Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Tesis doctoral

NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL DESDE LAS PERSPECTIVAS INSTITUCIONAL Y PERSONAL. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

María J. Burgos Navarro

Granada, 2020

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática
Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL DESDE LAS PERSPECTIVAS INSTITUCIONAL Y PERSONAL. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Memoria de Tesis Doctoral realizada bajo la dirección del doctor Juan Díaz Godino, que presenta Dña. María José Burgos Navarro para optar al grado de Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada.

Fdo. María J. Burgos Navarro

Vº Bº del Director:

Fdo. Juan Díaz Godino

La doctoranda María José Burgos Navarro y el director de la tesis D. Juan Díaz Godino, garantizamos al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por la doctoranda bajo la dirección del director de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Asimismo, certificamos que:

- María José Burgos Navarro es co-autora de todos y cada uno de los artículos y capítulos de libro publicados, aceptados para su publicación o en evaluación, compendiados en esta memoria en los Capítulos 3 a 10.
- Los trabajos de elaboración de todos y cada uno de estos artículos han sido parte de la formación de María José Burgos Navarro como investigadora.
- Todos y cada uno de los artículos compendiados en esta memoria de tesis doctoral son originales y no han sido utilizados por ninguno de sus co-autores en otras tesis doctorales.

Granada, 3 de Febrero de 2020.

Director de la Tesis

Doctoranda

Fdo: D. Juan D. Godino

Fdo: María J. Burgos Navarro

Reconocimiento
Esta investigación ha sido realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en el marco del Grupo PAI, FQM-126 (Junta de Andalucía) y parte del proyecto de investigación EDU2016-74848-P (FEDER, AEI).

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis doctoral se ha realizado con mucha ilusión y un gran esfuerzo. Agradezco a mi director, a mi mentor, Juan D. Godino por su compromiso, su disposición, por todo lo que me ha enseñando, por permitirme trabajar a su lado, por compartir tanta experiencia y conocimiento.

Agradezco a mis compañeros del Departamento de Didáctica de la Matemática, a los que están y los que se fueron, por su amabilidad, su apoyo y su disponibilidad para ayudarme en cada momento que lo necesité. En especial a Juan Godino y Carmen Batanero, por dejarme formar parte de este proyecto que casi empieza ahora. Por sus palabras siempre amables, por su paciencia y su gran humildad. Como me dijo una vez Carmen "los mejores son siempre los más humildes".

A una nueva familia, la del EOS, por sus puertas abiertas al diálogo, por su sentido responsable de la Didáctica de la Matemática. A mis coautores, en especial a Pablo Beltrán, Belén Giacomone, Miguel Wilhelmi y María José Castillo, por ser parte de esta experiencia, por tantas conversaciones enriquecedoras y grandes consejos e ideas.

Agradezco a los maestros de primaria que me dejaron entrar en sus aulas. A los alumnos, por permitirme aprender de ellos, por esas sonrisas y esas ganas de participar en "más que mates".

A todos mis estudiantes, los futuros maestros de educación primaria y los futuros profesores de educación secundaria. Espero que hayáis aprendido (no sé si disfrutado también) conmigo tanto como yo con vosotros. Habéis logrado que me sienta feliz y responsable del lugar privilegiado que ocupo. Espero haberos inculcado un poco de esa responsabilidad de la que tantas veces os he hablado.

Agradezco a mi familia. Habéis compartido mis alegrías, mis éxitos y mis tristezas.

A Natalia por sacarme el trabajo de la cabeza, a golpe de tangos, alegrías y soléa. ¡Qué habría hecho yo sin el flamenco!

A Pedro, Alba y Saúl, los motores de mi vida, por confiar en mí cuando yo no lo hacía, por sostenerme cuando caía, por tanto cariño, por vuestro ánimo constante, por entender los domingos lunes, y los agosto septiembre.

RESUMEN

El estudio de las razones, proporciones y la proporcionalidad es un tópico decisivo en el currículo escolar que se inicia en educación primaria y continúa en educación secundaria, contemplándose en diferentes bloques temáticos del currículo. Por otro lado, la creciente demanda en la comunidad de investigadores en educación matemática por la posibilidad de potenciar formas de razonamiento algebraico en los primeros años de escolaridad, requiere del desarrollo de una perspectiva más amplia sobre la naturaleza del álgebra escolar y del pensamiento algebraico en edades tempranas. En particular, precisa la búsqueda de modelos didácticos que motiven la interacción entre los alumnos y entre alumnos-profesor, y ofrezcan la posibilidad a los estudiantes para promover el razonamiento algebraico.

En esta memoria, tras un estudio sistemático de investigaciones previas sobre razonamiento proporcional y algebraico se aborda, en primer lugar, la caracterización del razonamiento proporcional y su relación con el razonamiento algebraico desde una perspectiva epistémica. Analizamos los diversos significados de la proporcionalidad aplicando herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, en particular, la interpretación del significado en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas relativas a la resolución de tipos de problemas y el modelo de niveles de algebrización de la actividad matemática. Estos significados deben ser tenidos en cuenta en la planificación y gestión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en educación primaria y secundaria. En base a los supuestos epistemológicos, ontológicos, semióticos e instruccionales del EOS, justificamos la importancia de un modelo didáctico dialógico-colaborativo para las situaciones de primer encuentro con los objetos de conocimiento matemáticos en el que el profesor y los estudiantes trabajan juntos en la resolución de las situaciones-problemas.

Con estas premisas, en segundo lugar, se realiza un estudio de caso sobre el diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas para desarrollar el razonamiento proporcional en un grupo de alumnos de educación primaria. Analizamos los resultados, en términos de la emergencia de formas de razonamiento algebraico, obtenidos con la aplicación de un modelo didáctico de tipo mixto dialógico-colaborativo. Aunque se trata de un estudio de caso que no permite generalizar los

resultados, la evaluación de los aprendizajes logrados permite formular hipótesis sobre la influencia del modelo mixto de instrucción en los aprendizajes de los alumnos, las cuales se pueden contrastar en nuevos ciclos de investigación sobre este tema y en contextos similares.

En tercer lugar, en el área específica de la formación de profesores de matemáticas, y bajo el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos propuesto por el EOS se desarrollan ciclos formativos dirigidos a futuros profesores de matemáticas, tanto de educación primaria como de educación secundaria, con el objetivo de desarrollar las competencias y conocimientos didáctico-matemáticos sobre el razonamiento proporcional y su conexión con el razonamiento algebraico. En particular se contemplan las competencias de análisis epistémico, análisis cognitivo y análisis de la idoneidad didáctica. Los resultados muestran la necesidad de profundizar en el desarrollo del conocimiento especializado del contenido de los futuros profesores y reconocer la complejidad involucrada en el desarrollo de dichas competencias.

ABSTRACT

The study of ratios, proportions and proportionality is a decisive topic in the school curriculum that begins in primary education and continues in secondary education, and is included in different thematic blocks of the curriculum. Moreover, the growing demand in the mathematics education research community for the possibility of promoting algebraic reasoning in the first years of schooling, requires to develop a broader perspective of the nature of school algebra and algebraic thinking in early ages. In particular, it requires the search for didactical models that motivate the interaction between the teacher and the students, and offer students the possibility to promote algebraic reasoning.

In this thesis, after a systematic study of previous research on proportional and algebraic reasoning, we first, address the characterization of proportional reasoning and its relation to algebraic reasoning from an epistemic perspective. We analyze the various meanings of proportionality by applying theoretical tools of the Onto-semiotic Approach (OSA) of mathematical knowledge and instruction, in particular, the interpretation of meaning in terms of systems of operative and discursive practices related to solving types of problems, and the model of algebrization levels of mathematical activity. These meanings should be taken into account in the planning and management of the teaching and learning processes of proportionality in primary and secondary education.

Basing on the OSA epistemological, ontological, semiotic and instructional assumptions, we justify the importance of a dialogical-collaborative didactic model for the situations of first encounter with mathematical objects in which the teacher and the students work together in the resolution of the problem situations. With these premises, in the second place, we carry out a case study on the design, implementation and evaluation of training interventions to develop proportional reasoning in a group of 23 primary school students. We analyze the results, in terms of the emergence of algebraic reasoning forms, obtained with the application of a didactic model of mixed dialogical-collaborative type. Although it is a case study that does not allow to generalize the results, the evaluation of the learning achieved, served to formulate hypotheses about

the influence of the mixed instructional model on students' learning, which should be checked in new research cycles on this topic and in similar contexts.

Thirdly, in the specific area of mathematics teachers' education, and applying the OSA model of Didactic-Mathematical Knowledge and Competencies, we develop some training cycles for prospective primary and secondary mathematics teachers, with the aim of developing the didactic-mathematical competences and knowledge about proportional reasoning and its connection with algebraic reasoning. In particular, we take into account the competencies of epistemic, cognitive and didactical suitability analysis. The results show the need to deepen in developing the specialized content knowledge of prospective teachers and recognize the complexity involved in developing these skills.

INDICE

INTRODUCCIÓN GENERAL ... 19

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN ... 27

1. Antecedentes y justificación ... 27

1.1 Razonamiento proporcional y razonamiento algebraico temprano ... 32

1.2 Acciones formativas para el desarrollo de competencias docentes ... 34

1.3. Razonamiento proporcional en la formación de profesores ... 38

2. Problema específico de investigación ... 41

2.1. Hipótesis de investigación ... 42

2.2. Objetivos de la investigación ... 43

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA ... 45

1. El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos ... 45

1.1. Sistemas de prácticas y configuración ontosemiótica ... 45

1.2. Configuración didáctica. Hechos didácticos significativos y conflictos semióticos. ... 50

1.3. Idoneidad didáctica ... 51

1.4. Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor ... 53

2. Razonamiento algebraico elemental y niveles de algebrización ... 58

3. Hacia un significado global de la proporcionalidad ... 63

4. Descripción general de la metodología ... 70

PRIMERA PARTE ... 73

CAPÍTULO 3. MODELO ONTOSEMIÓTICO DE REFERENCIA DE LA PROPORCIONALIDAD ... 75

1. Introducción ... 75

2. Problema específico de investigación y método ... 77

3. Análisis y resultados: Significados parciales de la proporcionalidad ... 79

3.1. Significado intuitivo-cualitativo ... 79

3.2 Significado aritmético ... 80

3.3 Del significado aritmético al protoalgebraico: Reducción a la unidad ... 81

3.4 Significado proto-algebraico: Proporciones, ecuación proporcional y secuencias de números proporcionales ... 82

3.5 Significado algebraico-funcional: La función lineal ... 86

3.6 Familias de funciones lineales. Operaciones con funciones lineales ... 89

3.7 Aplicaciones lineales y espacios de medida ... 90

4. Síntesis y estructuración de los significados de la proporcionalidad 92

5. Reflexiones finales 96

CAPÍTULO 4. PAPEL DE LAS SITUACIONES ADIDÁCTICAS EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO: EL CASO DE LA PROPORCIONALIDAD 99

1. Introducción 99

2. Teoría de situaciones didácticas en matemáticas 100

2.1 Supuestos básicos de la TSDM 100

2.2. Papel de las situaciones adidácticas 101

2.3. La situación de ampliación del puzle 103

2.4 Papel del profesor en la TSDM 105

3. Objetivismo versus constructivismo 107

4. Complejidad ontosemiótica del conocimiento matemático 109

4.1. Análisis ontosemiótico de la situación de ampliación del puzle 110

4.2. Modelo didáctico dialógico - colaborativo 112

5. Observaciones finales 114

SEGUNDA PARTE 117

CAPÍTULO 5. UN MODELO INSTRUCCIONAL PARA INTRODUCIR LA PROPORCIONALIDAD EN EDUCACIÓN PRIMARIA 119

1 Introducción 119

2 Antecedentes. Experiencias de iniciación al razonamiento proporcional 120

3. Razonamiento proporcional y algebraico temprano 123

3 Método 125

3.1 Contexto 125

3.2 Instrumentos de recogida y análisis de datos 125

4 Diseño de las situaciones introductorias. Análisis *a priori* 127

4.1 Tarea introductoria 1: Laura visita a su tío 128

4.2 Tarea introductoria 2: El Pirata 128

4.3 Tarea introductoria 3: Laura sigue pensando 129

5 Descripción de la implementación 130

5.1 Configuración didáctica 1: Introducción 131

5.2 Configuración didáctica 2: Laura visita a su tío 132

5.3 Configuración didáctica 3: El pirata 132

5.4 Configuración didáctica 4: Laura sigue pensando 132

6 Resultados y discusión 134

6.1. Evaluación de los aprendizajes logrados 134

6.2. Niveles de algebrización 138
6.3 Discusión: Hechos didácticos significativos 140
7 Reflexiones finales 143
7.1. Un modelo instruccional dialógico-colaborativo 143
7.2. Emergencia de razonamiento proto-algebraico 144
CAPÍTULO 6. CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN EL APRENDIZAJE DE LA PROPORCIONALIDAD 149
1. Introducción 149
2. Contexto y metodología 151
3. Conflictos epistémicos 152
4. Conflictos cognitivos 155
4.1. Descripción de las tareas 155
4.2. Grado de corrección. Procedimientos y argumentos 156
4.3 Conflictos cognitivos 161
5. Resultados de la fase de puesta en común 164
6. Discusión 169
TERCERA PARTE 173
CAPÍTULO 7. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE LA PROPORCIONALIDAD EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA 175
1. Introducción 175
2. Contexto y enfoque metodológico 178
3. Análisis *a priori* de una tarea de evaluación 180
3.1. Solución 1. Aritmética (nivel de algebrización 0) 181
3.2. Solución 2. Parte-todo (proto-algebraica de nivel de algebrización 1) 182
3.3. Solución 3. Valor faltante (proto-algebraica de nivel de algebrización 2) 183
3.4. Solución 4. Formal/algebraica (nivel 3 de algebrización) 184
4. Resultados 185
4.1. Métodos de solución y asignación de niveles de algebrización 185
4.2. Identificación de conocimientos puestos en juego en las tareas 187
4.3. Enunciado de nuevas tareas 189
5. Discusión. Aplicación de las FSC al análisis de los resultados 191
6. Reflexiones finales 193
CAPÍTULO 8. INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA DESARROLLAR CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE LA PROPORCIONALIDAD EN MAESTROS EN FORMACIÓN 195

1. Introducción........ 195

2. Contexto de la investigación, participantes y metodología........ 198

3. Diseño del proceso formativo........ 198

3.1. Trabajo en equipo........ 199

3.2. Trabajo individual voluntario........ 202

4. Resultados de la fase de trabajo en equipo........ 203

4.1 Métodos de solución y niveles de algebrización........ 204

4.2 Configuraciones ontosemióticas........ 209

4.3 Asignación de nivel educativo y dificultades previstas........ 210

4.4 Enunciado de variantes del problema........ 211

5. Análisis de resultados del trabajo individual........ 212

5.1. Estrategias de resolución según niveles de algebrización........ 212

5.2. Asignación de niveles de algebrización........ 215

5.3 Configuraciones ontosemióticas........ 216

5.4 Previsión de dificultades........ 218

5.5. Análisis de las respuestas de alumnos de 6º de primaria........ 219

6. Análisis retrospectivo. Conclusiones........ 223

CAPÍTULO 9. COMPETENCIAS DE ANÁLISIS EPISTÉMICO Y COGNITIVO SOBRE PROPORCIONALIDAD EN FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA........ 227

1. Introducción........ 227

2. Contexto de la investigación, participantes y metodología........ 230

3. Diseño del proceso formativo........ 231

4. Resultados en la faceta epistémica........ 237

4.1 Métodos de solución y niveles de algebrización........ 237

4.2 Identificación de conocimientos........ 244

4.3 Enunciado de variantes del problema........ 247

5. Resultados en la faceta cognitiva........ 250

5.1 Previsión de dificultades........ 251

5.2 Análisis de respuestas de alumnos de primaria........ 260

6. Conclusiones........ 273

6.1. Análisis retrospectivo en la faceta epistémica........ 273

6.2 Análisis retrospectivo en la faceta cognitiva........ 276

CAPÍTULO 10. DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE ANÁLISIS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA: EL CASO DE VÍDEOS EDUCATIVOS SOBRE PROPORCIONALIDAD........ 283

1. Introducción ... 283

2. Diseño del proceso formativo ... 285

3. Análisis *a priori* de la idoneidad epistémica del vídeo ... 286

4. Resultados ... 290

5. Síntesis, implicaciones y limitaciones ... 300

CAPÍTULO 11.SÍNTESIS Y PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN. ... 303

1. SÍNTESIS Y APORTACIONES FUNDAMENTALES ... 303

1. 1. Aportaciones derivadas del objetivo general OG1: ... 303

1.2. Aportaciones derivadas del objetivo general OG2: ... 305

1. 3. Aportaciones derivadas del objetivo general OG3: ... 307

2. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ... 313

2.1. Extensión del modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. ... 313

Articulación del modelo de niveles de algebrización y los niveles de desarrollo de razonamiento proporcional en escolares. ... 313

2.2. Diseño e implementación de nuevas experiencias de desarrollo del razonamiento proporcional ... 314

2.3. Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico en tareas de proporcionalidad ... 315

2.4. Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en procesos de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad ... 317

REFERENCIAS ... 319

ANEXOS ... 349

ANEXO 1. ACTIVIDADES DE LA INTERVENCIÓN SOBRE RAE CON ESTUDIANTES DEL MÁSTER DE PROFESORADO ... 349

TRABAJO COLABORATIVO SOBRE RAE EN CURSO DE POSGRADO ... 351

TRABAJO COMPLEMENTARIO OPCIONAL SOBRE RAE ... 358

ANEXO 2. ACTIVIDADES DE LA INTERVENCIÓN SOBRE RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y ALGEBRAICO CON ESTUDIANTES DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA. PRIMER CICLO DE INVESTIGACIÓN ... 361

ACTIVIDAD PARA TRABAJO EN GRUPO ... 363

ACTIVIDAD INDIVIDUAL VOLUNTARIA ... 365

ANEXO 3. ACTIVIDADES DE LA INTERVENCIÓN SOBRE RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y ALGEBRAICO CON ESTUDIANTES DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA. SEGUNDO CICLO DE INVESTIGACIÓN. ... 367

ACTIVIDAD PARA TRABAJO EN GRUPO ... 369

TAREA DE EVALUACIÓN ... 379

ANEXO 4. ACTIVIDADES DE LA INTERVENCIÓN SOBRE IDONEIDAD DIDÁCTICA DE VÍDEOS EDUCATIVOS CON ESTUDIANTES DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA 385

ACTIVIDAD DE TRABAJO EN EQUIPO 387

TAREA DE EVALUACIÓN 393

ANEXO 5. PUBLICACIONES VINCULADAS CON LA TESIS DOCTORAL 397

ARTÍCULOS EN REVISTAS O CAPÍTULOS DE LIBRO 397

PARTICIPACIÓN EN EVENTOS CIENTÍFICOS 398

INTRODUCCIÓN GENERAL

Desde mi incorporación profesional al área de Didáctica de la Matemática en el curso 2016-17 he estado implicada en la formación inicial de profesores de matemáticas, formando parte del Grupo de investigación de Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística (Grupo PAI, FQM-126, Junta de Andalucía).

Mi experiencia con las actividades de docencia e investigación en matemáticas se remontan algo más atrás en el tiempo y mi primera tesis doctoral la realicé en el ámbito del álgebra y el análisis funcional en 2006. Sin embargo, sentía una cierta desconexión entre mi investigación y la realidad de la problemática de la educación matemática. Empecé a considerar el interés por compaginar las actividades docentes de formación de profesores con la investigación de los problemas complejos que dicha formación plantea en el campo de la educación matemática. Por otra parte, las investigaciones que en el seno del Grupo de investigación se venían haciendo sobre razonamiento algebraico me resultaron de enorme atractivo, mostrándome el campo y el equipo con el que iniciar un desafío y un compromiso investigador que me entusiasma.

En el curso 2016-2017 inicié en el Departamento de Didáctica de la Matemática un plan de investigación sobre el tema "Caracterización y desarrollo del razonamiento proporcional y sus conexiones con el algebraico en futuros profesores", que en una primera fase dio lugar a la realización del Trabajo Fin de Máster en Didáctica de la Matemática, finalizada en julio de 2018 y que he continuado con la realización de esta tesis doctoral.

En esta introducción general de la memoria de tesis doctoral describo de manera sucinta las cuestiones de investigación que se abordan y la organización de la misma. La memoria está concebida bajo la modalidad de "tesis por compendio de artículos", de manera que los capítulos de resultados de la investigación reflejan las diversas publicaciones realizadas.

El plan de investigación contempla, en primer lugar, la caracterización del razonamiento proporcional y su relación con el razonamiento algebraico desde una perspectiva epistémica. En segundo lugar, se aborda el diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas para desarrollar el razonamiento proporcional en alumnos de educación primaria; esto nos ha llevado a abordar el problema de la elección de modelos didácticos idóneos para promover el aprendizaje matemático. En tercer lugar, se considera el problema de implementar experiencias formativas que permitan promover el crecimiento profesional y el desarrollo de conocimientos y competencias en el profesorado sobre proporcionalidad.

El interés y relevancia del problema abordado viene justificado por la importancia de las nociones de razón, proporción y proporcionalidad dentro de la matemática escolar y respaldado por la gran cantidad de investigaciones que se vienen realizando en el campo de la educación matemática. No obstante, consideramos que las relaciones entre el razonamiento proporcional y algebraico necesitan ser investigadas con más profundidad, tanto desde el punto de vista epistémico, como cognitivo e instruccional, aplicando nuevas herramientas teóricas y metodológicas. Así mismo, la promoción del razonamiento proporcional y su conexión con el razonamiento algebraico en educación primaria y secundaria plantean un reto a la formación de profesores, siendo necesario investigar estrategias formativas idóneas que promuevan el desarrollo de los conocimientos didáctico-matemáticos y las competencias profesionales correspondientes en este campo específico.

El marco teórico que se usa en esta investigación, y que en algunos aspectos también se desarrolla, es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007; 2019). Se aplica, por una parte, la metodología de análisis de contenido de fuentes documentales para caracterizar el significado de referencia global de la proporcionalidad, aplicando herramientas del análisis ontosemiótico. Estas herramientas son aplicadas también en el análisis de los protocolos de respuestas de los sujetos que intervienen en las experiencias instruccionales. Además, en el diseño, implementación y evaluación de las intervenciones formativas, se aplica la metodología del diseño instruccional (ingeniería didáctica) en el sentido generalizado propuesto por el EOS (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014).

Las experiencias instruccionales realizadas son consideradas como estudios de casos con muestras intencionales reducidas, siendo, por tanto, estudios exploratorios. En el caso de las experiencias con alumnos de primaria fue elegido un grupo de 5º curso de primaria, observado también en 6º curso. Respecto a la investigación con futuros profesores, se han realizado intervenciones formativas tanto con futuros profesores de secundaria como con futuros maestros de primaria. En concreto, se desarrollaron intervenciones formativas con un grupo de 33 estudiantes del máster de Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato y dos grupos de estudiantes del Grado de Maestro de Educación Primaria, un grupo de 35 estudiantes en el primer ciclo de investigación, y un grupo de 88 estudiantes en el segundo ciclo de investigación, todos ellos estudiantes de tercer curso del grado.

La tesis está organizada en los siguientes capítulos.

Capítulo 1. Descripción del área problemática del razonamiento proporcional y del razonamiento algebraico temprano (early algebra); investigaciones sobre acciones formativas para el desarrollo de competencias docentes con énfasis en el tema del razonamiento proporcional. El capítulo concluye con la formulación del problema específico de investigación, hipótesis y objetivos.

Capítulo 2. Descripción del marco teórico y metodología general. Nociones fundamentales del EOS usadas en la tesis que permiten una lectura autónoma de la memoria; modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas y el modelo de niveles de algebrización.

Capítulo 3. Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Se aborda el problema de caracterización del significado global de referencia de la proporcionalidad, aplicando la noción de significado pragmático de un objeto matemático que propone el EOS, distinguiendo significados parciales ligados a los diferentes niveles de algebrización. La información incluida en el capítulo se corresponde con el artículo aceptado para su publicación en la revista AIEM:

> Burgos, M. y Godino, J. D. (2020) Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matem*ática, en prensa.

Capítulo 4. Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático: el caso de la proporcionalidad. Se aborda el problema teórico de comparación y elección de los modelos didácticos en educación matemática, y de manera específica la discusión del papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. El objetivo es argumentar la adopción de un modelo mixto de instrucción para las experiencias instruccionales que realizamos con alumnos de primaria que tienen un primer encuentro con la proporcionalidad (capítulo 5). La información incluida en este capítulo se corresponde con el artículo aceptado para su publicación en la revista Enseñanza de las Ciencias:

> Godino, J. D., Burgos, M. y Wilhelmi, J. D. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico, *Enseñanza de las Ciencias*, en prensa.

Capítulo 5. Un modelo instruccional para introducir la proporcionalidad en primaria. Se describe el diseño, implementación y evaluación de una experiencia de iniciación al razonamiento proporcional con alumnos de primaria, siguiendo el modelo didáctico de tipo mixto (dialógico-colaborativo) descrito en el capítulo 4. Analizamos las formas de razonamiento algebraico que emergen en este primer contacto, por medio del uso de tareas introductorias sobre proporcionalidad y el planteamiento de cuestiones dirigidas en un ambiente de trabajo colaborativo en el aula.

Parte de la información incluida en el capítulo se corresponde con el artículo publicado en la revista Bolema y el artículo publicado en la revista Educación Matemática:

> Burgos, M. y Godino, J. D. (2018). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *Bolema*, *33* (63), 389-410. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a19

> Burgos, M. y Godino, J. D. (2019) Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática*, *31* (3), 117-150. DOI: 10.24844/EM3103.05

Capítulo 6. Conflictos semióticos en el aprendizaje de la proporcionalidad. Análisis de una experiencia de enseñanza en educación primaria. Incluye el análisis de los resultados de una segunda experiencia diseñada e implementada para evaluar y conectar los conflictos epistémicos y cognitivos detectados en el estudio de la proporcionalidad realizada con alumnos de sexto curso de educación primaria, que han recibido una instrucción focalizada en el aspecto procedimental. Se estudia el efecto de un modelo de tipo dialógico-colaborativo para avanzar en la superación de tales conflictos. La información incluida en el capítulo se corresponde con un artículo en proceso de revisión:

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020) Conflictos semióticos en el aprendizaje de la proporcionalidad. Análisis de una experiencia de enseñanza en educación primaria. (En revisión).

Capítulo 7. Conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad en futuros profesores de matemáticas de secundaria. Se describen los resultados de una intervención formativa con estudiantes del máster de profesorado de matemáticas en la que se persigue explorar sus conocimientos iniciales y evaluar en qué medida la acción formativa permite desarrollar aspectos relevantes de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de dicho contenido, en particular, el reconocimiento de niveles de algebrización involucrados en distintas soluciones a problemas de proporcionalidad.

La información incluida en el capítulo se corresponde con el artículo publicado en la revista Educação e Pesquisa:

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018) Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44*, 1-22.

Capítulo 8. Ingeniería didáctica para desarrollar conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad en maestros en formación. Se describe el diseño, implementación y evaluación de una intervención formativa con futuros maestros de educación primaria destinada a: 1) desarrollar conocimientos y competencias didáctico-matemáticas sobre el razonamiento proporcional y su relación con el razonamiento algebraico; 2) fomentar la competencia de análisis epistémico-cognitivo de objetos y procesos puestos en juego en las prácticas matemáticas en tareas de proporcionalidad.

La información incluida en el capítulo se corresponde con un artículo publicado en la revista Acta Scientiae, y otro actualmente en proceso de revisión.

Burgos, M, Godino, J. D. y Rivas, M. (2019) Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad desde la perspectiva de los niveles de algebrización, *Acta Scientiae, 2*1 (4), 63-81.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Ingeniería didáctica para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad en futuros maestros de educación primaria. (En revisión).

Capítulo 9. Competencias de análisis epistémico y cognitivo sobre proporcionalidad en futuros maestros de educación primaria. En este capítulo se describe los resultados de un segundo ciclo de investigación en relación al desarrollo de conocimiento y competencias didáctico-matemáticas sobre proporcionalidad de futuros maestros de educación primaria, centrada en promover la flexibilidad para resolver un problema usando diversas estrategias de resolución, identificar los niveles de razonamiento algebraico involucrados, reconocer las dificultades que pueden encontrar los alumnos y analizar respuestas dadas por alumnos de primaria, desde el punto de vista de la configuración de objetos y procesos y los niveles de algebrización.

La información incluida en este capítulo se corresponde con tres artículos actualmente en proceso de revisión:

Burgos, M. y Godino, J. D (2020) Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks (En revisión).

Burgos, M. y Godino, J. D (2020). Prospective primary school teachers' competence for analysing the difficulty of proportionality tasks (En revisión).

Burgos, M. y Godino, J. D (2020). Prospective primary school teachers' competence for the cognitive analysis of proportionality tasks (En revisión).

Capítulo 10. Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica: el caso de vídeos educativos sobre proporcionalidad. Se informa del diseño, implementación y evaluación de una intervención formativa con futuros maestros de educación primaria, focalizada en el desarrollo de conocimientos y competencia para el análisis de la idoneidad epistémica de vídeos educativos sobre proporcionalidad disponibles en internet. La información incluida en el capítulo se corresponde con un artículo en prensa de la Revista Española de Pedagogía:

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., y Godino, J. D. (2020) La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria. *Revista Española de Pedagogía*, 78 (275), 27-45, DOI: https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07.

Capítulo 11. Síntesis y perspectivas de investigación. Se presenta una síntesis de los resultados de la investigación realizada según los objetivos e hipótesis planteadas en el capítulo 1, así como algunas cuestiones abiertas para abordar en un futuro proyecto de investigación.

La tesis finaliza con el listado de las fuentes bibliográficas referidas en los diferentes capítulos de la tesis. En anexos se encuentran las tareas diseñadas e implementadas en las intervenciones formativas con los estudiantes del máster de profesorado y estudiantes del grado de educación primaria.

En el compendio de publicaciones, se incluyen los artículos publicados o aceptados para publicación que aparecen recogidos en los capítulos 3, 4, 5, 7, 8 y 10, así como sus indicadores de calidad.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

1. Antecedentes y justificación

Diversas investigaciones (Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Filloy, Puig y Rojano, 2008; Kieran, 2007) han puesto de manifiesto las dificultades de los niños en el tránsito desde la aritmética hasta el álgebra en la escuela secundaria. El álgebra, entendida de una manera restrictiva como lenguaje simbólico, y orientada básicamente a la resolución de ecuaciones y estudio de los polinomios, irrumpe de forma abrupta en secundaria, sin continuidad con los contenidos de aritmética, medida y geometría tratados en primaria. A las limitaciones de cómo se introduce la aritmética y de manera más general la matemática elemental en primaria, se atribuyen en gran medida, las dificultades mostradas por los estudiantes adolescentes sobre el álgebra. (Carraher y Schliemann, 2007, p. 675). Ursini (1996) señala como explicación posible para algunas de las dificultades que encuentran los alumnos en el inicio del álgebra, podría proceder de la falta de experiencia en generalizar y expresar una generalización, es decir, en trabajar a nivel pre-algebraico nociones que subyacen a la de función, como es la idea de variación.

Surge así en las últimas décadas, un gran interés en la comunidad de investigadores en educación matemática por el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros niveles de enseñanza. Malara y Navarra (2018), de acuerdo al significado original del término “pre-álgebra” usan el término "pensamiento pre-algebraico" para referirse no solo al desarrollo de la aritmética relacional, sino también a la construcción progresiva del lenguaje algebraico y el desarrollo de los hábitos mentales que permitirán a los alumnos utilizar el lenguaje algebraico como herramienta para pensar. El pensamiento pre-algebraico ocurre en todas las actividades destinadas a desarrollar en los alumnos una actitud para buscar regularidades, relaciones y propiedades, y para expresarlas primero en lenguaje natural y luego algebraico (p. 54). Esto se ajusta a la caracterización del "pensamiento algebraico temprano" dada por Kieran, Pang, Schifter, Ng. (2016, p. 10).

El razonamiento algebraico en los primeros niveles involucra el desarrollo de formas de pensamiento en actividades para las que las representaciones simbólico-literales no son exclusivas:

> El pensamiento algebraico en los primeros cursos académicos implica el desarrollo de diversos tipos de reflexiones como parte de las actividades en los que puede utilizarse la representación simbólica algebraica mediante letras como herramienta, pero no exclusiva, del álgebra, de modo que pueda llevarse a cabo también sin ningún tipo de representación simbólica con letras, como por ejemplo el análisis de las relaciones entre cantidades, identificar estructuras, estudiar el cambio, la generalización, la resolución de problemas, el modelado, la justificación, el ensayo y error y la predicción. (Kieran, 2004, p. 149)

Por su parte, Kaput (2008) identifica como característicos del álgebra y del razonamiento algebraico las siguientes facetas: (A) El álgebra como simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones; (B) El álgebra como razonamiento guiado sintácticamente y acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales.

Para Blanton, Brizuela, Stephens, Knuth, Isler, Gardiner, Stroud, Fonger, Stylianoud, (2018), las prácticas derivadas de los aspectos centrales de Kaput (2008) que definen el marco conceptual del álgebra temprana son cuatro: generalizar, representar, justificar y razonar con estructuras y relaciones matemáticas. Las actividades de generalización y representación de generalizaciones constituyen la esencia del aspecto central (A) indicado por Kaput. Además, desde el aspecto básico (B), consideran justificar generalizaciones y razonar con las generalizaciones establecidas en situaciones novedosas como dos formas principales de trabajar con sistemas de símbolos convencionales reconocidos. Para los autores, un componente crítico de estas cuatro prácticas es que se centran en el compromiso con la estructura matemática y las relaciones. Es decir, la actividad de justificar no es, en sí misma, algebraica, sino que tiene un propósito algebraico cuando el contexto es justificar afirmaciones sobre generalizaciones. Cuando justifican generalizaciones, los estudiantes desarrollan argumentos matemáticos para defender o refutar la validez de una generalización propuesta. En los primeros niveles educativos, las formas de argumentos que emplean a menudo los estudiantes son justificaciones empíricas ingenuas. El pensamiento algebraico implica razonar con generalizaciones como objetos matemáticos en sí mismos. En esta práctica, los niños actúan sobre las generalizaciones que han observado, representado y justificado como verdaderas como objetos de razonamiento en un nuevo escenario problemático (Blanton, et al., 2018, p. 32).

La creciente demanda en la comunidad de investigadores en educación matemática por la posibilidad de potenciar formas de razonamiento algebraico en los primeros años de escolaridad, precisa la búsqueda de modelos didácticos que motiven la interacción entre los alumnos y alumnos—profesor, y ofrezcan la posibilidad a los estudiantes para promover el razonamiento algebraico.

Los modelos constructivistas de aprendizaje, en sus diversas variantes, tienen actualmente una amplia aceptación en educación matemática. "Los estudiantes aprenden más y mejor cuando ellos mismos toman el control de los aprendizajes definiendo sus objetivos y controlando su progreso" (NCTM, 2000, p. 20). Existe una familia de teorías instruccionales denominadas "Inquiry-Based Education" (IBE), "Inquiry-Based Learning" (IBL) y "Problem-Based Learning" (PBL) que postulan el aprendizaje basado en la indagación con poca guía por parte del profesor. Aunque minoritarias, también existen propuestas que atribuyen un papel central a la transmisión de conocimiento (Sweller, Kirschner y Clark, 2007), en particular cuando se trata del aprendizaje de conceptos científicos, los cuales, de acuerdo con Vygotsky (1934), no se desarrollan de la misma manera que los conceptos cotidianos.

Otros autores abogan por un modelo instruccional mixto al considerar que la optimización del aprendizaje implica una combinación dialéctica y compleja entre los roles del profesor como instructor (transmisor) y facilitador (gestor) y los roles del estudiante como constructor de conocimiento y receptor activo de información significativa (Godino, Batanero, Cañadas y Contreras, 2015; Godino, Rivas, Burgos, Wilhelmi, 2019; Ku, Ho, Hau y Lai, 2014; Lobato, Clarke y Ellis, 2005). Esta idea es compartida por la teoría de la objetivación de Radford (2012; 2013) en la que la enseñanza y el aprendizaje se consideran como un único proceso de *labor conjunta*:

> El pensamiento algebraico no aparece en la ontogenia por casualidad, ni tampoco aparece como una consecuencia necesaria de la maduración cognitiva. Para conseguir

que aparezca el pensamiento algebraico y hacerlo accesible a los estudiantes, algunas condiciones didácticas deben ser creadas (Radford, 2011a, p. 308).

La introducción del álgebra temprana en el currículum de educación primaria, persigue organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Radford, 2014). Como señalan Godino, Castro, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2012) la inclusión del álgebra en el currículo de la escuela primaria reclama una concepción amplia del razonamiento algebraico elemental, entendiendo que dicho razonamiento se puede poner de manifiesto no sólo en tareas relacionadas con la aritmética, la medida, la geometría o con el análisis de datos, sino que lo hace con diversos grados de algebrización. Para estos autores, si bien la expresión Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) puede emplearse como sinónimo o traducción de *early algebra* en la etapa de primaria, las características que proponen para el RAE, en términos de tipos de tareas, objetos y procesos algebraicos implicados, permiten incluir en esta noción el álgebra de secundaria, reforzando, de esta manera, una visión integrada del álgebra escolar.

Por tanto, se precisa que los profesores de todos los niveles de educación primaria sean capaces de promover el pensamiento algebraico con el objetivo de facilitar el aprendizaje del álgebra y fomentar su comprensión introduciendo el carácter algebraico en la matemática elemental (Carraher y Schliemann, 2007). Este hecho implica realizar grandes cambios en relación a la manera de concebir la enseñanza y el aprendizaje del álgebra y su inclusión en la escuela primaria.

El enfoque de álgebra temprana requiere un cambio profundo de perspectiva en los maestros. Sus principales dificultades se refieren a la revisión de sus conocimientos y creencias matemáticas que condicionan sus prácticas de enseñanza. Los maestros necesitan tomar conciencia de que la aritmética y el álgebra deben considerarse como disciplinas entrelazadas desde el comienzo de la escuela primaria (Malara y Navarra, 2018).

Para fomentar el pensamiento algebraico en la educación primaria, los maestros tienen que desarrollar su experiencia sobre cómo ayudar a sus alumnos a llevar a cabo esa transición de sus propias representaciones, de alguna manera implícitas, a los tipos particulares de estructuras del lenguaje natural, diagramas geométricos y la propia notación algebraica. No es realista esperar que los docentes, abandonados a su suerte, logren avanzar en este camino sin una preparación considerable (Carraher y Schliemann, 2019, p. 38).

En este sentido, Stylianou, Stroud, Cassidy, Knuth, Stephens, Gardiner y Demers (2019) mencionan que los maestros de primaria suelen recibir escasa formación en el ámbito del álgebra temprana y destacan los efectos positivos sobre los escolares de la presencia de prácticas algebraicas básicas en la formación de los docentes.

La formación inicial de los maestros de educación primaria es esencial para el desarrollo del razonamiento algebraico en los niños. Esto supone reconocer el carácter algebraico en las actividades matemáticas de la escuela elemental, diseñar actividades que expresen un proceso de generalización y que puedan resolverse tanto de una forma aritmética como de manera algebraica, así como generar una dinámica de aula que promueva flexibilidad de estrategias y conexiones entre ideas matemáticas. El razonamiento algebraico es un proceso que implica generalizar ideas matemáticas, establecer las generalizaciones a través del discurso de la argumentación, y expresarlas cada vez con términos más formales; hecho que requiere una atención a la estructura y las relaciones entre los objetos matemáticos (Blanton y Kaput, 2003).

Los futuros maestros deben tener un conocimiento del álgebra y lo que implica su enseñanza en la escuela primaria para que sean capaces de movilizar más tarde en su práctica, la creación de situaciones de enseñanza para desarrollar el pensamiento algebraico de sus alumnos (Aké, Godino, Fernández y Gonzato, 2014; Branco y Ponte, 2012, Hohensee, 2017).

Radford (2001, p. 13) situó los orígenes históricos del pensamiento algebraico como emergente del “pensamiento proporcional como una forma corta, directa y alternativa de resolver problemas ‘no prácticos’.” El razonamiento proporcional se sitúa como la consolidación del conocimiento aritmético en la escuela primaria y la cimentación del pensamiento algebraico en la escuela secundaria (Lesh, Post y Behr, 1988).

Estas reflexiones nos llevan a centrar nuestro interés en la relación entre el razonamiento proporcional y el razonamiento algebraico temprano, tanto en la matemática escolar como en la formación de futuros profesores de matemáticas, dado que si bien existe una amplia investigación sobre la formación del profesor de matemáticas, las investigaciones realizadas sobre el razonamiento proporcional y sus conexiones con el razonamiento algebraico en la formación de profesores son escasas.

1.1 Razonamiento proporcional y razonamiento algebraico temprano

Para autores como Kieran (2004), el razonamiento algebraico en los grados elementales involucra el desarrollo de formas de pensamiento en actividades para las que el álgebra simbólico-literal puede ser utilizada como herramienta, pero dichas representaciones no son exclusivas, ya que se puede estar inmerso en el álgebra sin usar algún símbolo literal en absoluto. El razonamiento algebraico permite analizar las relaciones entre cantidades, reconocer la estructura de una situación, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelizar y justificar, probar o hacer predicciones sobre situaciones que involucran objetos matemáticos (Kieran, 2004).

Diversas investigaciones muestran la capacidad de los estudiantes de educación primaria para trabajar problemas aritméticos desde un punto de vista algebraico (Carpenter, Frankle y Levi, 2003), para identificar relaciones funcionales—frecuentemente lineales o afines—, representarlas de diversas maneras, generalizarlas y utilizarlas para resolver problemas (Cañadas y Fuentes, 2015; Merino, Cañadas y Molina, 2013). Sin embargo, investigaciones como las de Ursini (1996) describen algunas limitaciones en las capacidades innatas para pasar de lo particular a lo general y proponen estimular a los niños con tareas dirigidas; el trabajo en edades tempranas requiere la intervención del docente para que el niño pueda pensar en términos algebraicos.

Por un lado, existe la preocupación por analizar el proceso mediante el cual los alumnos de educación primaria construyen generalizaciones, y, por otro lado, elaborar propuestas didácticas que permitan promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde la educación primaria.

A pesar de que son numerosos los trabajos y resultados acerca de la emergencia del razonamiento algebraico en estudiantes de las primeras etapas educativas, en tareas basadas en patrones (figurales, frecuentemente) (véanse los trabajos de Radford 2011a, 2013, 2014 y las referencias en los mismos) se conoce poco en relación a la emergencia del pensamiento algebraico en otras tareas.

Dado que razón y proporción versan sobre relaciones cuantitativas entre cantidades, la habilidad para razonar proporcionalmente juega un papel decisivo en el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes (Lim, 2009). Esto sitúa al razonamiento proporcional como ruta de acceso temprano al pensamiento algebraico (Butto y Rojano, 2010).

El razonamiento proporcional entendido como la habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades (Lamon, 2005) es un objetivo presente desde el currículo de educación primaria, que integra diferentes componentes:

1. Los significados de los objetos matemáticos, es decir, las diversas interpretaciones del número racional considerando cinco subconstructos: razón, operador, parte-todo, medida y cociente
2. Las formas de razonar con estos significados. Para Lamon (2007) las formas de razonar con estos significados generan diferentes niveles de desarrollo del razonamiento proporcional:
   - El razonamiento *up and down* implica una manera de razonar para resolver problemas cuando la unidad está implícita.
   - El proceso de *generar unidades contables* (*unitizing*) supone la construcción de una unidad de referencia a partir de la relación multiplicativa entre las cantidades y usar esta nueva unidad para contar.
   - El *pensamiento relacional* describe la capacidad de analizar cambios en términos relativos al relacionar el número de partes en las que se divide un todo y el tamaño de cada parte en relación al total.
   - La *idea de covarianza* tiene que reconocer que dos cantidades están relacionadas de tal manera que, cuando cambia una cantidad, la otra también cambia de una manera específica con respecto a la primera cantidad.

Diversos investigadores sugieren la necesidad de precisar la distinción entre razonamiento proporcional y la comprensión de la proporcionalidad (Lamon, 2007; Modestou y Gagatsis, 2010). Según Norton (2005) el termino razonamiento proporcional se usa para describir los conceptos y pensamiento requeridos para comprender las tasas, razón y proporcionalidad, incluyendo escalas. Para Lamon (2007) “el razonamiento proporcional significa aportar razones que sustenten afirmaciones hechas sobre las relaciones estructurales entre cuatro cantidades (a, b, c, d) en un contexto que simultáneamente involucre la covarianza de cantidades y la invariancia de razones o productos; esto podría consistir en la habilidad de identificar una relación multiplicativa entre dos cantidades así como en la habilidad de extender la misma relación a otro par de cantidades”. Esto puede ser un “prerrequisito necesario pero no suficiente para comprender la proporcionalidad” (p. 637).

Por otro lado, Llinares (2003) considera que el razonamiento proporcional es aquel que se manifiesta al resolver situaciones que se pueden caracterizar mediante dos tipos de relaciones (a) la funcional que vincula magnitudes diferentes y que refleja el sentido de la unidad de la razón y (b) la relación escalar que vincula cantidades de la misma magnitud. Así el razonamiento proporcional es el que se desencadena cuando se resuelven situaciones que involucran relaciones de proporcionalidad, reflejando, en las explicaciones que se puedan proporcionar, las relaciones estructurales de estas situaciones (p. 208).

Teniendo en cuenta este carácter complejo, multifacético e integrador, el papel del profesor para promover el razonamiento proporcional en las primeras etapas educativas es de vital importancia. En el capítulo 5 presentaremos un resumen de propuestas de iniciación al razonamiento proporcional y los resultados de nuestra investigación al respecto.

1.2 Acciones formativas para el desarrollo de competencias docentes

Un problema importante en educación matemática consiste en precisar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que debería tener el profesor de matemáticas para desarrollar su labor docente de manera adecuada (Chapman, 2014; English, 2008; Mason, 2016).

Desde la comunidad de investigadores en educación matemática, se acepta que el profesor de matemáticas debe tener un cierto nivel de competencia matemática, es decir, ha de conocer y ser capaz de realizar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas que el currículo propone en el nivel educativo en el que desempeña su labor docente, y debe saber articularlos con los bloques temáticos posteriores. Pero también se acuerda de forma generalizada que dicha competencia no es suficiente para lograr una enseñanza idónea. El profesor debe tener un conocimiento especializado del propio contenido, de las transformaciones que se deben aplicar al mismo en los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como de los factores de tipo psicológico, sociológico y pedagógico, entre otros, que condicionan dichos procesos. En este sentido, resulta evidente la necesidad de diseñar e implementar experiencias formativas que permitan promover el crecimiento profesional y el desarrollo de conocimientos y competencias en el profesorado (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018; Ponte y Chapman, 2016; Sadler, 2013).

Competencia en el análisis de tareas

Diversas investigaciones sugieren la importancia de diseñar e implementar intervenciones formativas destinadas a promover la competencia en el análisis de tareas (Boston, 2013; Clarke, Grevholm, y Millman, 2009; Clarke, Roche, Cheeseman, y van der Schans, 2014; Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco, 2018; Nathan y Koedinger, 2000; Osterman, 2018; Ostermann, Leuders y Nucles, 2017; Zalavsky y Sullivan, 2011). Existe un consenso en que "sin una comprensión profunda de las matemáticas, un profesor no puede comprometerse de manera efectiva en actividades que constituyen el núcleo de la enseñanza experta, como son seleccionar tareas que sean apropiadas para los estudiantes, predecir las dificultades específicas de los estudiantes y representar los conceptos de la manera que mejorará su comprensión matemática” (Osana, Lacroix, Tucker y Desrosieres, 2006, p. 350). Por otro lado, se acepta que al analizar las fuentes de las dificultades e ideas erróneas de los estudiantes, los maestros aprecian mejor la estructura del pensamiento matemático (Leikin y Zazkis, 2007, p. 127).

Nathan y Koedinger (2000) muestran que tanto los profesores en servicio como profesores en formación inicial, elaboran juicios erróneos en la estimación de la dificultad de tareas aritméticas y algebraicas dadas. En Ostermann, et al. (2017) se describen intervenciones formativas destinadas a mejorar la precisión de los análisis que realizan los futuros profesores sobre las dificultades de las tareas, estudiando el efecto del conocimiento didáctico del contenido matemático en dicha competencia. Los resultados muestran que los futuros profesores mejoraron en la capacidad para comprender el desempeño de sus alumnos, tomando conciencia de las diversas estrategias de resolución. Osterman (2018) señala que la competencia de los profesores para juzgar adecuadamente la dificultad de las tareas depende de diversos factores: los conceptos matemáticos que forman parte del contenido matemático curricular, los conocimientos previos de los estudiantes, el contexto intra y extra matemático de la tarea, entre otros. En estas investigaciones, sin embargo, no se aborda de manera específica la descripción detallada de los conocimientos puestos en juego en la actividad matemática al abordar las tareas que pueden potencialmente generar las dificultades en los alumnos.

Por otro lado, Guberman y Leikin (2013) presentan una experiencia formativa con futuros maestros destinada a desarrollar conocimiento didáctico-matemático por medio del uso sistemático de tareas que admiten diferentes métodos de solución en base a la intervención de distintas representaciones de los conceptos matemáticos, propiedades (definiciones o teoremas) o procedimientos, relativos a un determinado contenido matemático. En la intervención se pedía a los futuros docentes, que plantearan diferentes conexiones entre las representaciones y los objetos matemáticos involucrados en la actividad matemática. Los resultados mostraron que los futuros maestros progresaron en esta competencia adquiriendo flexibilidad al conectar problemas con conceptos matemáticos y propiedades.

Además, investigaciones recientes sobre la creación de problemas de matemáticas sitúan esta actividad como medio para potenciar los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas (Ellerton, 2013; Mallart, Font y Diez, 2018; Milinkovié, 2015; Tichá y Hošpesová, 2013). Estos trabajos muestran la estrecha relación entre la competencia de análisis didáctico y la capacidad de crear problemas que faciliten el aprendizaje de los estudiantes.

Competencia para la valoración de los procesos de instrucción

Desde distintos enfoques de investigación se han utilizado tareas específicas, en programas de formación de profesores destinadas a que los futuros profesores sean profesionales reflexivos. Entre ellos, existe una amplia literatura respecto al uso de vídeos para fomentar el desarrollo de la competencia reflexiva en la formación de profesores (Alsawaie y Alghazo, 2010; Blomberg, Renkl, Sherin, Borko y Seidel, 2013; Llinares y Valls, 2010; McDuffie, Foote, Bolson, Turner, Aguirre, Bartell, Drake y

Land., 2014; Santagata y Yeh, 2014). Los vídeos se utilizan para aprender de la propia enseñanza o de la práctica docente de los demás y también para aprender de las interacciones en clase o del razonamiento matemático de los estudiantes. En general, los resultados de las acciones formativas centradas en el uso de episodios de vídeo muestran que los participantes logran progresar en el tipo de reflexiones que realizan, mejoran su competencia para analizar la enseñanza de las matemáticas; aprenden a prestar más atención a los detalles del razonamiento matemático de los estudiantes y a interpretar (en lugar de simplemente describir) los fenómenos que transcurren en la experiencia.

Las acciones formativas centradas en la competencia "mirar profesionalmente" buscan desarrollar en los profesores la capacidad para identificar los aspectos relevantes de la situación de enseñanza; usar el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las interacciones en el aula, y establecer conexiones entre sucesos específicos del aula y principios o normas generales sobre la enseñanza-aprendizaje (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Fortuny y Rodríguez, 2012). La relación entre el conocimiento especializado del contenido matemático y la competencia docente "mirar profesionalmente" se muestra en investigaciones que analizan cómo futuros maestros identifican e interpretan la comprensión de los estudiantes sobre determinados contenidos. Jacobs, Lamb y Philipp (2010), consideran que la competencia de "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes consiste en: (a) describir las estrategias de solución que utilizan los estudiantes, (b) interpretar la comprensión matemática y las equivocaciones de los estudiantes, y (c) decidir cómo responder a la comprensión de los estudiantes o la falta de ella.

Diversas investigaciones se han centrado en proporcionar contextos para desarrollar esta competencia en los programas de formación docente, tales como analizar e interpretar respuestas escritas por estudiantes a un problema (Biza, Nardi, y Zhachariades, 2007; Jacobs et al., 2010; Simpson y Haltiwnager, 2017; Son, 2013). Además, investigaciones como las de Barnhart y van Es (2015), Crespo (2000) o Kazemi y Franke (2004) muestran resultados óptimos como resultado de los programas de formación; los investigadores observan en las explicaciones por parte de los futuros profesores una evolución de las descripciones usualmente centradas en el grado de corrección de la solución propuesta por los estudiantes a una descripción más detallada que incluye evidencias focalizadas en las estrategias matemáticas y la comprensión exhibida por los estudiantes.

Recientemente, Ivars, Fernández, Llinares y Choy (2018) sugieren que mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes requiere identificar aquellos elementos matemáticos relevantes en las respuestas de los estudiantes e interpretar el pensamiento matemático de los mismos, teniendo en cuenta los elementos matemáticos identificados (reconocer las relaciones entre los elementos identificados y las características del pensamiento matemático de los estudiantes).

En el marco del EOS se propone la competencia de análisis didáctico como medio para realizar un análisis completo de los procesos de enseñanza y aprendizaje que permita describir, explicar y valorar tales procesos (¿qué ha ocurrido y por qué?) considerando las distintas facetas que actúan de manera interconectada en dichos procesos: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Font, Planas y Godino, 2010; Pochulu y Font, 2011). En los últimos años, se han realizado en el campo de formación de profesores, numerosas investigaciones empleando la herramienta idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores, para organizar la reflexión del profesor y desarrollar la competencia de valoración de los procesos de instrucción efectivamente implementados que permita tomar decisiones de mejora (Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone, 2018; Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Breda, Font, Lima y Pereira, 2018; Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018; Pochulu, Font y Rodriguez, 2016; Ramos y Font, 2008; Seckel, 2016, entre otros).

Como señalan Pochulu y Font (2011) la aplicación de los criterios de idoneidad a un proceso de enseñanza y aprendizaje concreto se entiende como una metodología que permite la guía (a priori, principios que orientan cómo se deben hacer las cosas), valoración y posible mejora de un proceso de instrucción efectivamente implementado (a posteriori, criterios en base a los que extraer conclusiones sobre qué aspectos mejorar en el futuro).

1.3. Razonamiento proporcional en la formación de profesores

Diversas investigaciones señalan que, tanto los profesores en formación inicial como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2012; Berk, Taber, Gorowara y Poetzl, 2009; Buforn y Fernández, 2014; Fernández, Llinares y Valls, 2013; Rivas y Godino, 2010; Rivas, Godino y Castro, 2012; Simon y Blume, 1994; Thomson y Thomson, 1994; Thomson y Thomson, 1996). En particular, los profesores tienen dificultades en interpretar adecuadamente las razones en situaciones de comparación (Livy y Vale, 2011), tienden a apoyarse en el algoritmo de la multiplicación cruzada (regla de tres) en situaciones de proporcionalidad, sin razonar su pertinencia (Riley, 2010), y recurren a explicaciones procedimentales para justificar sus estrategias de resolución en problemas de valor faltante en los que se establece una relación de proporcionalidad (Post, Harel, Behr y Lesh, 1991). Además, con frecuencia, los profesores centran la atención en lograr en sus estudiantes una comprensión operacional (aplicación de reglas y algoritmos) sacrificando el desarrollo de una comprensión conceptual (Lamon, 2007).

Recientemente, Buforn, Llinares y Fernández (2018) se interesan por caracterizar el conocimiento de los futuros maestros de primaria en relación con la fracción, razón y proporción. Sus resultados revelan limitaciones en la comprensión de los significados de razón y proporción de los futuros profesores a pesar de que éstos conocieran y emplearan adecuadamente los procedimientos vinculados.

> "Estos descubrimientos sugieren que si los profesores tienen que ser capaces de promover el razonamiento proporcional de los estudiantes, ellos deben tener primero una fuerte comprensión de los diversos elementos y conceptos fundamentales del razonamiento proporcional (conocimiento del contenido), así como conocimiento pedagógico del contenido que les permita planificar experiencias efectivas de aprendizaje para promover el razonamiento proporcional en sus estudiantes" (Hilton y Hilton, 2018, p. 3).

