ser o extremo superior; a mediana é o 58.

Professora: Sim, estou a ver. Continua.

A20: Os quartis em falta, são os valores centrais dos dez dados que antecedem a mediana, para o primeiro quartil, e dos dez seguintes à mediana, para o terceiro quartil.

Professora: Como determinas cada um dos quartis?

A20: O primeiro quartil é a semissoma dos valores que ocupam a quinta e a sexta posição, cujo resultado é 44; o terceiro quartil é a semissoma dos valores que ocupam a décima sexta e décima sétima posição, e o valor encontrado é 72.

Professora: Analisa a tua resposta no teste.

A20: Pois, utilizei o gráfico de pontos e parece-me que o diagrama não ficou lá muito bem.

Professora: O problema não está na utilização do gráfico de pontos, mas sim na escala que definiste para a elaboração do gráfico. Qual é o valor dos quartis?

A20: 43 e 45 para o primeiro quartil, 58 para o segundo quartil e 67 e 77 para o terceiro quartil.

Professora: Desculpa, não entendi, quantos valores tem cada um dos quartis.

A20: Cada quartil tem apenas um valor!?

Professora: Repete, por favor, quais são esses valores.

A20: O segundo quartil é o 58; o primeiro quartil é o valor entre 43 e 45; o terceiro quartil está no meio de 67 e 77.

Professora: Quais são esses valores?

A20: A média desses valores?

Professora: Claro! Entendeste agora a tua falha no teste?

Nas restantes alíneas, 4d, 4e e 4f, pretendia-se que os alunos comparassem os diagramas de extremos e quartis, incidindo essa comparação na simetria e dispersão das distribuições, e também na amplitude interquartil. Constatou-se que poucos alunos apresentaram respostas corretas ou parcialmente corretas (21,7% na alínea d) e 26,1% nas linhas 4e e 4f, o que revela muitas dificuldades dos alunos em se expressarem, apresentando respostas com raciocínios pouco claros e sem rigor, por vezes incompreensíveis, que foram incluídas na categoria das

respostas incorretas. Tal como em casos anteriores, as respostas parcialmente corretas são respostas incompletas, como se pode verificar através das Figuras 94, 95 e 96.

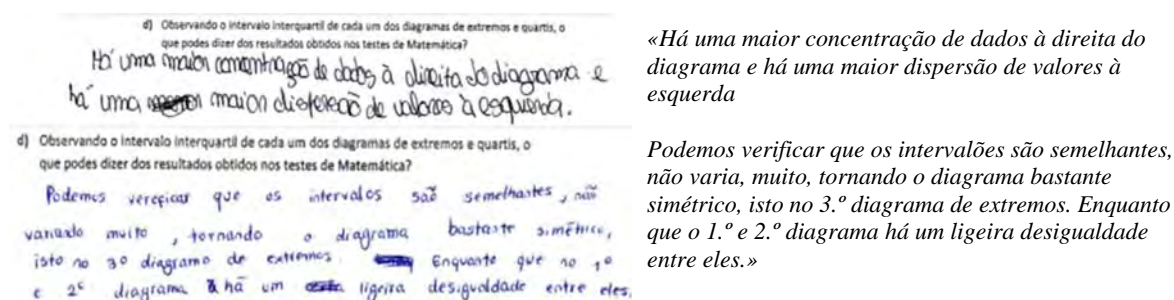


Figura 94 - Respostas dos alunos A25 (acima) e A24 (abaixo) à alínea 4d

Nestas alíneas, os alunos responderam de forma evasiva, não estabelecem ligações entre os resultados das três distribuições e os respetivos diagramas e não determinam a amplitude interquartil, considerando-se, por isso, semelhantes. Revelam ainda dificuldade em aplicar a noção de amplitude interquartil e a noção de intervalo. Transcrevem-se as entrevistas de seguida:

Professora: Lê atentamente a questão quatro, responde à alínea d, tendo em conta os diagramas representados e o que construístes na alínea c.

A25: Temos que nos concentrar no retângulo apenas. No teste 1 os dados entre o primeiro quartil e o terceiro estão menos concentrados do que no teste 2; comparando o teste 3 com o teste 1, a concentração é maior no teste 3; e vendo o teste 2 e o teste 3, a concentração é maior no teste 2.

Professora: Não tens mais nada a acrescentar?

A25: Não!?

Professora: Que podes dizer sobre a amplitude interquartil em cada um dos casos?

A25: É obtido pela diferença entre o terceiro e o primeiro quartil, por isso, no teste 1 é 33; no teste 2 é 20; no terceiro teste é 28.

Professora: Comparando-os o que podes afirmar?

A25: São diferentes... o mais disperso é o do primeiro teste e o menos disperso é o do teste 2.

Professora: O que queres dizer com a tua observação?

A24: Bem, metade das notas em cada um dos testes é mais dispersa, quanto maior for a amplitude, porque tem notas mais espalhadas. Não sei dizer mais sobre isto.

Professora: Vê a resposta que deste no teste.

A25: Está muito imprecisa. Agora é fácil.

Professora: Depois de leres a questão quatro, responde à alínea d, tendo em conta os diagramas representados e o que construístes na alínea c.

A24: É para comparar o tamanho dos retângulos, é isso?

Professora: Podes começar por fazer essa análise.

A24: O retângulo do teste 1 é o maior, o mais pequeno é o retângulo do teste 2, e o de tamanho médio é o teste 3.

Professora: Que podes dizer sobre a amplitude interquartil em cada um dos casos?

A24: São diferentes, porque o tamanho é diferente.

Professora: Determina-os, por favor.

A24: Teste 1:  $76,5 - 43,5 = 33$ ; teste 2:  $70 - 50 = 20$ ; teste 3:  $72 - 44 = 28$ .

Professora: Comparando-os o que podes afirmar?

A24: A dispersão e a variedade é maior quanto maior for a amplitude.

Professora: Queres explicar melhor quanto à variedade?

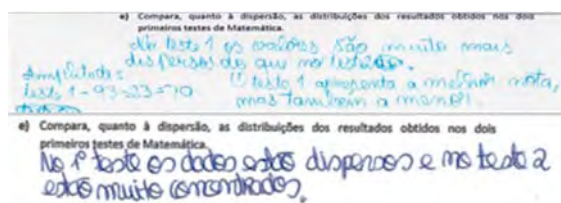
A24: A variedade dos valores é porque são diferentes uns dos outros, e muitos, mas no caso do teste 2 as percentagens estão muito próximas umas das outras e no teste 1 há valores mais afastados.

Professora: Analisa a resposta dada no Teste.

A24: Deveria sido mais precisa, mas na altura não vi.

Nestas entrevistas constatar-se que os alunos apresentaram dificuldades em comparar os três diagramas de extremos e quartis e de incluir, na sua análise, a amplitude interquartil. Depois de determinarem as amplitudes interquartis, na entrevista, os dois alunos conseguem estabelecer relação entre a amplitude interquartil e a dispersão dos dados entre o primeiro e o terceiro quartil.

Em relação à alínea e), apresenta-se as respostas dos alunos A18 e A15, onde se pode observar dificuldades na análise comparativa entre dois diagramas de extremos e quartis:



«No teste 1 os valores são muito mais dispersos do que no teste 2.

Amplitude:

Teste 1:  $93-23=70$ ; O teste 1 apresenta a melhor nota, mas também a menor

No 1º teste os dados estão dispersos e no teste 2 estão muito concentrados.»

Figura 95 - Respostas dos alunos A18 (acima) e A15 (abaixo) à alínea 4e

O aluno A18, que apresenta a primeira resposta, referencia com rigor qual dos testes é mais disperso e ensaia uma resposta correta com recurso à amplitude, no entanto, determina apenas essa medida para o teste 1 (valores inteiros) e não chega a determinar a amplitude para o teste 2 (valores decimais), limitando-se a constatar que o 1.º teste apresenta a melhor e a pior nota dos dois testes. Na segunda resposta, o aluno A15, redige uma resposta correta, referencia com rigor qual dos testes é mais disperso, mas sem o referir de forma explícita. Transcrevem-se as entrevistas dos dois alunos de seguida:



Professora: Vamos analisar agora a alínea e. Que podes afirmar em relação à dispersão das distribuições?

A18: No primeiro teste o retângulo é maior do que no teste 2.

Professora: Podes explicar melhor? Qual a estatística que utilizas para sustentar a tua afirmação?

A18: No teste 1 existem mais valores diferentes, já que a amplitude é de 70, enquanto que no teste 2 a amplitude é de 37.

Professora: No teste a tua resposta estava quase totalmente correta, vê o que falhou.

A18: Falta determinar a amplitude do teste 2. Foi a falta de tempo.

Professora: Na alínea anterior tinha sido determinada a amplitude interquartil, poderias utilizar na análise da dispersão em análise?

A18: Sim, já que posso comparar o comprimento dos retângulos, que corresponde ao comportamento de 50% dos dados, certo?

Professora: Poucando tempo...

Professora: Tendo em conta os diagramas representados e o que construístes na alínea c, responde à alínea e.

A15: No primeiro teste os dados estão mais dispersos do que no segundo teste.

Professora: Justifica a tua opinião, por favor.

A15: Em termos de valor máximo e mínimo temos, no teste 1 o máximo é 93 e o mínimo é 23, logo a amplitude é de 70, enquanto que no segundo teste a amplitude é de 37, já que o máximo é de 81 e o mínimo é de 44.

Professora: Observa a resposta dada por ti no teste.

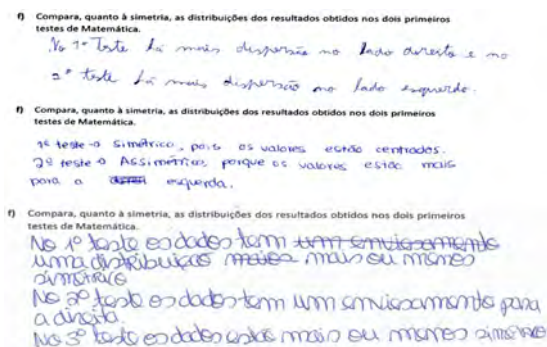
A15: Falta a justificação, não é?

Professora: Claro! Poderias ter optado por outra medida estatística?

A15: Talvez a amplitude interquartil, que tinha calculado em cima. Que distraída!

Nestas entrevistas pode constatar-se que os alunos apresentaram dificuldades em incluir na sua análise a amplitude da distribuição ou a amplitude interquartil, que tinham determinado na alínea anterior. Depois de terem sido conduzidos à reflexão, os dois alunos conseguem estabelecer relação entre a amplitude interquartil e a dispersão dos dados.

Relativamente à alínea 4f, os alunos A22, A34 e A18, nas suas respostas, revelaram dificuldades em comparar dois diagramas e analisá-los quanto à simetria:



«No 1º teste há mais dispersão no lado direito e no 2º teste há mais dispersão no lado esquerdo.

1º teste é simétrico, pois os valores estão centrados  
2º teste é assimétrico porque os valores estão mais para a esquerda.

No 1º teste os dados tem uma dispersão mais ou menos simétrico  
No 2º teste os dados tem um enviesamento para a direita  
No 3º teste os dados estão mais ou menos simétricos»

Figura 96 - Respostas dos alunos A22 (acima), A34 (meio) e A15 à alínea (abaixo) 4f

Na primeira resposta, o aluno A22, é pouco rigoroso na afirmação que redige, confunde a simetria com a dispersão do diagrama; na segunda, o aluno A34 revela ter noção de simetria, mas não se expressa corretamente; na terceira, o aluno A15 é também pouco rigoroso na afirmação que redige, já que não identifica o valor que referencia para afirmar a simetria no 1.º teste e a assimetria no 2.º teste, incluindo ainda a análise do diagrama do 3.º teste. Transcreve-se as entrevistas dos três alunos de seguida:

Professora: Tendo em conta os diagramas representados e o que construístes na alínea c, responde à alínea f.

A22: Ora bem, nos dois diagramas há tantos elementos antes da mediana como depois dela, mas nenhum dos dois é simétrico.

Professora: Em que te baseias para referires a simetria do diagrama?

A22: Na concentração dos dados em relação à mediana. Há mais concentração dos dados no teste dois.

Professora: Tens a certeza do que afirmas?

A22: Sim, basta ver o tamanho do retângulo.

Professora: Há um problema, a pergunta refere simetria e não dispersão. Há alguma diferença entre as duas?

A22: Ah! Acrescento que os diagramas não são simétricos.

Professora: Como justificas essa afirmação?

A22: Ok! Amplitudes de cada um. Teste 1:  $93-23=70$  e no teste 2:  $81-44=37$ . Espera, é a simetria que tenho que analisar e isso tem que ver com a mediana, certo?

Professora: Claro que sim. Mas como respondes neste caso?

A22: Está relacionada com as medidas de tendência central: quando a média=mediana há simetria. Já entendi, confundi tudo. Como não posso determinar a média vou pelos comprimentos da mediana aos extremos

Professora: Então, agora responde corretamente ao pedido.

A22: As medianas estão no diagrama: teste 1: 57 e teste 2: 60. Ora, teste 1:  $57-23=34$  e  $93-57=36$ , é quase simétrico.

Teste 2:  $60-44=16$  e  $81-60=21$ , não é simétrico. Finalmente entendi tudo!

Professora: Tendo em conta os diagramas representados e o que construístes na alínea c, responde à alínea f.

A34: Sabendo que os dados estão divididos em quatro partes, vou considerar a mediana, dividindo em duas partes iguais dos dados. O primeiro diagrama é quase simétrico. Não, é simétrico e o segundo não.

Professora: Em que te baseias para referires a simetria do diagrama?

A34: No teste 1 tem-se que a amplitude do primeiro conjunto é, ... vejamos:  $57-23=34$ , e na segunda metade:  $93-57=36$ ; no teste 2:  $60-44=16$  na primeira metade e  $81-60=21$ . Como vê, disse bem.

Professora: Então o enviesamento no segundo diagrama é para a direita ou para a esquerda?

A34: Como a diferença é maior na segunda metade, é para a direita.

Professora: O que acrescentarias à tua resposta no teste?

A34: Apresentava as comparações entre os dois extremos e a mediana, como fiz aqui.

Professora: Tendo em conta os diagramas representados e o que construístes na alínea c, responde à alínea f.

A15: Ora bem, os dados estão divididos em quatro partes, mas primeiro vou determinar a mediana, dividindo em duas partes iguais dos dados. O primeiro diagrama é quase simétrico e o segundo não.

Professora: Em que te baseias para referires a simetria do diagrama?

A15: No teste 1 pode ver-se que a distância da mediana ao máximo é quase igual à distância da mediana ao mínimo. Ora veja as amplitudes:  $57-23 = 34$  e na segunda metade  $93-57= 36$ ; no teste 2,  $60-44= 16$  na primeira metade e  $81-60=21$  na segunda metade. Eu tenho razão.

Professora: Então o enviesamento no segundo diagrama é para a direita ou para a esquerda?

A15: Como a amplitude é maior na segunda metade, é para a direita.

Professora: O que acrescentarias à tua resposta no teste?

A15: Apresentava as amplitudes.

Professora: A que amplitudes te referes?

A15: às dos intervalos correspondentes às duas metades do conjunto de dados, em cada um dos diagramas.

Estes alunos, na entrevista, revelaram dificuldades em justificar a sua análise quanto à simetria pois não estabelecem referências para posicionar a simetria, baseando a sua análise na intuição visual.

Em síntese, os alunos nesta questão mostraram que conseguem com alguma facilidade construir o diagrama de extremos e quartis, no entanto têm muitas dificuldades em comparar e interpretar estas representações gráficas, quer quanto à simetria, quer quanto à concentração. Os erros cometidos pelos alunos na questão 4 refletem dificuldades na análise de DEQ, nomeadamente, em associar a perceção intuitiva da forma da distribuição dos dados, resultante da leitura de um DEQ, com a interpretação dessa forma distribucional por meio de medidas estatísticas dos dados que possam suportar essa intuição. Efetivamente, constata-se que para cada uma daquelas alíneas, 4d, 4e e 4f, cerca de metade dos alunos não responde; os alunos, quando revelam conhecer intuitivamente a noção de simetria e/ou de dispersão de uma distribuição, tendem a não usar medidas estatísticas, obtidas da leitura do DEQ, para justificar a forma distribucional identificada; e, as dificuldades detetadas não dependem do rigor da representação gráfica do DEQ, já que estas surgem quer quando o DEQ é apresentado no próprio enunciado, quer quando este é construído originalmente pelo próprio aluno.

Em termos globais, constata-se que os alunos mantiveram uma postura pouco autónoma, pois durante a entrevista eles mostraram conhecer os conceitos implicados no TF, parecendo que o questionamento da professora foi suficiente para conduzir os alunos às respostas corretas.

### 6.1.3.2. Análise dos resultados do Teste Final segundo o contexto

Das quatro questões da prova sobre as medidas de localização e de dispersão e o DEQ, apenas 1c, 2.2, 2.3, 4b, 4b, 4e e 4f (ver Figuras 55, 61 e 76) serão alvo de análise nesta secção, procurando saber-se se a qualidade das respostas apresentadas pelos alunos, sobre o mesmo tema, são influenciadas pelo tipo de contexto em que os dados são apresentados.

#### 6.1.3.2.1. Determinação da amplitude interquartil

Na determinação da amplitude interquartil analisam-se as respostas às alíneas 1c e 4d, confrontando a qualidade das respostas dadas pelos alunos quando os dados são fornecidos numa coleção não organizada de valores numéricos (1c), cuja pergunta explicita o item a determinar, *versus* quando os dados estão organizados num DEQ (4d), cuja pergunta deixa em aberto a determinação da amplitude, pois é solicitado uma análise do intervalo interquartil. Na Tabela 39 apresenta-se a distribuição dos 23 alunos pelo tipo de resposta dada (C, PC, I) e NR naquelas questões.

Tabela 39 – Distribuição dos alunos segundo o tipo de respostas em 1c versus 4d

| Tipo de Resposta |    | Alínea 4d (determinação da medida estatística) |    |   |  | Total |
|------------------|----|--|----|---|--|-------|
|                  |    | C  | PC | I | NR   |       |
| Alínea 1c        | C  | A15,A18, A24, A28                              |    |   | A16, A17, A19, A20, A22, A23, A25, A26, A29 A30 A32 A33, A34 A35 | 18    |
|                  | PC |  |    |   |  | 0     |
|                  | I  |  |    |   | A0   | 1     |
|                  | NR |  |    |   | A14, A21, A27, A31   | 4     |
| Total            |    | 4  | 0  | 0 | 19   | 23    |

Pela Tabela 39 conclui-se que os alunos apresentaram mais dificuldades na alínea 4d (dados organizados em DEQ e questão em aberto) do que na alínea 1c (dados não organizados e questão explícita). Saliente-se que nesta última, mais de metade dos alunos (17) apresentaram respostas corretas, não evidenciando dificuldades na determinação da amplitude interquartil, enquanto que na alínea 4d se registam muito menos respostas corretas (4). Nesta última alínea, o mais frequente são as não respostas (19). Quatro alunos responderam corretamente simultaneamente às duas questões. Não existe qualquer resposta na categoria PC em nenhuma das alíneas.

Pode-se concluir que a maioria dos erros cometidos pelos alunos nas alíneas 1c e 4d refletem dificuldades na análise de DEQ, nomeadamente, em associar a perceção intuitiva da forma da distribuição dos dados com a interpretação dessa forma distribucional por meio de

medidas estatísticas dos dados que suportam essa intuição. Efetivamente, constata-se que: i) para a questão em DEQ, mais de metade dos alunos opta por não responder; ii) os alunos, quando revelam conhecer intuitivamente a noção de dispersão interquartil de uma distribuição (Teste 1 e 2), tendem a não usar medidas estatísticas, obtidas da leitura do DEQ, para justificar a forma distribucional identificada.

#### 6.1.3.2.2. Construção de diagramas de extremos e quartis

Na construção de DEQ analisam-se as respostas às alíneas 2.2 e 4c, confrontando a qualidade das respostas dadas pelos alunos quando os dados são fornecidos numa coleção não organizada de valores numéricos (4c) *versus* quando os dados estão organizados num gráfico de barras. Na Tabela 40 apresenta-se a distribuição dos 23 alunos pelo tipo de resposta dada (C, PC, I) e NR naquelas questões.

Tabela 40 – Distribuição dos alunos segundo o tipo de respostas em 2.2 versus 4c

| Tipo de Resposta |    | Alínea 4c          |                         |     |              | Total |
|------------------|----|--------------------|-------------------------|-----|--------------|-------|
|                  |    | C                  | PC                      | I   | NR           |       |
| Alínea 2.2       | C  | A15, A18, A24, A25 | A21, A28, A30, A35, A22 |     | A26, A29     | 11    |
|                  | PC | A23, A32           | A17, A19, A20, A33      | A34 | A14          | 8     |
|                  | I  |                    | A16                     |     |              | 1     |
|                  | NR |                    |                         |     | A0, A27, A31 | 3     |
| Total            |    | 6                  | 10                      | 1   | 6            | 23    |

Pela Tabela 40 conclui-se que os alunos apresentaram mais dificuldades na alínea 4c (dados não organizados) do que na alínea 2.2 (dados organizados em gráfico de barras). Nesta última, quase metade dos alunos (11) apresentaram respostas corretas, não evidenciando dificuldades na construção do DEQ, enquanto que na alínea 4c se registam menos respostas corretas (6). Quatro alunos responderam corretamente simultaneamente às duas questões. Procurando explorar quais as falhas dos alunos na construção do DEQ, dividiu-se a análise das respostas PC e I em duas atuações chave: determinação correta das medidas estatísticas consideradas no DEQ (extremos e quartis) e posicionamento preciso dos valores dessas medidas no diagrama a construir.

No que concerne à alínea 2.2, verificou-se que dos oito alunos com resposta PC, seis tiveram dificuldades em determinar o 3.º quartil (Q3), de que se destacam as seguintes respostas: determinação incorreta do 3.º quartil e posicionamento incorreto da mediana (A20); determinação incorreta do 3.º quartil e posicionamento incorreto do máximo e do mínimo (A19, A32 e A34); determinação incorreta do 3.º quartil (A17 e A33).

Da análise das duas alíneas, 2.2 e 4c, constata-se que: i) o esboço do DEQ, em geral, não se revelou difícil, sendo claro que o DEQ é determinado por 5 medidas estatísticas: mínimo, Q1, mediana, Q3 e máximo; ii) a determinação do Q3 na alínea 2.2 mostrou-se mais complexa, devido talvez a, nesse caso, o valor a atribuir ao Q3 não ser um valor da coleção de dados observado no gráfico de barras ( $Q3 = 3,5$ ); e iii) perante a necessidade de construir uma escala mais precisa na alínea 4c, devido a uma maior dispersão nas distâncias que separam as 5 medidas que definem o DEQ, essa precisão é tendencialmente negligenciada pelos alunos. Uma vez que, em ambas as questões, os alunos descrevem, em geral, corretamente o conjunto ordenado dos dados, infere-se que a representação dos dados não mostra ser um obstáculo à correta construção de um DEQ.

#### 6.1.3.2.3. Interpretação de diagramas de extremos e quartis

A alínea 2.3 tem como propósito avaliar a percepção e a capacidade de leitura do aluno da distribuição dos dados a partir de um DEQ, pese embora o gráfico de barras do enunciado possa, eventualmente, auxiliar na interpretação que resulte dessa leitura. Em particular, esperava-se que os alunos apontassem a assimetria da distribuição (frisando o enviesamento para a esquerda), comentassem a dispersão da distribuição (indicando o domínio de variação dos dados com a indicação da amplitude total ou da amplitude interquartil), ou ainda discutissem o posicionamento dos quartis (Q1 e Q3, com a referência, por exemplo, de haver pelo menos 75% dos dados não inferiores a Q1 e não superiores a Q3). Nas alíneas 4e e 4f pretendia-se que os alunos comparassem os dois DEQ dados no enunciado, incidindo essa comparação concretamente na simetria (4e) e dispersão (4f) das distribuições, apresentando justificações ou calculando medidas estatísticas que sustentassem as suas conclusões.

Das distribuições dos diferentes tipos de resposta e NR, apresentadas nas Tabelas 41 e 42, depreende-se que existem dificuldades na análise de um DEQ dada a tendência de maior concentração de respostas nas categorias I e NR. Das frequências marginais das Tabelas 41 e 42 verifica-se que não houve respostas corretas e que as respostas dadas contêm justificações não adequadas ou incompletas, originando várias respostas catalogadas como parcialmente corretas (7 em 1b, 6 em 2b e 6 em 2c) e incorretas (6 em 1b, 7 em 2b e 5 em 2c). Quase metade dos alunos optou por não responder (10 em 1b, com 3 deles por não terem construído o diagrama solicitado previamente em 1a, 10 em 2b e 12 em 2c).

Tabela 41 – Distribuição dos alunos segundo o tipo de respostas em 2.3 versus 4e

| Tipo de Resposta |    | Alínea 4e |                            |                          |   | Total |
|------------------|----|-----------|----------------------------|--------------------------|---|-------|
|                  |    | C         | PC                         | I                        | NR  |       |
| Alínea 2.3       | C  |           |                            |                          |   | 0     |
|                  | PC |           | A15, A18, A24,<br>A25, A34 | A22, A28                 |   | 7     |
|                  | I  |           | A33,                       | A17,<br>A23, A32,<br>A35 | A20   | 6     |
|                  | NR |           |                            | A19                      | A16, A0,<br>A14, A21, A26,<br>A27, A29, A30,<br>A31 | 10    |
| Total            |    | 0         | 6                          | 7                        | 10  | 23    |

Da Tabela 41, comparando as categorias de respostas dadas em 2.3 e 4e sobre a dispersão, constata-se que 5 alunos responderam parcialmente correto simultaneamente às duas alíneas e 4 alunos responderam incorretamente também a ambas. Procurando avaliar o tipo de falhas dos alunos na análise do DEQ quanto à dispersão, examinaram-se as 13 respostas dos tipos PC e I em 2.3 e 4e verificando, separadamente, se o aluno tem percepção intuitiva do conceito de dispersão e se utiliza medidas estatísticas adequadas para sustentar as suas observações. Dasquelas 13 respostas, 10 respostas demonstram que os alunos têm a percepção do conceito de dispersão, pela análise das suas respostas, pese embora que apenas 3 o tenham feito quando solicitado explicitamente na alínea 4e. Destes 10, apenas 2 alunos sustentaram a sua resposta com o cálculo da amplitude total (A18) e amplitude interquartil (A34).

Tabela 42 – Distribuição dos alunos segundo o tipo de respostas em 2.3 versus 4f

| Tipo de Resposta |     | Alínea 4f |                               |                  |   | Total |
|------------------|-----|-----------|-------------------------------|------------------|---|-------|
|                  |     | C         | PC                            | I                | NR  |       |
| Alínea 2.3       | C   |           |                               |                  |   | 0     |
|                  | P0C |           | A15,<br>A18, A28, A24,<br>A34 | A25,<br>A22,     |   | 7     |
|                  | I   |           | A23                           | A32,<br>A33, A35 | A17, A20  | 6     |
|                  | NR  |           |                               |                  | A16, A0, A14,<br>A19, A21, A26, A27,<br>A29, A30, A31 | 10    |
| Total            |     | 0         | 6                             | 5                | 12  | 23    |

No que concerne à alínea 4f, pela Tabela 42 verifica-se que houve 6 respostas parcialmente corretas e 5 respostas incorretas. Procurando avaliar o tipo de falhas dos alunos

na análise do DEQ quanto à simetria, examinaram-se as respostas dos tipos PC e I em 1b (13) e 2c (11), verificando, separadamente, se o aluno tem percepção intuitiva do conceito de simetria e se utiliza medidas estatísticas na justificação do tipo de forma (simétrica ou não) da distribuição dos dados. Em 8 respostas há a percepção do conceito de simetria, sendo que 2 alunos o demonstraram quando solicitado explicitamente (em 4f). Daqueles 8, apenas 1 aluno (A18) sustentou a sua percepção com o cálculo de medidas estatísticas adequadas (com base na visualização da forma assimétrica de uma curva imaginária a ajustar ao DEQ). Comparando as respostas às alíneas 2.3, 4e e 4f, verifica-se que apenas 6 alunos foram consistentes, demonstrando conseguir diferenciar (intuitivamente) os conceitos de simetria e dispersão nas três questões. Procede-se agora a uma descrição mais detalhada de algumas das respostas PC ou I.

Da análise das respostas à alínea 2.3, verifica-se que, na categoria das respostas incorretas, a maioria dos alunos apresenta respostas baseadas na análise do gráfico de barras (A17, A20, A23, A32, A33) e o aluno A35 apresenta uma resposta sem rigor que remete para a simetria de forma implícita, sem qualquer justificação válida. Nas duas situações os alunos revelaram não ter a percepção intuitiva de dispersão e de simetria.

Na categoria de respostas parcialmente corretas, da alínea 2.3, os alunos apresentam apenas uma das duas conclusões pretendidas, dando lugar, assim, a dois tipos de respostas incompletas: i) conclusão atendendo à simetria da distribuição, pela análise do DEQ de dois alunos, em que um (A18) apresenta uma sustentação válida e o outro (A28) conclui, apenas em termos processuais, sobre a dispersão; ii) três alunos (A15, A25, A34) optam por referir a simetria na sua análise, mas sem qualquer sustentação válida das observações; ou ainda, dois alunos (A22, A24) referem-se aos dois conceitos, no entanto, não apresentam uma sustentação adequada. Salienta-se que os alunos A15, A25 e A34 apresentam simultaneamente dificuldades na análise dos diagramas relativamente à dispersão, em 2.3 e 4e, com justificações pouco rigorosas e sem indicação de medidas estatísticas.

Da análise das respostas à alínea 4e, observou-se que 6 alunos (A15, A18, A23, A25, A33, A34) referem de forma intuitiva a noção de dispersão, sem indicação de medidas estatísticas decorrentes da observação dos DEQ. Nesta mesma questão, mas na categoria de respostas incorretas, 3 alunos (A28, A32, A35) comparam os dois DEQ e concluem, erradamente, que a dispersão é igual nos dois; e 4 alunos (A17, A19, A22, A24,) apresentam respostas ininteligíveis, revelando dificuldades em reconhecer as noções de simetria e dispersão.



Procedendo-se agora à análise das respostas parcialmente corretas e incorretas da alínea 4f, verificou-se que 6 alunos (A15, A18, A23, A24, A28, A34) responderam parcialmente correto, por falta de sustentação explícita do que referem, já que não indicam qualquer medida estatística e, destes, 5 (A15, A18, A24, A28, A34) apresentam respostas PC às duas alíneas, 2.3 e 4f; 5 alunos (A22, A25, A32, A33, A35) respondem incorretamente e, destes, 3 (A32, A33, A35) respondem incorretamente às duas alíneas simultaneamente. Nesta categoria há a salientar que 3 alunos (A22, A25, A32) trocam a análise da simetria solicitada pela análise da dispersão; e ainda, há dois alunos (A33, A35) que apresentam respostas incompreensíveis, revelando dificuldades na noção de simetria.

Em síntese, os erros cometidos pelos alunos nas alíneas 2.3, 4e e 4f refletem dificuldades na análise de DEQ, nomeadamente, em associar a percepção intuitiva da forma da distribuição dos dados, resultante da leitura de um DEQ, com a interpretação dessa forma distribucional por meio de medidas estatísticas dos dados que possam suportar essa intuição. Efetivamente, constata-se que: i) para cada uma daquelas questões, quase metade dos alunos opta por não responder; ii) os alunos, quando revelam conhecer intuitivamente a noção de simetria e/ou dispersão de uma distribuição tendem a não usar medidas estatísticas, obtidas da leitura do DEQ, para justificar a forma distribucional identificada; e, iii) as dificuldades detetadas não dependem do rigor da representação gráfica do DEQ, já que estas surgem quer quando o DEQ é apresentado no próprio enunciado, quer quando este é construído originalmente pelo próprio aluno.

Refira-se que no caso dos argumentos intuitivos, salienta-se que os alunos recorrem às características do DEQ para avaliar a existência ou ausência de simetria e dispersão. Relativamente à simetria, os alunos focam-se em duas características: 1) observação da distância entre a linha indicadora da mediana e os lados do retângulo (distância entre a mediana e os quartis); 2) observação do comprimento das linhas que saem dos lados do retângulo (comprimento das linhas que unem os quartis Q1 e Q3, aos extremos). Na primeira situação associam a simetria da distribuição a uma linha que constroem sobre o DEQ, cuja configuração associa a uma “baleia” e, de acordo com a sua posição, optam pela existência de simetria ou de assimetria. A distribuição é simétrica quando a linha descreve o gráfico da distribuição Normal (a “baleia” encontra-se de frente); quando a curva deixa de ser simétrica, os alunos referem a existência de enviesamento: para a direita, quando a mediana está mais próxima de Q1 (a “cabeça da baleia” localiza-se mais à esquerda e a cauda mais afastada da mediana para a direita), ou para a esquerda quando a mediana está mais próxima de Q3 (a “cabeça da baleia” localiza-se mais à direita e a cauda mais afastada da mediana para a

esquerda), sendo sempre o valor mais alto da curva o correspondente a Q2; na segunda situação limitam-se a verificar se os comprimentos da distância dos quartis aos extremos e se esta é igual, a distribuição é simetria ou assimetria, se a distância é diferente. No caso da dispersão, os alunos limitam-se a observar o comprimento dos retângulos, atribuindo a menor dispersão aos retângulos mais curtos e a maior dispersão aos retângulos mais compridos. Em qualquer caso, os alunos não acautelam a escala utilizada na construção do DEQ, nem a amplitude interquartil, quando procedem à análise comparativa de duas distribuições.

## 6.2. Síntese

Durante a intervenção de ensino os alunos foram superando gradualmente algumas dificuldades diagnosticadas na fase de diagnose (TD), tais como na ordenação prévia dos dados na determinação da mediana, melhoraram a aplicação do algoritmo na determinação da mediana e da média, com dados em contexto gráfico ou tabelar, como se pode constatar nas Tabelas 29 (T1c, T2d), 30 e 31 (T5d, T6c, T7b2), 32 (T9a, T10b), 33 (T11a2, T11a6) e 34 (T16b). Há, no entanto, alunos que continuam a apresentar respostas incorretas ou nem sequer respondem a estas alíneas, denotando alguma falta de trabalho e de empenho, já que, no final de cada aula, as respostas a cada uma das tarefas foram alvo de uma análise cuidada, através de debate em grande grupo, onde cada díade apresentava a sua resolução e aquelas que se revelaram corretas foram registadas nos cadernos dos alunos. Os resultados alcançados durante a implementação, relativamente às medidas de localização, análise gráfica e tabelar, são corroborados com os obtidos na avaliação de conhecimentos, no teste final, como se pode verificar na Tabela 38, na questão 1 e questão 2. No entanto, mantêm-se as dificuldades relativas à discussão e escolha da medida estatística que melhor representa a distribuição num determinado contexto (Tabela 29, T3), já que os alunos apresentam muitas dificuldades em justificar as suas decisões, já que a maioria dos alunos (90%) respondem incorretamente ou não respondem às alíneas T3b e T3c.