Son (2013) investiga el razonamiento de profesores de primaria y secundaria en formación, sus respuestas a los errores de los estudiantes sobre el contenido de razón y proporción, y la relación entre sus conocimientos matemáticos y pedagógicos, abordando la necesidad de una mayor investigación centrada en el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido de los estudiantes para profesor relacionado con el razonamiento proporcional, en particular con respecto al razonamiento aditivo.

Un conocimiento limitado del contenido matemático dificulta a los profesores la tarea de interpretar las respuestas de los estudiantes para tomar decisiones de acción pertinentes, pero, por otro lado, el conocimiento del contenido no es suficiente para que los profesores reconozcan la comprensión matemática de los alumnos (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; Fernández, Llinares y Valls, 2012; Rivas, et al., 2012; Son, 2013). Investigaciones como las de Balderas, Block y Guerra (2014), Fernández, et al. (2013) o Rivas et al. (2012), muestran que los maestros tienen dificultades para interpretar las respuestas de alumnos de educación primaria cuando resuelven tareas relacionadas con la proporcionalidad.

Por tanto, la formación de profesores debe considerar el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas con relación a este contenido, diseñando e implementado intervenciones formativas específicas. En este sentido, Buforn y Fernández (2014, p. 26) consideran que el conocimiento de matemáticas especializado sobre el razonamiento proporcional implica considerar los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional) y las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento up and down, unitizing), así como la capacidad de resolver situaciones proporcionales de valor perdido y discriminarlas de situaciones no proporcionales.

La investigación de Ben-Chaim et al. (2012) recurre a tareas matemáticas para incentivar el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores en relación al razonamiento proporcional. Se plantea que los futuros profesores lean artículos matemáticos y didácticos sobre razón y proporción, contemplando el trabajo en grupo y la discusión de los resultados con toda la clase. Por su parte, Berk y cols. (2009) estudian la flexibilidad de futuros maestros en el razonamiento proporcional, esto es, la capacidad de futuros maestros de emplear múltiples métodos de resolución para abordar problemas de proporcionalidad así como para elegir justificadamente el método más eficaz operacionalmente. Los resultados muestran que los futuros maestros son poco flexibles en resolver el mismo problema usando diferentes métodos, si bien como consecuencia de la intervención los participantes mejoraron esta habilidad en problemas que involucraban la noción de razón y proporción.

Fernández, Llinares y Valls (2011; 2012; 2013) y Son (2013) estudian la competencia docente “mirada profesional” en futuros maestros de educación primaria en el ámbito de la proporcionalidad, atendiendo a en qué medida los futuros docentes identifican los elementos matemáticos que utilizan los alumnos en la resolución de tareas, cómo interpretan los futuros maestros las respuestas de los estudiantes y finalmente, de qué manera los futuros maestros tienen en cuenta la forma en la que los alumnos parecen comprender las nociones matemáticas para plantear decisiones de acción. Los resultados de estos trabajos indican que los estudiantes para maestro tuvieron dificultades en identificar si las estrategias utilizadas por los estudiantes de primaria eran correctas o no en diferentes situaciones proporcionales y no proporcionales ya que no eran capaces de discriminar ambas situaciones (Fernández et al. 2012), y que los futuros profesores consideraban menos potentes las estrategias de solución de alumnos que no usan algoritmos, no valoran las estrategias que podían mostrar un proceso de identificación de las relaciones aditivas o proporcionales (Fernández et al, 2011).

2. Problema específico de investigación

En el Grupo de Investigación FQM-126, Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística de la Universidad de Granada, se ha desarrollado un modelo para describir el carácter más o menos algebraico de la actividad matemática escolar, aplicando las herramientas teóricas del EOS. El resultado ha sido la elaboración del modelo de Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) que distingue diversos niveles de algebrización de las prácticas matemáticas que se realizan al resolver tareas propias de educación primaria y secundaria (Godino et al., 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015). Los autores establecen criterios para identificar la actividad matemática puramente aritmética (nivel 0 de algebrización) y distinguirla de los progresivos niveles de algebrización. A la actividad claramente algebrizada se asigna un nivel 3 y se establecen otros dos niveles intermedios de actividad proto-algebraica. Los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en el tipo de objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática, de acuerdo con el EOS y serán explicados con detalle en el siguiente capítulo.

Nuestro problema de investigación concierne a la relación entre el razonamiento proporcional y el algebraico desde las perspectivas institucional y personal, y las implicaciones que ésta tiene para la formación de profesores de matemáticas. Se contempla el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas en el razonamiento proporcional desde la mirada de los niveles de algebrización.

2.1. Hipótesis de investigación

Centramos la atención en las relaciones entre el pensamiento proporcional y el algebraico, analizando el desarrollo del razonamiento proporcional desde la escuela primaria y sus implicaciones en la formación de profesores. Así, se trata de aportar conocimientos fundamentados sobre las siguientes hipótesis, entendidas como expectativas:

Hipótesis 1. Es posible reconocer los distintos niveles de algebrización en el razonamiento proporcional desarrollado por estudiantes de educación primaria teniendo en cuenta los procesos de generalización matemática, la articulación de diversos registros y el cálculo analítico basado en las propiedades estructurales y los procesos puestos en juego en la resolución de tareas escolares.

Hipótesis 2. Los futuros profesores tienen dificultades para discriminar la actividad aritmética de la algebraica y asocian el carácter algebraico de una práctica a la manipulación de expresiones simbólicas literales.

Hipótesis 3. Los futuros profesores muestran dificultades en la faceta epistémica (conocimiento común, especializado, avanzado) y cognitiva (cómo los estudiantes razonan y aprenden) del razonamiento proporcional.

Hipótesis 4. Los futuros profesores tienen dificultades para analizar las prácticas matemáticas puestas en juego en la resolución de tareas escolares, mediante la identificación de los objetos matemáticos (conceptos, lenguajes, procedimientos, proposiciones y argumentos) que intervienen y emergen de ellas y para proponer variantes a las tareas que supongan cambios en el nivel de algebrización.

Hipótesis 5. Es posible avanzar en la superación de las dificultades y conflictos identificados mediante la implementación de talleres formativos basados en la reflexión epistémica y cognitiva de tareas específicas sobre razonamiento proporcional y algebraico.

Aportar nuevos conocimientos sobre estas hipótesis se considera un tema de interés en educación matemática ya que el reconocimiento de los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas y la identificación de los niveles de algebrización en las mismas es una competencia que permitirá al profesor comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los procesos de institucionalización necesarios y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos.

2.2. Objetivos de la investigación

Nuestro proyecto de investigación centra la atención en tres objetivos generales relacionados entre sí:

OG1. Establecer un modelo ontosemiótico de referencia para la proporcionalidad considerando sus implicaciones para el diseño curricular e instruccional.

OG2. Analizar e indagar formas de desarrollo del razonamiento proporcional en alumnos de educación primaria, teniendo en cuenta el papel que desempeñan los diferentes niveles de algebrización.

OG3. Analizar y promover el crecimiento profesional en los futuros profesores de matemáticas sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas relativos al razonamiento proporcional y su imbricación con el razonamiento algebraico.

Estos se concretan en los siguientes objetivos específicos:

OE1. Identificar y caracterizar los distintos significados asociados al objeto proporcionalidad. Determinar cómo se relacionan y articulan y de qué forma se debe abordar su estudio.

OE2. Justificar y analizar la pertinencia de un modelo didáctico dialógico-colaborativo para las situaciones de primer encuentro con situaciones de proporcionalidad.

OE3. Diseñar, implementar y evaluar experiencias de enseñanza que estimulen el desarrollo de esquemas de razonamiento proporcional antes de acabar la etapa de educación primaria.

OE4. Indagar sobre los rasgos de razonamiento algebraico en la actividad desarrollada por los alumnos de primaria en tareas de proporcionalidad.

OE5. Diseñar, implementar y evaluar acciones formativas con futuros profesores de matemáticas de educación primaria y secundaria para desarrollar en ellos conocimientos y competencias didáctico-matemáticas sobre el razonamiento proporcional y su relación con el razonamiento algebraico.

OE6. Diseñar, implementar y evaluar acciones formativas con futuros profesores de matemáticas de educación primaria y secundaria destinadas a fomentar la competencia de análisis ontosemiótico de objetos y procesos puestos en juego en las prácticas matemáticas en tareas de proporcionalidad.

CAPÍTULO 2.
FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

1. El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos

El marco teórico que utilizamos en esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) de Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Batanero y Font, 2019). Si bien es un modelo que tiene sus orígenes en 1994, con el primer trabajo de Godino y Batanero (1994), su carácter dinámico se observa en las múltiples publicaciones científicas en el área (http://enfoqueontosemiotico.ugr.es). El EOS trata de avanzar en la construcción de un sistema de herramientas conceptuales y metodológicas que permiten realizar análisis a nivel macro y micro de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: ecológica, epistémica, cognitiva, afectiva e instruccional (Godino et al., 2007).

El conjunto de nociones teóricas que componen el EOS se organizan en cinco categorías, cada una de las cuales se centra en aspectos específicos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino et al., 2007): *sistema de prácticas, objetos y procesos, configuración ontosemiótica, configuración didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica.*

Estas constituirán las herramientas teóricas que nos permitirán describir, explicar y valorar los procesos de diseño e instrucción de la actividad matemática a lo largo de nuestro trabajo. A continuación pasamos a describir brevemente los elementos conceptuales y metodológicos del EOS que usamos en nuestro trabajo para que se pueda hacer una lectura autónoma de la memoria de tesis. Remitimos al lector a los trabajos originales citados para ampliar la comprensión y fundamentación de los supuestos y herramientas del EOS.

1.1. Sistemas de prácticas y configuración ontosemiótica

El EOS asume una visión antropológica (Wittgenstein, 1953), pragmatista y semiótica (Peirce, 1958) de las matemáticas, de forma que la actividad de resolución de problemas aparece como elemento central en la construcción del conocimiento matemático. Las situaciones-problema constituyen la razón de ser y el significado de los objetos emergentes de la misma. Por tanto, las nociones de práctica matemática y sistema de prácticas constituyen el punto de partida para el análisis de la actividad matemática (Font, Godino y Gallardo, 2013).

Para Godino y Batanero (1994) “una práctica matemática es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (p. 334). En cada una de estas actuaciones interviene “una práctica operativa, a través de la cual se leen y producen textos matemáticos, y una práctica discursiva, que permite la reflexión sobre la práctica operativa” (Font, et al., 2013, p. 104). Por otro lado, las prácticas matemáticas pueden ser concebidas desde dos puntos de vista dependiendo de quien las realiza; si son llevadas a cabo por una persona, se pondrán en evidencia los significados personales, o bien, si son compartidas en el seno de una institución, dará lugar a los significados institucionales, entendiendo por institución un grupo de personas involucradas en una misma situación problemática.

La noción de significado y su relación con las nociones de práctica y objeto desempeña un papel central en el EOS:

> En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los "objetos matemáticos" y el que el "significado" de estos objetos esté íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática (Godino et al., 1994, p. 331).

En el marco del EOS el término *objeto* se usa en un sentido amplio para referir a cualquier entidad que esté involucrada de alguna forma en la práctica o sistemas de prácticas matemáticas y que pueda separarse o individualizarse. Se propone una tipología de objetos matemáticos o entidades primarias emergentes de las prácticas matemáticas:

- *Situaciones-problema*: ejercicios y problemas más o menos abiertos, aplicaciones intra-matemáticas o extra-matemáticas, entendidas como las tareas que inducen la actividad matemática.

- *Lenguajes*: términos y expresiones matemáticas; notaciones, símbolos, representaciones gráficas en sus diversos registros (gestual, oral, escrito).
- *Conceptos*: entidades matemáticas que pueden ser introducidas mediante descripción o definición (número, punto, recta, media, función).
- *Proposiciones*: propiedades o atributos; enunciados sobre conceptos.
- *Procedimientos*: técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos.
- *Argumentos*: enunciados requeridos para justificar o demostrar las proposiciones o para explicar los procedimientos.

Los objetos matemáticos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas se relacionan entre sí formando configuraciones. Así, las situaciones – problemas son la razón de ser de la actividad matemática escolar; el lenguaje constituye el instrumento de trabajo matemático y representa las demás entidades; los argumentos fundamentan los procedimientos y las proposiciones que relacionan los conceptos matemáticos entre sí.

La noción de *configuración ontosemiótica* (de prácticas, objetos y procesos) responde a la necesidad de identificar los objetos y procesos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Las configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, pueden ser *epistémicas (institucionales)* —redes de objetos y procesos que intervienen y emergen de las prácticas necesarias para resolver un tipo de tareas matemáticas— o *cognitivas* (personales)—redes de objetos y procesos matemáticos que ponen en juego los estudiantes para resolver un tipo de tareas matemáticas— (Godino, et. al, 2007).

El reconocimiento explícito de tales objetos y procesos permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio.

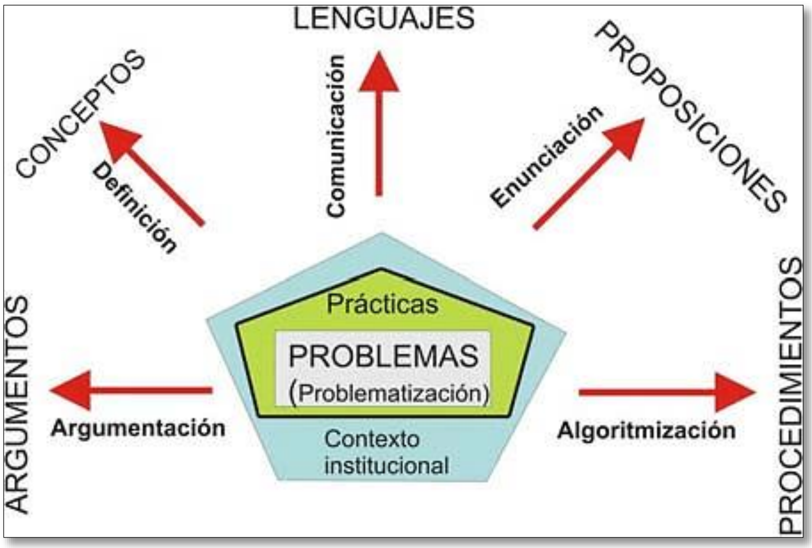


Figura 2.1. Objetos y procesos primarios (Godino, Font y Wilhelmi, 2008).

Los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los que emergen de las mismas, considerados como primarios, pueden ser contemplados desde diversos puntos de vista o dualidades:

- Objetos *ostensivos* (públicos, materiales, perceptibles) y objetos *no ostensivos* (abstractos, ideales, inmateriales).
- Objetos *extensivos* (particulares), objetos *intensivos* (generales).
- *Personales* (relativos a sujetos individuales), *institucionales* (compartidos en una institución o comunidad de prácticas).
- *Significantes* (expresión) o *significados* (contenido) (antecedentes o consecuentes de una función semiótica).
- *Unitarios* (objetos considerados globalmente como un todo previamente conocido) y *sistémicos* (considerados como sistemas formados por componentes estructurados).

Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, dado que la actividad matemática es esencialmente relacional. La relación se establece por medio de *funciones semióticas*, entendidas como toda relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Tanto los objetos primarios como los secundarios (derivados de la aplicación de las dualidades) se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual proporciona criterios para distinguir tipos de procesos matemáticos primarios y secundarios. En consecuencia se tienen procesos de *problematización, definición, enunciación, argumentación, particularización-generalización, representación-significación*, etc.

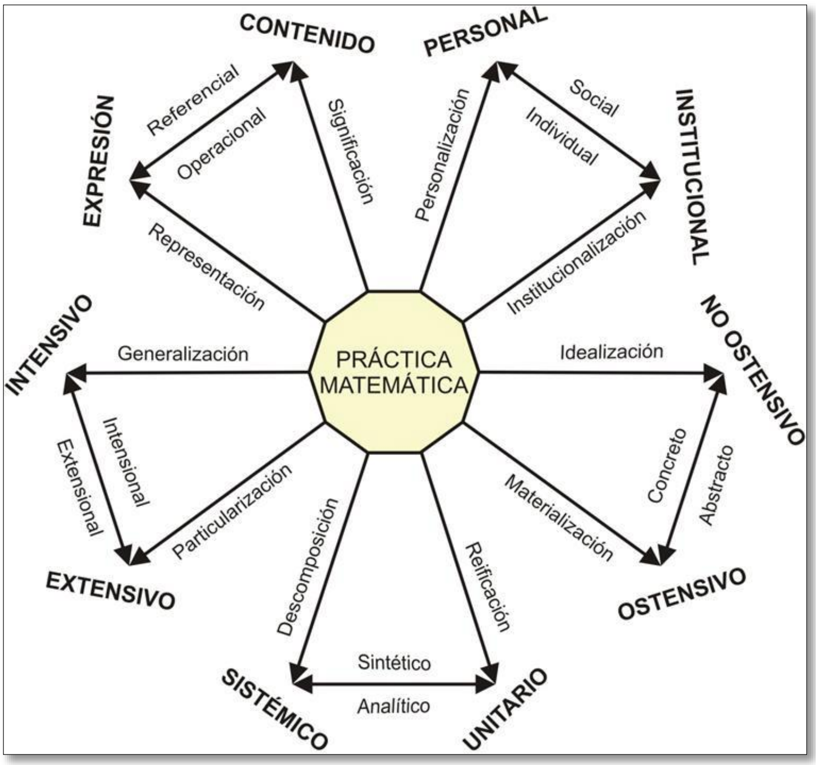


Figura 2.2. Objetos y procesos secundarios (Godino, Font y Wilhelmi, 2008)

En el caso de la práctica o actividad algebraica los procesos de *particularización-generalización* tienen una importancia especial, dado el papel de la generalización como uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico. El EOS considera la generalización en términos de la identificación de objetos intensivos y objetos extensivos que intervienen en las prácticas. Así, un objeto extensivo interviene en una práctica matemática como un ejemplar particular, mientras que un objeto intensivo interviene como un tipo, clase o generalidad.

1.2. Configuración didáctica. Hechos didácticos significativos y conflictos semióticos.

El análisis detallado de un proceso de enseñanza y aprendizaje requiere dividir el episodio en unidades de análisis. En Godino, Contreras y Font (2006) se introduce la noción de configuración didáctica como herramienta principal para el análisis de los procesos de instrucción matemática. Una *configuración didáctica* es sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación-problema. Responde a un segmento de actividad de enseñanza y aprendizaje que se distribuye entre los momentos de inicio y finalización de una tarea diseñada o implementada. Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar el estudio conjunto de la tarea.

En el transcurso de una configuración, pueden ocurrir hechos didácticos que interesa analizar. Un *hecho didáctico* es cualquier acontecimiento que tiene un lugar y tiempo en el transcurso de un proceso de instrucción matemática y que, en base a cierto criterio, se considera como unidad. Se considera que un *hecho didáctico* es *significativo* (HDS) si las acciones o prácticas didácticas que lo componen desempeñan una función, o admiten una interpretación, en términos del objetivo instruccional pretendido (Godino, Rivas et al., 2014, p. 174). La significatividad se puede entender desde el punto de vista del docente, del discente, o bien desde un punto de vista externo al sistema didáctico, constituido por el sujeto que ha realizado el estudio preliminar y el diseño instruccional.

La identificación e interpretación de hechos didácticos significativos requiere el empleo de herramientas teóricas que permitan analizar estos procesos de manera adecuada. En particular, la noción de idoneidad didáctica, que presentaremos a continuación, sus componentes e indicadores, pueden orientar la reflexión en torno al análisis e interpretación del conjunto de HDS.

Para explicar los errores, dificultades y obstáculos que encuentran los estudiantes en el aprendizaje de un contenido matemático, y en general, en las dificultades que surgen en la comunicación e interacción en el aula, desde el EOS se introduce la noción de conflicto semiótico. Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa. Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales (Godino et al., 2007; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011).

1.3. Idoneidad didáctica

Desde el EOS se define la *idoneidad didáctica* como el grado en que un proceso de instrucción reúne ciertas características que permiten calificarlo como adecuado, siendo el principal criterio la adaptación entre los significados personales obtenidos por los alumnos (aprendizaje) y los significados institucionales, ya sean pretendidos o implementados (enseñanza), considerando la influencia del entorno (Godino, 2013). Constituye una herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva a una didáctica orientada hacia la intervención efectiva en el aula. Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis criterios relativos a las facetas que intervienen en un proceso de instrucción (Godino et al., 2007, p. 133):

- *Idoneidad epistémica*, expresa el grado de representatividad de los significados institucionales implementados, respecto de un significado de referencia.

- *Idoneidad ecológica*, referida al grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

- *Idoneidad cognitiva*, refiere al grado en que los significados implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos.

- *Idoneidad afectiva*, expresa el grado de implicación (interés, motivación, etc.) del alumnado en el proceso de estudio. Se relaciona tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

- *Idoneidad interaccional*. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por un lado, identificar conflictos semióticos potenciales, y por otro, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

- *Idoneidad mediacional*, expresa el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para cada una de estas facetas, Godino (2013) identifica un sistema de componentes e indicadores empíricos generales que constituyen una guía para el análisis y reflexión sistemática. Dicho sistema aporta criterios para determinar el grado de idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje permitiendo justificar y dirigir su mejora progresiva. Estos criterios son útiles tanto a priori, porque orientan "cómo se deben hacer las cosas", como a posteriori, por cuanto "sirven para valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje efectivamente implementado" (Breda, Font y Pino Fan, 2018, p. 264).

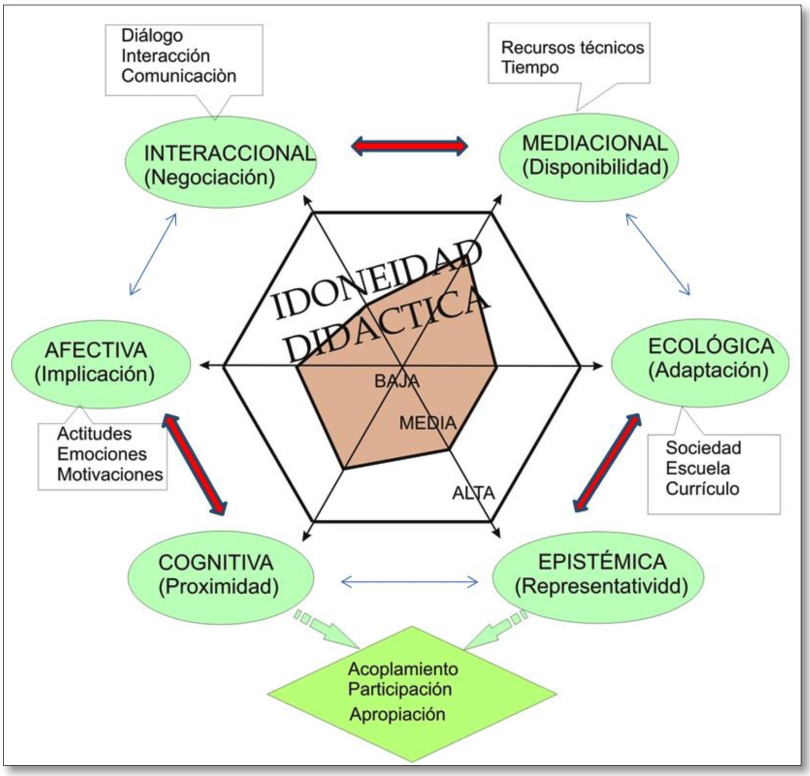


Figura 2.3. Idoneidad didáctica (Godino, 2013)

Se considera que un proceso de instrucción matemática tiene mayor idoneidad epistémica en la medida en que los significados institucionales implementados (o pretendidos) representan bien a un significado de referencia. El significado de referencia será relativo al nivel educativo correspondiente y deberá ser elaborado teniendo en cuenta los diversos tipos de problemas y contextos de uso del contenido objeto de enseñanza, así como las prácticas operativas y discursivas requeridas (Godino, 2013, p. 118). Así, será preciso tener en cuenta el grado de adecuación de las situaciones-problemas, pero también será necesario prestar atención a la diversidad y adecuación de las representaciones, definiciones, procedimientos, proposiciones, así como los argumentos que las sustentan. Una alta idoneidad desde el punto de vista epistémico requiere que las situaciones-problema propuestas involucren diversas representaciones, permitan a los estudiantes diversas maneras de abordarlas y requieran que éstos interpreten, generalicen y justifiquen las soluciones. Además, los diversos significados parciales de los objetos matemáticos que aparecen involucrados deben estar conectados y articulados (Godino, et al., 2011).

1.4. Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor

El modelo de categorías de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (modelo CCDM) del profesor de matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) desarrolla el modelo de Conocimientos Didáctico-Matemático (CDM) propuesto por el EOS (Godino, 2009), que a su vez extiende y complementa el modelo MKT de conocimiento matemático para la enseñanza de Ball y colaboradores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008).

El modelo CDM de categorías de conocimientos didáctico-matemáticos se revisa y amplia en Pino-Fan y Godino (2015), incorporando a las herramientas de análisis didáctico las nociones de fases (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación), dimensiones (matemática, didáctica y meta didáctico-matemática), facetas y niveles de análisis (prácticas matemáticas y didácticas, configuraciones de objetos y procesos, normas e idoneidad). Así, se contemplan seis facetas para el conocimiento didáctico-matemático:

- *Faceta epistémica*: conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido, es decir, la forma particular en que el profesor de matemática comprende y conoce las matemáticas.
- *Faceta cognitiva*: conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje.
- *Faceta afectiva*: conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
- *Faceta interaccional*: involucra los conocimientos necesarios para prever, implementar y evaluar secuencias de interacciones, entre los agentes que participan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, orientadas a la fijación y negociación de significados (aprendizajes) de los estudiantes.
- *Faceta mediacional*: conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) adecuados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.

En el modelo CCDM de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos, se asume que el profesor debe tener un conocimiento matemático *per se*, que coordine el conocimiento matemático común relativo al nivel educativo donde imparte su docencia, con el conocimiento ampliado del contenido matemático propio de los niveles superiores. El *conocimiento matemático común* es el conocimiento de un contenido matemático específico, que se considera suficiente para resolver los problemas y tareas propuestas en el currículo de matemáticas y en los libros de texto de cierto nivel educativo; es un conocimiento compartido entre el profesor y sus estudiantes (por ejemplo, la proporcionalidad directa en los últimos cursos de educación primaria). El *conocimiento matemático ampliado* se refiere al conocimiento que el profesor debe tener con respecto a las nociones que aparecen posteriormente en el currículum del nivel educativo en cuestión o en un nivel educativo siguiente (por ejemplo, función lineal). Proporciona al profesor las bases matemáticas necesarias para conectar el objeto matemático que se está estudiando con otras nociones matemáticas y guiar a los alumnos en el estudio sin saltos de las nociones matemáticas subsecuentes. Estas dos subcategorías de la dimensión matemática del modelo CDM, reinterpretan el conocimiento común del contenido (Hill, Ball y Schilling, 2008) y el conocimiento del horizonte (Ball y Bass, 2009), respectivamente, que están "basados en la necesidad de establecer el conocimiento que un profesor de matemáticas debería poseer sobre los temas específicos que se enseñarán en cursos escolares específicos" (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015, p. 1433).

Pero a medida que se ponga en juego algún contenido matemático, el profesor debe tener un *conocimiento especializado o didáctico-matemático* de las distintas facetas que afectan a la planificación y gestión de un tema matemático específico. El conocimiento didáctico-matemático está relacionado con el modelo de Conocimiento Pedagógico del Pedagógico (PCK por sus siglas en inglés). Dentro del PCK, el conocimiento del contenido y la enseñanza combina conocimientos sobre la enseñanza y conocimientos sobre las matemáticas, incluyendo conocimientos sobre el diseño de la instrucción. El conocimiento del contenido y los estudiantes conecta el conocimiento de las matemáticas y el conocimiento de los estudiantes; incluye la conciencia sobre las concepciones y errores comunes de los estudiantes sobre un contenido matemático particular, así como la interpretación del pensamiento emergente de los estudiantes (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan, 2019).

En nuestra investigación, nos centramos fundamentalmente en los aspectos epistémicos y cognitivos del conocimiento didáctico-matemático. La faceta epistémica concierne al conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido, es decir, la forma particular en la que el profesor de matemáticas conoce y comprende las matemáticas. En particular, los profesores, además de las matemáticas que les permiten resolver problemas (lo que implica su conocimiento común y ampliado), deben ser capaces de comprender y movilizar la diversidad de significados parciales de un objeto matemático específico, resolver una tarea a través de diferentes procedimientos, proporcionar varias justificaciones y argumentos, e identificar el conocimiento involucrado durante el proceso de resolución de una tarea matemática. Esta subcategoría del modelo CCDM incluye las nociones de Hill, Ball y Schilling (2008, p. 377-378) relacionadas con "el conocimiento especializado del contenido matemático".

Como señalan Pino-Fan, Assis y Castro (2015, p. 1434-1435), el conocimiento didáctico-matemático en la faceta cognitiva considera el conocimiento necesario para "reflejar y evaluar" el grado de ajuste entre los significados personales (conocimiento de los estudiantes) y los significados institucionales (conocimiento desde el punto de vista de la institución educativa). Considerado junto con la faceta afectiva, incluye y amplía las ideas de Shulman sobre el "conocimiento de los estudiantes y sus características", y de Hill, Ball y Schilling (2008, p. 375) sobre el "conocimiento del contenido y los estudiantes".

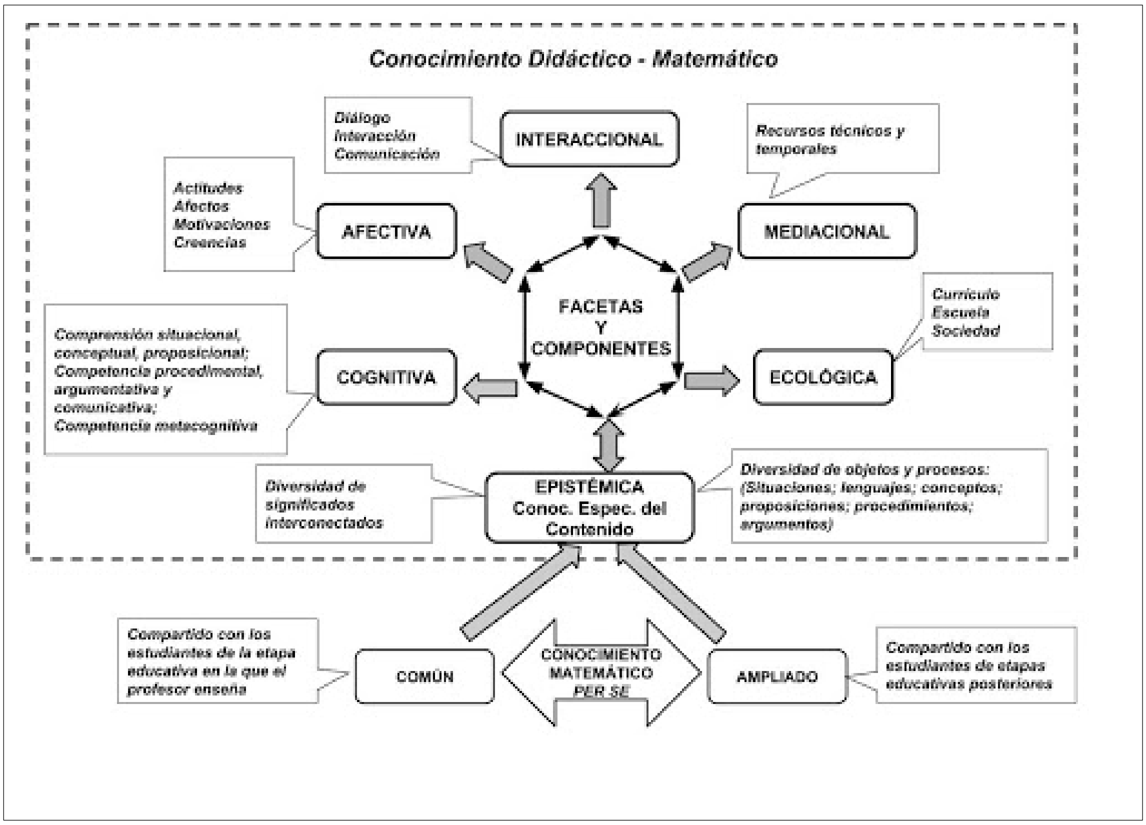


Figura 2.4. Facetas y componentes del conocimiento del profesor (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016, p. 292)

Además de disponer de estos conocimientos (figura 2.4) el modelo CCDM propone que el profesor debe ser *competente* para abordar los problemas didácticos básicos presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Así se amplía el modelo CDM, incorporando la noción de *competencia de análisis e intervención didáctica* (Godino, Giacomone, et al., 2017) al conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas, cuyo núcleo fundamental (Breda et al., 2017, p. 1897) consiste en: “diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora”.

Para hacer operativa esta noción de competencia, en el modelo CCDM, se identifican cinco subcompetencias asociadas a las cinco herramientas conceptuales y metodológicas del EOS (sistema de prácticas, configuración ontosemiótica, configuración didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica):

- *competencia de análisis de significados globales*: basada en la identificación de las situaciones-problemas y las prácticas operativas, discursivas y normativas que intervienen en su resolución.
- *competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas*: identificación de la trama de objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas necesarias para la resolución de las situaciones-problemas. Dicho reconocimiento permite "prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio" (Godino, Giacomone et al., 2017, p. 94).
- *competencia de gestión de configuraciones y trayectorias didáctica*: identificación de la secuencia de patrones de interacción entre profesor, estudiante, contenido y recursos así como de los diversos tipos de configuraciones didácticas que se pueden implementar y sus efectos sobre el aprendizaje de los estudiantes.
- *competencia de análisis normativo*: el profesor debe reconocer y comprender la trama de normas y meta-normas que condicionan y sustentan el proceso instruccional, identificando aquellas susceptibles de cambiarse para optimizar el aprendizaje matemático.
- *competencia de análisis de la idoneidad didáctica*: valoración del grado de adecuación del proceso de enseñanza-aprendizaje e identificación y diseño de potenciales mejoras.

La Figura 2.5 detalla las cinco subcompetencias que forman parte de la competencia general de análisis e intervención didáctica.

Figura 2.5 Competencia de análisis e intervención didáctica
(Godino, Giacomone et al., 2017, p. 103)

2. Razonamiento algebraico elemental y niveles de algebrización

El interés creciente en la comunidad de investigadores en educación matemática por la posibilidad de potenciar formas de razonamiento algebraico en los primeros años de escolaridad, requiere del desarrollo de una perspectiva más amplia sobre la naturaleza del álgebra escolar y del pensamiento algebraico en edades tempranas. Desde el EOS se entiende el Razonamiento Algebraico Elemental como el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la Educación Primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos. Se consideran como tipos de objetos algebraicos los siguientes (Godino, Aké et al., 2014):

- *Relaciones binarias* —de equivalencia o de orden— y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o anti-simétrica). Estas relaciones son usadas para definir nuevos conceptos matemáticos.
- *Operaciones y sus propiedades*, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos. El denominado cálculo algebraico se caracteriza por la aplicación de propiedades tales como: asociativa, conmutativa, distributiva, existencia de elemento neutro y de un inverso. Dado que pueden intervenir objetos como ecuación, inecuación e incógnita, estarán involucrados procedimientos tales como: eliminación, trasposición de términos, factorización, desarrollo de términos, entre otros.

- *Funciones.* Es necesario considerar los distintos tipos de objetos involucrados: funciones; variables, fórmulas, parámetros, etc., así como el álgebra asociada a ellos, es decir, las operaciones y sus propiedades. Por otro lado, es preciso contemplar las distintas representaciones de una función: tabular, gráfica, como fórmula analítica.
- *Estructuras, sus tipos y propiedades* (semigrupo, monoide, semimódulo, grupo, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc.) características del álgebra superior o abstracta. Si bien el estudio de estas estructuras algebraicas corresponde a niveles educativos superiores, es posible encontrar en libros de primaria contenidos que corresponden a un primer contacto con las propiedades algebraicas que caracterizan al semianillo $(N,+,\times)$ de los números naturales.

Como se indica en Godino, Aké et al. (2014), en el caso de las prácticas algebraicas los procesos de *particularización – generalización* tienen una importancia especial, dado el papel de la generalización como uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico (Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Cooper y Warren, 2008). Como resultado de un proceso de generalización obtenemos un tipo de objeto matemático que en el EOS se denomina intensivo (la regla que genera la clase). Mediante el proceso inverso de particularización se obtiene un objeto extensivo, esto es, un objeto particular. Una colección finita simplemente enumerada no se considera como un intensivo hasta el momento en que el sujeto muestra el criterio o regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto. En ese momento, el conjunto pasa a ser una entidad unitaria emergente del sistema. Por tanto, además de la generalización que da lugar al conjunto, ocurre un proceso de *unitarización.*

Por otra parte, la nueva entidad unitaria tiene que ser hecha ostensiva o materializada mediante un nombre, icono, gesto o un símbolo, a fin de que pueda participar de otras prácticas, procesos y operaciones. El objeto ostensivo que materializa al objeto unitario emergente de la generalización es otro objeto que refiere a la nueva entidad intensiva, por lo que tiene lugar un proceso de *representación* que acompaña a la generalización y materialización. Finalmente, el símbolo se desprende de los referentes a los cuales representa/sustituye para convertirse en objeto sobre el cual se realizan acciones (proceso de *reificación*). Estos símbolos-objetos forman nuevos conjuntos sobre los cuales se definen operaciones, propiedades y estructuras, esto es, sobre los cuales se opera de manera sintáctica, analítica o formal. (Godino, Aké et al. 2014, p. 206).

El carácter algebraico de una práctica matemática está esencialmente ligado al reconocimiento por el sujeto que realiza la actividad de la regla que conforma el objeto intensivo (identificación o inferencia de la generalidad), la consideración de la generalidad como una nueva entidad unitaria (unitarización) y su materialización mediante cualquier registro semiótico para su posterior tratamiento analítico.

En Godino, Aké et al. (2014) se propone un modelo de razonamiento algebraico para la Educación Primaria basado en la distinción de tres niveles de algebrización, estableciendo criterios que permiten identificar la actividad matemática puramente aritmética (nivel 0 de algebrización) y distinguirla de progresivos niveles de algebrización. En consonancia con las propuestas de los autores que investigan en el campo del algebra temprana se distinguen dos niveles primarios de razonamiento proto-algebraico para diferenciarlos de otras formas estables o consolidadas de razonamiento algebraico. La idea clave es "hacer explícita la generalidad", en el campo de las relaciones (equivalencia y orden), estructuras, el estudio de las funciones y la modelización de situaciones matemáticas o extra-matemáticas, al tiempo que se opera o calcula con dicha generalidad. Con esta finalidad, los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en el tipo de objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática, de acuerdo con el marco del EOS: tipos de representaciones usadas, los procesos de generalización implicados y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente:

- *Nivel 0*. Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.
- *Nivel 1*. Se usan objetos intensivos de segundo grado de generalidad, propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.
- *Nivel 2*. Se usan representaciones simbólico – literales para referir a los objetos intensivos reconocidos, los cuales están ligados a la información espacial, temporal y contextual; se resuelven ecuaciones de la forma Ax + B =C (A, B, C $\in \mathbb{R}$).

- *Nivel 3.* Los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información contextual. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables; se resuelven ecuaciones de la forma Ax + B =Cx+D (A, B, C, D ϵ $\mathbb{R}$).

Considerando que los números naturales son también objetos intensivos (entidades generales, abstractas) que emergen de colecciones de objetos perceptibles y de las acciones que se realizan con ellos, es necesario atribuirles un primer grado de generalidad o intensión. En el nivel 0 de algebrización no se puede decir que no intervengan objetos intensivos, sino que a tales objetos corresponde un primer grado de intensión. Por ello, la atribución de un carácter algebraico a una práctica matemática supone la intervención de intensivos al menos de un segundo grado de generalización, es decir, clases de intensivos de grado 1. Los niveles 1 y 2 se consideran como proto-algebraicos para distinguirlos del nivel 3, cuyos rasgos indican una actividad algebraica consolidada, mientras que el nivel 0 indica ausencia de actividad algebraica.

Los niveles de algebrización no se asignan a las propias tareas, que se pueden resolver de distintas maneras, pudiendo poner en juego una actividad algebraica diferente, ni a los individuos, que ante distintas situaciones pueden desarrollar soluciones que involucren objetos o procesos correspondientes a niveles de algebrización distintos[1]. Vistos como categorías de formas de razonamiento algebraico elemental, los niveles de algebrización propuestos por Godino, Aké et al. (2014) están relacionados con los dos aspectos que Kaput (2008) identifica como característicos del razonamiento algebraico: la simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones (niveles proto-algebraicos); el razonamiento guiado sintácticamente y las acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales (nivel algebraico consolidado).

Los niveles de algebrización también guardan conexión con las características principales del pensamiento algebraico que reconoce Radford (2011a): *indeterminación*, *analiticidad* y *designación simbólica*. Se pueden interpretar en términos de las "capas de generalidad" que describe Radford: "Las capas de generalidad se distinguen en

[1] La teoría de niveles de algebrización desarrollada por Godino y cols (Godino, Aké, et al., 2014) no se presenta como una "teoría de niveles de desarrollo cognitivo" de los sujetos, sino que tiene un carácter local, al referirse a la actividad matemática realizada ante una tarea específica. Esto no quiere decir que no sea posible e interesante completar dicha teoría con nuevos criterios e instrumentos para asignar a los sujetos un nivel de desarrollo cognitivo en el dominio del álgebra.

términos de las indicaciones a que recurren los estudiantes para pensar algebraicamente" (Radford, 2011a, p. 311). En este sentido, algunas características de la generalización factual y contextual que describe Radford se concretan en los niveles proto-algebraicos, mientras que la generalización simbólica es propia de un nivel consolidado de algebrización.

El requerimiento del uso de lenguaje simbólico-literal para asignar un nivel propiamente algebraico (nivel 3) a una práctica matemática, y que se opere de manera analítica/sintáctica con dicho lenguaje, concuerda con las posiciones de otros autores interesados por definir "lo algebraico", como, por ejemplo, Puig y Rojano (2004, p. 198), quienes incluyen entre otras las siguientes características:

— El uso de un sistema de signos para resolver problemas que permita expresar el contenido del enunciado del problema relevante para su solución (su "estructura"), separada de lo que no es relevante.
— La ausencia de compromiso ontológico de los sistemas de signos, que les permitan representar a cualquier tipo de objeto matemático.
— El carácter analítico del uso de los sistemas de signos para reducir el enunciado del problema a una forma canónica.

Asimismo, operar con la incógnita como si fuese conocida, representada en lenguaje simbólico literal, marca diferencias distintivas entre el razonamiento aritmético y el propiamente algebraico. "Este tipo de insuficiencia operacional en lo que está representado en el estadio pre-simbólico del álgebra sugiere la presencia de un punto de corte o cambio entre operar sobre la incógnita y no operar sobre ella, aquí al nivel del pensamiento individual" (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 93).

En Godino, et al. (2015) se amplía el modelo anterior mediante la inclusión de otros tres niveles más avanzados de razonamiento algebraico que permiten analizar la actividad matemática en educación secundaria. Estos niveles están basados en: a) el uso y tratamiento de parámetros para representar familias de ecuaciones y funciones; b) el estudio de las estructuras algebraicas en sí mismas, sus definiciones y propiedades.

- *Nivel 4*. El uso de parámetros como registro numérico (placeholder) y para expresar familias de ecuaciones y funciones es indicativo de un cuarto nivel de algebrización. Se trata de un primer encuentro con parámetros y coeficientes variables que implica discriminación del dominio y rango de la función paramétrica, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica.

- *Nivel 5*. La realización de cálculos o tratamientos conjuntos con parámetros y variables determina el quinto nivel de algebrización. Las operaciones con parámetros, y el establecimiento de relaciones entre ellos, conllevan una complejidad semiótica de mayor nivel dado que los objetos intervinientes y emergentes de estos sistemas de prácticas ponen en juego a los objetos algebraicos del nivel anterior (familia de ecuaciones, familia de funciones).
- *Nivel 6.* El estudio de estructuras algebraicas específicas lleva a reconocer un sexto nivel de algebrización de la actividad matemática. La introducción de algunas estructuras algebraicas y el estudio del álgebra de funciones son temas que se inician en bachillerato, poniendo en juego objetos y procesos algebraicos de mayor grado de generalidad que los considerados en el quinto nivel.

Como señalan Godino et al. (2015, p.137) el reconocimiento de los niveles de algebrización de la actividad matemática puede ayudar a tomar conciencia de discontinuidades en la secuencia de configuraciones que componen las trayectorias epistémicas de los correspondientes procesos de estudio matemático referidas al uso de distintos registros de representación semiótica, su tratamiento y conversión, así como a la intervención y puesta en relación de objetos conceptuales, proposicionales, procedimentales y argumentativos de mayor grado de generalidad. La identificación de los objetos, procesos y significados propios de los distintos niveles de algebrización puede permitir el diseño de prácticas operativas, discursivas y regulativas que faciliten la progresión del aprendizaje.

3. Hacia un significado global de la proporcionalidad

De acuerdo con el marco teórico del EOS, la reconstrucción del significado de referencia global de un objeto matemático, en nuestro caso la proporcionalidad, debe tener en cuenta los conocimientos sobre las diferentes dimensiones o facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Desde la perspectiva epistémica, esto es, del conocimiento matemático institucionalizado, la proporcionalidad ha sido estudiada esencialmente desde tres puntos de vista: el aritmético, centrado en la noción de proporción, el algebraico, centrado en la noción de función y el geométrico, focalizado en la noción de semejanza. Desde el *enfoque aritmético* se distinguen esencialmente dos categorías de problemas:

1. *Problemas de comparación*. En un problema de este tipo, se dan cuatro valores, relacionados de manera multiplicativa dos a dos, formando dos razones. El procedimiento de resolución es totalmente aritmético: la proporción es una relación de igualdad entre dos razones, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde a, b, c y d son números enteros cualesquiera, y las razones a/b y c/d son relaciones multiplicativas entre los números a, b y c, d, respectivamente.
2. *Problemas de valor faltante*. En un problema de valor faltante, la proporción es una relación de igualdad entre dos razones, en la que uno de los términos es un valor desconocido (valor faltante). Por ejemplo, $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, donde a, b y c son números enteros conocidos y x es el valor que se pretende determinar.

Desde el *enfoque funcional*, se asume que "el razonamiento proporcional supone un tipo de razonamiento en un sistema de dos variables entre las que existe una relación funcional lineal que permite obtener conclusiones sobre una situación o fenómeno que puede ser caracterizado por una razón constante" (Karplus, Pulos y Stage, 1983, p. 192). El modelo matemático que responde a esta situación es una función $y = kx$, donde k es la razón constante unitaria o constante de proporcionalidad. En el mismo trabajo, Karplus et al. (1983, p. 219) presentan un enfoque que pretende integrar ambas perspectivas (aritmético-funcional) proponiendo que el razonamiento proporcional puede conceptualizarse por medio de los siguientes pasos:

1. identificación de dos variables extensivas que se relacionan,
2. reconocimiento de la tasa o variable intensiva cuya constancia determina la función lineal, y
3. la aplicación de los datos y relaciones dados para encontrar

   (i) un valor adicional de una variable extensiva (problemas de valor faltante) o

(ii) comparación de dos valores de la variable intensiva obtenida a partir de los datos (problema de comparación)

Lesh, Post y Behr (1988) entienden el razonamiento proporcional como una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariación y de múltiples comparaciones, la habilidad para almacenar y procesar mentalmente varias piezas de información, así como también, la inferencia y predicción en situaciones de razonamientos tanto cualitativos como cuantitativos (p. 93).

Desde una perspectiva psicológica-cognitiva, Piaget considera que el razonamiento proporcional se adquiere en el estadio de las operaciones formales y constituye uno de los ocho esquemas que caracterizan el nivel de desarrollo formal de la persona (Inhelder y Piaget, 1958). Según Inheler y Piaget (1958), el razonamiento proporcional es una relación de segundo orden que implica una relación de equivalencia entre dos razones. Requiere del uso de un razonamiento hipotético deductivo que permite al sujeto utilizar una relación matemática (razón) y a partir de ésta deducir una segunda relación también matemática (proporción).

Diversos trabajos de investigación (Fernández y Linares, 2011; Fernández y Llinares, 2012; Sánchez, 2013; Silvestre y Ponte, 2011) analizan las características del desarrollo del razonamiento proporcional desde la educación primaria hasta la educación secundaria, mostrando las dificultades que encuentran los estudiantes de distintos niveles educativos al afrontar situaciones de proporcionalidad. Los estudiantes usan una gran variedad de estrategias diferentes para resolver problemas de proporcionalidad: *construcción progresiva, razón unitaria, factor de cambio, multiplicación cruzada* (Cramer y Post, 1993; Lamon, 2007; Misailidou y Williams, 2002; Tournaire y Pulos, 1985). Las estrategias utilizadas y el rendimiento o éxito en las tareas de proporcionalidad se ven afectadas, entre otros factores por: la relación entre los números involucrados, el uso de razones enteras y no enteras, las unidades de las magnitudes que aparecen en la situación, el formato en que se presenta la tarea, la familiaridad del contenido o la ubicación del valor desconocido en una situación de valor faltante (Karplus, Pulos y Stage, 1983; ; Misalidou y Williams, 2003; Tourniaire y Pulos, 1985; Van Dooren, De Bock, Gillard y Verschaffel, 2009; Fernández y Llinares, 2011). Los problemas que involucran números naturales pequeños, aquellos en los que aparecen relacionados los primeros o segundos términos de una razón y en los que existe una relación de divisibilidad entre sus términos, resultan más fáciles para los alumnos. Así, Tourniaire y Pulos (1985) sugieren que es más sencillo visualizar cantidades discretas que continuas y, por tanto, los estudiantes desarrollarán mejores tareas de proporcionalidad que involucren cantidades discretas que si éstas son continuas.

En la estrategia de *construcción progresiva*, el alumno establece una relación en una razón y la extiende aditivamente a una segunda razón. En la estrategia de *razón unitaria* para obtener el resultado, se calcula lo que corresponde a la unidad de una cantidad (cuánto por uno) y luego se multiplica el resultado por otra cantidad. La estrategia del *factor de cambio* (tantas veces como) implica comparar una cantidad con otra, determinar el factor de cambio existente entre esas dos cantidades y multiplicar el factor por el valor de la cantidad dada (Cramer y Post, 1993).

Desde una perspectiva diferente, Lamon (2007) propuso las estrategias de *unitización* y *normalización* como centrales para el desarrollo del razonamiento proporcional. La unitización es "la fragmentación o reagrupación cognitiva de una cantidad dada en porciones manejables o de tamaño conveniente" (Lamon 2007, p. 644); supone, por tanto, construir una nueva unidad de referencia. La normalización se refiere a la reinterpretación de otra razón en términos de esa nueva unidad de referencia. El proceso de unitización y normalización puede ser un mecanismo destacado por el cual se logre alcanzar un razonamiento proporcional más avanzado.

Como sugiere Lamon (2007), "sin información adicional las estrategias que no tienen en cuenta la razón constante entre los dos espacios de medida no pueden considerarse razonamiento proporcional” (p. 644). Para esta investigadora, “el razonamiento proporcional implica el reconocimiento de la relación constante entre elementos del mismo espacio de medida y el reconocimiento de la relación funcional entre espacios de medida” (p. 638).

Langrall y Swafford (2000) identificaron cuatro niveles diferentes de estrategias de razonamiento proporcional:

- Las estrategias en el nivel 0 no involucran razonamiento proporcional. Estas estrategias se caracterizan por comparaciones aditivas en lugar de multiplicativas o por el uso aleatorio de números u operaciones en los problemas, y no conducen a soluciones correctas.

- Las estrategias de nivel 1 utilizadas por los estudiantes representan un razonamiento informal sobre situaciones proporcionales. En este nivel, los estudiantes pueden pensar productivamente sobre los problemas, recurriendo a estrategias cualitativas apoyadas en imágenes, modelos o materiales manipulativos para ayudarse a resolver problemas proporcionales.

- Los estudiantes en el nivel 2 comienzan a usar el razonamiento cuantitativo sin emplear materiales manipulativos o pueden relacionar sus modelos con cálculos numéricos (estrategias de construcción progresiva que emplean la multiplicación y la división).

- En el nivel de razonamiento proporcional formal, nivel 3, los estudiantes pueden establecer una proporción usando una incógnita y despejar la incógnita usando la regla de productos cruzados o fracciones equivalentes, con plena comprensión de las relaciones estructurales que existen.

De manera similar, Misailidou y Williams (2003) definen una escala de razonamiento proporcional basada en sus hallazgos e investigaciones previas. Los niveles 0 y 4 están implícitamente definidos, con los niveles 1, 2 y 3 entre ellos. En el nivel 1, los estudiantes resuelven con éxito problemas de proporcionalidad dados en contextos que les son familiares o con números asequibles, pero no pueden pasar a contextos no familiares; las soluciones se obtienen fundamentalmente a través de la multiplicación escalar (por 2, 3 o mitad). En el nivel 2, los estudiantes pueden tener éxito en problemas con contextos familiares donde las respuestas se pueden encontrar mediante la simple multiplicación o división en mitades empleando una relación escalar o funcional. Los estudiantes en el nivel 3 pueden resolver problemas donde la estructura numérica es más desafiante (necesitan trabajar en relaciones escalares o funcionales) y el contexto no es tan familiar.

Los niveles de razonamiento proporcional de los alumnos propuestos por autores como Langrall y Swafford (2000) o Misailidou y Williams (2003) se definen en términos de las tareas en las que los estudiantes pueden o no tener éxito. Por otro lado, la aplicación de los niveles de algebrización al estudio del razonamiento proporcional no se refiere a etapas de desarrollo cognitivo de los individuos (entendidos como niveles de comprensión de razones y proporciones), sino que identifica y asigna características algebraicas a la actividad matemática. En tanto que el significado (institucional o personal) de un objeto matemático se identifica con el sistema de prácticas operativas y discursivas asociadas con el campo de problemas del cual emerge el objeto, la aplicación de los niveles de algebrización a los sistemas de prácticas vinculados a tareas de proporcionalidad, proporciona criterios para distinguir categorías de significados en la construcción progresiva del razonamiento proporcional[2]. Así, en Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos, Giacomone (2017) distinguimos tres tipos de significados del objeto proporcionalidad: *aritmético*, *proto-algebraico* y *algebraico-funcional.* Estos significados, se complementan con un significado informal-cualitativo, centrado en la comparación multiplicativa de las cantidades que intervienen en los problemas y en la comparación perceptiva, por ejemplo, de la semejanza de formas geométricas.

No obstante, algunas de las estrategias descritas como habituales en los niveles de razonamiento proporcional de los alumnos estudiados por autores como Langrall y Swafford (2000) o Misailidou y Williams (2003), permiten establecer relaciones con los niveles de algebrización.

- El *significado aritmético* (nivel 0 de algebrización) se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritmético (multiplicación, división) a valores numéricos particulares. Por ejemplo, las estrategias de duplicación, división en mitades y construcción progresiva estarían vinculadas al nivel 0.

- El *significado proto-algebraico* se centra en la noción de proporción, de modo que el reconocimiento del valor unitario en un procedimiento de reducción unitaria y el uso de representaciones diagramáticas de soluciones pueden describirse como proto-algebraicos de *nivel 1*. Las estrategias de razón unitaria o factor de cambio mencionadas anteriormente aparecerían con un nivel de

[2] En el marco teórico del EOS se prefiere hablar de razonamiento para describir las prácticas operativas y discursivas que son desarrolladas para resolver una tarea, por un sujeto epistémico o cognitivo. En cualquier caso, en la realización de tales prácticas intervienen objetos no ostensivos (mentales o ideales) reflejando el pensamiento (comprensión) que necesariamente las acompaña.

algebrización 1, mientras que las estrategias de unitización y normalización implican un mayor nivel de algebrización. Por otro lado, la solución de un problema de valor faltante, basado en el uso de razones y proporciones, conlleva el establecimiento de la ecuación proporcional o la regla de tres, y su resolución a través de la multiplicación cruzada. La actividad de algebrización que se realiza en este caso es proto-algebraica de *nivel 2*, ya que la incógnita aparece únicamente en un término de la ecuación que se establece ($Ax = B$). Este correspondería al nivel esperado de algebrización de nivel 3 de Langrall y Swafford: el estudiante establece la proporción usando incógnitas y la resuelve usando la regla del producto cruzado o fracciones equivalentes, comprende completamente las relaciones de invariancia y covarianza (Langrall y Swafford, 2000).

– El *significado algebraico-funcional* (nivel 3 de algebrización) se caracteriza por la aplicación de la noción de función lineal y técnicas de resolución basadas en las propiedades de estas funciones ("mostrar razonamiento funcional" según Langrall y Swafford, 2000).

Finalmente, desde el punto de vista instruccional, Streefland (1985), propone anticipar una aproximación informal, intuitiva y cualitativa al concepto de razón y proporción previa a su formalización y algoritmización. Otros autores como Behr, Harel, Post y Lesh. (1992); Cramer y Post (1993), Lesh, Post y Behr (1988), Ruiz (2002), Ruiz y Valdemoros (2004) apoyan la propuesta de Streefland (1985) sobre la pertinencia de una secuencia didáctica que permita avanzar desde un conocimiento de naturaleza intuitiva y cualitativa, de estructura aditiva (pre-proporcional), hacia un conocimiento cuantitativo de estructura multiplicativa, haciendo uso de procesos que fomenten la manifestación de estrategias de construcción progresiva que permita encaminar hacia el proceso de consolidación del razonamiento proporcional.

En el capítulo 3 ampliamos el modelo de Godino et al. (2017) conectando los significados aritmético, protoalgebraico y algebraico-funcional con los propios de niveles educativos superiores.

4. Descripción general de la metodología

Dado que un problema central de nuestra investigación será el diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas para desarrollar, por un lado, el razonamiento proporcional en alumnos de educación primaria, y por otro, competencias y conocimientos didáctico-matemáticos en futuros profesores sobre el razonamiento proporcional y su conexión con el razonamiento algebraico, el marco metodológico será la ingeniería didáctica, entendida en el sentido generalizado propuesto por Godino, Rivas, et al. (2014). Esta interpretación, amplía su concepción tradicional (Artigue, 1989) en la dirección de las investigaciones basadas en el diseño (Cobb, Confrey, di Sessa, Lehrer, y Schauble, 2003), distinguiendo cuatro fases en la investigación:

1. *Estudio preliminar* de las dimensiones:

- *Epistémico-ecológica*. Se describen los significados institucionales interpretados en términos de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos matemáticos, así como el sistema de relaciones y restricciones institucionales que condicionan el proceso de estudio.
- *Cognitivo-afectiva*. Se analizan los significados personales de los estudiantes en términos de sistemas de prácticas personales y configuraciones cognitivas de objetos y procesos matemáticos y se analiza la sensibilidad del proceso a los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de los alumnos con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
- *Interaccional-mediacional.* Se describen los patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes, así como los recursos técnicos previstos o utilizados, valorando el tiempo destinado a las distintas acciones y procesos.

2. *Diseño de la trayectoria didáctica,* selección de los problemas, secuenciación y análisis a priori de las mismas, con indicación de los comportamientos esperados de los estudiantes. Se valora la representatividad de las situaciones-problema seleccionadas, en relación al significado de referencia global del contenido matemático, de las prácticas que se espera generar y de los objetos matemáticos que deben intervenir.

3. *Implementación de la trayectoria didáctica*. Supone la observación de las interacciones entre personas y recursos y evaluación de los aprendizajes logrados. Este análisis se realiza usando las nociones de configuración didáctica y hecho didáctico significativo, para describir, sintetizar e interpretar la trayectoria didáctica implementada.

4. *Evaluación o análisis retrospectivo*, que se sigue del contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación. Conlleva la reflexión en relación a las normas que condicionan el proceso instruccional y sobre el grado de idoneidad didáctica lograda en sus distintas dimensiones.

La ingeniería didáctica en el sentido generalizado que se propone desde el EOS, queda articulada con las investigaciones de diseño instruccional (DBRC, 2003; Kelly, Lesh y Baek, 2008), en tanto se persigue que el diseño instruccional y la investigación sean interdependientes. Para la investigación basada en el diseño instruccional (DBRC, 2003):

- El desarrollo y la investigación tienen lugar mediante ciclos continuos de diseño, implementación y análisis.
- Los fines centrales del diseño de entornos de aprendizaje y el desarrollo de teorías del aprendizaje están entrelazados, de manera que la investigación debe llevar a teorías que puedan ser compartidas con los profesores y diseñadores educativos para comunicarles implicaciones relevantes.
- La investigación debe explicar cómo funcionan los diseños en entornos reales informando sobre las interacciones que refinen nuestra comprensión de las cuestiones de aprendizaje implicadas.

–

PRIMERA PARTE

COMPLEJIDAD ONTOSEMIÓTICA DEL OBJETO PROPORCIONALIDAD

CAPÍTULO 3.
MODELO ONTOSEMIÓTICO DE REFERENCIA DE LA PROPORCIONALIDAD

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020) Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria, *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, en prensa.

1. Introducción

El estudio de las razones, proporciones y proporcionalidad es un tema importante en el currículo escolar que se inicia en educación primaria y continúa en secundaria, siendo transversal a diferentes materias (Wilhelmi, 2017). Esta presencia longitudinal y transversal de la proporcionalidad justifica la gran cantidad de investigaciones que se han realizado sobre los problemas que plantea su enseñanza y aprendizaje (Cramer y Post, 1993; Lamon, 2007, 2012; Obando, Vasco y Arboleda, 2014; Tourniaire y Pulos, 1985).

Como hemos mencionado, son múltiples las investigaciones desde el enfoque cognitivo de investigación en didáctica de la matemática, que han abordado el problema de la enseñanza y del aprendizaje de la proporcionalidad, analizando las dificultades que encuentran los estudiantes de distintos niveles educativos al afrontar situaciones de proporcionalidad (Tournaire y Pulos, 1985, Fernández y Llinares, 2012; Silvestre y Ponte, 2011). Para superar estar dificultades, desde el punto de vista instruccional, se propone anticipar una aproximación informal al concepto de razón y proporción previa a su formalización y algoritmización (Streefland, 1985; Behr, et al., 1992; Cramer y Post, 1993, Ruiz y Valdemoros, 2004).

Desde la perspectiva epistémica, el enfoque aritmético del estudio de la proporcionalidad es el que predomina en la mayoría de propuestas curriculares e investigaciones (Ben-Chaim, et al., 2012; Lamon, 2007). Se suele asumir que una razón es una comparación multiplicativa entre cantidades de una misma magnitud o entre dos magnitudes diferentes, que la proporción es una igualdad de dos razones y la proporcionalidad de magnitudes es una función lineal entre las cantidades de dichas magnitudes. Se acepta que estas definiciones captan la esencia de los conceptos y, en consecuencia, el problema de su enseñanza consiste en hacer que los estudiantes comprendan estas conceptualizaciones y sus aplicaciones.

En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, Chevallard, 1992), razón, proporción y proporcionalidad se comprenden en términos de organizaciones matemáticas complejas determinadas por tipos de situaciones, prácticas matemáticas, técnicas, tecnologías y teorías, estructuradas alrededor de praxeologías institucionales (Bolea, Bosch y Gascón, 2001; Bosch, 1994; García, 2005). García (2005) asume el *modelo epistemológico* sobre la proporcionalidad iniciado en los trabajos de Bolea et al. (2001) y Bolea (2002) a partir del hipotético proceso de algebrización de los sistemas proporcionales, ampliando el campo de estudio a un conjunto de relaciones entre magnitudes, entre las que la relación de proporcionalidad es una relación más.

Por su parte Comin (2000) propone un modelo en el que organiza los conocimientos de la proporcionalidad en tres marcos: el de las magnitudes, el de las medidas de magnitud y el de las variables numéricas, analizando desde el punto de vista epistémico, los objetos que constituyen el entorno de la proporcionalidad (magnitudes, cantidades, razones, proporciones). Así, asume la función lineal como una abstracción que resume y refleja la relación de proporcionalidad entre magnitudes, mostrando la estrecha relación entre las nociones de variable, función y número.

Aunque la perspectiva epistémica sobre la proporcionalidad ofrecida en los trabajos de Bosch (1994), Comin (2000) y García (2005) amplía la visión aritmética usualmente implementada en los currículos, diversas teorías didácticas están proponiendo una visión más compleja sobre los significados de cualquier objeto matemático, esto es, una visión epistemológica de las matemáticas más rica (Steinbring, 1997; Gómez, 2007). Tal es el caso del EOS, que entiende las matemáticas como una actividad de las personas implicadas en la solución de cierta clase de situaciones - problemas, e interpreta el significado institucional y personal de los objetos matemáticos en términos de los sistemas de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego en la solución de dichas situaciones.

En este capítulo se aborda el problema de caracterizar los diversos significados de la proporcionalidad y su articulación en una trama estructurada en base a los diversos grados de generalidad y formalización que se ponen en juego. Como se indica en Godino, Beltrán-Pellicer, et al. (2017), el *universo de significados* de la proporcionalidad se puede clasificar según distintos criterios, en particular, el contexto o campo de aplicación y el nivel de algebrización de las prácticas matemáticas realizadas. Algunos contextos de aplicación de las nociones de razón y proporción (vida cotidiana, científico-técnico, artístico, geométrico, probabilístico, estadístico, etc.) conllevan la participación de objetos y procesos específicos de dichos campos en las prácticas de resolución de los problemas correspondientes, como revelan las múltiples investigaciones realizadas sobre la naturaleza y desarrollo del razonamiento proporcional (Freudenthal, 1983; Lamon, 2007; Tourniaire y Pulos, 1985). En consecuencia, se pueden delimitar variantes de significados propios de algunos campos de aplicación de la proporcionalidad (geométrico, probabilístico, etc.). Proponemos un modelo para categorizar los significados de la proporcionalidad según el nivel de algebrización de las prácticas matemáticas, esto es, según el grado de generalidad de los objetos implicados, de los lenguajes usados y del cálculo analítico que se realiza con dichos objetos.

2. Problema específico de investigación y método

El análisis global de los procesos de instrucción matemática no se puede realizar de forma descontextualizada, puesto que es consustancial a la institución y al momento temporal (Wilhelmi, 2017). Es necesario describir un significado global u holosignificado (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007) que oriente el desarrollo del currículo y articule significados parciales adquiridos. En consecuencia, las cuestiones que abordamos en este capítulo sobre la proporcionalidad son las siguientes:

1) *¿Qué significados se pueden identificar para la proporcionalidad?*
2) *¿Cómo se distinguen tales significados según su grado de generalidad y formalización?*
3) *¿Cómo se relacionan y articulan entre sí los diversos significados?*
4) *¿En qué etapa educativa y de qué forma se puede abordar su estudio?*

Para responder a estas cuestiones es necesario adoptar una teoría sobre el significado de los objetos matemáticos que asuma como postulado su relatividad institucional y contextual y que permita, además, indagar las características de los mismos. En nuestro caso consideramos que la noción de significado institucional que propone el EOS, entendido en términos pragmáticos como "sistemas de prácticas operativas y discursivas" permite abordar las cuestiones mencionadas de manera eficaz.

El estudio de los significados de la proporcionalidad que presentamos, amplía el realizado en Godino, et al. (2017) y complementa otros trabajos realizados en el marco del EOS sobre caracterización de significados institucionales (Batanero, 2005; Wilhelmi et al., 2007; Godino, et. al, 2011; Pino-Fan, Godino y Font, 2011), al proponer una articulación entre los diversos significados teniendo en cuenta el nivel de algebrización de las prácticas matemáticas puestas en juego.

Metodología

En Godino (2002) se desarrolla una técnica para el análisis ontosemiótico de los significados puestos en juego en un proceso de instrucción implementado, o planificado en una lección de un libro de texto. Se procede a identificar la trama de objetos y funciones semióticas que se establecen en las prácticas operativas y discursivas elementales correspondientes. En este caso se trata de un análisis con un fuerte carácter microscópico.

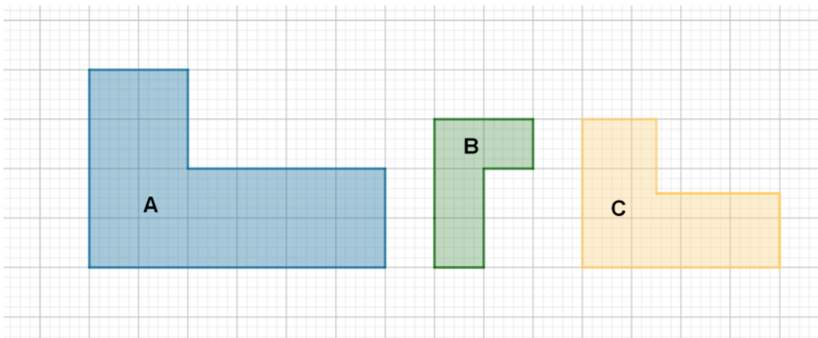
Para la caracterización de los significados institucionales que sirvan de referencia global para el diseño curricular es necesario adoptar un punto de vista macroscópico, teniendo en cuenta las investigaciones sobre el tema. En este análisis ontosemiótico se comienza con la selección de las situaciones-problemas y distintas maneras de abordar su resolución, en las cuales interviene el objeto bajo estudio de manera crítica. En las prácticas operativas y discursivas que se deben realizar para resolver tales problemas intervienen, además, otros objetos lingüísticos, conceptuales, procedimentales, proposicionales y argumentativos que ponen en juego diferentes grados de generalidad y formalización, permitiendo definir significados parciales del objeto y establecer relaciones jerárquicas entre ellos en función de su complejidad e interdependencia.

3. Análisis y resultados: Significados parciales de la proporcionalidad

En Godino, Beltrán-Pellicer et al. (2017) se distinguen tres tipos de significados de la proporcionalidad: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional, a partir de la aplicación de los niveles de algebrización a los sistemas de prácticas ligados a tareas relativas a proporcionalidad. En esta sección ampliamos dicho modelo conectando los niveles descritos con los propios de niveles educativos superiores. Para cada significado proponemos situaciones-problemas características e identificamos los objetos implicados en la resolución.

3.1. Significado intuitivo-cualitativo

Un razonamiento de tipo intuitivo, basado en la comparación perceptiva para determinar la semejanza de figuras o formas planas, supone un primer acercamiento a las relaciones de proporcionalidad en el contexto geométrico (Fiol y Fortuny, 1990). Un ejemplo de tarea (figura 3.1) conduce a los estudiantes a reconocer perceptivamente las relaciones proporcionales entre formas de figuras dibujadas a escala sin considerar las relaciones de tipo cuantitativo entre las razones de segmentos (Ruiz y Lupiáñez, 2009).



¿Cuáles de las siguientes figuras son semejantes?

Figura 3.1. Ejemplo de tarea de semejanza de figuras

Por otro lado, argumentos de tipo cualitativo, que recaen en la comparación o análisis de las relaciones multiplicativas entre números particulares son el primer paso para distinguir si estamos ante una situación de proporcionalidad y si ésta es directa o inversa. Los tipos de problema que se pueden abordar con razonamiento pre-proporcional e informal son los que involucran comparación de razones (Behr et al., 1992). Este tipo de significado es el que se moviliza en un problema como el siguiente (adaptado de Godino, Beltrán-Pellicer et al., 2017, p. 5):

> *Si Juan mezcla menos concentrado de limón con más azúcar que la que la que prepara su amiga María, su limonada tendrá un gusto: (a) Más fuerte; (b) Menos fuerte; (c) Exactamente el mismo gusto.*

El carácter informal del argumento refiere a admitir que existe una relación entre las magnitudes consideradas de la forma "más concentrado de limón, más azúcar". El significado intuitivo-cualitativo se apoya sobre el conocimiento y sentido de las operaciones y la experiencia del individuo, suponiendo un conocimiento de la proporcionalidad no institucionalizado como saber que le lleve a argumentar que menos concentrado de limón con más cantidad de azúcar proporcionará un saber menos fuerte.

3.2 Significado aritmético

El significado aritmético se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritméticos (multiplicación, división). Este tipo de significado aparece en el siguiente problema adaptado de Lamon (2007, p. 637).

> Problema 1. *Juan prepara una limonada utilizando 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de jugo de limón. Mientras María utiliza 5 cucharadas de azúcar y 20 cucharadas de concentrado de jugo de limón. ¿Cuál de las dos limonadas es más dulce, la de Juan o la de María? ¿O tienen el mismo gusto?*

En una solución de tipo aritmético a esta tarea se procede como sigue:

> Solución (problema 1, nivel 0 de algebrización). Dado que tanto Juan como María usan el cuádruple de cucharadas de concentrado de jugo de limón que de cucharadas de azúcar, las dos limonadas tienen el mismo gusto.

Esta justificación se apoya en el conocimiento de las operaciones aritméticas (multiplicación y división de cantidades de magnitud) y se admite que ambas limonadas tendrán el mismo sabor si se mantiene la razón entre las cucharadas de azúcar y las cucharadas de jugo de limón. En la solución sólo intervienen valores numéricos de medidas y sus unidades, y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores; por tanto, según Godino et al. (2014), la actividad matemática realizada se considera de nivel 0 de algebrización, en tanto que no intervienen objetos y procesos algebraicos.

3.3 Del significado aritmético al protoalgebraico: Reducción a la unidad

Una posible solución al problema anterior de la limonada podría haber pasado por determinar el número de cucharadas de concentrado de jugo de limón que usan tanto Juan como María por cada cucharada de azúcar:

> Solución (problema 1, nivel 1 de algebrización). Como Juan emplea 12:3=4 cucharadas de concentrado por cada cucharada de azúcar y María utiliza 20:5=4 cucharadas de concentrado por cada cucharada de azúcar, resulta que, la razón de concentrado de limón por cucharada de azúcar es la misma en ambos casos, de modo que las dos limonadas estarán igual de dulce.

En una solución como la anterior, intervienen los siguientes objetos:

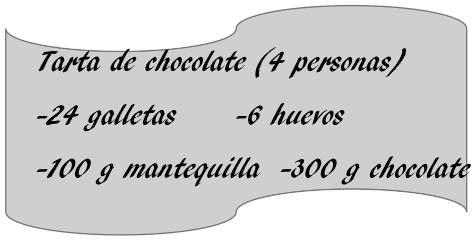
- *Conceptos*: cantidades de magnitud, razón unitaria, igualdad de razones.
- *Procedimientos*: reducción a la unidad.
- *Proposiciones*: las razones de concentrado de limón por cucharada de azúcar son iguales.
- *Argumentos*: si las razones unitarias coinciden en ambas limonadas el sabor es el mismo.

En un problema de valor faltante, la técnica de reducción a la unidad consiste en determinar la razón unitaria para luego multiplicar por el factor dado para obtener el resultado solicitado. El reconocimiento del valor unitario supone determinar una regla general compatible con una secuencia finita de cantidades de magnitudes directamente proporcionales, que permita generar los términos de la secuencia. Teniendo en cuenta los criterios de Godino, Aké et al. (2014), la actividad matemática se considera proto-algebraica de nivel 1.

Pensemos en la siguiente situación-problema propia de educación primaria:

Problema 2. *Hoy es el cumpleaños de Lucía y quiere hacer una tarta de chocolate. En la receta que ha encontrado aparecen los ingredientes para 4 personas.*

a) *¿Qué cantidad de galletas necesita para 6 personas? ¿Podrías determinar la cantidad de galletas para un número dado de comensales?*



b)¿ Qué cantidad de huevos necesita para 6 personas?

Figura 3.2. Ejemplo de problema con significado proto-algebraico

Se asume que para elaborar una tarta con la misma receta, la cantidad de ingredientes debe ser proporcional a la cantidad de personas. Si el número de comensales aumenta, aumentará la cantidad de cada ingrediente, y si se duplica, triplica, etc., el número de comensales, se duplicará, triplicará, etc., la cantidad de cada ingrediente. Así:

Comensales	Galletas
$4 \rightarrow 24$	
$1 \rightarrow 24/4=6$	
$6 \rightarrow 6\times6=36$	
$n \rightarrow 6\times n$	

Solución (problema 2*a*, nivel 1 de algebrización). Si para 4 comensales se necesitan 24 galletas, por cada comensal, se necesitan 24:4=6 galletas. Para 6 comensales, necesitaremos 6×6=36 galletas, y para un número dado, *n*, de comensales se debe multiplicar *n* por 6 (valor unitario) para determinar la cantidad necesaria de galletas.

El método de reducción a la unidad puede ser inadecuado en situaciones en las cuales las unidades no son fraccionables, llevando a un discurso poco claro o absurdo (Bosch, 1994; Comin, 2000). En este sentido, determinar la cantidad de huevos necesarios para preparar la tarta para 6 comensales, por medio de reducción a la unidad puede ser confuso, dado que para un comensal sería preciso 6/4=1,5 huevos. Alternativamente, se puede seguir un procedimiento de tipo aritmético:

Comensales	Huevos
$4 \rightarrow 6$	
$2 \rightarrow 6:2=3$	
$4+2=6 \rightarrow 6+3=9$	

Solución (problema 2b, nivel 0 de algebrización). Si para 4 comensales necesito 6 huevos, para la mitad de comensales, es decir, para 2 comensales, necesitaré la mitad de huevos, esto es 3, y para 4+2=6 comensales, precisaré, 6+3=9 huevos.

3.4 Significado proto-algebraico: Proporciones, ecuación proporcional y secuencias de números proporcionales

Si dos magnitudes A y B son directamente proporcionales, dos pares de valores numéricos de medidas de las magnitudes, determinan fracciones equivalentes. En tal caso, los productos cruzados de numeradores y denominadores serán iguales entre sí.

Cantidades A a c	$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow a \times d = c \times b \Rightarrow d = (c \times b) \div a$
Cantidades B b d	

Una solución basada en la multiplicación en cruz de términos de las fracciones equivalentes determinadas por valores de magnitudes directamente proporcionales supone una actividad matemática de carácter proto-algebraico de nivel 1, en tanto aparecen objetos intensivos de segundo grado de generalidad, propiedades de la estructura algebraica de $\mathbb{N}$ y la igualdad como equivalencia. Tal sería el caso de la siguiente secuencia de prácticas, para determinar el número de galletas y de huevos necesarios para elaborar una tarta para 6 personas:

> Solución (problema 2, nivel 1 de algebrización). Como la cantidad de galletas y de huevos es directamente proporcional a la cantidad de comensales, se tiene que:
>
> Si para 4 comensales son necesarias 24 galletas, para 6 comensales, necesitaremos $(24\times6) \div 4=36$ galletas.
>
> Si para 4 comensales son necesarios 6 huevos, para 6 comensales, necesitaremos $(6\times6) \div 4=9$ huevos.

Los objetos que interviene en esta solución serían los siguientes:

- *Conceptos*: magnitud, cantidad, proporcionalidad directa, fracciones equivalentes.
- *Procedimientos*: aritméticos (multiplicación y división de términos en fracciones equivalentes).
- *Proposiciones*: si dos fracciones son equivalentes el producto cruzado de ambas coincide.
- *Argumentos*: si dos magnitudes son directamente proporcionales, dos pares de valores numéricos de medidas de las magnitudes, determinan fracciones equivalentes.

Ecuación proporcional y regla de tres

El significado proto-algebraico está centrado en la aplicación de las nociones de razón y proporción. Según Freudenthal (1983), una razón es una función de un par ordenado (antecedente y consecuente) de números o de valores de una magnitud. El significado de razón reside en la posibilidad de comparar dos razones, es decir, afirmar con sentido que "*a* es a *c*" (*a:c*) como "*b* es a *d*" (*b:d).* El concepto de proporción se construye entonces sobre el de razón: una proporción es una relación de igualdad entre dos razones. Cuando las razones se expresan como fracciones, la proporción "*a* es a *c* como *b* es a *d*", escrita simbólicamente de la forma *a:c* :: *b:d*, aparece como igualdad de fracciones:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Cualquier cambio de disposición entre los cuatro números que forman una proporción que no modifique los productos cruzados de los numeradores y denominadores entre sí dará lugar a una nueva igualdad de fracciones. Así pues,

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Esto es, la permutación de los extremos o de los medios permite obtener una igualdad de razones externas (sus elementos pertenecen a espacios de medida distintos) a partir de la igualdad de razones internas (antecedente y consecuente comparten el mismo espacio de medida) o inversamente.

En un problema de valor faltante, si a es a c como b es a x, siendo a, b y c, números reales conocidos, y x el valor faltante, se trata de determinar el valor de x. Si las razones se presentan en forma de fracciones, es posible manipular la proporción como la equivalencia de dos fracciones utilizando la propiedad del producto en cruz para resolver la ecuación proporcional:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{x} \Rightarrow ax = bc \Rightarrow x = \frac{bc}{a}.$$

La solución de un problema de valor faltante basada en el uso de proporciones, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación en la que la incógnita está despejada en un miembro de la ecuación que se establece mediante la proporción. Por tanto, según el modelo de Godino, Aké et al. (2014), la actividad de algebrización que se realiza es de nivel 2 (proto-algebraica).

La *regla de tres*, no es más que una variante diagramática de esta técnica que en cierto modo "oculta" la intervención de las razones y la proporción, lo que conlleva un significado "degenerado" de la proporcionalidad aritmética, esto es, un significado reducido a la aplicación de rutinas algorítmicas sin ninguna justificación pertinente. En este caso consiste en la ordenación de los datos, generalmente en forma de representación tabular (también mediante flechas que expresan las razones). Por simple disposición de la tabla se infiere la *ecuación proporcional*, de la que se obtiene la cantidad buscada por manipulación algorítmica.

En el ejemplo anterior, existe una correspondencia de proporcionalidad directa entre las magnitudes “número de personas” y “número de galletas”. Por tanto:

> Solución (problema 2a, nivel 2 de algebrización). La razón de cantidades que se corresponden se mantiene constante, es decir,
>
> *4 personas: 24 galletas :: 6 personas: x galletas,*
>
> donde x representa el valor desconocido de galletas precisas para la receta para 6 personas. Establecida la proporción entre los valores de las magnitudes,
>
> $\frac{4}{24} = \frac{6}{x}$,
>
> y teniendo en cuenta la igualdad del producto en cruz de los términos en una proporción, $4 \times x = 24 \times 6$, de donde finalmente,
>
> $$x = \frac{24 \times 6}{4} = 36$$
>
> Es decir, se precisan 36 galletas para la receta.

En una solución como la anterior, basada en el establecimiento de la ecuación proporcional, intervienen los siguientes objetos de índole algebraica:

- *Conceptos*: razón de cantidades de magnitudes, proporción, incógnita, ecuación.
- *Proposiciones*: las razones de cantidades que se corresponden entre magnitudes proporcionales son iguales.
- *Procedimientos*: despeje de la incógnita en una ecuación del tipo $Ax = B$.
- *Argumentos*: recaen en la relación de proporcionalidad directa y en las propiedades de razones y proporciones.

Secuencias de números proporcionales

Dos secuencias de números, que se corresponden uno a uno son proporcionales si las razones de los números correspondientes son iguales (equivalentemente existe un número real fijo *k*, que permite escribir cada valor de la segunda serie como producto de *k* por los valores de la primera serie). Así pues, si entre dos magnitudes A y B existe una relación de proporcionalidad directa, las secuencias de los valores de las cantidades de ambas magnitudes determinan secuencias de números proporcionales.

Las secuencias de números proporcionales, y su representación mediante las habituales tablas de proporcionalidad, establecen un puente entre el significado aritmético o proto-algebraico centrado en la idea de proporción, y el propiamente algebraico centrado en la función lineal. El uso de tablas de proporcionalidad (tabla 3.1) permite al alumno formular hipótesis y extraer conclusiones sobre los valores, variaciones y relaciones posibles entre los números de la tabla. Por ejemplo, permite reconocer una propiedad fundamental de las proporciones, a saber, que la suma de antecedentes dividida por la suma de los consecuentes de una proporción es igual a cualquiera de las razones de esa proporción, que a menudo se usa en problemas de repartos proporcionales. Así mismo, permite incorporar razones internas y externas, e introducir las propiedades de la función lineal (carácter aditivo y homogéneo) que consideraremos en la siguiente sección.

Tabla 3.1. Tabla de proporcionalidad

Cantidades de magnitud A	a_1	a_2	…	a_i	…	a_j	…	$a_i + a_j$	…	a_k	…	$n\times a_k$	…
Cantidades de magnitud B	b_1	b_2	…	b_i	…	b_j	…	$b_i + b_j$	…	b_k	…	$n\times b_k$	…

3.5 Significado algebraico-funcional: La función lineal

Como afirman Comin (2000) y Bolea, Bosch y Gascón (2001), en el paso del discurso aritmético al discurso algebraico, la relación de proporcionalidad entre magnitudes se convierte en una relación de proporcionalidad entre variables numéricas (desprovistas de unidades y que representan valores de medidas de cantidades de magnitud). Así mismo, la relación de proporcionalidad que se describe en una tabla como la anterior se resume en una fórmula estandarizada $y=kx$, donde k es el valor unitario o constante de proporcionalidad.

El significado propiamente algebraico se caracteriza por la aplicación de la noción de función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dicha función. A través de ella, la proporcionalidad se reconoce como una situación en la que existe una relación funcional multiplicativa constante entre dos magnitudes que covarían.

Una *función lineal* es una función real de variable real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en la que la relación queda definida por $f(x) = kx$, siendo k la constante de proporcionalidad (número real fijo).

Incluimos a continuación las propiedades fundamentales de la función lineal. Estas deben respaldar los argumentos empleados para justificar que una situación-problema dada es de proporcionalidad directa y asegurar la pertinencia de los procedimientos utilizados en la resolución de la misma.

A. Una función lineal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es homogénea, esto es,

$$f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

y aditiva,

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

para cualesquiera, x, x_1, x_2 en el dominio de definición de f y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Estas propiedades caracterizan a una función real de variable real como lineal y establecen las condiciones para definirla en estructuras algebraicas más generales como son las de espacios vectoriales.

B. Para una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son equivalentes las afirmaciones siguientes:
i) f es monótona y aditiva.
ii) f es monótona y $\mathbb{N}$-lineal, esto es, $f(nx) = nf(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo x en el dominio de definición de f.
iii) f es lineal.

Las afirmaciones *i*) y *ii*) se relacionan con las formas intuitivas de enunciar la proporcionalidad: "a más…más" o "a menos…menos" (monotonía), "si una magnitud se duplica, triplica, etc. entonces la magnitud correspondiente también se duplica, triplica, etc. ($\mathbb{N}$-linealidad).

C. *Si una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{N}$-lineal y continua, entonces f es lineal.* La continuidad, al igual que ocurre con la monotonía, son condiciones implícitas de forma habitual en el contexto que se modeliza por medio de la función lineal.

D. *Si $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ es aditiva entonces f es creciente y $f(x) = f(1)x$.*

La solución a un problema basada en el uso de la noción de la función lineal y de las propiedades descritas, supone un nivel 3 de algebrización ya que la representación de la función lineal en lenguaje formal requiere el uso de lenguaje simbólico-literal y que se opere de manera analítica/sintáctica con dicho lenguaje.

Pensemos en la siguiente situación-problema y una posible solución:

> Problema 3. *10 dm^3 de madera de abeto pesan 4,5kg. Determina la expresión analítica de la función que relaciona la masa y el volumen de la madera de abeto. ¿Cuál es la densidad de este material?*
>
> Solución (nivel 3 de algebrización). El peso de distintos trozos de un mismo material es directamente proporcional a su volumen. Es decir, el peso es mayor a medida que es mayor el volumen y el peso de un trozo de volumen igual a la suma de los volúmenes de dos trozos por separado, es igual a la suma de los pesos de dichos trozos menores. Teniendo esto en cuenta, la correspondencia $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que se establece entre el volumen de distintas piezas de madera de abeto y el peso de las mismas es creciente y aditiva. Por tanto, f es lineal. Es decir, $f(x) = kx$, donde $k = f(1)$ es la constante de proporcionalidad y representa la densidad de la madera de abeto (es decir, la masa por unidad de volumen).
>
> Puesto que 10 dm^3 de madera de abeto pesan 4,5kg sabemos que $f(10) = 4{,}5$. Aplicando las propiedades de la función lineal, $10f(1) = 4{,}5$; $f(1) = 4{,}5 \div 10 = 0{,}450$. Por tanto, la función que determina la masa (en kilogramos) de un trozo con un determinado volumen (en dm^3) de madera de abeto es $f(x) = 0{,}450x$ y la densidad de la madera de abeto es 0,450 kg/dm^3, o lo que es lo mismo 450 g/m^3.

Una solución como la anterior, basada en el reconocimiento de las características que definen la función lineal incorpora nuevos objetos que corresponden a un nivel consolidado de algebrización:

- *Conceptos*: correspondencia funcional, variable, dominio e imagen de una aplicación, función lineal, coeficiente de proporcionalidad.
- *Proposiciones*: una función $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ aditiva y creciente es lineal.
- *Procedimientos*: traducción del lenguaje natural al simbólico.
- *Argumentos*: recaen en las propiedades que caracterizan una función lineal y el significado de la constante de proporcionalidad.

Como señala García (2005) la sustitución de la teoría de razones y proporciones por la teoría de funciones reales de variable real, supone la inmersión de la proporcionalidad en el universo de las relaciones funcionales entre magnitudes. Una de estas posibles relaciones es la que García refiere como relación de *variación equitativa.* La relación entre dos magnitudes M y M' es de variación equitativa si a toda progresión aritmética de valores de cantidades de la magnitud M, corresponde una progresión aritmética de valores de cantidades de magnitud M' (García, 2005, p. 203). El modelo funcional de dicha condición de equitatividad es la *función afín*. Desde el punto de vista de la teoría de funciones reales de variable real, la función afín $f(x) = mx + n$, puede obtenerse como una traslación de la función lineal, $g(x) = mx$. En particular, una función lineal $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es un caso de función afín tal que $g(0) = 0$.

3.6 Familias de funciones lineales. Operaciones con funciones lineales

Bajo el modelo matemático $y = k \cdot x$ se pone en juego el conocimiento de la estructura de una familia de funciones, $\{f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f_k(x) = kx; k \in \mathbb{R}\}$, puesto que k interviene como un parámetro, lo que supone un primer contacto con el nivel cuatro de algebrización que definen Godino et al. (2015). El estudio de las operaciones con funciones y de sus propiedades estructurales implica un nivel superior de algebrización (nivel 5).

Volvamos a la situación-problema que analizamos en la sección previa, incorporando nuevas relaciones:

> Problema 4. *Si se mezclan virutas de abeto y de roble a razón 2:3, ¿cuál es la densidad de la mezcla?*
>
> Solución (nivel 5 de algebrización). La densidad de la mezcla de madera expresa la relación entre la masa resultante de la mezcla de los distintos tipos de maderas viruteadas después del proceso de molido y el volumen que ocupan.
>
> Sean $f_a(x) = k_a x$, $f_r(x) = k_r x$, y $f_m(x) = k_m x$, respectivamente, las funciones que expresan la masa de un trozo de madera de abeto, roble y de mezcla, a partir del volumen del mismo. Si de un trozo de madera de mezcla de volumen *x*, un volumen *u* es de abeto y un volumen *v* es de roble:
>
> $$f_m(x) = f_m(u + v) = f_a(u) + f_r(v) = k_a u + k_r v$$

Dado que se mezclan virutas de abeto y de roble a razón 2:3, $u = \frac{2}{5}x$ y $v = \frac{3}{5}x$ de manera que $f_m(x) = k_a \frac{2}{5}x + k_r \frac{3}{5}x = \left(\frac{2}{5}k_a + \frac{3}{5}k_r\right)x$, luego la densidad de la mezcla es $k_m = f_m(1) = \left(\frac{2}{5}k_a + \frac{3}{5}k_r\right)$

Identificamos los siguientes objetos en la solución propuesta:

- *Conceptos*: masa, volumen, densidad, razón, función lineal, variable, parámetro.
- *Proposiciones*: La densidad de la mezcla de madera expresa la relación entre la masa resultante de la mezcla de los distintos tipos de maderas viruteadas después del proceso de molido y el volumen que ocupan
- *Procedimientos*: traducción del lenguaje natural al lenguaje simbólico, operaciones con funciones lineales y parámetros
- *Argumentos*: recaen en las propiedades de las familias de funciones lineales y en las operaciones entre éstas.

En este caso, los coeficientes de las funciones lineales que determinan la relación entre la masa y el volumen de ambos tipos de madera actúan cómo parámetros. Las operaciones con dichos parámetros, conjuntamente con variables y el establecimiento de relaciones entre ellos, implican una actividad algebraica de nivel 5 dado que los objetos que intervienen y emergen de estos sistemas de prácticas ponen en juego a los objetos algebraicos del nivel previo (familia de funciones lineales).

3.7 Aplicaciones lineales y espacios de medida

La introducción de estructuras algebraicas como las de espacio vectorial o espacio de medida, así como el estudio del álgebra de aplicaciones en dichas estructuras, ponen en juego objetos y procesos algebraicos de mayor grado de generalidad que los considerados en el quinto nivel, quedando reservados para estudios universitarios.

Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una terna (V,+,·) formada por un conjunto V no vacío (cuyos elementos se denominan vectores) y dos operaciones, una de ellas interna, suma de vectores, $+ : V \times V \to V$, respecto de la que V es un grupo abeliano, y otra externa, el producto por escalares $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ que verifican propiedades compatibles con la estructura de grupo. En particular, todo cuerpo es un espacio vectorial sobre sí mismo, de manera que la estructura de espacio vectorial generaliza la del cuerpo de los números reales.

Dados dos espacios vectorial V y W sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, una aplicación $f: V \to W$ se dice que es *lineal* si satisface:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$,

2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$,

para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{K}, u, v \in V$. Es decir, f es un morfismo de grupos abelianos $(V,+),(W,+)$ y conmuta con el producto por escalares.

En el siguiente problema se plantea un primer encuentro con la estructura algebraica de espacio vectorial y de aplicación lineal entre espacios vectoriales. Se ponen en juego objetos matemáticos, vectores y aplicaciones entre espacios de vectores, sobre los cuales se definen operaciones que cumplen un sistema de propiedades específicas.

Problema 5. *Sea V un espacio vectorial real y U, W dos subespacios vectoriales de V. Sea $f: U \times W \to V$ la aplicación definida por $f(u,w) = u + w$. Demuestra que f es una aplicación lineal.*

Solución (nivel 6 de algebrización). Se trata de comprobar que la aplicación f definida del espacio vectorial producto $U \times W$ en V verifica las condiciones que definen la aplicación lineal.

$$\begin{aligned} f\big((u,w)+(u',w')\big) &= f(u+u', w+w') = (u+u') + (w+w') \\ &= (u+w) + (u'+w') = f(u,v) + f(u',w') \end{aligned}$$

$$f(\lambda(u,w)) = f(\lambda u, \lambda w) = \lambda u + \lambda w = \lambda(u+w) = \lambda f(u,w)$$

Una solución como la anterior, incorpora objetos que corresponden al nivel 6 de algebrización según el modelo de Godino et al. (2015):

- *Conceptos*: espacio vectorial, subespacio, producto cartesiano, aplicación lineal.
- *Proposiciones*: La suma de vectores es asociativa; se cumple la propiedad distributiva del producto por escalares respecto de la suma de vectores.
- *Procedimientos*: cálculo analítico (sintáctico) con vectores en un espacio vectorial y en el espacio vectorial producto.

- *Argumentos*: basados en la estructura de espacio del vectorial del producto cartesiano de dos espacios vectoriales y en las propiedades que definen la aplicación lineal.

Desde un punto de vista axiomático, una magnitud es un conjunto no vacío M, donde está definida una operación interna, la suma, $+: M \times M \rightarrow M$, y una relación de orden total, $<$, de manera que $(M, +, <)$ es un *monoide*, *conmutativo*, *cancelativo y arquimediano*. Fiol y Fortuny (1990) asumen además la propiedad de *divisibilidad*, según la cual, para todo a en M y n entero positivo existe $b \in \text{M}$, tal que $a = nb$. Para estos autores, los elementos de *M* se llaman *cantidades*. Fijado un elemento *unidad e* en M, se define la *medida* del elemento a con respecto a e, como el número real $\mu_e\,(a) = \sup\{q \in \mathbb{Q}^+ : qe \leq a\}$. La magnitud M se dice *continua* si la medida μ_e establezca un isomorfismo entre M y $\mathbb{R}_0^+$.

La proporcionalidad de dos magnitudes M y N viene dada por la existencia de un isomorfismo $f: M \rightarrow N$ que conserva el orden, esto es, para cualesquiera $a, b \in M$,

1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$,
2) si $a < b$ entonces $f(a) < f(b)$.

La propiedad 1) expresa el carácter aditivo de la aplicación, de manera que si $M = N = \mathbb{R}$ con la suma y el orden habitual, la aplicación $f: M \rightarrow N$ es aditiva (luego $\mathbb{N}$-lineal) y la propiedad 2) se traduce en su crecimiento, es decir, *f* es lineal.

Además, si dos magnitudes continuas M y N con unidades e y u, son proporcionales con isomorfismo $f: M \rightarrow N$, la medida de $f(a)$ con unidad $f(e)$ será la misma que la medida de a unidad e y la aplicación $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, definida por $g(x) = \mu_u\,(f(xe))$, es aditiva. Por la propiedad D de las funciones lineales, $g(x) = g(1)x$, es la función lineal representante de la situación de proporcionalidad entre las magnitudes M y N, y $k = g(1)$ es la constante de proporcionalidad.

4. Síntesis y estructuración de los significados de la proporcionalidad

La reconstrucción del significado de la proporcionalidad es el primer paso para comprender los procesos de enseñanza implementados y establecer pautas para su mejora. Desde el punto de vista del EOS, los significados se interpretan en términos de subsistemas de prácticas institucionales ligadas a contextos de uso y de objetos emergentes (situaciones, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). Cada una de estas configuraciones epistémicas y sus prácticas asociadas modelizan aspectos parciales del significado global del objeto proporcionalidad que debe ser el referente en una investigación de didáctica de la matemática centrada en el estudio de este objeto.

En la figura 3.3 resumimos los significados de la proporcionalidad discutidos en el apartado anterior, haciendo referencia al nivel educativo en el que usualmente se aborda su estudio y el nivel de algebrización. A continuación reflexionamos sobre la presencia, tratamiento y problemática en torno a estos significados en la práctica educativa.

Entre los diversos significados del objeto proporcionalidad se establecen relaciones de interdependencia, pudiendo unos significados estar mejor adaptados a unas circunstancias y etapas educativas que otros. En la mayoría de los manuales escolares de educación primaria, se definen dos magnitudes como directamente proporcionales si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número. De igual modo, los argumentos para justificar si las magnitudes son directamente proporcionales son incompletos, dado que sólo contemplan el carácter $\mathbb{N}$-lineal de la relación de proporcionalidad.

El método de reducción a la unidad, se introduce como primer procedimiento de resolución de problemas de proporcionalidad, apoyado en el conocimiento y sentido de las operaciones del alumno. El carácter algorítmico otorgado al tratamiento de la proporcionalidad en esta etapa, lleva a que los alumnos con frecuencia asocien la relación de proporcionalidad con la posibilidad de aplicar la regla de tres a la situación-problema, sin considerar las magnitudes involucradas ni los argumentos que sustentan la relación.

Las nociones de razón y proporción no se introducen hasta la educación secundaria, etapa en el que se espera que los alumnos tengan los conocimientos y práctica suficiente sobre fracciones que permita dotar de sentido al producto de magnitudes de naturaleza diferente. En esta etapa se introduce la constante (o razón) de proporcionalidad y la relación de proporcionalidad se define a partir de estas. El tratamiento es aritmético y previo al estudio de magnitudes y su medida. La relación de proporcionalidad de dos magnitudes se establece de manera implícita por la igualdad de razones entre sus medidas.

Las secuencias proporcionales y el registro tabular permiten avanzar en el tratamiento de la proporcionalidad hacia niveles superiores, conectando los significados aritmético (basado en relaciones aditivas y multiplicativas doble-mitad) y proto-algebraico (valor unitario, proporciones) con las propiedades de la función lineal. Las tablas de proporcionalidad recogen un número finito de parejas de valores correspondientes de cantidades de magnitudes proporcionales, y permiten hacer hipótesis sobre los valores, las variaciones y detectar relaciones posibles (relaciones entre razones internas y razones externas, propiedad aditiva, crecimiento, $\mathbb{N}$-linealidad) entre los números de la tabla.

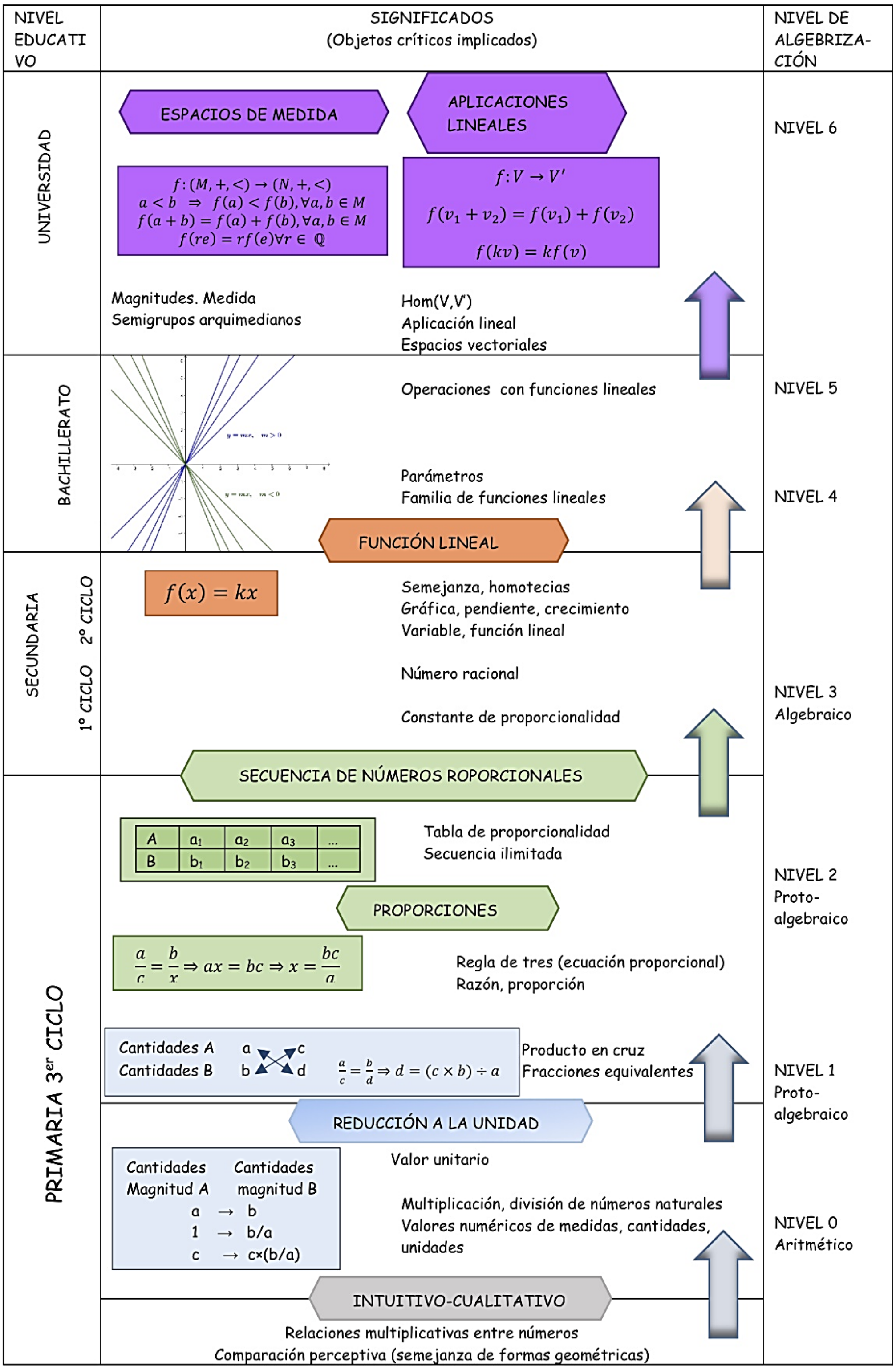


Figura 3.3. Significados de la proporcionalidad según niveles de algebrización y educativo

En educación secundaria, la función lineal y la función afín son los primeros ejemplos de funciones reales de variable real. Éstas vienen asociadas a las tablas de valores y al registro gráfico pero contribuyen a hacer desaparecer las magnitudes de los modelos matemáticos al reflejar solo los valores numéricos de las cantidades que intervienen sin expresión de las unidades de medida correspondientes. Por otro lado, la función lineal $f(x) = kx$ introduce una asimetría en una relación, la de proporcionalidad, que es simétrica: la variable x se diferencia de su imagen y= $f(x)$. Como afirma Comin (2000, p. 127) “un trabajo reflexivo puede hacer aparecer la función lineal como modelización numérica de la relación de proporcionalidad entre magnitudes”.

La inmersión de la relación de proporcionalidad en el universo de las funciones lineales, permite considerar la función lineal como un caso más de posible relación entre variables numéricas y recurrir a las técnicas que el contexto funcional facilita. La función lineal deja paso en niveles superiores de algebrización a las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales, donde las propiedades características de las funciones lineales sirven de definición y aparece una nueva álgebra de aplicaciones entre espacios vectoriales, pero desaparece la idea de magnitud por la razón antes mencionada. Un modelo general de la proporcionalidad, requiere de la teoría de medida, donde las magnitudes adquieren el carácter más abstracto de monoides conmutativos, cancelativos, arquimedianos, y la proporcionalidad de magnitudes es un isomorfismo entre las estructuras.

5. Reflexiones finales

Consideramos que la visión global sobre el significado de la proporcionalidad elaborada en este capítulo puede ayudar a introducir cambios fundamentados en los programas de formación de profesores que permitan superar una limitada comprensión de la proporcionalidad, basada en conocimientos procedimentales (como el producto cruzado o regla de tres) de los que desconocen su componente conceptual (Lamon, 2007; Riley, 2010).

El profesor de matemáticas de un nivel educativo, debe conocer las matemáticas escolares de ese nivel educativo, pero también debe poder articular esos conocimientos con los correspondientes a niveles posteriores (Godino, Giacomone, et al., 2017). Esto supone conocer los diversos significados de los objetos matemáticos, tanto los informales como los formales y sus interconexiones. La identificación por parte del profesor de los objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas es una competencia que le permitirá comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos. Es claro que el profesor debe tener, además, conocimientos relacionados con las orientaciones curriculares, desarrollo cognitivo y conflictos de aprendizaje, así como ser competente en el diseño y gestión de recursos didácticos específicos para el estudio de la proporcionalidad (Ben-Chaim, et al., 2012; Fiol y Fortuny, 1990). La perspectiva ofrecida en este capítulo sobre los tipos de significados de la proporcionalidad ligados a los niveles de algebrización señalan una trayectoria para la planificación curricular que contemple el progresivo desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes, la cual no debería estar limitada, para el caso de este contenido matemático, al aprendizaje de las nociones de razón, proporción y a la aplicación de rutinas estereotipadas.

El foco de atención de este capítulo ha sido identificar los distintos significados asociados al objeto proporcionalidad, y articularlos en un modelo ontosemiótico que pueda servir de referencia para el diseño instruccional. Los niveles de algebrización han permitido modelizar el conocimiento institucional que se pone en juego en las prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en la resolución de problemas de proporcionalidad, describiendo la actividad matemática bajo la perspectiva de objetos y procesos característicos del álgebra, admitiendo que un mismo problema se puede abordar de diferentes maneras en un momento dado con niveles de algebrización diferentes.

Como se indica en Godino, Beltrán-Pellicer et al. (2017), entre los diversos significados del objeto proporcionalidad se establecen relaciones de interdependencia, simbiosis y cooperación; pudiendo unos significados estar mejor adaptados en unas circunstancias que en otras. Los significados, geométrico, probabilístico, estadístico, o de otros contextos, requieren de la cooperación de los significados aritmético o proto-algebraico para dar respuesta a las cuestiones que involucran el razonamiento proporcional. La regla de tres, en su interpretación aritmética, o incluso en su versión algorítmica/instrumental tiene de hecho su nicho ecológico en el contexto de la vida cotidiana o incluso en los contextos técnico-profesionales y artísticos. No obstante, dado el papel esencial del álgebra en las distintas ramas de la matemática, la implementación del significado algebraico de la proporcionalidad en la escuela secundaria es un factor positivo para el progreso del aprendizaje matemático de los estudiantes.

El reconocimiento de niveles de algebrización vinculados a los distintos significados que hemos precisado en la sección 3 constituye un aspecto importante de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático del profesor requerido para una enseñanza idónea de este contenido. Por otro lado, es también importante que los profesores conozcan de manera explícita las propiedades que definen la relación de proporcionalidad, a través de la función lineal, así como los argumentos que, sustentados en dichas propiedades, justifican la presencia o ausencia de proporcionalidad y la pertinencia de técnicas y procedimientos en determinadas situaciones. Como afirman Wilhelmi, Godino y Lacasta (2014, p. 581) "el desempeño como profesores se puede ver seriamente perjudicado si no se complementa con una profundización en la formación epistemológica específica sobre la pluralidad de significados de los objetos matemáticos y las configuraciones de objetos y procesos en los cuales cristalizan tales significados".

CAPÍTULO 4.
PAPEL DE LAS SITUACIONES ADIDÁCTICAS EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO: EL CASO DE LA PROPORCIONALIDAD

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Godino, J. D., Burgos, M. y Wilhelmi, J. D. (2020). Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico, *Enseñanza de las Ciencias*, en prensa.

1. Introducción

Las teorías constructivistas se pueden agrupar en una gran familia denominada *Inquire-Based Education*, que basan su enfoque en el aprendizaje por indagación de los estudiantes, con un apoyo solo subsidiario del docente (Artigue y Blomhøj, 2013). Por otro lado, los enfoques objetivistas sostienen que la eficacia del proceso de estudio está ligado más a la acción docente que al descubrimiento de los estudiantes. Focalizan pues su trabajo en el modelo instruccional directo y transmisivo (Mayer, 2004; Boghossian, 2006). Desde la didáctica de las ciencias, Zhang (2016) explica que la tensión entre estas dos posiciones instruccionales no está en si una u otra es participativa de presentar más o menos guía o apoyo a los estudiantes, sino entre presentar explícitamente las soluciones a los aprendices o dejar que ellos las descubran.

Este capítulo aborda el problema del diálogo entre la Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas (TSDM) (Brousseau, 1986; 1997) y el Enfoque Ontosemiótico, al tratar de clarificar y articular algunos supuestos básicos de la TSDM y del EOS. Desde el punto de vista del EOS se analiza, en particular, la necesidad defendida por la TSDM de abordar los momentos "críticos del aprendizaje" mediante situaciones adidácticas. El EOS es un marco teórico estrechamente conectado en sus orígenes con la TSDM y otras teorías de la didáctica francesa (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006), pero que se inscribe dentro del paradigma de las aproximaciones socioculturales en educación matemática (Lerman, 2001; Radford, 2008). Los tipos de objetos y procesos que propone el EOS, su naturaleza y función en la realización de las prácticas matemáticas, permiten revelar una cierta debilidad ontológica y semiótica en la TSDM y en general en los modelos didácticos constructivistas, para la descripción, análisis y diseño de procesos educativos en ciencias y matemáticas.

La proporcionalidad contextualiza esta discusión, ya que ambos marcos teóricos han realizado diversas investigaciones sobre dicho tema. Teniendo en cuenta la complejidad del modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad elaborado en el capítulo previo, en la siguiente sección se presenta una síntesis de los supuestos básicos de la TSDM (en particular, el papel central que se asigna a las llamadas situaciones adidácticas) y se describe la situación didáctica sobre proporcionalidad conocida como "El puzle" y el papel que se asigna al profesor. A partir de la situación de ampliación del puzle y en base a la posición del EOS sobre la naturaleza compleja y ontosemiótica del conocimiento matemático se argumenta a favor de un modelo didáctico dialógico – colaborativo, que atribuya al profesor roles más protagonistas en el aprendizaje de los estudiantes que los atribuidos por la TSDM.