Quando os dados estavam organizados num gráfico circular, os alunos revelaram grande dificuldade em responder de forma correta às questões, como já tinha sido constatado na fase de diagnose. Este tipo de gráfico começou a ser estudado pelos alunos no segundo ciclo (6.º ano) e a sua representação e análise são frequentemente utilizadas por outras disciplinas do currículo do 6.º e do 7.º ano da escolaridade, nas disciplinas de Ciências da Natureza, Ciências Naturais e Geografia. Se de início a utilização deste tipo de gráfico parecia contribuir para facilitar o trabalho das Díades, na realidade revelou-se complicado, como se pode constatar pelos resultados da T7, registados na Tabela 31. Em compensação, os alunos melhoraram a

interpretação de dados quando estes estavam em contexto de gráficos de barras (Tabela 30: T5; Tabela 32: T10; Tabela 34: T16) e gráfico de pontos (Tabela 29: T2e; Tabela 30: T4; Tabela 33: T11e). Estes resultados foram corroborados no teste final, como se pode verificar pelos resultados registados na Tabela 38, relativamente às alíneas 2a, 2b, 2c.

Em relação aos conceitos “quartis”, “amplitude interquartil” e “DEQ”, abordados pela primeira vez durante a intervenção de ensino, constata-se que os alunos não apresentaram dificuldades na determinação dos quartis (Tabela 32: T8T9, T11a5, T11a7 e T12) nem na construção deste tipo de representação (Tabela 34: T11c, T15 e T18), no entanto manifestam mais dificuldade na análise dos DEQ (Tabela 33: T11d; Tabela 34: T13, T14, T17, T18; Tabela 37: T19) e na determinação da amplitude interquartil (Tabela 32: T9c3, T10c; Tabela 33: T11a4). Apesar disso, os alunos revelaram que a determinação desta amplitude se foi tornando mais simples à medida que a foram trabalhando.

Na fase de avaliação de conhecimentos e no que concerne à comparação das respostas entre os problemas – determinação da medida estatística amplitude interquartil (1c e 4d), construção de DEQ (2.2 e 4c) e sua análise (1b, 2b e 2c) – pode concluir-se que a maior dificuldade dos alunos ficou patente na determinação da amplitude interquartil (4d), enquanto argumentos para sustentar afirmações, dos quartis (2.2) e do extremo superior (4c), bem como a falta de rigor na construção da escala, que conduziu a várias imprecisões na construção do DEQ. Observou-se maior facilidade na construção do DEQ em contexto gráfico (11 respostas corretas) do que com dados não organizados (6 respostas corretas), bem como na determinação da amplitude interquartil, quando a questão era explícita, e em dados não organizados (1c).

Relativamente à interpretação das características das distribuições, pela análise do DEQ, conclui-se que os alunos apresentaram um ligeiro melhor desempenho na questão 2 do que na questão 4, uma vez que os dados estão organizados num gráfico de barras, já muito trabalhado, o que lhes permite socorrerem-se deste para analisar a distribuição, em detrimento do DEQ. Esta situação remete-nos para a dificuldade de interpretar o DEQ, como já referido por Baker et al. (2004), aquando de um estudo envolvendo alunos do 8.º ano.

A análise comparativa de distribuições pelos respetivos DEQ revelou-se muito difícil para a maioria dos alunos, com muitas dificuldades em se expressarem. Este tipo de análise permite estabelecer semelhanças e diferenças entre padrões das distribuições, apesar de os alunos não conseguirem fazê-lo com facilidade. Seria necessário talvez mais tempo para os alunos assimilarem bem os conceitos de simetria e dispersão, associados àquela representação gráfica recém-estudada, como alertam Baker et al. (2004). Tais dificuldades foram visíveis

nas respostas à alínea 2b, quando eles compararam a dispersão dos dois DEQ associados a duas distribuições com o mesmo número de dados, que tinham que ser iguais ou semelhantes, apesar de não o serem. Moraes e Fernandes (2011) apontaram esta como sendo a maior dificuldade sentida pelos alunos.

A maior garantia da compreensão, construção, análise e interpretação do diagrama de extremos e quartis, por ser rico em conceitos, é ter-se um conhecimento sólido sobre os conceitos que lhes servem de suporte: mínimo, primeiro quartil, mediana, terceiro quartil e máximo.

Na fase posterior à avaliação escrita de conhecimentos (TF), e após a análise das resoluções dos alunos, houve necessidade de entrevistar alguns alunos para clarificar algumas respostas registadas no teste final. Dessas entrevistas, verificou-se que a maioria dos alunos era conhecedor dos conceitos trabalhados e oralmente expressaram-se bastante bem sobre os mesmos, no entanto, no momento da prova escrita não conseguiram fazê-lo de forma clara e autónoma.

O desempenho dos alunos, enquanto elementos da díade, foi positivo, já que os alunos comunicaram matematicamente e produziram trabalho colaborativo e partilharam as suas respostas com o colega e a turma. Contudo, os resultados apontavam para a necessidade de se proceder a ajustes em algumas díades, mas tal não se concretizou devido a conflitos existentes entre certos elementos da turma, mencionados pela docente titular, tendo em vista privilegiar a harmonia e estabilidade comportamental da turma. A esses grupos (G1, G2 e G3) foram dedicados mais momentos de apoio por parte dos docentes, incentivando os alunos a pesquisar as respostas no caderno, questionando-os sobre os processos que iam construindo por vezes. Apesar disso, os alunos revelaram uma grande resistência em trabalharem autonomamente (sobretudo G1 e G3), daí apresentarem muitas não respostas, pois os alunos só trabalhavam na presença do docente. Os alunos destes dois grupos não entregaram o trabalho individual (T19) e, destes quatro alunos, três deles (A0, A21 e A27) obtiveram os piores resultados no TF, refletindo a postura revelada ao longo de toda a implementação. Outros dois alunos (A29 e A31) também obtiveram resultados desfavoráveis no TF, mas destes apenas o aluno A31 se revelou pouco trabalhador.

Em termos globais, os resultados apontam para uma melhoria gradual na aprendizagem dos alunos, desde a fase de diagnóstico, passando pela fase de implementação e culminando na fase de avaliação escrita e oral.

## AVALIAÇÃO DA INTERVENÇÃO DE ENSINO

Este capítulo foca-se na avaliação do processo de implementação de ensino e na aplicação das ferramentas da idoneidade didática do conhecimento da matemática segundo o EOS. Numa primeira fase, elabora-se um sistema de indicadores empíricos de idoneidade, associados às orientações curriculares que representam significados de referência do saber estatístico de acordo com três documentos curriculares: Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (ME-DEB, 2001), Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008) e Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013); aplica-se esse instrumento à Intervenção de Ensino, onde foi lecionado o tema de Estatística, do 8.º ano, “Diagramas de extremos e quartis”. Na segunda fase avaliam-se as percepções e atitudes sobre Estatística após a implementação do ensino, comparando os resultados atingidos, pela turma, com os recolhidos na fase de diagnose. Na terceira fase analisa-se a idoneidade do processo de estudo com recurso ao EOS, em dois momentos: *a priori* e *a posteriori* do processo de ensino.

### 7.1. Indicadores de idoneidade didática da intervenção de ensino

Nesta seção avaliam-se e detalham-se os processos de instrução matemática, justificam-se os aspetos a serem melhorados na aplicação de quatro dos seis critérios de idoneidade didática (Epistémica, Cognitiva, Interacional, Mediacional, Emocional, Ecológica), propostos por Godino, Bencomo, Font e Wilhelmi (2006), como foi referido no Capítulo II (pp.42 - 46).

Godino (2011) propõe um “guia para a avaliação da idoneidade didática de processos de ensino da matemática” que inclui um conjunto de indicadores de idoneidade didática no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Para o EOS, a idoneidade didática é o critério sistémico que avalia a adequabilidade de um processo de estudo do projeto educativo

através da concordância entre os significados pessoais construídos pelos alunos e os significados institucionais pretendidos e/ou implementados (Godino, Bencomo, Font e Wilhelmi, 2006; Godino, 2013).

Com base nos níveis de análise propostos pelo EOS, caracterizam-se as práticas realizadas no processo de estudo, descrevem-se as configurações dos objetos e processos matemáticos e didáticos presentes nessas práticas e identificam-se as normas reguladoras do processo de estudo, o que valoriza a idoneidade didática ao permitir identificar aspetos transmissores de práticas adequadas. Segundo destaca Godino (2011), a noção de idoneidade didática pode ser utilizada na análise de um processo de estudo pontual, como seja uma tarefa específica, ou no planeamento e desenvolvimento de uma unidade didática, como é o caso do presente estudo.

A introdução de seis critérios parciais, relacionados simultaneamente com as dimensões características e condicionadoras de qualquer processo de aprendizagem, possibilita avaliar a idoneidade didática do processo de estudo nas facetas epistémica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica. Embora distintas, estas seis facetas estão inter-relacionadas, já que na realização de uma tarefa matemática o professor deve mobilizar os diversos significados postos em jogo (faceta epistémica), bem como utilizar os distintos procedimentos e apresentar diversas justificações, tendo o cuidado de as adaptar aos conhecimentos, capacidades e interesses dos alunos (facetas instrucional, cognitiva e afetiva) e gerir os recursos de forma adequada (faceta mediacional). Para cada uma das facetas detalha-se uma série de indicadores gerais (Godino, 2013) que serão descritos nas subsecções seguintes, particularizando-as para o tema em que nos centramos.

#### 7.1.1. Idoneidade epistémica da intervenção de ensino

A faceta epistémica relaciona-se com o conteúdo estatístico em estudo e sustentado numa visão epistemológica focada nas situações-problema propostas e nas práticas expressas que visam a resolução dessas situações, contemplando as configurações de objetos e processos intervenientes e emergentes dessas práticas matemáticas.

Nesta dimensão estão incluídas as orientações curriculares que foram escolhidas, algumas de conhecimento comum e outras de conhecimento avançado (Godino, 2009) matemático-estatístico, que os alunos devem dominar, compreender e aplicar durante o ensino básico (1.º, 2.º e 3.º ciclo), o que no caso concreto deste estudo corresponde ao 8.º ano de escolaridade. Quanto aos indicadores associados a uma ou mais orientação curricular (OC),

para avaliar os processos de resolução dos alunos, foi tido em conta, simultaneamente, o conteúdo estatístico e matemático.

Nos Quadros 36, 37 e 38 apresenta-se, para cada componente, as orientações curriculares e indicadores formulados.

Quadro 36 – Análise da idoneidade epistémica da intervenção de ensino nas componentes situação-problemas e linguagem.

| Componentes        | Orientações Curriculares   | Indicadores   |
|--------------------|--|---|
| Situações-problema | <p>1. A resolução de problemas não só constitui um objetivo da aprendizagem matemática, como é também um importante meio pelo qual o aluno aprende matemática (NCTM, 2008, p. 57).</p> <p>2. Resolver problemas analisando dados representados em tabelas, diagramas ou gráficos e a determinação de frequências absolutas, moda, extremos e amplitude (MEC, 2013, p.21) permitem desenvolver destreza em capacidades específicas.</p> <p>3. Resolver problemas envolvendo a análise de um conjunto de dados a partir da respetiva média, moda e amplitude (MEC, 2013, p. 46).</p> <p>4. Resolver problemas envolvendo a média e a moda de um conjunto de dados, interpretando o respetivo significado no contexto de cada situação (MEC, 2013, p. 36).</p> <p>5. Adotar estratégias adequadas à resolução de problemas e à tomada de decisões (ME- DEB, 2001, p. 15).</p> | <p>I1. Propõem-se situações-problema que não só constituem um objetivo da aprendizagem matemática, como são também um importante meio pelo qual o aluno aprende matemática.</p> <p>I2. São propostas situações-problema com dados representados em tabelas, diagramas ou gráficos e a determinação de frequências absolutas, medidas de localização e de dispersão que permitem desenvolver destrezas e capacidades específicas.</p> <p>I3. São propostas situações-problema em que a análise de um conjunto de dados numéricos é efetuada a partir da respetiva média, mediana, moda e amplitude.</p> <p>I4. São propostas situações de ordenação de dados quantitativos para a determinação dos quartis, por forma a representá-los em diagramas de extremos e quartis, permitindo reconhecer que a percentagem de dados não inferiores (respetivamente não superiores) ao primeiro (respetivamente terceiro) quartil é pelo menos 75%.</p> |
| Linguagem          | <p>1. Utilizar formas de comunicar diversificadas, adequando linguagens e técnicas aos contextos e às necessidades (ME- DEB, 2001, p. 18).</p> <p>2. Representar um mesmo conjunto de dados utilizando várias representações gráficas, selecionando a mais elucidativa de acordo com a informação que se pretende transmitir (MEC, 2013, p. 46).</p> <p>3. Ter rigor de linguagem, assim como do formalismo, devendo corresponder a uma necessidade sentida e não arbitrária (ME-DEB, 2001, p. 70).</p> <p>4. Aplicar e adotar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas/tarefas (NCTM, 2008, p. 212).</p> <p>5. Ter sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada (ME-DEB, 2001., p. 70).</p>   | <p>I1. Utilizam-se diferentes registos e representações para descrever as situações-problema (verbal, simbólica, tabelas, diagramas, gráficos, etc.), adequando linguagens e técnicas aos contextos e às necessidades.</p> <p>I2. Utiliza-se um nível linguístico adequado aos alunos, sem por em causa o rigor da linguagem e o formalismo e correspondendo a uma necessidade sentida.</p> <p>I3. Promove-se a aplicação e adoção de uma diversidade de estratégias para resolver problemas/tarefas, sendo adequadas aos alunos a que se destinam.</p> <p>I4. São propostas situações-problema que implicam a aplicação de algoritmos, utilização de termos precisos e linguagem Matemática.</p> <p>I5. Apresentam-se tarefas que remetem para análise de resultados, avaliação e justificação de argumentos.</p>  |

Quadro 37 – Análise da idoneidade epistêmica da intervenção de ensino nas componentes regras e argumentos.

| Componentes                                       | Orientações Curriculares  | Indicadores  |
|---|---|--|
| Regras (definições, propriedades e procedimentos) | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Resolver problemas envolvendo a análise de dados representados em gráficos diversos (MEC, 2013, p. 46) e em diagramas de extremos e quartis (MEC, 2013, p. 69).</li> <li>2. Praticar procedimentos não deve constituir uma atividade preparatória, repetitiva, isolada e sem significado; porém uma prática compreensiva pode promover a aquisição de destrezas utilizáveis com segurança e autonomia (ME-DEB, 2001, p. 70).</li> <li>3. Dominar e compreender as noções de moda, média aritmética e mediana, bem como a aptidão para determiná-las e para interpretar o que significam em situações concretas (ME-DEB, 2001, p. 65).</li> <li>4. Aplicar os algoritmos da média e da mediana e determiná-las em dados representados de diversas formas (MEC, 2013, p. 59), isto é, ser capaz de aplicar procedimentos, conceitos e processos (NCTM, 2008, p. 23).</li> <li>5. Identificar a «média» de um conjunto de dados numéricos como o quociente entre a soma dos respectivos valores e o número de dados (MEC, 2013, p. 36).</li> <li>6. Representar conjuntos de dados quantitativos em diagramas de extremos e quartis e identificar, considerado um conjunto de dados numéricos, o «segundo quartil» como a mediana desse conjunto (...) respetivamente por Q1, Q2 e Q3 (MEC, 2013, p. 69).</li> <li>7. Identificar a «amplitude interquartil» (...) e designar por «medidas de dispersão» a amplitude e a amplitude interquartil (MEC, 2013, p. 69).</li> <li>8. Reconhecer, considerado um conjunto de dados numéricos, que pelo menos metade dos dados têm valores não superiores à mediana. (MEC, 2013, p. 59).</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>I1. As definições e procedimentos são formulados com clareza e correção, adaptados ao nível educativo a que se destinam.</li> <li>I2. São propostas situações com o objetivo de praticar procedimentos, como prática compreensiva, que promova a aquisição de destrezas utilizáveis com segurança e autonomia.</li> <li>I3. São propostas situações com o objetivo de dominar e compreender as noções de moda, média, mediana e quartis, bem como a aptidão para determiná-las e para interpretar o que significam em situações concretas.</li> <li>I4. São apresentadas situações para aplicar os algoritmos da média e da mediana e determiná-las em dados representados de diversas formas.</li> <li>I5. São apresentados conjuntos de dados não organizados e organizados segundo um diagrama de extremos e quartis para identificar a «amplitude interquartil» (...) e designar por «medidas de dispersão» a amplitude e a amplitude interquartil.</li> <li>I6. Apresentam-se conjuntos de dados numéricos que permitem reconhecer que pelo menos metade dos dados têm valores não superiores à mediana e reconhecer que a «mediana» é o valor central no caso de ser ímpar o número total de dados (valor do elemento de ordem <math>\frac{n+1}{2}</math> da sequência ordenada dos dados), ou a média aritmética dos dois valores centrais (valores dos elementos de ordens <math>\frac{n}{2}</math> e <math>\frac{n}{2}+1</math> da sequência ordenada dos dados) no caso de ser par o número total de dados.</li> <li>I7. Considera-se que um dado conjunto de <math>n</math> dados numéricos (sendo <math>n</math> ímpar) é possível reconhecer e identificar o “primeiro quartil” (respetivamente “terceiro quartil”) como a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior (respetivamente superior) a <math>\frac{n+1}{2}</math> na sequência ordenada do conjunto inicial de dados; um dado conjunto de <math>n</math> dados numéricos (sendo <math>n</math> par) é possível reconhecer e identificar o “primeiro quartil” (respetivamente “terceiro quartil”) como a mediana do subconjunto de dados de ordem inferior (respetivamente superior) a <math>\frac{n}{2}</math> e <math>\frac{n}{2}+1</math> na sequência ordenada do conjunto inicial de dados.</li> </ol> |
| Argumentos  | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação (MEC, 2013, p. 47).</li> <li>2. Ler e interpretar tabelas e gráficos à luz das situações a que dizem respeito e para comunicar os resultados das interpretações feitas (ME-DEB, 2001, p. 64).</li> <li>3. Recolher e organizar dados relativos a uma situação ou a um fenómeno e para os representar de modo adequado, nomeadamente através de tabelas, gráficos e utilizar as novas tecnologias (ME-DEB, 2001, p. 64).</li> <li>4. Decidir quais das medidas de tendência central são mais adequadas para caracterizar uma dada situação (ME-DEB, 2001, p. 65).</li> </ol>   | <ol style="list-style-type: none"> <li>I1. As explicações, justificações e argumentações dos alunos são coerentes ainda que eventualmente mais informais do que as fornecidas pelo professor, no entanto apresentam os diversos passos utilizados nessa explicação, evocando uma propriedade já conhecida.</li> <li>I2. Promovem-se situações de leitura e de interpretação de tabelas e gráficos à luz das situações a que se referem, comunicando os resultados das interpretações feitas.</li> <li>I3. Promovem-se situações cujo objetivo é decidir e argumentar sobre quais das medidas de tendência central são mais adequadas para caracterizar uma dada situação.</li> <li>I4. Promovem-se situações para comparar distribuições com base nas medidas de tendência</li> </ol>  |



5. Comparar distribuições com base nas medidas de tendência central e de localização, a análise de dispersão e simetria dos dados. (ME-DEB, 2001, p. 65).
6. Saber justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida (MEC, 2013, p. 47)

Quadro 38 – Análise da idoneidade epistêmica da intervenção de ensino na componente relações.

| Componentes | Orientações Curriculares  | Indicadores  |
|-------------|---|--|
| Relações    | <p>1. Identificar e articular saberes e conhecimentos para compreender uma situação ou problema (ME-DEB, 2001, p. 17)</p> <p>2. Reconhecer e usar conexões entre ideias matemáticas (NCTM, 2008, p.71) e compreender as ideias matemáticas que se intersejam e se constroem umas sobre as outras para produzir um todo coerente (NCTM, 2018, p. 247).</p> <p>3. Representar um mesmo conjunto de dados utilizando várias representações gráficas, selecionando a mais elucidativa de acordo com a informação que se pretende transmitir (MEC, 2013, p. 46).</p> | <p>11. Os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições, etc.) estão relacionados e articulados.</p> <p>12. As várias vertentes das medidas estatísticas em estudo estão presentes e articulam-se (aplicação medidas de tendência central, dispersão e de simetria).</p> |

A idoneidade epistêmica de um processo de estudo indica o grau de representatividade dos significados institucionais implementados (ou pretendidos) relativamente a um significado de referência. Para tal, procede-se à análise da forma como o processo se concretizou, com cada um dos objetos envolvidos no processo de estudo: analisam-se as situações-problema, verificando-se a sua coerência e a representatividade das tarefas, quer na diversidade de contextos, quer na exercitação e aplicação; avalia-se a adequação dos objetos linguísticos através das situações de expressão e interpretação e da utilização da linguagem adequada ao público-alvo; analisa-se e estrutura-se as situações propostas, que geram a discussão sobre definições, regras, enunciados e procedimentos fundamentais do tema, tendo em conta o significado de referência e respeitando o nível educativo a que se dirigem; contempla-se os momentos de validação e avaliação do grau de adequação das explicações formuladas, da articulação e da organização dos objetos matemáticos.

#### 7.1.2. Idoneidade cognitiva da intervenção de ensino

Esta faceta é referente a regras de significado estatístico, a implementar, e a conexões com a área de desenvolvimento potencial dos alunos, bem como a quaisquer discrepâncias entre os significados pessoais e os significados institucionais dos objetos matemáticos. Nos Quadros 39 e 40 referenciam-se as orientações curriculares e os respetivos indicadores.

Quadro 39 – Análise da idoneidade cognitiva da intervenção de ensino nas componentes conhecimentos prévios e diferenças individuais.

| Componentes  | Orientações Curriculares  | Indicadores   |
|--|---|---|
| <p style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">Conhecimentos prévios</p> | <p>1. A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais (MEC, 2013, p. 5).</p> <p>2. Identificar a “média” de um conjunto de dados numéricos como o quociente entre a soma dos respetivos valores e o número de dados (MEC, 2013, p. 36), a moda de um conjunto de dados qualitativos/quantitativos discretos como a categoria/classe com maior frequência absoluta e o «máximo» e o «mínimo» de um conjunto de dados numéricos, respetivamente como o maior e o menor valor desses dados, e a «amplitude» como a diferença entre o máximo e o mínimo (MEC, 2013, p. 21).</p> <p>3. Determinar a mediana de um conjunto de dados numéricos (MEC, 2013, p. 59).</p> <p>4. Compreender as noções de moda, média aritmética e mediana, bem como ser capaz de determiná-las e interpretar o que significam em situações concretas (ME-DEB, 2001, p. 65).</p> <p>5. Estender a um conjunto mais vasto uma definição já conhecida; nesse caso o aluno deve saber definir o conceito como se indica, ou de forma equivalente, reconhecendo que se trata de uma generalização (MEC, 2013, p. 69) e estender uma propriedade a um universo mais alargado (MEC, 2013, p. 69).</p> <p>6. Representar dados utilizando tabelas e gráficos, como diagrama de pontos e gráficos de barras e de linhas (NCTM, 2008, p. 204).</p> <p>7. Comparar diferentes representações dos mesmos dados e avaliar a eficácia de cada uma na transmissão dos aspetos mais importantes dos dados (NCTM, 2008, p. 204).</p> <p>8. Representar, tratar e analisar conjuntos de dados (MEC, 2013, p.59) e representar dados através de objetos concretos, imagens e gráficos (NCTM, 2008, p. 126).</p> <p>9. Os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios (NCTM, 2008, p. 434).</p> | <p>11. Houve abordagem prévia de atividades que permitem compreender conceitos base das medidas de localização, aplicar e resolver situações através da leitura e interpretação de enunciados, mobilizando conhecimentos de factos, conceitos e relações, seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais.</p> <p>12. Realizaram-se atividades que permitem estenderem a um conjunto mais vasto uma definição já conhecida.</p> <p>13. Os conteúdos de partida são acessíveis e permitem estender uma propriedade a um universo mais alargado.</p> <p>14. Na sequência didática as inclusões das tarefas permitem o emergir das dificuldades e obstáculos mais comuns.</p> |

|                        |   |   |
|------------------------|---|---|
| Diferenças individuais | <p>1. Apoiar o aluno na escolha de linguagens que melhor se adequam aos objetivos visados em articulação com os seus interesses (ME-DEB, 2001, p. 18).</p> <p>2. Propor situações de intervenção, individual e/ou coletiva, que constituam tomadas de decisão face a um problema em contexto.” (ME- DEB, 2001, p. 23).</p> <p>3. Confrontar diferentes perspetivas face a um problema de modo a tomar decisões adequadas (ME- DEB, 2001, p. 23).</p> <p>4. Manifestar sentido de responsabilidade, de flexibilidade e de respeito pelo seu trabalho e pelo dos outros (ME- DEB, 2001, p. 25).</p> | <p>11. Ocorreram momentos de apoio aos alunos na escolha de linguagens que melhor se adequavam aos objetivos visados.</p> <p>12. Houve confronto de diferentes perspetivas face a um problema de modo a uma tomada de decisões adequadas.</p> |
|------------------------|---|---|

Quadro 40 – Análise da idoneidade cognitiva da intervenção de ensino nas componentes diferenças individuais (continuação) e aprendizagens.

| Componentes                        | Orientações Curriculares   | Indicadores   |
|------------------------------------|--|---|
| Diferenças individuais             | <p>5. Comunicar, discutir e defender descobertas e ideias próprias, dando espaço de intervenção aos seus parceiros (ME-DEB, 2001, p. 25).</p> <p>6. Todos os alunos devem usar medidas de tendência central, principalmente a mediana, e compreender o que cada uma indica, ou não, acerca do conjunto de dados (NCTM, 2008, p. 204).</p> <p>7. O ensino efetivo da matemática requer a compreensão daquilo que os alunos sabem e precisam de aprender, bem como o estímulo e apoio para que o aprendam corretamente (NCTM, 2008, p. 432).</p>   | <p>13. Ao manifestar sentido de responsabilidade, de flexibilidade e de respeito pelo seu trabalho e dos outros houve lugar à comunicação, à discussão e à defesa de descobertas e ideias próprias, que deram espaço à intervenção dos seus parceiros.</p> <p>14. Proporcionam-se atividades de reforço e de ampliação de conhecimentos.</p> <p>15. Promoveu-se o sucesso de todos os alunos.</p>   |
| Aprendizagens (avaliação sumativa) | <p>1. Avaliar a adequação dos saberes e procedimentos mobilizados e proceder a ajustamentos necessários (ME-DEB, 2001, p. 17).</p> <p>2. Avaliar e controlar o desenvolvimento das tarefas que se propõem realizar (ME- DEB, 2001, p. 24).</p> <p>3. A avaliação deve apoiar a aprendizagem de uma matemática relevante e fornecer informações úteis quer para os professores quer para os alunos (NCTM, 2008, p. 435).</p> <p>4. A avaliação (de carácter nacional, de escola, de turma e de aluno) deve contribuir para a orientação do ensino, de modo a que se possam superar, em tempo útil e de modo apropriado, dificuldades de aprendizagem identificadas e, simultaneamente, reforçar os progressos verificados (MEC, 2013, p. 29).</p> | <p>11. A avaliação adequada dos saberes e procedimentos mobilizados permitem ajustes necessários, contemplam distintos níveis de compreensão e de competências.</p> <p>12. Ao avaliar e controlar o desenvolvimento das tarefas que se propõem, utilizam-se os resultados da avaliação.</p> <p>13. As várias formas de avaliação indicam que os alunos alcançam conhecimento e competências estatísticas.</p> <p>14. A avaliação tem em conta os diferentes níveis de compreensão e competências.</p> |

O grau de idoneidade cognitiva é medido pelo grau de adequação à zona de desenvolvimento potencial dos alunos, relativamente à proximidade entre os significados pessoais e os significados pretendidos ou implementados, durante o processo de aprendizagem. É nesta dimensão que se aprecia a existência dos conhecimentos prévios necessários ao tema em estudo, se os significados pretendidos estão ao alcance dos, se são necessárias atividades de reforço ou adaptações curriculares individualizadas e, ainda, se as várias formas de avaliação permitem revelar a adequação dos conhecimentos espectáveis.

### 7.1.3. Idoneidade interacional da intervenção de ensino

Nesta faceta incluem-se as orientações curriculares que referem as normas de interação entre alunos-professor e entre alunos, desenvolvendo a autonomia, a capacidade de identificar e resolver conflitos de significado. No Quadro 41 podemos constatar as orientações curriculares e os seus respetivos indicadores.

Quadro 41 – Análise da idoneidade interacional da intervenção de ensino.

| Componentes                 | Orientações Curriculares  | Indicadores   |
|-----------------------------|---|---|
| Interações docente-discente | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Organizar atividades cooperativas de aprendizagem, orientadas para integração e troca de saberes (ME-DEB, 2001, p. 17).</li> <li>2. Organizar atividades cooperativas de aprendizagem (ME-DEB, 2001, p. 21).</li> <li>3. Apoiar o aluno na descoberta das diversas formas de organização da sua aprendizagem (ME-DEB, 2001, p. 21).</li> </ol>  | <ol style="list-style-type: none"> <li>11. Organizam-se atividades cooperativas de aprendizagem, orientadas para a integração e troca de saberes.</li> <li>12. O professor apoia o aluno na descoberta das diversas formas de organização da sua aprendizagem.</li> <li>13. O tema foi apresentado de forma adequada.</li> </ol>                                    |
| Interação entre discentes   | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Relacionar harmoniosamente o corpo com o espaço numa perspectiva pessoal e interpessoal promotora da saúde e da qualidade de vida. (ME- DEB, 2001, p. 15).</li> <li>2. Participar em atividades interpessoais e de grupo, respeitando normas, regras e critérios de atuação, de convivência e de trabalho em vários contextos (ME-DEB, 2001, p. 25).</li> <li>3. Comunicar o seu pensamento matemático de forma coerente e clara aos colegas, professores e outros (NTCM, 2008, p. 226).</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>11. Favorece-se a participação em atividades interpessoais e de grupo, respeitando normas, regras e critérios de atuação, de convivência e de trabalho em vários contextos.</li> <li>12. Promove-se a comunicação do pensamento matemático individual de forma coerente e clara aos alunos, professores e outros.</li> </ol> |
| Autonomia                   | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Realizar tarefas de forma autónoma, responsável e criativa (ME- DEB, 2001, p. 15).</li> <li>2. Adotar metodologias personalizadas de trabalho e de aprendizagem adequadas a objetivos visados (ME-DEB, 2001, p. 15).</li> </ol>   | <ol style="list-style-type: none"> <li>11. São proporcionados momentos em que o aluno tem a responsabilidade da gestão das atividades, realizando-as de forma autónoma, responsável e criativa.</li> <li>12. São adotadas metodologias personalizadas de trabalho e de aprendizagem adequadas a objetivos visados.</li> </ol>                                       |
| Avaliação formativa         | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Prestar atenção a situações e problemas manifestando envolvimento e curiosidade (ME- DEB, 2001, p. 17).</li> <li>2. Autoavaliar e ajustar os métodos de trabalho à sua forma de aprender e aos objetivos visados (ME- DEB, 2001, p. 21).</li> </ol>   | <ol style="list-style-type: none"> <li>11. O progresso cognitivo dos alunos é acompanhado de forma sistemática.</li> <li>12. Autoavaliar e ajustar os métodos de trabalho à sua forma de aprender e aos objetivos visados.</li> </ol>   |

Quanto à idoneidade internacional, esta incide sobre as interações ocorridas no processo de estudo, que permitem identificar e resolver conflitos de significados e, ainda, promover a autonomia na aprendizagem. Será importante considerar a interação entre professor-aluno e entre alunos, a promoção de autonomia e também a avaliação formativa. No que concerne à interação professor-aluno, é importante averiguar a clareza, organização e ênfase dos conceitos-base do tema que são efetuados pelo professor nas suas apresentações, e se este

interpreta corretamente as “representações” reveladas pelos alunos e como tenta motivá-los ou implicá-los na dinâmica da aula, recorrendo a diversos meios retóricos e argumentativos; relativamente à interação entre alunos, interessa verificar a promoção dos seus diálogos e comunicações. É também nesta dimensão que se efetua a análise do grau de autonomia concedido aos alunos, analisando a ocorrência dos momentos de exploração, formulação e validação de sua responsabilidade; por último, a componente avaliação é obtida por observação sistemática do progresso cognitivo dos alunos.

#### 7.1.4. Idoneidade mediacional da intervenção de ensino

Esta faceta fornece orientações sobre o grau de disponibilidade e adequação de materiais e recursos de tempo necessários para o desenvolvimento do processo ensino e aprendizagem. Na Quadro 42 evidenciam-se as orientações curriculares e os respetivos indicadores.