2. Teoría de situaciones didácticas en matemáticas

La TSDM propone un completo programa de investigación para la didáctica de la matemática que implica estudios epistemológicos, diseño de situaciones didácticas, experimentación, comparación del diseño con los procesos que tienen lugar de hecho, revisión de los estudios epistemológicos y del diseño y estudio de las condiciones de la reproductibilidad de las situaciones. Los aspectos metodológicos de este programa son descritos como *ingeniería didáctica* (Artigue, 2011).

2.1 Supuestos básicos de la TSDM

La hipótesis básica de la TSDM es que el conocimiento construido o usado en una situación es definido por las restricciones de esta situación. De esta forma, creando ciertas restricciones artificiales, el profesor es capaz de provocar que los estudiantes construyan un cierto tipo de conocimiento. La teoría del aprendizaje que asume la TSDM es constructivista, dado que se interesa en determinar cómo los sujetos construyen y comunican los saberes matemáticos en la resolución de problemas. Los problemas se deben seleccionar de modo que permitan optimizar la dimensión adaptativa del aprendizaje y la autonomía de los estudiantes.

La TSDM asume un fuerte compromiso con la epistemología matemática, como se pone de manifiesto en el significado atribuido a la noción de *situación fundamental*: “una situación que muestra con claridad la razón de ser del conocimiento matemático pretendido” (Artigue y Blomhoj, 2013, p. 803). En estas situaciones fundamentales, se da una circunstancia paradójica; a saber: debe poder ser planteada a los sujetos sin apelar al conocimiento que es a la vez su razón de ser y objetivo de aprendizaje.

2.2. Papel de las situaciones adidácticas

Una *situación didáctica* es un conjunto de relaciones explícita o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (incluyendo instrumentos o materiales) y el profesor con el fin de permitir a los alumnos aprender algún conocimiento. Las situaciones son específicas de los conocimientos. Para que el alumno construya el conocimiento, es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que el alumno ha asumido la responsabilidad matemática en la asunción de la tarea y el profesor ha logrado devolverla.

En las *situaciones adidácticas*, las interacciones entre alumno y medio se describen como una actividad de producción de conocimiento por parte del alumno. Esta producción es independiente de la intervención explícita del docente en tanto que *detentador del saber*. Así, el sujeto entra en interacción con una situación-problema, poniendo en juego sus propios conocimientos, pero también modificándolos, rechazándolos o produciendo otros nuevos, a partir de las interpretaciones que hace sobre los resultados de sus acciones (retroacciones del medio).

> Hace falta pues que estos estudiantes encuentren condiciones que les provoquen construir una concepción, un ‘conocimiento’ adecuado y original. Además otras condiciones podrán precisar una denominación ‘nativa’, otras finalmente crearán la necesidad de producir pruebas efectivamente convincentes, luego formales… Vendrá entonces el momento de canonizar formalmente estas improvisaciones. Cada decisión o acción del alumno, en estas condiciones, puede ser considerado como ‘adidáctica’, es decir, producida sin haber sido enseñada previa y directamente por un texto o un

> discurso del profesor. La intención didáctica se expresa por la elección de situaciones, por el respeto de la fase adidáctica y finalmente por la reformulación canónica y la confirmación del valor del saber así establecido (Brousseau, 2016, s. p).

El concepto de *medio* incluye tanto una situación-problema matemática inicial a la que el sujeto se enfrenta, como un conjunto de relaciones didácticas, por tanto, esencialmente relacionadas con las matemáticas. Estas relaciones se van modificando a medida que el sujeto produce conocimientos en el transcurso de la situación, transformando en consecuencia el medio sobre el que interactúa.

Brousseau identificó varios tipos de situaciones o momentos didácticos, que determinan un esquema general de una *secuencia didáctica* para la génesis artificial de un concepto matemático o para dotarlo de sentido:

- Situaciones de *acción*, donde los estudiantes hacen sus primeros intentos por resolver un problema propuesto por el profesor.
- Situaciones de *formulación*, donde los estudiantes enuncian los resultados de su trabajo a otros estudiantes y al profesor.
- Situaciones de *validación*, donde se deben usar argumentaciones teóricas más bien que empíricas.

Dentro de cada una de estas situaciones, hay un componente adidáctico, esto es, un espacio y tiempo donde la gestión de la situación recae enteramente en los estudiantes. Se considera que esta parte es esencial para la construcción y comunicación de nuevos conocimientos. Por ello, la función docente principal en estas situaciones es la *devolución*, es decir, el acto por el cual el profesor establece las condiciones para que los estudiantes hagan suya la producción de los nuevos conocimientos. En este sentido, el medio didáctico incluye al docente como gestor del proceso de estudio, no como mero productor o comunicador del saber. En particular, el profesor gestiona momentos de conflicto cognitivo mediante la manipulación consciente e intencional de las *variables didácticas*, con la intención de modificar la estrategia de resolución de los estudiantes y posibilitar el progreso en el conocimiento.

A estos tres tipos de situaciones que tienen un carácter adidáctico (acción, formulación y validación) se añaden las situaciones de *institucionalización*. En ellas los resultados de las negociaciones y convenciones de las fases previas son resumidos y la atención se centra sobre los hechos 'importantes', los procedimientos, las ideas y la terminología “oficial”. A partir de la fase de institucionalización, el significado de los términos ya no es un objeto de negociación, sino de corrección, por referencia a las definiciones, las notaciones, los teoremas y los procedimientos aceptados.

El programa de investigación esbozado por la teoría de situaciones está fundamentado en la premisa de que todo saber puede ser modelizado por una o varias *situaciones fundamentales*. Así, como didáctica técnica, su objetivo sería la elaboración de un cierto número de situaciones fundamentales relacionadas con los conceptos matemáticos básicos enseñados en la escuela, que permitieran la introducción o dotación de sentido a dichos conceptos.

2.3. La situación de ampliación del puzle

La siguiente situación-problema, desarrollada, experimentada y analizada por Brousseau (Brousseau, 1997) permite describir bien los elementos centrales de la TSDM. Se pone en juego el concepto de proporcionalidad.

El profesor muestra a los alumnos un puzle cuadrado de 11 cm de lado que permite realizar distintas configuraciones (figura 4.1). Da las siguientes consignas:

- Debéis recortar en una cartulina un puzle parecido a éste (el modelo). Pero lo tenéis que hacer más grande para los niños del parvulario. Este lado que mide 4 cm en el modelo deberá medir 7 cm en la reproducción. Pero hay que poder hacer las mismas figuras con el puzle grande que con el modelo.
- Para realizar el puzle grande os dividiréis por grupos. Cada grupo hará una única pieza y las juntaremos todas al final para que encajen.

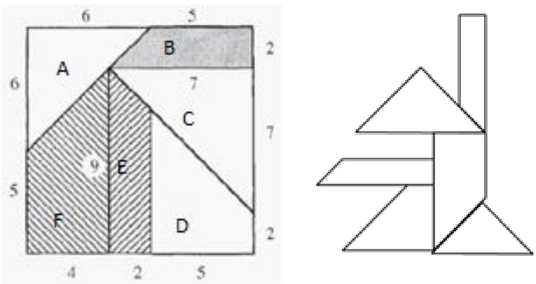


Figura 4.1. Situación del puzle

Brousseau (2004) describe de forma detallada el diseño y gestión de la situación, así como las condiciones que debe cumplir ésta de la siguiente manera:

a) El conocimiento matemático que se desea obtener debe ser el único medio para resolver el problema.
b) La indicación dada a los alumnos no debe utilizar ninguno de los conocimientos que se quiere que aparezcan. Dicha consigna determina las decisiones permitidas y las situaciones iniciales y finales que conducen a *ganar* o a *perder*.
c) Los alumnos deben poder empezar a actuar con *conocimientos de base* que necesariamente se revelarán inadecuados.
d) Pueden constatar ellos mismos el éxito o fracaso de sus intentos.
e) Sin determinar la solución, estas constataciones son sugerentes, en el sentido de que favorecen las hipótesis, aportan informaciones apropiadas, ni demasiado abiertas ni muy cerradas.
f) Los alumnos pueden rápidamente hacer intentos sucesivos, pero se debe favorecer la anticipación.
g) Entre las soluciones empíricamente aceptables, sólo una puede responder a todas las objeciones.
h) Algunos alumnos deben ser capaces de hallar y demostrar la solución en un tiempo razonable en una clase normal y poderla compartir y hacerla comprobar por los demás alumnos.
i) La solución debe prestarse a nuevas utilizaciones y debe provocar el planteamiento de preguntas que vuelven a lanzar el proceso (por ejemplo: ¿todas las ampliaciones del puzle se hacen así?).

Estas características son las que aseguran al alumno una máxima autonomía, lo cual caracteriza a las situaciones adidácticas. El objetivo es hallar, para cada conocimiento – aquí la proporcionalidad –, situaciones que cumplan el máximo número posible de las condiciones citadas. La situación del puzle es una de las que satisfacen esta lista.

Brousseau aclara que la mayoría de estas situaciones no son modelos para reproducir en clase. Las preguntas, ejercicios, problemas clásicos, etc., aparecen como casos particulares de situaciones, deducidas y simplificadas por razones de *economía* que las hacen más prácticas. Los modelos de situaciones permiten por consiguiente analizar los efectos de estas economías sistemáticas.

2.4 Papel del profesor en la TSDM

Como se ha dicho anteriormente, la TSDM sostiene la tesis según la cual en los momentos críticos del aprendizaje se requieren *condiciones adidácticas* que permitan conducir el aprendizaje al saber previsto en los programas (Brousseau, 2016). Así se precisa que en estos momentos el conocimiento se adquiera por adaptación a un medio antagonista, donde la intervención del docente se limita al control de aula y a actos de devolución previstos para el control del sistema didáctico y la gestión de su funcionamiento. De esta forma, el docente tiene un papel esencial en los momentos de planteamiento y diseño previos a la puesta en marcha de la situación en aula, en los de devolución del problema a los alumnos y en los de institucionalización, una vez que los alumnos hayan tenido la oportunidad de expresar y validar los conocimientos producidos.

Desde los presupuestos sobre el aprendizaje de las teorías socioculturales (Lerman, 2001; Radford, 2008) esta posición del profesor en la TSDM no deja de ser conflictiva. La enseñanza, en tanto proceso de enculturación, plantea la necesidad de conceptualizar teóricamente de manera diferente las interacciones entre el docente, representante del saber cultural, y los alumnos, quienes constituyen con el docente un espacio social de producción de conocimientos.

La consideración de la devolución y la institucionalización como procesos que pueden tener lugar a lo largo del desarrollo de la situación adidáctica parece esencial para resolver los dilemas que plantea la TSDM en la enseñanza en las clases reales. Perrin-Glorian (1993) ya lo anticipó cuando afirmó que "la institucionalización de los conocimientos comienza para nosotros desde el momento mismo de la devolución, porque ya ahí es necesario que el profesor dé al alumno, si no lo tiene, el proyecto de adquirir esos conocimientos; en ese sentido, los procesos de devolución y de institucionalización se imbrican y son, en cierta medida, coexistentes en el tiempo" (p. 83).

En publicaciones posteriores de autores que aplican la TSDM encontramos desarrollos que proponen un papel más complejo del profesor en la gestión de las situaciones didácticas. Tal es el caso de Bloch (1999) y Comin (2000), entre otros autores.

Bloch (1999) aborda el problema del papel del profesor en una situación didáctica y las herramientas de las cuales dispone para gestionar la situación. En este artículo esboza un modelo que se apoya en los trabajos sobre el *medio*, y las investigaciones sobre *conocimientos y saberes* en la transposición didáctica, poniendo el acento en la actividad matemática conjunta del profesor y el alumno. Aplica su modelo para analizar una sesión de enseñanza de la noción de función con estudiantes del bachillerato científico. El trabajo de Bloch se sitúa claramente en la figura de la TSDM, pero trata de desarrollar esta teoría en una dirección que considera fructífera para el estudio de la contingencia: intenta identificar mejor la función docente en relación con los conocimientos que precisa para gestionar una situación de enseñanza/aprendizaje, incluso en los momentos adidácticos.

Como ya comentamos en el capítulo 3, en la tesis doctoral de Comin (2000), dirigida por G. Brousseau, se propone un modelo en el los conocimientos de la proporcionalidad se organizan en tres marcos: el de las magnitudes, el de las medidas de magnitud y el de las variables numéricas. Comin incluye la descripción y análisis de una propuesta de enseñanza sobre proporcionalidad con niños de CM1 (niños de 9-10 años) en la que se desea que a largo plazo aparezca la función lineal como una abstracción que resume y refleja los relaciones de proporcionalidad entre magnitudes y se ponga en juego la dialéctica entre las nociones de variable, función y número. Para la elaboración de la unidad “granos y ratones” se realiza el análisis matemático de los objetos que constituyen el entorno de la proporcionalidad (magnitudes, cantidades, razones, proporciones) y que entran progresivamente en el repertorio de los alumnos según una complejidad creciente de su estructura.

En las reflexiones que incorpora Comin tras la experimentación se incluyen ideas que, desde nuestro punto de vista, implican una evolución en el papel asignado a los procesos de institucionalización. La “estructuración del medio” jugó un papel importante en la elaboración de las situaciones pero también en la interpretación de los fenómenos observados. “La institucionalización aparece como un proceso complejo que no se puede reducir a una sucesión de ‘fases institucionalizantes’ limitadas en el tiempo” (Comin, 2000, p. 8).

En estos trabajos y otros publicados en la década de los 90, se aprecia pues una cierta evolución en la forma en que los procesos de institucionalización y su relación con la dimensión adidáctica son valorados por la TSDM. Así se percibe una suerte de cambio: una TSDM-1, ligada a Brousseau (1986), en la que las situaciones adidácticas constituyen un postulado central, y una TSDM-2, ligada a los trabajos mencionados, en la que la dimensión adidáctica se modula y articula con la dimensión institucional, no solo a nivel macro sino también a nivel microdidáctico, esto es, en la gestión del contrato didáctico en el aula.

Este cambio de perspectiva supone de facto la aceptación de que en la gestión del proceso de estudio se requieren momentos de intervención por parte del docente con relación al saber explícito. Estos momentos no siguen pues los principios constructivistas. En la siguiente sección, se aborda la relación entre el objetivismo y el constructivismo, que permite anticipar la necesidad de una perspectiva mixta que contemple la complejidad ontológica y semiótica de conocimiento matemático.

3. Objetivismo versus constructivismo

La TSDM, en su primera formulación (Brousseau, 1986), de forma clara se inscribe dentro de la familia de teorías constructivistas *Inquiry-Based Education*, *Inquiry-Based Learning*, *Problem-Based Learning*, las cuales postulan el aprendizaje basado en la indagación con poca guía por parte del profesor (Artigue y Blomhøj, 2013). Estas distintas variedades de constructivismo comparten, entre otros, los supuestos de que el aprendizaje es un proceso activo y que, por lo tanto, el conocimiento es construido, en lugar de adquirido de forma innata o pasiva. Así, para lograr un aprendizaje efectivo es necesario el planteamiento a los estudiantes de problemas significativos, abiertos y desafiantes (Fox, 2001).

Existen posturas contrapuestas al constructivismo, como es el caso de Mayer (2004), Kirschner, Sweller y Clark (2006) entre otros, que justifican mediante una extensa gama de investigaciones la mayor efectividad de modelos instruccionales en los cuales se atribuye al profesor, y a la transmisión de conocimientos, un papel predominante. Estas posturas se relacionan ya con posturas filosóficas objetivistas (Jonassen, 1991), ya con la instrucción directa o la pedagogía basada en lecciones (Boghossian, 2006).

Sweller, Kirschner y Clark (2007) afirman que la investigación empírica del último medio siglo sobre este problema proporciona una abrumadora y clara evidencia de que una mínima guía durante la instrucción es significativamente menos efectiva y eficiente que una guía específicamente diseñada para apoyar el procesamiento cognitivo necesario para el aprendizaje. Resultados similares se reflejan en el meta-análisis realizado por Alfieri, Brooks, Aldrich y Tenenbaum (2011).

Se pueden aportar varios tipos de razones a favor de aplicar un modelo didáctico basado en la transmisión de conocimientos (objetivismo) frente a los modelos basados en la construcción autónoma (constructivismo). Kirschner et al. (2006) aportan razones cognitivas a favor de un modelo didáctico objetivista / transmisivo:

> Tenemos destreza en un área porque nuestra memoria a largo plazo contiene cantidades enormes de información relativa al área. Esa información nos permite reconocer rápidamente las características de una situación y nos indica, a menudo inconscientemente, qué hacer y cuándo hacerlo (Kirschner, et al., 2006, p. 76).

Harris (2012) considera que la metáfora del niño como científico natural, tan duradera y poderosa, es útil cuando se usa para describir cómo los niños dan sentido a las regularidades universales del mundo natural, regularidades que ellos pueden observar por sí mismos, sin importar cuál sea su entorno cultural. Sin embargo, la metáfora es engañosa si se utiliza para explicar de forma comprehensiva y global el desarrollo cognitivo. Los niños nacen en un mundo cultural que media sus encuentros con el mundo físico y biológico. Para acceder a dicho mundo cultural, los niños necesitan un modo de aprendizaje orientado socialmente (aprendizaje mediante la *observación participante*). "El dominio de regularidades normativas requiere aprendizaje cultural" (Harris, 2012, p. 269).

Los presupuestos ontosemióticos, epistemológicos y cognitivos del EOS (Godino et al., 2007) sirven de base para una propuesta educativa-instruccional. Esta propuesta reconoce un papel clave a la transmisión (contextualizada y significativa para el estudiante) de conocimientos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se trata de tener en cuenta la naturaleza cultural /regulativa de los objetos matemáticos implicados en las prácticas matemáticas cuya realización competente por los alumnos se pretende. Esta competencia no se puede entender adquirida si carece de sentido para los estudiantes y, por lo tanto, se requiere que sea inteligible y significativa para ellos. Así, los estudiantes deben ser capaces de utilizar los objetos matemáticos en contextos propios con autonomía. Pero, según el EOS, debido a la complejidad ontosemiótica del conocimiento matemático, esta autonomía no se debe adquirir necesariamente en la génesis del objeto o en la determinación de un sentido a él atribuido; por ejemplo, se puede alcanzar en una práctica matemática de aplicación.

4. Complejidad ontosemiótica del conocimiento matemático

El cómo se aprende algo depende de qué se tiene que aprender. Según el EOS el estudiante se debe apropiar de las prácticas matemáticas institucionales y de los objetos y procesos implicados en la resolución de las situaciones - problemas cuyo aprendizaje se pretende. En la figura 3.3 hemos mostrado una síntesis de los significados de la proporcionalidad haciendo referencia al nivel educativo en el que usualmente se aborda su estudio y el nivel de algebrización que se pone en juego en los mismos. Es importante tener en cuenta los diversos significados de la proporcionalidad en el diseño de los procesos de instrucción (figura 3.3), los cuales deben tener lugar en un dilatado espacio de tiempo (educación primaria, secundaria, universidad) y en distintas áreas de contenido (Wilhelmi, 2017).

En la solución de los problemas contextualizados de proporcionalidad intervienen magnitudes (longitudes, áreas, volúmenes, velocidades, densidades, etc.), sus respectivas medidas y los valores numéricos de las mismas. En una fase del proceso de resolución, las relaciones que se establecen entre las cantidades (razones, proporciones) se expresan usando los valores numéricos de las medidas, se opera con los números racionales correspondientes y finalmente se interpreta la solución en términos del contexto.

En un proceso de instrucción, la realización por el alumno de las prácticas matemáticas ligadas a la solución de ciertas tareas problemáticas, operativas y discursivas, pone en juego un conglomerado de objetos y procesos cuya naturaleza, desde el punto de vista institucional es esencialmente normativa (regulativa) (Font, et al. 2013). La realización de tales prácticas supone la intervención de objetos previos para comprender las demandas de la situación - problema y poder implementar una estrategia de partida. Tales objetos, sus reglas y condiciones de aplicación, deben estar disponibles en la memoria de trabajo del sujeto. Aunque sea posible buscar tales conocimientos por sí mismo en el espacio de trabajo, no siempre hay suficiente tiempo o el alumno no lo logra; por ello, el profesor y los compañeros pueden prestar un apoyo inestimable para evitar la frustración y el abandono.

Como hemos mencionado, la progresión en el aprendizaje tiene lugar a medida que el sujeto se apropia de los diversos significados, y reconoce y comprende la trama de objetos implicados en los mismos. La noción de *configuración ontosemiótica* de prácticas, objetos y procesos, permite realizar análisis microscópicos de la actividad matemática, tanto desde el punto de vista institucional como personal, revelando de ese modo la complejidad del conocimiento y su naturaleza regulativa. Seguidamente ejemplificamos el uso de dicha herramienta para el caso del objeto matemático proporcionalidad, contextualizado con el ejemplo de la tarea de ampliación del puzle (sección 2.3 de este capítulo). Se pretende reflexionar sobre la complejidad del aprendizaje de este objeto matemático, poniendo en discusión la pertinencia de abordar dicho aprendizaje de forma global mediante un modelo didáctico constructivista, o con un modelo basado en la transmisión de información descontextualizada y carente de significado para el estudiante.

4.1. Análisis ontosemiótico de la situación de ampliación del puzle

En la situación de ampliación del puzle el profesor trata de que los niños lleguen, a través de ensayos y discusiones que duran varios días, a la siguiente solución aritmética, que involucra el significado de la proporcionalidad ligado al método de reducción a la unidad:

Distancia en el modelo → Distancia en el puzle

$4 \rightarrow 7$

$1 \rightarrow 7/4 = 1{,}75$

$5 \rightarrow 1{,}75 \times 5 = 8{,}75$

$6 \rightarrow 1{,}75 \times 6 = 10{,}50$

$7 \rightarrow 1{,}75 \times 7 = 12{,}25$

$9 \rightarrow 1{,}75 \times 9 = 15{,}75$

El estudio de la proporcionalidad deberá proseguir en otros momentos hasta que los alumnos comprendan la generalización del procedimiento para magnitudes y cantidades diferentes:

Cantidad de magnitud A → Cantidad de magnitud B

$$a \rightarrow b$$

$$1 \rightarrow \frac{b}{a}$$

$$x \rightarrow \frac{b}{a}x$$

El procedimiento aritmético debe evolucionar hacia un procedimiento algebraico – funcional si se desea avanzar en la capacitación matemática de los estudiantes. A continuación mostramos, una posible solución algebraica-funcional experta para el problema del puzle, que involucra el nivel 3 de algebrización.

> Pretendemos construir un puzle igual al de la figura pero de mayor tamaño. Es decir, si un segmento en el modelo es unión de otros dos, en el puzle el segmento asociado también será la unión de los correspondientes en la figura. Además, si la longitud de un segmento *s* en la figura se multiplica por un número, la longitud del segmento *S* correspondiente a *s* quedará multiplicada por el mismo número.
>
> Por tanto, la correspondencia que se establece entre las distancias de los segmentos en el modelo (M) y las distancias de los segmentos en el puzle real (P), $f: M \rightarrow P$, es lineal, $f(x) = kx$.
>
> El coeficiente k de la función lineal es la constante de proporcionalidad en el caso de las relaciones de proporcionalidad directa entre magnitudes.
>
> Aplicando las propiedades de la función lineal: $k = k \cdot 1 = f(1)$, y en nuestro caso:
>
> $$f(4) = 7;\ 4f(1) = 7;\ f(1) = \frac{7}{4} = 1{,}75.$$
>
> La longitud en el puzle de cartulina de un segmento de longitud x en el modelo, será por tanto, $f(x) = 1{,}75x\ cm$.

Esta secuencia de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la solución algebraico – funcional involucra una trama de objetos matemáticos (tabla 4.1) cuya naturaleza es esencialmente regulativa y que son el resultado de un dilatado proceso de elaboración en el seno de la comunidad de prácticas matemáticas[3].

Tabla 4.1. Objetos implicados en la solución algebraico-funcional de la situación del puzle

Tipos de objetos	Objetos
Lenguajes	– *Simbólico*: función como correspondencia entre dos conjuntos numéricos ($f: M \rightarrow P$); valor de una función f en un punto x ($f(x)$); función lineal de constante de proporcionalidad k ($f(x) = kx$). – *Numérico*: fracciones, decimales. – *Natural-matemático*: función lineal, coeficiente, segmento, distancia, multiplicación, unión, proporcionalidad directa, magnitud
Conceptos	– Magnitud; cantidad; medida; valor numérico de las medidas; suma de cantidades, producto por un escalar. – Secuencia ilimitada de cantidades y números; correspondencia funcional; proporcionalidad directa; tanto por uno; coeficiente de proporcionalidad.
Procedimientos	– Traducción de expresiones de lenguaje natural a simbólico. – Cálculo del coeficiente de proporcionalidad basado en las condiciones de definición de la función lineal. – Cálculo del valor faltante basado en las condiciones de definición de la función lineal.
Proposiciones	– La correspondencia $f: M \rightarrow P$ es aditiva y homogénea.
Argumentos	– Convenciones pragmáticas. – Reconocimiento de las propiedades de una función lineal.

No parece pertinente pretender que el estudiante reconstruya de manera autónoma esta trama de conocimientos que la cultura matemática ha ido decantando como adecuados para dar respuesta ante las situaciones de proporcionalidad. Tampoco se puede considerar pertinente la aplicación de un modelo basado en la presentación de las definiciones de los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos sin que esa información tenga significado para los estudiantes.

4.2. Modelo didáctico dialógico - colaborativo

Como hemos mencionado en la sección anterior, los problemas ontológicos y semióticos sobre la naturaleza del conocimiento matemático son centrales en el EOS, al considerarlos determinantes del problema educativo-instruccional, esto es, el relativo a la enseñanza y al aprendizaje.

En el EOS se asume que el aprendizaje de un objeto matemático O (contenido de enseñanza) consiste en la apropiación por parte del sujeto de las prácticas

[3] En Burgos, Giacomone, Godino y Neto (2020), incluimos las configuraciones ontosemióticas detallada de soluciones expertas del problema, correspondientes a determinados niveles de algebrización (aritmético, proto-algebraico y algebraico).

institucionales. Estas prácticas son entendidas como el resultado del proceso histórico de generación de los diversos significados del objeto que se han establecido como pertinentes para resolver una clase de situaciones-problemas, en las que el objeto O tiene un función esencial. Esa apropiación tiene lugar mediante la participación en dichas prácticas institucionales, las cuales son actualizadas por el profesor como experto representante de la institución. El alumno no aprende de manera autónoma, adaptándose a un medio antagonista adidáctico, sino participando con el profesor y otros aprendices en la *labor conjunta* que es necesario realizar, apoyada en unos instrumentos dados por la cultura, para responder a determinadas cuestiones de índole matemática (figura 4.2).

Desde un modelo didáctico Dialógico – Colaborativo en el que docente y estudiantes trabajan juntos en la solución de problemas que ponen en juego un conocimiento O de manera crítica, el primer encuentro debería apoyarse en una intervención experta del docente. El proceso de enseñanza-aprendizaje podría lograr de este modo mayor idoneidad epistémica y ecológica (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009). Cuando las reglas y las circunstancias de aplicación que caracterizan O sean comprendidas, se puede tender hacia niveles mayores de idoneidad cognitiva y afectiva proponiendo profundizar en el estudio de O (situaciones de ejercitación y aplicación) mediante configuraciones didácticas que atribuyan progresivamente y de forma controlada mayor autonomía al estudiante.

En el capítulo 5 describimos una experiencia de enseñanza con alumnos de 5º curso de educación primaria siguiendo este modelo didáctico, con el objetivo de crearles un primer encuentro con los problemas de proporcionalidad directa. El profesor de matemáticas es un experto que debe conocer los diversos significados de los objetos matemáticos, tanto los informales como los formales, y sus interconexiones. Pero incluso para cada significado parcial del objeto y la resolución de las tareas prototípicas que los caracterizan, es necesario que el profesor conozca la trama de objetos y procesos implicados, con el fin de gestionar los necesarios momentos de transmisión contextualizada de conocimientos, comprender la progresión de los aprendizajes y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos.

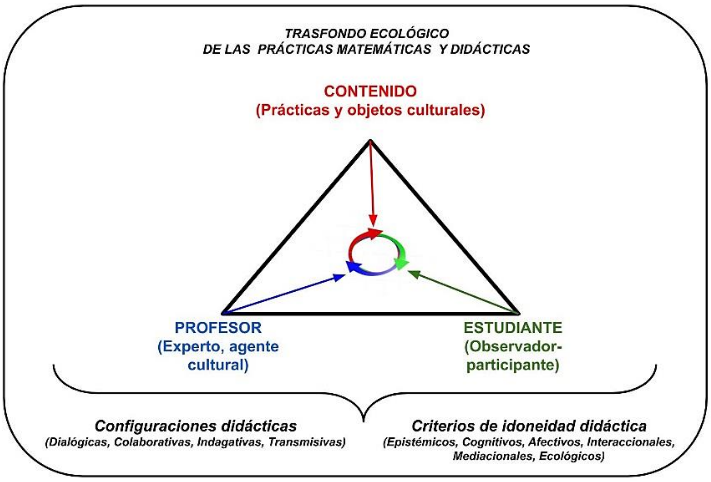


Figura 4.2. Modelo didáctico dialógico-colaborativo

La herramienta configuración didáctica ayuda a comprender la dinámica y complejidad de las interacciones entre el contenido, el docente, discentes y el medio. La optimización del aprendizaje puede tener lugar localmente mediante un modelo mixto que articula la transmisión de conocimientos, la indagación y la colaboración, modelo gestionado mediante criterios de idoneidad didáctica (Godino et al, 2007; Breda, Font y Pino-Fan, 2018) interpretados y adaptados al contexto por el profesor.

5. Observaciones finales

Desde las perspectivas socioculturales en educación matemática, Radford (2011b) concluye que la interpretación que hace la TSDM de la adaptación como motor de la cognición aparece como insuficiente: la adaptación no puede plantearse en términos de ciertos mecanismos universales, intrínsecos al saber matemático. Dicho de otra forma, la lógica de las matemáticas es insuficiente para explicar la producción y el aprendizaje de éstas. El pensamiento matemático está siempre enmarcado por la racionalidad de la cultura en donde éste se desarrolla, transcendiendo así la esfera de la acción matemática.

En el marco del EOS interpretamos esta insuficiencia de la adaptación en términos diferentes. La pluralidad de significados de los objetos matemáticos, ligados a distintos contextos de uso y comunidades de prácticas diversas, cada uno de dichos significados involucrando configuraciones ontosemióticas específicas, hace difícil, sino imposible, que el sujeto las pueda reconstruir de manera autónoma y adidáctica. Además, parece innecesaria una tal proeza cuando el trabajo a realizar se puede hacer de manera conjunta, colaborativamente, compartiendo recursos instrumentales y cognitivos disponibles en la comunidad de prácticas. La autonomía y la creatividad en la solución de problemas puede ser un objetivo alcanzable progresivamente, aunque ese privilegio puede que esté reservado para una minoría.

Hemos complementado los argumentos cognitivos de Kirschner, Sweller y Clark (2006) a favor de modelos basados en la transmisión de conocimientos, para el caso del aprendizaje matemático, con razones de índole ontosemiótica, sobre todo en los momentos de "primer encuentro" del estudiante con el contenido pretendido: lo que tienen que aprender los estudiantes son, en una gran dosis, reglas epistémicas/culturales, las circunstancias de su aplicación y las condiciones requeridas para una aplicación pertinente. El aprendiz parte de reglas (conceptos, proposiciones, procedimientos) conocidas y produce otras, que deben ser compartidas y compatibles con las ya establecidas en la cultura matemática. Tales reglas (conocimientos) tienen que ser almacenadas en la memoria a largo plazo del sujeto y puestas a funcionar en el momento oportuno en la memoria a corto plazo.

Reconocemos que las situaciones adidácticas no excluyen las interacciones entre pares en los momentos exploratorios, y sobre todo en las situaciones de comunicación y validación, incorporando de este modo aspectos claves de teorías socioculturales del aprendizaje. Nuestra posición crítica se refiere básicamente al papel asignado al profesor en dichas situaciones cuando los estudiantes tienen su primer encuentro con los nuevos conocimientos.

La enseñanza de las matemáticas debe partir y centrarse en el uso de situaciones – problemas como una estrategia para dar sentido a las técnicas y teorías estudiadas y para propiciar momentos exploratorios de la actividad matemática. Sin embargo, en la práctica matemática intervienen configuraciones de objetos matemáticos, es decir, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos (Font et al., 2013), que deben ser reconocidos por el profesor para planificar su estudio. Tales objetos deben ser progresivamente dominados por los estudiantes si se desea que progresen hacia sucesivos niveles avanzados de conocimiento y competencia matemática.

SEGUNDA PARTE

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN ALUMNOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

CAPÍTULO 5.
UN MODELO INSTRUCCIONAL PARA INTRODUCIR LA PROPORCIONALIDAD EN EDUCACIÓN PRIMARIA

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Burgos, M. y Godino, J. D. (2018). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *Bolema, 33* (63), 389-410. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a19

Burgos, M. y Godino, J. D. (2019) Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad. *Educación Matemática,* 31 (3), 117-150. DOI: 10.24844/EM3103.05

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2018). Pensamiento algebraico temprano de alumnos de quinto de primaria en la resolución de una tarea de proporcionalidad. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 181- 190). Gijón: SEIEM.

1 Introducción

Como ya hemos puesto de manifiesto, aunque existe un consenso bastante generalizado en educación matemática a favor de los modelos de instrucción de tipo constructivista, la cuestión de su pertinencia no deja de ser controvertida. Entre los modelos extremos centrados, bien en el estudiante o en el profesor, se pueden encontrar otros modelos de tipo indagativo-colaborativo en los que ambos agentes del proceso educativo tienen papel protagonista, dependiendo del contenido cuyo aprendizaje se pretende y de los conocimientos previos de los estudiantes. Estos modelos instruccionales de tipo mixto consideran que la optimización del aprendizaje implica una combinación dialéctica entre los roles del profesor como instructor y facilitador y los roles del estudiante como constructor de conocimiento y receptor activo de información significativa (Ku et al., 2014; Lobato, et al., 2005). La enseñanza y aprendizaje no se consideran como dos procesos distintos, sino una única e inseparable labor conjunta (Radford, 2012, 2013).

En este capítulo se describe y fundamenta la implementación de un modelo instruccional de tipo mixto (figura 4.2), que contempla una primera fase en la que el profesor adquiere el papel protagonista introduciendo el tema, una segunda fase de trabajo colaborativo entre profesor y alumnos, en la que resuelven conjuntamente una situación-problema, seguida de una tercera fase en la que los alumnos trabajan de manera autónoma. Este modelo ha sido experimentado con alumnos de 5º curso de primaria, siendo su objetivo crearles un primer encuentro con los problemas de proporcionalidad directa e iniciar en ellos el desarrollo del razonamiento proporcional.

Las fuentes documentales consultadas sobre experiencias de iniciación al razonamiento proporcional en educación primaria, que incluimos en la sección siguiente, siguen modelos centrados en el estudiante o bien centrados en el profesor.

Aunque se trata de un estudio de caso, con un enfoque interpretativo, que no permite generalizar los resultados, la evaluación de los aprendizajes logrados permite formular hipótesis sobre la influencia del modelo mixto de instrucción en los aprendizajes de los alumnos, las cuales se pueden contrastar en nuevos ciclos de investigación sobre este tema y en contextos similares. El problema abordado y la metodología aplicada se inscriben, por tanto, en el enfoque de las investigaciones de diseño instruccional (DBRC, 2003; Kelly, Lesh y Baek, 2008).

2 Antecedentes. Experiencias de iniciación al razonamiento proporcional

Miyakawa y Winslow (2009) hacen una comparación de dos modelos ampliamente usados en educación matemática, apoyados en análisis de experiencias de enseñanza de iniciación a la proporcionalidad en el contexto de la semejanza de figuras. Se trata de:

1) El modelo del estudio de lecciones desarrollado en Japón (Fernández y Yoshida, 2004; Isoda, 2007), que, usualmente, implica actividades de resolución de problemas abiertos. En este caso la lección analizada gira entorno a la consigna dada a los estudiantes sobre el significado de la expresión *misma forma* realizada con alumnos de sexto grado (11 a 12 años).
2) La ingeniería didáctica basada en la teoría de situaciones didácticas, orientada a la construcción de una situación fundamental que permita a los estudiantes

construir y dar sentido a un conocimiento matemático pretendido. La experiencia seleccionada, por la gran similitud que tiene con la tarea experimentada en Japón, es la situación de la ampliación del puzle de Brousseau (1997) y que ya hemos considerado en el capítulo anterior.

La idea principal del primer modelo es organizar una lección alrededor de un *problema abierto*, caracterizado por tener múltiples respuestas correctas con el fin de "estimular simultáneamente tanto las actividades creativas de los estudiantes como el pensamiento matemático en la resolución de problemas" (Nohda, 1991, p. 32). Durante la lección, el profesor debe tratar de ayudar a los estudiantes a formular claramente sus hipótesis y justificaciones, tantas como sea posible.

El estilo constructivista del modelo del estudio de lecciones queda bien reflejado en la descripción de la actividad del estudiante: éste debe comprometerse con la situación y expresar múltiples estrategias aceptables, proponiendo varios argumentos que apoyen sus respuestas, sin preguntar al profesor la solución (Miyakawa y Winslow, 2009).

La situación del puzle es parte de una secuencia de 65 lecciones experimentadas por Guy y Nadine Brousseau sobre fracciones y números decimales que se describe en Brousseau (1997, Capítulo 4). Como hemos puesto de manifiesto en el capítulo 4, la importancia atribuida a las situaciones adidácticas en la teoría de situaciones, como una fase clave del proceso de estudio, es también una indicación clara del estilo constructivista en el que se apoya este modelo didáctico. El fin es que los estudiantes construyen la única *estrategia ganadora* mediante su interacción con el medio objetivo proporcionado. En este proceso interviene el conocimiento matemático pretendido que los estudiantes deben poner en juego.

Ambos diseños didácticos requieren tipos similares de análisis: preveer las estrategias de los estudiantes, estudiar el tipo de interacción social, buscar el pensamiento independiente de los estudiantes y revisar el diseño en un ciclo experimental. Por tanto, aunque sin duda hay diferencias importantes en el papel que se atribuye al conocimiento matemático[4] y a los objetivos de aprendizaje (Miyakawa y Winslow, 2009), consideramos que se trata de diseños centrados en el estudiante.

Fielding-Wells, Dole y Makar (2014) realizan un estudio de caso con un grupo de 26 alumnos de 4º curso de primaria siguiendo un modelo didáctico investigativo (inquiry pedagogy) para estimular la emergencia de pensamiento proporcional antes de la introducción formal de la razón y proporción en el currículo.

La experiencia de enseñanza que sirve de base al estudio de Silvestre y Ponte (2011) asume la perspectiva de que el aprendizaje de la proporcionalidad directa en 6° año de escolaridad debe centrarse en la comprensión de la estructura multiplicativa de una relación proporcional. Esta investigación parte de que esa comprensión se desarrolla mediante la resolución de problemas y la realización de tareas desafiantes, de naturaleza exploratoria e investigativa, en el contexto de la interacción social producida en pequeños grupos y la discusión colectiva con todo el curso. “El papel del profesor es fundamental en la propuesta de tareas y en la monitorización del trabajo de los grupos, pero sin quitarles a éstos la responsabilidad por su trabajo” (Silvestre y Ponte, 2011, p. 156).

En el trabajo de Bentley y Yates (2017) se presenta un estudio comparativo de los resultados obtenidos por dos grupos de estudiantes de doce años, cuando resolvían problemas que requerían de un razonamiento proporcional (problemas de valor faltante). En uno de los grupos se utilizaron ejemplos resueltos paso a paso de reducción a la unidad, siendo este grupo el que mostró mejores resultados. Los autores concluyen que la instrucción basada en ejemplos resueltos tuvo un gran impacto en la habilidad de los estudiantes para razonar proporcionalmente, y defienden que la filosofía subyacente es “mostrar cómo funcionan las cosas”. Por tanto, se trata de un modelo de instrucción fuertemente guiada, alejado del constructivismo de las experiencias descritas en Miyakawa y Winslow (2009) y Silvestre y Ponte (2011).

El diseño didáctico que experimentamos en esta investigación difiere, sustancialmente, de los descritos anteriormente, al situarnos en un punto intermedio entre los modelos centrados en el profesor y los modelos centrados en el estudiante. Asumimos que la

[4] Debido a las diferencias que hay entre la Teoría de Situaciones, en la que básicamente se problematiza la naturaleza epistemológica del conocimiento matemático, y el Estudio de Lecciones en Japón, más centrado en la resolución de problemas matemáticos.

optimización del aprendizaje requiere de un modelo de instrucción mixto indagativo - transmisivo de enseñanza - aprendizaje que trata de conjugar estos dos modelos: la indagación de situaciones problemas por parte de los estudiantes con la enseñanza explícita de conocimientos en momentos críticos del proceso de estudio por parte del profesor.

Por un lado, aceptamos que cuando se trata con información nueva, "se debería mostrar a los aprendices qué hacer y cómo hacerlo" (Kirschner, Sweller y Clark, 2006, p. 79). Por otro, compartimos las ideas de Radford: "Para que lo general aparezca en lo singular tanto el estudiante como el profesor deberían trabajar juntos. El profesor y el estudiante tienen que comprometerse en un proceso de objetivación" (Radford, 2013, p. 35).

3. Razonamiento proporcional y algebraico temprano

Como hemos mencionado antes, en los últimos años, el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros niveles de enseñanza ha despertado gran interés en la comunidad de investigadores en educación matemática. La introducción del álgebra temprana (early algebra) en el currículum de educación primaria, persigue organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Godino, et al., 2014; Molina, 2009; Radford, 2014; Socas, 2011).

La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas dentro de las matemáticas superiores. Una visión amplia de la naturaleza del álgebra sitúa el énfasis en el desarrollo del pensamiento[5] algebraico y no en el aprendizaje de las reglas para la manipulación de símbolos (Carpenter y Levi, 2000). Si los estudiantes entienden la aritmética en un nivel que les permita explicar y justificar las propiedades que están utilizando, entonces habrán aprendido algunos fundamentos críticos de álgebra (Carpenter, Frankle y Levi, 2003). También, deberán tener en cuenta

[5] Usamos las expresiones 'pensamiento algebraico' o 'razonamiento algebraico' dependiendo del uso que hacen los autores referidos. En el EOS, se prefiere hablar de razonamiento cuando se describen las prácticas operativas y discursivas que se realizan para resolver una tarea, tanto si son realizadas por un sujeto epistémico como cognitivo. En todo caso, en la realización de tales prácticas intervienen objetos no ostensivos (mentales o ideales) que reflejan el pensamiento que las acompañan de manera necesaria.

las relaciones numéricas de una situación y expresarlas explícitamente en un lenguaje sencillo y cotidiano (Warren, 2003).

Como señala Ursini (1996), una explicación posible para algunas de las dificultades que encuentran los alumnos en el inicio del álgebra, podría proceder de la falta de antecedentes en tratar numéricamente problemas matemáticos de distinta naturaleza, que les lleven hacia la necesidad y aceptación de ideas algebraicas. Carecen, usualmente, de experiencia en generalizar y expresar una generalización; en trabajar a nivel pre-algebraico nociones que subyacen a la de función, como es la idea de variación.

Autores como Lesh, Post y Behr (1988) consideran el razonamiento proporcional como una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariación y de comparaciones múltiples en términos relativos, la habilidad para almacenar y procesar mentalmente varias piezas de información, así como también, la inferencia y predicción en situaciones de razonar, tanto de manera cualitativa como cuantitativa (Lesh, et al., 1988: 93). Así, puesto que razón y proporción versan sobre relaciones cuantitativas entre cantidades, la habilidad para razonar proporcionalmente juega un papel decisivo en el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes (Lim, 2009).

En este panorama, nuestra investigación está orientada por la siguiente pregunta:

> *¿Qué formas de razonamiento algebraico emergen en las prácticas matemáticas desarrolladas por alumnos de quinto curso de educación primaria cuando se enfrentan por primera vez a tareas de proporcionalidad directa?*

En la siguiente sección presentamos el contexto, enfoque metodológico e instrumento de recogida de datos. El diseño de las situaciones introductorias empleadas en esta investigación y su análisis a priori se incluye en la sección 4. La sección 5 se dedica a la descripción de la implementación, identificando los HDS en las diferentes configuraciones didácticas. Los resultados en términos de la evaluación de aprendizajes logrados, los niveles de algebrización reconocidos en las prácticas matemáticas de los alumnos y los HDS desde el punto de vista cognitivo se incluyen en la sección 6. El capítulo acaba con la sección de reflexiones finales en relación a la emergencia de formas de razonamiento proto-algebraico bajo el modelo instruccional implementado.

3 Método

La experiencia realizada se inscribe en el enfoque de las investigaciones de diseño instruccional (Brown, 1992; Kelly, Lesh y Baek, 2008). Centra la atención en el aprendizaje en contexto, tratando de que el diseño instruccional y la investigación sean interdependientes, sobreentendiéndose que la investigación incluye no solo la fase de diseño, sino también la experimentación en contextos de clase y la evaluación de resultados.

El enfoque metodológico que seguiremos en nuestra investigación será la ingeniería didáctica, entendida en el sentido generalizado que se propone desde el EOS (capítulo 2, sección 4): 1) estudio preliminar, 2) diseño de la trayectoria didáctica, selección de las tareas, secuenciación y análisis a priori de las mismas, 3) implementación de la trayectoria didáctica, 4) evaluación o análisis retrospectivo. En este capítulo describimos: la segunda fase en la sección 4, la implementación en la sección 5 y la última fase en la sección 6.

3.1 Contexto

La población sobre la que se centra la investigación son estudiantes de primaria que tienen su primer encuentro con situaciones-problema que ponen en juego la noción de proporcionalidad. Los participantes del estudio son un grupo de 23 estudiantes (trece niñas y diez niños) de quinto curso de Educación Primaria (10-11 años de edad), con un nivel normal de desempeño en matemáticas y que habían tenido dificultades en ese curso con el tema de fracciones, tal y como había revelado su tutor en una entrevista.

La experiencia se llevó a cabo en un centro público de enseñanza de educación infantil y primaria durante el curso 2016-2017. La selección de la muestra fue intencional, atendiendo a la disponibilidad del centro escolar y de los docentes del mismo.

3.2 Instrumentos de recogida y análisis de datos

El aprendizaje logrado por los estudiantes fue evaluado con dos situaciones-problema próximas a las situaciones trabajadas previamente en clase.

Tarea de evaluación 1: las pulseras

Irene ha hecho 6 pulseras iguales con 48 piedrecitas de colores.
a) ¿Cuántas piedrecitas necesita Irene para hacer una pulsera? Explica cómo lo has obtenido.
b) ¿Y para hacer 10 pulseras? Explica cómo lo has averiguado.
c) Irene quiere hacer una pulsera para cada una de sus amigas. Si sabes el número de amigas que tiene Irene, ¿de qué forma le explicarías cuántas piedrecitas necesitará?
d) ¿Cuántas pulseras iguales puede hacer Irene con 72 piedrecitas?
e) Si sabes el número de piedrecitas que tiene Irene, ¿cómo le explicarías cuántas pulseras puede hacer?

Figura 5.1. Descripción de la tarea *las pulseras* propuesta a los alumnos.

La primera tarea de evaluación, *Las pulseras*, sigue un esquema similar al de la situación introductoria inicial *Laura visita a su tío* (sección 4.1). Se persigue que los alumnos obtengan el valor unitario, experimenten el carácter simétrico de la relación de proporcionalidad y obtengan la regla que genera la clase de soluciones posibles al número de piedrecitas a partir del número de pulseras, o al número de pulseras a partir del número de piedrecitas disponibles, cuando éstas son variables.

Tarea de evaluación 2: el puzle

En la figura se presentan las piezas de un puzle. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Queremos construir en cartulina este puzle, pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4 cm tenga una longitud de 7 cm. ¿Sabrías que medida hay que darle a cada lado? Explica cómo lo has obtenido.

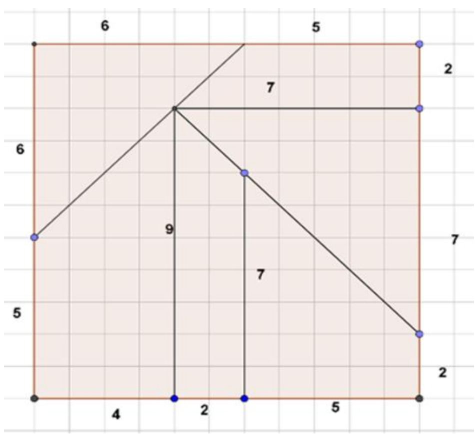


Figura 5.2. Situación del *puzle* propuesta a los alumnos
Fuente: Brousseau (1997, p. 177)

En la segunda tarea de evaluación, *El puzle*, un alumno puede reconocer que, para construir un puzle idéntico, pero de mayor tamaño, la relación entre la distancia en la figura y la distancia en el puzle de cartulina es de proporcionalidad directa, y proceder a reducir a la unidad, calculando la longitud que corresponde en el puzle de cartulina a un centímetro de la figura: 7/4=1,75. La longitud en el puzle de cartulina, que corresponde a un segmento de longitud k en la figura será $1{,}75 \times k$.

4 Diseño de las situaciones introductorias. Análisis *a priori*

Las sesiones de investigación, se desarrollaron en el tiempo (50 minutos) y la distribución habitual de la clase, durante las dos últimas semanas del curso académico. Se daba por concluido el desarrollo del temario y de forma general, se encontraban repasando los conocimientos aprendidos durante el curso, en un ambiente distendido. De manera previa a las sesiones, los alumnos no habían trabajado con problemas que involucrasen relaciones de proporcionalidad en su significado aritmético. En el primer trimestre, habían tomado un primer contacto con las fracciones, usadas como operador y como relación parte-todo. Dentro del contexto de uso geométrico de la proporcionalidad, habían realizado lectura e interpretación de mapas a escala. Sin embargo, no habían trabajado la reproducción a escala de mapas, por lo que consideramos que no se habían desarrollado actividades, hasta el momento de la investigación, que proporcionasen a los alumnos un concepto intuitivo de proporción, ni sirviesen de soporte en el desarrollo del razonamiento proporcional.

Después de presentar el contexto, la profesora-investigadora facilitó a los alumnos la hoja de trabajo que reproducimos en el siguiente apartado. La actividad está diseñada para estimular la indagación y la discusión por medio de cuestiones dirigidas que sirvan de acercamiento a la proporcionalidad. Al acabar cada actividad se discutieron las ideas de forma grupal, centrando la atención en el concepto de proporcionalidad y las propiedades cuya comprensión se persigue desarrollar con la tarea.

La primera tarea sigue la recomendación de diversas investigaciones que sugieren un primer acercamiento intuitivo al concepto de proporcionalidad, recurriendo al uso de factores multiplicativos y tablas numéricas. La segunda tarea está tomada de Mochón (2012).

4.1 Tarea introductoria 1: Laura visita a su tío

Iniciamos el razonamiento proporcional a través de razones sencillas como doble, mitad y el reconocimiento de la propiedad aditiva de la función de proporcionalidad por medio del registro tabular. Veamos la descripción de la tarea en la Figura 5.3:

Es la fiesta fin de curso y las clases de quinto quieren encargar tartas para celebrarlo. El tío de Laura es pastelero, ¡hace unas tartas deliciosas! Así que Laura ha ido a visitarlo. Esa mañana usó 3 litros de leche para hacer 18 tartas iguales. Laura quiere saber cuántas tartas puede elaborar con 6, 2 y 5 litros de leche.

Laura, que es una chica muy lista, razona de la siguiente manera para formar una tabla como la mostrada a continuación.

- Primero, 6 es el doble de 3 (el número de litros de leche que necesitó para 18 tartas). Coloca tú en la tabla el número de tartas que puede hacer con 6 litros de leche.

- Luego piensa que 2 litros es la tercera parte de 6 litros. Pon el siguiente número de tartas en la tabla.

- Por último 5 litros de leche son 2 litros más los 3 litros iniciales. Termina de llenar la tabla siguiendo estas tres ideas.

Litros de leche	*3*	*6*	*2*	*5*
Tartas	*18*			

¿Se te ocurre alguna forma distinta a como lo hizo Laura para completar la tabla?

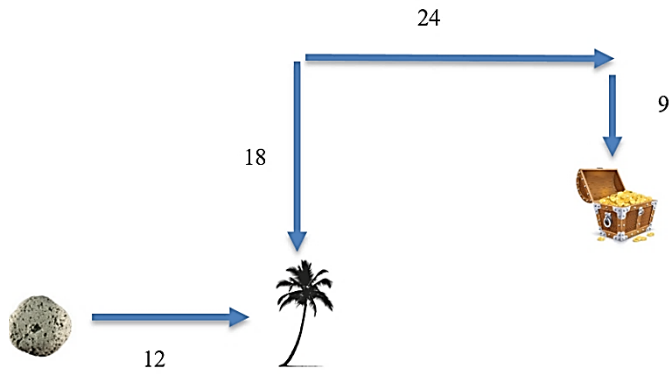
Figura 5.3 Descripción de la tarea *Laura visita a su tío* propuesta a los alumnos

Para completar la tabla han debido considerar que al duplicar el número de litros de leche se duplican el número de tartas, al dividir por tres el número de litros de leche el número de tartas también queda dividido de igual forma. Además, si una cantidad de litros de leche es la suma de otras dos, el número de tartas que podrá fabricar es la suma del número de tartas que puede hacer con cada cantidad menor de litros de leche.

4.2 Tarea introductoria 2: El Pirata

La tarea se incluye en la figura 5.4:

Un pirata encuentra un mapa con medidas raras en el que se indica dónde fue enterrado un tesoro. El diagrama grabado es el siguiente.



El pirata localiza la piedra y la palmera y al caminar entre ellos, cuenta 30 de sus pasos. Ayúdale a saber cuántos de sus pasos corresponden a cada una de las medidas dadas en el mapa.

Figura 5.4 Tarea *el pirata* (Fuente: Mochón, 2012, p. 144)

El alumno debe cuestionarse la relación entre las medidas del mapa y los pasos del pirata, convenciéndose de que se trata de una situación de proporcionalidad, investigando cómo se ve afectada la cantidad de pasos del pirata, si la correspondiente medida en el mapa se duplica, triplica o demedia.

4.3 Tarea introductoria 3: Laura sigue pensando

En la última parte de la hoja de trabajo, retomamos la tarea inicial con la intención de introducir la reducción a la unidad, como procedimiento para resolver una situación de proporcionalidad. Autores como Ercole, Frantz y Ashline (2011) describen este procedimiento como estrategia intuitiva que puede usarse como punto de partida para la instrucción de la proporcionalidad (p. 483). .

La descripción de la tarea está en la Figura 5.5:

Regresemos a la situación anterior en la que Laura estaba tratando de calcular los litros de leche que necesita su tío para hacer varias tartas. A Laura se le ocurre una idea genial (¡ya hemos dicho que es muy lista!): si puedo calcular el número de tartas que hace mi tío con un solo litro de leche, el cálculo para los otros litros de leche es más fácil. Para esto incluyó el 1 *extra en la fila de los litros de leche:*

Litros de leche	*3*	*1*	*6*	*2*	*5*
Tartas	*18*				

Ahora, intenta responder a estas preguntas:

a) Si sabes el número de litros de leche de que dispone el pastelero, ¿de qué forma explicarías a un amigo cuantas tartas puede hacer?

b) ¿Cuántos litros de leche necesita el pastelero para hacer 4 tartas?

c) Si sabes el número de tartas que le han encargado hacer al pastelero, ¿cómo le explicarías al pastelero cuántos litros de leche necesita comprar?

Figura 5.5 Descripción de la tarea *Laura sigue pensando*

Después de obtenido el valor unitario, se espera que el alumno responda a la consigna a) como sigue: conocido el número de litros de leche de que dispone el pastelero, y que con 1 litro de leche se pueden hacer 6 tartas, para saber el número de tartas que se pueden elaborar, basta multiplicar por 6. Para responder a la pregunta b) el alumno debe tener en cuenta que la cantidad de litros de leche necesarios se puede obtener dividiendo por 6 la cantidad asociada de tartas. Por tanto, para realizar 4 tartas son precisos $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ litros de leche. Finalmente, en la consigna c) se espera que el alumno generalice esta propiedad y concluya que, si el pastelero sabe el número de tartas, el número de litros de leche que va a necesitar para ello lo puede obtener dividiendo por 6, que es la cantidad de tartas que puede hacer con un litro de leche.