Quadro 42 – Análise da idoneidade mediacional da intervenção de ensino.

| Componentes                          | Orientações Curriculares   | Indicadores  |
|--------------------------------------|--|--|
| Recursos materiais                   | <p>1. Utilizar calculadoras e outros meios tecnológicos para facilitar a compreensão de conceitos matemáticos. (ME-DEB, 2001, p. 71)</p> <p>2. Utilizar materiais manipuláveis de diversos tipos são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular as que visam promover atividades de investigação e de comunicação matemática entre alunos. (ME-DEB, 2001, p.71).</p> <p>3.A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem (NCTM, 2008, p. 436).</p> | <p>I1. Permitiu-se a utilização de máquina de calculas e outros meios tecnológicos (vídeos) para facilitar a compreensão de conceitos matemáticos.</p> <p>I2. Conceitos, definições e propriedades em estudo manifestam-se de forma clara nos objetos que são utilizados.</p> <p>I3. As definições e propriedades são contextualizadas e suportadas em situações reais, modelos concretos e na visualização.</p> |
| Número de alunos e condições da aula | <p>1. Realização de atividades cooperativas de aprendizagem, orientadas para a integração e troca de saberes (ME-DEB, 2001, p. 17).</p>  | <p>I1. O número de alunos e a sua distribuição permitem levar a cabo a implementação desejada.</p> <p>I2. O horário da turma permite realizar atividades cooperativas de aprendizagem orientadas para a integração e troca de saberes.</p>   |
| Tempo de ensino e aprendizagem       | <p>1.Criar na escola espaços e tempo para intervenção livre dos alunos (ME-DEB, 2001, p. 24).</p> <p>2.Gerir adequadamente o tempo na realização das tarefas e problemas (ME-DEB, 2001, p. 43).</p> <p>3.Garantir que a passagem do concreto ao abstrato, um dos propósitos do ensino da Matemática, se faça de forma gradual, respeitando os tempos próprios dos alunos e promovendo assim o gosto por esta ciência e pelo rigor que lhe é característico. (MEC, 2013, p. 1)</p>  | <p>I1. Criaram-se na sala momentos e tempo para intervenção livre dos alunos.</p> <p>I2. No 2.º e 3.º ciclo indica-se, a título não prescritivo, o número de tempos, de cinquenta minutos, que poderá ser dedicado a cada domínio.</p> <p>I3. A gestão do tempo foi adequada na realização das tarefas e situações-problemas.</p>  |

Na idoneidade mediacional mede-se o grau de afetação e adequação dos recursos materiais e temporais necessários no desenvolvimento do processo de estudo, devendo-se por isso, analisar a utilização de materiais que potenciem a introdução e apropriação dos objetos, os processos matemáticos utilizados e se os modelos são representativos para o tema em estudo. É relevante analisar se a organização dos alunos em sala de aula favorece os resultados

pretendidos, se o tempo destinado ao processo de estudo é adequado à aquisição dos significados pretendidos e se a distribuição temporal de cada atividade está em conformidade com a sua importância e o seu grau de dificuldade.

### 7.1.5. Idoneidade afetiva da intervenção de ensino

Nesta faceta as orientações curriculares referem-se ao envolvimento dos alunos no processo de ensino e aprendizagem durante o seu processo de formação, como se pode constatar no Quadro 43.

Quadro 43 – Análise da idoneidade emocional/afetiva da intervenção de ensino.

| Componentes | Orientações Curriculares  | Indicadores   |
|-------------|---|---|
| Interesses  | 1. Questionar a realidade observada (ME- DEB, 2001, p. 17).   | I1. São propostas situações que questionam a realidade observada.   |
|             | 2. Mobilizar saberes culturais, científicos e tecnológicos para compreender a realidade e para abordar situações e problemas do quotidiano (ME- DEB, 2001, p. 15).  | I2. As tarefas propostas mobilizam saberes culturais, científicos e tecnológicos para compreender a realidade e para abordar situações e problemas do quotidiano. |
|             | 3. Prestar atenção a situações e problemas manifestando envolvimento e curiosidade (ME- DEB, 2001, p. 15).  | I3. São propostas situações que permitem ilustrar e valorizar a utilidade da matemática na vida cotidiana e promovem a atenção, o envolvimento e a curiosidade.   |
|             | 4. Expressar dúvidas e dificuldades (ME- DEB, 2001, p. 21).   | I4. Os alunos são motivados a expressar dúvidas e dificuldades.   |
| Atitudes    | 1. Prestar atenção a situações e problemas manifestando envolvimento e curiosidade (ME - DEB, 2001, p. 17).   |   |
|             | 2. Identificar e articular saberes e conhecimentos para compreender uma situação ou problema (ME - DEB, 2001, p. 17).   |   |
|             | 3. Apreciar o poder e a precisão da linguagem matemática (NCTM, 2008, p. 96).   | I1. Promove-se a participação nas atividades, a perseverança, a responsabilidade e a curiosidade.   |
|             | 4. Planear e organizar as suas atividades de aprendizagem (ME - DEB, 2001, p. 21).  | I2. Os argumentos, as estratégias e o pensamento matemático usados por outros são avaliados por si mesmos, não atendendo à autoridade de quem os apresenta.       |
|             | 5. Identificar, selecionar e aplicar métodos de trabalho (ME - DEB, 2001, p. 21).   |   |
|             | 6. Analisar e avaliar as estratégias e o pensamento matemático usados por outros (NCTM, 2008, p. 226).  | I3. Incentiva-se os alunos a exporem as suas ideias, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas.                        |
|             | 7. Manifestar o gosto pela Matemática e pela redescoberta das relações e dos factos matemáticos – que muitas vezes é apresentada como uma finalidade isolada – constitui um propósito que pode e deve ser alcançado através do progresso da compreensão matemática e da resolução de problemas (MEC, 2013, p. 2). |   |

|   |  |
|---|--|
| 1. Cooperar com os outros em tarefas e projetos comuns (ME - DEB, 2001, p. 17).                                 | I1. Houve momentos de cooperação com os outros em tarefas e projetos comuns.         |
| 2. Os alunos devem aprender a confiar na sua própria capacidade de dar sentido à matemática (NCTM, 2008, p. 84) | I2. Os alunos revelam confiar na sua própria capacidade de dar sentido à matemática. |

No processo de estudo, os interesses dos alunos e as suas necessidades, bem como as suas atitudes e manifestações de natureza emocional, integram as componentes da idoneidade afetiva. Refira-se que, nesta faceta, são analisados o interesse das tarefas propostas aos alunos, o reconhecimento da utilidade da matemática, no quotidiano e na vida profissional. Por fim, é importante verificar se foram contempladas situações promotoras da responsabilidade, da perseverança, da participação e da autoestima.

### 7.1.6. Idoneidade ecológica da intervenção de ensino

Nesta faceta as orientação curriculares são referentes às estatísticas e às suas relações com o desenvolvimento sociocultural e profissional, com intra-relações e inter-relações de conteúdos disciplinares do currículo. No Quadro 44 apresentam-se as orientações curriculares e os respetivos indicadores.

Quadro 44 – Análise da idoneidade ecológica da intervenção de ensino.

| Componentes                         | Orientações Curriculares  | Indicadores   |
|-------------------------------------|---|---|
| Inovação                            | 1. Proporcionar quotidianamente aos alunos problemas variados, centrados em conteúdos importantes do currículo. (MEC, 2013, p. 1)   | I1. Os conteúdos, a sua implementação e avaliação vão ao encontro das diretrizes curriculares ao proporcionar quotidianamente aos alunos problemas variados, centrados em conteúdos importantes do currículo.<br>I2. Os conteúdos contribuem para aprender Matemática, em particular Estatística, utilizando contextos funcionais relacionados com situações quotidianas. |
| Adaptações socioculturais           | 1. Aprender Matemática, em particular Estatística, utilizando contextos funcionais relacionados com situações quotidianas. (MEC, 2013, p. 1)  | I1. Apresentam-se atividades onde se estabelecem relações que permitem ver a matemática como um todo destacando a necessidade de estudar as suas ligações internas e a pensar sobre elas.   |
| Conexões intra e interdisciplinares | 1. Vendo a matemática como um todo destaca a necessidade de estudar as suas ligações internas e pensar sobre elas. (NCTM, 2008, p. 69).<br>2. A necessidade de compreender e de ser capaz de usar a matemática na vida. (NCTM, 2008, p. 4)<br>2. Explorar e estabelecer conexões com atividades que impliquem várias áreas do conhecimento. (ME-DEB, 2001, p. 70) | I1. Promovem-se situações que levam à necessidade de compreender e de ser capaz de usar a matemática na vida.<br>I2. Exploram-se e estabelecem-se conexões com atividades que implicam várias áreas do conhecimento.<br>I3. Estabelecem-se relações entre conceitos estatísticos de distintos níveis de ensino.   |

A idoneidade ecológica integra as adaptações curriculares, socioprofissionais e culturais, a abertura à inovação didática e ao estabelecimento de conexões intra e interdisciplinares. Nesta faceta importa analisar não só se os significados implementados se encontram de acordo com as orientações curriculares intra e inter matemáticas, mas também se contribuem para a formação integral dos alunos: a nível social, profissional e cultural. Assim, deve também considerar-se a inclusão de contributos consequentes da investigação, da prática reflexiva e mesmo da inovação tecnológica.

## 7.2. Análise *a priori* da idoneidade didática da intervenção de ensino

Nesta secção analisa-se o projeto de implementação da intervenção de ensino, numa turma do 8.º ano, começando-se pelo plano de estudo da implementação de ensino, recolhendo informação sobre a sua idoneidade didática, para comprovar a viabilidade de aplicação de um sistema de indicadores propostos a partir das orientações curriculares, como instrumento de valorização das implementações de temas estatísticos no ensino básico.

Consideram-se os indicadores de cada um dos componentes e aplicam-se a todos os instrumentos construídos para a implementação do ensino: fase anterior à implementação, referente ao Planificação da Implementação da Intervenção de Ensino sobre o tema Diagramas de Extremos e Quartis (PIIEDEQ) (Anexo II) e à diagnose realizada através do Teste Diagnóstico (TD) e da Escala de Atitudes em Relação à Estatística (EAE adaptada); durante a implementação têm-se as Fichas de Tarefas (FT) resolvidas em díade e as interações entre docente-aluno e aluno-aluno; após a implementação têm-se o Teste Final (TF), a Escala de Atitudes e as entrevistas dos alunos. Saliente-se que se prevê que as interações e a entrevista satisfaçam a maioria dos indicadores de cada uma das componentes, mas de forma implícita e em comparação com o PIIEDEQ.

Para expressar a idoneidade didática dos instrumentos a aplicar à turma do 8.º ano, em termos qualitativos, é feita uma correspondência com os indicadores propostos em cada um dos domínios do seguinte modo:

- *Alta*, supondo um cumprimento de 70% ou mais de indicadores;
- *Média*, se apresenta uma percentagem de indicadores compreendida entre 40% e 70%;
- *Baixa*, se a percentagem de indicadores é inferior a 40%.

### 7.2.1. Idoneidade epistémica



A análise realizada recaiu sobre todos os instrumentos propostos para a implementação, tendo em conta os Quadros 36, 37 e 38. A elaboração destes documentos teve por base as metas curriculares (MEC, 2013) e foram os seguintes: Teste Diagnóstico (TD), as seis Fichas de Tarefas (FT) a realizar em díade, durante a implementação de ensino, e o Teste Final (TF).

#### 7.2.1.1. Situações-problema

A resolução de problemas é considerada o pilar da aprendizagem matemática, assumindo um papel fundamental tanto como objetivo de aprendizagem (formular e resolver problemas) como na introdução, desenvolvimento e aplicação de conteúdos. Refiram-se ainda as suas características, com a inclusão de problemas abertos e variados que permitem desenvolver o raciocínio heurístico e também o uso de várias estratégias em busca da resposta correta. No caso específico da Estatística, na resolução dos problemas propostos pretende-se que a maioria dos alunos revele saber dar significado aos conceitos, procedimentos, propriedades, linguagens e argumentos estudados a partir da análise de dados em contextos variados.

Na análise do PIIEDEQ destacam-se os objetivos gerais (OG) e específicos (OE), pré-requisitos (PR), os conteúdos (C), as competências transversais (CT) e a metodologia, estratégias e atividades estabelecidas. Neste caso, destaca-se a resolução de problemas com a referência ao objetivo específico “OE2. Resolver problemas”, ao conteúdo “C3. Resolver problemas”, ao pré-requisito “PR7. Resolver problemas estatísticos em diversos contextos” e à competência transversal “CT1. Capacidade de resolver problemas”. Em todos os casos as situações-problema aludem especificamente a conteúdos de Estatística, com dados em suporte gráfico e tabelar, verificando-se ainda que: i) no PIIEDEQ há referência clara aos indicadores I2, no objetivo OE2 — descritores D2 e D3, ao I3 no mesmo objetivo OE2 — descritor D1 e D5, bem como no conteúdo C3 e no I4 é registado no conteúdo C4, no Objetivo 1 — nos descritores D3 3 D12 e ainda no OE2, descritor D2, o que remete para grau elevado de idoneidade, já que há referência clara a três dos quatro indicadores; ii) os indicadores I2 e I3 são totalmente cumpridos no TD como se pode observar nas questões propostas (Q4, Q5, Q6) para o I2, destacando-se as alíneas e) nas Q4 e Q5 para o caso do OE2 — descritores D1 e D2, para o indicador I3, remetendo também para um grau médio de idoneidade; iii) no conjunto das seis FT, todos os indicadores são cumpridos, já que é esperado que os alunos atinjam os objetivos propostos nos conteúdos C1, C2 e C3 nas primeiras duas fichas e o C4 nas duas seguintes, ficando as duas últimas para consolidar os conceitos dos quatro conteúdos. Assim, nestas fichas, cumpre-se o indicador I1 nas FT3 e FT4; os quatro indicadores são totalmente

cumpridos em todas as fichas de tarefas; enquanto o I3 é cumprido nas tarefas T4e, T5e, T6e e o indicador I4 nas tarefas T11d3, T15, T14, T17b, T19e e T19f, o que confere um alto grau de idoneidade.

Quanto ao teste final, ele cumpre os indicadores I2, já que as situações-problema apresentam dados organizados em gráficos ou tabelas; o indicador I3 é visível na questão Q1.2; e o indicador I4 é cumprido pelas questões Q2.2, Q2.3, Q4a e Q4c. assim, este instrumento apresenta alto grau de idoneidade.

#### 7.2.1.2. Linguagem

Quanto à linguagem, espera-se que todos os alunos revelem capacidade de utilizar várias representações de uso convencional para organizar e comunicar matemática; que consigam criar as suas próprias representações, desenvolvendo a capacidade de traduzir representações diferentes e adequadas ao contexto proposto. No caso da educação estatística, espera-se que os alunos revelem domínio na leitura e interpretação de tabelas e gráficos, centrando-se na interpretação correta dos seus elementos. Devem descrever e comparar conjuntos de dados, estabelecer conexões entre distribuições e analisar as tendências de dados ao longo do tempo.

No caso concreto dos documentos em análise, observa-se que a maioria dos indicadores são integralmente cumpridos: no PIIEDEQ o indicador referente à capacidade de utilizar diferentes registos e representações (I1) é observado nos objetivos O1 e O2 e no conteúdo C2 e C3, e quanto à linguagem utilizada, ela é adequada ao público-alvo (I2) em todos os documentos produzidos. Quanto aos indicadores I4 e I5, eles estão patentes nos três documentos como se observa nas questões referentes à determinação e análise das medidas de localização no TD (Q4a e b, Q5b e e, Q6b e e) e nas FT (T4d, T6d, T6e, T11, T12, T14, T17, T18, T19) e no conteúdo C2 e O1. O indicador I3 não está visivelmente incluído nos documentos TD e em nenhuma das seis FT. Em conclusão, é conferido um alto grau de idoneidade a todos os documentos analisados.

No caso do TF, os indicadores I1 e I2 estão patentes nas quatro questões propostas, o I3 é visível na Q1.2 e Q2.3, o I4 é cumprido nas questões Q1.1c, Q1.2, Q2.1c, Q2.2, Q4b e Q4d e o I5 é observado nas questões Q1.2, Q2.3, Q4d, Q4e e Q4f, conferindo ao documento alto grau de idoneidade.

Verifica-se que em todas as questões/tarefas a linguagem escrita se encontra adequada ao público-alvo, antevendo-se, por isso, que nas interações previstas na planificação, a

desenvolver durante as atividades em díade, na correção das tarefas e nas entrevistas, a adequação da linguagem oral ao público-alvo também está cumprida.

#### 7.2.1.3. Regras

Da análise realizada ao PIIEDEQ conclui-se que os sete indicadores (Quadro 37) são todos observados ao longo do documento: o indicador I1 surge no objetivo geral OG1 e no específico OE1, no pré-requisito PR1 e na metodologia, na aula teórica-expositiva (ATE); o I2 é visível no objetivo OE1 — descritor D5, nos pré-requisitos PR2 e PR3, nas competências transversais CT3 e na Metodologia, Atividade Prática; o I5 destaca-se no conteúdo C4, no objetivo específico O1 — descritor D12 e nos pré-requisitos PR2 e PR3; o I7 é observado no objetivo específico OE1 — descritores D7, D8 e D9 e no conteúdo C4 e, no caso dos indicadores I3, I4 e I6, o seu cumprimento não é tão visível, mas eles são detetados, respetivamente, no pré-requisito PFR4 e no objetivo específico OE2 e descritor D5, no objetivo OE1 — descritor D5, no objetivo específico OE1 — descritor D4, no pré-requisito PR4 e na competência transversal CT3. Deste modo, é elevado o grau de idoneidade didática, pois cumprem-se todos os indicadores.

Quanto aos documentos TD e FT, verifica-se que no primeiro documento os indicadores I2 e I4 são visíveis nas questões Q4, Q5 e Q6, enquanto que o indicador I6 é registado apenas na questão Q6c, não tendo sido detetados os restantes indicadores, conferindo-se assim um grau de idoneidade médio. No caso das seis FT, em nenhuma delas foi cumprido o indicador I2, enquanto que o I6 foi cumprido em todas as fichas. Já no caso dos restantes indicadores, foram detetados em algumas tarefas que passamos a referir: I1 está patente nas tarefas T1, T5d, T8, T9a, T10b, T11a2, T11a4, T11a5, T11a6, T11a7, T11d4, T12; I3 verifica-se nas tarefas T3, T4c, T4d, T4e, T5e, T6e e na FT3; o I5 está bem visível nas tarefas FT3, T11a4, T11a5, T11a6, T11a7, T11d4, T11e, T13, T14, T15, T17, T19; e por fim o I7 é cumprido nas FT3, FT4, FT5 e FT6. Assim, é conferido um alto grau de idoneidade às FT.

No caso do TF, constata-se que o indicador I1 é cumprido pelas questões Q1.1b e Q3; o I3 é observado em Q1.2 e Q2c, o indicador I2 é visível nas questões Q1.1c, Q1.2, Q2.1c, Q4b, o I4 é cumprido pelas Q1.1c e Q4d, o I6 pelas questões Q2.3 e Q4f e, por fim, o indicador I7 é visível em Q1.1c, Q2.2, Q3c, Q4b, Q4c, conferindo a este documento alto grau de idoneidade.

#### 7.2.1.4. Argumentação

Relativamente à argumentação, aspeto fundamental da matemática, pretende-se que os alunos entendam o raciocínio matemático baseado em suposições e regras específicas e sejam capazes de avaliar a importância do raciocínio sistemático como um meio de argumentação. O uso do raciocínio estatístico é reconhecido como um processo para resolver problemas, com implicação no seu desenvolvimento (Franklin *et al.*, 2005).

Em relação à planificação de implementação PIIEDQ constata-se que todos os indicadores (Quadro 37) são cumpridos, conferindo-lhe uma idoneidade alta. Veja-se que o indicador I1 surge no pré-requisito PR5 e na competência transversal CT4; o I2 é verificado no conteúdo C3 e nas competências transversais CT1 e CT2; o I3 é verificado em Pré-requisitos (PR4) e Conteúdos transversais (CT4); o I4 encontra-se referido no conteúdo C3 — no cálculo e na comparação de frequências relativas de dados em tabelas, diagramas e gráficos e na aplicação das medidas de tendência central. Relativamente ao TD, apenas se reconhece o indicador I2 já que as questões Q4, Q5 e Q6 apresentam os dados organizados em tabelas e gráficos, o que lhe confere um grau de idoneidade baixo. Quanto às seis fichas, a idoneidade é alta, já que são cumpridos três dos quatro indicadores: I2 já que os dados estão organizados em contexto tabelar ou gráfico; I3 é conferido pelas tarefas T2e, T3, T4d, T6e, T11d3, T11e, T11f, T12, T14d, T17c, T17e, T17f, T18; e o I4 é cumprido pelas tabelas T11d, T13, T14, T16c, T17, T19.

No que concerne ao teste final, verifica-se que as questões Q2, Q3 e Q4 cumprem o I2 e o I4, enquanto que o I3 é visível em Q2.3, Q4a, Q4d, Q4e e Q4f, obtendo-se assim um alto grau de idoneidade.

#### 7.2.1.5. Relações

Os dois indicadores (Quadro 38) encontram-se em todos os documentos em análise. O indicador I1 e I2 estão referidos nas questões Q4, Q5 e Q6 do TD e em todas as fichas de tarefas e, ainda, em todas as questões do TF. Quanto ao PIIEDQ, o I1 é observado nos conteúdos C2 e C4 e o I2 nos conteúdos C2 e C3. Donde, em conclusão, os documentos apresentam alto grau de idoneidade.

#### 7.2.2. Idoneidade cognitiva

O alvo desta análise continua a incidir sobre os mesmos documentos antes referidos, tendo em conta os Quadros 39 e 40.

#### 7.2.2.1. Conhecimentos prévios

Quanto aos conhecimentos prévios, os quatro indicadores (Quadro 39) encontram-se na sua totalidade em dois documentos: PIIEDeq e FT. Saliente-se que na aprendizagem do conteúdo C4 é necessário que os alunos dominem a noção de mediana, saibam determiná-la e conheçam as suas propriedades. Há a referência no PIIEDeq, numa aula de revisões, aos conteúdos C2, C3, C4, que garantem o cumprimento desta componente. No caso das fichas de tarefas, há cumprimento dos indicadores I2 e I3 nas FT3 e FT4 e os indicadores I1 e I4 são visíveis em todas as fichas, conferindo aos dois documentos alto grau de idoneidade. No caso do TD, apenas se identificou o indicador I3 nas questões Q4, Q5 e Q6, donde se conclui existir uma baixa idoneidade neste documento.

Quanto ao TF, cuja implementação é posterior à fase de diagnose e da implementação, pode considerar-se o cumprimento dos indicadores I1 e I2. Quanto aos indicadores I3 e I4, estes são verificados nas questões Q1, Q2 e Q4 e pela ordem em que estas são apresentadas, pelo que apresenta alto grau de idoneidade didática.

#### 7.2.2.2. Diferenças individuais

O plano prevê trabalho desenvolvido em díade, tarefa a tarefa, seguida de debate sobre as resoluções com o objetivo de proceder à correção, dando assim cumprimento implicitamente aos indicadores I1, I2 e I3. Não há evidências do indicador I5, no entanto prevê-se que a aprendizagem seja efetuada por todos e, deste modo, que os objetivos propostos sejam integralmente alcançados. Quanto ao indicador I4, implicitamente e parcialmente, pode ser observado na resolução de trabalho não presencial. Assim, em conclusão, teremos um grau de idoneidade médio.

No que concerne ao TF, verifica-se o cumprimento dos indicadores I2, nas questões Q1.2, Q2.3, Q4e e Q4f, I4 em todas as questões propostas e no I5, já que de forma implícita, espera-se que os alunos revelem as suas aprendizagens de forma positiva. Também este documento revela grau médio de idoneidade.

No que se refere à Escala de Atitudes encontram-se apenas dois indicadores: I2 e I3, pois os itens remetem para situações experienciadas individualmente, que conferem a cada aluno diferentes perspetivas da mesma realidade e a observar a estatística no seu quotidiano de modo diferente. Assim, é exigido sentido de responsabilidade, de flexibilidade e de respeito pelo seu trabalho pelo dos outros, e por isso tem lugar à comunicação, à discussão e à defesa de descobertas e ideias próprias, permitindo a intervenção dos seus parceiros. No caso do TD,

apenas é observado o cumprimento dos indicadores I2 e I4 em Q4e, Q5e, Q6e e no caso das FT é claramente visível o indicador I4, já que há tarefas propostas que são de reforço e outras de ampliação de conceitos, conferindo a estes documentos um baixo grau de idoneidade.

#### 7.2.2.3. Aprendizagem

A previsão, apontada pelo plano PIIEDEQ, indica que a fase de diagnose (TD e Escala de atitudes) serve de base à construção das FT, cumprindo assim o indicador I1 e I2. O mesmo documento refere a existência de outros tipos de avaliação, tais como o teste final e a nova aplicação da Escala de atitudes, revelando o indicador I3. Não foi identificado o I4. Em conclusão, o grau de idoneidade deste documento é alto.

Em relação ao TD e às FT observa-se que as questões e as tarefas apresentadas evidenciam diversos graus de dificuldade, pelo que se cumprem, de forma indireta, os indicadores I1 e I4, conferindo-lhes um grau baixo de idoneidade didática.

Em relação ao TF, cujo objetivo é avaliar a aprendizagem dos alunos, tendo em conta os diferentes níveis de compreensão e competências, assim cumprindo o indicador I1 e plenamente o I4, ele é uma das formas de avaliar conhecimentos (I3), pelo que lhe é conferido um grau médio de idoneidade.

#### 7.2.3. Idoneidade interacional

Como alvo desta análise, mantêm-se os mesmos documentos antes referidos, atendendo ao Quadro 41.

##### 7.2.3.1. Interações docente-discente

Estas interações decorrem durante as aulas práticas e expositivas-teóricas. Apenas no PIIEDEQ são cumpridos todos os indicadores, já que na organização das atividades está incluída a cooperação e troca de saberes (I1), estando previsto que o professor apoie o aluno e promova a descoberta das diversas formas de organização da aprendizagem (I2), isto durante os momentos de aula expositiva-teórica e durante a correção das tarefas, nas aulas práticas. No caso do TD, as questões propostas sugerem uma apresentação adequada do tema (I3), remetendo, respetivamente, para um grau de idoneidade alta, do primeiro documento, e baixa, no outro (TD).

Quanto à FT, para além do indicador I3 ser visível, antevê-se que as interações de professor-aluno ocorram quando os alunos revelarem dificuldades na resolução das tarefas ou

quando tiver lugar a sua correção, podendo aí esperar-se implicitamente o cumprimento dos indicadores I2; e como as tarefas são realizadas em díade, remete-se para o I1 parcialmente; no caso do TF, também é visível o indicador I3, esperando-se alcançar os indicadores I1 e I2 aquando da entrevista. Deste modo, estes documentos parecem revelar alto grau de idoneidade didática.

#### 7.2.3.2. Interação entre discentes

Estas interações decorrem durante a realização das tarefas, em díade, e quando se realiza a sua correção. Apenas no PIIEDEQ são cumpridos todos os indicadores, como se pode ver: estão previstas tarefas em díade (I1) e, na correção, são comunicadas as resoluções efetuadas por cada grupo, a fim de se proceder à correção das mesmas (I2), conferindo ao documento um grau de idoneidade alto.

No caso da realização das FT em díade, do TD e o TF, as tarefas apresentadas e as questões propostas promovem a comunicação do pensamento matemático individual, de forma coerente (I2), conferindo aos documentos um grau de idoneidade baixo.

#### 7.2.3.3. Autonomia

Em relação à autonomia, o plano prevê a realização de trabalho autónomo, com atividades não presenciais, especificamente na realização da ficha de tarefas FT6, sendo assim cumprido o indicador I1. O trabalho em díade pode evidenciar o cumprimento do indicador I2 de forma implícita, remetendo, assim, para um grau alto de idoneidade.

No caso do TD e TF, por serem realizadas individualmente e de forma autónoma, cumprem o indicador I1; e pelo facto de as tarefas nas FT apresentadas nas fichas serem realizadas em díade, cumprem o indicador I1 e I2. Assim, estes dois documentos revelam grau baixo de idoneidade.

#### 7.2.3.4. Avaliação formativa

A forma como o progresso dos alunos é acompanhada (I1) está bem visível no plano, já que se prevê que as tarefas sejam resolvidas em díade, com o apoio do docente; em relação ao indicador I2, apenas é cumprido parcialmente, já que no plano estão previstos ajustes de aprendizagem, remetendo o documento para alto grau de idoneidade.

No que concerne ao TD e à TF não são cumpridos quaisquer indicadores (Quadro 41), o que confere aos documentos um baixo grau de idoneidade.

Quanto às FT, encontra-se implícito nelas que o progresso cognitivo dos alunos é acompanhado de forma sistemática (I1) e que nesse acompanhamento as díades vão realizando a sua autoavaliando e ajustando os seus métodos de trabalho à sua forma de aprender e aos objetivos visados (I2).

#### 7.2.4. Idoneidade mediacional

Nesta análise, atendendo ao Quadro 42, continua-se a dissecar os documentos da planificação de implementação do conteúdo DEQ (PIIEDEQ) e os documentos que lhe estão anexados: Teste Diagnóstico (TD), as seis Fichas de Tarefas (FT) e o Teste Final (TF).

##### 7.2.4.1. Recursos materiais

Da análise realizada aos documentos PIIEDEQ, TD, TF e FT é visível em todos eles a referência à utilização da calculadora (I1); no PIIEDEQ é ainda referida a utilização de meios informáticos nas aulas expositivas-teóricas. É também visível o cumprimento do indicador I2 no PIIEDEQ, pela referência dos objetivos, e do indicador I3 nas FT, TF e TD; quando se observam as tarefas/questões propostas, verifica-se que existe o cuidado de contextualização. Assim, o cumprimento destes indicadores confere aos documentos um grau médio de idoneidade.

##### 7.2.4.2. Número de alunos e condições de aula

O plano não menciona nenhum condicionalismo sobre o número de alunos, referindo apenas o respeito pelo horário da turma (I2) e que as aulas estão condicionadas pelo tempo de cada aula, 50 minutos. Nos outros documentos é apenas visível o cuidado da apresentação no tempo estipulado para cada uma das fichas de tarefas e testes de avaliação, durante a aula de 50 minutos (I2), pelo que todos os documentos em análise apresentam grau médio de idoneidade.

##### 7.2.4.3. Tempo de ensino e aprendizagem

Nesta componente cumprem-se os indicadores I1, pois o trabalho previsto ou é desenvolvido em díade ou individualmente, o que é indicado explicitamente no PIIEDEQ e implicitamente nos outros documentos; quanto a I2, dado que se trata de uma diretriz curricular, é também cumprida em todos os documentos analisados. Apenas as FT cumprem



o indicador I3, já que se prevê que, durante as aulas expositivas-teóricas, as definições e propriedades sejam contextualizadas e suportadas por situações reais, modelos concretos e visualização. Deste modo, os documentos apresentam um grau médio de idoneidade, à exceção do conjunto de FT com um grau de idoneidade alto.

#### 7.2.5. Idoneidade afetiva

Os documentos em análise mantêm-se os mesmos, sendo que a Escala de atitudes em relação à Estatística evidencia poucos indicadores.

##### 7.2.5.1. Interesse

Da análise efetuada aos documentos, verifica-se também que os indicadores (Quadro 43) desta componente nem sempre são cumpridos: no plano PIIEDEQ os indicadores I2, I3 e I4 são cumpridos, já que são referidos explicitamente os pré-requisitos necessários para a implementação e os conteúdos prévios (I1); implicitamente, nas aulas práticas, a resolução das tarefas contém situações-problemas do quotidiano, tal como recomendam as metas curriculares (I3); é explicitamente previsto o apoio, orientação e esclarecimento do professor, e ainda a existência de aula de revisões e de esclarecimento de dúvidas. Assim, este documento apresenta um alto grau de idoneidade.

Quanto aos documentos TD, FT, TF e Escala de atitudes, o grau de idoneidade também é alto para os dois primeiros e médio para o último. No caso da Escala de atitudes, os itens cumprem os indicadores I2 e I3, enquanto no TD, TF e FT se cumprem os indicadores I1, I2 e I3. Nesse cumprimento estão envolvidas todas as situações-problema e salientam-se as questões Q4e, Q5e e Q6e para TD e Q4 do TF (I3) e T3, T4d, T4e, T5e, T6 e T7 das FT (I1). Em relação ao indicador I2, nos dois documentos, as situações-problema propostas exigem saberes científicos, culturais e tecnológicos. Nesta componente, apenas a Escala de atitudes apresenta grau médio de idoneidade, revelando os restantes documentos um alto grau de idoneidade.

##### 7.2.5.2. Atitude

A promoção da participação e da perseverança é observada nos cabeçalhos de todas as FT, no TD, no TF e na Escala de atitudes, pelo que cumprem parcialmente o indicador I1. No

caso da Escala não se verifica o cumprimento de mais nenhum indicador; porém, no caso das FT e do PIIEDEQ está subentendido o cumprimento dos indicadores I2 e I3, ao ser aí referido que as tarefas são realizadas em díade, seguida da correção em grupo/turma; no caso do TD e TF verifica-se ainda o indicador I3, parcialmente, já que os alunos são incentivados a expressarem as suas ideias nas questões propostas. Em relação ao grau de idoneidade, ele é alto nos documentos PIIEDEQ e no conjunto das FT, é baixo na Escala de atitudes e médio no TD e TF.

#### 7.2.5.3. Emoções

A esta componente associam-se apenas dois indicadores: I1, que se relaciona com momentos de cooperação em tarefas e projetos comuns; e I2, de incentivo a aprender e a confiar na sua própria capacidade de dar sentido à matemática. Veja-se que documentos os cumprem: no plano PIIEDEQ estão previstos momentos distintos de trabalho, individual (I2), em díade e em grande grupo (I1) — as seis FT são realizadas em díade (I1) e a sua realização pressupõe confiança na capacidade individual (I2); no caso do TD e da Escala de atitudes apenas se pode considerar o cumprimento do indicador I2, já que as respostas são individuais. Assim, os documentos PIIEDEQ e FT revelam um alto grau de idoneidade e os outros dois apenas um grau médio.

#### 7.2.6. Idoneidade ecológica

Mantêm-se a análise aos documentos anteriormente referidos (Quadro 44).

##### 7.2.6.1. Inovação

Quando se analisa o plano PIIEDEQ, verifica-se que: os objetivos e conteúdos nele referidos garantem o cumprimento dos indicadores I1 e I2; nas seis FT, as tarefas propostas têm por base as metas curriculares (I1); e as FT3 e FT4 têm por objetivo contribuir para a aprendizagem dos novos conteúdos (I2). Assim, nesta componente, este documento apresenta um alto grau de idoneidade. Em relação aos TD e TF as questões propostas cumprem o indicador I1, conferindo-lhes um grau de idoneidade baixo e médio, respetivamente.

##### 7.2.6.2. Adaptações socioculturais

Da análise do plano PIIEDEQ realça-se a necessidade de articulação entre os conteúdos anteriormente trabalhados e os que se pretende trabalhar na intervenção de ensino, tanto nos

pré-requisitos como nos conteúdos, cumprindo-se assim o único indicador estabelecido nesta componente. O mesmo acontece com as fichas de tarefas FT3 e FT4, já que é necessário o domínio do conteúdo mediana para a aprendizagem do conteúdo quartil. Como no TF se pretende avaliar a aprendizagem sobre os quartis e os DEQ, também ele cumpre o indicador. Quanto aos documentos implementados na fase de diagnose, não é visível em nenhum deles o indicador. Assim, o grau de idoneidade do plano, TF e FT é alto, enquanto que o dos outros dois (TD) documentos é baixo.

### 7.2.6.3. Conexões intra e interdisciplinares

A necessidade de articulação entre os conteúdos anteriormente trabalhados e os que se pretende trabalhar na implementação, está evidenciada tanto nos pré-requisitos como nos conteúdos, cumprindo o indicador I3. Como não é cumprido mais nenhum indicador o grau de idoneidade é baixo. Em todas as fichas de tarefas foram incluídas algumas tarefas que estabelecem relações entre os conceitos estatísticos de distintos níveis de ensino (I3); são também propostas atividades que estabelecem conexões com atividades que implicam várias áreas do conhecimento (I2), conferindo-lhes baixo grau de idoneidade. Quanto aos dois momentos avaliativos, TD e TF, observa-se o cumprimento do indicador I1 nas questões que são propostas, conferindo-lhes um grau baixo de idoneidade.

### 7.2.7. Síntese da análise da idoneidade didática a priori da intervenção de ensino

De acordo com a análise anteriormente realizada, construiu-se a Tabela 43 que resume a idoneidade didática parcial e global do plano PIIEDEQ e dos documentos que lhe estão anexados.

Tabela 43 – Análise da idoneidade didática a priori do plano e dos documentos implementados na intervenção de ensino

| Facetas      | Número de indicadores possíveis | Frequência e percentagem do número de indicadores cumpridos |             |         |         |         |
|--------------|---------------------------------|---|-------------|---------|---------|---------|
|              |                                 | TD  | EAE Adotada | PIIEDEQ | FT      | TF      |
| Epistémica   | 22                              | 9 (41)  | —           | 15 (68) | 14 (64) | 19 (86) |
| Cognitiva    | 13                              | 5 (38)  | —           | 12 (92) | 7 (54)  | 10 (77) |
| Interacional | 9                               | 8 (89)  | —           | 3 (33)  | 6 (66)  | 5 (38)  |
| Medicinal    | 8                               | 5 (63)  | —           | 3 (38)  | 6(75)   | 5 (63)  |
| Afetiva      | 9                               | 7 (78)  | 4 (44)      | 6 (67)  | 8 (89)  | 6 (67)  |
| Ecológica    | 6                               | 4 (67)  | —           | 2 (33)  | 4 (67)  | 3 (50)  |
| Total        | 67                              | 38 (57)   | 4 (44)      | 43 (64) | 45 (67) | 48 (72) |

Ao observar a Tabela 43 constata-se que todos os documentos apresentam um grau médio de idoneidade, já que a percentagem de cumprimento se encontra entre 40% e 70%, à exceção do Teste Final, cujo cumprimento é superior a 70%, pelo que lhe é conferido um grau elevado de idoneidade. Constata-se ainda que os indicadores dos domínios conferem um grau elevado a alguns dos documentos analisados: ao Teste Final nas facetas Epistémica e Cognitiva; ao Teste Diagnóstico nas facetas Interacional e Afetiva; às Fichas de Tarefas nas facetas Mediacional e Afetiva; e ao Plano PIIEDEQ na faceta Cognitivo. Apenas os indicadores da faceta Ecológica não conferiram um grau elevado de idoneidade a nenhum dos documentos analisados.

### 7.3. Análise *a posteriori* da idoneidade didática da intervenção de ensino

Com o objetivo de conhecer a idoneidade didática da implementação de ensino, nesta secção analisa-se a implementação de ensino e os resultados alcançados, incluindo o trabalho em diáde, as interações aí realizadas e aquelas efetuadas aquando da correção das tarefas, os resultados obtidos pelos alunos nos testes diagnóstico e final e a evolução das atitudes dos alunos em relação à Estatística.

A descrição da implementação foi efetuada no capítulo anterior, tendo-se procedido aí à análise dos conflitos detetados. Agora, a análise foca-se sobre os conteúdos tratados, os padrões de interação observados, os conflitos detetados (cognitivos, interacionais e mediacionais), e como estes são resolvidos por cada um dos intervenientes. Pretende-se, deste modo, interpretar e classificar os atos didáticos ocorridos. Tendo presente a análise realizada no capítulo anterior, procede-se à avaliação global do processo didático implementado, verificando a sua adequação e procurando as áreas de melhoria.

#### 7.3.1. Análise dos eventos significativos ocorridos na implementação de ensino

Segundo Godino (2013), a noção de idoneidade didática pode aplicar-se à análise de um processo de estudo implementado pontualmente numa aula, à planificação ou concretização de uma unidade didática, ou ao desenvolvimento integral de uma proposta curricular. Na análise descritiva da implementação de ensino tem-se em conta os conteúdos eficazmente tratados (configuração epistémica implementada), os meios utilizados e como o professor

interage com os alunos (configurações de instrução), as interações dos alunos, os conflitos de aprendizagem e como estes devem ser abordados.

Recorde-se que a apresentação da implementação se realizou numa sessão (aula zero) e durante doze aulas foi implementada a intervenção de ensino; a última aula foi de avaliação (TF), cumprindo-se assim o plano proposto (Quadros 12, Capítulo III; plano PIIEDEQ). Em cada aula houve sempre lugar a momentos de aula expositiva-teórica (uma aula de 50 minutos e onze momentos de cerca de 12 minutos cada), o professor investigador apresentou os conteúdos requeridos para a compreensão do conteúdo teórico e a realização de tarefas em cada aula; a resolução das fichas foi sempre em díade, em todas as aulas, como forma de introduzir, ilustrar, consolidar e aplicar os conteúdos abordados. Estas aulas foram acompanhadas sempre pelo professor titular da turma e pelo professor investigador, os quais, durante as resoluções circulavam pelos grupos, remetendo as suas dúvidas para a reflexão e para a consulta dos conteúdos registados no caderno diário e para as resoluções realizadas anteriormente. Após o tempo estipulado para a resolução de cada FT, procedeu-se à recolha das fichas resolvidas e, em grupo turma, o professor investigador moderou os debates que conduziram à resolução e correção de cada uma das tarefas. A última ficha foi resolvida individualmente fora da aula e corrigida na aula que antecedeu o teste avaliativo, que foi uma aula focada no esclarecimento de dúvidas.

No capítulo anterior foi descrita a implementação do ensino aula a aula. Para completar essa análise, nesta secção, procede-se à sistematização em termos globais, permitindo uma visão geral do efeito epistémico de ensino numa perspetiva de progressão da aprendizagem. Tenha-se em atenção que na descrição utiliza-se indistintamente palavras como "conflito" e "dificuldade" relativas a disparidades entre significados atribuídos a uma expressão (conflito semiótico) ou quando uma técnica ou propriedade matemática (ou estatística) são dominadas com dificuldade.

Para Godino, Batanero e Font (2009) a ideia de conflito semiótico é caracterizada como sendo

qualquer disparidade ou discrepância entre os significados atribuídos a uma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituições). Se a disparidade se produz entre significados institucionais falamos de conflitos semióticos de tipo epistémico, enquanto se a disparidade se produz entre práticas que formam o significado pessoal de um mesmo sujeito designamo-los como conflitos semióticos de tipo cognitivo. Quando a disparidade se produz entre as práticas (discursivas e operativas) de dois sujeitos diferentes em interação comunicativa (por

exemplo, aluno-aluno ou aluno-professor) falaremos de conflitos (semióticos) interacionais (p. 15).

Assim, analisam-se os eventos educacionais, indagando se são classificados de acordo com as facetas: epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional e afetiva.

Inicia-se esta análise pela implementação de ensino, durante a realização das Fichas de Tarefas, no decurso das aulas e fora destas (T19), tendo em conta todas as ocorrências aí verificadas (Quadro 13, Capítulo III). Posteriormente procede-se à análise da avaliação das aprendizagens, com a aplicação do Teste Final e a entrevista.

Quadro 45 – Síntese das ocorrências didáticas significativas no momento da implementação do ensino.

| Faceta   | Acontecimento didáticos significativos   |
|--|--|
| Epistémica<br>(Objetivos, conteúdos e processos) | <ul style="list-style-type: none"> <li>- O estudo de noções elementares de medidas de localização foi realizado na aula de revisões e consolidado na ficha de Tarefas FT1 e de dispersão (amplitude) foram trabalhadas na aula de revisões e nas tarefas das fichas FT1, FT2, FT3 e FT5 de forma explícita, com o objetivo de os visionar e consolidar.</li> <li>- Durante a aula 1 o professor investigador apresenta os conteúdos base através da projeção de slides; nas aulas 5 e 6 mostra alguns vídeos para melhorar a compreensão dos conceitos de quartis e a construção do DEQ.</li> <li>- Os conceitos básicos, definições, determinação e propriedades das medidas de localização e de dispersão (moda, média, mediana, máximo, mínimo, quartil, amplitude e amplitude interquartil), assim como a identificação da variável estatística, determinação de percentagem, análise de tabelas, gráficos de distribuição de frequências e de diagramas de caule-e-folhas e de DEQ e ainda a construção de DEQ) são lembrados pelo professor em intervenções específicas, como na aula de revisões e nos primeiros momentos da introdução de conceitos (FT3 e FT4) trabalhados pela primeira vez e ainda durante a apresentação da solução esperada.</li> <li>- O tema fundamental de procedimentos do estudo são aplicados principalmente pelos alunos para responder às situações-problema propostas, em diáde e pelo professor investigador aquando da correção das tarefas.</li> <li>- As principais propriedades do assunto do estudo (identificação dos quartis, construção e análise dos DEQ a partir de dados não organizados e/ou organizados em gráficos ou tabelas) são dadas pelo professor nas aulas 5 e 6.</li> <li>- Os alunos registam os conceitos e as correções no caderno diário e nas suas fichas, respetivamente, em cada aula.</li> <li>- A identificação e determinação dos quartis acontece a partir da realização da FT3, em diáde, quando este conceito é introduzido (aula 5).</li> <li>- Os alunos têm a oportunidade de comparar distribuições representadas em DEQ em dois momentos distintos: na resolução em diáde nas tarefas T11d, T14, T18 (quanto à simetria e dispersão), T16 (quanto aos valores extremos e amplitude) e na resolução como trabalho autónomo, T19, atividade não presencial.</li> <li>- Os alunos têm a oportunidade de construir os DEQ em dois momentos distintos: na resolução em diáde nas tarefas T11d, T14, T18 (quanto à simetria e dispersão), T16 (quanto aos valores extremos e amplitude) e na resolução como trabalho autónomo, T19, atividade não presencial.</li> <li>- Durante o projeto os professores promoveram constantemente a capacidade de argumentar, pedindo aos alunos para justificar e fundamentar as suas respostas.</li> <li>- A capacidade para trabalhar em grupo foi introduzida na forma como o trabalho em pares é desenvolvido; a capacidade de resolver problemas é estimulada pelas situações propostas com as tarefas T2, T3, T4e, T5e, T6e, T7b e FT5.</li> </ul> |

|  |  |
|--|--|
| <p style="text-align: center;">Cognitiva -afetiva<br/>(aprendizagens, competências e conflitos;)</p> | <p>No desenrolar da implementação de ensino, registaram-se os seguintes conflitos semióticos, tendo em conta a descrição realizada no Capítulo VI:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Relativamente às definições de conceito base estatísticos: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Alguma dificuldade em expressar de forma rigorosa oralmente as definições dos conceitos de variável, gráfico de pontos, pictograma, gráfico de linhas (Quadro 30, p. 230).</li> <li>• Alguma dificuldade em compreender a expressão “no máximo” (T4b), tendo os próprios alunos encontrado a resposta (p. 229).</li> <li>• Alguma dificuldade em identificar a variável em estudo e indicar os seus valores, por exemplo na resolução da T5a (Quadro 33, p. 233).</li> </ul> </li> <li>- Relativamente à identificação e determinação de medidas de localização, moda, média e mediana: <ul style="list-style-type: none"> <li>• As interações professor-aluno realizadas quando as díades solicitam o apoio dos professores revelam dificuldades em escolherem qual das medidas de localização melhor caracteriza uma dada distribuição (pp. 225-226); o professor leva os alunos à reflexão e remete os esclarecimentos de dúvidas para os registos efetuados anteriormente.</li> <li>• Revelam dificuldade ao aplicar o algoritmo do cálculo da mediana, pois não identificam corretamente o conjunto de dados (<math>\bar{C}2</math>) na T4c, T5d e T7b2 (Quadro 33, p. 233).</li> <li>• Manifestaram dificuldades em reconhecer o algoritmo do cálculo da média no conjunto de dados solicitados, não conseguindo determinar o valor médio (<math>\bar{C}9</math>) na resolução da tarefa T9a (Quadro 34, p. 248); em aplicar o algoritmo do cálculo da média, pois não identificam corretamente o conjunto de dados (<math>\bar{C}10</math>) na tarefa T5d (Quadro 33, p. 233), T16a (Quadro 36, p. 293) e em determinar outra medida estatística que não a mediana (<math>\bar{C}5</math>) na T11a6 (Quadro 35, p. 249); em identificar corretamente o conjunto de dados e aplicar corretamente o algoritmo do cálculo da média (C12) na T16a (Quadro 36, p. 293).</li> </ul> </li> </ul> |
| <p style="text-align: center;">Cognitiva -afetiva<br/>(aprendizagens, competências e conflitos;)</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Relativamente à análise de gráficos e tabelas: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Alguma dificuldade em interpretar dados organizados em gráficos de pontos, barras, linha, circular (FT2), já que 50% ou mais dos alunos apresenta resposta incorreta ou não responde, sendo ainda visível que o gráfico de pontos (T4) é o que apresenta melhores resultados (Capítulo VI, Quadro 31, p. 235; Quadro 32, p. 238).</li> <li>• Dificuldade em interpretar o gráfico de barras, como se constata em T10c (Quadro 34, p. 248). Alguma dificuldade em identificar duas representações gráficas diferentes de uma distribuição, como no caso de T11 (Quadro 35, p. 249) e T16 (Quadro 34, p. 248).</li> <li>• Muitas dificuldades na interpretação do gráfico circular, como no caso da tarefa T7 (Quadro 33, p. 233).</li> </ul> </li> <li>- Relativamente à construção e análise dos DEQ: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dificuldades em comparar duas distribuições em contexto de DEQ, por exemplo nas tarefas T11d (Quadro 35, p. 249) e T14 (Quadro 34, p. 248).</li> <li>• Dificuldades em analisar quanto à simetria e à dispersão os DEQ, como no caso de T18 (Quadro 35, p. 249) e T19 (p.248).</li> <li>• Revelam pouca dificuldade na determinação das cinco medidas para construir os DEQ, no entanto são pouco rigorosos na definição da escala (T11c) (Quadro 35, p. 238), T12.2 (Quadro 36, p. 243), T18a (Quadro 37, p. 252).</li> </ul> </li> <li>- Relativamente à resolução de problemas: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dificuldades em compreender e resolver os problemas, como por exemplo na tarefa T3 (pp.228-230), desistindo com facilidade face às primeiras dificuldades, como nas tarefas T7 (Quadro 31, p. 235) e T19 (p. 252).</li> </ul> </li> </ul>  |
| <p style="text-align: center;">Interacional<br/>(processos didáticos)</p>                            | <p>A metodologia didática privilegiada foi o trabalho em grupo, já que todas as atividades foram resolvidas em diade ou em grupo turma (correção das tarefas). O trabalho individual ocorreu raramente na aula, o professor incentivou a sua realização após cada aula como trabalho de casa, como no caso da FT6.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Nas fases do trabalho em diade manifestaram-se diversos conflitos, em que os professores remeteram sempre para a reflexão através do questionamento, levando-os a tirar as suas próprias conclusões (pp. 226- 249). Remetiam também para os apontamentos recolhidos aquando da correção das tarefas em grande grupo, registadas no caderno diário. As díades começaram a ser mais autónomas a partir da segunda ficha de tarefas, procurando por sua iniciativa as respostas nos seus apontamentos.</li> <li>- Na aula de revisões (aula 1) e no início de cada aula o professor investigador falou dos conceitos base para a realização de cada uma das fichas de tarefas através de um resumo sobre a aula anterior, dando ênfase aos conceitos a serem utilizados na aula.</li> <li>- No debate em grande grupo houve alunos que espontaneamente intervieram, contribuindo positivamente para a correção das tarefas no final de cada aula.</li> </ul>  |
| <p style="text-align: center;">Mediacional<br/>(recursos; tempo)</p>                                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Houve conflito no tempo gasto na realização das últimas tarefas das fichas de tarefas, já que houve necessidade de prolongar o tempo estipulado para a realização das fichas de tarefas FT2 e FT4.</li> <li>- O professor investigador utilizou a técnica de determinar os quartis (aula 5), a construção do DEQ e procedeu à sua análise quanto à simetria e à dispersão (aula 6 e 7). Para tal foram utilizados recursos informáticos: slides e vídeos.</li> </ul>  |

Ao analisar-se o Quadro 45 depreende-se que as orientações curriculares foram efetivamente implementadas e as situações-problemas apresentadas ajustaram-se à faixa etária e à realidade do público-alvo, no entanto, há dificuldades que persistiram, embora sejam em menor número. A maioria dos conflitos semióticos registados durante a resolução das tarefas em diáde, foram remetidas pelos professores, para os apontamentos registados, conferindo autonomia ao trabalho realizado pelos alunos, levando-os a construir as suas conclusões. As interações observadas entre aluno-aluno foram bastantes e conduziram a resultados favoráveis; em relação às interações professor-aluno, foram distintas: no trabalho em diáde o professor respeitou o trabalho autónomo e orientou os alunos na descoberta do conhecimento; em grande grupo o professor esclareceu, questionou e corrigiu as respostas dos alunos. Quanto ao tempo e aos materiais utilizados na explicação de conceitos estatísticos, realização e correção das tarefas foi suficiente.

### 7.3.2. Análise dos eventos significativos ocorridos na fase de avaliação

Nesta secção procede-se à análise da avaliação das aprendizagens, com a aplicação do Teste Final e a entrevista, nas facetas epistémica, cognitiva, interacional, mediacional e afetiva. Na entrevista esclarecem-se as dúvidas sobre as respostas observadas na resolução do Teste Final, permitindo compreender as aprendizagens efetivas.

Quadro 46 – Síntese das ocorrências didáticas significativas no momento da aplicação do teste de avaliação.

| Facetas  | Acontecimento didáticos significativos  |
|--|---|
| Epistémica<br>(Objetivos, conteúdos e processos) | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Há situações-problema sobre noções elementares lecionadas em anos anteriores, como: variável e os seus valores são resolvidos na Q1.1a; frequência absoluta e relativa na Q3a; valores máximo e mínimo nas Q1.1b, Q2.2, Q3c e Q4b; dispersão (amplitude) na Q1.1b, Q4b e Q4c; e sobre medidas de localização (média, moda e mediana) nas Q1.2, Q2.1c e Q3b.</li> <li>- Os conceitos básicos, definições, determinação e propriedades sobre medidas de localização e de dispersão (quartil e amplitude interquartil), lecionados no ano vigente, são propostos nas questões Q1.1c, Q2.2, Q2.3, Q4b e Q4d.</li> <li>- O tema fundamental de procedimentos do estudo são aplicados principalmente pelos alunos para responder às situações-problema propostas e pelo professor investigador aquando da entrevista.</li> <li>- A identificação e determinação dos quartis acontece nas questões Q1c, Q2.2, Q3c e Q4b.</li> <li>- Os alunos têm a oportunidade de construir os DEQ nas questões Q2.2 e Q4c.</li> <li>- Os alunos têm a oportunidade de comparar distribuições representadas em DEQ na questão Q4 e de procederem à análise de um DEQ quanto à simetria e à dispersão na Q2.3.</li> <li>- As principais propriedades do assunto do estudo (identificação dos quartis, construção e análise dos DEQ a partir de dados não organizados e/ou organizados em gráficos ou tabelas) são propostos pelo professor nas quatro questões.</li> <li>- Durante a entrevista o professor investigador promove constantemente a capacidade de argumentar, pedindo aos alunos para justificar e fundamentar as suas respostas.</li> <li>- A capacidade para trabalhar individualmente foi introduzida, uma vez mais, com a proposta do Teste de Avaliação Final; a capacidade de resolver problemas é estimulada pelas situações propostas com as Questões Q1.2, Q2.3, Q4d, Q4e e Q4f.</li> </ul> |



|  |  |
|--|--|
| <p style="text-align: center;">Cognitiva -afetiva<br/>(aprendizagens, competências e conflitos;)</p> | <p>No desenrolar da implementação do ensino registaram-se os seguintes conflitos semióticos, tendo em conta a descrição realizada no Capítulo VI:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Relativamente às definições de conceitos base estatísticos: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Alguma dificuldade em reconhecer os erros cometidos (entrevista, pp. 256 - 280) e em expressar oralmente, de forma rigorosa, as definições de média e mediana (pp. 225 - 226).</li> <li>• Dificuldades em compreender a expressão “pelo menos” (2.1b), já que nas respostas há uma elevada percentagem de respostas incorretas e de não respostas (56,5) (p. 254) e na entrevista essa dificuldade também foi observada (pp. 256 - 280).</li> <li>• Alguma dificuldade em identificar a variável em estudo e indicar os seus valores, por exemplo na resolução da Q1.1a (p. 256).</li> <li>• Pouca dificuldade na identificação das frequências absolutas e relativas (Q3a).</li> </ul> </li> <li>- Relativamente à identificação e determinação das medidas de localização moda, média e mediana: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Revelam pouca dificuldade em aplicar o algoritmo do cálculo da mediana, no entanto destaca-se um aluno A16 que, apesar de obter a resposta correta, não identifica corretamente o conjunto de dados (<math>\bar{C}2</math>) na Q3c (p. 272), que é também expressa na entrevista realizada (A16) (pp. 272-273)</li> <li>• Manifestaram alguma dificuldade em reconhecer o algoritmo de cálculo da média no conjunto de dados solicitados, não conseguindo determinar o valor médio (<math>\bar{C}12</math>), na resolução da questão Q1.2 e quando o aplicam nem sempre identificam corretamente o conjunto de dados (<math>\bar{C}12</math>) (pp. 257 -260 ).</li> </ul> </li> </ul>  |
| <p style="text-align: center;">Cognitiva -afetiva<br/>(aprendizagens, competências e conflitos;)</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Relativamente à análise de gráficos e tabelas: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dissiparam-se as dificuldades em interpretar dados organizados em gráficos barras (Q2), já que 82,6% apresenta a resposta correta na determinação da moda, média e mediana na Q2.1c (p. 262).</li> <li>• Dificuldade em transpor os dados de uma representação para outra (gráfico de barras para DEQ), como se constata em Q2.2 (pp.262-266), pois mais de 50% não responde corretamente e quando entrevistados manifestaram dificuldades na sua leitura (pp. 262-266).</li> </ul> </li> <li>- Relativamente à construção e análise dos DEQ: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dificuldades em comparar duas distribuições em contexto de DEQ (Q4), por exemplo nas questões Q4d, Q4e, Q4f e que na entrevista também foram detetadas (pp. 273-274).</li> <li>• Dificuldades em analisar os DEQ quanto à simetria e à dispersão, como no caso de Q2.3 (pp. 266-271) e Q4e e Q4f (pp. 274-277) e os alunos revelaram também fragilidades durante a entrevista nas duas situações.</li> <li>• Revelam pouca dificuldade na determinação das cinco medidas para construir os DEQ, no entanto são pouco rigorosos na definição da escala, levando-os a cometer erros, como os registados em Q2.2 (pp. 262-266) e Q4c (pp. 271-273).</li> </ul> </li> <li>- Relativamente à resolução de problemas: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dificuldades em compreender e resolver os problemas, como por exemplo na questão Q2.3 (pp. 263-268) e Q4d, Q4e e Q4f (pp. 274-280); na entrevista os alunos manifestaram alguma dificuldade em corrigir os erros e em resolver as situações-problema propostas (pp. 274-280).</li> </ul> </li> <li>- Relativamente à atitude face à estatística: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Os alunos preencheram novamente a Escala de Atitudes em Relação à Estatística e os resultados indicaram uma melhoria significativa da sua perceção sobre as atitudes em relação à estatística (pp. 319-325).</li> </ul> </li> </ul> |
| <p style="text-align: center;">Interacional<br/>(processos didáticos)</p>                            | <p>A metodologia didática privilegiada foi o trabalho individual, já que todas as atividades foram resolvidas individualmente, por se tratar de um teste de avaliação das aprendizagens.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- As questões propostas pelos professores no teste apresentam um grau de dificuldade crescente, e dentro de cada uma delas as alíneas também apresentavam grau de dificuldade crescente, como forma de motivar os alunos; quanto ao incentivo à persistência, ele salienta-se no cabeçalho da prova e nas solicitações dos professores no decurso da prova.</li> </ul>   |
| <p style="text-align: center;">Mediacional<br/>(recursos; tempo)</p>                                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>- Não houve conflito no tempo gasto para a realização da prova, já que ao toque todos os alunos entregaram a prova e saíram da sala; no entanto, a prova realizou-se a meio da tarde, no seu 7.º tempo letivo desse dia.</li> <li>- O professor investigador permitiu o uso da máquina de calcular durante toda a prova.</li> </ul>   |

Da análise do Quadro 46 depreende-se que as orientações curriculares foram efetivamente implementadas e as situações-problema apresentadas foram adequadas ao público alvo, no entanto, há registo de dificuldades na construção, análise e interpretação dos DEQ que persistiram. Constatam-se a existência de poucas dificuldades na determinação das medidas de localização e na interpretação de gráficos e tabelas. Quanto ao tempo e aos materiais utilizados foram adequados.

### 7.3.3. Avaliação das aprendizagens alcançadas pelos alunos

Nesta secção analisam-se os resultados dos alunos no momento avaliativo (TF) e as suas atitudes em relação à estatística após a intervenção de ensino.

#### 7.3.3.1. Resultados obtidos pelos alunos no Teste Final

Para analisar os resultados alcançados (Tabela 44), considera-se que a cada resposta correta é atribuído dois pontos, a cada resposta parcialmente correta é atribuído metade dos pontos e às respostas incorretas e não respostas é atribuído zero pontos. A percentagem de respostas corretas e parcialmente corretas obtidas pelos alunos nos momentos avaliativos (TD, FT e TF) agrupam-se do seguinte modo:

- *Resultado elevado*, supondo uma percentagem de 70% ou mais de respostas corretas ou parcialmente corretas (C+CP);
- *Resultado médio*, se apresenta uma percentagem de respostas corretas ou parcialmente corretas (C+PC) compreendida entre 40% e 70%;
- *Resultado baixo*, se a percentagem de respostas corretas ou parcialmente corretas (C+PC) for inferior a 40%.

Tabela 44 – Análise dos resultados obtidos pelos alunos antes, durante e depois da implementação de ensino (avaliação escrita)

| Tipo de documento | Número de unidades | Tarefas ou questões | Pontuação máxima possível | Pontuação obtida | Percentagem e grau de respostas corretas por tarefa ou questão |       | Percentagem e grau de respostas corretas por tipo de documento |       |
|-------------------|--------------------|---------------------|---------------------------|------------------|--|-------|--|-------|
| TD                | 22 alunos          | Q4                  | 220                       | 114              | 52   | Médio | 36   | Baixo |
|                   |                    | Q5                  | 220                       | 80               | 36   | Baixo |  |       |
|                   |                    | Q6                  | 220                       | 45               | 20   | Baixo |  |       |
| FT1               | 11 díades          | T1                  | 66                        | 56               | 85   | Alto  | 72   | Alto  |
|                   |                    | T2                  | 110                       | 101              | 92   | Alto  |  |       |
|                   |                    | T3                  | 88                        | 32               | 36   | Baixo |  |       |
| FT2               |                    | T4                  | 110                       | 91               | 83   | Alto  | 72   | Alto  |
|                   |                    | T5                  | 110                       | 76               | 69   | Médio |  |       |

|     |           |           |      |      |     |       |    |       |
|-----|-----------|-----------|------|------|-----|-------|----|-------|
|     |           | T6        | 110  | 92   | 84  | Alto  |    |       |
|     |           | T7        | 88   | 38   | 43  | Médio |    |       |
| FT3 |           | T8        | 88   | 76   | 86  | Alto  | 85 | Alto  |
|     |           | T9        | 110  | 91   | 79  | Alto  |    |       |
|     |           | T10       | 66   | 56   | 85  | Alto  |    |       |
| FT4 |           | T11       | 330  | 256  | 78  | Alto  | 78 | Alto  |
|     |           | T12       | 110  | 91   | 83  | Alto  |    |       |
|     |           | T13       | 22   | 20   | 91  | Alto  |    |       |
| FT5 |           | T14       | 88   | 66   | 75  | Alto  | 74 | Alto  |
|     |           | T15       | 22   | 22   | 100 | Alto  |    |       |
|     |           | T16       | 132  | 56   | 85  | Alto  |    |       |
|     |           | T17       | 132  | 92   | 61  | Médio |    |       |
|     |           | T18       | 88   | 43   | 49  | Médio |    |       |
|     |           | Global FT | 1804 | 1273 | 71  | Alto  |    |       |
| FT6 | 8 alunos  | T19       | 128  | 117  | 91  | Alto  | 91 | Alto  |
|     |           | Q1        | 92   | 134  | 73  | Alto  |    |       |
| TF  | 23 alunos | Q2        | 184  | 158  | 69  | Médio | 61 | Médio |
|     |           | Q3        | 138  | 118  | 86  | Alto  |    |       |
|     |           | Q4        | 276  | 91   | 33  | Baixo |    |       |

A Tabela 44 contendo os resultados obtidos nos testes diagnóstico e final e em cada uma das tarefas das fichas de tarefas. Na construção desta tabela foram tidos em conta os resultados das Tabelas 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37 e 38.

Observando os resultados registados na Tabela 44, verifica-se que comparando resultados:

- i) Inicialmente, os resultados alcançados pelos alunos na resolução individual do teste diagnóstico (TD) foram piores do que os resultados alcançados na realização das fichas de tarefas (FT), resolvidas em díade após a introdução dos conceitos base e com o apoio do professor;
- ii) Os resultados inicialmente alcançados pelos alunos na resolução individual do teste diagnóstico (TD) foram superados pelos resultados alcançados no teste final (TF), também resolvido individualmente;
- iii) Os resultados alcançados na realização das fichas de tarefas (FT), resolvidas em díade, com apoio do professor, durante as aulas e após a introdução de conceitos base, são melhores do que os alcançados no teste final (TF), resolvido individualmente e aplicado no final da implementação do ensino.

Estes resultados apontam para uma melhoria das aprendizagens dos alunos desde a fase de diagnose à fase de avaliação das aprendizagens dos novos conteúdos. Donde, conclui-se que os alunos utilizaram, de forma adequada, os saberes, procedimentos e conexões

estabelecidas, o que permite avaliar, de forma positiva, os conhecimentos e compreensões estatísticas adquiridos.

### 7.3.3.2. Resultados obtidos pelos alunos na Escala de Atitudes em Relação à Estatística

Nesta secção procura-se analisar e compreender as alterações das atitudes dos alunos face à Estatística, comparando os dados obtidos na fase de diagnose com os da fase pós-intervenção. Na Tabela 45 apresentam-se os resultados da turma do 8.º ano, onde decorreu a Intervenção de Ensino, da Escala de Atitudes em relação à Estatística na fase de diagnóstico (FD) e na fase pós-intervenção (FPI).

Tabela 45 – Frequências absolutas das pontuações das respostas dos alunos do 8.º ano aos 23 itens nas fases de diagnóstico e pós-intervenção

| Itens  | Pontuação (Fase de Diagnose) |   |    |   |   |                 | Pontuação (Fase pós-Intervenção) |   |    |    |    |
|--|------------------------------|---|----|---|---|-----------------|----------------------------------|---|----|----|----|
|  | 1                            | 2 | 3  | 4 | 5 | NR <sup>1</sup> | 1                                | 2 | 3  | 4  | 5  |
| 1. Eu gosto de estatística.  | 0                            | 6 | 10 | 4 | 2 | 1               | 0                                | 1 | 3  | 10 | 9  |
| 2. Sinto-me inseguro quando resolvo problemas de estatística.                            | 3                            | 3 | 10 | 4 | 2 | 1               | 0                                | 0 | 4  | 6  | 13 |
| 3. Tenho dificuldades de compreender a estatística por causa da minha maneira de pensar. | 2                            | 3 | 6  | 6 | 5 | 1               | 0                                | 1 | 3  | 7  | 12 |
| 4. As fórmulas estatísticas são fáceis de compreender.                                   | 3                            | 3 | 10 | 2 | 4 | 1               | 0                                | 1 | 5  | 11 | 6  |
| 5. A estatística não serve para nada.  | 1                            | 2 | 8  | 4 | 7 | 1               | 0                                | 0 | 5  | 8  | 10 |
| 6. A estatística é um tópico complicado.   | 1                            | 4 | 12 | 5 | 0 | 1               | 0                                | 1 | 2  | 16 | 4  |
| 7. Eu não faço ideia do que se pode fazer com a estatística.                             | 0                            | 5 | 8  | 5 | 4 | 1               | 0                                | 0 | 3  | 14 | 6  |
| 8. Eu fico frustrado/a quando faço testes de estatística.                                | 0                            | 4 | 9  | 2 | 7 | 1               | 0                                | 0 | 4  | 4  | 15 |
| 9. Os conceitos estatísticos não se aplicam fora da escola.                              | 1                            | 4 | 8  | 2 | 7 | 1               | 0                                | 0 | 3  | 13 | 7  |
| 10. Eu utilizo a estatística na minha vida do dia-a-dia                                  | 5                            | 1 | 9  | 7 | 0 | 1               | 2                                | 9 | 6  | 6  | 0  |
| 11. Eu fico tenso nas aulas quando o tópico é Estatística.                               | 0                            | 2 | 12 | 0 | 8 | 1               | 0                                | 0 | 6  | 12 | 5  |
| 12. Eu gosto das aulas em que se estuda estatística.                                     | 1                            | 1 | 10 | 8 | 2 | 1               | 0                                | 2 | 6  | 11 | 4  |
| 13. As conclusões estatísticas raramente se observam na vida.                            | 0                            | 5 | 9  | 7 | 1 | 1               | 0                                | 1 | 7  | 11 | 4  |
| 14. A estatística é um tópico que a maioria dos alunos aprende rapidamente.              | 1                            | 3 | 10 | 5 | 3 | 1               | 0                                | 5 | 4  | 8  | 6  |
| 15. Aprender estatística requer muita disciplina no estudo.                              | 0                            | 9 | 10 | 0 | 3 | 1               | 0                                | 3 | 12 | 5  | 3  |
| 16. Não usarei estatística na minha futura profissão.                                    | 1                            | 5 | 13 | 1 | 3 | 1               | 2                                | 0 | 15 | 2  | 4  |
| 17. Cometo muitos erros quando trabalho com a estatística.                               | 1                            | 3 | 9  | 5 | 4 | 1               | 0                                | 2 | 3  | 14 | 4  |
| 18. A estatística assusta-me.  | 0                            | 1 | 9  | 3 | 9 | 1               | 0                                | 0 | 4  | 8  | 11 |
| 19. A estatística requer muito cálculo.  | 1                            | 5 | 14 | 1 | 1 | 1               | 0                                | 6 | 5  | 11 | 1  |
| 20. Eu consigo aprender estatística.   | 0                            | 1 | 9  | 7 | 5 | 1               | 0                                | 0 | 2  | 15 | 6  |
| 21. Eu compreendo as fórmulas estatísticas.  | 1                            | 1 | 12 | 3 | 5 | 1               | 0                                | 0 | 3  | 16 | 4  |
| 22. A estatística não é importante na minha vida.  | 0                            | 3 | 13 | 5 | 1 | 1               | 0                                | 2 | 8  | 9  | 4  |

|  |   |   |    |   |   |   |   |   |   |    |   |
|--|---|---|----|---|---|---|---|---|---|----|---|
| 23. Eu acho difícil compreender os conceitos estatísticos. | 2 | 2 | 12 | 4 | 2 | 1 | 0 | 1 | 5 | 13 | 4 |
|--|---|---|----|---|---|---|---|---|---|----|---|

<sup>1</sup> O aluno A0 não esteve presente na escola no período de diagnose.