5 Descripción de la implementación

En esta sección se describe la implementación del diseño instruccional, por medio de la noción de configuración didáctica. La dinámica, desarrollada a lo largo de las sesiones, persiguió promover la participación de los alumnos en las tareas y motivar y organizar la continua interacción entre la profesora y los alumnos, para potenciar la confianza de los alumnos que se enfrentaban, por primera vez, a problemas de proporcionalidad, identificar conflictos semióticos potenciales y resolver aquellos que se produjesen durante el proceso de instrucción. Todas las sesiones fueron de hora y media de duración en la franja inmediatamente anterior al recreo.

El tutor del grupo solicitó a la investigadora comenzar por recordar a los estudiantes los conceptos relativos a fracciones. Esta primera sesión de trabajo no estaba prevista y supuso la necesidad de ajustar el tiempo de dedicación a las tareas posteriores. La siguiente sesión sirvió para acercar a los alumnos al contexto geométrico de la proporcionalidad y semejanza, conectando con sus conocimientos previos sobre mapas y planos a escala. Para ello la investigadora había preparado una presentación y usó el proyector y pizarra electrónica presentes en el aula de clase.

A continuación, describimos cómo se desarrollaron las siguientes sesiones, destinadas al trabajo sobre proporcionalidad aritmética y que centran nuestra atención en este capítulo, señalando los *hechos didácticos significativos* (HDS) en su desarrollo.

5.1 Configuración didáctica 1: Introducción

Se presentaron a los estudiantes diversas situaciones cotidianas en las que la relación entre cantidades de dos magnitudes es de proporcionalidad directa. El precio pagado por distintas cantidades de un artículo, la distancia recorrida por un coche a velocidad constante y el tiempo. En estas situaciones, aparecen dos series de números, que se representaron en la pizarra por medio de tablas (análogas a las que se incluyeron en la hoja de trabajo), de forma que los estudiantes podían reconocer la existencia de cierto número (la razón de proporcionalidad) que les permitía escribir cada valor de la segunda serie como producto por dicho número de los valores correspondiente de la primera serie.

Se les introdujo, también, algunas situaciones de no proporcionalidad, en las que los alumnos debían decidir si lo eran o no y por qué. Por ejemplo, la edad y la altura de un niño. Consideramos un HDS que, en este momento, algunos alumnos intervinieron para completar una tabla, asumiendo que la relación entre tales magnitudes era de proporcionalidad, para descubrir después que no podía serlo a la luz de resultados que chocaban con su experiencia y sentido común.

Después de presentar el contexto, la profesora-investigadora facilitó a los alumnos la hoja de trabajo que detallamos en la sección anterior. Los alumnos estaban organizados por parejas, siguiendo con la distribución habitual para trabajar en el aula con su profesor.

5.2 Configuración didáctica 2: Laura visita a su tío

La primera tarea, *Laura visita a su tío* estaba diseñada para estimular la indagación y la discusión por medio de cuestiones dirigidas que sirvieran de acercamiento a la proporcionalidad. La resolución de esta tarea se llevó a cabo en gran grupo: los alumnos intervenían para completar la tabla, argumentando en cada momento la respuesta y discutiendo con los compañeros la estrategia seguida. Al acabar cada actividad se discutieron las ideas de forma grupal, centrando la atención en el concepto de proporcionalidad y las propiedades cuyo conocimiento y comprensión se perseguían desarrollar con la tarea.

Para responder a la pregunta *¿Se te ocurre alguna forma distinta a como lo hizo Laura para completar la tabla?*, un alumno (Nico) identifica que para calcular las tartas que se pueden hacer con 2 litros de leche, se pueden calcular los $\frac{2}{3}$ de las tartas que se hacen con 3 litros de leche, es decir, $\frac{2}{3}$ de 18.

5.3 Configuración didáctica 3: El pirata

La tarea sobre el pirata no es tan dirigida como la primera, y plantea mayor variedad de estrategias que se pone de manifiesto en la puesta en común en clase. En esta ocasión, se les dejó a los alumnos un tiempo para realizarla de manera individual en clase, aunque podían discutir con su compañero. Después, se completó en la pizarra, incluyendo sus aportaciones, la tabla que relacionaba las distintas medidas en el mapa con los pasos del pirata correspondientes.

Consideramos como HDS la mayor dificultad presente en esta tarea frente a la anterior, debido a la constante de proporcionalidad no entera. Algunos alumnos pusieron de manifiesto esta dificultad a la hora de determinar el número de pasos del pirata correspondientes a la medida 9 en el mapa. Sin embargo, fueron los propios estudiantes los que resolvieron las dudas de sus compañeros sin que la profesora-investigadora tuviera que intervenir más que como moderadora.

5.4 Configuración didáctica 4: Laura sigue pensando

Esta tarea se desarrolló en gran grupo: los alumnos intervenían justificando en cada momento su respuesta o poniendo en duda la de los compañeros. El procedimiento de reducción a la unidad y la identificación en la tabla de la constante de proporcionalidad no supuso ninguna dificultad para los alumnos. De hecho, algunos de ellos, lo habían puesto en práctica de forma intuitiva en la primera parte de la tarea *Laura visita a su tío* para completar la tabla.

La respuesta a la primera consigna (*si sabes el número de litros de leche de que dispone el pastelero, ¿de qué forma explicarías a un amigo cuantas tartas puede hacer?)* fue unánime por parte de los alumnos que intervinieron: *multiplicando por 6, que son las tartas que se pueden hacer con un litro de leche*.

Sin embargo, en el caso de la segunda tarea *(¿cuántos litros de leche necesita el pastelero para hacer 4 tartas?)* se hizo más necesaria la intervención de la profesora-investigadora para dirigir la discusión y acompañar argumentos con representaciones gráficas en la pizarra. Un estudiante, Nico, interviene: *son 2/3 de litro*. A la pregunta de la investigadora en relación a cómo lo ha obtenido, explica: *como 4 son los 2/3 de 6, para hacer 4 tartas necesitaré 2/3 de litro de leche*.

Algunos compañeros tuvieron dificultades para entender el argumento de Nico y la investigadora procedió a dibujar en la pizarra 6 tartas e identificar, siguiendo las instrucciones de Nico, que: *si 1 litro de leche es necesario para las 6 tartas entonces cada 2 tartas necesito 1/3* de litro. *Por tanto, 4 tartas son 2/3 de litro de leche* (Figura 5.6).

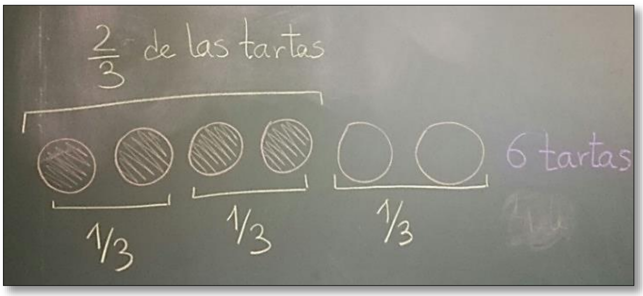


Figura 5.6 Imagen de pizarra con las tartas

Consideramos, aquí, dos HDS: por un lado, que gran parte de los alumnos hubieran recurrido de manera intuitiva y natural a la obtención del valor unitario y por otro que la relación inversa (obtener los litros de leche a partir del número de tartas) suponga una mayor complejidad.

6 Resultados y discusión

Para evaluar el grado de aprendizaje logrado por los estudiantes, aplicando el instrumento descrito en la sección 3.2, se definieron dos variables cuantitativas y cuatro variables cualitativas. Las variables cuantitativas refieren al grado de corrección de la respuesta y al grado de corrección de las explicaciones dadas por los estudiantes en las tareas de evaluación:

- *Grado de corrección de la solución*: incorrecta, parcialmente correcta o incompleta (cuando incluye la operación aritmética pero no identifica el resultado de la misma como solución para la situación de las pulseras, o si determinó adecuadamente un mínimo de tres medidas en la del puzle) y correcta.
- *Grado de corrección de la explicación*: incorrecta, parcialmente correcta (cuando no explicita la relación de proporcionalidad o recurre a un caso particular en los ítems c y e en la situación de las pulseras), correcta (cuando la argumentación se basa en la relación de proporcionalidad).

En ambos casos se ha asignado una puntuación de 0, 1, o 2 puntos si la respuesta es incorrecta (o el alumno no responde), parcialmente correcta o correcta, respectivamente. Las variables cualitativas refieren, con base a nuestro marco teórico, a la presencia en la práctica matemática de determinados tipos de objetos como son procedimientos, argumentos, tipos de lenguaje y representaciones, así como el grado de generalidad de los objetos emergentes en las prácticas realizadas.

6.1. Evaluación de los aprendizajes logrados

De manera global, el 87% de los alumnos realizaron exitosamente las tareas. En una escala sobre 10, el valor mínimo obtenido en el grado de corrección fue de 3,33 y el máximo de 8,88. La puntuación mediana fue de 7,22; el recorrido intercuartílico 3,33 y la media aritmética fue de 6,61.

Por otro lado, los alumnos tuvieron más dificultades para realizar apropiadamente la tarea del puzle que la de las pulseras. El porcentaje de respuestas correctas (parcial o totalmente) a los distintos ítems de la tarea de las pulseras es como mínimo del 69,56% (en el último apartado) y superior al 95% en las prácticas operativas (alcanza el 100%

en el primer ítem). Para la tarea del puzle el porcentaje de respuestas correctas (parcial o totalmente) es del 69,56% y el de justificaciones apropiadas del 56,52%.

En la tabla 5.1 aparecen los valores, mínimo, máximo, media y desviación típica para cada una de las tareas.

Tabla 5.1 Estadísticos sobre puntuaciones en escala 0-10 en las tareas del puzle y las pulseras

	Mínimo	Máximo	Media	Desviación típica
Pulseras	3,7	9,29	7,21	1,49
Puzle	0,00	10,00	4,57	3,59
Total	2,78	8,89	6,62	1,80

La estrategia de resolución más seguida fue la obtención del valor unitario, en ambas tareas. En el caso de la tarea del puzle, algunos estudiantes usaron un procedimiento de resolución que calificamos de mixto, ya que combinan estrategias aditivas con reducción a la unidad (ver ejemplo de esta estrategia en la figura 5.13).

Los tipos de registros usados de forma mayoritaria son el natural y numérico, de manera conjunta. El registro diagramático o tabular tiene una presencia importante en las producciones de los alumnos: un mínimo de 8,7% (ítem b) y máximo de 15,79% (ítem e) lo usaron en la tarea de las pulseras, mientras que un 90% de los alumnos lo usaron en la tarea del puzle (ver figuras 5.13).

Las figuras 5.7 y 5.8 muestran las producciones de dos alumnos a las tareas c) y e), respectivamente, en las que recurren a un lenguaje más simbólico para hacer referencia a las incógnitas o parámetros.

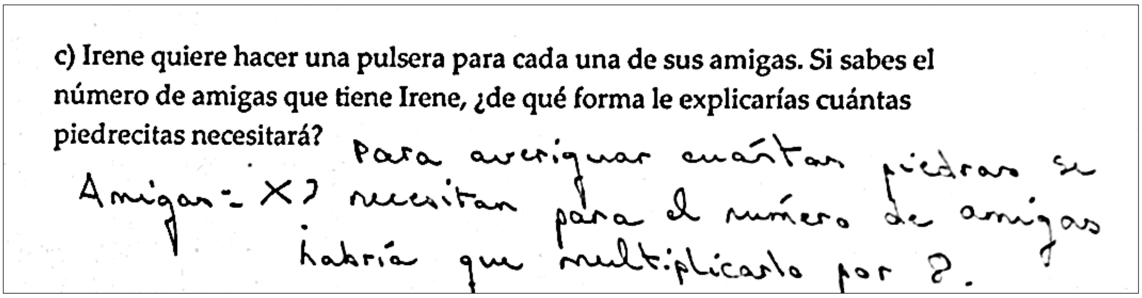


Figura 5.7. E10 usa el símbolo literal para incógnita.

El valor unitario, “piedras por pulsera”, es representado por varios alumnos como se percibe en la imagen siguiente, a través de la identidad “8 piedrecitas=1pulsera”.

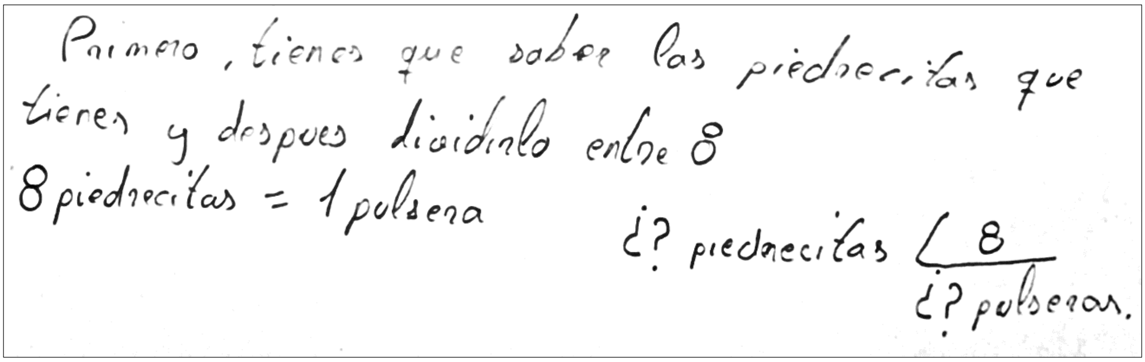

Primero, tienes que saber las piedrecitas que tienes y despues dividirlo entre 8
8 piedrecitas = 1 pulsera
¿? piedrecitas |8
¿? pulseras.

Figura 5.8. Uso del símbolo ¿? por E11 para denotar cantidades desconocidas

Las tareas a), b) y d) sólo involucran números particulares (objetos con un primer grado de generalidad). En estos apartados o de manera conjunta a todos ellos, algunos alumnos elaboran tablas (objetos con un segundo grado de generalidad), donde las filas son los números de piedrecitas y los números de pulseras, y el número de columnas es variable. En este sentido, mencionamos que diversos autores sostienen que el uso de tablas para organizar los datos del problema ayuda a los alumnos a comprender la conservación de las relaciones internas entre los datos de una serie y la permanencia de las relaciones externas entre los datos de series proporcionales (Streefland, 1985).

Responder de manera correcta a los apartados c) y e) de la tarea de las pulseras requiere un proceso de generalización: expresar la regla para hallar el número de piedrecitas a partir del número de pulseras (ítem c), o el número de pulseras a partir del número de piedrecitas disponibles (ítem e), cuando éstas son variables. En términos de Radford (2003), se produce una generalización contextual: los estudiantes objetivan un esquema operacional que actúa sobre objetos abstractos, pero conceptual, espacial y temporalmente situados. Diecinueve alumnos, de veintiuno que respondieron al ítem c), y diecisiete alumnos de diecinueve que respondieron al ítem e), lograron este mayor grado de generalidad en la resolución de la tarea.

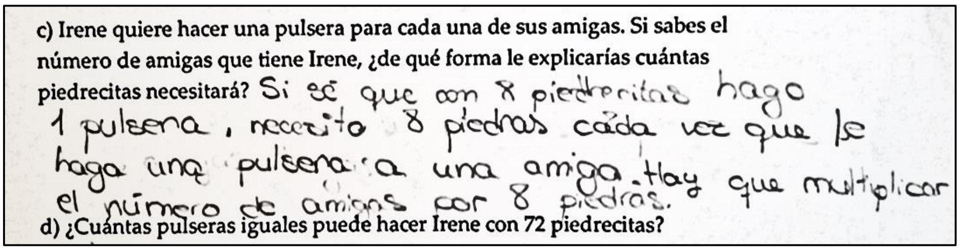
Respecto al grado de generalidad de la actividad matemática desarrollada en la tarea del puzle, es importante notar que trece de los veinte alumnos que efectuaron la tarea (es decir, el 65% de éstos), consiguieron expresar la regla general que les permitía obtener las distintas distancias en el puzle de cartulina a partir de las correspondientes distancias en el puzle modelo, a través de la constante de proporcionalidad. Otros tres alumnos (esto es, el 15%) incluyeron de forma exclusiva una tabla completa donde se relacionaban las medidas sin desarrollar ninguna otra práctica discursiva, y otros tres trabajaron con números particulares con relaciones infructuosas.

Identificamos tres categorías de argumentación en las producciones de los alumnos:

1) *informal*, aquellas del tipo “multiplicando”, “dividiendo” o que recurren a un caso particular;
2) *de orientación aritmética*, cuando incluyen la operación aritmética sin identificar su significado;
3) *formal*; basada en la relación de proporcionalidad o valor unitario.

La justificación que acompañaba a las prácticas operativas de la tarea de las pulseras fue mayoritariamente de orientación aritmética, mientras que, en el caso de las prácticas discursivas, así como en la tarea del puzle, la justificación predominante se puede considerar de tipo formal.

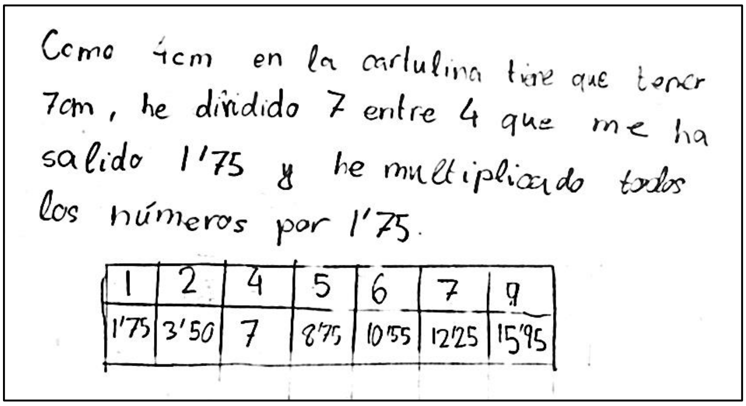
Alrededor del 90% de los alumnos lograron expresar la regla general que relacionaba el número de pulseras con el número de piedrecitas (ver figuras 5.9 y 5.14), frente al 55% de alumnos que consiguieron declarar la relación entre las medidas de la maqueta y el puzle en cartulina (ver figura 5.10).



c) Irene quiere hacer una pulsera para cada una de sus amigas. Si sabes el número de amigas que tiene Irene, ¿de qué forma le explicarías cuántas piedrecitas necesitará? Si sé que con 8 piedrecitas hago 1 pulsera, necesito 8 piedras cada vez que le haga una pulsera a una amiga. Hay que multiplicar el número de amigas por 8 piedras.

d) ¿Cuántas pulseras iguales puede hacer Irene con 72 piedrecitas?

Figura 5.9. Respuesta de una alumna basada en el significado del valor unitario.



Como 4cm en la cartulina tiene que tener 7cm, he dividido 7 entre 4 que me ha salido 1'75 y he multiplicando todos los números por 1'75.

1	2	4	5	6	7	9
1'75	3'50	7	8'75	10'55	12'25	15'95

Figura 5.10. Respuesta de una alumna a la tarea del puzle donde identifica la constante de proporcionalidad

6.2. Niveles de algebrización

Para determinar el nivel de algebrización de la actividad desarrollada, analizamos los tipos de objetos (números particulares, series de números en registro tabular, clases de medidas del puzle en cartulina), las transformaciones aplicadas sobre objetos (cálculos), las representaciones usadas (lenguaje natural, numérico, tabular o simbólico), y el grado de generalidad logrado.

En el estudio de los niveles de algebrización de la situación de las pulseras, y pensando en el proceso de generalización y las transformaciones implicadas, distinguimos dos partes en la tarea. Por un lado, los ítems a), b) y c) que preguntaban sobre el número de piedrecitas a partir de una cantidad (conocida o desconocida) de pulseras, y por otro lado los ítems d) y e) que preguntaban sobre el número de pulseras a partir de una cantidad (conocida o desconocida) de piedrecitas.

Los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas requeridas son números particulares, tablas en algunos casos o bien la clase de posibles soluciones fijado el número de amigas (apartado c) o el número de piedras (ítem e). El lenguaje es natural, numérico o icónico y aunque puedan intervenir símbolos para referirse a datos desconocidos, no se opera con ellos.

Casi todos los alumnos, respondieron a la tarea por medio de reducción a la unidad y la mayoría expresaron la regla general en base a ésta. Cuando se reconoce la generalidad, se hace en lenguaje natural. Así concluimos que la actividad matemática desarrollada por la mayoría de los alumnos (diecinueve de los 23 en la primera parte, y dieciocho de los 23) en la segunda se puede considerar proto-algebraica (nivel 1 de algebrización). Cinco estudiantes tuvieron un nivel de algebrización distinto en la primera parte y la segunda; concretamente, para tres de ellos la actividad de la primera parte fue de nivel 1 de algebrización y nivel 0 (aritmética) en la segunda, y para dos de ellos el tratamiento de la primera parte fue aritmético y en la segunda parte proto-algebraico de nivel 1.

En la figura 5.11 se puede ver la diferencia de niveles con que una alumna responde a dos tareas: la actividad en el primer apartado se considera de nivel 0, ya que opera sobre números particulares, en un lenguaje natural y numérico; en el segundo apartado se considera de nivel 1, ya que explicita el criterio para obtener el número de piedras a partir del valor unitario. La alumna llega en el ítem e) a una generalización contextual, por medio de la cual es capaz de establecer, verbalmente, una relación funcional entre el número de piedras y el número de pulseras, reconociendo la indeterminación de la primera cantidad.

Práctica de nivel 0 de algebrización

c) Irene quiere hacer una pulsera para cada una de sus amigas. Si sabes el número de amigas que tiene Irene, ¿de qué forma le explicarías cuántas piedrecitas necesitará?

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 6 \\ \hline 48 \end{array}$$

Solución: Son 8 piedras por pulsera, 6 amigas, por eso necesita 48 piedras.

d) ¿Cuántas pulseras iguales puede hacer Irene con 72 piedrecitas?

Práctica de nivel 1 de algebrización

e) Si sabes el número de piedrecitas que tiene Irene, ¿cómo le explicarías cuántas pulseras puede hacer?

Todos las piedras que tenga las divido por 8 que son las piedras que tiene en una pulsera

Figura 5.11. Soluciones con niveles de algebrización distinta

En la tarea del puzle, la mayoría de los alumnos (15 de los 20 estudiantes que la realizaron) respondieron a la tarea obteniendo el factor de proporcionalidad y expresaron la regla general en base a éste. Cuando se reconoce la generalidad, se hace en lenguaje natural. Así concluimos que la actividad matemática desarrollada por la mayoría de los alumnos se puede considerar proto-algebraica (nivel 1 de algebrización). Además, cuatro (de los 20 que la realizaron) desarrollaron una actividad totalmente aritmética, esto es nivel 0 de algebrización y un estudiante resolvió la tarea empleando un nivel 2 de algebrización. En la respuesta dada por este alumno (ver figura 5.12) cada medida se obtiene como valor faltante en una proporción, establecida entre las medidas del puzle en la maqueta y el puzle que se pretende construir en la realidad, siendo en cada caso una de las razones 4/7. Además, dicho alumno recurre a un simbolismo que no se le había introducido antes en clase (según confirmó el tutor del grupo).

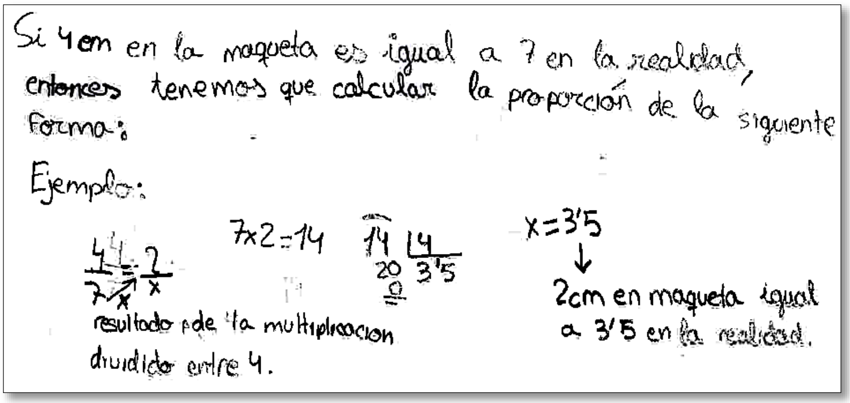


Figura 5.12. Fragmento de la solución propuesta por un alumno basada en razones.

6.3 Discusión: Hechos didácticos significativos

La diferencia de grado de éxito obtenido entre ambas tareas muestra que los alumnos tuvieron mayor dificultad para identificar la constante de proporcionalidad en el problema de proporcionalidad geométrica frente al problema de proporcionalidad aritmética.

Según afirman Miyakawa y Winslow (2009, p. 213):

> […] parece deducirse de los experimentos previos realizados por Brousseau y colegas que, a pesar de la cuidada preparación en las lecciones previas, los estudiantes tienden de manera espontánea a construir las piezas mayores añadiendo 3 cm a todos los lados conocidos (ya que 7 cm es 3 cm más que 4 cm).

En nuestro estudio, no hemos encontrado evidencias de este tipo de respuestas por parte de los alumnos, posiblemente porque la realización de esta tarea estuvo precedida de otras introductorias sobre proporcionalidad aritmética, por medio de tablas numéricas y el planteamiento de cuestiones dirigidas a identificar las propiedades aditiva y homogénea de la función de proporcionalidad. No obstante, dado que se trata de un estudio de caso la confirmación de este resultado queda planteada como hipótesis para nuevos ciclos de experimentación.

Algunos investigadores consideran que la existencia de pequeñas diferencias en las cantidades que determinan las relaciones dadas en los problemas propicia que los alumnos recurran a estrategias aditivas (Kaput y West, 1994). Otras investigaciones sugieren que los alumnos tienen mayores dificultades en resolver problemas de proporcionalidad cuando las relaciones entre los datos no son enteras. Intentar evitar las fracciones conduce a los alumnos al uso de estrategias incorrectas (Karplus, Pulos y Stage, 1983).

En la tarea del puzle, algunos alumnos de nuestra muestra identificaron el valor unitario después de haber realizado ciertas operaciones aritméticas (dividir por dos de forma sucesiva). En otras ocasiones, como muestra la respuesta recogida en la Figura 5.13, recurrían a una estrategia aditiva para determinar las medidas, sumando el valor unitario tantas veces como fuese preciso.

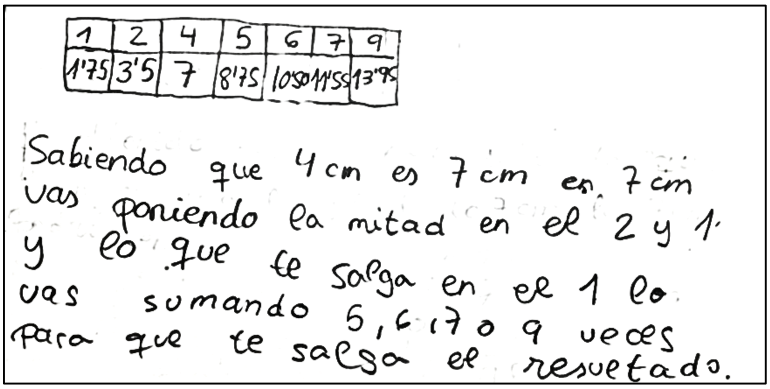
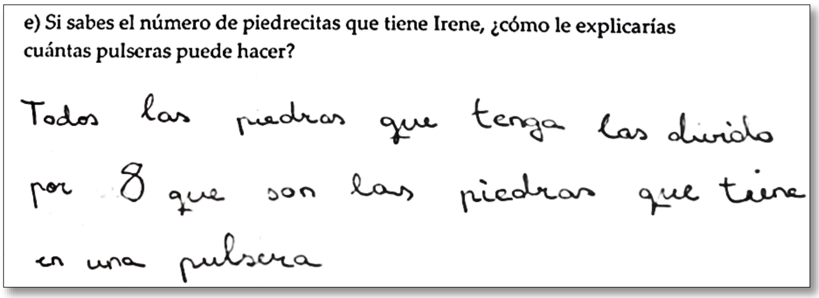


Figura 5.13 Estrategia de tipo mixto en la tarea del puzle

La relación de proporcionalidad entre magnitudes o series de números es una relación simétrica, pero la constante de proporcionalidad depende del orden en que las magnitudes o series de números sean consideradas. Algunas investigaciones (Dupuis y Pluvinage, 1981; Bezuk, 1986) sostienen que el orden en que se presentan los datos en un problema de valor faltante, determina el grado de dificultad en su resolución, de manera que, a los ítems d) y e) se les presupone una mayor dificultad que a los apartados a), b) y c).

Podemos considerar que, tras la instrucción específica implementada, los alumnos han superado la dificultad del razonamiento inverso en una relación de proporcionalidad (manifestada en la tarea introductoria de las tartas), reconociendo la simetría de la relación. Así, un 86,95%, no tuvieron dificultades en responder adecuadamente cuando se preguntaba de manera inversa por las pulseras y no por el número de piedras. Sin embargo, explicar de forma correcta esta relación recíproca supuso mayor dificultad. En la figura 5.14 se muestra un ejemplo de respuesta dada por un alumno a este ítem.


e) Si sabes el número de piedrecitas que tiene Irene, ¿cómo le explicarías cuántas pulseras puede hacer?

Todos las piedras que tenga las divido por 8 que son las piedras que tiene en una pulsera

Figura 5.14. Respuesta de un alumno donde obtiene la regla para determinar el número de pulseras a partir del número de piedras

El análisis de los datos ha permitido identificar algunos HDS en la faceta cognitiva del proceso formativo implementado. Dichos HDS tienen una cierta incidencia en la muestra de sujetos y, por tanto, pueden ser indicativos de la manifestación de *fenómenos didácticos*, es decir, hechos didácticos que implican una cierta regularidad:

1) Los alumnos han realizado un uso prioritario de la estrategia de reducción a la unidad en la resolución de las tareas.
2) El registro tabular ha sido recurrente.
3) Tras la instrucción los alumnos han superado la dificultad del razonamiento inverso en una relación de proporcionalidad (manifestada en la tarea introductoria de las tartas), reconociendo la simetría de la relación.
4) El problema de proporcionalidad geométrica tiene una mayor dificultad conceptual y operativa (factor de proporcionalidad fraccionario).
5) Comenzar con tareas de proporcionalidad aritmética ha evitado el uso de estrategias incorrectas reconocidas en investigaciones previas en la tarea del puzle.

Como hemos indicado anteriormente, dado el carácter de estudio de caso de nuestra investigación, los resultados 1) a 5) indicados deben ser tomados como hipótesis a contrastar en nuevos ciclos de experimentación.

7 Reflexiones finales

Los estudios de Inheler y Piaget (1978) proponen que el pensamiento proporcional se desarrolla gradualmente. Además varias investigaciones sugieren que estudiantes en la etapa que estos autores denominaron “concreta” (8 a 12 años), disponen de un esquema proporcional latente. Por este motivo, es importante desarrollar prácticas docentes que estimulen el desarrollo de potenciales esquemas de razonamiento proporcional antes de acabar la etapa de educación primaria. Como señalan Miyakawa y Winsløw (2009, p. 203):

> […] mientras que el tratamiento algebraico puede ayudar a trivializar nociones y problemas relativos a proporcionalidad para estudiantes de secundaria, normalmente se tiene que evitar en una primera aproximación en educación primaria. Y esto se añade al reto de construir primeros encuentros con el razonamiento proporcional en este nivel.

7.1. Un modelo instruccional dialógico-colaborativo

El papel del profesor para desarrollar esquemas de razonamiento proporcional en educación primaria, sin duda es de vital importancia. Como hemos puesto de manifiesto, optimizar la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático precisa de un modelo de instrucción mixto dialógico-colaborativo de enseñanza-aprendizaje en el que tanto el estudiante como el profesor desempeñen roles protagonistas.

En nuestro caso, la profesora-investigadora comenzó presentando las nociones básicas de proporcionalidad, vinculadas a la semejanza y las escalas, que les eran familiares a los alumnos. En la configuración didáctica 1, reconocemos una situación introductoria del contenido con el que los estudiantes tienen su primer encuentro. El profesor debe presentar la información precisa para que los estudiantes comprendan el contexto, predominando un formato transmisivo-dialógico.

Las tareas correspondientes a las situaciones introductorias, pretendían incorporar a los estudiantes en el proceso de introducción a la proporcionalidad, *trabajando juntos*. El diseño requería de los estudiantes que, por un lado, prestaran atención a sus compañeros, valorando la validez de sus respuestas y contrastando con sus propias soluciones. En las configuraciones didácticas 2, 3 y 4 predomina el aspecto indagativo-cooperativo. Los alumnos trabajaban sobre la hoja de trabajo de forma colaborativa y la profesora-investigadora podía intervenir para orientar, recordar la información necesaria y dirigir la discusión en gran grupo.

Por último, las situaciones de evaluación mediante las que se obtuvo la información sistemática sobre el grado de logro de los aprendizajes, corresponden a momentos netamente indagativos, en los que el estudiante respondía de manera personal a las tareas propuestas representativas del contenido pretendido.

En este capítulo hemos descrito el modelo didáctico experimentado y los resultados obtenidos en términos de los aprendizajes de los alumnos, destacando algunos hechos didácticos significativos. Puesto que se trata de un estudio de caso con un solo grupo y un enfoque de investigación descriptiva-interpretativa, no se puede concluir que los aprendizajes sean consecuencia exclusiva del modelo instruccional implementado. Se hace necesario contrastar estos resultados en nuevos ciclos de investigación sobre este tema y en contextos similares.

No obstante, a la luz de los resultados logrados, creemos que este modelo de colaboración entre el profesor y los estudiantes, en relación a la situación-problema que se pretende resolver y el contenido matemático puesto en juego, consigue altos niveles de idoneidad en sus facetas interaccional, cognitiva y afectiva. Un apropiado grado de diálogo, interacción y comunicación ha permitido:

- detectar estrategias intuitivas, naturales y aquellas que los alumnos desarrollan con poca guía por parte del profesor (uso recurrente del registro tabular, estrategia de reducción a la unidad);
- aumentar el grado de implicación e interés del alumnado;
- identificar conflictos semióticos (mayor dificultad cuando la constante de proporcionalidad no es entera o al trabajar con la relación inversa) y resolverlos.

7.2. Emergencia de razonamiento proto-algebraico

El análisis retrospectivo sobre la experiencia pone de manifiesto que el uso de tareas introductorias sobre proporcionalidad, por medio de tablas numéricas y el planteamiento de cuestiones dirigidas a identificar las propiedades aditiva y homogénea de la función de proporcionalidad, puede permitir que los alumnos progresen hacia niveles superiores de razonamiento algebraico, evitando el uso incorrecto de estrategias de composición y descomposición que involucraba relaciones aditivas o aditivas y multiplicativas a la vez (Fernández-Lajusticia, 2001; Misailidou y Williams, 2003; Silvestre y Ponte, 2012).

Godino, et al. (2014) proponen el modelo teórico de los niveles de algebrización para describir el tipo de razonamiento algebraico que se pone en juego en la resolución de tareas matemáticas específicas por un sujeto epistémico, en términos de la presencia gradual, en la actividad matemática, de objetos y procesos algebraicos, así como el desarrollo progresivo de las formas del lenguaje y de los procesos de generalización. En este capítulo, hemos aplicado los niveles de algebrización para describir el trabajo matemático de los propios estudiantes cuando resuelven situaciones de proporcionalidad.

Hemos constatado que la mayoría de los alumnos respondieron con un nivel 1 de algebrización a las tareas (78% en la tarea de las pulseras y 75% en la tarea del puzle). De hecho, algunos alumnos habían puesto en práctica de forma intuitiva la estrategia de reducción a la unidad en la primera tarea introductoria para completar la tabla. Los alumnos que desarrollaron un nivel 0 de algebrización en los apartados a), b), c), respondieron de forma incorrecta a los ítem b) y c) y tres de los alumnos que desarrollaron una actividad de nivel 0 en los apartados d), e), respondieron de forma incorrecta al último ítem. De igual forma, todos los alumnos que respondieron de forma incorrecta a la tarea del puzle desarrollaron una actividad aritmética. Parece deducirse de este hecho, cierta relación entre el grado de éxito en la respuesta y el carácter proto-algebraico de la actividad desarrollada.

Podemos concluir en relación a nuestra pregunta de investigación, que la mayoría de los alumnos que participaron en nuestro estudio exhibieron una forma de razonamiento proto-algebraico incipiente cuando se enfrentaron por primera vez a tareas de proporcionalidad. El dominio progresivo del razonamiento algebraico, ligado a la proporcionalidad, es un objetivo educativo deseable que no se logrará de manera espontánea.

Uno de los objetivos que hemos perseguido con la investigación en la que se enmarca este capítulo, ha sido buscar condiciones didácticas, a través de un modelo mixto instructivo-investigativo, que permitan reconocer y promover formas de razonamiento proto-algebraico. La identificación de los objetos, procedimientos y significados vinculados a los distintos niveles de algebrización, nos ha permitido constatar formas de razonamiento algebraico temprano emergentes en las prácticas desarrolladas por alumnos de quinto curso de educación primaria, cuando se enfrentan por primera vez a tareas de proporcionalidad directa.

En este capítulo hemos centrado la atención en investigar las relaciones entre el razonamiento proporcional y el algebraico aplicando los criterios de caracterización de los niveles proto-algebraicos de razonamiento algebraico El crecimiento del razonamiento proporcional se conecta con la aplicación de objetos y procesos algebraicos, los cuales aportan significados progresivamente más elaborados para la proporcionalidad. Por otra parte, la experimentación con los alumnos de 5º curso de primaria se realiza bajo un modelo didáctico de tipo mixto, instructivo – investigativo, en el que se propone un primer encuentro con la proporcionalidad con ejemplos introductorios, en cuya resolución tanto el docente como los estudiantes tienen papeles protagonistas.

Desarrollar un razonamiento proporcional no es lo mismo que ser capaz de aplicar una regla o algoritmo (reducción a la unidad, o regla de tres) para resolver un problema de proporcionalidad. Creemos que es importante desde el inicio de la instrucción, dar oportunidades a los estudiantes de desarrollar una comprensión conceptual de la proporcionalidad, y de pensar, comunicar y generalizar las relaciones de forma que resolver problemas de proporcionalidad no se reduzca únicamente a la aplicación memorística de una técnica o procedimiento.

En la construcción progresiva del razonamiento proporcional, es posible promover niveles mayores de algebrización aprovechando la variedad de significados presentes en los contenidos matemáticos de educación primaria. Se requiere diseñar y experimentar nuevas situaciones que relacionen la construcción de tablas de proporcionalidad y la técnica de reducción a la unidad, propias de un primer nivel proto-algebraico, con actividades características de niveles superiores de algebrización como serían el procedimiento de la regla de tres (nivel 2 de algebrización) o la representación de la función lineal en lenguaje formal (nivel 3 de algebrización). La aplicación de la noción de proporción y la solución de un problema de valor faltante, basado en el uso de razones, tiene asociado un nivel 2 de algebrización; mientras que el significado propiamente algebraico (nivel 3) se caracteriza por la aplicación de la noción de función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones (Godino et al., 2017).

CAPÍTULO 6.
CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN EL APRENDIZAJE DE LA PROPORCIONALIDAD

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020) Conflictos semióticos en el aprendizaje de la proporcionalidad. Análisis de una experiencia de enseñanza en educación primaria. (Sometido a publicación)

1. Introducción

Diversas razones, entre las que puede estar una deficiente preparación de los profesores, pueden llevar a que, en el caso de la proporcionalidad, la enseñanza efectivamente implementada en la práctica esté sesgada hacia el aprendizaje memorístico del algoritmo de la regla de tres. Como hemos mencionado, con frecuencia los profesores tienden a apoyarse en el algoritmo de la regla de tres o multiplicación cruzada en situaciones de proporcionalidad, sin razonar su pertinencia (Riley, 2010; Singh, 2000) y sacrificando el desarrollo de una comprensión conceptual (Lamon, 2007). Esta postura viene reforzada por el enfoque dado en los libros de texto al estudio de la proporcionalidad.

El libro de texto continúa siendo el material curricular de uso preferente por parte del profesor, determinando en gran medida lo que sucede en el aula y actuando como mediador en el aprendizaje del estudiante. Para autores como Hernández (2007) el libro de texto conduce a un desarrollo de la enseñanza desde una perspectiva técnica, por lo que condiciona la autonomía profesional. Por ello, considera relevante que los libros contengan propuestas que permitan al profesor adquirir responsabilidad en la reflexión y planificación de sus tareas.

Fernández, Caballero y Fernández (2013) realizaron un análisis de libros de textos de matemáticas de 6º de educación primaria españoles centrándose en los errores conceptuales (descripciones ambiguas de algoritmos, contenidos donde se omiten condiciones de restricción, soluciones donde se aplican conceptos equivocados y errores en los ejercicios propuestos) presentes tanto en los contenidos como en los ejercicios resueltos y propuestos. Los autores concluyen la urgencia de investigar qué se está enseñando, así como, en qué medida dichos errores repercuten en el aprendizaje de los alumnos. En este sentido, en su investigación sobre el uso del libro por parte de los alumnos, Rezat (2010) obtuvo que los estudiantes no sólo usan el libro de texto de matemáticas cuando el maestro les dice que lo hagan; también lo utilizan de forma autodirigida.

Guacaneme (2001) investigó el papel de los conceptos de proporción y proporcionalidad en los textos escolares de matemáticas. Al respecto afirmó que existen nociones o conceptos que no se definen explícita ni implícitamente en los textos escolares de matemáticas, pero que sin embargo se utilizan para explicar y caracterizar los tipos de proporcionalidad. Observó también que todos los textos analizados desarrollan un tratamiento de la razón como un número y no establecen relaciones explícitas entre el enfoque aritmético de razón y proporción y el contexto de magnitudes para abordar la proporcionalidad.

Siguiendo las herramientas teórico-metodológicas del EOS, en Burgos, Castillo, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino (2020) se realizó un análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de 6º curso de educación primaria, en base a una revisión de los conocimientos didáctico-matemáticos sobre dicho contenido. Considerando que una lección refleja el proceso de instrucción planificado por el autor como medio para lograr el aprendizaje del contenido por parte de estudiantes potenciales del mismo, el análisis de la misma permitió identificar posibles conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales: no se hace explícito que la razón entre las cantidades de magnitudes proporcionales que se corresponden debe ser siempre la misma (constante de proporcionalidad), una orientación algorítmica que persigue adquirir destreza en la aplicación de la rutina del método de reducción a la unidad o la regla de tres degenerada (para resolver un problema de proporcionalidad basta poner los cuatros valores en una tabla 2×2, multiplicar dos números y dividir por el tercero), falta de argumentaciones/justificaciones de los procedimientos y proposiciones que intervienen, ausencia de situaciones que hagan reflexionar sobre si la relación en una situación-problema es multiplicativa o aditiva.

Suponiendo que un profesor de matemáticas ha decidido utilizar una lección de un libro de texto con estas características como recurso para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, nuestra investigación está orientada por la siguiente pregunta:

> *¿Qué conflictos cognitivos se generan cuando los alumnos abordan el estudio de la proporcionalidad con una instrucción fuertemente guiada por la lección de libro de texto focalizada en el aspecto procedimental frente al conceptual?*

Para responder a esta pregunta, hemos llevado a cabo una intervención didáctica con alumnos de sexto curso de educación primaria de cuyo diseño, implementación y resultados informamos en este capítulo. La experiencia ha tenido lugar en un contexto especial que ha permitido revelar algunos fenómenos cognitivos y didácticos de interés. La intervención se desarrolló después de que los alumnos hubieran acabado el estudio de la proporcionalidad con una metodología en la que había estado muy presente el uso del libro de texto. La lección que se había empleado como guía de la instrucción es la misma usada en Burgos, Castillo et al. (2020), para ejemplificar el método de análisis de lecciones de libros de texto aplicando las herramientas teóricas del EOS. Esto permite revelar algunos conflictos de significado que deben ser tenidos en cuenta cuando se pretende que los alumnos desarrollen el razonamiento proporcional, el cual requiere por un lado, que el conocimiento procedimental sea enriquecido con la comprensión de los conceptos y propiedades que intervienen, y por otro, que se favorezca la justificación de las respuestas a las tareas propuestas.

El capítulo está organizado en los siguientes apartados: en la sección 2 incluimos el contexto y enfoque metodológico seguido en la investigación. En la sección 3 se analizan los conflictos epistémicos asociados al proceso de instrucción. En la sección 4 se incluyen los resultados sobre la evaluación de los conocimientos de los estudiantes y los conflictos cognitivos detectados. La descripción y análisis de los resultados de la puesta en común en gran grupo de los estudiantes se incluye en la sección 5. La sección 6 incluye la discusión en términos de conflictos epistémicos y cognitivos, así como unas reflexiones finales derivadas de lo observado en la sesión de trabajo dialógico-colaborativo.

2. Contexto y metodología

La experiencia que describimos en este capítulo se llevó a cabo en un centro público de enseñanza de Educación Infantil y Primaria de España durante el curso 2017-2018. La muestra objeto de estudio está constituida por un grupo de 21 estudiantes (12 niñas y 9 niños) de sexto curso de Educación Primaria (11-12 años de edad).

La intervención formativa se ha realizado en 3 sesiones de 45 minutos de duración al inicio del tercer trimestre. Previamente los estudiantes habían estudiado el tema “Proporcionalidad y Porcentajes” y habían sido evaluados por su profesor, con no muy buen resultado en opinión del profesor del grupo.

Para la recogida de información relativa a la experiencia desarrollada se utilizaron las respuestas de cada estudiante a las tareas propuestas (figura 6.1), la grabación en audio de la sesión de puesta en común y el registro de observaciones de los alumnos en las distintas sesiones.

El enfoque metodológico empleado vuelve a ser la ingeniería didáctica en el sentido generalizado que propone el EOS. Se asume que la investigación educativa separada de la práctica puede no tener en cuenta la influencia de los contextos sobre la naturaleza compleja de los resultados, o no identificar adecuadamente las restricciones y factores condicionantes, por lo que la atención se centra en el aprendizaje logrado en un contexto real de clase.

3. Conflictos epistémicos

Los alumnos estudiaron el tema “Porcentajes y proporcionalidad” en las dos últimas semanas del segundo semestre. Durante el proceso de instrucción, el profesor siguió el libro de texto de Matemáticas (Ferrero, Martín, Alonso y Bernal, 2015) de forma exclusiva. Al principio de cada sesión de clase, un alumno designado por el profesor (siguiendo un orden para que todos participen) leía en alto la explicación teórica correspondiente al contenido que iban a tratar. A continuación, el profesor preguntaba si algún alumno tenía dudas y si no las tenían indicaba los problemas que debían realizar de cada sección. Aunque habitualmente los alumnos no preguntaban, para aclarar sus dudas, cuando las había, el profesor utilizaba alguno de los problemas propuestos que resolvía en la pizarra electrónica. En general los alumnos resolvieron todos los problemas del libro, salvo los que usó el profesor para aclarar dudas (un problema para explicar la regla de tres) o la sección del libro “Piensa un poco”.

Dado que la instrucción recibida por los alumnos se ha basado esencialmente en el libro de texto, resumimos brevemente la forma en que se presentan en el mismo los conceptos y procedimientos relativos a proporcionalidad:

- Dos magnitudes se definen como directamente proporcionales cuando “al multiplicar, o dividir, una de ellas por un número la otra queda multiplicada o dividida por ese mismo número”. No se hace mención a la constante de proporcionalidad.
- La reducción a la unidad se presenta como “un procedimiento para resolver problemas de proporcionalidad en el que, primero, se halla la cantidad que corresponde a una unidad y, después, se multiplica por el número de unidades”. Se dedica solamente tres problemas a trabajar este contenido.
- Después se define la regla de tres como “otro procedimiento para resolver problemas de proporcionalidad directa, que consiste en calcular uno de los cuatro valores si se conocen los otros tres”. Se presentan tres pasos para aplicar una regla de tres:
    1. “Se recogen los datos en una tabla de proporcionalidad”. Se trata de una tabla de dos filas (una por magnitud) y tres columnas: la primera para los nombres de las magnitudes, la segunda para dos valores conocidos de éstas, y la tercera para un valor conocido y el desconocido de la otra (segunda fila), denotado por x.
    2. Expresan “la tabla de proporcionalidad como un par de fracciones equivalentes”. Se establece la proporción, a partir de la tabla anterior.
    3. “Se calcula el término que falta, x”. En este momento se despeja el valor de la incógnita multiplicando en cruz pero sin hacer mención a esto último.
- La última sección del tema se dedica a la definición y cálculo de porcentajes. El porcentaje se define como “fracción de denominador 100” y el cálculo de porcentajes se obtiene usando la fracción cómo operador.

Los problemas en relación al concepto de magnitudes directamente proporcionales estaban planteados en términos de tablas de proporcionalidad. La explicación teórica recibida destacaba la relación multiplicativa entre cantidades de una misma magnitud y no entre cantidades correspondientes de magnitudes proporcionales, de forma que se primaba la relación escalar frente a la funcional. No se introduce la constante de proporcionalidad.

En el libro de texto, la regla de tres se presenta como un procedimiento para resolver problemas de valor faltante (apenas se considera el procedimiento de reducción a la unidad). Todos los problemas propuestos son de este tipo, salvo uno de mezclas que aparece en la sección de desafío matemático (no se llegó a corregir en clase). Se deja en un segundo plano la relación de proporcionalidad entre las magnitudes y la argumentación que justifica los procedimientos.

De forma general, el significado institucional implementado no es acorde al significado de referencia establecido en las orientaciones curriculares y a lo que los expertos consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes a la proporcionalidad (capítulo 3). Se descuida el aspecto conceptual, centrándose de forma exclusiva en la aplicación de un procedimiento rutinario; no se ofrece a los alumnos la posibilidad de interpretar e intercambiar información, ni explicar el significado de los datos, discutir si en la situación planteada es pertinente aplicar el modelo de la proporcionalidad. De manera específica, identificamos los siguientes conflictos epistémicos:

CE1. Se define la correspondencia de proporcionalidad directa por medio de la relación escalar obviando la relación funcional establecida entre magnitudes.

CE2. No se ofrecen apenas oportunidades para distinguir situaciones proporcionales de no proporcionales ni se incluye una aproximación previa de tipo intuitiva.

CE3. Se presenta la regla de tres como medio para calcular uno de los cuatro valores si se conocen los otros 3, sin discutir si es pertinente aplicar el modelo de la proporcionalidad.

CE4. La regla de tres está vinculada con la tabla de proporcionalidad, estableciendo como uno de los pasos del procedimiento la expresión de la tabla de proporcionalidad como un par de fracciones equivalentes.

CE5. El campo de aplicación de proporcionalidad se reduce únicamente a problemas de valor faltante.

CE6. El estudio de porcentajes se establece sin conexión con la proporcionalidad, desde un punto de vista únicamente procedimental.

4. Conflictos cognitivos

En esta sección describimos las tareas de evaluación propuestas por la investigadora y los resultados obtenidos, los cuales permiten detectar conflictos cognitivos previos a la fase de puesta en común.

4.1. Descripción de las tareas

La investigadora entregó a los alumnos la hoja de trabajo de la figura 6.1, para que trabajasen en ella durante dos sesiones de 45 min.

1. Con tres kilos de maíz mis gallinas comen 6 días. ¿Cuántos kilos de maíz necesitaré para 30 días? Explica tu respuesta.

2. Laura y Sofía quieren pintar sus habitaciones del mismo color. Laura mezcla 3 botes de pintura amarilla y 6 de pintura roja. Si Sofía ha usado 7 botes de pintura amarilla, ¿cuántos botes de pintura roja necesitará? Explica tu respuesta.

3. Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que va en coche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela, ¿Cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción? Explica tu respuesta.

4. Una librería te aplica el mismo descuento a todos sus artículos si presentas el carnet del AMPA del colegio Fuenfría. Si por un libro de 30 euros he pagado 25,5 euros:

a) ¿cuánto pagaré por un libro de 20 euros?
b) He pagado 34 euros por la colección de comics de Idhún. ¿Cuál era su precio inicial?
c) ¿qué porcentaje de descuento nos aplican a los niños del Fuenfría?

Explica cómo has obtenido cada resultado.

5. Observa los tarros de mermelada y responde razonadamente.
a) ¿Qué tarro de mermelada contiene más gramos de azúcar? ¿Y menos?
b) ¿Qué tarro de mermelada tiene mayor porcentaje de azúcar?
c) ¿Cuántos gramos de azúcar tiene un tarro de 1 kg de mermelada que tiene el mismo porcentaje de azúcar del tarro rojo?

Figura 6.1 Enunciados de las tareas propuestas

La primera situación planteada es un problema de valor faltante, similar a las que aparecen en el libro de texto y donde se pregunta por la relación inversa. La tarea 2 busca detectar el uso de relaciones aditivas en situaciones proporcionales (Fernández y Llinares, 2012). El tercer problema está centrado en la noción de razón. A priori esperamos una mayor complejidad para resolver esta tarea dado que no es una situación que hayan trabajado en la instrucción recibida. El 4 problema, centrado en porcentajes y descuentos, persigue comprobar si los alumnos conectan éstos con la relación de proporcionalidad. La última tarea permite detectar el significado que otorgan los alumnos a los porcentajes y qué procedimientos emplean cuando deben comparar porcentajes o cantidades obtenidas a partir de éstos, además de analizar los argumentos que emplean para justificar sus estrategias. En este capítulo centramos la atención en los primeros cuatro problemas. El análisis de los conflictos cognitivos y resultados de la puesta en común en relación al último problema se encuentran en Burgos y Godino (2019b). En todos los problemas propuestos, se espera que los alumnos justifiquen su respuesta.

Los alumnos trabajaron siguiendo la distribución habitual en clase (sentados por parejas). Al acabar las tareas entregaron individualmente a la investigadora la hoja de trabajo. Las respuestas dadas a los problemas permiten analizar los conocimientos construidos, identificar conflictos cognitivos y su incidencia en el grupo.

4.2. Grado de corrección. Procedimientos y argumentos

Todos los alumnos respondieron a los problemas 1, 2 y 3. La mayoría de las soluciones a los problemas 1 y 2 son correctas. En el caso del tercer problema, se considera una respuesta como parcialmente correcta si únicamente se calcula el número de alumnos que van en coche o bien andando. En este caso, el 52,38% de los alumnos obtuvieron de forma correcta el número de niños que iban andando y en coche al colegio y un 23,81% sólo calcularon de forma correcta una de las cantidades.

Como puede verse en la Tabla 6.1, el problema 4 resultó más difícil; más de la mitad de los alumnos no respondieron al apartado c) de dicho problema. En los primeros apartados, son más las respuestas incorrectas que correctas, y en el tercero la mitad de los alumnos que respondieron lo hicieron de forma adecuada y la otra mitad de forma errónea.

Tabla 6.1 Frecuencias en el grado de corrección de las soluciones a los problemas

Grado de corrección	Problema					
	1	2	3	4 a)	4 b)	4 c)
Incorrecta	1	3	5	13	10	5
Parcialmente correcta	0	0	5	0	0	0
Correcta	20	18	11	6	3	5
No responde	0	0	0	2	8	11
Total	21	21	21	19	21	21

Los alumnos desarrollaron distintos tipos de procedimientos para resolver los problemas propuestos. En el caso del problema 4, la estrategia aditiva fue especialmente relevante. La emplearon el 42,11% de los alumnos en el primer apartado y el 38,46 % en el segundo. Los alumnos calculan los euros de descuento sobre el libro de 30 euros, 30 - 25,5=4,5 y aplican un descuento de 4,5 euros al libro de 20, respondiendo que se debería pagar por él, 20 - 4,5=15,5. De igual forma, asumiendo que el descuento ha sido de 4,5 euros, determinan que el precio inicial para la colección de comics de Idhún debería ser 34+4,5=38,5 euros.

Un procedimiento basado en la relación “al doble de la cantidad de una magnitud le corresponde el doble de la cantidad de la otra”, se encuentra en la respuesta de algunos alumnos en el problema 2, por ejemplo, para determinar que Sofía usará 14 botes de pintura roja, porque es el doble de los 7 de pintura amarilla que utiliza. También se encuentra un procedimiento que hemos denominado de tipo multiplicativo en el problema 4, por ejemplo cuando, una vez han determinado que el precio que pagarán por un libro de 20 euros es de 17 euros, para responder al apartado b) recurren a que si 34 es el doble de 17 el precio de la colección de comics, que ahora vale 34 euros, debería ser el doble de 20 euros, es decir 40. Para determinar el porcentaje de descuento en el apartado c) 4 alumnos de los 10 que respondieron a este ítem usaron un procedimiento similar al del alumno A11:

> *10%=3 porque 3×10=30.*
>
> *3:2=1,5= 5% ; 4,5=15%*
>
> *Un 15%*

El procedimiento de reducción a la unidad fue usado de forma excepcional por los alumnos, quedando relegada por la multiplicación en cruz sin expresar la proporción o por la regla de tres, basada en una disposición tabular o diagramática, involucrando la incógnita pero sin expresar la proporción de manera correcta.

En la Figura 6.2 se ha incluido la respuesta del alumno A11 al problema 2. Las flechas indican los números que multiplican y el sentido de la división en el procedimiento que emplea.

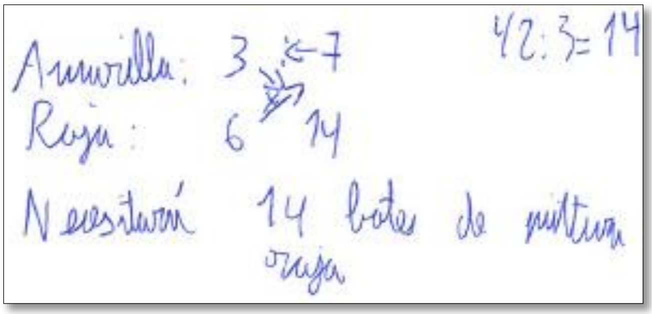


Figura 6.2. Respuesta de A11 al problema 2.

La Figura 6.3 reproduce la respuesta del alumno A7 al problema 1, en la que recurre a una regla de tres sin expresar la proporción.

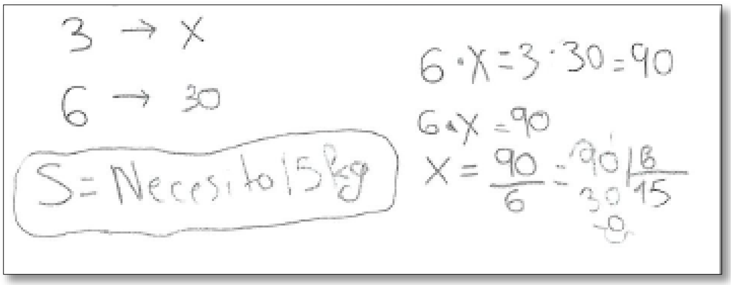


Figura 6.3. Respuesta de A17 al problema 1. (Regla de tres degenerada)

Algunos alumnos en los problemas 1, 2 y 3 expresaron las proporciones que respondían a la relación de proporcionalidad.

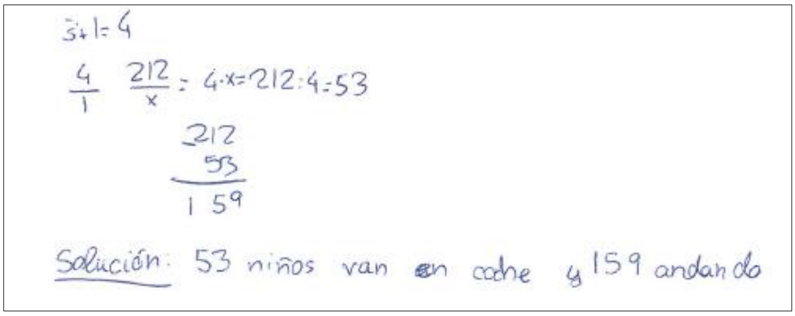


Figura 6.4. Respuesta de la alumna A2 al problema 3.

Como puede verse en la figura 6.4, con frecuencia las proporciones están escritas de forma poco pertinente, olvidando el signo igual y se encadenan las operaciones, apareciendo expresiones algebraicas sin sentido. Toda la información relativa a las frecuencias de las categorías de procedimientos descritos se incluye en la tabla 6.2.

Tabla 6.2. Frecuencias de los tipos de procedimientos empleados por los alumnos

Tipo de procedimiento	**Problema**					
	1	**2**	**3**	**4 a)**	**4 b)**	**4 c)**
Aditivo	0	1	1	8	5	0
Multiplicativo Relación doble/mitad	2	2	0	0	2	4
Producto cruzado. No expresa proporción	3	3	1	8	3	1
Reducción a la unidad	2	0	2	0	0	1
Cálculo de porcentajes	0	0	0	2	2	0
Regla de tres degenerada	9	10	10	1	1	4
Regla de tres	1	1	4	0	0	0
Proporciones	4	4	3	0	0	0
No responde	0	0	0	2	8	11
Total	21	21	21	21	21	21

Como podemos ver, la mayoría de los alumnos resolvieron los problemas por medio de la regla de tres y/o el establecimiento de proporciones. Esto explica que el registro tabular o diagramático y el simbólico tengan una gran presencia en las respuestas dadas. Pocos alumnos justificaron su respuesta en los distintos problemas: 5 alumnos en el primero, 9 en el segundo y 11 en el tercero.

Las categorías de argumentos detectadas en las producciones de los alumnos son las siguientes:

- *Aditivo.* En esta categoría se encuentran argumentos como el que desarrolla la alumna A14 para justificar la solución al problema 2:

  6+3=9; *9-7=2*

  Porque primero hay 9 botes menos 7 que ha usado, solución: necesitará 2 botes.

- *Relación doble-mitad.* La justificación del alumno A12 a la solución del problema 2 estaría incluida en esta categoría:

  Necesitará 14 botes de pintura, porque el doble de 7 es 14 y como pone el doble de 3, que es 6, es así.

- *Tabular*. Nos referimos a aquellos casos en los que el alumno construye una tabla con algunos valores de las magnitudes, incluyendo la solución al problema, para justificar su relación de proporcionalidad directa.

- *Procedimental.* En este caso el alumno hace referencia al procedimiento seguido. Por ejemplo, la alumna A9 justifica su solución al problema 1 de esta forma:

> *He aplicado la regla de tres. Lo que he hecho ha sido multiplicar en cruz 3 por 30 y lo que me ha salido lo he dividido entre 6. Al hacer esa división el cociente (que es 15) es igual a la x.*

- *Formal*, si está basado en la relación de proporcionalidad, proporciones o valor unitario (véanse las figuras 6.5 y 6.6 a continuación).

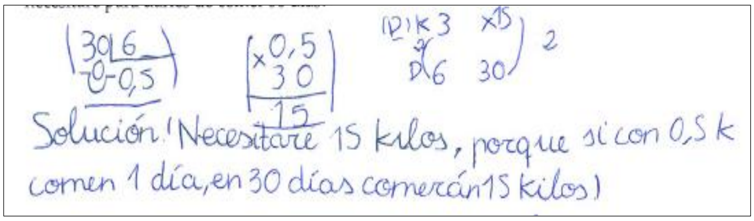


Figura 6.5. Solución propuesta por A12 al problema 1 basada en el valor unitario

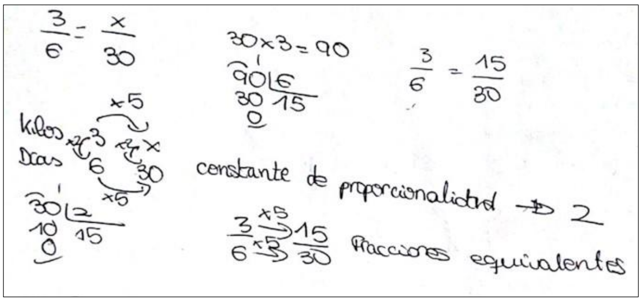


Figura 6.6. Solución propuesta por A21 identificando la constante de proporcionalidad

Las justificaciones de tipo aditivo fueron incorrectas. También se consideran incorrectas las justificaciones de tipo procedimental o aquellas de carácter formal que persiguen comprobar la corrección del procedimiento: por ejemplo, la alumna A8 incluye como justificación en el problema 2:

$$\textit{Porque } \frac{6}{3} \textit{ es equivalente a } \frac{14}{7}.$$

Hemos clasificado como parcialmente correctas aquellas justificaciones basadas en relaciones doble-mitad o las de tipo tabular.

En la tabla 6.3 sintetizamos los tipos de argumentos y grados de corrección de los mismos, para los casos en que aportaron justificaciones de las soluciones.

Tabla 6.3. Frecuencias en los tipos de argumentos y su grado de corrección

Justificación		Problema 1	Problema 2	Problema 3
Grado de corrección	Incorrecta	2	4	3
	Parcialmente correcta	2	4	7
	Correcta	1	1	1
Tipo de argumento empleado	Aditivo	0	1	2
	Relaciones doble/mitad	0	1	0
	Tabular	1	2	6
	Procedimental	3	2	2
	Formal	1	3	1
Total		5	9	11

4.3 Conflictos cognitivos

En el marco teórico del EOS, los errores de los estudiantes se interpretan en términos de conflictos semióticos de tipo cognitivo, esto es, como desajustes entre los significados institucionales de los distintos objetos implicados en las prácticas matemáticas y los significados personales atribuidos. Teniendo en cuenta los tipos de objetos matemáticos implicados en las respuestas de los alumnos estos conflictos los agrupamos de la siguiente manera:

– Procedimentales (desarrollo erróneo de procedimientos)

CP1: No aplica correctamente la regla de tres.

CP2: Plantea la proporción pero no aparecen los distintos pasos en el despeje de la incógnita.

CP3: Calcula incorrectamente el porcentaje.

– Conceptuales (aplicación inapropiada de conceptos)

CC1: Significado incorrecto del signo igual.

CC2: No percibe o interpreta correctamente la relación de proporcionalidad.

CC3: Confunde magnitudes directamente proporcionales con su representación en una tabla de proporcionalidad.

– Argumentales (justificaciones incorrectas)

CA1: Usa la aplicación de la regla de tres como argumento justificativo.

CA2: Usa la proposición que se pretende justificar como argumento.

CA3: No justifica la relación de proporcionalidad que permite construir la tabla de proporcionalidad.

– Representacionales (uso inapropiado del lenguaje en sus diversos registros)

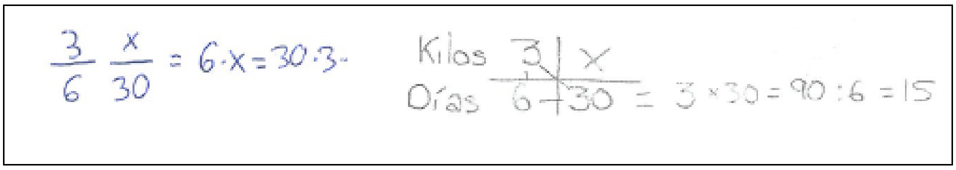
CR1: Omite el signo igual en la proporción.

CR2: Encadena identidades aritméticas o algebraicas.

CR3: Usa el signo igual para expresar incorrectamente conexión o dependencia entre dos magnitudes.

CR4: Usa flechas o líneas como operador (multiplicación o división).

Las figuras 6.7, 6.8 y 6.9 muestran ejemplos de algunos de estos conflictos


$\frac{3}{6}\ \frac{x}{30} = 6 \cdot x = 30 \cdot 3 \cdot$

Kilos	3	x
Días	6	30 = 3 × 30 = 90 : 6 = 15

Figura 6.7 Ejemplos de conflictos CP1 y CR2 en respuestas de los alumnos A2 y A4.

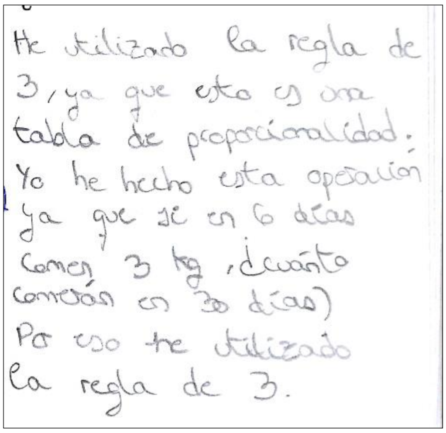

He utilizado la regla de 3, ya que esto es una tabla de proporcionalidad. Yo he hecho esta operación ya que si en 6 días comen 3 kg ¿cuánto comerán en 30 días) Por eso he utilizado la regla de 3.

Figura 6.8 Respuesta del A2 al problema 4. Ejemplo de conflicto conceptual CC2

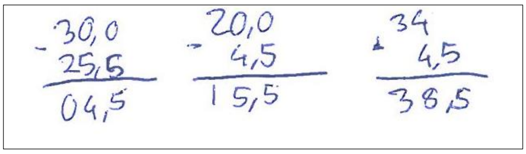


Figura 6.9 Justificación de un alumno manifestando el conflicto argumental CA1

Como se resume en la tabla 6.4, de manera general, las categorías de conflictos con mayor presencia son la representacional en los problemas 1, 2 y 3, y la conceptual en el problema 4. Dentro de los conflictos procedimentales, el más frecuente en todos los problemas es no aplicar correctamente la regla de tres (CP1) y dentro de los representacionales, encadenar identidades aritméticas o algebraicas, usando el signo igual como separador de los pasos realizados en la resolución de la actividad (CR2).

Tabla 6.4. Frecuencias de conflictos cognitivos en cada problema

Conflictos		**Problemas**			
		1	2	3	4
Procedimentales	CP1	9	9	10	5
	CP2	1	2	1	1
	CP3	0	0	0	2
Conceptuales	CC1	7	4	2	0
	CC2	0	1	1	9
	CC3	1	1	1	0
Argumentales	CA1	3	2	2	0
	CA2	0	2	1	0
	CA3	0	1	5	0
Representacionales	CR1	3	2	3	1
	CR2	10	8	3	3
	CR3	4	3	2	4
	CR4	3	2	0	0
Total		41	34	31	25

El número de conflictos de tipo argumental es menor, dado que son pocos los alumnos que justifican su respuesta. Los alumnos cuando intentan justificar su respuesta, utilizan el procedimiento de la regla de tres como argumento (CA1) o adoptan como justificación una tabla de proporcionalidad que incluye el valor faltante obtenido sin argumentar la relación de proporcionalidad que permite construirla (CA3). Además, en el problema 4, un 36% de los alumnos no reconoce correctamente la relación de proporcionalidad (CC2).

5. Resultados de la fase de puesta en común

En esta sección incluimos la descripción y análisis de resultados de la fase de puesta en común en gran grupo de las soluciones dadas por los estudiantes. Se persigue estimularles a reflexionar sobre sus razonamientos durante los procesos de resolución de los problemas, y motivar que las explicaciones dadas incluyeran argumentos matemáticos. Los diálogos mantenidos permiten además clarificar la naturaleza de los conflictos cognitivos y la manera en que son abordados.

Al inicio, la investigadora (Inv) comenzó preguntando a los alumnos si recordaban lo que eran dos magnitudes directamente proporcionales. En su mayoría los alumnos asentían, pero tenían dificultades para establecer una definición precisa del concepto.

> Inv: Este curso, justo antes de las vacaciones, habéis estudiado proporcionalidad y porcentajes. ¿De qué formas sabéis resolver problemas de proporcionalidad?
>
> Alumnos (varios a la vez): Por regla de tres.
>
> Inv: De acuerdo, regla de tres…¿Sólo así?

Se produce silencio, parece que a los alumnos les cuesta identificar otro procedimiento para resolver problemas de proporcionalidad.

> A21: También conocemos reducción a la unidad. A mí me gusta más.
>
> Investigadora: ¿Por qué?
>
> A21: Porque no entiendo por qué funciona la regla de tres.

Es interesante notar que la mayoría de los alumnos, en la discusión afirman preferir la regla de tres para resolver los problemas de proporcionalidad. Sin embargo, A21 muestra cierto rechazo al procedimiento afirmando no entender qué la sustenta.

Antes de proseguir con la sesión, la investigadora recordó brevemente los procedimientos de reducción a la unidad, de regla de tres y el concepto de constante de proporcionalidad. A continuación, repartió a cada alumno las hojas de trabajo con las respuestas que dieron a las tareas, haciéndoles notar que, si bien casi todas las soluciones eran correctas, la mayoría no habían justificado sus respuestas. Se inició un diálogo con los alumnos para que reconociesen las situaciones de proporcionalidad y los argumentos que permiten aplicar el procedimiento de regla de tres que habían seguido de forma mayoritaria al resolver los problemas.

La investigadora pregunta quién quiere salir a la pizarra. Sale la alumna A10.

> A10. Primero he hecho una tabla de proporcionalidad y como dice que con 3 kilos de maíz las gallinas como 6 días, he puesto los kilos y los días.

La investigadora interrumpe.

> Inv: ¿Cuáles son las magnitudes directamente proporcionales ahí?
>
> A10: 3, 6,..
>
> Inv: ¿Pero las magnitudes cuáles son?

La alumna A10 y los demás alumnos dudan, mostrando dificultad para identificar las magnitudes directamente proporcionales en la situación propuesta. Por ese motivo prosigue la investigadora:

> Inv: Kilos de maíz y número de días que comen mis gallinas. Esas magnitudes son proporcionales, pero, cuidado, porque podría ocurrir que no lo fueran. En este caso sí lo son y por eso podemos resolver el problema como lo estamos haciendo. Suponemos que las gallinas comen todos los días lo mismo.
>
> A10: He puesto 3 kilos y 6 días y como te preguntan cuántos kilos necesito para que puedan comer 30 días he puesto 30 y la x que es lo que no sabemos. Entonces lo primero que he hecho es multiplicar 3 por 30 que me da 90 y después he dividido por 6 que me da 15.
>
> Inv: ¿Todos de acuerdo?

Los alumnos en general asienten.

> Inv: ¿Cómo lo ha resuelto?
>
> Alumno: Tabla de proporcionalidad.
>
> Alumno: Ha puesto la x, es regla de tres.

Los alumnos identifican como métodos “la elaboración de una tabla de proporcionalidad”, e identifican la regla de tres a través del símbolo literal presente en la tabla.

La investigadora recuerda sobre la tabla de proporcionalidad de la pizarra, la relación multiplicativa entre las magnitudes proporcionales y señala:

Inv: Para aplicar la regla de tres, debo tener magnitudes que sean proporcionales; si no, no la puedo aplicar. Se puede aplicar porque las fracciones que aparecen aquí (señala en la tabla de proporcionalidad, las fracciones con numerador las cantidades de kilos de maíz y denominador los números de días), ¿cómo son?

Varios alumnos responden "son fracciones equivalentes".

Inv: Eso es, son fracciones equivalentes. Y, si tengo dos fracciones que son equivalentes, ¿Qué ocurre con su producto cruzado?

A10: Que da el mismo resultado.

En este momento pasan al segundo problema. La investigadora lo lee haciendo hincapié en que se pide que se explique la solución, dado que en el trabajo individual casi ningún alumno había justificado su respuesta. La alumna A3 se ofrece a salir a la pizarra a corregir.

A3: Pues he hecho la regla de tres.

Inv: ¿Por qué puedes aplicar en este problema la regla de tres?

A3: Porque son proporcionales.

Inv: ¿Qué magnitudes son proporcionales?

Al fondo un alumno indica "el seis y el siete", mostrando confusión entre las cantidades de las magnitudes y las magnitudes que intervienen en la situación.

A3: Son los botes de pintura roja y de pintura amarilla.

Inv: ¿Por qué tienen que ser proporcionales? ¿Qué nos dice el enunciado?

A3: Que las habitaciones tienen que ser del mismo color.

Inv: Exacto, si varío la proporción de las pinturas el tono no va a ser el mismo, saldrá más rojo o más amarillo.

El alumno A3 responde adecuadamente cuando la investigadora sugiere que busquen en el contexto la justificación a la relación de proporcionalidad entre las magnitudes. En este momento la investigadora aprovecha para recordar el concepto de constante de proporcionalidad, y pregunta cuál es la constante de proporcionalidad en el problema. Los alumnos dudan. Una vez que identifican que la constante de proporcionalidad es 2 prosiguen.

Inv: Estoy usando el doble de pintura roja que de pintura amarilla. Si tengo 7 botes de pintura amarilla, ¿cuántos botes de pintura roja necesitaré?

Alumnos: El doble, 14.

Inv: ¿Por qué el doble?

Varios alumnos: Porque están en proporción.

Varios alumnos: Porque si no, no saldría el mismo color.

Leen el enunciado del tercer problema. El alumno A20 escribe en la pizarra.

A20: Yo he hecho una tabla de proporcionalidad para saber cuántos niños van primero y después andando. He hecho, 8 partido por 2 que es igual a 212 partido por x.

A20 identifica como procedimiento "elaborar la tabla de proporcionalidad" a partir de la cual establece la ecuación proporcional. La investigadora intenta que vincule la proporción a las magnitudes proporcionales cuyas cantidades la forman y que identifique la unidad.

Inv: Para poder escribir esta proporción, ¿qué magnitudes estás considerando que son proporcionales?

A20: Los niños y los que van en coche.

Inv: Pero, este número de niños es 4, ¿por qué?

A10: Porque hay tres que van en coche más uno que va andando. Hacemos grupos de 4.

Inv: Bien, si sabemos el número de niños que van al cole, ¿cómo podemos saber el número de niños que van en coche?

Varios alumnos: Dividiendo por 4.

Finalmente, el alumno A19 se ofrece para salir a la pizarra a resolver y explicar el último problema.

A19: Lo primero que he hecho, como dice que por un libro de 30 euros he pagado 25,5 euros he hecho 30-25,5.

Inv: Bien, ¿este 4,5 que ha obtenido qué es?

Alumnos (varios): El descuento.

Inv: Muy bien, el descuento. ¿Y ahora?

> A19: Dice, ¿cuánto pagaré por un libro de 20 euros? Como ha presentado el carnet a 20 le he quitado 4 y medio y sale 15 y medio.
>
> Inv: ¿Todos estáis de acuerdo?

A19 ha empleado una estrategia aditiva. La investigadora busca la aprobación o reprobación por parte de los compañeros.

> A10: Pues como me dice que de un libro de 30 euros he pagado 25,5, yo he hecho una regla de tres para ver lo que debería costar.

El alumno A10 argumenta que el procedimiento a seguir para averiguar lo que debería pagar por un artículo de 20 euros es una regla de tres. Sin embargo, no explica cuáles son las cantidades que intervienen en la misma.

> Inv: Según (se refiere al chico que está en la pizarra) has escrito aquí, el descuento que han aplicado al libro de 30 euros es 4,5, eso es correcto. Pero, dices que el descuento va a ser siempre el mismo, siempre va a ser 4,5 euros. ¿Creéis que se debería descontar 4,5 euros lo mismo para un libro de 20 euros, que para uno de 30?
>
> A11: Debería hacer el 4,5 por ciento de 30 y así averiguar el porcentaje.

A11 muestra un conflicto al expresar la relación parte-todo tras el porcentaje. La investigadora intenta justificar por qué no es correcta la estrategia aditiva empleada por A19.

> Inv: Quieres decir, que deberías saber ese 4,5 qué porcentaje de descuento es, ¿no?
>
> A11: Sí, claro.
>
> Inv: Nos aplican el mismo descuento a todos sus artículos, pero no en cantidad de euros. Este 4,5 es el descuento sobre 30 euros, ¿cómo sabrías ahora cuál es el descuento sobre 20 euros?

A10 interrumpe para identificar las cantidades de las magnitudes que aparecen en la regla de tres por medio de la tabla de proporcionalidad.

> A10: Yo he puesto (se refiere a su tabla de proporcionalidad) arriba lo que cuesta el libro, 30, debajo con el descuento, 25,5, luego he puesto 20 y abajo x.

En este momento llega el profesor de la siguiente clase y se da por concluida la sesión.

6. Discusión

El compromiso de nuestra investigación con la práctica educativa nos ha llevado a centrar la atención en un grupo de clase real que ha iniciado el estudio de la proporcionalidad bajo un modelo instruccional en el que el libro de texto desempeña un papel protagonista. El análisis realizado nos permite conectar entre sí los conflictos epistémicos y cognitivos que se generan cuando los alumnos inician el estudio de la proporcionalidad y los porcentajes con una instrucción focalizada en el aspecto procedimental.

En general los alumnos tienen dificultades para reconocer situaciones de proporcionalidad e identificar otros procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad distintos de la regla de tres. Esto puede deberse al papel central asignado en el libro de texto (y por extensión en la instrucción recibida) a las tablas de proporcionalidad como identificador de la relación y a la regla de tres como procedimiento prioritario en este tipo de problemas. Como hemos observado, no se ofrecieron oportunidades para distinguir situaciones proporcionales de no proporcionales, ni se incluyó una aproximación de tipo intuitiva (CE2).

Los alumnos resolvieron con éxito los problemas 1, 2 y 3, no así el problema 4 que resultó más difícil y que contó con un mayor número de estrategias aditivas incorrectas (un 36% de los alumnos no reconoce correctamente en este problema la relación de proporcionalidad; CC2). Una explicación posible a este hecho debemos buscarla en la menor familiaridad de los alumnos con el último tipo de problemas y que se haya descuidado el aspecto conceptual en el estudio de la proporcionalidad y porcentajes. El tipo de problemas propuestos y resueltos por los alumnos fueron únicamente de valor faltante (CE5) y el estudio de porcentajes se establece sin conexión con la proporcionalidad, desde un punto de vista únicamente procedimental (CE6).

Por otro lado, el procedimiento de resolución usado de forma mayoritaria por los alumnos fue el de la regla de tres en su versión degenerada: los alumnos plantean la tabla de proporcionalidad pero obvian el “paso 2” descrito en el libro de texto como parte del procedimiento consistente en establecer la proporción. Este hecho puede tener su origen en los conflictos epistémicos CE3 y CE4 descritos en la sección 4.2: se presenta la regla de tres como medio para calcular uno de los cuatro valores si se conocen los otros 3.

Los registros tabular y simbólico tienen una gran presencia en el trabajo de los alumnos, si bien este último no es utilizado de forma adecuada y los conflictos cognitivos de tipo representacional son numerosos, especialmente, encadenar identidades aritméticas o algebraicas, usando el signo igual como separador de los pasos realizados en la resolución de la actividad (CR2).

Los alumnos no justificaron en su mayoría las respuestas dadas a los distintos apartados. Cuando lo hicieron, a menudo utilizaron el procedimiento que se debe justificar como argumento (CA1) o adoptaron la tabla de proporcionalidad como justificación (CA3). No es de extrañar dado que, como hemos identificado en la sección 4, la instrucción se centró casi de forma exclusiva en los procedimientos, sin ofrecer a los alumnos la posibilidad de interpretar o explicar el significado de los datos o el proceso seguido y justificar las soluciones obtenidas.

Inicialmente, los alumnos confunden cantidades de magnitud y magnitudes directamente proporcionales con tabla de proporcionalidad. Por ejemplo, a la pregunta de la investigadora sobre cuáles son las magnitudes directamente proporcionales en el primer problema, la alumna que había salido a la pizarra indicaba las cantidades 3, 6 que son las cantidades correspondientes a las magnitudes proporcionales kilos de maíz y número de días. Sin embargo, a medida que transcurre la sesión de puesta en común de soluciones en gran grupo, este desajuste mejora: observamos que en la discusión sobre el segundo problema los alumnos comienzan a identificar como magnitudes directamente proporcionales los botes de pintura roja y amarilla y después en el tercer problema no hay dificultad en reconocer los niños que van al colegio y los que van en coche como magnitudes directamente proporcionales.

Los alumnos tienen dificultades para identificar la constante de proporcionalidad entre magnitudes directamente proporcionales. En este sentido, mencionamos que la definición de correspondencia de proporcionalidad directa que figura en el libro de texto, viene dada por medio de la relación escalar, obviando la relación funcional establecida entre magnitudes (CE1). Cuando los alumnos comienzan a entender la relación funcional y el significado de la constante de proporcionalidad, pueden emplear otros procedimientos distintos de la regla de tres, como puede ser obtener el valor unitario. Al respecto, recordemos que la mayoría de los alumnos habían empleado la regla de tres en la resolución plasmada en sus hojas de trabajo, pero que en la puesta en común los alumnos argumentaban la posibilidad de obtener el número de botes de pintura roja multiplicando por dos el número de botes de pintura amarilla, o bien el número de alumnos que van en coche al colegio dividiendo por 4 el número de alumnos que asisten a él. Como señalan Fernández y Llinares (2012), un uso indiscriminado de la regla de tres puede llevar a no desarrollar un razonamiento proporcional adecuado, y en particular a no distinguir situaciones de proporcionalidad de aquellas que no lo son. En este sentido, el procedimiento de reducción a la unidad se considera una estrategia intuitiva para iniciar la enseñanza de la proporcionalidad (Ercole, Frantz y Ashline, 2011).

En la interacción del grupo con la investigadora, los alumnos empiezan a justificar los procedimientos y proposiciones empleados, conectando los distintos objetos que aparecen involucrados en una situación de proporcionalidad, en particular vinculan la regla de tres, la equivalencia de fracciones y la relación de proporcionalidad directa. Así mismo empiezan a identificar la presencia y necesidad de una explicación a dicha relación ("las magnitudes número de botes de pintura roja y número de botes de pintura amarilla son directamente proporcionales puesto que las habitaciones tienen que ser del mismo color"). Como pusimos de manifiesto en el capítulo previo, un apropiado grado de diálogo, interacción y comunicación en la introducción de la proporcionalidad permite detectar estrategias intuitivas, naturales y aquellas que los alumnos desarrollan con poca guía por parte del profesor (por ejemplo, la estrategia de reducción a la unidad) y aumenta el grado de implicación e interés del alumnado.

Diversos estudios enfatizan la importancia de la argumentación y su conexión con la compresión conceptual desde edades tempranas (Stylianides, Bieda y Morselli, 2016; Lin y Tsai, 2016). Promover el uso de argumentos requiere un cambio en la naturaleza del discurso en la clase de matemáticas. "En una esperada clase en la que los jóvenes estudiantes desarrollen habilidades para elaborar argumentos convincentes, en lugar de ser la audiencia para los razonamientos del profesor, se necesita proporcionar a los estudiantes las oportunidades de aprender tal argumentación" (Lin, 2018, p. 1174).

Discutir, argumentar y justificar sobre situaciones que involucran relaciones de proporcionalidad puede ser una estrategia didáctica adecuada para dotar de significado a los procedimientos emplean los alumnos cuando plantean una proporción o resuelven una regla de tres.

El libro de texto tradicional, propone una selección y secuenciación de un sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas, implicadas en la realización de una muestra de tareas (ejemplos, ejercicios, problemas de aplicación) desde un punto de vista esencialmente transmisivo, inherente a la presentación del contenido en este recurso. El profesor debe ser el encargado de desarrollar su potencial hacia un modelo didáctico en el que la solución de las situaciones – problemas que propone el libro de texto pueda hacerse de manera dialógica y cooperativa.

TERCERA PARTE

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL YALGEBRAICO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

CAPÍTULO 7.
CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE LA PROPORCIONALIDAD EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018) Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, 44, 1-22.

1. Introducción

La proporcionalidad se puede abordar desde diferentes puntos de vista o significados, dependiendo de los contextos de aplicación (vida cotidiana, científico-técnico, artístico, geométrico, probabilístico, estadístico, etc.), lo que conlleva la participación de objetos y procesos específicos de dichos campos en las prácticas de resolución de los problemas correspondientes. Como indican Obando, Vasco y Arboleda (2014, p. 60),

> Desde los años sesenta con los trabajos de Piaget sobre el razonamiento formal de los adolescentes hasta nuestros días, con una gran diversidad de líneas de investigación de carácter cognitivo, didáctico, curricular, epistemológico, etc., la preocupación por las dificultades relacionadas con la enseñanza o el aprendizaje de estos objetos de conocimientos sigue vigente.

En consecuencia, la formación de profesores debe tener en cuenta el desarrollo de conocimientos y competencias matemáticas y didácticas con relación a este tema, mediante intervenciones formativas específicas. No obstante, las investigaciones realizadas sobre la problemática del razonamiento proporcional en la formación de profesores son escasas, como señala Rivas (2013). Este autor destaca los trabajos de: Simon y Blume (1994); Thompson y Thompson (1994); Thompson y Thompson (1996); Sowder, Armstrong, Lamon, Simon, Sowder y Thompson, (1998); Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007); Berk et al. (2009); Rivas y Godino (2010); Rivas, Godino y Castro

(2012). No obstante y como hemos puesto de manifiesto, diversas investigaciones señalan que, tanto los profesores en formación inicial como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Lamon, 2007; Livy y Vale, 2011, Singh, 2000; Riley, 2010)

En este capítulo informamos del diseño, implementación y resultados de una acción formativa con futuros profesores de matemáticas de secundaria sobre el tema de proporcionalidad, cuyo objetivo es explorar sus conocimientos sobre el tema y desarrollar algunos aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático de dicho contenido.

Una investigación sobre formación de profesores de matemáticas necesita explicitar el modelo de conocimientos y de desarrollo profesional que se adopta. Partimos de una experiencia formativa en la que se pretende estudiar conocimientos matemáticos específicos de futuros profesores y el nivel de competencia epistémica para el reconocimiento de tales conocimientos. En nuestro caso hemos adoptado el modelo de CCDM descrito en el capítulo 2 de esta memoria. Por un lado, se considera que el profesor debe tener conocimiento matemático común relativo a un cierto nivel educativo donde imparte su docencia, como así también tener un conocimiento ampliado del contenido matemático que le permita articularlo con los niveles superiores. Por otro lado, a medida que intervenga algún contenido matemático específico, es claro que el profesor precisa de un conocimiento didáctico-matemático de las distintas facetas que afectan el proceso educativo (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, mediacional e instruccional). Tanto el conocimiento matemático per se, como el especializado están estrechamente relacionados (figura 2.4). Dada la complejidad de todos los factores que afectan en un proceso de enseñanza, en este capítulo centramos la atención en la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático, que incluye entre otros componentes:

- Reconocer los diversos significados del contenido correspondiente y su interconexión.
- Reconocer la diversidad de objetos y procesos implicados (es decir, la configuración ontosemiótica) para los diversos significados.

En el modelo CCDM se considera que el futuro profesor debe tener estos conocimientos, pero también debe ser competente para abordar los problemas didácticos básicos que están presentes en la enseñanza. En particular, la *competencia de análisis epistémico* permite al profesor identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas necesarias para la resolución de las situaciones-problemas y de esta forma anticipar conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje e identificar los conocimientos que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio (Godino, Giacomo et al., 2017). Para esto se necesitan otras herramientas teóricas y metodológicas específicas, como son las de significado pragmático y configuración ontosemiótica, descritas en el capítulo dedicado al marco teórico.

Para lograr un análisis detallado de la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en la resolución de tareas sobre proporcionalidad, nos apoyamos en la distinción de niveles de algebrización de la práctica matemática, tal como se viene manifestando en diversas producciones científicas (por ejemplo, Castro, Pino-Fan y Martínez-Escobar, 2017; Godino et al., 2015; Godino, Beltrán-Pellicer et al., 2017). El reconocimiento, por parte de los profesores, de los distintos niveles de algebrización en la solución de tareas matemáticas, en particular, en tareas que ponen en juego la noción de proporcionalidad, se considera un aspecto clave del CCDM sobre este contenido.

Para analizar los conocimientos puestos en juego en tareas de proporcionalidad recurriremos a la noción de *función semiótica crítica* (Contreras et al., 2017), como aquella función semiótica (correspondencia entre significante y significado) esencial para identificar los conocimientos claves que se requieren para dar respuesta al problema o tarea planteada.

El problema de investigación se formula en los siguientes términos:

- *¿Tienen los estudiantes del máster el conocimiento común sobre proporcionalidad adecuado para realizar los análisis epistémicos requeridos?*
- *¿Qué objetos y procesos algebraicos se reconocen con más dificultad?*
- *¿Cuáles son las funciones semióticas críticas en el proceso de resolución de las tareas propuestas?*

- *¿En qué medida, la acción formativa implementada ha desarrollado la competencia de análisis epistémico de tareas de proporcionalidad, en particular, el reconocimiento de niveles de algebrización involucrados en distintas soluciones a problemas de proporcionalidad?*

El capítulo está organizado en los siguientes apartados: en la sección 2 se describe el contexto, participantes e instrumentos de recogida y análisis de datos, siendo parte de una investigación de diseño. En la sección 3 se muestra el análisis *a priori* de una de las tareas efectivamente implementadas, esto refiere al tipo de análisis epistémico que se espera que realicen los estudiantes. En la sección 4 se presentan los resultados del análisis de las tareas, en términos de las preguntas de investigación anteriores. En la sección 5 se discuten los resultados obtenidos identificando así el nivel de competencia de análisis epistémico desarrollada por los futuros profesores. Finalmente, en la sección 6 se resaltan algunas implicaciones didácticas.

2. Contexto y enfoque metodológico

Dado que el problema de investigación es el diseño, implementación y evaluación de una intervención formativa para desarrollar en los futuros profesores de educación secundaria competencias y conocimientos didáctico-matemáticos sobre un tema específico, la proporcionalidad, entendemos que el enfoque metodológico debe ser la ingeniería didáctica, en nuestro caso entendida en un sentido generalizado propuesto por el EOS (Capítulo 2, sección 4). Así mismo, para el análisis del proceso formativo se emplea nuevamente la noción de hecho didáctico significativo (HDS) introducida dichos autores. Los HDS identificados en la sección 5 se basan en el análisis de las respuestas de 10 estudiantes a una tarea usada como evaluación final de los aprendizajes.

La experiencia formativa se ha realizado en el marco del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria (especialidad de Matemáticas), durante el año lectivo 2016-2017, en España, dentro de la asignatura Innovación Docente e Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas. Dicho máster, de un año de duración y que incluye un período de prácticas en centros escolares, constituye la formación inicial que todo graduado universitario debe superar para poder ejercer como profesor de secundaria en España.

Han participado en el estudio 33 estudiantes, futuros profesores, cuyo perfil académico es variado: 12 (33,3%) tienen el grado de Matemáticas; 15 son ingenieros de caminos o arquitectos (44,1%), 3 son físicos y 3 proceden de otras ingenierías. De ellos, 19 estudiantes declaran tener alguna experiencia de enseñanza de matemáticas en clases particulares; el resto no la tienen.

La intervención formativa se ha realizado en 4 sesiones de dos horas y media de duración. Dos de ellas tratan sobre el tópico de visualización, en las que se introduce el análisis de objetos y procesos; otra sesión sobre álgebra en la que introducen los niveles de RAE y una última sesión en la que se evalúa la competencia de análisis epistémico lograda con una tarea sobre proporcionalidad, seguida de la discusión de las soluciones. Por tanto, la cuarta sesión forma parte del proceso instructivo y no tiene una finalidad meramente evaluativa.

La tercera sesión (un taller de dos horas de duración) estuvo centrada en el desarrollo de conocimientos y competencias para el reconocimiento de niveles de algebrización, considerando tres momentos:

1. Presentación de las características del RAE, y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática, basadas en las lecturas de los trabajos de Godino y colaboradores (Godino, Aké et al., 2014; Godino et al., 2015).
2. Trabajando en equipos se propone realizar las siguientes actividades:
   2.1. Resolver tareas matemáticas (se propusieron 8), propias de primaria y secundaria, a ser posible, de varias maneras.
   2.2. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.
   2.3. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.
3. Presentación, discusión de resultados y extracción de conclusiones.

En cada una de las sesiones del curso, se recogieron las respuestas dadas por escrito a tareas específicas, resueltas mediante el trabajo en equipos (de 2 o 3 estudiantes) y entregadas a través de la plataforma Moodle usada en la gestión del curso. Como trabajo opcional, complementario para incrementar la calificación final del curso, se propuso la solución de 5 tareas. Los protocolos correspondientes a la solución de una de estas tareas, realizado por 10 estudiantes de manera individual tras la finalización del curso, son los que se van a analizar en este capítulo con la finalidad de identificar HDS en la faceta cognitiva del proceso formativo implementado. Tanto las tareas empleadas en la fase de trabajo colaborativo como las propuestas como trabajo opcional se incluyen en el Anexo 1.

En el siguiente apartado se presenta el análisis a priori de una de las tareas propuestas en la evaluación final (Problema 1 del trabajo opcional complementario, Anexo 1). Este análisis servirá de referencia para interpretar las respuestas dadas por los estudiantes. En Burgos, Giacomone, Godino y Neto (2020) se incluye el análisis a priori y un estudio de caso en relación a otra de las tareas de evaluación planteadas (en este caso la situación del puzle de Brousseau, Problema 3 del trabajo opcional complementario en Anexo 1).

3. Análisis *a priori* de una tarea de evaluación

La tarea propuesta, se trata de un problema de reparto proporcional, tomado de Ben-Chaim, et al. (2012, p. 134):

> Enunciado: *Se quiere repartir 40 canicas entre Juan y Saúl según la razón 3:5. ¿Cuántas recibirá cada niño?*

Aunque esta situación-problema se puede resolver mediante un razonamiento aritmético, es posible aplicar otros procedimientos que involucran los niveles proto-algebraicos 1 y 2, así como el nivel 3 de algebrización. Este tipo de tarea (categoría de razón parte-parte-todo) involucra una relación entre dos cantidades disjuntas (canicas de Juan y canicas de Saúl) dentro de un todo (canicas a repartir), de manera que la suma de las partes es el todo. Las consignas dadas al futuro profesor sobre este problema fueron:

a) *Resolver el problema por al menos dos métodos.*
b) *Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones.*

Para cada solución enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver y justificar la solución y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
...	...	...

c) *Teniendo en cuenta los conocimientos puestos en juego en cada solución reconocer el nivel de algebrización que se pone en juego en cada caso.*

d) *Enunciar y resolver tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización, justificando la asignación de dichos niveles.*

3.1. Solución 1. Aritmética (nivel de algebrización 0)

Secuencia de prácticas matemáticas resolutivas:

- Vamos a repartir 40 canicas entre Juan y Saúl, de forma que por cada 3 que recibe Juan, Saúl recibe 5.
- De cada 8 canicas que reciben entre los dos, Juan recibe 3. Las 40 canicas a repartir se pueden agrupar en 5 grupos de 8, $8 \times 5 = 40$.
- Por tanto, Juan recibirá $3 \times 5 = 15$ y Saúl, $5 \times 5 = 25$ (canicas)

En esta solución, que en la terminología de Ben-Chaim et al. (2012) sería del tipo "división por la razón", intervienen valores numéricos particulares y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores. La igualdad tiene significado de resultado de una operación. Por tanto, según Godino, Aké et al. (2014), la actividad matemática realizada se considera de nivel 0 de algebrización.

Esta secuencia de prácticas operativas y discursivas requiere que el resolutor sea consciente de la razón dada y reconozca la relación multiplicativa que existe entre las cantidades presentes en el enunciado. El estudiante debe comprender que la razón 3:5 describe una situación en la que cada grupo contendría 8 elementos (3 canicas para Juan y 5 canicas para Saúl). Además, debe reconocer que esta razón 3:5 se mantiene tanto para la cantidad total a repartir (las 40 canicas) como para cada grupo dentro del total.

De esta forma, se calculará cuántos grupos hay en el total, llegando a la conclusión de que éstos son 5 (40:8).

Identificamos, por tanto, las siguientes funciones semióticas críticas:

- FSC 1.1. Interpretar la notación 3:5 como relación multiplicativa entre las cantidades de canicas de Juan y Saúl ("por cada 3 que recibe Juan, Saúl recibe 5").
- FSC 1.2. Reconocer en la razón 3:5 el nuevo todo unitario parcial, $3 + 5 = 8$.
- FSC 1.3. Descomponer el total de canicas 40 en 5 grupos de 8, $40 = 8 \times 5$.
- FSC 1.4. Reconocer que la razón 3:5 se mantiene para cada uno de los 5 grupos de 8 canicas.
- FSC 1.5. Aplicar un procedimiento, como la multiplicación $(5 \times 3 = 15;\ 5 \times 5 = 25)$ o la suma reiterada para llegar a la solución.

3.2. Solución 2. Parte-todo (proto-algebraica de nivel de algebrización 1)

Secuencia de prácticas matemáticas resolutivas:

Dado que la razón de reparto de las canicas entre Juan y Saúl es de 3:5, Juan recibirá los 3/8 de las canicas a repartir.

- Es decir, Juan recibe $\frac{3}{8} \times 40 = 15$ canicas.
- Para saber las que recibirá Saúl, sólo tenemos que restarle al número total de canicas, las que recibe Juan, esto es, $40 - 15 = 25$.

Se establece una relación general entre la razón de canicas del reparto y el total de canicas a repartir, aunque dicha regla se enuncia con lenguaje aritmético y natural. La actividad matemática realizada supone, por tanto, un nivel 1 de razonamiento algebraico.

Podemos distinguir las siguientes funciones semióticas críticas, además de las FSC 1.1 y 1.2:

- FSC 2.1 Establecer la correspondencia entre la razón de reparto y la fracción de la unidad que corresponde a cada niño.

- FSC 2.2 Reconocer el uso de fracción como operador (que aplicado sobre la cantidad inicial de canicas permite hallar la cantidad final de canicas que corresponde a uno de los niños)
- FSC 2.3. Identificar que el número de canicas del otro niño es la diferencia con el total.

3.3. Solución 3. Valor faltante (proto-algebraica de nivel de algebrización 2)

Secuencia de prácticas matemáticas resolutivas:

- Se pretende repartir 40 canicas entre Juan y Saúl, de forma que por cada 3 canicas que reciba Juan, Saúl recibe 5.
- De cada 8 canicas que reciben entre los dos, Juan recibe 3, o sea, los 3/8.
- La relación entre el número de canicas que recibe Juan y el total de canicas repartido es de proporcionalidad directa.
- En una proporcionalidad directa las razones de las cantidades que se corresponden son iguales: $3/8 = x/40$; siendo x el número de canicas que recibe Juan.
- Por tanto $x = (3 \times 40)/8 = 15$.
- Es decir, Juan recibe 15 canicas y Saúl $40 - 15 = 25$.

Si bien la solución de un problema de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación, la actividad de algebrización que se realiza es de nivel 2, según el modelo de Godino, Aké et al. (2014), ya que la incógnita aparece despejada en un miembro de la ecuación que se establece mediante la proporción.

Con esta técnica, en primer lugar, es preciso identificar las cantidades involucradas y reconocer la relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes. Se debe evocar la igualdad de razones de cantidades que se corresponden y la igualdad de productos cruzados en una proporción para despejar el valor desconocido.

Además de las FSC 1.1 y FSC 1.2 están involucradas:

- FSC 3.1. Reconocer que la correspondencia entre las magnitudes discretas que intervienen es de proporcionalidad directa.
- FSC 3.2. Representar la cantidad desconocida como incógnita y escribir la igualdad de razones.
- FSC 3.3. Resolver la ecuación de primer grado planteada.

3.4. Solución 4. Formal/algebraica (nivel 3 de algebrización)

Secuencia de prácticas matemáticas resolutivas:

- Representamos por x el número de canicas que recibe Juan y por y el número de canicas que recibe Saúl.
- En el reparto de canicas se debe respetar la proporción, $\frac{5}{5} = \frac{x}{y}$.
- Además, $x + y = 40$, es decir, $y = 40 - x$.
- Por tanto, $\frac{3}{5} = \frac{x}{40-x}$.
- Procedemos a despejar la incógnita: $3(40 - x) = 5x$ de manera que:

$$120 - 3x = 5x; \quad 120 = 8x; \quad x = \frac{120}{8} = 15$$

- De esta manera, Juan recibirá 15 canicas y Saúl $40 – 15 = 25$.

Para asignar nivel propiamente algebraico (nivel 3) a una práctica se requiere el uso de lenguaje simbólico-literal y que se opere de manera analítica/sintáctica con dicho lenguaje (Godino, Aké et al., 2014). En la práctica anterior se han planteado de manera simbólica las ecuaciones y se aplica una técnica de sustitución para resolver la ecuación requerida.

Además de la FSC 1.1, distinguimos las siguientes funciones semióticas críticas:

- FSC 4.1. Representar simbólicamente las cantidades desconocidas, x e y.
- FSC 4.2. Establecer la proporción a partir de la razón de reparto (la razón de reparto se debe respetar para cualquier par de cantidades que se correspondan).
- FSC 4.3. Expresar una incógnita en función de la otra.
- FSC 4.4. Aplicar un procedimiento para resolver la ecuación de primer grado.

4. Resultados

En este apartado incluimos ejemplos concretos de respuestas de los estudiantes, obtenidas a partir del instrumento de evaluación, que nos permitirán determinar el conocimiento común del contenido y el grado de competencia de análisis epistémico-cognitivo logrado con la implementación del proceso formativo.

4.1. Métodos de solución y asignación de niveles de algebrización

De los 10 estudiantes que realizaron la tarea complementaria opcional, 7 proponen al menos una solución correcta con nivel 0 de algebrización. Las soluciones propuestas corresponden a las categorías de estrategias "pre-formarles" de Ben-Chaim et al. (2012, p. 136-137).

En una estrategia pre-formal aditiva, como la que muestra la figura 7.1, los estudiantes toman 8 canicas y las distribuyen individualmente dando 3 canicas a un niño y 5 a otro. Después toman otras 8 canicas y las distribuyen similarmente hasta agotar las 40 canicas a repartir.

La razón puede interpretarse así: por cada 3 canicas que recibe Juan, Saúl recibe 5. Por tanto, puede plantearse la resolución del problema generando grupos sucesivos de 3 + 5 canicas hasta alcanzar la cifra total de 40. Por tanto, Juan debe recibir 3×5 = 15 canicas y Saúl el resto: 5×5 = 25 canicas.

Figura 7.1. Ejemplo de solución aritmética siguiendo una estrategia aditiva

La figura 7.2 muestra otra solución prototípica de nivel 0 de algebrización (estrategia pre-formal iii) de Ben-Chaim et al., 2012). En ella, los estudiantes dividen el todo, es decir, las 40 canicas, en 5 grupos de 8 canicas. En cada grupo, por cada 3 canicas que recibe Juan, Saúl recibe 5.

Si se quieren repartir las canicas entre los dos amigos, cuando le doy 5 a uno le doy 3 al otro, es decir, reparto las canicas de 8 en 8. Si divido 40 entre 8 obtendré el número de repartos que haré, que serán 5. En cada reparto le doy a Juan 3 canicas, por tanto, Juan recibe 5×3=15 canicas, mientras que Saúl recibe 5×5=25 canicas.

Figura 7.2 Ejemplo de solución aritmética obtenida dividiendo por la razón.

Todos los estudiantes que justificaron el nivel de algebrización en las soluciones aritméticas o de estrategia aditiva, lo hicieron correctamente.

Cinco estudiantes proponen soluciones proto-algebraicas de nivel 1. Estas responden a dos categorías: a) Tabular, b) Parte-todo. Dos de ellos elaboran una tabla similar a la que se muestra en la tabla 7.1:

Tabla 7.1. Ejemplo de solución tabular

Canicas a repartir	8	16	24	32	40
Canicas para Juan	3	6	9	12	15
Canicas para Saúl	5	10	15	20	25

El uso de la tabla introduce cierta generalidad potencial al procedimiento. La secuencia de rondas puede prolongarse, lo que indica un intensivo de segundo grado de generalidad. Consideramos pues esta actividad de nivel 1 de algebrización; sin embargo, ambos estudiantes asignan a esta solución nivel 0 de algebrización: uno de ellos no lo justifica y el otro afirma que:

> *La tarea involucra un nivel 0 de algebrización por los siguientes motivos:*
> – *Se están usando objetos extensivos (particulares) a los que únicamente se les aplican operaciones aritméticas.*
> – *El signo de igualdad es puramente operacional.*
> – *No se usan símbolos o variables como incógnitas.*

Los otros tres estudiantes, ofrecen una solución basada en la relación parte-todo (Ben-Chaim et al., 2012, p. 138) que concuerda con la solución 2 del análisis a priori. Dos de los estudiantes asignan correctamente el nivel de algebrización, aunque uno de ellos no lo explica y el otro lo hace de forma confusa. Presentamos en la figura 7.3 la solución y la justificación del nivel de algebrización asignado a dicha tarea por este estudiante.

La razón del reparto son 3:5. Es decir, de 8 partes iguales, 3 le corresponden a Juan y 5 a Saúl. $\frac{3}{8}$ de 40 a Juan y $\frac{5}{8}$ de 40 a Saúl. $\frac{3}{8}$ de 40= 15; $\frac{5}{8}$ de 40= 25 La solución es: el reparto es de 15 canicas para Juan y 25 canicas para Saúl.	En la resolución de la tarea por este método ha sido preciso la utilización de conocimientos algebraicos básicos, se usan símbolos como el del porcentaje (%), se realizan operaciones con primer grado de operacionalidad y se utiliza la igualdad como equivalencia. Se trata por ello de un nivel de algebrización 1.

Figura 7.3. Solución proto-algebraica de nivel 1

Para el tercer estudiante, esta resolución es propia del nivel 0 de algebrización, ya que se trata de *una resolución sin incógnitas, que se vale del significado operacional de la igualdad.*

Dos estudiantes proponen sendas soluciones recurriendo a la estrategia “valor faltante” (Ben-Chaim et al., 2012, p.138). Una variante en forma de diagrama de esta estrategia de solución es la conocida ‘regla de tres’. Esta técnica en cierto modo oculta la intervención de las razones y la proporción, lo que puede comportar un significado degenerado de la proporcionalidad aritmética. Por ejemplo, presentamos en la parte izquierda de la figura 7.4 la solución dada por uno de los dos estudiantes mediante regla de tres; en la parte derecha se muestra la argumentación que emplea para establecer nivel 1 como nivel de algebrización de la solución propuesta, la cual no es correcta. El otro estudiante que resuelve por el mismo método, asigna apropiadamente el nivel de algebrización; sin embargo, no lo justifica.

Como tenemos una razón de 3:5, esto nos indica que sobre 8 canicas Juan recibirá 3 y Saúl 5. Podemos plantear la siguiente proporcionalidad 8 canicas → 3 Juan 40 canicas→ x Juan Así, Juan recibirá $x = \frac{3 \text{ x } 40}{8}$ =15 canicas. Hacemos lo mismo en el caso de Saúl 8 canicas → 5 Saúl 40 canicas→y Saúl Saúl recibirá $y = \frac{5}{8}$ x 40 =25 canicas	Corresponde al nivel 1 de algebrización, pues aparecen incógnitas, pero no se realizan operaciones con ellas ni se resuelven operaciones de la forma Ax = B.

Figura 7.4 Solución por regla de tres (proto-algebraica de nivel 2)

Por último, 5 estudiantes elaboran soluciones con un nivel propiamente algebraico, similares a la solución 4 formal-algebraica que incluimos en el análisis a priori de las tareas. De ellos, 2 reconocen adecuadamente el nivel 3 de algebrización en la actividad desarrollada si bien la explicación puede no ser suficientemente precisa (*significado relacional de la igualdad, hallando también variables como incógnitas y el uso del lenguaje simbólico-literal*; *pues aparecen ecuaciones y se opera con las incógnitas*). Una de las estudiantes asegura que tal solución *sigue un nivel 2 de algebrización, ya que aparece un sistema de ecuaciones, pero no se opera con las incógnitas sino con los números.*

4.2. Identificación de conocimientos puestos en juego en las tareas

Cuando se realiza una práctica matemática, interviene un entramado (configuración) de objetos matemáticos vinculados entre sí. Por otro lado, el significado de un objeto matemático queda determinado por el conjunto de prácticas matemáticas en las que aparece involucrado.

Estos objetos dentro de una práctica intervienen como antecedente y/o consecuente de funciones semióticas. Identificar las funciones semióticas críticas que conectan los distintos objetos presentes en las configuraciones, ayuda a mostrar la complejidad del sistema de significados que el docente debe construir y reconocer en la resolución de un problema.

Las respuestas que los futuros profesores dieron a la tarea de reparto proporcional ponen de manifiesto ciertas dificultades para realizar la secuenciación de prácticas elementales, así como para distinguir los objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) referidos en ellas. La mitad de ellos no distinguieron unidades de prácticas dentro de la secuencia de resolución, o bien las configuraciones que realizaron fueron muy escasas (sólo reconocieron parcialmente algunos conceptos como objetos matemáticos implicados). Hemos podido identificar que si bien algunos estudiantes no diferencian los significados de fracción como relación parte-todo o como operador, proponen soluciones distintas que involucran los dos usos. Algunos confunden el significado de la razón o traducen mal los términos de ésta.