Pela da Tabela 45 constata-se que os resultados da implementação da EAE adaptada na turma onde houve intervenção diferem entre o primeiro momento e o segundo (*a priori* e *a posteriori* da intervenção), o que parece revelar uma melhoria, na “consciência estatística” dos alunos. Na tabela abaixo foram registados os valores totais, cujo mínimo global é 23 e o máximo global é 115, e a percentagem relativamente ao máximo da pontuação da EAE adaptada antes e depois da implementação:

Tabela 46 – Resultados totais dos alunos e percentagem do máximo da pontuação da escala EAE adaptada de 23 itens *a priori* e *a posteriori* da intervenção pedagógica

|     | a priori (FD) |       | a posteriori (FPI) |    |     | a priori (FD) |    | a posteriori (FPI) |    |
|-----|---------------|-------|--------------------|----|-----|---------------|----|--------------------|----|
|     | Global        | %     | Global             | %  |     | Global        | %  | Global             | %  |
| A0  | -----         | ----- | 88                 | 77 | A25 | 68            | 59 | 81                 | 70 |
| A14 | 59            | 51    | 82                 | 71 | A26 | 69            | 60 | 101                | 88 |
| A15 | 91            | 79    | 100                | 87 | A27 | 107           | 93 | 82                 | 71 |
| A16 | 71            | 62    | 82                 | 71 | A28 | 91            | 79 | 87                 | 76 |
| A17 | 61            | 53    | 98                 | 85 | A29 | 69            | 60 | 72                 | 63 |
| A18 | 87            | 76    | 102                | 89 | A30 | 66            | 57 | 87                 | 76 |
| A19 | 78            | 68    | 87                 | 76 | A31 | 69            | 60 | 84                 | 73 |
| A20 | 58            | 50    | 81                 | 70 | A32 | 47            | 41 | 97                 | 84 |
| A21 | 87            | 76    | 90                 | 78 | A33 | 69            | 60 | 92                 | 80 |
| A22 | 69            | 60    | 95                 | 83 | A34 | 97            | 84 | 91                 | 79 |
| A23 | 72            | 63    | 89                 | 77 | A35 | 94            | 82 | 95                 | 83 |
| A24 | 69            | 60    | 99                 | 86 |     |               |    |                    |    |

<sup>2</sup> O aluno A0 não esteve presente na escola no período de diagnose.

O aluno A0 entrou mais tarde na escola (3.º período) e não realizou o teste diagnóstico, mas fez parte de um grupo de trabalho durante a Intervenção de Ensino. A situação deste aluno é distinta dos restantes, já que não realizou, na fase de diagnose, o TD e a EAE adaptada, havendo registos dele apenas sobre a intervenção de ensino, quando realizou as fichas de tarefas e o TF.

Com o objetivo de analisar as atitudes dos alunos em relação à Estatística, antes e depois da intervenção de ensino, fez-se o teste de Kolmogorov-Smirnov (Pestana & Velosa, 2010)

para verificar se os dados obtidos em cada fator e no total tem distribuição normal. De seguida apresenta-se a Tabela 47, com os resultados.

Tabela 47 – Resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov de uma amostra dos fatores a priori (antes) e a posteriori (depois) da intervenção de ensino

| Fatores | Momento da IE | Parâmetros normais <sup>a,b</sup> |        | Diferenças Mais Extremas |          |          | Estatística do teste | Significância Assint. (Bilateral) |
|---------|---------------|-----------------------------------|--------|--------------------------|----------|----------|----------------------|-----------------------------------|
|         |               | Médias                            | DP     | Absoluto                 | Positivo | Negativo |                      |                                   |
| DCE     | antes         | 36,09                             | 7,807  | ,192                     | ,192     | -,164    | ,192                 | ,034 <sup>c</sup>                 |
|         | depois        | 41,45                             | 4,688  | ,189                     | ,168     | -,114    | ,168                 | ,106 <sup>c</sup>                 |
| DVE     | antes         | 25,73                             | 5,522  | ,168                     | ,201     | -,115    | ,201                 | ,021 <sup>c</sup>                 |
|         | depois        | 30,45                             | 2,907  | ,146                     | ,218     | -,146    | ,218                 | ,008 <sup>c</sup>                 |
| CUE     | antes         | 19,91                             | 4,770  | ,201                     | ,214     | -,112    | ,214                 | ,010 <sup>c</sup>                 |
|         | depois        | 23,23                             | 2,562  | ,164                     | ,084     | -,189    | ,189                 | ,040 <sup>c</sup>                 |
| AEE     | antes         | 8,95                              | 1,889  | ,218                     | ,146     | -,128    | ,146                 | ,200 <sup>c,d</sup>               |
|         | depois        | 10,77                             | 1,445  | ,165                     | ,140     | -,164    | ,164                 | ,128 <sup>c</sup>                 |
| Totais  | antes         | 74,91                             | 14,758 | ,214                     | ,165     | -,120    | ,165                 | ,124 <sup>c</sup>                 |
|         | depois        | 89,73                             | 8,031  | ,108                     | ,105     | -,108    | ,108                 | ,200 <sup>c,d</sup>               |

a. A distribuição do teste é Normal; b. Calculado dos dados; c. Correção de Significância de Lilliefors; d. Este é um limite inferior da significância verdadeira.

Da análise da tabela constata-se que há alguns dados que não seguem uma distribuição normal ( $p < 0,05$ ), pelo que se vai utilizar testes não paramétricos. Vai ser utilizado o mesmo procedimento estatístico para todos. Assim, ao comparar a distribuição *a priori* e *a posteriori*, em cada um dos fatores e no total, usando o teste (não paramétrico) de Wilcoxon tem-se:

Tabela 48 – Resultados do teste de Wilcoxon de uma amostra dos fatores a priori (antes) e a posteriori (depois) da intervenção de ensino

|                                   | DCEapos - DCEantes | DVEapos - DVEantes | CUEapos - CUEantes | AEEapos - AEEantes | Totalapos - Totalantes |
|-----------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------------------------|
| Z                                 | 2,410              | 2,759              | 2,491              | 2,914              | 3,264                  |
| Significância Assint. (Bilateral) | ,016               | ,006               | ,013               | ,004               | ,001                   |

Como todos os valores-p são inferiores a 0,05, significa que o valor mediano de um fator *a priori* e o valor mediano desse fator *a posteriori* da intervenção de ensino são significativamente diferentes. Ao pretender-se saber se os valores são maiores ou menores, verifica-se que são todos inferiores que 0,008 0,0030; 0,0065; 0,002; 0,0005 (dividindo o p obtido por dois). Ora como os valores da estatística (Z) são todos positivos, sabe-se que  $Fator\_antes - Fator\_depois < 0$ , pelo que a mediana do Fator\_antes é significativamente inferior à mediana do Fator\_depois.

Saliente-se que o valor estatístico observado é negativo em cada um dos pares, logo o valor da variável na Fase de Diagnose (FD) é menor que o valor da variável na Fase de Pós-

Intervenção (FPI), nos cinco pares. Assim, da análise dos resultados obtidos, conclui-se que os alunos melhoram a sua percepção sobre a atitude face à estatística.

Estes resultados requerem uma análise mais cuidada das respostas dos alunos (Tabela 49), em cada uma das fases (FD e FPI), em termos globais, tendo em conta as componentes Disposição e Valorização da Estatística (DVE), Discernimento e Conceção (DCE), Comportamento e Utilidade da Estatística (CUE) e Aptidão no Estudo da Estatística (AEE).

Tabela 49 – Comparação entre os resultados globais das componentes das atitudes avaliadas na escala de EAE adaptada, na Fase de Diagnose e na Fase de Pós-Intervenção de Ensino

| Aluno | Componentes |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|       | DVE         |     | DCE |     | CUE |     | AEE |     |
|       | FD          | FPI | FD  | FPI | FD  | FPI | FD  | FPI |
| A14   | 26          | 37  | 20  | 27  | 13  | 21  | 9   | 9   |
| A15   | 46          | 46  | 34  | 34  | 25  | 26  | 9   | 11  |
| A16   | 33          | 36  | 23  | 29  | 24  | 18  | 7   | 11  |
| A17   | 28          | 48  | 21  | 33  | 16  | 26  | 9   | 10  |
| A18   | 35          | 46  | 21  | 34  | 26  | 26  | 13  | 13  |
| A19   | 37          | 41  | 28  | 28  | 22  | 22  | 8   | 10  |
| A20   | 34          | 41  | 28  | 26  | 12  | 22  | 6   | 11  |
| A21   | 38          | 41  | 28  | 33  | 27  | 20  | 10  | 11  |
| A22   | 33          | 45  | 24  | 31  | 18  | 24  | 9   | 13  |
| A23   | 35          | 42  | 22  | 31  | 23  | 25  | 8   | 9   |
| A24   | 34          | 49  | 30  | 32  | 16  | 26  | 8   | 12  |
| A25   | 37          | 37  | 28  | 27  | 16  | 22  | 7   | 10  |
| A26   | 33          | 46  | 24  | 35  | 18  | 24  | 9   | 13  |
| A27   | 52          | 38  | 36  | 26  | 30  | 22  | 11  | 8   |
| A28   | 47          | 41  | 30  | 30  | 21  | 23  | 12  | 10  |
| A29   | 33          | 28  | 24  | 28  | 18  | 17  | 9   | 9   |
| A30   | 32          | 41  | 21  | 29  | 17  | 25  | 8   | 11  |
| A31   | 33          | 38  | 24  | 28  | 18  | 23  | 9   | 10  |
| A32   | 20          | 43  | 14  | 34  | 16  | 24  | 5   | 13  |
| A33   | 32          | 41  | 20  | 34  | 16  | 24  | 9   | 10  |

|       |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| A34   | 49  | 44  | 33  | 29  | 24  | 25  | 11  | 12  |
| A35   | 47  | 43  | 33  | 32  | 22  | 26  | 11  | 11  |
| A0    | 0   | 45  | 0   | 30  | 0   | 23  | 0   | 9   |
| Total | 797 | 957 | 566 | 700 | 438 | 534 | 197 | 246 |

(\*\*) Pela Tabela 25 os quatro fatores contém mais do que um item, por isso, existe influência, na identificação, de mais do que um fator.

Da análise da Tabela 49, em termos totais, verifica-se que todas as componentes melhoram os resultados globais obtidos após a Intervenção de Ensino. Comparando os resultados obtidos nas duas fases (FD e FPI), constata-se que a maioria dos alunos (60,8%) melhorou ou manteve a pontuação global obtida individualmente em cada um dos fatores, enquanto alguns alunos (17,4%) pioraram as pontuações globais obtidas em pelo menos dois fatores. Neste último caso, constata-se que as alterações desfavoráveis são mais significativas nas componentes Disposição e Valorização da Estatística (DVE) e Discernimento e Conceção (DCE) ambas com a mesma percentagem de alteração de atitudes negativas (17,4%), o que pode significar que os alunos continuam a ter dificuldades na compreensão e aplicação dos conceitos, continuando a ter concepções negativas sobre a estatística. Estes resultados podem ser observados na Tabela 50.

Tabela 50 – Comparação entre os resultados globais das componentes das atitudes avaliadas na escala de EAE adaptada, na Fase de Diagnose e na Fase de Pós-Intervenção de Ensino

| Aluno | Componentes (n=23) |          |          |        |
|-------|--------------------|----------|----------|--------|
|       | DVE                | DCE      | CUE      | AEE    |
| A16   |                    |          | ✓        |        |
| A20   |                    | ✓        |          |        |
| A21   |                    |          | ✓        |        |
| A25   |                    | ✓        |          |        |
| A27   | ✓                  | ✓        | ✓        | ✓      |
| A28   | ✓                  |          |          |        |
| A29   | ✓                  |          | ✓        |        |
| A34   | ✓                  | ✓        |          |        |
| A35   | ✓                  | ✓        |          |        |
| Total | 5 (21,7)           | 5 (21,7) | 4 (17,4) | 1(4,3) |

Na Tabela 50 destaca-se ainda que apenas um aluno (A27) revela menor pontuação em todos os componentes de atitude avaliados, enquanto que quatro alunos (A29, A34 e A35) obtiveram pior pontuação em metade das componentes de atitude avaliadas, os restantes (A16, A20, A21, A25 e A28) obtiveram pior pontuação a apenas um componente.

Cruzando os resultados organizados nas Tabelas 45, 46 e 47 constata-se que:



- Os vinte e três itens da EAE adaptada são agrupados em Disposição e Valorização da Estatística (DVE), Discernimento e Conceção (DCE), Comportamento e Utilidade da Estatística (CUE) e Aptidão no Estudo da Estatística (AEE), formando os componentes relacionados com a EAE adotada (Capítulo V, pp. 203 - 212). Assim, os resultados registados na Tabela 46 evidenciam a relação entre os itens e os componentes de atitude avaliados. Efetue-se a análise segundo duas perspetivas, DVE + DCE e CUE + AEE: para os alunos A27, A34 e A35, que apresentam alterações negativas, após a Intervenção de Ensino, simultaneamente nas componentes DVE e DCE; para o aluno A27, que apresenta também alterações negativas relativamente às componentes CUE e AEE. No primeiro caso há uma diminuição da Disposição, Valorização, Discernimento e Conceção da Estatística; no segundo caso, transparece a menor consciencialização da Utilidade, Comportamento e Aptidão no Estudo da Estatística.

- Dos nove alunos que obtiveram piores pontuações na Fase de Pós-Intervenção de Ensino, em pelo menos um fator, cinco deles apresentaram desempenho favorável no Teste Final (com mais de 50% de respostas corretas e menos de 75%); apenas um aluno (A27) revela desempenho bastante desfavorável (inferior a 25% de respostas corretas) nesse mesmo teste.

- Há dez alunos (43,5%) em que a Intervenção de Ensino contribuiu para melhorar a sua pontuação a todas as componentes avaliadas, melhorando também a sua perceção e atitudes face à Estatística. Destes alunos, o desempenho no TF foi negativo para os alunos A0 e A31, já que apenas responderam corretamente a menos de 50% das perguntas; já os alunos A17, A22, A23, A24, A30, A32 e A33 responderam corretamente a pelo menos 50% das perguntas.

- Não há nenhum aluno que tenha mantido sua pontuação após a Intervenção de Ensino em todos os componentes, no entanto há quatro alunos (A14, A15, A18 e A19) que mantiveram a pontuação em pelo menos um dos componentes e destes dois obtiveram bom desempenho (A15 com 89% e A18 com 92%), na resolução do Teste Final; os outros dois alunos (A14 e A19) alteraram as suas pontuações favoravelmente em pelo menos duas componentes, mantiveram a pontuação em pelo menos um componente (AEE; e DCE e CUE, respetivamente). Quanto ao seu desempenho no TF, estes dois alunos revelaram um desempenho médio.

Em síntese, a maioria dos alunos revelou uma alteração positiva relativamente à sua atitudes face à Estatística, após a Intervenção de Ensino, nas diferentes componentes avaliadas, como se pode constatar na Tabela 49.

Este resultado parece indicar que, por um lado, os alunos melhoraram a sua conceção e perceção sobre a Estatística; e, por outro lado, aponta o desempenho positivo da maioria dos

alunos no Teste Final (78,2%), já que responderam corretamente a mais de 50% das perguntas. Este desempenho poderá ter contribuído para uma melhor atitudes face à Estatística, já que a implementação da EAE adaptada aconteceu após a intervenção de ensino e da sua avaliação.

#### 7.4. Análise retrospectiva

Nesta análise retrospectiva, pretende-se: comparar a análise *a priori*, realizada sobre as práticas, objetos e processos implicados na implementação de ensino, com os realmente observados na implementação; realizar uma reflexão sobre as normas que condicionaram o processo instrucional; verificar os resultados de aprendizagem; e avaliar a idoneidade didática da implementação de ensino em termos globais.

##### 7.4.1. Comparação entre o plano proposto e as ocorrências didáticas observadas

Aqui, salienta-se a comparação entre o plano, as ocorrências didáticas observadas no domínio epistémico do plano PIIEDEQ e as observadas na implementação de ensino. Para tal, utilizam-se as mesmas ferramentas teóricas da análise *a priori* (objetos e processos).

###### 7.4.1.1. Tipo de Situações-problema e práticas estatísticas

O estudo foi conduzido em torno das tarefas propostas nas seis fichas. As práticas operativas e discursivas estatísticas desenvolvidas na resolução das situações-problema foram consistentes com as previstas no plano.

No caso da tarefa T1, com dados não organizados, os alunos utilizaram os algoritmos para determinar a média e a mediana e identificar a moda, o máximo e o mínimo; na tarefa T2 os alunos determinaram a frequência relativa, o efetivo total, a mediana e identificaram a moda e a variável estatística e os seus valores, e outro tipo de representação (o gráfico de pontos) da distribuição apresentada em diagrama de caule-e-folhas e, ainda, mostraram que uma dada percentagem corresponde a um resultado proposto para dados organizados num diagrama de caule-e-folhas; por último, na tarefa T3, os alunos determinaram a média, a mediana e a moda, bem como identificaram qual delas melhor representa uma amostra num determinado contexto com dados não organizados. O professor investigador iniciou as práticas a realizar na revisão dos conceitos necessários para a resolução da FT1, utilizando para isso um conjunto de slides;

as dúvidas foram esclarecidas aquando da discussão sobre a proposta de resolução de cada um dos grupos, no momento de correção.

Na resolução das tarefas da FT2, os alunos realizaram algumas tarefas em que os dados eram representados por gráficos de pontos (T4), barras (T5), linhas (T6) e circulares (T7). Os alunos foram incentivados a determinar, em cada um dos casos, a média, a mediana e a identificar a moda, o máximo e o mínimo. O professor investigador, nas práticas realizadas, mediou o debate no momento da correção da FT2, registando no quadro a(s) resposta(s) corretas proferidas por um dos elementos da díade, escolhido aleatoriamente.

Em relação à FT3, o professor investigador explicou os quartis e a amplitude interquartil e aplicou o algoritmo da mediana na sua determinação, apoiando-se em slides e num vídeo. Os alunos determinaram os quartis (T8) em dados não organizados e, para além destas práticas novas, voltaram a usar práticas passadas, tais como determinar a média, a mediana, a amplitude e amplitude interquartil e indicar o valor do máximo, mínimo e moda (T9 e T10), além de construíram um gráfico de pontos (T10).

No que concerne à FT4, cujos dados se apresentavam numa tabela, os alunos determinaram a média, a mediana, a amplitude e a amplitude interquartil (T11a, T11b, T11c, T11d) e indicaram a moda, a variável estatística e os seus valores, o máximo e o mínimo, construíram o gráfico de pontos e o diagrama de extremos e quartis (T11 a, T11b e T11c) e compararam duas distribuições representadas em DEQ (T11d). Quanto aos quartis e quanto à simetria e dispersão, os alunos identificaram outro tipo de representação, o gráfico de pontos, da distribuição apresentada em diagrama (T11e). Em relação à FT4, o professor investigador explicou os DEQ e como os construir, com recurso à estrutura do gráfico de pontos realizado na aula anterior (T10c); e para melhorar a aprendizagem, apresentou um vídeo no início da aula. Na sua intervenção, na aula de correção da resolução, o professor investigador apoiou os alunos com mais dificuldades, focando os seus esclarecimentos neles e solicitando aos outros alunos a partilha dos seus conhecimentos, moderando assim as intervenções dos alunos.

Quanto à ficha de tarefas FT5, os alunos realizaram várias das tarefas, cujas situações-problema abordavam os conceitos trabalhados anteriormente em variados contextos: dados não organizados (T12 e T13), DEQ (T14, T15 e FT19), gráfico de barras (T16). Assim, os alunos determinaram frequências relativas, um valor desconhecido, conhecido o 1.º e o 3.º quartil e a simetria do gráfico de pontos; indicaram o conjunto de dados que corresponde à representação dada, valores da distribuição em determinado contexto e os quartis; construíram o diagrama de extremos e quartis; explicaram raciocínios utilizados na determinação de uma dada percentagem, comparando quartis de dois DEQ de duas distribuições e compararam

diagramas de extremos e quartis, quanto aos valores extremos, à sua dispersão, simetria e amplitude. O professor investigador moderou o debate no momento em que a ficha de tarefas foi corrigida.

Os professores deram apoio constante às díades, quando estas o solicitavam, e acompanharam os que revelavam mais dificuldades em responder às situações-problema.

#### 7.4.1.2. Elementos linguísticos

Foram identificadas algumas situações que geraram conflitos: na T2 o diagrama de caule-e-folhas, por apresentar parte dos dados referidos no enunciado; a expressão “no máximo” na T4 e o facto de, ao apresentar-se a noção de quartil, ser referido que a “distribuição é dividida, aproximadamente em quatro”. O professor investigador esclareceu o motivo deste grau de incerteza, mas, apesar disso, houve alunos que continuaram com dificuldade em compreender tal incerteza.

Uma outra situação que poderia ter gerado conflito, na alínea 1b do TD, onde é referido “sabendo que ela dorme 8 horas por dia”, pois deveria estar “sabendo que ela deveria dormir 8 horas por dia”. Os alunos responderam como era espectável, pelo que não se tratou de uma situação de conflito.

#### 7.4.1.3. Elementos conceptuais

Apesar da aula de revisões, realizada pelo professor investigador, alguns alunos, na resolução das tarefas, apresentaram dificuldades em identificar corretamente o conjunto de dados para aplicar o algoritmo de cálculo da mediana (T1, T2, T7b) e, por vezes, determinam outra medida estatística, a média em vez da mediana e vice-versa (T11a.6) e, no caso da média, tiveram dificuldades em identificar corretamente o conjunto de dados para aplicar o algoritmo de cálculo da média (T16a). Estas dificuldades sentidas pelos alunos na representação gráfica e tabelar e na interpretação de enunciados envolvendo a noção de média, moda e mediana estão patentes nas provas de avaliação nacional (Sousa, Ferreira, Castanheira, & Lourenço, 2010) e em muitos estudos de investigação (e.g., Andrade, & Saraiva, 2012; Batanero, 2000; Friel, Curcio, & Bright, 2001; Ponte, & Fonseca, 2001; Serrano, Ortiz, & Rodriguez, 2009).

Em relação aos novos conceitos, os alunos revelaram alguma dificuldade na construção do DEQ, em especial no que respeita ao rigor na sua construção e na escolha da escala; na análise de DEQ e na comparação de duas distribuições com dados em DEQ, sobretudo na

análise quanto à dispersão e à simetria, apesar da exibição dos vídeos pelo professor investigador.

#### 7.4.1.4. Propriedades e procedimentos

O professor investigador propôs nas FT tarefas diversificadas, com dados não organizados e organizados em tabelas e gráficos de modo a proporcionar aos alunos contextos variados de aplicação dos conceitos. Nas fichas de tarefas também foram propostas situações-problema para praticar procedimentos e para aplicar algoritmos e conceitos, com recurso a tarefas em que se propunha identificar medidas de localização e dispersão, representar e reconhecer conjuntos de dados numéricos.

Os alunos resolveram problemas onde se abordavam os conceitos tratados, praticaram procedimentos, aplicaram algoritmos, exercitaram e consolidaram os seus conhecimentos e noções estatísticas; souberam identificar, reconhecer e representar conjuntos de dados numéricos, gráficos e representações gráficas, medidas de localização e de dispersão.

Há ainda a registar alguns “conflitos de procedimento” que ocorreram durante a implementação do ensino:

- Na determinação da média, apresentando um valor superior aos valores da variável;
- Ignorando a frequência dos valores da variável na determinação da mediana;
- Erros na aplicação dos algoritmos, por má utilização da máquina de calcular;
- Erros na aplicação do algoritmo da mediana, por não atender à paridade do conjunto de dados numéricos.

#### 7.4.1.5. Argumentos

A proposta do professor investigador foi trabalhar os conteúdos de forma rigorosa. Para tal, durante as suas intervenções (na aula expositiva-teórica e na correção da aula prática), incentivou os alunos a explicar, argumentar e justificar as suas ideias e resoluções, implementando situações e momentos de leitura e interpretação de representações gráficas e tabelas, permitindo desta forma o estabelecimento de comunicação de resultados das interpretações feitas e das conclusões e conexões criadas por parte dos alunos. Estes conseguiram ler e interpretar representações gráficas e tabelas à luz das situações, comunicar os resultados das interpretações feitas e justificações realizadas, e argumentar as decisões tomadas e as conexões estabelecidas de forma adequada. No entanto, a argumentação utilizada na comparação de distribuições em DEQ ficaram aquém do esperado, especialmente em

relação à análise da dispersão e da simetria (utilização de figura sugestiva, para a definir intuitivamente (baleia)). Saliente-se no caso dos argumentos intuitivos, os alunos recorrem às características do DEQ para avaliar a existência ou ausência de simetria e dispersão. Relativamente à simetria, os alunos focam-se em duas características: 1) observação da distância entre a linha indicadora da mediana e os lados do retângulo (distância entre a mediana e os quartis); 2) observação do comprimento das linhas que saem dos lados do retângulo (comprimento das linhas que unem os quartis Q1 e Q3, aos extremos). Na primeira situação associam a simetria da distribuição a uma linha que constroem sobre o DEQ, cujas configurações associam a uma “baleia” e, de acordo com a sua posição, optam pela existência de simetria ou de assimetria. A distribuição é simétrica quando a linha descreve o gráfico da distribuição Normal (a “baleia” encontra-se de frente); quando a curva deixa de ser simétrica, os alunos referem a existência de enviesamento: para a direita, quando a mediana está mais próxima de Q1 (a “cabeça da baleia” localiza-se mais à esquerda e a cauda mais afastada da mediana para a direita), ou para a esquerda quando a mediana está mais próxima de Q3 (a “cabeça da baleia” localiza-se mais à direita e a cauda mais afastada da mediana para a esquerda), sendo sempre o valor mais alto da curva o correspondente a Q2; na segunda situação limitam-se a verificar se os comprimentos da distância dos quartis aos extremos e se esta é igual, a distribuição é simetria ou assimetria, se a distância é diferente. No caso da dispersão, os alunos limitam-se a observar o comprimento dos retângulos, atribuindo a menor dispersão aos retângulos mais curtos e a maior dispersão aos retângulos mais compridos. Em qualquer caso, os alunos não acautelam a escala utilizada na construção do DEQ, nem a amplitude interquartil, quando procedem à análise comparativa de duas distribuições.

#### 7.4.1.6. Processos

Na apresentação de conceitos novos, o professor investigador teve sempre o cuidado de articular esses saberes com os anteriores, estabelecendo ligações entre eles e, sempre que necessário, estabeleceu várias representações de um mesmo conjunto de dados numéricos. Nas fichas, as tarefas propostas proporcionaram aos alunos momentos em que articularam conhecimentos e saberes. Os alunos utilizaram conexões entre as ideias matemáticas, cujas ligações permitiram construir conceitos uns partir dos outros, sequencialmente, como no caso da mediana e dos quartis e a sua utilização na construção dos DEQ. Os alunos conseguiram representar um mesmo conjunto de dados com recurso a várias representações gráficas, seguindo o solicitado nas fichas de tarefas (FT).

Durante as práticas operativas e discursivas realizadas neste estudo houve processos de generalização, idealização e particularização, mencionados no plano (PIEDEQ).

#### 7.4.2 Comparação entre o plano proposto e as ocorrências didáticas observadas na avaliação

A análise foca-se na comparação entre o domínio epistémico planeado e a avaliação da implementação de ensino. Para tal, utilizam-se as mesmas ferramentas teóricas da análise *a priori* (objetos e processos).

##### 7.4.2.1. Tipo de Situações-problema e práticas estatísticas

As questões propostas no TF e as práticas operativas e discursivas estatísticas desenvolvidas na resolução das situações-problema foram coincidentes com as previstas no plano e observadas durante o período de implementação.

No caso da Q1, com dados não organizados, os alunos utilizaram os algoritmos para determinar a média, os quartis, a amplitude e a amplitude interquartil, bem como identificaram a variável estatística e os seus valores, o máximo e o mínimo. Foi proposto um problema sobre a média, já antes resolvido em sala de aula (Aula 3). Na questão Q2 os alunos determinaram a frequência relativa, o efetivo total, a média, a mediana, os quartis e identificaram a moda, o valor máximo e o valor mínimo de dados organizados num gráfico de barras. Também construíram o diagrama de extremos e quartis desta distribuição e analisaram-no quanto à posição dos quartis, à dispersão e/ou à simetria, já que essa análise foi proposta como questão aberta. Na solução da Q3, questão mais elementar, os alunos completaram uma tabela de frequências, indicaram a moda e determinaram as cinco medidas estatísticas que definem o DEQ, para transformarem a forma tabelar em outro tipo de representação da distribuição. Na última questão, os alunos construíram o DEQ de dados não organizados e compararam duas distribuições com dados organizados em DEQ, quanto à posição dos quartis, à amplitude interquartil, à simetria e à dispersão. Os alunos também determinaram os quartis e as amplitudes entre valores do DEQ.

As práticas realizadas pelo professor investigador tornaram-se mais visíveis na entrevista, já que aí pôde corrigir erros detetados, conduzir o raciocínio do aluno, para além do que foi realizado durante o teste, e compreender conflitos detetados. A sua moderação levou os alunos a completarem as suas respostas e a esclarecer conflitos.

#### 7.4.2.2. Elementos linguísticos

Foram identificadas algumas situações geradoras de conflitos, como sejam: na questão Q2 a expressão “pelo menos” e na questão aberta Q2.3, onde os alunos tiveram se revelaram inseguros sobre a resposta que deveriam escrever. Durante a entrevista, o professor investigador esclareceu os alunos sobre estas questões.

#### 7.4.2.3. Elementos conceptuais

Apesar de todos os conceitos abordados no teste final (TF) terem sido trabalhados anteriormente e de as questões serem afins às tarefas realizadas, apareceram ainda dificuldades:

- Na questão Q1, com dados não organizados, em identificar corretamente os valores de uma dada variável estatística (Q1.1a); em aplicar o algoritmo do cálculo da média, em vez de determinar a amplitude (Q1.1b) e o da mediana, em vez de determinar a amplitude interquartil (Q1.1c); e ao resolver o problema sobre a média (Q1.2) pelo método de tentativa erro, já que houve incorreções na aplicação do algoritmo da média. Nesta questão, embora em menor número, ainda persistem conflitos entre conceitos, ao aplicar outra medida estatística diferente da solicitada.

Estas dificuldades foram debatidas e corrigidas no momento da entrevista pelo professor investigador.

- No caso da questão Q2, com dados organizados num gráfico de barras, as dificuldades na Q2.1b foram consequência da dificuldade em interpretar a expressão “pelo menos”, originando respostas incorretas. Na Q2.1c não houve registos de dificuldades na determinação da mediana e da média e na identificação da moda. Os alunos revelaram dificuldades na construção do DEQ, como sejam: atribuição do valor máximo ao terceiro quartil e um outro valor que não pertencia à variável ao extremo superior; atribuição de um valor mínimo que não fazia parte da variável; e dificuldade na identificação das medidas estatísticas a utilizar na sua construção (Q2.2). Na construção dos DEQ, os alunos não foram rigorosos nem cuidadosos na escolha da escala. Também apresentaram dificuldades em procederem à análise do DEQ construído, quanto à simetria e/ou à dispersão, pois alguns alunos responderam à questão com base no gráfico de barras e outros foram pouco rigorosos nas suas justificações ou omitiram-nas.

Quando o professor investigador procedeu às entrevistas, constatou que, sobre a construção dos DEQ, os alunos sabiam determinar as medidas estatísticas para a sua



construção, porém no momento da resolução individual fizeram opções erradas. Houve um aluno (A16) que não conseguiu construir o DEQ por não saber identificar os valores da variável estatística. No caso da Q2.3 ficou patente, na entrevista, que a maior dificuldade era saber que resposta dar ao que lhes era solicitado, por ser uma questão aberta.

- A questão Q3 não se revelou difícil para a maioria dos alunos, contudo alguns manifestaram dificuldade na indicação da moda, pois apontaram o máximo; e um outro aluno revelou dificuldades em determinar os quartis ao não considerar as frequências absolutas dos valores da variável. Na entrevista o professor investigador verificou que este aluno continuava a apresentar o conflito semiótico  $\bar{C}2$  na determinação da mediana, acabando por ser levado a concluir sobre a resposta correta que deveria ter registrado no teste.