En general, los futuros profesores reconocen de forma apropiada los conceptos contemplados en el análisis a priori. Por ejemplo, frente a la práctica:

> *Dado que la razón de reparto de las canicas entre Juan y Saúl es de 3:5, Juan recibirá los 3/8 de las canicas a repartir*.

(donde intervienen las funciones semióticas críticas FSC 1.2. y FSC 2.1.) se pueden identificar los conceptos: *reparto proporcional, razón, fracción (parte-todo).*

No obstante, en algunos estudiantes apreciamos una confusión con el significado del objeto primario *concepto*. Por ejemplo, la respuesta dada por dos estudiantes a prácticas distintas señalan *relación de incógnitas* y *resolución de ecuaciones* como conceptos. También es frecuente que *regla de tres* aparezca como concepto en la configuración.

Los futuros profesores son frecuentemente imprecisos con la noción de *proposición*. A veces es interpretada como premisa o argumento en lugar de un enunciado sobre conceptos que necesita justificación o prueba.

La estudiante que realizó la solución aditiva que aparece reflejada en la figura 7.1 (sin enumerar la secuencia de prácticas) señaló como proposición asociada que: *la razón de reparto puede expresarse como una fracción sobre el total.*

En general, podemos apreciar que los estudiantes reconocen los procedimientos considerados en el análisis a priori. Sin embargo, muestran dificultades en la explicación o justificación del uso que se pretende con la práctica textualizada involucrada.

Por ejemplo, en una solución de estrategia pre-formal aditiva proporcionada por un estudiante, vinculada a la práctica elemental *si reciben canicas a razón de 3:5, empezar repartiendo 3 canicas a Juan y 5 canicas a Saúl*, el estudiante incluye como procedimiento: *expresar una proporción como una suma en la que los sumandos cumplan dicha proporción*.

El estudiante que elaboró la solución mostrada en la figura 6, incluye como práctica elemental: *establecer que la razón, puede expresarse como una fracción sobre el todo: 3/8 y 5/8;* referida a ésta incluye el procedimiento: *creación de dos fracciones que representan las partes de un todo*.

El objeto *argumento* es el menos referido, y cuando lo está, no suele aludir a justificación de una proposición o procedimiento, sino a la descripción de la práctica referida.

Un estudiante que resuelve el problema siguiendo una estrategia formal/algebraica, incluye como argumentos: *deducción a partir de las ecuaciones* o *resolución del sistema de ecuaciones explicado en los pasos anteriores*.

El estudiante que aborda el problema mediante regla de tres, tal cual se incluye en la figura 7.4, indica que: *la argumentación* está *basada en la regla de tres utilizada*. El mismo estudiante incluye el concepto *regla de tres* en la misma práctica elemental.

4.3. Enunciado de nuevas tareas

Las investigaciones relativas a experiencias didácticas desarrolladas con profesores en formación sobre creación de problemas con fines didácticos revelan el estrecho vínculo de estas tareas con las competencias docentes (Malaspina, Mallart y Font, 2015). Destacamos la afirmación de Malaspina et al. (2015, p. 2861):

> A teacher must not only be good at solving problems, but also needs to know how to choose, modify and create them with a didactic purpose. A teacher also needs to be able to critically evaluate the quality of the mathematical activity required to solve the problem proposed and, if necessary, to be able to modify the problem in order to facilitate a richer mathematical activity.

Para responder a la consigna 'enunciar y resolver tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización, justificando la asignación de dichos niveles' es importante que los futuros profesores hayan identificado previamente los objetos matemáticos en la solución de un problema y establezcan interrelaciones entre ellos (en términos de funciones semióticas).

En su mayoría, los estudiantes tienen dificultades para elaborar de forma pertinente problemas que supongan una variación respecto del enunciado inicial. Los enunciados propuestos se alejan demasiado del problema original, son poco significativos o el contexto no es el de proporcionalidad. Interpretan que introducir nuevas variables, coeficientes, etc. incrementa el nivel de algebrización, y con frecuencia sostienen la creencia de que una mayor complejidad en la resolución del problema está asociado a un mayor nivel de algebrización.

Los tipos de problemas propuestos de forma pertinente por los estudiantes recurren a parámetros para elaborar variantes, utilizando en su mayoría el parámetro: *cantidad de canicas a repartir* (figura 7.5).

Juan y Saúl quieren repartir sus canicas a razón 3:5. Indica cuántas canicas le corresponden a cada uno en función del número total de canicas.	Si se quieren repartir k canicas entre Juan y Saúl según la razón 3:5. Determina el valor de k en función del número de canicas de Juan.

Figura 7.5. Ejemplo prototípico de problema que refiere a un parámetro de cantidad

El uso de parámetros, como registro numérico y coeficientes variables, implica la capacidad de discriminar el dominio y el rango de la *función paramétrica* correspondiente y es indicativo de un cuarto nivel de algebrización. Los estudiantes justifican el nivel 4 de algebrización argumentando que "aparecen parámetros, pero no se opera con ellos".

5. Discusión. Aplicación de las FSC al análisis de los resultados

En el marco teórico del EOS, los errores de los estudiantes se interpretan en términos de discordancia entre los significados institucionales de los objetos implicados en las prácticas matemáticas y los significados personales. Un análisis más detallado de tales discordancias se realiza identificando las funciones semióticas que se establecen entre los objetos implicados en las prácticas correspondientes.

En este estudio, las funciones semióticas vinculadas a las prácticas con una mayor frecuencia de errores en la resolución del problema son las FSC 1.1. y 1.2. A continuación, en la figura 7.6 mostramos parte de la secuencia de prácticas desarrolladas por una estudiante en la que podemos identificar un conflicto semiótico relacionado con la FSC 1.1. El estudiante no relaciona adecuadamente antecedente y consecuente en la razón 3:5.

Denominamos x al número de canicas de Juan y denominamos y al número de canicas de Saúl. Obtenemos las ecuaciones $x + y = 40$ $3x = 5y$	Argumentación: – Primera ecuación: La suma de las canicas de Juan y Saúl es 40 – Segunda ecuación: Tres veces el número de canicas de Juan es 5 veces el número de canicas de Saúl por la razón 3:5

Figura 7.6. Ejemplo prototípico 1 de conflicto semiótico

Por otro lado, en la solución que se presenta en la figura 7.7 el estudiante confunde el consecuente de la razón con el número de partes del todo en el reparto de las canicas. Interpreta entonces que la fracción de canicas del total que recibe Juan es 3/5 y, por tanto, las que recibe Saúl son 2/5.

Juan tendría los 3/5 de las canicas y Saúl los 2/5, por lo tanto Juan =3/5 × 40 = 24 Saúl = 2/5 × 40 =16

Figura 7.7 Ejemplo prototípico 2 de conflicto semiótico

Podemos concluir que no ha establecido correctamente las FSC 1.1 (no reconoce la relación multiplicativa entre las cantidades de canicas de Juan y Saúl) y FSC 1.2. (no identifica en la razón 3:5 el nuevo todo unitario parcial, 3+5=8).

Una tercera solución incorrecta se resalta en la figura 7.8 donde el reparto de canicas se establece según la proporción $\frac{3}{2} = \frac{x}{40-x}$. En este último caso, son las FSC 1.1 y FSC

4.2 (establecer la proporción a partir de la razón de reparto) las que están detrás de la respuesta errónea.

Juan: x canicas y Saúl 40–x (x/40) / (40–x/40) = 3/2 ↦ x/40–x =3/2 ↦ 2x=120–3x ↦ 5x= 120 ↦ x=24; Juan 24 canicas, Saúl: 40 – 24 = 16

Figura 7.8. Ejemplo prototípico 3 de conflicto semiótico

El análisis de los datos ha permitido identificar algunos HDS en la faceta cognitiva del proceso formativo implementado. Dichos HDS tienen una cierta incidencia en la muestra de sujetos y, por tanto, pueden ser indicativos de la manifestación de *fenómenos didácticos*:

- A pesar de haber cursado el grado de matemáticas algunos estudiantes manifiestan carencias en el conocimiento común del contenido de proporcionalidad.
- Las siguientes facetas de la competencia de análisis epistémico de las tareas apenas se han desarrollo tras el proceso formativo:
  - Descomposición en prácticas elementales de la solución de los problemas.
  - Identificación de proposiciones y procedimientos, y consiguientemente, la argumentación de dichos objetos.
  - Reconocimiento de los niveles proto-algebraicos de las prácticas matemáticas.
  - Elaborar problemas por variación de un enunciado dado.

Los estudiantes de nuestra muestra han revelado importantes carencias en estos conocimientos didáctico-matemáticos, posiblemente por su complejidad intrínseca y el escaso tiempo dedicado a su desarrollo. Estas limitaciones nos llevan a reconocer una concepción pobre y sesgada de la naturaleza del razonamiento algebraico elemental. No obstante, dichos resultados son de esperar dadas las dificultades que resaltan las investigaciones para abordar tareas de este tipo **(**Van Dooren, Verschaffel y Onghena, 2003).

6. Reflexiones finales

Sowder et al. (1998) proponen un conjunto de recomendaciones para la formación de profesores en el campo del razonamiento proporcional. En particular, afirman que "Los profesores de secundaria obligatoria (middle-grade) deberían tener una comprensión profunda de los componentes conceptuales del razonamiento proporcional y su centralidad en todo el pensamiento matemático" (p. 144). Esto es así porque una parte importante del papel del profesor de matemáticas es comprometer a los estudiantes en experiencias que involucren conceptos críticos, al tiempo que les desafían en sus ideas previas con las que llegan a la instrucción.

En este capítulo se ha mostrado el diseño y la implementación de una acción formativa para desarrollar conocimientos y competencia para el análisis epistémico de futuros profesores de matemáticas. Por un lado, se trata de innovación basada en la práctica reflexiva, siendo una actitud favorable hacia el desarrollo profesional del profesor (Pochulu, Font y Rodriguez, 2016; Ponte, Mata-Pereira, Quaresma y Vélez, 2017). Por otro lado se ha puesto en evidencia la complejidad de los objetivos planteados; tal como señalan Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer (2018) el desarrollo de este tipo de competencias es un reto para la formación y aún más cuando se trata de proporcionalidad y conocimiento algebraico como muestran nuestros resultados.

La actividad de reflexión epistémica que hemos implementado en nuestra intervención formativa está orientada al logro de una comprensión profunda, no solo de los componentes conceptuales del razonamiento proporcional, sino también los componentes proposicionales y argumentativos. El reconocimiento de diferentes niveles de algebrización en la resolución de tareas de proporcionalidad constituye otro aspecto importante de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático requerido para una enseñanza idónea de este contenido.

Tener una relación profesional adecuada con la naturaleza del razonamiento algebraico, y la argumentación matemática es esencial para gestionar procesos de aprendizaje matemático con alta idoneidad epistémica, es decir, con un alto grado de representatividad de los significados institucionales implementados respecto de los significados de referencia.

CAPÍTULO 8.
INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA DESARROLLAR CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE LA PROPORCIONALIDAD EN MAESTROS EN FORMACIÓN

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Burgos y Godino, J. D. (2020). Ingeniería didáctica para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad en futuros maestros de educación primaria. (Sometido a publicación).

Burgos, M, Godino, J. D. y Rivas, M. (2019) Análisis Epistémico y Cognitivo de Tareas de Proporcionalidad desde la Perspectiva de los Niveles de Algebrización, *Acta Scientiae*, 21 (4), 63-81.

1. Introducción

El desarrollo del conocimiento y de las competencias matemáticas de los alumnos, se encuentra estrechamente asociada a la formación didáctico-matemática de sus profesores. En tal sentido, se observa, en el ámbito de la investigación en educación matemática, una manifiesta preocupación por determinar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que precisa el profesor de matemáticas para desarrollar su tarea docente de manera pertinente (Chapman, 2014; Hill y Ball, 2009; Sowder, 2007). En particular y en relación con el estudio de la proporcionalidad en el ámbito de la formación de profesores, existe un creciente desarrollo de investigaciones centradas en el estudio del conocimiento matemático *per se* y el necesario para enseñar la proporcionalidad (Izsák y Jacobson, 2013; Sowder et al, 1998).

En el capítulo previo hemos descrito los resultados de una acción formativa con estudiantes de un Máster de Profesorado de Educación Secundaria en el marco del EOS (Burgos, Beltrán-Pellicer, et al. 2018). En dicha experiencia se perseguía analizar los conocimientos iniciales y evaluar el grado de desarrollo de la competencia de análisis epistémico y de significados sobre tareas de proporcionalidad. Los futuros profesores mostraron carencias tanto en el conocimiento común del contenido como en aspectos clave del conocimiento didáctico-matemático que dejaban ver una concepción deficiente y sesgada de la naturaleza del razonamiento algebraico elemental en tareas de proporcionalidad. En particular, el reconocimiento de las prácticas, objetos y procesos por parte de los futuros profesores mostraba la necesidad de profundizar en el diseño y experimentación de nuevas intervenciones formativas.

Dada la vital importancia del papel del profesor para promover el razonamiento proporcional en las primeras etapas educativas, realizamos una primera intervención formativa con futuros maestros del grado de educación primaria, destinadas a promover sus conocimientos y competencias didáctico-matemáticas relativos al razonamiento proporcional y su imbricación con el razonamiento algebraico. En particular, se persigue:

- desarrollar conocimientos y competencias didáctico-matemáticas sobre el razonamiento proporcional y su relación con el razonamiento algebraico;
- fomentar la competencia de análisis epistémico-cognitivo de objetos y procesos puestos en juego en las prácticas matemáticas en tareas de proporcionalidad.

Para ello aplicamos las herramientas del modelo CCDM y del modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática. Para un determinado contenido matemático, como puede ser la proporcionalidad, se asume que el profesor debe tener el conocimiento matemático común relativo al nivel educativo donde imparte su docencia, en este caso último ciclo de educación primaria, y el conocimiento ampliado que le permita articularlo con los niveles superiores (primer ciclo de educación secundaria). Además, debe disponer de un conocimiento didáctico-matemático que le garantice, ante una tarea matemática determinada: poder resolver la tarea utilizando distintos procedimientos y mostrando diversas justificaciones, ser capaz de reconocer la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica), así como debe ser competente para modificarla atendiendo a los conocimientos y dificultades de los alumnos (facetas instruccional y cognitiva).

Se plantea la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Qué aspectos del conocimiento y competencias didáctico-matemático de futuros maestros sobre proporcionalidad y razonamiento algebraico elemental,*

pueden ser observados/desarrollados por medio de una acción formativa que incluye el uso de herramientas de análisis propuestas por el enfoque ontosemiótico?

En este sentido, el objetivo de este capítulo es informar del diseño, implementación y evaluación de los resultados de dicha experiencia que centra la atención específicamente en:

1. El desarrollo de la competencia de análisis epistémico de las prácticas matemáticas implicadas en la resolución de tareas de proporcionalidad.
2. El reconocimiento de niveles de algebrización involucrados en distintas soluciones, basado en la identificación de objetos y procesos algebraicos.
3. La identificación de los errores y dificultades que los alumnos pueden presentar cuando aplican los conceptos y procedimientos en una determinada estrategia de resolución de las tareas propuestas.

El capítulo se organiza en las siguientes secciones: La sección 2 describe el método, contexto, los participantes y el instrumento de recogida y análisis de datos. La sección 3 presenta el diseño del proceso formativo. En la sección 4 se incluyen los resultados de la fase de trabajo en equipo en términos de métodos de solución y niveles de algebrización, configuraciones ontosemióticas, asignación de nivel educativo y dificultades previstas y enunciado de variantes de los problemas. A continuación se muestran los resultados del trabajo individual voluntario, expresados en función de estrategias de resolución según niveles de algebrización, configuraciones ontosemióticas, previsión de dificultades y análisis (valoración, asignación de niveles de algebrización e identificación de prácticas elementales) de respuestas escritas de alumnos de primaria. El capítulo concluye con el análisis retrospectivo y las conclusiones.

2. Contexto de la investigación, participantes y metodología

La experiencia formativa se realizó en el marco de la asignatura de Diseño y Desarrollo del currículum en Educación Primaria durante el año lectivo 2016-2017, con un grupo de 35 estudiantes de tercer curso del grado de Educación Primaria.

El estudio de razón y proporción es uno de los contenidos de la asignatura de Bases Matemáticas para la Educación Primaria que los estudiantes habían estudiado en el primer curso del grado. Los alumnos al acabar esta asignatura deben conocer y relacionar los principales conceptos, propiedades y procedimientos que conforman los temas de las matemáticas escolares de educación primaria, analizando, razonando y comunicando de forma eficaz argumentaciones matemáticas. Se espera también que los estudiantes para futuros maestros enuncien, formulen y resuelvan problemas matemáticos mediante diferentes estrategias en una variedad de situaciones y contextos. En la asignatura de segundo (Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas para Educación Primaria), los alumnos recibieron formación específica sobre fundamentos de la Didáctica de las Matemáticas, concretada en: aspectos cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades) y didácticos (tareas y actividades, materiales y recursos). Finalmente, en la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículum en Educación Primaria, los estudiantes deben profundizar y aplicar el conocimiento adquirido en los cursos previos para diseñar, fundamentar y defender unidades didácticas. Se trata de que pongan en práctica el conocimiento adquirido en los cursos anteriores para, entre otras cosas, diseñar y secuenciar tareas matemáticas de acuerdo a unos contenidos específicos y a determinadas expectativas de aprendizaje.

Atendiendo al problema de investigación, diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas para desarrollar en los futuros maestros de educación primaria competencias y conocimientos didáctico-matemáticos sobre el razonamiento proporcional, el marco metodológico que contemplamos es la ingeniería didáctica en el sentido propuesto por el EOS.

3. Diseño del proceso formativo

Los objetivos que se perseguía con la intervención son siguientes:

- Reflexionar y profundizar sobre las características del Razonamiento Algebraico en Primaria.
- Distinguir tipos de objetos y procesos algebraicos en tareas matemáticas escolares.
- Asignar niveles de razonamiento algebraico a la actividad matemática realizada al resolver tareas escolares.
- Detectar posibles conflictos en las estrategias propuestas.
- Diseñar tareas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

3.1. Trabajo en equipo

En primer lugar se llevó a cabo un taller de 2 horas de duración en el que se presentó las características del Razonamiento Algebraico Elemental, y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática de Godino, Aké, et al. (2014).

En la siguiente sesión (también de 2 horas de duración), los alumnos debían trabajar en equipos para responder a las siguientes consignas:

1. Resolver las siguientes tareas matemáticas propias de primaria de varias maneras, incluyendo las estrategias que pensáis que usarían vuestros alumnos para resolver el problema.

Problema 1:
Se quiere repartir 40 canicas entre Juan y Saúl.
1) Si el reparto se hace según la razón 3:5. ¿Cuántas recibirá cada niño?
2) ¿Cómo se produciría el reparto si la razón fuese 2:4?

Problema 2:
1) Si la longitud de la circunferencia delantera (grande) de la bicicleta es 462 cm y la de la trasera (pequeña) es de 132 cm, ¿qué distancia debe recorrer la bicicleta para que la rueda pequeña de 30 vueltas más que la grande.
2) Encuentra una explicación matemática del movimiento de la bicicleta. ¿Cómo lo explicarías a tus estudiantes?

Figura 8.1. Tareas propuestas a los alumnos (inspiradas en Ben-Chaim et al.; 2012) en la sesión de trabajo en equipo

2. Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones, enumerando la secuencia de prácticas que se realizan para resolver el problema y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
…	…	…

3. Discutir las distintas estrategias empleadas para resolver el problema, planteando para qué curso creéis que serían apropiadas y qué dificultades pueden observarse en la resolución del problema usando cada estrategia (para ello observad las prácticas, objetos y procesos identificados potencialmente conflictivos para los alumnos).

4. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

5. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

Finalmente se discutieron los resultados y se procedió a la extracción de conclusiones.

El trabajo en grupo permite a los alumnos comparar y enriquecer sus propuestas de diversas estrategias para resolver los problemas, situándose como docente y como discente a la hora de identificar las posibles dificultades en las mismas. En la instrucción previa que han recibido los estudiantes, se les ha explicado los distintos elementos que aparecen referidos en las consignas. En particular, junto con las diapositivas de clase empleadas en la primera sesión formativa sobre RAE, en la que se resolvieron tareas matemáticas escolares por distintos procedimientos, identificando los objetos y asignando niveles de algebrización a las prácticas, y que estaban disponibles en la plataforma informática Prado de apoyo a la docencia, se les facilitó un ejemplo completamente resuelto del análisis que se esperaba que realizasen.

El análisis a priori de la tarea propuesta en el problema 1 (apartado 1) aparece en el capítulo previo (Burgos, et al., 2018). La inclusión del segundo apartado responde a la necesidad de indagar sobre el conocimiento de la razón y de sus propiedades, dado que en este caso, el reparto no se hace de forma completa. En Burgos y Godino (2018c) se incluye en análisis a priori del segundo problema. En ambos casos, se muestran las oportunidades que ofrece la herramienta de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos para analizar y comprender las matemáticas que se ponen en juego en el desarrollo de la tarea correspondiente.

En la Tabla 8.1 se resumen los tipos de conocimientos implicados en cada una de las tareas propuestas a los estudiantes.

Tabla 8.1 Consignas y tipos de conocimientos implicados

Consigna	Tipo de conocimiento	Intencionalidad
1. Resolver la tarea Problema 1	Común	Identificar conocimiento o carencias sobre razón y proporcionalidad
Problema 2 Ítem 1)	Ampliado	Comprobar si los alumnos distinguen situaciones de proporcionalidad directa e indirecta
Ítem 2)	Didáctico-matemático	Promover la argumentación y justificación matemática
Resolver la tarea de varias maneras, incluyendo las estrategias que usarían los alumnos de primaria		Promover la flexibilidad de resolución y la capacidad de adaptación al nivel educativo pertinente
2. Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones, enumerando la secuencia de prácticas		Desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico en tareas de proporcionalidad
3. Discutir para qué curso serían apropiadas las distintas estrategias empleadas. Discutir las dificultades que pueden observarse en la resolución del problema usando cada estrategia.		Desarrollar la faceta ecológica del CCDM Desarrollo de la faceta cognitiva del CCDM
4. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones		Profundizar en la faceta epistémica del CCDM analizando RAE en las tareas de proporcionalidad
5. Enunciar tareas relacionadas		Contribuir a la faceta instruccional impulsando la creación-variación de problemas atendiendo a los significados involucrados

3.2. Trabajo individual voluntario

Como trabajo opcional complementario, para incrementar la calificación final del curso, se propuso una tarea con la que se pretende identificar aspectos claves tanto del conocimiento ampliado, a saber, si los futuros maestros distinguen y resuelven correctamente situaciones de proporcionalidad inversa, así como del conocimiento didáctico-matemático en las facetas epistémica y cognitiva:

- la flexibilidad para resolver un problema usando diversas estrategias de resolución (faceta epistémica).
- identificar niveles de razonamiento algebraico (faceta epistémica).
- reconocer las dificultades que pueden encontrar los alumnos (faceta cognitiva).
- analizar respuestas dadas por alumnos de primaria (faceta cognitiva).

Los resultados de éste trabajo opcional implementado, que fue realizado por 12 futuros maestros de manera individual, tras la finalización del curso, revela aspectos relevantes de los aprendizajes logrados por ellos. Su análisis se incluye en la sección 5.

A continuación se presentan las consignas entregadas a los estudiantes en el trabajo opcional:

1. Resuelve la tarea matemática que aparece a continuación de varias maneras. Usa todas las estrategias que conozcas, incluyendo las estrategias que piensas que usarían tus alumnos de primaria para resolver el problema.

   Es la fiesta de graduación en el Instituto Las Gaviotas. 7 estudiantes han sido escogidos para diseñar y decorar el salón de actos. Los 7 necesitarían trabajar 21 horas para dejar el salón a punto para la celebración. Desafortunadamente, antes de que ellos pudieran empezar con la tarea, 4 chicos se han puesto enfermos con varicela y se tienen que quedar en casa. ¿Cuántas horas les llevará a los estudiantes que quedan disponibles, diseñar y decorar el salón? Describe y explica la estrategia que has usado para dar tu respuesta.

2. Para cada solución enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver el problema y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias.

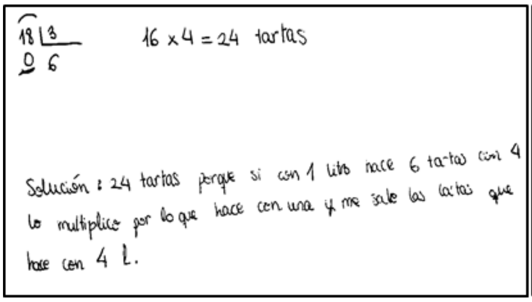
Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
…	

3. Detalla qué dificultades puedes observar en la resolución del problema usando cada estrategia (para ello observa las prácticas, objetos y procesos identificados potencialmente conflictivos para los alumnos).

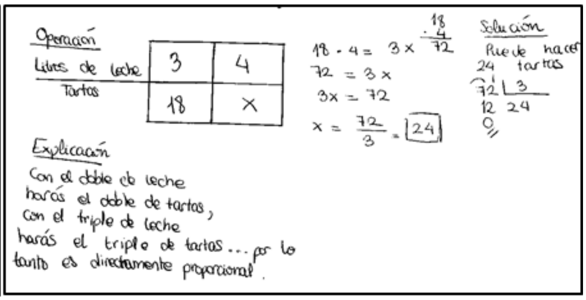
4. Asigna niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a la tarea, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

5. A continuación, aparecen las soluciones dadas por dos niños al siguiente problema:

Un pastelero usa 3 litros de leche para hacer 18 tartas iguales. ¿Cuántas tartas puede hacer con 4 litros de leche? Explica cómo lo has averiguado



Alumno 1



Alumno 2

a) ¿Crees que son correctas las respuestas (resolución y argumentación) dada por los estudiantes?
b) ¿Qué nivel de algebrización asignas a las distintas respuestas? Justifica tu respuesta
c) Identifica en las soluciones dadas por los estudiantes las distintas prácticas elementales (pasos dados en la resolución del problema) involucradas.

4. Resultados de la fase de trabajo en equipo

En la tarea que se ha planteado a los futuros maestros de primaria, se espera que éstos resuelvan los problemas y que una vez identificados los conocimientos puestos en juego, analicen las posibles dificultades que presenta cada estrategia planteada y asignen los niveles de razonamiento algebraico implicados. Así mismo, se les pide que enuncien variantes de la tarea que impliquen cambios en los niveles de algebrización.

4.1 Métodos de solución y niveles de algebrización

Como señalan Buforn et al. (2018) es importante promover en los futuros profesores la flexibilidad en el uso de múltiples métodos para resolver los problemas que involucran relaciones de proporcionalidad y desarrollar la comprensión de los componentes conceptuales, proposicionales y argumentativos del razonamiento proporcional.

Problema 1

Con esta tarea se pretende evaluar el conocimiento común de los estudiantes sobre razón y proporcionalidad. Todos los grupos de trabajo elaboraron 2 soluciones distintas al problema. La respuesta al apartado 1 fue correcta en al menos una de las soluciones propuestas. Respecto al apartado 2, seis de los ocho grupos respondieron de forma inadecuada.

A continuación describimos las estrategias de resolución presentes en las respuestas de los grupos de alumnos:

- Aritmética aditiva (Nivel 0 de algebrización). Un ejemplo de esta estrategia viene descrita por la respuesta del grupo 6:

  1) 3+5=8; 8+3+5 =16; 16+3+5=24; 24+3+5=32; 32+3+5 =40 → Juan= 3+3+3+3+3=15 canicas y Saúl= 5+5+5+5+5=25 canicas.

  2) Si utilizamos la misma fórmula de hacer, no se podría resolver, ya que en 36 canicas se acabaría el reparto: 2+4 =6; 6+2+4 =12; 12+2+4 = 8; 18+2+4 = 24; 24+2+4 =30; 30+2 +4=36; 36+2+4=42 ← ¡NO SE PUEDE REPARTIR A PARTIR DE 36! → Juan=2+2+2+2+2+2= 12 canicas y Saúl= 4+4+4+4+4+4= 24 canicas.

- Aritmética división por la razón (nivel 0 de algebrización). La solución propuesta por el grupo 7 se incluye en esta categoría:

  Sabemos que el reparto es 3:5, por tanto de cada 8 canicas, 3 son para Juan y 5 para Saúl. Y en el caso del reparto de 2:4, de cada 6 canicas, 2 son para Juan y 4 para Saúl. Como sabemos que cada reparto es la suma de cada relación y el límite es 40, dividimos las canicas entre el número de repartos. Realizamos la multiplicación del número de repartos por el número de canicas en cada uno.

  Razón 3:5 40:8=5 Juan 3×5=15, Saúl 5×5=15

  Razón 2:4 40:6=6 (sobran 4) Juan 2×6=12, Saúl 4×6=24

- Proto-algebraica parte-todo (nivel 1 de algebrización). Como ejemplo, se tiene la respuesta del grupo 3:

1) Por la razón 3:5, Juan recibirá 3/8. 3/8×40=15 canicas para Juan. Si 15 canicas son para Juan 40-15=25 son para Saúl.

2) Por la razón 2:4, Juan recibe 2/6 de 36 canicas. 2/6×36=12 canicas para Juan; Saúl recibe 4/6 de 36 canicas. 2/6×36=24 canicas para Juan.

- Algebraica-formal (nivel 3 de algebrización). Un ejemplo de esta estrategia corresponde a la seguida por el grupo 4:

1) Se resuelve mediante un sistema de ecuaciones, donde x son las canicas de Juan y la incógnita y corresponde con las de Saúl.

Ecuación 1: x/y=3/5

Ecuación 2: x+y=40

Al despejar las ecuaciones y sustituir nos da como resultado y=25, x=15.

1) Se resuelve mediante un sistema de ecuaciones, donde x son las canicas de Juan y la incógnita y corresponde con las de Saúl.

Ecuación 1: x/y=2/4

Ecuación 2: x+y=40

Al despejar las ecuaciones y sustituir nos da como resultado y=26,6, x=13,4. Al ser un número decimal tenemos que entender que sobran canicas que no entrarán en las bolsas de cada uno.

La estrategia *aditiva* fue empleada por 5 grupos. De ellos 4 identificaron correctamente el nivel de algebrización de la solución. La estrategia de *división por la razón* fue usada por la mitad de los grupos y todos identificaron apropiadamente el nivel de algebrización si bien no todos justificaron su decisión. Cuando lo hacen, refieren a que "el significado aritmético se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritmético". En el caso de la *estrategia parte-todo*, empleada por 4 grupos, tres de ellos asignaron (sin justificar) adecuadamente su nivel y uno no respondió a esta cuestión. Finalmente, tres grupos incluyeron una estrategia de solución de tipo *formal*, y en este caso, sólo un grupo asignó apropiadamente el nivel de algebrización en base a las transformaciones realizadas en la solución (los otros asignaron un nivel inferior al correcto).

Los conflictos mostrados por los alumnos muestran un conocimiento común deficiente del objeto razón y de sus propiedades. Esto se pone especialmente de manifiesto en la resolución del apartado 2 del problema, que en su mayoría fue poco o nada pertinente.

Cuando los futuros maestros emplean una estrategia aritmética, aditiva o de división por la razón, dado que en 40 canicas encuentran 6 grupos de 6 canicas y sobran 4, concluyen que Juan recibirá 12=6×2 canicas, Saúl 24=6×4, y quedarán 4 sin repartir. El grupo 1 propone: "para que no sobre ninguna canica las repartiríamos todas, dándole a cada uno dos canicas", lo que contradice la razón de reparto 2:4, o equivalentemente, 1:2, que implica que Saúl reciba el doble de canicas que Juan, de manera que de las 4 canicas restantes de los 6 repartos, 1 debería ser para Juan y 2 deberían ser para Saúl. En el caso de seguir una estrategia de tipo proto-algebraica, Juan recibe 2/6 del total de canicas y Saúl 4/6 de las mismas, es decir, de 40 y no de 36 como propone el grupo 3. Dado que que $\frac{2}{6} \times 40 = 13,\overline{3}$, Juan recibe 13 canicas y por tanto Saúl 26, sobrando una.

Este conocimiento deficiente de la razón y de fracción se pone de manifiesto en la solución propuesta por el grupo 2 incluida en la figura 8.2.

Se reparten 8 canicas cada vez (ya que se suma la razón 3:5), por cada 3 canicas que Juan recibe a Saúl le corresponden 5 (3 canicas de Juan + 5 canicas de Saúl = 8 canicas que se deben repartir cada vez). Se tienen que repartir 40 canicas, por lo que se va a repartir 5 veces (8 canicas cada vez x 5 veces = 40 canicas a repartir en total y la fracción que representa el total es 40/8).
Juan: 3/8 de canicas× 5/1 veces = 15/8 es la fracción de canicas que le corresponde.
Saúl: 5/8 de canicas × 5/1 veces = 25/8 es la fracción de canicas que le corresponde.

Figura 8.2. Conocimiento deficiente de razón y fracción (Grupo 2)

Problema 2

Con esta tarea se pretende evaluar el conocimiento ampliado de los estudiantes sobre proporcionalidad inversa. Éste es un contenido que no se contempla en el currículum de educación primaria, sino que se reserva para primer ciclo de educación secundaria. Sin embargo, es importante que los futuros maestros distingan este tipo de situaciones y puedan plantear soluciones sin recurrir a la regla de tres inversa.

Todos los grupos resolvieron esta tarea y todos de forma correcta salvo uno de ellos que interpretó mal el enunciado. Además, 5 grupos propusieron al menos dos soluciones distintas y correctas al apartado 1). Las estrategias de resolución presentes en las respuestas de los grupos de alumnos:

- Aritmética (nivel 0 de algebrización). Un ejemplo de esta estrategia viene descrita por la respuesta del grupo 2:

Para que salga exacto, lo primero que haremos será calcular qué distancia recorre la rueda grande cada dos vueltas y cuántas vueltas suponen, por lo tanto:

▪ *462 ×2= 924 cm*

▪ *924: 132= 7 vueltas por cada dos que da la grande.*

Si lo que nos pide el problema es saber qué distancia debe recorrer la bicicleta para que la rueda pequeña de 30 vueltas más que la rueda grande y sabiendo tras los cálculos realizados anteriormente que por cada dos vueltas de la grande la pequeña da 5 vueltas más, sabemos que la rueda grande debe dar 12 vueltas:

▪ *12 x 462= 5544 cm debe recorrer la bicicleta*

- Proto-algebraica (nivel 1 de algebrización). En este caso, se obtiene el número de vueltas que da la rueda pequeña por cada vuelta que da la rueda grande y se genera una sucesión (recogida a modo de tabla en las producciones de los grupos) con el número de vueltas que da la una y la otra hasta escoger los valores que corresponden a una diferencia de 30 vueltas. Tal es el caso de la solución propuesta por el grupo 4:

La razón es 462:132=3,5

R Gran	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	***12***
R Peq	*3,5*	*7*	*10,5*	*14*	*17,5*	*21*	*24,5*	*28*	*31,5*	*35*	*38,5*	***42***

Rueda grande=12×462=5544cm

- Proto-algebraica (nivel 2 de algebrización). Un ejemplo de esta estrategia viene descrita por la respuesta del grupo 3:

Si por cada vuelta de la rueda grande (462 cm) la pequeña da 3 vueltas y media (462:132=3,5), nos sobran 2 vueltas y media de la pequeña:

1→2,5

x→30

2,5x=30⇒x=30/2,5=12 vueltas da la grande

12×462=5544 cm

- Algebraica (nivel 3 de algebrización) Este tipo de estrategia aparece en la segunda solución propuesta por el grupo 2:

Para saber la distancia que recorre la rueda grande cada dos vueltas, se establece una proporción que es la siguiente: 462x = 132y, de forma que 30 + x = y; siendo x el número de vueltas que da la rueda grande e y el número de vueltas que da la rueda pequeña.

Por tanto, procedemos a despejar la incógnita "x":

462x = 1132 (30+x)

462x= 3960 + 132 x

462x – 132x= 3960

330x = 3960

x= 3960: 330

x= 12

Por tanto la bicicleta debe recorrer 12×462=5544 cm

Las estrategias más empleadas fueron la aritmética y la algebraica, ambas por un total de 5 grupos. Todos ellos asignaron correctamente el nivel de algebrización en el caso de ser 0, mientras que dos asignaron incorrectamente el nivel 2 de algebrización a la solución de tipo algebraico propuesta. Las estrategias de tipo proto-algebraica (de nivel 1 y de nivel 2) ejemplificadas fueron empleadas por dos grupos (ambas) siendo en cada caso correcto el nivel de algebrización propuesto por los alumnos. Como en el problema 1, los estudiantes en su mayoría no justificaron el nivel asignado; en caso de hacerlo, se hacía referencia al tipo de transformaciones y al lenguaje empleado.

Observamos que los estudiantes consiguen diferenciar distintos grados de razonamiento algebraico en las estrategias que proponen, sin embargo no han logrado la competencia suficiente para justificar el nivel de algebrización en base a los objetos y procesos involucrados en las prácticas.

En el segundo apartado de este problema los futuros maestros debían encontrar una explicación matemática del movimiento de la bicicleta que les permitiera explicárselo a sus estudiantes. Un grupo no respondió a este apartado y cuatro lo hicieron de forma poco o nada pertinente aludiendo a explicaciones físicas (descripción del movimiento circular uniforme de la rueda). Los restantes realizaron explicaciones de tipo matemático aunque informal como aparece recogida en la figura 8.3 y un grupo desarrolló una explicación en la que explícitamente reconoce la relación de proporcionalidad inversa dentro de su argumentación (figura 8.4).

Este problema se lo podríamos explicar a los alumnos haciendo una similitud entre las bicicletas y dos personas. Una de ellas sería más alta, simbolizando a la rueda grande, la otra sería una persona pequeña simbolizando a la rueda pequeña. Si la persona bajita quisiese andar la misma distancia que la alta debe dar más pasos pues su zancada es menor.

Figura 8.3. Explicación del movimiento de la bicicleta del grupo 7.

En la explicación ofrecida por el grupo 8 que vemos en la figura 8.4 se reconoce una característica de la relación de proporcionalidad directa entre el número de vueltas de las ruedas y la distancia: a más vueltas, mayor recorrido. Por otro lado la diferencia de tamaño entre las ruedas, justifica la relación de proporcionalidad inversa entre el número de vueltas que dan éstas a igualdad de distancia recorrida.

La bicicleta se trata de un sólido rígido por lo que las dos ruedas recorrerán el mismo recorrido siempre, esto será una proporcionalidad directa, puesto que a más vueltas, mayor recorrido.
La diferencia está en el tamaño de cada rueda, por lo que el número de vueltas sí será diferente en cada una de ellas. Esto sería, sin embargo, una proporcionalidad indirecta, porque a más vueltas que dé la rueda mayor, más aún dará la pequeña (3,5 vueltas más)

Figura 8.4. Explicación del movimiento de la bicicleta del grupo 8.

4.2 Configuraciones ontosemióticas

En general, los futuros maestros no tuvieron demasiadas dificultades para realizar la secuenciación de las prácticas elementales (salvo un grupo que no hizo las configuraciones ontosemióticas, 6 grupos hicieron una secuenciación muy pertinente en ambos problemas y uno lo hizo de forma muy esquemática). Sí fue conflictivo, de manera general, distinguir los objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) involucrados en las prácticas. La mayoría sólo identifican conceptos, frecuentemente reparto, doble, mitad, fracción, razón de cantidades, en el primer problema y vuelta, recorrido, distancia, vuelta, longitud, circunferencia en el segundo. Sólo dos grupos identifican el concepto proporcionalidad en el problema del reparto de canicas.

Los futuros maestros presentan graves conflictos a la hora de describir las proposiciones y argumentos, siendo frecuente que confundan ambos objetos con el uso o intencionalidad de la práctica referida (figuras, 8.5, 8.6, 8.7 y 8.8).

Proposición P4: Calcular las canicas de Saúl a partir de las totales y las de Juan.

Figura 8.5. Proposición identificada de forma errónea por el grupo 8

Proposición: intentamos averiguar el momento en el que la diferencia [de vueltas] *es 30*

Figura 8.6. Ejemplo incorrecto de proposición identificada por el grupo 7

No obstante en el segundo problema identifica de forma más apropiada proposiciones o argumentos que recaen en la relación de proporcionalidad. Así, por ejemplo, el grupo 8 identifica como argumentos "se cumple la proporcionalidad directa vuelta-centímetros recorridos" así como "la relación es de proporcionalidad indirecta: siempre la pequeña dará más vueltas que la grande por tener menos longitud".

Argumento: se restan las canicas totales de Juan a las totales para conocer que Saúl tiene 25 canicas.

Figura 8.7. Argumento no pertinente en la configuración del grupo 8

Argumento: solución de la ecuación

Figura 8.8. Argumento identificado de forma incorrecta por el grupo 4

En general, los estudiantes no reconocen más procedimientos que los de tipo aritmético y muestran dificultades en la justificación del uso que se pretende con la práctica textualizada involucrada.

4.3 Asignación de nivel educativo y dificultades previstas

Se espera que los maestros conozcan la diversidad de formas con las que el estudiante puede comprender el contenido y los conflictos que pueden presentar la aplicación de conceptos y procedimientos en la resolución de las tareas de proporcionalidad propuestas. El conocimiento de las dificultades de aprendizaje de los objetos matemáticos involucrados, sirve de soporte para diseñar y gestionar tareas que refuercen determinados conceptos o procedimientos, adaptando las tareas a las finalidades.

Sólo la mitad de los grupos argumentaron para qué curso serían apropiadas las distintas estrategias que habían empleado así como las dificultades que podrían plantearse a sus alumnos en la resolución de los problemas tratados de forma conjunta. Los grupos que respondieron a esta consigna consideraron (para ambos problemas) que las estrategias de tipo aritmético son adecuadas para 2º ciclo de primaria, reservando la estrategia proto-algebraica para 5º de educación primaria y la de tipo algebraico para 6º curso. En el caso del problema 1, los futuros maestros consideran como posibles dificultades en cada estrategia el conocimiento y uso del concepto razón, así como que el reparto en apartado 2 "no sea exacto". Por otro lado, piensan que sus alumnos no deben tener dificultades operacionales en la estrategia aditiva ("los alumnos saben sumar, restar, multiplicar y dividir") pero reconocen que podrían tenerlas al tratar con fracciones en la estrategia división por la razón. Uno de los grupos que propone la solución de tipo algebraica formal señala también como dificultad posible el uso del simbolismo algebraico asociado a este mayor nivel de algebrización, argumentando que "los alumnos podrían tener dificultad en la resolución de la ecuación al despejar la incógnita ya que en primaria no se profundiza aún demasiado en las ecuaciones con incógnitas". Por otro lado, un par de grupos señala dificultades "a la hora de comprender la relación entre la rueda pequeña y la rueda grande" y de "comprender los conceptos de proporcionalidad directa e indirecta" en el problema 2.

En este sentido, es importante mencionar que en el segundo problema, ningún grupo usó la regla de tres inversa para resolverlo, adaptando bien las estrategias al nivel educativo de primaria.

4.4 Enunciado de variantes del problema

La variación de un problema dado es un proceso según el cual se construye un nuevo problema, modificando uno o más de los elementos (información, requerimiento, entorno o contexto) que determinan el problema dado (Malaspina, 2017). En general, los estudiantes que participaron en nuestro estudio mostraron dificultades para elaborar variantes del problema inicial, considerando que se trataba de inventar un problema con un cierto nivel de algebrización pero que no tenía que guardar ninguna relación con los enunciados propuestos. De ahí que no se distinguieran enunciados para cada una de las situaciones planteadas (reparto proporcional y proporcionalidad inversa).

Si Juan tiene 25 canicas y la razón de reparto es 3:5, ¿cuántas canicas recibió Saúl? ¿Y cuántas se han repartido en total?

Figura 8.9. Enunciado propuesto por el grupo 7 con nivel asignado de algebrización 2.

Sólo cinco grupos respondieron a esta consigna y tan sólo uno de ellos planteó tareas (dos tareas para cada problema inicial) que se pueden considerar pertinentes (véanse las figuras 8.9 y 8.10). En ellas se modificaba la información y requerimiento inicial cambiando el nivel de algebrización esperable respecto de las soluciones que habían facilitado antes.

Sabiendo que la razón entre una rueda y otra es de 3,5 y que sumando las longitudes de las circunferencias suman 594 cm, calcula la longitud de cada una de ellas

Figura 8.10. Enunciado propuesto por el grupo 7 con nivel asignado de algebrización 3.

Las demás, no se podían considerar variaciones del enunciado dado que no guardaban ninguna conexión con el propuesto inicialmente y se proponían de forma conjunta para ambos problemas.

5. Análisis de resultados del trabajo individual

En esta sección incluimos el análisis de las respuestas de los futuros maestros (12) que realizaron la tarea voluntaria final, descrita en la sección 3 (ver también Anexo 2). Comenzamos analizando las estrategias de resolución empleadas en términos de los niveles de algebrización implicados.

5.1. Estrategias de resolución según niveles de algebrización

Todos los estudiantes resolvieron la tarea, diez de ellos al menos de dos formas distintas. A continuación describimos qué estrategias de resolución muestran los estudiantes, clasificadas según sus niveles de algebrización:

– *Nivel 0:* Aritmética. Un ejemplo del uso de esta estrategia lo muestra el estudiante E6, el cual se presenta en la figura 8.11. E6 opera sobre números particulares, en un lenguaje natural y numérico. No intervienen objetos y procesos algebraicos.

21 horas × 7 estudiantes = 147 horas en total.

7 estudiantes - 4 estudiantes enfermos = 3 estudiantes quedan.

21 horas × 4 estudiantes = 84 horas.

147 horas totales – 84 horas de los 4 estudiantes = 63 horas deben realizar entre los 3 estudiantes.

84 horas de los 4 estudiantes enfermos: 3 estudiantes que quedan = 28 horas cada uno de los 3 estudiantes.

28 horas de cada uno de los tres estudiantes + 21 que tenían inicialmente = 49 horas deberá realizar cada uno de los tres estudiantes.

Figura 8.11. Respuesta de Nivel 0 de Algebrización (Aritmética), dada por E6.

– *Nivel 1:* Reducción a la unidad. Los alumnos que utilizaron esta estrategia emplearon el registro tabular. Un ejemplo del uso de esta estrategia puede verse en la figura 8.12.

El reconocimiento del valor unitario (número de horas que emplearía una única persona) implicado en el procedimiento de reducción a la unidad, y el uso de representaciones diagramáticas-tabulares en la resolución, se califican como Proto-algebraicas de nivel 1. Se observa que el estudiante E11 (figura 8.12) reconoce propiedades de la relación de proporcionalidad inversa representadas también a través del registro tabular (si las cantidades de una magnitud se multiplican por un número, las cantidades correspondientes de la otra se dividen por el mismo número).

Hay que empezar sabiendo que menos gente implica más tiempo. Para poder llegar a la solución primero averiguamos qué tiempo tardaría una persona, teniendo en cuenta que cuando reduces del 7 a la unidad divides entre 7, y las horas se multiplican por 7, al ser inversamente proporcional.

Personas	*Horas*
7	*21*
7/7=1	*21×7=147*

Cómo ya tenemos la unidad, lo pasamos a 3 personas, y teniendo en cuenta que al multiplicar ahora en las personas, tenemos que dividir en las horas, al ser inversamente proporcional:

Personas	*Horas*
7	*21*
7/7=1	*21×7=147*
1×3=3	*147/3=49*

Figura 8.12. Respuesta proto-algebraica de nivel 1 de algebrización dada por E11

– *Nivel 2:* Regla de tres/Ecuación proporcional. La solución del problema por medio de la regla de tres, involucra una incógnita y el planteamiento de una ecuación en la que la incógnita se encuentra en un único miembro de ésta. En tal sentido, la actividad desarrollada se considera proto-algebraica de nivel 2. Un ejemplo del uso de esta estrategia la presenta el estudiante E2, la cual puede verse en la figura 8.13.

Planteamos una regla de tres que se resolverá de manera inversa, ya que sabemos que cuantos menos niños haya más horas van a tardar.

$$\left.\begin{matrix} 7 \to 21 \\ 3 \to x \end{matrix}\right\} 3x = 21 \cdot 7; x = \frac{147}{3}; x = 49$$

Figura 8.13. Respuesta Proto-algebraica de nivel 2 de algebrización, dada por E2

En la tabla 8.2 se presentan las frecuencias de respuestas correctas e incorrectas agrupadas de acuerdo con los niveles de algebrización antes ejemplificados. De los 12 estudiantes, siete plantearon soluciones siempre incorrectas y dos ofrecieron una solución correcta y otra incorrecta al problema. La estrategia más utilizada fue la de regla de tres, seguida de la de tipo aritmética, siendo en ambos casos el número de respuestas incorrectas considerablemente mayor al de respuestas acertadas.

Tabla 8.2 Frecuencias de las respuestas según nivel de algebrización y grado de corrección

Nivel de algebrización	Correcta	Incorrecta	Total según nivel
Nivel 0	2	7	9
Nivel 1	3	1	4
Nivel 2	4	7	11
Total (*n* = 12)	9	15	24

Se observa, en los trabajos de los estudiantes, que las respuestas erróneas se deben fundamentalmente a dos factores:

1. *Considerar que la relación es de proporcionalidad directa*. De los siete estudiantes que resolvieron de forma incorrecta, cinco lo hicieron porque asumieron que el número de niños y el número de horas de trabajo eran magnitudes directamente proporcionales. En la figura 8.14 se muestra un ejemplo de esta respuesta, dada por el estudiante E4.

$$\left.\begin{matrix} 7\ estudiantes \to 21\ horas \\ 3\ estudiantes \to x\ horas \end{matrix}\right\} x = \frac{3 \cdot 21}{7}\ \textit{x=9 horas cada niño}$$

9 horas×3niños=27 horas en total.

Figura 8.14. Solución incorrecta al problema por medio de regla de tres asumiendo relación de proporcionalidad directa. Respuesta dada por E4.

2. *Interpretar que 21 horas es el total de horas precisas para diseñar y decorar el salón*. De los siete estudiantes que resolvieron de forma incorrecta el problema, uno cometió este error (estudiante E12). Esta respuesta se presenta en la figura 8.15. Pero

además, este error fue presentado por dos estudiantes que habían ofrecido otras soluciones correctas. En total tres estudiantes cometieron este error.

SOLUCIÓN 3 (proporcionalidad inversa, regla de 3)
1. *Los 7 alumnos necesitarían trabajar 21 horas para dejar el salón a punto para la celebración.*
2. *Si dividimos las horas totales entre los alumnos que hay inicialmente, sabemos que cada alumno trabajaría 3 h (21/7 = 3 horas)*
3. *A continuación, ante la enfermedad de 4 de ellos, tenemos que descubrir cuántos alumnos van a poder diseñar y decorar el salón de actos: 7-4 = 3 estudiantes*
4. *En una proporcionalidad inversa. A menor número de estudiantes, mayor el número de horas que deben trabajar*

Alumnos que realizan el diseño	*Horas a trabajar por alumno*
7	*3*
3	*X*

7/3=x/3
5. *Tenemos que tener en cuenta la proporcionalidad inversa. Por tanto, x = (7x3)/3 =7.*
6. *Por tanto los 3 estudiantes que quedan dedicarán 7 horas cada uno para conseguir acabar el decorado a tiempo*

Figura 8.15. Solución incorrecta al problema asumiendo 21 horas como precisas. Respuesta de E12

5.2. Asignación de niveles de algebrización

La asignación de los niveles de algebrización no supuso gran dificultad. La mayoría de los estudiantes lo hicieron de forma correcta salvo los dos casos siguientes: (a) el estudiante E10 asignó el nivel 0 de algebrización a una solución proto-algebraica de nivel 1 (ver figura 8.16), y (b) dos estudiantes asignaron el nivel 1 a una solución proto-algebraica de nivel 2 (ver figura 8.17). Seis estudiantes justificaron su decisión y lo hicieron con base en el grado de generalidad de los objetos intervinientes: números particulares, clases de números cuando recurren a fracciones o múltiplos de números, y la presencia de incógnitas; el significado operacional (“operación igual a respuesta”) o relacional (en ecuaciones) del signo igual y el tipo de operaciones efectuadas.

Para esta resolución, el nivel de razonamiento algebraico es 0, ya que se realizan operaciones únicamente con números particulares

Figura 8.16. Nivel 0 de algebrización asignado por el estudiante E10 a una solución por reducción a la unidad.

En la figura 8.16 se observa que el estudiante E10 no reconoce el mayor grado de generalidad que supone deducir el valor unitario que permite obtener el número de horas, x, en función del número de estudiantes, y, o recíprocamente, según $x \cdot y = 21 \cdot 7 = 141$.

Para resolver el ejercicio con ese método, el nivel de razonamiento algebraico es 1, ya que utiliza números particulares para hacer una regla de 3 en la que aparece una incógnita

Figura 8.17. Nivel de algebrización 1 asignado por el estudiante E10 a una solución por regla de tres

En la figura 8.17 se observa que el mismo estudiante (E10) no considera que se opere con la incógnita sino con los números particulares (coeficientes en la ecuación) lo que le lleva a determinar que el nivel de algebrización es 1 en lugar de 2.

5.3 Configuraciones ontosemióticas

Todos los estudiantes realizaron las configuraciones ontosemióticas correspondientes a las estrategias utilizadas y en general no tuvieron dificultades para completar la secuenciación de las prácticas elementales implicadas. Para la valoración de las configuraciones ontosemióticas elaboradas por los estudiantes se hizo uso de los criterios presentados en la tabla 8.3.

Tabla 8.3 Criterios para la valoración de las configuraciones ontosemióticas identificadas por los futuros maestros

Valoración	Criterio
Pertinente	- Comprende la secuencia de prácticas elementales y para cada unidad de éstas se refieren correctamente los objetos y procesos involucrados
Poco pertinente	- Comprende la secuencia de prácticas elementales pero no aparecen referidos todos los objetos involucrados o bien algunos de ellos no son correctos
Nada pertinente	- La secuencia de prácticas elementales no es correcta y/o no aparecen los objetos referidos en las unidades elementales de análisis

Cuatro estudiantes (la tercera parte) realizaron configuraciones nada pertinentes, dado que sólo mostraron la secuenciación de prácticas sin identificar los objetos (únicamente hicieron referencia a la no presencia de objetos y procesos algebraicos en las soluciones de tipo aritmético). Sólo un estudiante mostró configuraciones pertinentes. Los demás estudiantes (siete) elaboraron configuraciones poco pertinentes: los objetos no se corresponden con las prácticas elementales referidas o son incorrectos.

En la figura 8.18 se muestra un ejemplo de una configuración ontosemiótica poco pertinente, elaborada por el estudiante E2, y en la figura 8.19 una configuración pertinente, elaborada por el estudiante E7.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
Se realiza un tabla donde en una columna se ponen los niños y en la otra las horas que	*Concepto: relación, tabla.* *Proposición: realización de una tabla.*

tardan.	
A continuación se reduce a la unidad los 7 niños y se multiplican las 21 horas por 7. *Da como resultado que 1 niño tardaría 147 horas.*	*Concepto: relación, unidad.* *Proposición: la razón es inversa.* *Argumento: se cumple que a menos niños se tardan más horas.*
Finalmente se multiplica y divide por 3 y se llega a la solución que es: 3 niños tardan 49 horas.	*Concepto: relación, unidad.* *Proposición: la razón es inversa.* *Argumento: se cumple que a menos niños se tardan más horas.*

Figura 8.18. Ejemplo de configuración ontosemiótica poco pertinente, dada por E2

Las configuraciones ontosemióticas permiten detectar conflictos de tipo conceptual o argumental en las respuestas de los estudiantes. Uno de los conceptos que incluyen de forma más frecuente es el de *reparto,* puesto que entienden que las horas dedicadas a decorar el salón se han de distribuir de forma equitativa entre los alumnos.

Los estudiantes muestran conflicto con el término razón. Como puede verse en la figura 8.18, el estudiante E2 da como proposición: "la razón es inversa", posiblemente refiriéndose a que la relación entre las magnitudes: "niños que decoran el salón" y "número de horas necesarias"; es de proporcionalidad inversa.