- Na última questão, Q4, os alunos apresentaram mais dificuldades do que nas anteriores. Por exemplo, na construção do DEQ, sobretudo pela má escolha da escala (Q4c), embora tenham conseguido determinar (com alguma dificuldade), as medidas estatísticas envolvidas (Q4b). Apresentaram ainda dificuldades na comparação das amplitudes interquartis dos três diagramas (Q4d) e também na análise dos DEQ quanto à simetria (Q4f) e/ou à dispersão (Q4e), pois a maioria dos alunos não respondeu de forma correta à questão, apesar de não existir qualquer ambiguidade no que era solicitado.

Uma vez mais, na entrevista, apoiados pelo professor investigador, os alunos conseguiram dissipar as dúvidas e dificuldades manifestadas, sobre a dispersão e a simetria; quanto à amplitude interquartil, verificou-se dificuldade no intervalo entre o primeiro quartil e o segundo.

#### 7.4.2.4. Propriedades e procedimentos

O professor investigador no TF propôs tarefas diversificadas, com dados não organizados e organizados em tabelas e gráficos, proporcionando aos alunos contextos diversificados de aplicação dos conceitos a avaliar. Tal como nas fichas de tarefas, no TF também foram propostas situações-problema para praticar procedimentos e para aplicar algoritmos e conceitos, com recurso a questões em que se propunha identificar medidas de localização e de dispersão e também representar, construir e reconhecer conjuntos de dados numéricos organizados em contextos diferentes.

Os alunos resolveram as questões onde se abordavam os conceitos e se aplicavam procedimentos e algoritmos; revelaram os seus conhecimentos e noções estatísticas; souberam

identificar, reconhecer e representar conjunto de dados numéricos através de gráficos, bem como determinar medidas de localização e de dispersão.

Há ainda a registrar alguns “conflitos de procedimentos” que ocorreram durante a resolução do teste final e na entrevista:

- Dificuldade em expressar as definições, conceitos, procedimentos e em argumentar e justificar;
- Dificuldade em aplicar o algoritmo na determinação da média;
- Ignorar a frequência dos valores da variável na determinação da mediana;
- Erros na determinação dos quartis, por dificuldade na aplicação do algoritmo da mediana e por ter em conta a paridade do conjunto de dados numéricos;
- Falta de rigor na construção dos DEQ, por não terem material de desenho e de medida.

#### 7.4.2.5. Argumentos

Como os conceitos abordados no teste final (TF) tinham já sido trabalhados e as questões propostas eram semelhantes às tarefas já trabalhadas, o professor investigador esperava respostas mais rigorosas, tanto na parte escrita como na oralidade.

Os alunos foram mais imprecisos na argumentação escrita (trabalho individual) do que na oral, devido à condução e apoio do professor. O professor induziu os alunos a estabelecerem ligações, conexões entre os conceitos trabalhados anteriormente e os solicitados no momento da entrevista. Deste modo, eles conseguiram melhorar as suas respostas.

No teste, os alunos conseguiram ler e interpretar as representações gráficas e tabelares à luz das situações a que diziam respeito; comunicar os resultados das interpretações feitas e justificações realizadas; argumentar as decisões tomadas e as conexões estabelecidas de forma adequada, embora com pouco rigor. No entanto, a argumentação utilizada na comparação de distribuições em DEQ ficou aquém do esperado, sobretudo relativamente à análise quanto à dispersão e à simetria (na parte escrita), melhorando um pouco no momento da entrevista.

#### 7.4.2.6. Processos

O professor investigador, na entrevista, teve sempre o cuidado de articular os novos saberes com anteriores, estabelecendo ligações entre eles e levando o aluno a tirar as suas conclusões. As questões propostas no teste proporcionaram aos alunos momentos em que puderam articular conhecimentos e saberes. Os alunos utilizaram as conexões entre as ideias

matemáticas, cujas ligações permitiram construir umas noções a partir de outras, como no caso da mediana e dos quartis e a sua utilização na construção dos DEQ. Os alunos foram capazes de representar, com alguma dificuldade, um mesmo conjunto de dados com recurso a várias representações gráficas, para responder ao que era solicitado.

#### 7.4.3. Análise da dimensão normativa

Durante a implementação foram tidas em conta a maioria dos aspetos regulamentares relativos ao plano que foi construído, tendo em conta o programa curricular de metas (MEC, 2013), já que os professores, investigador e titular de turma, em trabalho colaborativo, estabeleceram conexões explícitas entre o projeto e o currículo escolar. Esta norma epistémico-ecológico assume um papel relevante como elemento externo (requisito do currículo), que foi tido em conta durante o processo de implementação do ensino. Esta implementação atende aos requisitos de pesquisas em educação matemática (Nolan & Speedy, 1999; Batanero & Díaz, 2005; Fuller, et al, 2011) e de acordo com o Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (ME-DEB, 2001), os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008) e o Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013).

O professor investigador privilegiou uma aprendizagem do tipo construtivista, já que o projeto se desenvolveu em díade, que promove o trabalho autónimo e colaborativo, embora também houvesse momentos de trabalho independente e individual. Durante a implementação do ensino esta conduta sócio construtivista teve que ser interrompida em alguns momentos, uma vez que os alunos nem sempre conseguiram superar as suas dificuldades de forma autónoma, expressando conflitos que obrigaram à intervenção dos professores, sobretudo nos momentos de debate. Estes momentos tinham por objetivo esclarecer dúvidas e levar os alunos a responder da forma esperada.

Durante a realização das FT a norma epistémica de que o quartil poderia não ser um valor da variável estatística não foi aceite logo de início, embora esta explicação tivesse sido sustentada por meios informáticos bastantes elucidativos (FT3 e FT4). A resolução das FT1 e FT2 contribuíram para consolidar os conceitos sobre as medidas de localização com dados organizados em representações gráficas e tabelares. Finalmente, a FT5 tinha por objetivo trabalhar todos os conceitos e levar o aluno um pouco mais longe na análise dos DEQ, quanto à simetria e à dispersão, já que a sua abordagem não está prevista no programa curricular nacional (MEC, 2013).

## 7.5. Idoneidade do processo de Estudo

Nesta secção avalia-se a competência de todo o processo de intervenção de ensino, tendo em conta as fases de conceção, implementação e avaliação.

### 7.5.1. Idoneidade Epistémica e Ecológica

A idoneidade Epistémica, no processo de estudo *a priori*, pode ser considerada média, tanto na fase de diagnose, como na fase de projeto e de implementação; no entanto, face aos resultados obtidos *a posteriori*, o processo revelou-se adequado.

A realização das tarefas selecionadas põe em jogo os conhecimentos sobre a estatística e os seus resultados apontam para um elevado desempenho durante a implementação. Na fase de construção do projeto, que inclui a fase de diagnose e de conceção do projeto, constata-se que a sua adequação é média, e um dos aspetos a salientar é o facto de, na fase de diagnose, a recolha dos dados se ter realizado muito antes de os conceitos estatísticos terem sido abordados (início do ano letivo) e depois de um longo período sem aulas (férias de verão). Uma aula introdutória de revisões poderia levar os estudantes a recordar conceitos base e alguns procedimentos. Esta mudança poderia induzir uma melhoria na faceta Ecológica do processo de estudo (uso de estatísticas no dia a dia), e ter melhorado os resultados do Teste Diagnóstico e da Escala de Atitudes em Relação à Estatística e à vida escolar, contribuindo assim para melhorar o plano, com a escolha de tarefas mais ambiciosas e mais ligadas ao cotidiano dos alunos. É ainda na fase de implementação que se verifica uma melhoria na adequação, mantendo-se o mesmo grau, tendo-se mantido esta elevada adequação na fase *a posteriori* da intervenção de ensino.

Durante todos os momentos de trabalho dos alunos foram colocados em jogo vários contextos de representação dos dados (tabelas, gráficos e dados não organizados) que serviram de suporte ao argumento estatístico. O argumento foi sustentado pelas conclusões e pelas análises de representações gráficas e tabelares e dados não organizados, que fizeram emergir novos conhecimentos de estatística, relativamente aos quartis e à comparação de distribuições em DEQ, a partir de conceitos previamente trabalhados em propriedades e processos anteriores (medidas de localização e de dispersão).

Quanto à fase avaliativa, em que os alunos revelaram os seus conhecimentos, verifica-se uma adequação elevada no caso do enunciado do Teste Final (*a priori*), seguindo-se uma adequação média nos resultados desse teste, ao qual se adicionam as respostas dadas pelos alunos na entrevista. Em termos globais, houve uma melhoria significativa na atitudes dos

alunos face à estatística, como se pode constatar com os resultados da nova implementação da Escala de Atitudes em Relação à Estatística e na postura da maioria dos alunos durante a entrevista.

Dada a evolução ocorrida e verificadas as ocorrências observadas durante a implementação e na sua avaliação, considera-se que a adequação foi elevada.

#### 7.5.2. Idoneidade cognitiva e afetiva

A adequação cognitiva *a priori*, condicionada pelas avaliações de diagnose, pode ser considerada média, embora o PIIEDQ apresente um grau elevado. Pode supor-se que os objetivos de aprendizagem podem ser alcançados com os meios disponíveis. No entanto, durante o estudo implementado, principalmente nos resultados da FT, verificou-se que a adequação cognitiva é igualmente média, enquanto no momento da avaliação, no processo subsequente ao processo de estudo, a prova proposta apresenta um elevado grau de adequação, que não é acompanhada pelos resultados alcançados pelos alunos, já que se revelaram medianos. Há, pois, evidências de que houve melhoria na aprendizagem, apesar de ainda se verificar em certos alunos algum desinteresse pela matemática ao não realizarem o trabalho individual da FT6.

Quanto a adaptações curriculares, verifica-se que na proposta de análise de DEQ quanto à simetria e à dispersão, não incluída nas metas curriculares (MEC, 2013), nem todos os alunos foram persistentes, quer na resolução das fichas de tarefas, quer no teste final, limitando-se a responder de forma intuitiva ao que lhes parecia observar, sem rigor; nas questões mais abertas, os alunos mostraram dificuldades em saber o que responder; naquelas que pediam uma justificação, nem sempre eles a apresentavam de forma rigorosa e adequada.

O instrumento de avaliação Teste Final pode ser melhorado através da reflexão sobre as questões relacionadas com a análise dos DEQ, quanto à dispersão e à simetria, até porque não é uma meta proposta pelo atual currículo português e observaram-se dificuldades quer no momento de avaliação escrita, quer na entrevista oral.

Em relação à idoneidade afetiva, os resultados da aplicação da Escala de Atitudes em Relação à Estatística, realizado no final da intervenção de ensino, revelam uma melhor consciência da importância da Estatística, da sua utilidade e do seu papel na sociedade atual.

Deste modo, conclui-se que as aprendizagens dos alunos relativamente às medidas de localização e em relação às suas atitudes em relação à Estatística melhoraram significativamente, em comparação com a fase de diagnose, contribuindo para uma alta

adequação da intervenção de ensino. Há, no entanto, a registar a necessidade de um trabalho mais focado na análise e construção dos DEQ.

### 7.5.3. Idoneidade internacional e mediacional

O formato de interações privilegiado, na implementação em sala aula, aconteceu nos momentos de exposição do professor investigador sobre conceitos e procedimentos com recurso a slides e vídeos. Estas explanações antecederam o trabalho dos alunos, em díade. A interação também se revelou intensa quando os alunos partilharam no grupo turma as respostas a cada uma das situações-problema (tarefas); esta partilha decorreu sempre após a realização do trabalho pelos alunos em díade. Obviamente, não se pretende que os alunos construam /reinventem os conhecimentos pretendidos, mas sim que criem um contexto que permita ao professor investigador sintetizar tais conhecimentos. Com a realização das fichas de tarefas, em díade, pretende-se que os alunos apliquem os conhecimentos, trabalhados nas aulas com recurso às sínteses registadas no caderno diário. O grau de autonomia dos alunos na realização das tarefas foi elevado, porque eles eram livres de encontrar a resolução das situações-problema, ainda que condicionados pelo tempo de aula.

O número ímpar de alunos obrigou a que uma díade fosse composta por três alunos e a construção dessas díades obedeceu a critérios comportamentais e de conflito, já detetados pela professora titular. Assim que foram detetadas díades com mais dificuldades, ou com menor ritmo de trabalho, as professoras apoiaram-nas de forma mais ativa, sem agir de forma diretiva no seu trabalho, antes, orientando-as na obtenção de respostas adequadas.

A observação do trabalho dos alunos teve lugar aula a aula, seguida de debate de ideias para sistematizar conceitos e procedimentos, mas sem que o documento de registo de respostas de cada uma das díades tenha sido analisando. O processo de avaliação desejado seria proceder-se à análise das respostas dadas pelos alunos antes do momento do debate. Por exemplo, a existência de duas aulas seguidas, no mesmo dia, não permitindo reavaliar situações, ferramentas, recursos e procedimentos a utilizar na aula seguinte, também não permitiria aos alunos mais interessados terem um momento de trabalho individual, para consolidarem conhecimentos e poderem melhorar os seus resultados. Saliente-se que alguns alunos se revelaram pouco persistentes; face às dificuldades encontradas, abandonavam a resolução e não procuravam, nos seus apontamentos, o auxílio de que necessitavam.

A utilização das ferramentas, como o vídeo, permitiu aos alunos melhorar a sua aprendizagem e a utilização da calculadora evitou um maior número de erros de cálculo.

O nível de dificuldades manifestadas pelos alunos no teste final indica que os alunos não se prepararam, individualmente, para ele. Mesmo sendo os resultados medianos, os alunos revelaram ter dedicado pouco tempo ao estudo, pois as questões propostas no teste foram, afinal, bastante semelhantes às realizadas e corrigidas em aula. É certo que os alunos têm várias disciplinas e têm que distribuir o seu tempo de estudo por todas elas, cada uma com as suas exigências próprias e precisando de tempo para consolidação de conceitos. Quanto a isso, não há nada a fazer, pois o currículo do 8.º ano está assim definido.

Em termos globais, os meios disponíveis revelaram-se adequados e as interações observadas foram variadas e esclarecedoras, permitindo elucidar e esclarecer dúvidas tanto ao aluno como ao professor, pelo que se pode considerar que a adequação foi alta.

#### 7.6. Síntese

Neste capítulo, constata-se que o marco teórico do Enfoque Ontossemiótico (EOS) fornece ferramentas válidas para análise do processo de estudo implementado. Assim, na fase de implementação foi possível delimitar a análise e realizar descrições sobre o processo de estudo, as noções de configuração, de trajetória didática e aqueles significados que foram efetivamente usados. Foram ainda objeto de análise dos conteúdos postos em jogo, os padrões de interações e de conflitos que ocorreram e as situações que delimitaram a implementação de ensino. Na fase de avaliação retrospectiva, as noções de práticas, objetos e processos permitiram caracterizar, *a posteriori*, os tipos de problemas, práticas e configurações de sistemas de objetos matemáticos envolvidos. A dimensão normativa permitiu entender os fatores ecológicos que condicionaram o processo de estudo. Por fim, a noção de idoneidade didática possibilitou que se fizesse uma reflexão sistemática sobre os diferentes aspetos do processo de intervenção de modo a identificar possíveis melhorias.

Relativamente às aprendizagens, as análises preliminares das diversas dimensões envolvidas, tanto na fase de conceção, implementação e de avaliação, possibilitaram constatar que os alunos evoluíram favoravelmente no domínio dos conceitos e propriedades das medidas de localização em dados organizados em gráfico ou tabelas, enquanto na construção e análise do DEQ será necessário trabalhar mais e permitir mais tempo para a sua consolidação.

No que respeita às informações do projeto e aos resultados alcançados durante a implementação e depois, no momento da avaliação das aprendizagens, conclui-se que, em termos gerais, o conhecimento dos conteúdos foram alcançados pela maioria dos alunos; no entanto, houve aspetos mais avançados que exigiam raciocínio estatístico mais elaborado

(simetria e dispersão de DEQ) ou conhecimento bem consolidado (conteúdo e propriedades da mediana) que mostraram fragilidades dos alunos, tanto durante o seu trabalho em díade como na sua resolução individual do teste final.

No que concerne à análise dos erros cometidos pelos alunos, estes exibiram conflitos de compreensão de conteúdos, de interpretação e de processo. Conclui-se destacando a utilidade das ferramentas desenvolvidas no EOS para organizar e entender os processos do estudo implementado. Da mesma forma, enfatiza-se o ensino da matemática, em particular da estatística, que deve centrar-se no uso de situações-problema como estratégia de dar sentido ao estudado e proporcionar momentos de atividades colaborativas de matemática. De acordo com Fonte, et al. (2013), na prática, configurações matemáticas envolvidas, objetos matemáticos (conceitos, proposições, procedimentos e argumentos) requerem processos de aprendizagem válidos, institucionalização e exercício. Isto coloca um grande desafio ao professor, no ensino dos conteúdos estatísticos, mesmo quando existem fatores sobre os quais o professor não tem controle, como seja o tempo dedicado ao estudo.



O presente capítulo centra-se nas principais conclusões do estudo. Na primeira secção faz-se uma síntese dos principais aspetos que o caracterizam; na segunda são sintetizadas as principais conclusões do estudo, organizadas segundo as questões de investigação e atendendo ao enquadramento teórico que sustenta o estudo; finalmente, tendo em conta aspetos relacionados com o estudo, mas não completamente esclarecidos, na terceira secção são feitas algumas recomendações para futuras investigações.

#### 8.1. Síntese do estudo

Procurando encontrar respostas válidas para as questões de investigação, estabeleceu-se contato com docentes do ensino básico a lecionar o 8.º ano, com vista à sua colaboração, na recolha de dados, tendo-se implementado uma intervenção de ensino. Na fase de diagnose (*a priori* da implementação) foram seleccionados os materiais para a análise das dificuldades (enunciado das situações-problema que constitui o teste diagnóstico, caracterização das turmas, escala de atitudes com 25 itens), que foram aplicados aos alunos de 18 turmas; na fase da implementação da intervenção de ensino, foram também seleccionados os materiais para serem aplicadas durante as 13 aulas (enunciados das situações-problema que constituíram as fichas de tarefas, os vídeos e os slides), que aplicados aos 23 alunos da turma do 8.º ano. Na fase de avaliação (*a posteriori* da implementação) foram seleccionados os materiais para a avaliação da intervenção (enunciado das situações-problema que constitui o teste final, guião da entrevista, escala de atitudes com 23 itens). Todo o material para análise (respostas elaboradas pelos alunos, interações durante a implementação da intervenção de ensino e a entrevista) foi recolhido e guardado em dossiers e em suporte digital.

As respostas ao teste diagnóstico, às fichas de tarefas e ao teste final foram sujeitas a análise segundo duas perspetivas: a categorização das respostas em “corretas”, “parcialmente corretas” e “incorretas”, além da categoria “não resposta”, o que permitiu avaliar o conhecimento dos alunos, e a análise dos conflitos semióticos. Quanto às respostas dos alunos obtidas durante a entrevista, elas permitiram completar as respostas por eles dadas no teste final.

As respostas às escalas de atitudes (com 25 e 23 itens) foram implementadas em momentos e com objetivos distintos: a primeira escala foi aplicada na fase de diagnose, que consistiu na adaptação da *Escala de Atitudes hacia la Estadística* de Estrada (2002), para professores de Matemática de língua castelhana, para alunos do 8.º ano do Ensino Básico e investigar propriedades psicométricas da escala adaptada, a sua confiabilidade e a sua multidimensionalidade; a segunda escala foi aplicada na fase *a posteriori* da intervenção com o objetivo de averiguar a melhoria das atitudes dos alunos da turma do 8.º ano em relação à Estatística.

Atendendo ao carácter misto da metodologia adotada, a perspetiva qualitativa da análise dos dados foi essencialmente descritiva e interpretativa, com vista a obter-se, por um lado, uma caracterização, o mais completa possível, das situações em estudo e dos raciocínios subjacentes às respostas dadas pelos alunos (estudo de caso), e, por outro lado, com o objetivo de responder às questões de investigação propostas. A perspetiva quantitativa permitiu investigar a dificuldade das questões consideradas no estudo (desde a fase de diagnose à fase final), a associação de dificuldades entre tópicos (Funções *versus* Estatística e em contexto tabelar *versus* gráfico).

O diagrama de extremos e quartis surge em diversas áreas académicas, estando presente em muitos estudos de investigação, designadamente no confronto dos resultados descritivos em estudos comparativos. A correta compreensão de conceitos estatísticos associados à representação gráfica de diagrama de extremos e quartis, mínimo, máximo e quartis, permitem uma construção e interpretação deste tipo de representação, que agora é lecionada no 8.º ano do ensino básico.

Ao investigar em que medida as dificuldades dos alunos, nas noções estatísticas de dados organizados em gráfico e tabelas, influenciam a aprendizagem de Estatística no 3.º ciclo do ensino básico, no caso concreto do tema diagrama de extremos e quartis, com alunos do 8.º ano, pretendeu-se compreender as dificuldades sentidas pelos alunos participantes neste estudo, bem como a influência que o ensino do conceito teve nas

respostas e nos raciocínios por eles elaborados, ao resolverem as questões propostas, envolvendo noções estatísticas, privilegiando dados organizados em tabelas e gráficos, com que foram confrontados. Neste âmbito, foram estabelecidas as quatro seguintes questões de investigação:

**QI1.** As dificuldades de alunos do 8.º ano na interpretação gráfica e tabelar de funções repercutem-se nas suas dificuldades nos conteúdos estatísticos?

**QI2.** Quais as atitudes em relação à Estatística dos alunos do 8.º ano das escolas envolvidas na fase de diagnose?

**QI3.** Uma intervenção de ensino privilegiando a representação gráfica e tabelar dos dados em situações do quotidiano favorece a aprendizagem de Estatística no 8.º ano?

**QI4.** As dificuldades de alunos do 8.º ano na interpretação e análise da representação gráfica e tabelar das medidas de localização repercutem-se nas suas dificuldades, de construção, interpretação e análise dos diagramas de extremos e quartis?

Os participantes do estudo de caso são 23 alunos do 8.º ano de escolaridade, integrados numa turma das 18 (332 alunos) que participaram na fase inicial da presente investigação. Na fase de diagnose o estudo possibilitou diagnosticar dificuldades dos alunos, no tópico de estatísticas, mais concretamente nas medidas de localização em contexto gráfico e tabelar e eventuais relações com o tópico Funções. Na fase de implementação foram praticadas fichas de tarefas, contemplando situações-problema em contexto real, privilegiando gráficos e tabelas, numa turma do 8.º ano, em sala de aula e em diáde, com o objetivo de consolidar conceitos de base, em que os alunos revelaram conflitos semióticos na fase de diagnose, por um lado, e construir novos conhecimentos, como quartis e diagrama de extremos e quartis, por outro lado. Por fim, na fase de avaliação, os alunos dessa turma realizaram uma ficha de avaliação de conhecimentos de conceitos relacionados com a representação gráfica DEQ. Os alunos cujas respostas escritas se revelaram menos explícitas ou eram incorretas foram alvo de uma entrevista para se proceder a esclarecimentos. Também nesta fase e com recurso às ferramentas de Enfoque Ontossemiótico (Godino, 2002; Godino, Batanero & Font, 2009), avaliou-se a idoneidade didática da intervenção desde a planificação até à avaliação.

Em termos de análise de dados, as resoluções apresentadas pelos alunos, em cada uma das fases, foram estudadas quanto ao tipo de resposta (correta, parcialmente correta, incorreta e ainda as não respostas) e quanto aos conflitos semióticos subjacente à resposta (perspetiva qualitativa). No caso das respostas, foram determinadas frequências (absolutas e em percentagem), sintetizadas em tabelas, de modo a comparar as respostas dos alunos e foram aplicados testes estatísticos para averiguar associações (perspetiva quantitativa), com recurso aos programas estatísticos SPSS versão 24 e Excel 2010.

## 8.2. Conclusões do estudo

Aqui apresentam-se e discutem-se os principais resultados do estudo, tendo por referência as questões de investigação e estabelecendo possíveis ligações com trabalhos relacionados com o presente estudo realizados por outros autores.

### 8.2.1. Primeira questão de investigação

As dificuldades de alunos do 8.º ano na interpretação gráfica e tabelar de funções repercutem-se nas suas dificuldades nos conteúdos estatísticos?

Para tal, estudaram-se as dificuldades dos alunos do 8.º ano na prova de avaliação diagnóstica, que foi realizada por 332 alunos. Nessa prova propunha-se a resolução de seis situações-problema, repartidas por dois grupos, cada um com três questões. As primeiras três questões relacionavam-se com o tema Funções, envolvendo conceitos simples, e as restantes três envolviam conceitos do tema Estatística. Em todas as questões privilegiaram-se as representações gráficas ou tabelares.

Com a ajuda das ferramentas teóricas do Enfoque Ontossemiótico (Godino, 2002; Godino, Batanero & Font, 2009), estabeleceram-se configurações que permitiram criar orientações para analisar as resoluções expressas pelos alunos nas questões propostas, permitindo também verificar como os objetos “medidas de localização” e “funções” emergem do sistema de práticas realizadas pelos alunos ao resolver problemas relacionados com os conteúdos em causa.

Com tais ferramentas considera-se que, para uma determinada “pessoa”, a situação-problema é um tipo de contexto que desencadeia atividades de matematização, tais como encontrar possíveis soluções, escrever uma notação apropriada à representação das

situações ou à comunicação com outras pessoas, ajudando a justificar ou generalizar as soluções propostas.

Após a categorização das respostas em “correta”, “parcialmente correta” e “incorreta”, além da categoria “não resposta”, constatou-se que muitos alunos não responderam às questões sobre Funções (9%) e às questões sobre Estatística (18%). Identificaram-se dificuldades dos alunos em situações-problema do tema Funções (FSS) e do tema Estatística (OTD), tendo-se constatado que: nas questões sobre Funções, as suas dificuldades foram, predominantemente, na identificação do domínio/contradomínio, na identificação de variável dependente e na interpretação de objetos num gráfico; nas questões sobre Estatística, os alunos revelaram maior dificuldade nas situações-problema referentes às medidas de localização: *máximo/mínimo* (com o maior número de respostas corretas), *média* (com melhor desempenho em contexto tabelar), *mediana* (com melhor desempenho em contexto o gráfico, sendo o de barras o mais sucedido); quando os alunos determinam corretamente a mediana, fazem-no nos dois contextos, ordenando os dados com maior facilidade em contexto tabelar; na resolução de problemas envolvendo tais medidas, os alunos revelaram o pior desempenho em todos os problemas, com maiores dificuldades em relacionar os conceitos de *moda* e *mediana* e na comparação de objetos no gráfico de barras.

Globalmente, verificou-se que os alunos revelaram mais dificuldades nas questões sobre Estatística do que sobre Funções, já que, em termos de respostas corretas, eles se mostram mais sucedidos nas respostas sobre conceitos de Funções (27%) do que sobre Estatística (12%) e, no caso de respostas não corretas (PC+I) manteve-se a tendência de melhor desempenho no domínio de Funções (16%) do que em Estatística (18%). Restringindo a análise às respostas “não corretas”, os resultados permitem concluir que um aluno, ao errar em ambos os contextos, não tende a manter neles o mesmo tipo de resposta, revelando dificuldades na determinação da mediana independentemente do contexto; contudo, essas dificuldades aumentam perante dados organizados (tabelar ou gráfico), comparativamente com quando os dados não estão organizados (Ribeiro, 2011).

Saliente-se que, focando os três níveis de Cúrcio (1989), nota-se, pela análise de respostas apresentadas pelos alunos, que a maioria destes conseguiu *ler os dados* representados em gráfico/tabela, mas apenas uma minoria deles conseguiu *ler além dos dados*, corroborando a perspectiva de que os gráficos/tabelas estatísticos constituem objetos matemáticos complexos em termos semióticos (Batanero et al., 2010).

Quanto às dificuldades manifestadas pelos alunos em conceitos sobre Funções, verificou-se existir associação entre o tabelar (identificação de domínio/contradomínio e identificação de variável) e o contexto gráfico (identificação de objetos ou imagens, sendo conhecido um deles), incidindo mais esta associação, nos dados organizados em gráfico do que em tabela. Verificou-se ainda que um aluno que tem dificuldade na identificação do domínio/contradomínio num contexto, também a tem no outro, o que parece revelar que o contexto não influi no seu desempenho.

Na análise semiótica das respostas dos alunos no domínio de Estatística em contexto gráfico e tabelar, constatou-se que: na identificação dos valores *máximo e mínimo*, tendencialmente, um aluno que os identifica corretamente, fá-lo bem nos dois contextos, com poucas dificuldades em indicá-los corretamente em ambos os contextos; no entanto, os alunos revelam mais dificuldade na identificação do valor *máximo e mínimo* em contexto tabelar. Quanto aos conflitos semióticos em Estatística, conclui-se que raramente um aluno demonstra o mesmo tipo de conflito, nos dois contextos (gráfico e tabelar), exceto quando confunde o conceito e determina outra medida estatística.

Relativamente à existência de associação entre dificuldades em Estatística, constatou-se que existe uma associação não forte em contexto tabelar (mediana/média), o que sugere que quando o aluno revela dificuldades numa medida, também a revela na outra; por outro lado, existe também uma associação não forte em contexto gráfico (média e mediana e a identificação do mínimo/máximo) e entre frequência relativa e a mediana e a moda. No confronto dos dois contextos a associação não parece divergir.

O nível de associação não forte entre dados na forma de gráfico é ligeiramente superior ao nível de associação entre dados na de tabela, sugerindo que as dificuldades podem depender do tipo de representação. No caso da mediana, tal ocorre com mais frequência nas questões com dados organizados em gráfico e menos em tabela de frequências, de onde se conclui que o contexto afeta o desempenho dos alunos que têm dificuldades na determinação correta da mediana, em ambos os contextos, mas por motivos ou causas diferentes. Tal como em outros estudos (Batanero, 2000), o erro mais frequente neste estudo foi determinar a média em vez da mediana; já a troca da mediana pela moda não se verificou neste estudo, não corroborando os resultados obtidos por Barros (2004) e Mayén, Cobo, Batanero e Balderas (2007). Foi ainda possível inferir que estes dois contextos, mesmo não afetando a aplicação correta ou incorreta do algoritmo de cálculo da mediana, por parte dos alunos com respostas não corretas, dificultaram a

identificação precisa do conjunto de dados a considerar na determinação da mediana. Tais resultados surgiram também noutros estudos (Arteaga et al., 2011; Boaventura, 2003; Fernandes, Carvalho & Correia, 2011).

Neste estudo as dificuldades na determinação da mediana, devido à não ordenação prévia dos dados, ocorrem em diversos contextos, sendo mais frequentes em contexto gráfico (Arteaga, 2008). Determinar a média em vez da mediana é um erro frequente (Batanero, 2000) e no cálculo da média, em ambos os contextos, há evidentes dificuldades em aplicar o algoritmo ao conjunto correto de dados; contudo os alunos revelaram melhor desempenho no contexto tabelar do que no gráfico (Carvalho & César, 2000; Brocardo & Mendes, 2001). No caso da determinação da média, muitas respostas dos alunos, neste estudo, corroboram as conclusões apresentadas por Li e Shen (1994), uma vez que nem sempre foi considerada a sua ponderação, revelando também dificuldades quanto ao significado da média. Como também foi constatado por Watson e Moritz (2000), nem sempre os alunos interpretam bem os dados do gráfico, confundindo o valor da variável com o da frequência absoluta, tanto na média como na mediana. Finalmente o valor “0” da amostra causou muitos problemas, tal como também foi verificado por Pollatsek, Lima e Well (1981) e por Cai (1995). De facto, na determinação da média, os dois contextos, tabelar e gráfico, parece não influírem, já que as falhas aparecem nos dois contextos e os alunos revelaram conhecer os algoritmos de cálculo da média e mediana, embora os apliquem automaticamente, sem, por vezes, atenderem à especificidade do conjunto de dados do enunciado.

Relativamente à indicação do valor máximo e mínimo, os resultados revelam alguma dificuldade na indicação dos seus valores, pois muitos alunos utilizam os valores da frequência absoluta em detrimento dos valores da variável, sobretudo nos dados em gráfico. Foi, no entanto, nestas duas questões que os alunos tiveram melhor desempenho. Verificou-se que na identificação dos valores máximo e mínimo, tendencialmente, um aluno que os determina corretamente num contexto o faz também no outro, evidenciando poucas dificuldades em indicar os valores máximo e mínimo corretamente em ambos os contextos. Contudo, na identificação do máximo e do mínimo, os alunos revelaram mais dificuldade em contexto gráfico do que no tabelar, pois na indicação dos valores mínimo e máximo eles revelam ter mais facilidade na sua identificação em contexto tabelar do que em contexto gráfico. Também aqui os resultados obtidos são corroborados por outros estudos sobre a determinação das medidas de tendência central (Boaventura, 2003;

Barros, 2004; Cai, 1985; Carvalho, 1996, 2004; Li & Shen, 1994; Pollatsek *et al.*, 1981), bem como sobre a sua interpretação (Artega *et al.*, 2011; Boaventura, 2003; Watson & Moritz, 2000; Fernandes, Carvalho & Correia, 2011).

Finalmente, no caso dos conflitos semióticos, observou-se que muitos alunos tendem a apresentar um resultado numérico, ainda que totalmente desadequado, tal como se verificou no estudo de Boaventura (2003).

### 8.2.2. Segunda questão de investigação

Quais as atitudes em relação à Estatística dos alunos do 8.º ano das escolas envolvidas na fase de diagnose?

Adaptando a escala de Estrada (2002), foi elaborado um instrumento de avaliação de atitudes em relação à Estatística, para alunos do Ensino Básico (8.º ano), cuja aprendizagem de conteúdos estatísticos se iniciara no 1.º ciclo, e tendo por objetivo avaliar se ao tema Estatística despertam nos alunos atitudes favoráveis ou desfavoráveis.

A escala, com 28 itens resultantes da tradução de EAEE (Estrada, 2002), após análise e recomendações de 4 professores (2 do ensino básico e 2 do ensino universitário), deu origem a 25 itens que foram submetidos a alunos do 8.º ano, de outro agrupamento de escolas. Na sua versão definitiva, a escala adaptada é constituída por 23 itens no formato de escala de Likert. Esta escala revelou-se um instrumento confiável, com boa adequação dos dados a um modelo fatorial (4-dimensões) e na avaliação das atitudes dos alunos face à Estatística. Os quatro fatores identificados do construto atitude foram: Disposição e Valorização (aspetos relacionados com o gosto pela Estatística e disposição para a sua aprendizagem), Discernimento e Conceção (aspetos relacionados com a conceção e forma como enfrenta a Estatística), Comportamento e Utilidade (aspetos relacionados com a aplicação prática e quotidiana da Estatística) e Aptidão no Estudo (aspetos relacionados com a competências em Estatística).

Este instrumento é proposto nesta tese para investigar a predisposição de alunos do ensino básico para aprender Estatística, tendo sido aplicado na turma submetida à intervenção de ensino com vista a conhecer a influência das da aprendizagem da Estatística nas atitudes dos alunos segundo os quatro fatores mencionados. A maioria dos alunos revelou atitudes favoráveis e disposição positiva sobre a Estatística, evidenciando, no entanto, aspetos negativos nos seus conhecimentos e aptidões para a sua utilização.



Espera-se que esta escala adaptada seja de grande importância no reconhecimento da relação motivacional do aluno com a Estatística.

### 8.2.3. Terceira questão de investigação

Uma intervenção de ensino, privilegiando a representação gráfica e tabelar dos dados em situações do quotidiano, favorece a aprendizagem de Estatística no 8.º ano?

Com o objetivo de investigar a influência de uma intervenção de ensino do tópico OTD, do 8.º ano, onde se trabalham os conceitos estatísticos através de situações do quotidiano e privilegiando gráficos e tabelas, foi planeada uma intervenção de ensino usando 5 fichas de tarefas, construídas segundo as Metas Curriculares de Matemática do 8.º ano. Nesta planificação também foram tidos em conta os resultados obtidos na fase de diagnóstico, sobretudo em relação aos conflitos semióticos detetados.

Assim, tendo em conta os resultados observados na fase de diagnose, foram construídas fichas de tarefas privilegiando a representação gráfica e tabelar, que permitiriam relembrar e consolidar, no início da intervenção e através de duas fichas de tarefas (FT1 e FT2), os conceitos básicos avaliados na fase de diagnose. Essas sequências de fichas permitiram recordar e consolidar os conceitos relacionados com as medidas de localização, que segundo Pinker (1990) constitui uma prática que permite desenvolver a habilidade, e a partir dos quais foram construídos os novos conhecimentos, tais como: quartis, intervalo interquartil e diagrama de extremos e quartis, com recurso às três seguintes fichas de tarefas (FT3, FT4 e FT5). Na perspetiva de Carzola (2002), quanto maior for o domínio do leitor dos conceitos e procedimentos estatísticos, maior será a eficácia na leitura de gráficos e tabelas.

Na intervenção de ensino, que decorreu durante um total de 12 aulas, foi privilegiado o trabalho em díade, que, segundo Veloso (1993), ajuda a desenvolver capacidades fundamentais do ponto de vista da Educação Matemática, designadamente, a capacidade de argumentar, de construir uma justificação, de criticar as opiniões dos colegas, de ouvir, de compreender e aproveitar as ideias dos outros e de organizar o trabalho. Fora da sala de aula foi privilegiado o trabalho individual que, segundo Santos (2000), permite aos indivíduos, temporariamente, isolarem-se para procederem a reflexões. Hargreaves (1993) salienta que há que respeitar aqueles que trabalham melhor sozinhos, já que este tipo de trabalho evita dispersões e distrações, perda de tempo, bem como o choque de liderança que pode resultar em conflito.

Comparando os dois momentos em sala de aula, o trabalho em díade (11 aulas) e o momento de avaliação individual (Teste Final), e após a categorização das respostas em “correta”, “parcialmente correta” e “incorreta”, além das “não respostas”, constata-se que: em díade, 14% dos alunos não respondeu a, pelo menos, uma das alíneas propostas; e 17% apresentou respostas não corretas, apesar de os conceitos estarem registados no caderno e nas fichas resolvidas durante as aulas, o que denota falta de autonomia e de persistência na realização das tarefas.

Da análise das respostas verificou-se que emergiram dificuldades nas tarefas cujas respostas dependiam da interpretação dos dados nos diversos contextos (gráficos, tabelas e dados não organizados), sendo que o gráfico de pontos permitiu superar algumas dessas dificuldades. As respostas recolhidas através do TF permitiram constatar que 22% dos alunos não respondeu a, pelo menos, uma das alíneas e que 25% respondeu de forma não correta às alíneas. Da análise das respostas, concluiu-se que emergiram dificuldades nos novos conceitos (quartis, amplitude interquartil e diagrama de extremos e quartis), já que 25% não responde corretamente às alíneas sobre estes conceitos e 49% opta por não escrever qualquer resposta.

Na avaliação do processo de intervenção de ensino aplicaram-se ferramentas do Enfoque Ontossemiótico, mais especificamente da idoneidade didática e segundo as facetas: Epistémica, Cognitiva, Interacional, Mediacional, Emocional e Ecológica. Para tal elaborou-se um sistema de indicadores de idoneidade associados às orientações curriculares que representam significados de referência do saber estatístico de acordo com três documentos curriculares: Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (ME-DEB, 2001), Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008) e Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2013).

A análise da idoneidade didática foi efetuada em duas fases: *a priori* (antes da intervenção de ensino) e *a posteriori* (depois da intervenção de ensino). No que concerne à análise da idoneidade *a priori*, esta revelou que as tarefas planificadas para a intervenção de ensino cumpriam as orientações curriculares e garantiam um grau médio de adequação, tendo em conta os indicadores propostos, à exceção do teste final que revelou uma elevada adequação. Na análise da idoneidade *a posteriori* constatou-se que nos conceitos estatísticos sobre medidas de localização, alguns alunos, em menor número do que na fase de diagnose, na resolução das tarefas em díade, apresentaram dificuldades em identificar corretamente: o conjunto de dados para aplicar o algoritmo de cálculo da mediana e da média; por vezes, em determinar a medida estatística correta (a média em

vez da mediana e vice-versa). Alguns alunos apresentaram ainda dificuldades na determinação da média, por má utilização da calculadora; na determinação da mediana, por aplicação incorreta do seu algoritmo, não atender à paridade do conjunto de dados numéricos, ignorar a frequência dos valores da variável na determinação da mediana e por má utilização da calculadora.

Na análise global dos resultados obtidos pelos alunos, comparando os três momentos antes, durante e após intervenção de ensino, constata-se que: na resolução do teste diagnóstico (TD), os resultados foram piores do que os obtidos na realização das fichas de tarefas (FT), resolvidas em díade, após a introdução dos conceitos base e com o apoio do professor; e que os resultados obtidos pelos alunos na resolução do teste diagnóstico (TD) foram superados pelos resultados obtidos no teste final (TF). Desta comparação emerge que as sequências de fichas permitiram recordar e consolidar os conceitos sobre as medidas de localização (Pinker, 1990), a partir dos quais foram construídos os novos conhecimentos, e que o trabalho em díade promoveu a capacidade de argumentar, uma maior autonomia e um maior respeito pelo trabalho e ideias do colega (Ponte *et al.*, 1997).

As dificuldades sentidas pelos alunos na representação gráfica e tabelar e na interpretação de enunciados envolvendo a noção de média, moda e mediana estão patentes nas provas de avaliação nacional (Sousa, Ferreira, Castanheira, & Lourenço, 2010) e em muitos estudos de investigação (e.g., Andrade, & Saraiva, 2012; Batanero, 2000; Friel, Curcio, & Bright, 2001; Ponte, & Fonseca, 2001; Serrano, Ortiz, & Rodriguez, 2009).

Em termos globais, os alunos revelaram saber ler e interpretar as representações gráficas e tabelares à luz das situações a que diziam respeito, comunicar por escrito e oralmente os resultados das interpretações feitas, justificar e argumentar as decisões tomadas e as conexões estabelecidas de forma adequada, embora com pouco rigor, e foram capazes de representar, com alguma dificuldade, um mesmo conjunto de dados com recurso a várias representações gráficas, para responder ao que era solicitado, tanto na fase da implementação do ensino como na fase de avaliação. Ora, comparando os resultados obtidos por estes alunos na fase de diagnose (36% de respostas corretas) e no teste de avaliação final (61%), aplicado após o ensino, verifica-se que é notória a melhoria dos resultados, verificando-se também uma diminuição da ocorrência de conflitos semióticos em relação às medidas de tendência central e em relação à análise e interpretação de gráficos e tabelas.

No que concerne aos resultados da aplicação da Escala de Atitudes em Relação à Estatística (EAEE), realizada no final da intervenção de ensino, eles revelam uma melhor consciência da importância da Estatística, da sua utilidade e do seu papel na sociedade atual. Deste modo, conclui-se que as aprendizagens dos alunos relativamente às medidas de localização refletiram-se numa notória melhoria da sua atitude em relação à Estatística, em comparação com a fase de diagnose, perspetivando uma alta adequação da intervenção de ensino.

Estabelecendo comparação dos resultados da EAEE adaptada, obtidos nas fases de diagnóstico e após a intervenção de ensino, constatou-se: que a maioria dos alunos (60,8%) melhorou ou manteve a pontuação global obtida, em cada um dos fatores, enquanto alguns alunos (17,4%) pioraram as pontuações globais obtidas, em pelo menos dois fatores; e que as alterações desfavoráveis são mais significativas nas componentes Disposição e Valorização da Estatística (DVE) e em Discernimento e Conceção Estatística (DCE), ambas com a igual percentagem de atitudes negativas (17,4%), o que pode significar que os alunos continuam a ter dificuldades na compreensão e aplicação dos conceitos.

Globalmente, consideram-se médios os resultados obtidos pelos alunos do 8.º ano de escolaridade na intervenção de ensino, tendo a maioria dos alunos atingido os objetivos propostos, na medida em que melhoraram as suas aprendizagens e superaram dificuldades referentes a conceitos e procedimentos estatísticos em situações do seu quotidiano e privilegiando contextos gráficos e tabelares.

#### 8.2.4. Quarta questão de investigação

As dificuldades de alunos do 8.º ano na interpretação e análise da representação gráfica e tabelar das medidas de localização repercutem-se nas suas dificuldades, da construção, interpretação e análise do diagrama de extremos e quartis?

Em relação aos novos conceitos associados à representação gráfica diagrama de extremos e quartis (DEQ), os alunos revelaram alguma dificuldade na sua construção, em especial no que respeita ao rigor da construção e à escolha da escala. O maior número de respostas não corretas, sobre os DEQ, verificou-se na sua análise e na comparação de duas distribuições com dados em DEQ, sobretudo no que concerne à dispersão e à simetria. Foram ainda registados conflitos semióticos, tais como em expressar as

definições, nos conceitos, nos procedimentos e em argumentar e justificar, tanto na forma escrita como oral.

Na construção do diagrama de extremos e quartis verifica-se que desenhar o esboço do DEQ, em geral, não se revelou difícil, sendo claro que o DEQ é determinado por 5 medidas estatísticas: mínimo, Q1, mediana ou Q2, Q3 e máximo. Os alunos descrevem, em geral, constroem corretamente o DEQ a partir do conjunto de dados ordenados; contudo, mostram dificuldades quando o domínio dos valores observados obriga a uma maior precisão de escala de valores na sua construção. Verificou-se, ainda, que foi mais fácil construir o DEQ a partir de outro gráfico do que com dados não organizados (Baker et al., 2004).

No caso da interpretação dos DEQ, os alunos revelaram dificuldades em analisar este tipo de representação para avaliar a dispersão e a simetria da distribuição, o que leva a conjecturar que existe um menor *à-vontade*, por parte dos alunos, na análise dos DEQ, podendo ser necessário mais tempo para os alunos praticarem essa análise e interpretação dos DEQ, como foi referido no estudo de Eduards et al. (2017). Os alunos, quando revelam conhecer intuitivamente a noção de simetria e dispersão de uma distribuição, tendem a não usar medidas estatísticas, obtidas da leitura do DEQ, para justificarem a forma distribucional identificada. As dificuldades detetadas não dependem propriamente do rigor da representação gráfica do DEQ, já que elas surgem quer quando o DEQ é apresentado no próprio enunciado, quer quando ele é construído pelo próprio aluno.

Na determinação da amplitude interquartil, os alunos revelaram muitas dificuldades, já que, para cada uma das questões, quase metade dos alunos não respondeu, revelando também dificuldades na comparação entre distribuições (dispersão), atendendo às amplitudes interquartil obtidas da leitura do DEQ.

Também a argumentação escrita utilizada pelos alunos na comparação de distribuições em DEQ ficou aquém do esperado, sobretudo relativamente à análise quanto à dispersão e à simetria, melhorando um pouco na oralidade aquando do momento da entrevista, a qual decorreu após a implementação do teste final, com o objetivo de esclarecer respostas nele registadas e para promover uma reflexão sobre as falhas verificadas. Nesta indagação, constatou-se que os alunos conheciam os conceitos aplicados no TF, que o questionamento orientado facilitou a reflexão sobre as falhas detetadas e que os alunos revelaram pouca autonomia na resolução das situações-problema. Outra dificuldade registada em alguns alunos refere-se à determinação dos

quartis, em que não aplicaram corretamente o algoritmo da mediana e não tiveram em conta a paridade do conjunto de dados numéricos.

A análise comparativa de distribuições a partir dos respetivos DEQ revelou-se muito difícil para a maioria dos alunos, com muitas dificuldades em se expressarem. Morais e Fernandes (2011) apontaram esta, como sendo a maior dificuldade sentida pelos alunos. Seria necessário mais tempo para os alunos assimilarem melhor os conceitos de simetria e dispersão nos DEQ, como alertam Baker *et al.* (2004).

### 8.3. Reflexão, limitações e recomendações

Ao refletir-se sobre as conclusões e contribuições do estudo, o balanço sobre a experiência realizada é considerado positivo. Esta investigação é atual, não só pela temática, mas também pelo recurso à metodologia utilizada no estudo de diagramas de extremos e quartis, dado que, em Portugal, a investigação sobre este tópico está praticamente no início. Conciliou-se a análise ao tipo de respostas com a categorização dos conflitos semióticos e estabeleceram-se associações entre as dificuldades dos conteúdos estatísticos e as representações gráficas e tabelares, com a realização de uma análise das resoluções e raciocínios matemáticos utilizando as ferramentas teóricas do Enfoque Ontossemiótico, que se revelaram produtivas.

Estas ferramentas, a nível da Didática da Matemática, são uma mais-valia, já que permitem conceber, planificar, implementar e avaliar unidades de ensino, ou tópicos matemáticos, adaptando-as ao contexto, às competências e conhecimentos iniciais dos alunos e aos objetivos de aprendizagem, permitindo assim identificar e resolver os conflitos patentes em todo o processo de ensino e aprendizagem da matemática, e também permite avaliar a sua idoneidade, em particular no ensino da Estatística.

No tópico em estudo, pela sua pertinência e utilidade, deverá ser atribuído mais tempo ao processo de ensino aprendizagem, quer a nível do ensino básico, quer a nível da formação de futuros professores, já que o conceito diagrama de extremos e quartis é importante na vida escolar e académica, sobretudo na comparação de resultados de estudos. Assim, evidenciadas as dificuldades sentidas pelos alunos, valeria a pena conceder mais tempo ao seu ensino e à sua aprendizagem.

Cada professor, ao ensinar os seus alunos, deve estar atento e consciente desta problemática, ter em atenção a predisposição e as conceções dos alunos para a sua aprendizagem, incluindo as suas atitudes em relação à Estatística, pois só desta forma

poderá melhor compreender algumas dificuldades e obstáculos sentidos durante a aprendizagem de um conceito tão importante como o de diagramas de extremos e quartis.

Em consequência dos resultados obtidos neste estudo, sugerem-se novos estudos que possam contribuir para melhorar aprendizagem dos variados conceitos associados à construção e interpretação dos DEQ, tendo em vista desenvolver a compreensão, construção, análise e interpretação do DEQ. A aquisição deste conceito, por se tratar um conceito complexo, requer um conhecimento sólido sobre os conceitos que lhes servem de suporte, designadamente: mínimo, primeiro quartil, mediana ou segundo quartil, terceiro quartil e máximo.

Emerge também deste estudo uma sugestão relevante para a aprendizagem e o ensino dos DEQ, que consiste, numa fase inicial, em começar por explorar as ideias intuitivas dos alunos acerca da dispersão e simetria, prosseguindo na fase seguinte com a determinação de estatísticas que validem ou questionem as suas intuições.

Obviamente, qualquer estudo está condicionado por vários fatores, quer internos, quer externos à investigação. Pese embora os aspetos positivos, também existiram alguns fatores limitadores, nomeadamente certas decisões tomadas que nem sempre foram as mais acertadas. Neste momento, considera-se que o investigador deveria ter estado presente na aplicação das provas na fase de diagnose, de modo a incentivar os alunos a responderem ao teste diagnóstico e, assim, reduzir o número de não respostas. Seria também importante ter-se passado pela realização de entrevistas às díades, para que estes questionassem ou descrevessem os processos de resolução adotados.

Por fim, realce-se que as ferramentas de análise do EOS (Godino, 2011) permitiram estudar o decurso da aprendizagem nas diferentes fases do estudo, destacando a pertinência e relevância das ações realizadas, dos conhecimentos adquiridos e da análise das respostas evidenciando o afastamento entre os significados pessoais atingidos pelos alunos e os significados pretendidos.

Sem dúvida que outras investigações sobre esta temática permitirão uma ampliação do conhecimento. Nessa medida será importante prosseguir com o estudo do conhecimento do conteúdo e didático (Godino, 2009) sobre esta temática, desde o início do seu estudo (8.º ano) e continuando a nível da formação inicial de docentes.





## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A matemática na Educação Básica. Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico*. Lisboa: ME – DEB.
- Afifi, A. A. & Clark, V. (1996). *Computer-aided multivariate analysis*. New York: Chapman and Hall.
- Agne, K.J., Greenwood, G.E. & Miller, L. (1994). Relationships between belief systems and teacher affectiveness. *The Journal of Research and Development in Education*, 27(3), 141 – 152.
- Aiken, L. (2002). *Attitudes and Related Psychosocial Constructs – Theories, Assessment, and Research*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- Ainley, J. (2000) Constructing purposeful mathematical activity in primary classrooms. In C Tikly and A Wolf (Eds.) *The Maths We Need Now*, Bedford Way Papers, 138-153.
- Aires, L. (2011). *Interculturalidade, Género e Tecnologia: Uma abordagem educativa* CADERNOS – Género e Discursos Educativos Digitais. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência, 25-31.
- Aldenderfer, M. S. & Blashfield, R. K. (1984). *Cluster Analysis*. Beverly Hills, CA: Sage Press.
- Aliaga, R. (2009). *Actitud hacia la estadística en estudiantes universitarios de ciencias y de educación* (Tesis de Máster). Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.
- Almeida, A. (1995). *Visitas de estudo: concepções e eficácia na aprendizagem científica em alunos das classes mais desfavorecidas*. Tese de Mestrado, Faculdade de
- Almeida, F. N. (1996). *Avaliação de desempenho para gestores*. Amadora: McGraw-Hill.
- Almeida, L. & Freire, T. (2004). *Metodologias da Investigação em Psicologia e Educação*. (5ª Ed.), Braga: Psiquilíbrios Edições.
- Amado, J. & Freira, I. (2013). Estudo de Caso na investigação em Educação. In J. Amado (Org.), *Manual de investigação qualitativa em educação* (pp.121-204). Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.
- Andrade, J., & Saraiva, E.M. Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *Revista Latinoamericana de Investigación*, 15(2), 137-169, Maio 2012.
- Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(3), 298-318. Disponível em: [www.iejme.com/](http://www.iejme.com/).
- Aparício, A. & Bazán, J. (2006). Actitud y rendimiento en Estadística en profesores peruanos. In G. Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 19, 644-650. Disponível em: <http://www.pucrs.br/famat/viali/orientacao/leituras/artigos/ALME19.pdf>
- Aparício, A. (2006). *Aspectos afetivos na aprendizagem da Estatística: atitudes e suas formas de avaliação*. Tese de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Faculdade de Educação da Universidade de S. Paulo. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-05122007-115240/pt-br.php>

- Aparicio, A., & Bazán, J. L. (2008). Aspectos afectivos intervinientes en el aprendizaje de la estadística: actitudes y sus formas de evaluación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 180-189.
- Aparício, A., Bazán, J. & Abdounur, O. (2004). Atitude e desempenho em relação à estatística em professores de ensino fundamental no Peru. In *Anais do VII Encontro Paulista de Educação Matemática*. S. Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Regional S. Paulo.
- Arteaga, P. (2008). *Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos*. 2009. 79 f. Tese (Mestrado Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad Granada, Granada, 2009.
- Arteaga, P. (2011). Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores. Tese de doutoramento, Universidade de Granada, Granada, Espanha.
- Arteaga, P., Batanero, C., Ortiz, J. & Conteras, J. (2011). Sentido numérico y gráficos estadísticos en la formación de profesores. Publicaciones de la Facultad de Educación y Humanidades del Campus de Melilla, 41, 33 – 50. Retrieved from <http://dialnet.unirioja.es/servlet/revista?codigo=2098>.
- Asch, S.E. (1952). Attitude as cognitive structures. In M. Jahoda & N. Warren (Eds.). *Attitudes: selected readings*. London: Penguin Books, 32-39.
- Atkinson, P. & Hammersley, M. (1994). Ethnography and Participant Observation. In *Handbook of Qualitative Research*. Ed. N.K. Denzin and Y.S. Lincoln. 248-260. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas media y universitarias – Características y medición*. Bilbao: Mensajero.
- Azmitia, M. (1988). *Peer interaction and problem solving: When are two heads better than one?* Child Development.
- Bakker, A.; Biehler, R. & Konold, C. (2005). Should young students learn about box plots? In: BURRILL, G.; CAMDEN, M. (Eds.). *International Association for Statistical Education 2004 Roundtable: Curricular development in statistics education*. Voorburg, Netherlands: International Statistical Institute, 2005. p. 163-173.
- Bardin, L. (2011). *Análise de Conteúdo*. (4ª Ed.), Lisboa: Edições 70.
- Barr, G. V. (1980). Some student ideas on the median and the mode. *Teaching Statistics*, 2(2), 38-41.
- Barros, P. M. (2004). *Os Futuros Professores do 2º Ciclo e a Estocástica – Dificuldades Sentidas e o Ensino do Tema* (Tese de mestrado, Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho, 2003). Braga: Associação de Professores de Matemática.
- Barroso, J. (2003). Organização e Regulação dos Ensinos Básico e Secundário, em Portugal: sentidos de uma evolução. *Educação & Sociedade*, 24 (82), 63-92.
- Batanero, C. & Díaz, M.C. (2005). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidade condicional. Reflexiones desde el marco de la TFS. In A. Contreras (Ed.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 13-36). Universidade de Jaén.
- Batanero, C. (2000a). Dificultades de los estudiantes en los conceptos estadísticos elementales: el caso de las medidas de posición central. In C. Loureiro, F. Oliveira & L. Brunheira (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística* (31-48). Lisboa: SPE, APM e DEEIO/FCUL.
- Batanero, C. (2000b). ¿Hacia dónde va la educación estadística. *Blaix*, 15, 2-13. Retrieved from <http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones index.htm>.

- Batanero, C. (2000c). *Significado y comprensión de las medidas de tendencia central*, Uno, n.º 25, 41-58.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2002). *Los retos de la cultura estadística*. Conferência inaugural das Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística, Buenos Aires, Argentina. Disponível em: <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf>
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de los profesores. In J. Fernandes, F. Viseu, M. Martinho & P. Correia (Eds.), *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 7-21) [CD-ROM]. Braga: Centro de Investigação em Educação do Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. In J. Contreras, G. Cañadas, M. Gea & P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Primeras Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria* (pp. 55-61). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Batanero, C., & Godino, J. (2001): “Developing new tools in statistics education research”, *Proceedings of the 53rd Session of the International Statistical Institute*, Bulletin of ISI (Tome LIX, Book 2, 137-142), ISI, Seul.
- Batanero, C., Burrill, G. & Reading, C. (2011). Overview: challenges for teaching statistics in school mathematics and preparing mathematics teachers. In C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School-Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 407-418). Dordrecht: Springer Science+Business Media. DOI: 10.1007/978-94-007-1131-0
- Batanero, C., Godino, J. & Navas, F. (1997). Concepciones de Maestros de primaria en formación sobre los promedios. In H. Salmerón (Ed.), VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa, 310-304.
- Batanero, C., Godino, J. & Navas, F. J. (1997). Evaluación de concepciones sobre la noción de promedio en maestros de primaria en formación”, Trabajo presentado en las VII Jornadas Logse, Evaluación Educativa.
- Batanero, C., Godino, J. & Roa, R. (2004). Training Teachers to Teach Probability. *Journal of Statistics Education*, 12 (1). Disponível em: [www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html](http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html)
- Batanero, C., Godino, J. D., Green, D.R., Holmes, P. & Vallecillos, A. (1994). Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- Bezerra, J. (2001). *Sala de aula*. Acedido a 17, dezembro, 2013 em: [http://www.educacional.com.br/articulas/outrosEducacao\\_artigo.asp?artigo=artigo0045](http://www.educacional.com.br/articulas/outrosEducacao_artigo.asp?artigo=artigo0045)
- Bisquerra, R. (1989). Métodos de investigación educativa: Guía práctica (1ª. Ed. pp. 55- 69). Barcelona: CEAC
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). Programa e Metas Curriculares: Matemática Ensino Básico. Disponível em: <http://dge.mec.pt/metascurriculares/index.php?s=directorio&pid=17>
- Blumer, H. (1969). *Symbolic Interactionism: Perspective and Method*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. p. vii.
- Boaventura, M. G. & Fernandes, J. A. (2004). Dificuldades de alunos do 12.º ano nas medidas de tendência central: O contributo dos manuais escolares. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Actas do I*

- Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 103-126). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Boaventura, M. G. (2003). Dificuldades de alunos do ensino secundário em conceitos estatísticos: O caso das medidas de localização. Dissertação (Mestrado em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática), Universidade do Minho, Braga.
- Bogdan, R. & Biklen, S. (2007). *Qualitative research for education: An introduction to theories and methods*. (5th Ed.), Boston: Pearson Education.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação. Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto: Porto Editora.
- Bohner, G. & Wänke, M. (2002). *Attitudes and Attitude Change*. Hove: Psychology Press.
- Branco, J. & Martins, M. E. G. (2002). Literacia estatística. *Educação e Matemática*, n.º 69, 9-13.
- Branco, J. (2000). Estatística no Secundário: o Ensino e seus Problemas. Em C. Loureiro, F. Oliveira & L. Brunheira (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística* (pp. 11-29). Lisboa: SPE, APM e DEEIO/FCUL.
- Branco, J. A. (2006). Mudanças no ensino da estatística. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística*. Outubro de 2006, 19-23. Disponível em <http://spestatistica.pt/static/docs/bulletins/>
- Bransford, J. D., Sherwood, R., Vye, N., & Rieser, J. (1986). Teaching thinking and problem solving. *American Psychologist*, 41 (10), 1078-1089
- Bright, G. & Hoeffner, K. (1993). Measurement, Probability, Statistics and Graphing. In Douglas Owens. (Ed.). *Research Ideas for the Classroom. Middle Grades Mathematics*. NCTM. Research Interpretation Project.
- Brocardo, J., & Mendes, F. (2001). Processos usados na resolução de tarefas estatísticas. *Quadrante*, 10(1), 33-58.
- Brocardo, J., & Mendes, F. (2001). Processos usados na resolução de tarefas estatísticas. *Quadrante*, 10(1), 33 – 58.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brown, T. (2006). *Confirmatory Factor Analysis for Applied Research*. New York: The Guilford Press.
- Cai, J. (1995): “Beyond the computational algorithm. Student’s understanding of the arithmetic average concept”, *Proceeding of the 19th PME Conference* (v.3, pp. 144-151), Ed. L. Meira, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.
- Cai, J. (1998). Exploring students’ conceptual understanding of the averaging algorithm. *School Science and Mathematics*, 98(2), 93-98.
- Cardoso, T. (2007). *Interação verbal em aula de línguas: meta-análise da investigação portuguesa entre 1982-2002*. Retrieved from <https://ria.ua.pt/bitstream/10773/1465/1/2008000382.pdf>
- Carl, L., Aklilu, Z. & Nicosia, C. (2000). A study and metacognitive facts for learning statistics and implications for developing effective learning environment. Department of Mathematics. Central Michigan University. USA, 1-15
- Carvalho, C. & César, M. (2000). Reflexão em torno de dinâmicas de interação: o caso do ensino de dinâmicas de interação: O caso do trabalho em diade em tarefas não-habituais de estatística. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. P. da Ponte, J. M. Matos, & L. Menezes (Eds.), *Interações na aula de Matemática* (pp. 85-97). Viséu: SPCE Secção de Educação Matemática.
- Carvalho, C. (1996). Algumas questões em torno de tarefas estatísticas com alunos do 7.º ano. In A. Roque & M.J. Lagerto (Orgs.), *Atas do ProfMat 96*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 165-171.

- Carvalho, C. (1998). *Tarefas estatísticas e estratégias de resposta*, Comunicação apresentada em el VI Encontro em Educação Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciências de la Educación, Castelo de Vide, Portugal.
- Carvalho, C. (2001). *Interação entre pares: Contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade*, Tese Doutoral, Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Carvalho, C. (2004). Um olhar da Psicologia pelas dificuldades dos alunos em conceitos estatísticos. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Atas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 85-102.
- Carvalho, C. (2006). Olhares sobre a educação estatística em Portugal. Em *ANAIS do SIPEMAT – Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1-16). Recife: Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco.
- Carvalho, H. (2008). *Análise Multivariada de Dados Qualitativos – Utilização da Análise de Correspondência Múltiplas com o SPSS*. Lisboa: Edições Sílabo.
- Carvalho, R. (2008). *História do ensino em Portugal – desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar-Caetano*. (4ª Ed.), Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian – Serviço de Educação e Bolsas.
- Castro R & Bronfman MN 1997. Algunos problemas no resueltos en la integración de métodos cualitativos y cuantitativos en la investigación social en salud. Trabalho apresentado no IV Congresso Latinoame-ricano de Ciências Sociais e Medicina, Cocoyoc, México. (Mimeo).
- Cazorla, I. (2002). *Relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tese de doutoramento em Educação, Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: [http://www.pucrs.br/famat/viali/tic\\_literatura/teses/Cazorla.pdf](http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/teses/Cazorla.pdf)
- Cazorla, I. M., Silva, C. B., Vendramini, C. M. M. & Brito, M. F. R. (1999). Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à estatística. *Anais da conferência internacional: experiências e perspectivas do ensino da estatística*, Florianópolis, Santa Catarina, 45-57.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tese de Doutoramento. Universidade de Granada.
- Cohen, L. & Manion, L. (1998). *Research Methods in Education* (London: Routledge).
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison K. (2011). *Research Methods in Education*. (7th Ed.), London: Routledge.
- Coopé, S. (2010). *ravail collaboratif d'enseignants de mathématiques pour la production et la diffusion de ressources pour les professeurs et les formateurs. Actes Du Colloque de l'AREF*, 1–10. Retrieved from <http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00960316>
- Cooper, A. (2012). Today's technologies enhance writing in mathematics. *The Clearing House: A Journal of Educational*, 85(2), 80–85. Retrieved from <http://www.tandfonline.com/loi/vtch20>.
- Costa, M. & Lins, A. (2010). Trabalho colaborativo ea utilização das tecnologias da informação e comunicação na formação do professor de Matemática. ... *Pós-Graduados Em Educação Matemática*, 452–470. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4509>.
- Coutinho, C. & Chaves, J. (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação*, 2002, 15(1), 221-243.

- Coutinho, C. (2005). *Percursos da Investigação em Tecnologia Educativa em Portugal: uma abordagem temática e metodológica a publicações científicas (1985-2000)*. Braga: Universidade do Minho.
- Coutinho, C. (2013). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática* (p. 421). ALMEDINA.
- Creswell, J. (2009). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. (3rd Ed.), Los Angeles: SAGE Publications Ltd.
- Cronbach, L. (1951). Coefficient alfa and the internal structure of tests. *Psychometrika*, 16, 297-334.
- Cuadras, C. (1981). *Métodos de Análisis Multivariante*. Barcelona: Eunibar, Editorial Universitária de Barcelona.
- Cunha, M. H. e Almeida, M. R. (1996). Estatística nos 7º e 10º anos: avaliação de uma experiência. *Educação e Matemática*, 38, 21-28.
- Curcio, F. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematical Education*, 1(5), 382-393.
- Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension: Elementary and middle school activities*. Reston: NCTM.
- Custódio, P.B. Soeiro, D., & Silva, S. (2010). *Pedagogia do Ensino Superior. Conhecimento sempre Provisório e Conjectural*, 5. Disponível em: <http://sisifo.fpce.ul.pt/pdfs/sisifo7notaPT.pdf>
- D'Amore, B., Font, V. & Godino, J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, v.XXVIII, n.2, 49-77.
- Damásio, B. (2012). Uso da análise fatorial exploratória em psicologia. *Avaliação Psicológica*, 11 (2), 213–228.
- Damiani, M.F. (2008). Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. *Educar*, 31, 213–230. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/n31/n31a13>
- Denzin, N. & Lincoln, Y. (2000). Introduction: The discipline and Practice of Qualitative Research. In N. Denzin e Y. Lincoln (Eds) *Handbook of Qualitative Research Second Edition* (pp. 1-29) Thousand Oaks: Sage Publications.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique Outil-objet. RDM. <http://rdm.penseesauvage.com/RDM-Vol-7-2.html>
- Dreyfus, A. e Levy, O. (1996). Are the notion of me an and related concepts too difficult for 6th and 7th grade biology students? *European Journal of Teacher Education*, 19 (2), 137-152.
- Duval, R. (2006). *A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics*. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Eagly, A. H. & Chaiken, S. (1993). *The Psychology of Attitudes*. Harcourt.
- Eco, U. (1995). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.
- Eduards, T. G.; Özgün-Koca, A. & Barr, J. (2017). Interpretations of Boxplots: Helping Middle School Students to Think Outside the Box. **Journal of Statistics Education**, Alexandria, v. 25, n. 1, p. 21-28.
- Ernest, P. (1991). Constructivism, The Psychology of Learning, and the Nature of Mathematics: Some Critical Issues. In Furinghetti, F. Ed. *Proceedings of 15th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Assisi (Italy), 2, 25-32.
- Ernest, P. (1994). (Ed.) *Mathematics, education and philosophy: an international perspective*. London: Farmer.

- Espinel, C., González, T., Bruno, A. y Pinto, J. (2009). Las gráficas estadísticas. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en Educación Estadística* (pp. 133-156). Melilla. Facultad de Humanidades y Educación.
- Estevam, E. & Fürkotter, M. (2010). (Res) Significando gráficos estatísticos no Ensino Fundamental com o software SuperLogo 3.0. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.12, n.3, 578-597.
- Estrada, A. (1999), *Análisis de actitudes hacia la estadística*, Memoria de Tercer Ciclo, Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Estrada, A. (2001). Actitudes hacia la Estadística e instrumentos de evaluación. In *Actas de las Jornades europees d'estadística – L'ensenyament i la difusió de l'estadística* (pp. 369-384). Palma de Maiorca: Instituto Balear de Estadística e Conselleria d'Economia, comerç i Indústria del Govern des Illes Balears. Disponible em: [www.ibestat.es/ibfiles//content/files/publicaciones/jornades\\_europees.pdf](http://www.ibestat.es/ibfiles//content/files/publicaciones/jornades_europees.pdf)
- Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tese de doutoramento. Universidade Autònoma de Barcelona
- Estrada, A., Batanero, C. & Lancaster, S. (2011). Chapter 18 - Teachers' Attitudes Towards Statistics. In C. Batanero, G. Burril & C. Readings (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 163-174). Dordrecht: Springer Science+Business Media. DOI: 10.1007/978-94-007-1131-0
- Estrada, A., Batanero, C., Bazán, J. & Aparício, A. (2009). As atitudes em relação à Estatística em professores: um estudo comparativo de países. Em C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Eds.), *XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática – Números e Estatística: refletindo no presente, perspetivando o futuro* [CD-ROM]. Vila Real: Sociedade de Ciências da Educação – Secção de Educação Matemática.
- Estrada, A., Bazán, J. & Aparício, A. (2010a). A cross-cultural psychometric evaluation of the attitude toward statistics scale Estrada's in teachers. In C. Reading (Ed.), *Eighth International Conference on Teaching Statistics - ICOTS8 - Proceedings: Data and context in statistical education towards an evidence-based society* [CD-ROM]. Ljubljana: International Association for Statistical Education, International Statistical Institute e Statistical Society of Slovenia.
- Estrada, A., Bazán, J. & Aparício, A. (2013). Evolución de las propiedades psicométricas de una escala de actitudes hacia la estadística en profesores. In AIEM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 3, 5-23.
- Feinberg, L.B. & Halperin S. (1978). Affective and cognitive correlates of course performance in introductory statistics. *Journal of Experimental Education*, 46 (4), 11-18.
- Fernandes, E. (1997). O trabalho cooperativo num contexto de sala de aula. *Análise Psicológica*, 4, 563–572. Disponible em: <http://www.scielo.oces.mctes.pt/pdf/aps/v15n4/v15n4a04.pdf>
- Fernandes, J. A. & Barros, P. M. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1.º e 2.º ciclos em estocástica. In *Actas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CIBEM)* (13 pp.), Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.
- Fernandes, J. A., Almeida, C., Viseu, F. & Rodrigues, A. M. (1999). Um estudo exploratório sobre atitudes e práticas de professores de matemática na utilização de calculadoras. In C. Almeida, J. A. Fernandes, A. M. Rodrigues, A. P. Mourão, F. Viseu & H. Martinho (Orgs.), *Calculadoras gráficas no ensino da matemática* (pp. 1-28). Braga: Departamento de Metodologias da Educação da Universidade do Minho.
- Fernandes, J. A., Alves, M., Machado, E., Correia, P. & Rosário, M. (2009). Ensino e avaliação das aprendizagens em Estatística. Em A. Fernandes, F. Viseu, M. Martinho & P. Correia

- (Eds.), *Actas – II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 52-71) [CD-ROM]. Braga: Centro de Investigação em Educação do Instituto de Educação Psicologia, Universidade do Minho.
- Fernandes, J. A., Batanero, C., Contreras, J. M., & Diaz, C. (2009). A simulação em Probabilidades e Estatística: potencialidades e limitações. *Quadrante*, 18(1 e 2), 161-183.
- Fernandes, J. A., Carvalho, C. & Correia, P. (2011). Contributos para a Caracterização do Ensino da Estatística nas Escolas. *Bolema*, 24 (39), 585-606. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5109/28>
- Fernandes, J. A., Carvalho, C., & Ribeiro, S. (2007). Caracterização e implementação de tarefas de Estatística: Um exemplo no 7.º ano de escolaridade. *Zetetiké*, 15(28), 27-61.
- Fernandes, J. A., Morais, P. C., & Lacaz, T. V. S. (2011). Representação de dados através de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *Anais da XIII Conferência interamericana de Educação Matemática*, Recife, Brasil, 26-30 Junho 2011.
- Fernandes, J.A & Portela, J. H. (2004). Elementos de Estatística descritiva: A folha de cálculo no estudo de Estatística. In *Elementos de matemática para professores do ensino básico*, ed. Pedro Manuel Palhares, 53 - 112. Lisboa: Lidel
- Fernandes, J.A (2009a). Ensino e aprendizagem da Estatística: realidades e desafios. In J. A. Fernandes, M. H. Marinho, F. Viseu & P. F. Correia (Orgs.), *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 52-71). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho [CD-ROM].
- Ferreira, A. (2012). *As atitudes dos professores do 1º Ciclo do ensino básico relativamente à inclusão de alunos com necessidades educativas especiais no ensino regular*. Tese de mestrado em Ciências da Educação, Escola Superior de Educação João de Deus.
- Fidalgo, L. (2003). *(Re)Construir a Maternidade Numa Perspectiva Discursiva*. Lisboa: Instituto Piaget.
- Fishbein, M. & Ajzen, I. (1975). *Belief, attitude, intention, and behavior: An introduction to theory and research*. Reading, MA, EE. UU.: Addison-Wesley.
- Flick, U. (2004). *Uma introdução à pesquisa qualitativa*. Porto Alegre: Bookman.
- Floyd, I. & Widaman, K. (1995). Factor analysis in the development and refinement of clinical assessment instruments. *Psychological Assessment*, 7(3), 286-299.
- Font, V. (2001). Processos mentais versus competência, *Biaix* 19, 33-36.
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124.
- Fontana, A., & Frey, J. H. (2000). The interview: From structured questions to negotiated text. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (2nd ed., 645-672). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Friel, S., Curcio, F. & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education* 32(2), 124-158.
- Fuller, E., Mejia-Ramos, J.P., Weber, K., Samkoff, A., Rhoads, K., Doongaji, D., & Lew, K. (2011). In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oerterman (Eds.). *Comprehending Leron's structured proofs*. In *Proceedings of the 14th Conference for Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1, 84-102. Portland, OR.
- Gairin Sallan, S. J. (1987). *Las actitudes en educación*. Barcelona: P.P.U. Barcelona.



- Gal, I. & Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: Toward an assessment framework. *Journal of Statistics Education*, 2 (2). Disponível em: <http://www.amstat.org/publications/jse/v2n2/gal.html>
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70 (1), 1-64.
- Gal, I., Ginsburg, L. & Schau, C. (1997). Monitoring Attitudes and Beliefs in Statistics Education. Em I. Gal & J. Garfield (Eds.), *The assesment challenge in statistics education* (pp. 37-51). Voorburg: IOS, Press.
- Garfield, J. & Ahlgren, A. Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, Reston, v. 19, n. 1, 44-63, Jan. 1988.
- Garfield, J. (1993). An authentic assessment of students' statical knowledge. In N. Webb (Ed.), *Assessment in the Mathematics Classroom*, National Council of Theachers of Mathematics. Yearbook, (pp. 187-196). NCTM, Reston, VA.
- Gattuso, L. & Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among high-school children. In L. Pereira-Mendoza, L.S. Kea e W. Wong (Eds.), *Proceedings of the fifth international conference on teaching statistics* (pp. 685-691). Singapura: International Association for Statistical Education.
- Ghiglione, R., & Matalon, B. (1997). *O Inquérito – Teoria e Prática* (6ª ed.). Oeiras: Celta Editora.
- Gil Flores, J. (1999). Actitudes hacia la Estadística. Incidencia de las variables sexo y formación previa. *Revista Española de Pedagogia*, 214, 567-590.
- Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Godino, J. D. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of researche in Mathematics Education. In A. Sierpiska & j. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics education a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
- Godino, J. D. & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12 (1): 70-92.
- Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. In L. Puig & A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, pp. 417-424). Universidad de Valencia.
- Godino, J. D. (1999). *Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática*. Disponível em: [www.ugr.es/~jgodino/](http://www.ugr.es/~jgodino/).
- Godino, J. D. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Revista de didáctica de las matemáticas* 7 (25), 77-87. Disponível em [www.ugr.es/~jgodino/](http://www.ugr.es/~jgodino/).
- Godino, J. D. (2002). Perspetiva ontosemiótica de la competência y comprensión de la cognición matemática. *La matemática e la sua didattica*, 4, 434 – 450. Disponível em [www.ugr.es/~jgodino/](http://www.ugr.es/~jgodino/).
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-simiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidade de Granada. Disponível em [www.ugr.es/~jgodino/](http://www.ugr.es/~jgodino/).
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN — Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. In A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J.

- García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (49-68). Jaén: SEIEM.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional e personal de los objetos matemáticos (Institutional and personal meaning of mathematical objects), *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1997): Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education, *Mathematics Education as a Research*
- Godino, J. D., (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia presentada en la *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.
- Godino, J. D., (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas, Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en [http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis\\_EOS\\_14abril14.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_14abril14.pdf).
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. Disponible en URL: [http://www.ugr.es/local/jgodino/indice\\_eos.htm](http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm)
- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. & Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27 (2), 221-252.
- Godino, J. D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, Vol. 38, 25-49.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2007). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de la matemática desde un enfoque ontosemiótico. Conferencia Invitada en la *XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Maracaibo, Venezuela. Vol. 21, 656-666.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27 (1), 59-76.
- Godino, J.D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, The international Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J.D., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.
- Goldin, G., Rösken, B. & Törner, G. (2009). Beliefs – No longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. Em J. Maaß & W. Schölglmann (Eds.), *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education: New Research Results* (1-18). Rotterdam: Sense Publishers.
- Goldin, G.A. & Shteingold, N. (2001). *Systems of representations and the development of mathematical concepts*. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (1-22). Reston, VA: NCTM.

- Goldin, G.A. (2008). *Perspectives on representation in mathematics learning and problem solving*. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education (176-201)*. New York, NY: Routledge.
- Gomez, G.; Flores, J. & Jimenez, E. (1996). *Metodologia de la Investigacion Cualitativa*. Malaga: Ediciones Aljibe.
- Gómez-Chacón, I. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 43(2), 149-168.
- Greene, J. C. (2007). *Mixed methods in social inquiry*. San Francisco: John Wiley and Sons.
- Groth, R. & Bergner, J. (2005). Preservice elementary teachers' metaphors for the concept of statistical sample. *Statistics Education Research Journal*, 4(2), 27-42.
- Guasch, Ó. (1997). *Observación participante*. CIS, Madrid.
- Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (2015). GAISE 2015: New Report for a New Era. AMSTATNEWS. Disponível em: <http://magazine.amstat.org/blog/2015/06/01/gaise-2015-new-report-for-a-new-era/>.
- Haddock, G. & Maio, G. R. (2007). Attitudes. En R. F. Baumeister y K. D. Vohs (Eds.), *Encyclopedia of social psychology* (Artículo no. 37). Thousand Oaks, CA, EE. UU.: Sage. Disponível em <[http://sageereference.com/socialpsychology/Article\\_n37.html](http://sageereference.com/socialpsychology/Article_n37.html)>.
- Hair, J., Black, B. Babin, B., & Anderson, R. (2009). *Multivariate Data Analysis*. (7th Ed.), Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- Hargreaves, A. (1993). *Individualism and individuality: Reinterpreting the teacher culture*. In Judith Warren Little e Milbrey W. McLaughlin (Eds.), *Teachers' work. Individuals, colleagues and contexts*. New York: Teachers College, Columbia University.
- Henriques, A, & Fernandes, J.A. (2015). O ensino da Estatística nas recentes orientações curriculares. Em *Actas do ProfMat 2015* (pp. 48-67). Évora: Associação de Professores de Matemática.
- Hjelmslev, L. (1943). Langue et parole. *Cahiers Ferdinand de Saussure*, 2, 29-44.
- Holmes, P. (2000). What Sort of Statistics Should Be Taught in Schools – And Why? Em: C. Loureiro, F. Oliveira & L. Brunheira (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística* (pp. 49-53). Lisboa: SPE, APM e DEEIO/FCUL.
- Hutcheson, G., & Sofroniou, N. (1999). *The multivariate social scientist: introductory statistics using generalized linear models*. London, Sage Publications.
- Jacobbe, T. (2008). Elementary school teachers' understanding of the mean and median. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE. Disponível em: [www.ugr.es/~icmi/iase\\_study/](http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/).
- Jacobbe, T. (2008). Researching the unit: An activity to visualize the unit. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 13(2), 23 – 28.
- Janesick, V. J. (2000). The Choreography of Qualitative Research Design – Minuets, Improvisations, and Crystallization. In N. Denzin & Y. Lincoln [Eds.], *Handbook of Qualitative Research* (pp. 379-399). Thousand Oaks: Sage Publications.
- Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kline, R. B. (2013). Exploratory and confirmatory factor analysis. In Y. Petscher & C. Schatsschneider (Eds.), *Applied quantitative analysis in the social sciences* (Chap. 6, print

- proof, 171-207). New York: Routledge. Disponível em: <http://psychology.concordia.ca/fac/kline/library/k13b.pdf>
- Kosslyn, S. M. (1985). Graphics and human information processing. *Journal of the American Statistical Association* 80(391), 499-512.
- Leon, M. R. & Zawojewski, J.S. (1991). Use of the arithmetic mean: an investigation of four properties; issues and preliminary results. *Proceeding of the Tird international conference on Teaching Statistics (V. 1)*. Dunedin: New Zealand.
- Lessard-Hébert, M., Goyette, G., Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas* (95-106). Lisboa: Instituto Piaget.
- Lester, F. (1980). *Research on Mathematical Problem Solving*. In R.J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education*. Reston: NCTM.
- Li, D. Y. & Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics* 14 (1), 2-8.
- Lincoln, Y. & Denzin, N. (2006). O sétimo momento: deixando o passado para trás. Em N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *O planejamento da pesquisa qualitativa – Teorias e abordagens* (389-406). (2ª Ed.), Porto Alegre: Artmed.
- Loehlin, J. (2004). *Latente Variables Models – An introduction to factor, path and structuralequation analysis*. (4th Ed.), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Loewenthal, K. (2001). *An Introduction to Psychological Tests and Scales*. (2nd Ed.), Hove: Psychology Press – Taylor and Francis Group.
- Lopes, C. A. E. (2004). Literacia estatística e o INAF 2002. In: M. C. F. R. Fonseca, (Org.), *Letramento no Brasil: habilidades matemáticas: reflexões sobre o INAF 2002* (pp. 187-197). São Paulo: Global Editora.
- Ludke, M. & André, M. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.
- Luz, C.S. (2012). O diagrama de Caule-e-folhas nos manuais escolares dos 1.º e 2.º CEB. Dissertação de mestrado. Universidade de Aveiro. Disponível em: <https://ria.ua.pt/bitstream/10773/10394/1/disserta%C3%A7%C3%A3o.pdf>.
- MacGillivray, H., & Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study* (pp.109–120). Springer Science +Business Media.
- Machado, R., & César, M. (2012). Trabalho colaborativo e representações sociais: Contributos para a promoção do sucesso escolar, em matemática, *140*(20), 98–140. Retrieved from <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/5963>.
- Mamede, E. (2001). O currículo da Matemática para o 1º ciclo e a calculadora. Em I. Lopes & C. Costa (Eds.), *XII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 197-207). Vila Real: Associação de Professores de Matemática.
- Marcelo, C. & Parrilla, Á (1991). El estudio de caso: Una estratégia para la formación del profesorado y la investigación didáctica. In C. Marcelo, Á. Parrilla, P. Mingorance, A. Estebaranz, M. Sanchez & S. Llinares (Orgs.), *El estudio de caso en formación del profesorado y la investigación didáctica* (pp. 11-71). Sevilla: Publicaciones de la Universidad de Sevilla.
- Maroco, J. (2014). *Análise de equações estruturais: Fundamentos teóricos, software e aplicações*. 2.ª edição. Lisboa: ReportNumber,
- Marques, M., Guimarães, G., & Gitirana, V. (2011). Compreensões de Alunos e professores sobre Média Aritmética. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 24, n.40, 725-745.

- Martinho, M. (2009). Contributos de uma colaboração: a estatística ea comunicação matemática numa turma de 5.º ano de escolaridade, 1–13. Disponível em: <http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/9842>
- Martins, A. (2004). Estudo das atitudes em relação à Estatística dos professores do 1.º ciclo e dos professores de Matemática do 2.º ciclo do ensino básico. Tese de doutoramento. Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro. Disponível em: [https://repositorio.utad.pt/bitstream/10348/4656/1/phd\\_jasvmartins.pdf](https://repositorio.utad.pt/bitstream/10348/4656/1/phd_jasvmartins.pdf).
- Martins, C & Santos, L. (2012). O Programa de Formação Contínua em Matemática como contexto favorável para o desenvolvimento da capacidade de reflexão de professores do 1º ciclo. *Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática*, XXI (1), 95-119.
- Martins, J. (2015). *Estudo das atitudes em relação à Estatística dos professores do 1º ciclo e dos professores de Matemática do 2º ciclo do ensino básico*, Tese de doutoramento, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real.
- Matos, J. & Sarrazina, M (1996). Didática da Matemática. Universidade Aberta: Lisboa.
- Matos, J. (2006). História do ensino da matemática em Portugal: constituição de um campo de investigação. *Revista Diálogo Educacional*, 6 (18), 11-18.
- Mayén, S., Batanero, C. & Díaz, C. (2009). Dificultades de estudiantes mexicanos en la comparación de datos ordinales. Trabajo presentado en el XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Santander.
- Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C. & Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato. *UNION* 9,187-201.
- Mayén, S.A. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central en estudiantes mexicanos de educación secundaria y bachillerato*. Tese de doutoramento. Universidade de Granada.
- Meirinhos, M. & Osório, A., 2010. O estudo de caso como estratégia de investigação em educação. *EDUSER: revista de educação*, 2(2), 49-65.
- Menezes, L., & Ponte, J. (2009). Investigação colaborativa de professores e ensino da Matemática: Caminhos para o desenvolvimento profissional, *I*, 1–30. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3966>
- Merriam, S. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco (USA): Jossey-Bass., 179.
- Mertens, D. M. (1998). *Research methods in education and psychology: Integrating diversity with quantitative and qualitative approaches*. London: Sage.
- Mevarech, Z.R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Revista Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429.
- Miles, M.B. & Huberman, A.M. (1994). *Qualitative Data Analysis* (2nd edition). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Minayo, M. C. S. & Sanches, O. (1993). Qualitativo-Quantitativo. Oposição ou complementaridade? *Cadernos de Saúde Pública*, 9 (3), 239-262. Disponível em Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/csp/v9n3/02.pdf>.
- Ministério da Educação (1990). *Organização curricular e Programas do ensino básico - 1º ciclo*. Lisboa: Departamento do Ensino Básico – Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (1991a). *Organização curricular e programas - 2º ciclo do ensino básico, vol. II*. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário – Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (1991b). *Organização curricular e programas - 3º ciclo do ensino básico, vol. II*. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário – Ministério da Educação.

- Ministério da Educação (2001). Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências essenciais. Disponível em julho 10, 2008, de <http://www.dgide.min-edu.pt/fichdown/livrocompetencias/LivroCompetenciasEssenciais.pdf>.
- Ministério da Educação (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências essenciais*. Lisboa: Departamento do Ensino Básico – Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular – Ministério da Educação.
- Ministério da Educação (2009). *50 anos de estatísticas da educação*. Lisboa: Gabinete de Estatísticas e Planeamento da Educação do Ministério da Educação e Instituto Nacional de Estatística. Disponível em: [http://www.gepe.min-edu.pt/np4/?newsId=376&fileName=50\\_Anos\\_Voll.pdf](http://www.gepe.min-edu.pt/np4/?newsId=376&fileName=50_Anos_Voll.pdf)
- Ministério da Educação e Ciência (2012). *Metas Curriculares EB – Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Disponível em: [http://www.portugal.gov.pt/media/675636/matem\\_tica.pdf](http://www.portugal.gov.pt/media/675636/matem_tica.pdf)
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Disponível em: <http://www.dgide.min-edu.pt/index.php?s=noticias&noticia=396>
- Moore, D. S. (1991). Teaching statistics as a respectable subject. In F. Gordon, & D. S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century* (pp. 14-25). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Morais, C. (2004). Competências Matemáticas: Interpretação por professores do Ensino Básico. Em A. Borralho, C. Monteiro & R. Espadeiro (Eds.), *A Matemática na Formação do Professor* (197-212). Évora: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação – Secção de Educação Matemática.
- Morais, P. C. (2011). Construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9.º ano de escolaridade. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.
- Morais, P. C., & Fernandes, J. A. (2011). Realização de duas tarefas sobre construção, leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano, Trabalho apresentado em Seminário de Investigação em Educação Matemática, In Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática, Lisboa.
- Morales, E. J. (2000). Escala de actitudes hacia la estadística. *Psicothema*, 12 (supl. 2), 175-178.
- Murteira, B. (2005). A Estatística em Portugal nos últimos 25 anos. Em F. Rosado (Ed.), *Memorial da Sociedade Portuguesa de Estatística* (pp. 11-21). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística.
- Murteira, B., Ribeiro, C., Silva, J. & Pimenta, C. (2010). *Introdução à Estatística*. Escolar Editora. Lisboa.
- Nascimento, M., Martins, J. & Estrada, A. (2012). Terra das maravilhas... As atitudes face à Estatística em estudantes universitários do norte de Portugal. In L. Mata, F. Peixoto, J. Morgado, J. C. Silva & V. Monteiro (Eds.), *Atas do 12º Colóquio Internacional de Psicologia e Educação – Educação, aprendizagem e desenvolvimento: Olhares contemporâneos através da investigação e da prática* (pp. 1678-1692) [CD-ROM]. Lisboa: ISPA – Instituto Universitário.
- National Council of Teacher of Mathematics (2008). *Princípios e Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar - tradução portuguesa de Principles and Standards Council of School Mathematics do NCTM*. Lisboa: APM e NCTM.

- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Commission on standards for school mathematics. Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston, Va.: The Council, 54-175.
- Neto, M. T. B. (2009). *O Desenvolvimento do raciocínio Dedutivo ao Nível do Ensino Secundário: Recurso a Geometrias Planas*. Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Aveiro.
- Nolan, D. & Speed, T. P. (199). Teaching statistics theory through applications. *The American Statistician*, Alexandria, v. 53, 4, 370-375.
- Novais, M.C. & Cruz, N. (1986). O Ensino das Ciências, o Desenvolvimento das capacidades metacognitivas e a Resolução de Problemas. In *Revista de Educação*, n.º 3, Vol. 1, Lisboa, 65-75.
- Oliveira, H., & Henriques, A. (2014). Promover o raciocínio estatístico no ensino básico recorrendo à tecnologia. *Boletim da SPE*, Outono de 2014, 23-31.
- Onwuegbuzie, A. (1998). Teachers' Attitudes Toward Statistics. *Psychological Reports*. 83, 1008-1010.
- Oskamp, S. & Schultz, P. W. (2009). *Attitudes and opinions* (3.ª ed.) (Kindle Edition). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Osterlind, S. (1989). *Constructing test items*. Boston: Kluwer.
- Pestana, M. & Gageiro, J. (2000). *Análise de dados para ciências sociais – A Complementaridade do SPSS*. (2.ª ed.). Lisboa: Edições Sílabo.
- Pestana, D. & Velosa, S. (2010). *Introdução à Probabilidade e à Estatística* (4.ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Petocz, P. & Reid, A. (2007). Learning and assessment in statistics In ISI/IASE Satellite on assessing student learning in Statistics, Guimarães, Portugal.
- Phillips, R.H. & Chaiken, S. (1993). Teacher attitude as related to student attitude and achievement in Elementary School mathematics. *School Science and mathematics*, 73(6), 501 – 507.
- Pimenta, R. Faria, B., Pereira, I., Costa, E. & Vieira, M. (2010). Comparison of attitudes towards statistics in graduate and undergraduate health sciences' students. In C. Reading (Ed.), *Eighth International Conference on Teaching Statistics - ICOTS8 - Proceedings: Data and context in statistical education towards an evidence-based society* [CD-ROM]. Ljubljana: International Association for Statistical Education, International Statistical Institute e Statistical Society of Slovenia.
- Pinker, S. (1990). A theory of graph comprehension. In R. Freedle (Ed.), *Artificial intelligence and the future testing* (pp. 73-126). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Pollatsek, A., Lima, S. & Well, A.D. (1981): "Concept or Computation: tudents'understanding of the mean", *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.
- Ponte, J. P. & Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P. & Fonseca, H. (2000). A Estatística no Currículo do Ensino Básico e Secundário. Em C. Loureiro, F. Oliveira & L. Brunheira (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística* (pp. 179-194). Lisboa: SPE, APM e DEEIO/FCUL.
- Ponte, J. P. & Fonseca, H. (2001). Orientações curriculares para o ensino da Estatística – Análise comparativa de três países. *Quadrante*, 10 (1), 93-115. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/3035>

- Ponte, J. P. (1984). *Functional reasoning and the interpretation of cartesian graphs*. Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia.
- Ponte, J. P. (1997). Filosofia da matemática na formação inicial de professores. In A. Estrela, R. Fernandes, F. A. Costa, I. Narciso, & O. Valério (Eds.), *Contributos da investigação científica para a qualidade do ensino* (pp. 257-265). Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Ponte, J. P., Guimarães, H., Leal, L. C., Canavarro, P., & Abrantes, P. (1997). *O conhecimento profissional dos professores de matemática: Relatório final do projecto "O saber dos professores — concepções e práticas"*. Lisboa: DEFCUL
- Punch, K. (1998). *Introduction to Social Research: Quantitative & Qualitative Approaches*. London: SAGE Publications.
- Ribeiro, A.F., Correia, P.F., & Fernandes, J.A. (2013). Estatísticas usadas por alunos do 7.º ano na resolução de tarefas estatísticas. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho, & P. F. Correia, (ORGS.). *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola BRAGA: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho*.
- Ribeiro, C. & Martins, F. (2010). (Des)Conhecimento matemático para ensinar OTD que possuem futuros professores dos primeiros anos. Em *Actas do ProfMat 2010* [Pen Drive]. Aveiro: Associação de Professores de Matemática.
- Ribeiro, S. A. (2006). *O Ensino da Estatística no 7º ano de escolaridade: Caracterização e dificuldades sentidas pelos professores*. Tese de mestrado em Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática, Instituto de Educação e Psicologia – Universidade do Minho.
- Rivas, R. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria*. Tese de doutoramento. Universidade de Granada.
- Roberts, D. & Bilderback, E. (1980). Reliability and validity of a statistics attitude survey. *Educational and Psychological Measurement*, 47, 759-764.
- Rodríguez, G., Flores, J. & Jiménez, E. (1999). La Entrevista. In *Metodología de la investigación educativa*, Málaga, Aljibe, pp. 167-184.
- Rojas, N., Carretero, M. de los R., & Álvares, I. (2012). Estrategias colaborativa de enseñanza de las matemáticas entre estudiantes de ingeniería. *Universidad Ciencia Y Tecnología*, 16(63), 85–92. Disponível em: <http://www.poz.unexpo.edu.ve/Postgrado/uct/revista/index.php/uct/article/view/168>
- Roseth, C. J., Garfield, J. B., & Ben-Zvi, D. (2008). Collaboration in learning and teaching statistics. *Journal of Statistics Education*, 16(1).
- Ruiz, B., Arteaga, P. & Batanero, C. (2009) Competencias de futuros profesores en la comparación de datos. In L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en Educación Estadística* (pp. 57-74). Melilla. Facultad de Humanidades y Educación.
- Sale, J. E. M., Lohfeld, L. H., & Brazil, K. (2002). Revisiting the Quantitative-Qualitative Debate: Implications for Mixed Methods Research, *Quality and Quantity*, Vol.36 (2002), 45–53.
- Sampieri, H. R. & Mendoza, C. P. (2008). El matrimonio cuantitativo cualitativo: el paradigma mixto. In J. L. Álvarez Gayou (Presidente), *VI Congreso de Investigación en Sexología*. Congreso efectuado por el Instituto Mexicano de Sexología, A. C. y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Villahermosa, Tabasco, México.
- Sampieri, R. H., Collado, C.F., & Lucio, M.P. (2013). *Metodologia de Pesquisa*. MacGraw-Hill.
- Santos, A. (2000). *Ensino a distância & Tecnologias de Informação - e-Learning*. Editora Lidel.
- Schau, C. (2003). Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS-36). Disponível em: <http://evaluationandstatistics.com/>



- Serapioni, M. (2000). Métodos qualitativos e quantitativos na pesquisa social em saúde: algumas estratégias para a integração. *Ciências da Saúde Coletiva*, 5(1), 187-192. Disponível em Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/csc/v5n1/7089.pdf>.
- Serrano, G.P. (2004). Metodologias de investigação em animação sociocultural. In j. Trilla (Coord.), *Animação sociocultural: Teorias, programas e âmbitos* (pp. 101-119). Lisboa: Instituto Piaget.
- Serrano, L., Ortiz, J., & Rodriguez, J. (2009). Las gráficas Estadística. In *Conflitos semióticos de estudiantes mexicanos en el uso de la mediana*.
- Sierpiska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, vol. 10.3, 24-36.
- Silva, A. A. (2006). Gráficos e mapas: representação de informação estatística. Lisboa: LIDEL Edições Técnicas.
- Silva, C. Brito, M., Cazorla, I. & Vendramini, C. (2002). Atitudes em relação à Estatística e à Matemática. *Psico-USF*, 7 (2), 219-228. Disponível em: [http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1413-82712002000200011](http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-82712002000200011).
- Silva, J.S. (1964). *Compêndio de Matemática (7.º ano, vol. II)*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Simão, A. & Rodrigues, Â. (2010). Pedagogia do Ensino Superior. *Conhecimentos sempre Provisório e Conjectural*, 4, 1-48. Disponível em: [https://www1.esec.pt/pagina/opdes/wp-content/uploads/2009/07/04\\_de\\_12-12-10.pdf](https://www1.esec.pt/pagina/opdes/wp-content/uploads/2009/07/04_de_12-12-10.pdf).
- Simon, H.A. (1978). *On how to decide what to do*. *The Bell Journal of Economics*, 9(2), 494-507.
- Sousa, H. D., Ferreira, M. A., Castanheira, M. T., & Lourenço, V. (2011). Relatório de Exame Nacionais 2010. Disponibilizado em [http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=Exames\\_2010\\_Fase1\\_Ch1.pdf](http://www.gave.min-edu.pt/np3content/?newsId=24&fileName=Exames_2010_Fase1_Ch1.pdf).
- Sousa, O. (2002). Investigações estatísticas no 6.º ano. Em Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). Lisboa: APM.
- Stake, R. (2005). Case Studies. In N., Denzin & T. Lincoln, *Handbook of Qualitative Research* (p. 108-132). London: Sage.
- Stake, R. E. (2007). *A Arte da Investigação com Estudos de Caso*. Fundação Calouste Gulbenkian.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.
- Strauss, S. & Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 64-80.
- Thomas, W. & Znaniecki, F. (1996). *The Polish Peasant in Europe and America*, vol. 1, Chicago: University of Chicago Press.
- Thorndike, R. L. (1989). *Psicometria aplicada*. México: Limusa.
- Tishkovskaya, S. & Lancaster, G. (2012). Statistical Education in the 21st Century: a Review of Challenges, Teaching Innovations and Strategies for Reform. *Journal of Statistics Education*, 20 (2), 1-24. Disponível em: <http://www.amstat.org/publications/jse/v20n2/tishkovskaya.pdf>.
- Tonucci, F. (1976). *La escuela como investigación*. Avance, Barcelona
- Vasconcelos, A.P. & Fernandes, J.A. (2013). O uso da folha de cálculo na construção de gráficos estatísticos por alunos do 7.º ano. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M.H., Martinho, & P.F. Correia (ORGS.) (2013). *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

- Velez, I., Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2016). Promoting the understanding of representations by grade 3 pupils: Two teachers' practices. Proceedings of ERME Topic Conference, Berlim, Alemanha. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/29206>.
- Veloso, E. (1993). Problemas e Tarefas em Geometria Elementar. Lisboa: Ministério da Educação, Gabinete de Estudos e Planeamento.
- Veloso, G., Brunheira, L. & Rodrigues, M. (2014). A proposta de Programa de Matemática para o Ensino Básico; um recuo de décadas. Revista Educação e Matemática, 128, 3-8.
- Vergnaud, G. (1990). La Theorie des Champs Conceptuels. RDM, 10 (23).
- Vygotsky, L. S. (1934). The Problem of Age. The Collected Works of L. S. Vygotsky, 5, 187-205.
- Vygotsky, L. S. (1996). A formação social da mente. Rio de Janeiro: Martins Fontes.
- Watson, J. M. & Moritz, J. B. (2000): “The longitudinal development of understanding of average”, *Mathematical Thinking and Learning*, v1 (2/3).
- Watson, J. M. (2006). Statistical literacy at school: Growth and goals. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Wiersma, W. (1995). Research methods in education: An introduction. Boston: Allyn and Bacon.
- Wise, S. (1985), The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 45, 401-405.
- Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.
- Yin, R. (1989). *Case study research: design and methodology*. London: Sage.
- Yin, R. (2005). Estudo de Caso. Planejamento e Métodos. Porto Alegre: Bookman.
- Yin, R. (2010). Estudo de Caso. Planejamento e Métodos (4.ed.). Porto Alegre: Bookman.
- Zimmer, J.C. & Fuller, D.K. (1996). Factors Affecting undergraduate. Performance in statistics: a review of literature. Proceedings presented at the annual meeting of the Mid-south Educational Research Association. Tuscaloosa.