En la figura 8.19, el uso que hace el estudiante E7 del término razón, asociado al de proporción, se refiere al producto de cantidades que se corresponden de magnitudes (horas y estudiantes) inversamente proporcionales. Asimismo, los argumentos empleados para justificar la relación de proporcionalidad inversa son sólo parcialmente correctos, haciendo referencia, como se ve en la figura 8.19, que: "*se cumplen las condiciones que definen la proporcionalidad indirecta: a más alumnos menos horas o al revés".*

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
1. Se supone una correspondencia de proporcionalidad indirecta entre dos magnitudes: "horas" y "estudiantes"	*Conceptos: proporcionalidad indirecta, magnitudes* *Proposición: la relación entre ambas magnitudes es de proporcionalidad indirecta* *Argumento: se cumplen las condiciones que definen la proporcionalidad indirecta: a más alumnos menos horas o al revés*
2. Por tanto, la razón de horas que se corresponden se mantiene constante	*Conceptos: razón de horas; proporción, incógnita* *Proposición: las razones son iguales*

21 horas ×7 estudiantes=x horas×3 estudiantes	*Argumento: las horas por el número de personas es constante*
3. Teniendo en cuenta la regla para la proporcionalidad indirecta ser haría de la siguiente manera x=(21×7)/3=49 horas	*Procedimiento: despeje de la incógnita* *Argumento: propiedades aritméticas*
4. Es decir, 3 estudiantes sanos tardarán 49 horas en terminar el trabajo	*Proposición: El tiempo es de 49 horas, muchas más que con más personas* *Argumento: secuencia de prácticas 1) a 4)*

Figura 8.19. Ejemplo de configuración ontosemiótica pertinente dada por E7.

En general, los estudiantes no reconocen de forma correcta otros procedimientos diferentes a los de tipo aritmético. Es significativo que varios estudiantes atribuyan a la frase: "algoritmo de la ecuación", el significado correspondiente al procedimiento que siguen al despejar la incógnita en la ecuación asociada a la regla de tres inversa.

Además muestran dificultades con el objeto proposición; puede verse en la figura 8.18, que el estudiante se refiere a: "realización de una tabla" como una proposición. Asimismo, con el objeto argumento que frecuentemente utilizan como intencionalidad de la práctica realizada. Así, se reconoce de forma frecuente expresiones del tipo: "conocer el número de horas de los cuatro estudiantes enfermos" o "se suman las horas iniciales de los estudiantes a las extras para conocer las horas totales", como formas de argumento.

5.4 Previsión de dificultades

Conocer las dificultades que los alumnos de primaria pueden presentar, dota a los futuros maestros de criterios para diseñar y gestionar tareas instruccionales que enfaticen determinados conceptos logrando procesos de estudio con mayor idoneidad cognitiva.

Las dificultades señaladas por los futuros profesores, atendiendo a las estrategias descritas son las siguientes:

- *Solución aritmética* (nivel 0 de algebrización). En general, los estudiantes afirman que no encuentran dificultad en este tipo de estrategias. Sin embargo, cinco estudiantes que las identifican, señalan posibles errores de tipo aritmético. Por ejemplo E3 considera posible: "error a la hora de escoger el número que tiene que ser dividido"; E8 y E9 señalan: "error a la hora de escoger el número que tiene que ser multiplicado"; errores asociados a una dificultad conceptual relativa a la relación de proporcionalidad inversa.

- *Solución por reducción a la unidad* (nivel 1 de algebrización). La dificultad que señalan en este caso está en comprender que, en el caso de la relación de proporcionalidad inversa, se mantiene constante el producto de las cantidades de magnitud que se corresponden. Por ejemplo E7 señala como dificultad: "entender la proporcionalidad inversa sus operaciones como la multiplicación de las horas totales por el número de estudiantes".
- *Solución por regla de tres* (nivel 2 de algebrización). En este caso 10 estudiantes consideran posibles dificultades en el trabajo con incógnitas, del tipo: "no saben trabajar con símbolos literales como incógnitas" (E1), "no tienen un significado relacional de igualdad" (E4), o plantear y resolver de forma correcta la regla de tres. Por ejemplo E7 considera posible: "escoger mal el número que tiene que ser multiplicado o dividido" y "despejar mal la incógnita".

Además, aquellos estudiantes que resolvieron correctamente el problema, señalan de forma general, como posible dificultad, considerar la relación de proporcionalidad directa en lugar de inversa. Algunos estudiantes refieren también a "dificultades para comprender el enunciado" (E4), "no comprender los procesos matemáticos en su totalidad sino por medio de estrategias memorísticas" (E7) o de tipo afectivo.

5.5. Análisis de las respuestas de alumnos de 6º de primaria

Presentamos los resultados sobre en análisis de las respuestas de alumnos de 6º de educación primaria, teniendo en cuenta la valoración de la resolución y los argumentos dados por los alumnos, la asignación de los niveles de algebrización e identificación de las prácticas elementales.

Valoración de la resolución y argumentos dados por los alumnos de primaria

Todos los futuros maestros coincidieron en que tanto las soluciones como las argumentaciones dadas por los alumnos de primaria son correctas. Tres de ellos (la cuarta parte) no justificaron su afirmación y los demás (nueve) centraron la atención en el procedimiento seguido o la exactitud del argumento, comparando, en este caso, las respuestas de ambos alumnos. Dos futuros maestros consideraron mejor ("más completa") la explicación ofrecida por el Alumno 2. Sin embargo, cinco calificaron la explicación de este alumno como incompleta. En la figura 8.20 se muestra un ejemplo de una respuesta de este tipo, dada por el estudiante E5.

Tanto la resolución como la argumentación del alumno 1 son correctas. *La resolución del alumno 2 es correcta, realiza una regla de tres estándar (proporcionalidad directa), aunque la argumentación no es la más correcta porque le falta explicar cómo ha resuelto esa regla de tres, aunque si es cierto que es una proporcionalidad directa y que con el doble de leche harás el doble de tartas y así sucesivamente. Le faltaría explicar por qué realiza la ecuación de esa manera.*

Figura 8.20. Valoración de la resolución y argumentación de los alumnos de primaria por parte de E5

Los futuros maestros consideran que los alumnos deben explicar los procedimientos seguidos y argumentar, con base en la relación de proporcionalidad directa, la estrategia seguida (figura 8.21). En las figuras 8.20 y 8.21, se observa que E5 y E12, respectivamente, se refieren al argumento del Alumno 2: "con el doble de leche harás el doble de tartas, con el triple de leche harás el triple de tartas…por lo tanto es directamente proporcional", que no deja de ser informal e incompleto para describir la relación de proporcionalidad directa entre dos magnitudes.

*Respecto al **alumno 1**, durante la resolución del problema no expone lo que va realizando, centrándose solamente en las operaciones que tiene que hacer (división y multiplicación). Al primer dato (6), no le especifica qué es, aunque el segundo sí lo comenta ("24 tartas").* *En el apartado de solución, explica el procedimiento seguido correctamente (nos habla de la reducción a la unidad a su manera), aunque mal expresado.* *Respecto al **alumno 2**, podemos observar cómo el problema está más completo, y resuelto de otra forma correctamente. A diferencia del alumno 1, este alumno incluye una explicación en la que refleja verbalmente que el problema corresponde con una proporcionalidad directa, añadiendo unas conclusiones propias (doble de litros, doble de tartas…).*

Figura 8.21. Valoración de E12 de la resolución y argumentación de los alumnos de primaria

Asignación de niveles de algebrización

Desde un punto de vista epistémico experto se reconoce que la respuesta del Alumno 1 sigue el procedimiento de reducción a la unidad: obtiene el número de tartas (6) que puede hacer con 1 litro de leche. Realiza operaciones aritméticas (multiplicación y división) con números particulares (18 tartas, 6 litros de leche, etc). En el argumento que presenta para justificar su respuesta, el Alumno 1, reconoce, en lenguaje natural y numérico, el criterio para obtener el número tartas a partir del valor unitario: “lo multiplico [el número de litros de leche] por lo [las tartas] que hace con uno”. Por ello se considera que la actividad que desarrolla es proto-algebraica de nivel 1. Por otro lado, la actividad desarrollada por el Alumno 2 se considera proto-algebraica de nivel 2. El procedimiento seguido es una regla de tres que representa de forma diagramática con la tabla:

Litros de leche	3	4
Tartas	18	*x*

donde se recogen las magnitudes directamente proporcionales, los valores conocidos (3, 4, 18) y desconocido (x). El símbolo literal “x” está ligado a la información contextual, número de tartas que se pueden elaborar con los 4 litros de leche, y se resuelve una ecuación de la forma $Ax = B$. En la tabla 8.4 se presentan las frecuencias de los valores asignados por los futuros maestros a los niveles de algebrización de las soluciones realizadas por los alumnos de primaria. Hubo uno de ellos que no respondió a este apartado.

Se observa en la tabla 8.4 que cinco estudiantes acertaron el nivel de algebrización de la actividad desarrollada por el Alumno 1, y siete lo hicieron con el nivel de algebrización de la solución propuesta por el Alumno 2. Los estudiantes que asignaron nivel 0 de algebrización a la respuesta dada por el Alumno 1 y justificaron su respuesta, hicieron referencia a la presencia de operaciones aritméticas con números naturales. Por ejemplo, el estudiante E6 sostiene que el Alumno 1 “resuelve el problema mediante operaciones aritméticas”, sin identificar el grado de generalidad en el discurso del Alumno 1 para describir la forma de obtener el número de tartas a partir de los litros de leche.

Tabla 8.4 Frecuencias en la asignación de los niveles de algebrización por futuros maestros

	Niveles de algebrización/Frecuencias		
	0	**1**	**2**
Solución elaborada por el Alumno 1	6	5	0
Solución elaborada por el Alumno 2	0	4	7

Por otro lado, los cuatro estudiantes que asignaron el nivel 1 de algebrización a la solución del Alumno 2, hicieron referencia a la presencia del lenguaje simbólico, sin distinguir grados de transformaciones con incógnitas. Por ejemplo, el estudiante E10, al asignar el nivel 1, afirma: "ya que como vemos realiza operaciones en la que incluye una incógnita pero sin excesiva dificultad".

Identificación de las prácticas elementales

Para valorar las identificaciones de las prácticas elementales, realizadas por los futuros maestros, a las respuestas dadas por los alumnos de primaria, se utilizó el criterio presentado en la tabla 8.5.

Tabla 8.5 Criterios para la valoración de la identificación de las prácticas elementales realizada por los futuros maestros

Valoración	Criterio
Pertinente	– Establece de forma correcta la secuencia de prácticas y la intencionalidad de cada unidad
Poco pertinente	– Se limita a describir la estrategia seguida en cada solución
Nada pertinente	– En otro caso

Ningún futuro maestro consideró la justificación de los alumnos como práctica elemental, y aún aquellos que realizaron una secuenciación más detallada, sólo consideraron como prácticas las operativas y no las discursivas (argumentación). En las figuras 8.22 y 8.23 se presentan ejemplos de respuestas a este ítem.

El primer alumno ha seguido los siguientes pasos: en primer lugar ha dividido y en segundo lugar ha multiplicado.
El segundo alumno ha realizado una regla de tres donde hay una incógnita por resolver.

Figura 8.22. Respuesta nada pertinente dada por E1 al identificar prácticas elementales

En la figura 8.22 se presenta una respuesta nada pertinente, mientras en la figura 8.23 una respuesta poco pertinente.

<u>Alumno 1</u>:
1. Si con 3 litros hace 18 tartas, vamos a conocer cuántas tartas puede hacer con 1 litro: 18: 3= 6 tartas puede hacer con un litro de leche.
2. Si con 1 litro realiza 6 tartas, con 4 litros realiza: 6 x 4 = 24 tartas.
<u>Alumno 2</u>:
1. Establece una proporción: Si con 3 litros hace 18 tartas, con 4 litros hará x. Siendo x el número de tartas que realiza con 4 litros de leche.

3 litros	*4 litros*
18 tartas	*x*

2. La ecuación que se establece es la siguiente: 18tartas·4litros=3litros·x
3. Resolución de la ecuación: 72= 3x; x= 72/3= 24 tartas.

Figura 8.23. Respuesta poco pertinente dada por E6 al identificar prácticas elementales

De forma general, la respuesta dada a este último ítem fue poco (cinco estudiantes) o nada (siete estudiantes) pertinente.

6. Análisis retrospectivo. Conclusiones

En este capítulo se han descrito los resultados de una investigación de tipo cualitativo-interpretativo, cuya finalidad ha sido describir e interpretar los resultados de la implementación de una intervención didáctica con futuros maestros de primaria dirigida a fomentar el desarrollo de aspectos relevantes tanto de las faceta epistémica como cognitiva del conocimiento didáctico-matemático relativo a la enseñanza de la proporcionalidad. Al respecto, para analizar y evaluar el conocimiento común y avanzado de los futuros maestros y la competencia para resolver un problema utilizando diferentes estrategias, incluyendo las que podrían ser realizadas por alumnos de primaria, se propuso una tarea de proporcionalidad inversa. En este sentido, hemos observado que los estudiantes muestran carencias en el conocimiento *per se* de la proporcionalidad, confundiendo una relación inversa con una directa.

La identificación de objetos y procesos matemáticos y el reconocimiento de los niveles de algebrización forman parte de la dimensión epistémica del conocimiento especializado. La competencia en análisis ontosemiótico permite al profesor identificar posibles conflictos de aprendizaje y promover la realización de actividades dirigidas al desarrollo del razonamiento proporcional desde la educación primaria.

El reconocimiento de los significados de los objetos matemáticos constituye una actividad compleja. No obstante, es importante que los futuros maestros de educación primaria reconozcan los diversos tipos de significados del objeto proporcionalidad (aritmético, proto-algebraico y algebraico) si esperamos, como sugieren las múltiples investigaciones en el área (Streefland, 1985, Behr, et al., 1992; Cramer y Post, 1993; Ruiz y Valdemoros, 2004; entre otras) que puedan anteponer una aproximación intuitiva-cualitativa, al concepto de razón y proporción a su formalización y algoritmización. El maestro de primaria debe ser capaz de enseñar las diferentes formas de razonamiento que se pueden aplicar en situaciones de proporcionalidad y no limitarse a la aplicación de la regla de tres, de forma que su alumno pueda adquirir una comprensión profunda sobre las ideas fundamentales que rodean a la proporcionalidad y sus diferentes enfoques.

Analizar los procedimientos y razonamientos que desarrollan alumnos de primaria al resolver una tarea o las dificultades con ciertas estrategias, se relaciona con la faceta cognitiva del conocimiento especializado (conocimiento de los estudiantes). Los resultados de nuestro trabajo muestran que para los futuros maestros resulta más sencillo realizar la secuenciación cuando ellos son los resolutores que cuando analizan las respuestas de los alumnos. Además, no identifican el objeto argumento como parte de las prácticas. Se considera necesario que los futuros maestros identifiquen las prácticas matemáticas y los objetos que intervienen en las producciones de los alumnos, prestando atención a las argumentaciones. El razonamiento algebraico implica generalizar ideas matemáticas y establecer las generalizaciones a través del discurso de la argumentación, lo que requiere hacer un análisis microscópico de las relaciones entre los objetos matemáticos (Blanton y Kaput, 2003)
Conocer los errores y dificultades que los alumnos pueden presentar cuando aplican los conceptos y procedimientos en una determinada estrategia de resolución de las tareas propuestas, dota a los futuros maestros de criterios para adaptar las tareas a las finalidades de aprendizaje y de seleccionar las estrategias más adecuadas al mismo, logrando procesos de estudio con mayor idoneidad cognitiva. Cuando los futuros maestros señalan los potenciales conflictos que creen que pueden tener sus alumnos revelan sus propias dificultades al resolver la situación-problema analizada (como hemos podido comprobar en el problema del reparto de canicas en la razón 2:4).

Por otro lado, coincidimos con Malaspina (2017) en que la creación de problemas no debe verse como una tarea exclusiva de expertos, sino que debe formar parte fundamental de la tarea docente, en tanto permite adaptar las situaciones-problemas a las necesidades de los alumnos, fomentando su creatividad y contribuyendo a reforzar e interrelacionar lo aprendido.

Hemos constatado que la intervención implementada mejora la competencia de los futuros maestros (comparándola con los resultados descritos en el capítulo previo con futuros profesores de secundaria, Burgos et al., 2017; Burgos et al. 2018, Burgos, Giacomone et al., 2020) para: (a) realizar la secuenciación de prácticas en unidades elementales de análisis, (b) progresar en la identificación de los objetos y procesos involucrados en las prácticas, más allá de la aplicación de algoritmos en la resolución de problemas de proporcionalidad, y (c) reconocer de manera pertinente los distintos niveles de algebrización en diferentes estrategias de resolución.

Sin embargo, observamos también que la acción formativa desarrollada sobre el tema requiere de un mayor tiempo y esfuerzo para lograr que los estudiantes, sean capaces de identificar los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y formular variantes pertinentes de un problema dado. Además, analizar las actividades de alumnos de primaria identificando aquellos elementos matemáticos relevantes en sus respuestas, requiere una intervención específica.

CAPÍTULO 9.
COMPETENCIAS DE ANÁLISIS EPISTÉMICO Y COGNITIVO SOBRE PROPORCIONALIDAD EN FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Los contenidos de este capítulo aparecen recogidos en los artículos siguientes:

Burgos, M. y Godino, J. D (2020) Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks (En revisión).

Burgos, M. y Godino, J. D (2020). Prospective primary school teachers' competence for analysing the difficulty of proportionality tasks (En revisión).

Burgos, M. y Godino, J. D (2020). Prospective primary school teachers' competence for the cognitive analysis of proportionality tasks (En revisión).

1. Introducción

Siguiendo las recomendaciones de Sowder, et al. (1998) en relación a la necesidad de que los futuros maestros dispongan de un conocimiento profundo de los componentes conceptuales del razonamiento proporcional, en el capítulo previo hemos descrito los resultados de un primer ciclo de investigación con estudiantes del grado de educación primaria, destinada a desarrollar sus conocimientos y competencias didáctico-matemáticas sobre el razonamiento proporcional y su relación con el razonamiento algebraico. En este capítulo describimos los resultados obtenidos en un segundo ciclo de investigación desarrollado también con estudiantes de tercer curso del grado de educación primaria, tras una intervención formativa focalizada en el desarrollo de aspectos epistémicos y cognitivos del conocimiento didáctico-matemático en relación a este contenido.

El conocimiento especializado permite al profesor identificar la diversidad de significados involucrados, elaborar la configuración ontosemiótica de los objetos y procesos, poder resolver la tarea utilizando distintos procedimientos mostrando diversas justificaciones (faceta epistémica), así como ser competente para modificarla atendiendo a las necesidades educativas de sus alumnos (facetas instruccional y cognitiva). Además, garantiza que el profesor pueda comprender las formas de pensar de los estudiantes, y reconocer los significados personales, concepciones erróneas y conflictos que surgen en el proceso de resolución de problemas (faceta cognitiva). En particular, permite que el maestro sea competente para describir las configuraciones cognitivas que los estudiantes desarrollan cuando resuelven los problemas propuestos.

Por otro lado, el reconocimiento por parte de los profesores de los diferentes niveles de algebrización al resolver tareas matemáticas o al analizar las soluciones de los estudiantes a problemas relacionados con una noción específica (en particular, la proporcionalidad) se considera un aspecto clave del modelo CCDM sobre este contenido específico, para comprender su complejidad semiótica y explicar las dificultades de aprendizaje. De manera específica, identificar e interpretar diferentes estrategias de solución en un problema, reconocer los elementos matemáticos (lenguajes, conceptos, procedimientos y argumentos) puestos en juego en cada caso, y analizar el carácter algebraico de las prácticas matemáticas involucradas en sus resoluciones, son aspectos fundamentales de la competencia de análisis cognitivo en relación al conocimiento matemático para la enseñanza.

Investigaciones como las de Bartell, et. al (2013), Fernández, et al. (2012), Rivas, et al. (2012) o Son (2013) sugieren que un conocimiento limitado del contenido matemático dificulta a los profesores la tarea de interpretar las respuestas de los alumnos para tomar decisiones de acción pertinentes y que, por otro lado, el conocimiento del contenido no es suficiente para que los profesores de matemáticas reconozcan la comprensión matemática de los alumnos. Se hace preciso que la formación de profesores tenga en cuenta el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas con relación a este tema, diseñando e implementado intervenciones formativas específicas. Consideramos que el conocimiento especializado en las facetas epistémica y cognitiva y la correspondiente competencia de análisis ontosemiótico propuesta por el EOS mejoran la capacidad del profesor para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los alumnos. De forma específica, el análisis de la actividad matemática llevada a cabo por los futuros maestros mediante la descripción del sistema de prácticas operativas y discursivas realizadas por los estudiantes cuando resuelven los problemas (significado personal), y la determinación de las configuraciones de objetos y procesos que emergen del sistema de tales las prácticas (configuración cognitiva) pueden ayudar a "identificar los elementos matemáticos de los problemas que fomentan el razonamiento proporcional, desglosando las matemáticas que definen el problema y reconociendo la forma en que los elementos matemáticos que caracterizan el problema están presentes o no en la respuesta del alumno" (Llinares, 2013, p. 80).

El problema de investigación que se aborda en este capítulo se centra en la evaluación de los conocimientos y competencias en análisis epistémico y cognitivo logrados por futuros maestros de educación primaria como resultado de la intervención formativa destinada a aplicar el análisis de las prácticas matemáticas, objetos implicados y el estudio de niveles de algebrización a tareas de proporcionalidad. En particular, planteamos las siguientes cuestiones:

1. *¿Son los futuros maestros capaces de resolver problemas de proporcionalidad por al menos dos procedimientos diferentes que podrían emplear alumnos de primaria?*
2. *¿Identifican los futuros maestros los conocimientos que intervienen en las soluciones?*
3. *¿Son capaces de asignar niveles de razonamiento algebraico a las diferentes soluciones que elaboran?*
4. *¿Pueden los futuros maestros elaborar variantes de los problemas cuya solución involucre cambios en los niveles de razonamiento algebraico?*
5. *¿Reconocen los futuros maestros las posibles dificultades que los estudiantes de primaria pueden tener al resolver problemas de acuerdo con las diferentes estrategias previamente elaboradas?*
6. *¿Pueden los futuros profesores identificar los elementos matemáticos (lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) en las soluciones propuestas por alumnos de primaria y asignar niveles de razonamiento algebraico a las diferentes soluciones analizadas?*
7. *¿Ayudan estas herramientas de análisis didáctico a los futuros profesores a analizar e interpretar los detalles de la actividad matemática de los estudiantes?*

2. Contexto de la investigación, participantes y metodología

Como parte de la investigación, se habían planificado ciclos formativos que implican el diseño de tareas, su implementación efectiva y el análisis retrospectivo de la experiencia. Un primer ciclo se implementó como prueba piloto en el año 2017 con un grupo de 35 estudiantes de tercer curso del grado de Educación Primaria, durante 2 sesiones de dos horas de duración cada una (Los resultados de esta intervención se han presentado en el capítulo previo). Un segundo ciclo se implementó en el año 2018 con 88 estudiantes también de tercer curso del grado de Educación Primaria divididos en dos grupos, uno de 45 y otro de 43 estudiantes.

Durante los estudios de grado, los estudiantes han recibido formación específica sobre aspectos epistémicos, cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades), instruccionales (tareas y actividades, materiales y recursos) y curriculares, de tal forma que en el momento en que se desarrolla la experiencia, se espera que los participantes sean capaces de poner en práctica el conocimiento adquirido para resolver, diseñar y secuenciar tareas matemáticas de acuerdo a unos contenidos específicos, en nuestro caso la proporcionalidad.

En este capítulo analizamos la información recogida en dicho segundo ciclo a partir de las anotaciones del observador/investigador y las respuestas escritas de los estudiantes a parte de la tarea de evaluación propuesta al final del curso y examinadas por el equipo investigador aplicando las técnicas de análisis ontosemiótico (análisis de contenido por medio de los tipos de objetos y procesos establecidos por el EOS).

En ambos ciclos de investigación la experiencia formativa se desarrolló en tres sesiones: una primera de instrucción sobre las características del RAE y el modelo de los niveles de algebrización, una segunda de trabajo colaborativo y una final de trabajo individual. En el primer ciclo de investigación no se contempló en el trabajo colaborativo el análisis de respuestas de alumnos de primaria, sólo en el trabajo individual voluntario. Se pretendía averiguar si la formación recibida y el trabajo colaborativo sobre el reconocimiento de objetos y procesos, elaboración de configuraciones y asignación de niveles de algebrización (faceta epistémica) en tareas de proporcionalidad permitía iniciar a los estudiantes en un análisis similar cuando se enfrentaban a la actividad matemática realizada por alumnos de educación primaria (faceta cognitiva). Teniendo en cuenta los resultados del primer ciclo de investigación (descritos en el capítulo anterior) para el segundo ciclo se incluyó el análisis de respuestas de alumnos de primaria en la fase de trabajo colaborativo y se amplió el número de situaciones propuestas en cada una de las tres sesiones (instrucción, trabajo colaborativo y trabajo individual). Observamos que ofrecer a los futuros maestros mayor variedad de situaciones y la posibilidad de discutir en grupo sus valoraciones sobre respuestas de alumnos de primaria, mejora el análisis que desarrollan después de manera individual, de modo que la competencia de análisis cognitivo logrado por los futuros maestros en el segundo ciclo mejoró respecto de los resultados en el primero.

3. Diseño del proceso formativo

La intervención formativa se desarrolló durante 3 sesiones de dos horas de duración cada una. Se pretende desarrollar aspectos concretos de las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento didáctico-matemático tales como:

- la flexibilidad para resolver un problema utilizando diferentes estrategias de resolución;
- identificar el conocimiento y los niveles de razonamiento algebraico puestos en juego en las soluciones,
- tener en cuenta esta información para reconocer las dificultades que los alumnos pueden encontrar para resolver el problema utilizando cada estrategia propuesta,
- analizar e interpretar respuestas escritas de alumnos de primaria a problemas de proporcionalidad, identificando los elementos matemáticos importantes.

La primera sesión se centró en las características del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) en primaria, y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática. Se perseguía reflexionar y profundizar en la distinción de tipos de objetos y procesos algebraicos en tareas matemáticas escolares y la asignación de niveles de razonamiento algebraico a la actividad matemática realizada al resolver tareas escolares, algunas de las cuales correspondían a situaciones de proporcionalidad. Además, dado que se espera desarrollar en los futuros maestros la competencia para analizar las prácticas desarrolladas por alumnos de primaria, se utilizó la situación de ampliación del puzle de Brousseau (Brousseau, 1997) para presentar: 1º el análisis epistémico de posibles soluciones con distintos niveles de algebrización; 2º el análisis cognitivo de respuestas dadas por alumnos de 5º curso de educación primaria a la misma, dándoles a los futuros maestros la posibilidad de reflexionar sobre la presencia de objetos algebraicos en las producciones de alumnos. Este fue el primer contacto de los futuros profesores con las herramientas teóricas del EOS, análisis de los objetos matemáticos y configuraciones epistémicas y cognitivas.

En la siguiente sesión (también de 2 horas de duración), los futuros maestros debían trabajar en equipos para responder a consignas similares a las que se emplearon en la tarea de evaluación. En la instrucción previa que han recibido los estudiantes, se les ha explicado los distintos elementos que aparecen referidos en las consignas. Además, se les facilitó un ejemplo completamente resuelto del análisis que se esperaba que realizasen. El trabajo inicial en grupo permite a los estudiantes comparar y enriquecer sus propuestas de diversas estrategias para resolver los problemas e identificar las posibles dificultades en las mismas.

En las actividades propuestas para trabajar en equipo, se les facilitó la solución dada por dos alumnos de 5º y 6º curso de educación primaria a dos problemas (dos respuestas para cada situación). Estos problemas habían sido usados en la sesión formativa para ejemplificar la descripción de las configuraciones epistémicas y el reconocimiento de los niveles de algebrización involucrados en problemas de proporcionalidad.

En la tercera sesión, los estudiantes para maestro trabajaron de forma individual en las tareas propuestas como instrumento final de evaluación, con las que se pretendía identificar y desarrollar ciertos aspectos del conocimiento didáctico-matemático sobre proporcionalidad. Las consignas dadas a los futuros maestros fueron las siguientes:

1. Resuelve los problemas siguientes, propios de primaria, de al menos dos formas distintas, teniendo en cuenta aquellas estrategias que pensáis que usarían vuestros alumnos para resolver el problema.

Problema 1. Si una barrita de cereales de 22 gramos contiene 4 gramos de materia grasa, ¿cuánta materia grasa hay en 100 gramos de producto?

Problema 2. En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más? Explica tu respuesta.

Problema 3. Cinco amigos quieren hacer un regalo de cumpleaños. Deben poner cada uno 5,40 euros. Otros cuatro amigos se unen para contribuir al regalo. ¿Cuántos euros deben poner ahora cada uno? Explica cómo lo has obtenido.

Problema 4. Ana, María y Luis están plantando árboles en el campamento "Repoblamos". Ana y María empezaron al mismo tiempo, pero María es más rápida. Luis va a la misma velocidad que Ana, pero empezó antes. Cuando Ana había plantado 4 árboles, María había plantado 12 y Luis había plantado 8. Al acabar, Ana ha plantado 20 árboles.

a) ¿Cuántos árboles habrá plantado María? Explica cómo lo has averiguado.

b) ¿Cuántos árboles habrá plantado Luis? Explica cómo lo has averiguado.

c) Pasado un tiempo, si sabes el número de árboles que ha plantado Ana, ¿cómo podrías saber el número de árboles que ha plantado María? ¿Y el número de árboles que ha plantado Luis? Explica tu respuesta.

2. Identifica los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones. Para cada solución enumera la secuencia de prácticas que se realizan para resolver el problema y completa la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*
….	….

3. Asigna *de forma justificada* niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones que has dado en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

4. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

5. Destaca entre las prácticas, objetos y procesos identificados cuáles consideras potencialmente conflictivos para los estudiantes.

6. A continuación se incluyen las respuestas dadas por unos niños a unos problemas.

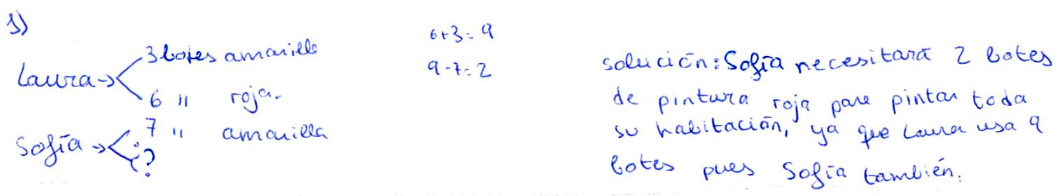
   a) ¿Crees que son correctas las respuestas (procedimiento y argumento) dadas por los alumnos? Justifica tu respuesta.

b) Identifica los tipos de lenguajes (natural, icónico, diagramático, simbólico,…), conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que reconoces en dichas soluciones.

c) Asigna de forma justificada el nivel de algebrización a sus actividades.

Problema P1. Laura y Sofía quieren pintar sus habitaciones del mismo color. Laura mezcla 3 botes de pintura amarilla y 6 de pintura roja. Si Sofía ha usado 7 botes de pintura amarilla, ¿cuántos botes de pintura roja necesitará? Explica tu respuesta.

<u>Solución Alumno A1</u>



<u>Solución Alumno A2</u>

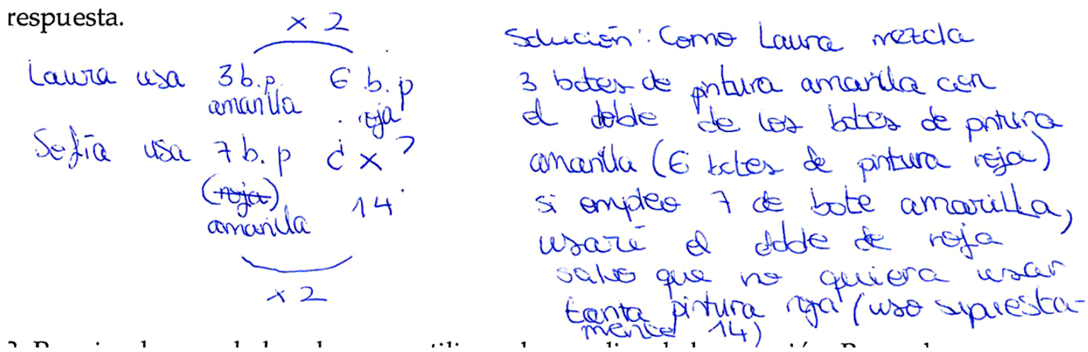
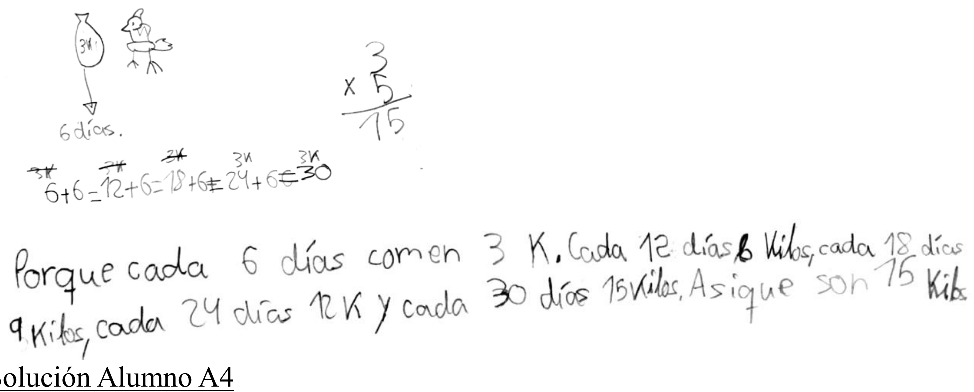


Figura 9.1. Primer enunciado y soluciones elaboradas por alumnos de primaria

Problema P2. Con tres kilos de maíz mis gallinas comen 6 días. ¿Cuántos kilos de maíz necesitaré para 30 días? Explica tu respuesta.

<u>Solución Alumno A3</u>



<u>Solución Alumno A4</u>

$\frac{3}{6} = \frac{x}{30}$ $30 \times 3 = 90$ $90 | 6$ … 30 15 0 $\frac{3}{6} = \frac{15}{30}$

En la segunda he utilizado la regla de tres. He descubierto la incógnita (que es 15):

Kilos 3 x
Días 6 30

$\frac{3}{6} \xrightarrow{\times 5} \frac{x ¿?}{30}$ son fracciones equivalentes dentro de la tabla de proporcionalidad

$30 : 6 \times (5) = 5 \times 3 = 15$
3

Figura 9.2. Segundo enunciado y soluciones propuestas por alumnos de primaria

Problema P3. Dos amigos, Laura y Daniel, quieren comprar una caja de 20 bombones Para su compra, Laura ha puesto 6 euros y Daniel ha puesto 4 euros. Se van a repartir los bombones, teniendo en cuenta la cantidad de dinero que ha aportado cada uno para la compra.
a) ¿Qué precio tiene cada bombón? Explica como lo has averiguado.
b) ¿Cuántos bombones le correspondería a cada uno? Explica cómo lo has obtenido.

Solución Alumno A5

$6 + 4 = 10$ $6 \times 2 = 12$ $12 + 8 = 20$
$20 | 10$ $4 \times 2 = 8$
(0) 2

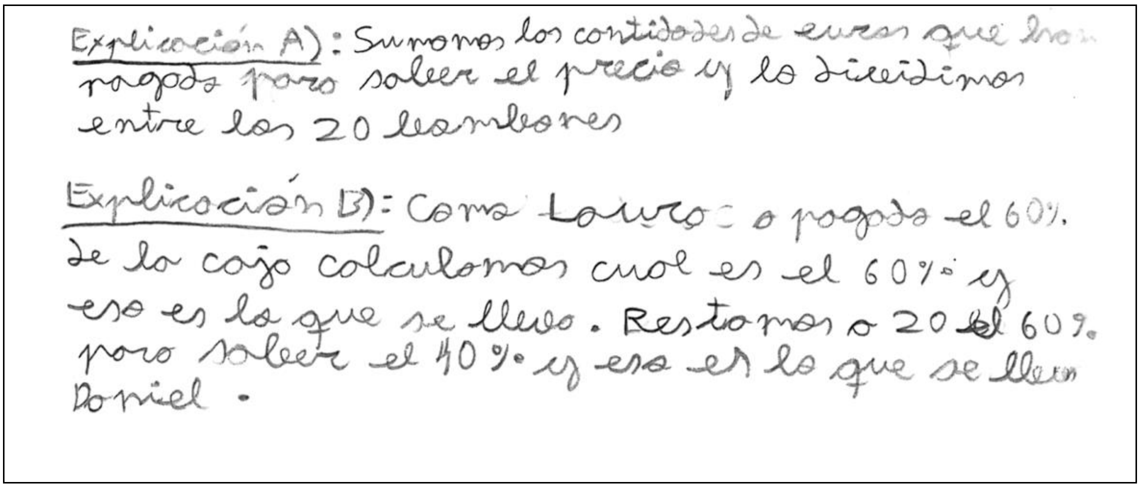
S: Cada bombón cuesta 2€, lo he averiguado ya que si Laura ha puesto 6€ y Daniel 4€ pues al sumarlo y dividirlo entre la caja de 20 bombones ya nos sale el precio de cada bombón.
Pues sabiendo que que Laura ha pagado 6€, pues al multiplicarlo por 2 saldría lo que le correspondería a cada uno. Es decir, a Laura le corresponderían 12 bombones y a Daniel 8 bombones.

Solución Alumno A6

a) ¿Qué precio tiene cada bombón? Explica como lo has averiguado. 0'5

b) ¿Cuántos bombones le correspondería a cada uno? Explica cómo lo has obtenido. 12 ol de 6€ y 8 ol de 4€ 20

$6 + 4 = 10$ $100 | 20$ … $0'5$ 60% de $20 : 100 = 0'2 \times 60 = 12$ … 8
13'333


Explicación A): Sumamos las cantidades de euros que han pagado para saber el precio y lo dividimos entre los 20 bombones

Explicación B): Como Laura a pagado el 60% de la caja calculamos cual es el 60% y eso es lo que se llevo. Restamos a 20 el 60% para saber el 40% y eso es lo que se llevo Daniel.

Figura 9.3. Tercer enunciado y soluciones elaboradas por alumnos de primaria.

Resumimos en la tabla 9.1 la intencionalidad de las diversas consignas planteadas, en relación al tipo de conocimiento que se persigue desarrollar y diagnosticar:

Tabla 9.1. Consignas y tipos de conocimiento implicados en la tarea de evaluación

Consigna	Tipo de conocimiento	Intencionalidad
1. Resolver la tarea Problema 1 (valor faltante)		Identificar conocimiento o carencias sobre proporcionalidad en un problema de valor faltante
Problema 2 (comparación)	Común	Identificar conocimiento sobre razón y proporción en un problema de comparación
Problema 4 (distinción estrategias aditivas y multiplicativas)		Distinguir relaciones aditivas de multiplicativas. Promover la argumentación y justificación matemática
Problema 3 (proporcionalidad inversa)	Ampliado	Comprobar si los futuros maestros identifican situaciones de proporcionalidad inversa
Resolver los problemas de varias maneras, incluyendo las estrategias que usarían los alumnos de primaria		Promover la flexibilidad de resolución y la capacidad de adaptación al nivel educativo pertinente
2. Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones, enumerando la secuencia de prácticas		Desarrollar la competencia de análisis epistémico en tareas de proporcionalidad
3. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones	Especializado	Profundizar en la faceta epistémica del CCDM analizando RAE en las tareas de proporcionalidad
4. Enunciar tareas relacionadas		Contribuir a la faceta instruccional impulsando la creación-variación de problemas atendiendo a los significados involucrados
5. Destacar objetos y procesos conflictivos para los estudiantes		Desarrollo de la faceta cognitiva del CCDM

6. Analizar respuestas escritas de alumnos Justificar su corrección Identificar objetos y procesos	Desarrollar la competencia de análisis cognitivo en tareas de proporcionalidad
Asignar nivel de algebrización a sus actividades.	Profundizar en la faceta cognitiva del CCDM analizando RAE en prácticas de proporcionalidad

4. Resultados en la faceta epistémica

En las tareas que se han planteado a los futuros maestros de primaria, se espera que éstos resuelvan los cuatro problemas sobre proporcionalidad, y que una vez identificados los conocimientos puestos en juego, asignen los niveles de razonamiento algebraico implicados. Así mismo, se les pide que enuncien variantes de la tarea que impliquen cambios en los niveles de algebrización.

4.1 Métodos de solución y niveles de algebrización

Salvo un estudiante (E14) que no resolvió el problema 4, los demás resolvieron todos los problemas por al menos una forma. Además, este estudiante resolvió los demás problemas por 2 métodos. En los demás casos, cuando decimos, por ejemplo, que 28 estudiantes resolvieron 2 problemas por 2 métodos, entendemos que 28 estudiantes resolvieron 2 problemas usando dos estrategias distintas para cada uno, y los otros dos lo resolvieron de una única manera. Además mencionemos que 73 estudiantes (82,95%) resolvieron por dos métodos el primer problema, 52 estudiantes (59,09%) el segundo problema, 57 estudiantes (64,77%) el tercer problema, y 45 estudiantes (51,14%) el cuarto problema. En la tabla 9.2 resumimos los resultados en relación al número de soluciones distintas propuestas a los problemas.

Tabla 9.2. Frecuencias (porcentajes) del número de soluciones distintas propuestas

Número de problemas con soluciones múltiples	Frecuencias
Todos los problemas por 2 métodos	24 (27,27%)
3 problemas por 2 métodos	25 (28,41%)
2 problemas por 2 métodos	28 (31,82%)
1 problema por 2 métodos	10 (11,36%)
Todos los problemas por un único método	1 (1,14%)
Total	88 (100%)

Estrategias de resolución empleadas

Los niveles de algebrización están definidos en función de los objetos, significados y procesos emergentes en la actividad matemática que realiza un determinado sujeto cuando resuelve un problema concreto. A continuación, describimos las estrategias detectadas en las soluciones dadas por los futuros maestros a los problemas, asociadas a cada nivel de algebrización:

– Nivel 0 de algebrización. En este nivel se incluyen estrategias de tipo aritmético centradas fundamentalmente en las propiedades aditiva o multiplicativa que satisface la relación de proporcionalidad. En las figuras 9.4 y 9.5 incluimos ejemplos de esta estrategia para distintos problemas.

> *Como 22:2=11 en 11 gramos de barrita habrá 4:2=2 gramos de materia grasa, en 11:2= 5,5 gramos de barrita, habrá 2:2=1 gramo de grasa y en 5,5:5=1,1 gramos de barrita habrá 1:2=0,5 gramos de grasa.*
>
> *Así, en 100=88+11+1 gramos de barrita habrá 16+2+0,2=18,2 gramos de grasa.*

Figura 9.4. Estrategia aritmética empleada por E36 en el problema 1.

> *Vamos a ver los alumnos que no leen de cada clase.*
> *1º. 60 – 15 = 45 alumnos que no leen en 6º*
> *2º. 40 -12 = 28 alumnos que no leen en 5º*
> *Por lo tanto, se lee más en 5º de Educación Primaria.*

Figura 9.5 Estrategia aritmética (aditiva) errónea empleada por E23 en el problema 2.

– Nivel 1 de algebrización. El significado proto-algebraico se basa en la noción de proporción, de manera que el reconocimiento del valor unitario en un procedimiento de reducción a la unidad y el uso de representaciones diagramáticas pueden ser descritas como de nivel proto-algebraico 1. En este nivel se consideran por tanto las siguientes estrategias: reducción a la unidad (ver figura 9.6), algoritmo de multiplicación en cruz (desarrollo meramente procedimental, sin expresar la proporción o ecuación obtenida de ella), tabular basada en la construcción de una tabla donde se recogen y operan sobre los valores de las magnitudes proporcionales; así como las de comparación de razones.

> *Reducimos a la unidad para obtener la cantidad de gramos de grasa que contiene un gramo de barrita de cereales. Como una barrita de cereales de 22 gramos contiene 4 gramos de grasa, obtenemos los gramos de grasa que contiene una unidad:*
> *22: 4 = 0.181.*

Una vez sabemos que 1 gramo de barrita de cereales contiene 0,181 [gramos de grasa] *podemos obtener cuántos gramos de grasa contienen 100 gramos de barrita de cereales multiplicando 0,181×100=18,1 gramos de grasa en 100 gramos de barrita de cereales.*

Figura 9.6. Estrategia proto-algebraica usada por E14 en el problema 1.

La estrategia que consiste en obtener y comparar los porcentajes de estudiantes que leen a diario en cada curso, específica del problema 2, corresponde también a este nivel de algebrización (figura 9.7).

Comenzamos escribiendo en forma de fracciones las cantidades de estudiantes que leen diariamente entre el número total de estudiantes en cada clase:

6^o *curso* $\rightarrow \frac{cantidad\ de\ estudiantes\ que\ leen\ a\ diario}{cantidad\ total\ de\ estudiantes} = \frac{15}{60}$

5^o*curso* $\rightarrow \frac{cantidad\ de\ estudiantes\ que\ leen\ a\ diario}{cantidad\ total\ de\ estudiantes} = \frac{12}{40}$

Expresamos estos resultados por medio de porcentajes:

6^o *curso* $\rightarrow \frac{15}{60} = 0.25 \rightarrow\ 25\%$

5^o *curso* $\rightarrow \frac{12}{40} = 0.30 \rightarrow 30\%$

Para conocer en qué curso los estudiantes leen más diariamente, comparamos los porcentajes. En 5º curso hay un 5% más de estudiantes que leen a diario que en 6º curso.

Figura 9.7. Estrategia proto-algebraica usada por E14 en el problema 2.

Por otro lado, en el problema 4, se pide determinar el número de árboles que han plantado María y Luis conocido el número de árboles que ha plantado Ana. La expresión en lenguaje natural de esta regla general, que lleva a reconocer la relación lineal entre las cantidades de árboles plantadas por Ana y por María y la relación afín entre las cantidades de árboles plantados por Ana y Luis, supone un nivel de algebrización 1 (figura 9.8).

Cuando Ana planta 4 árboles, María planta 12, que es exactamente el triple de árboles [que planta Ana], *4 × 3 = 12. Por otro lado, cuando Ana planta 4 árboles, Luis planta 8, lo que supone el doble de árboles: 4 × 2 = 8.*
Se establece una relación de proporcionalidad entre los árboles plantados por Ana, María y Luis. En concreto, para saber el número de árboles que planta María conociendo los que Ana ha plantado, multiplicamos los árboles de ésta por 3 y el número de árboles de Luis es igual al de Ana multiplicado por 2.

Figura 9.8. Solución de nivel 1 de algebrización propuesta por E23 al problema 4.

- Nivel 2 de algebrización. La solución de un problema por medio de la regla de tres y/o planteamiento de la ecuación proporcional involucra una incógnita y la resolución de una ecuación en la que ésta aparece en un único término de la ecuación. En este sentido, la actividad desarrollada se considera como proto-algebraica de nivel 2.

Consideramos la proporción de libros y niños de 6 º de primaria y sacaremos los libros que deberían leer los niños de 5º: *60 alumnos de 6---------15 leen* *40 alumnos de 5-------- x leen* *Ponemos en forma de fracción 60/40=15/x.* *60x=15×40.* *x= 15.40/60 = 10* *Como en 5 º hay 12 niños que leen a diario, leen más a diario que en 6º.*

Figura 9.9. Estrategia de resolución de nivel 2 propuesta por E31 al problema 2.

En la figura 9.9, el futuro maestro E31 considera la relación entre las magnitudes estudiantes en el curso y estudiantes que leen diariamente en el curso. Si la proporción de estudiantes que leen diariamente fuese la misma en el grupo de 5º curso que en el grupo de 6º curso, la regla de tres utilizada permitiría determinar el número de estudiantes que leen diariamente en el grupo de 5º curso. Dado que el valor obtenido es menor que el número real de estudiantes que leen diariamente en el grupo de 5º curso, E31 concluye que la proporción de estudiantes que leen diariamente es mayor en 5º curso que en 6º curso.

– Nivel 3 de algebrización. Estrategias de tipo algebraico-funcional caracterizadas por la aplicación de la noción y propiedades de la función lineal. Cuando en el problema 4, el número de árboles que han plantado María y Luis conocido el número de árboles que ha plantado Ana, se determina través de la expresión algebraica, el nivel de algebrización que supone sería 3 (figura 9.10).

Si Ana planta 4 árboles y María planta 12 en el mismo tiempo, la razón de proporcionalidad entre el número de árboles plantados por cada una es $\frac{12}{4} = 3$. *Entonces, si Ana planta* x *árboles, María planta* $f(x) = 3x$ *árboles.* *Cuando Ana ha plantado 4 árboles, Luis ha plantado 8 árboles, por lo tanto Luis planta lo mismo que Ana más 4, esto es, Luis planta* $g(x) = x + 4$ *árboles.*

Figura 9.10. Solución de nivel 3 de algebrización propuesta por E87 al problema 4.

Grado de corrección en las respuestas

Hemos considerado oportuno valorar positivamente las respuestas parcialmente correctas o incompletas, por lo que la puntuación otorgada a los ítems ha sido:

- 0 puntos si la respuesta es incorrecta o no responde

- 1 punto si la respuesta es parcialmente correcta.
- 2 puntos si la respuesta es correcta.

En el primer problema se considera parcialmente correcta si los futuros maestros aproximan por redondeo o truncamiento la cantidad de materia grasa presente en los 100 gramos de barra. También se ha considerado parcialmente correcta la respuesta al problema 4 que no incluye la expresión de la regla general para determinar el número de árboles plantados por los María y Luis.

Teniendo en cuenta esta valoración y que en cada uno de los problemas los estudiantes debían ofrecer más de una solución distinta, la puntuación máxima que podían obtener en cuanto a la resolución de los problemas es de 16 puntos. La puntuación más baja obtenida es de 2 puntos (1 estudiante) y la más alta es de 14 (5 estudiantes), siendo lo más frecuente obtener 10 puntos (19 estudiantes, esto es, el 21,65%). Un 77,3% de los futuros maestros obtienen 8 o más puntos. La puntuación media se sitúa en 8,87, la mediana en 10 y la desviación típica es de 2,60.

En la tabla 9.3 incluimos las frecuencias relativas y porcentajes del grado de corrección según cada problema.

Tabla 9.3. Frecuencias relativas y porcentajes en el grado de corrección (n=88)

	Problema			
Grado de corrección	1	2	3	4
No contesta	0 (0)	1 (1,14)	0 (0)	1 (1,14)
Toda solución incorrecta	1 (1,14)	5 (5,68)	2 (2.27)	52 (59,09)
Al menos una solución parcialmente correcta	74 (84,09)	0 (0)	0 (0)	3 (3,41)
Al menos una solución correcta	13 (14,77)	82 (93,18)	86 (97,73)	32 (36,36)
Total	88 (100)	88 (100)	88 (100)	88 (100)

Sólo 13 estudiantes resolvieron correctamente el problema 1, los demás lo hicieron de forma parcialmente correcta dado que aproximaron la solución a una o dos cifras decimales ignorando el decimal periódico. Los errores detectados en el problema 2 son de dos tipos: por el uso de una estrategia de tipo aditiva (ver figura 9.5), lo cometieron 8 estudiantes, o por comparar las razones donde los antecedentes son el número de alumnos de las clases y los consecuentes son el número de alumnos que leen (lo cometieron 7 alumnos), como puede verse en la figura 9.11.

Si de 60 alumnos leen 15, y de 40 alumnos leen 12, dividimos 60:15= 4 y también dividimos 40:12=3,3 *Por lo que el resultado es que en 6º curso leen más.*

Figura 9.11. Ejemplo de error cometido por E80 en el problema 2.

En el tercer problema, sólo 3 estudiantes ofrecieron alguna solución incorrecta (uno por considerar la relación de proporcionalidad directa y dos por cometer errores de tipo aritmético). En este problema, sólo 19 estudiantes (el 21,59% de los estudiantes) plantearon 2 soluciones siendo alguna distinta de la regla de tres inversa. Esto puede deberse a dos motivos: la falta de capacidad para elaborar estrategias de resolución distintas a ésta en un problema de proporcionalidad inversa, o el desconocimiento (u olvido del requisito en el enunciado) de que tal contenido no es propio de la etapa educativa de primaria (se reserva para secundaria). El problema que tuvo menos éxito en su resolución fue el último, 51 futuros maestros (57,96%) consideraron la relación entre los árboles plantados por Ana y por Luis de proporcionalidad directa, y un estudiante consideró la relación entre los árboles plantados por María y Ana como aditiva.

En la tabla 9.4 desglosamos las frecuencias obtenidas en los diferentes tipos de solución según su nivel de algebrización y el grado de éxito en la identificación correcta de dicho carácter. De manera global, se analizaron un total de 559 soluciones. De éstas, en 290 (51,87%) el nivel de algebrización fue el correcto. Como se puede observar en la tabla 9.4, el tipo de estrategia más empleada por los futuros maestros corresponde al nivel 1 de algebrización (un 47,23% de las soluciones). De las 264 soluciones correspondientes a este nivel, 95 (es decir, un 35,98%) fueron identificadas correctamente. Las estrategias aritméticas (nivel 0 de algebrización) suponen un total de 145 soluciones (25,94%), de las que fueron identificadas apropiadamente 95 (es decir, en el 65,52% de las ocasiones).

Los estudiantes emplearon en menor medida las estrategias de nivel 2 de algebrización, sin embargo, de las 145 soluciones (25,94%) correspondientes a este nivel, 98 (esto es, el 67,59%) acertaron en el nivel de algebrización. Las estrategias de tipo algebraico (nivel 3 de algebrización) sólo se contemplan de forma minoritaria en el último problema.

Tabla 9.4. Frecuencias en los tipos de solución y grado de corrección del nivel de algebrización (NA) para cada estrategia

Problema	Tipo de soluciones	Frecuencia	NA	Identificación correcta de NA
1	Aritmética	25	0	12
	Reducción a la unidad	45	1	19
	Multiplicación en cruz	48	1	16
	Ecuación proporcional	42	2	25
	Total	160		72 (45%)
2	Aritmética	13	0	11
	Diagramática	5	0	3
	Comparación de razones	51	1	18
	Comparación de porcentajes	51	1	15
	Reducción a la unidad	6	1	2
	Ecuación proporcional	13	2	11
	Total	139		69 (43,16%)
3	Aritmética	86	0	60
	Ecuación proporcional	53	2	34
	Total	139		94 (69,11%)
4	Aritmética	16	0	9
	Aritmética+regla general	43	1	18
	Tabular	4	1	3
	Reducción a la unidad	9	1	2
	Multiplicación en cruz	7	1	2
	Ecuación proporcional	37	2	28
	Algebraica-funcional	5	3	1
	Total	121		55 (45,45%)

Aquellos estudiantes que no reconocieron correctamente el nivel 0 de algebrización, le asignaron nivel 1, haciendo referencia a la presencia de "una relación de proporcionalidad" o a un "significado relacional del signo igual". Por otro lado, los futuros maestros que no identificaron apropiadamente el nivel 1 se debió a que asignaron nivel 0 en las estrategias de reducción a la unidad (ignorando el mayor grado de generalidad que supone la declaración del valor unitario) o bien valoraron como proto-algebraica de nivel 2 las técnicas de multiplicación en cruz, a pesar de no establecer ninguna ecuación proporcional y de que los símbolos literales que intervienen refieran a objetos intensivos reconocidos y no se opere con ellos. Finalmente, aquellos estudiantes que no identificaron correctamente el nivel 2 de algebrización, asignaron a las soluciones que llevaban a plantear una ecuación proporcional (regla de tres directa o indirecta) nivel 1 de algebrización. Estos estudiantes sólo consideran dos grados aritmético (0) o algebraico (1), en función de la ausencia o presencia de incógnitas, independientemente del tratamiento que se haga con ellas.

4.2 Identificación de conocimientos

En la consigna 2 pedida a los futuros profesores se requiere que identifiquen los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones dadas por ellos a los problemas de proporcionalidad, para lo cual deben descomponer en una secuencia de prácticas elementales cada solución y reconocer los tipos de objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que se ponen en juego. En términos del marco teórico EOS esto supone elaborar la configuración ontosemiótica que caracteriza cada resolución.

Cuando los futuros maestros proponen varias soluciones a los problemas, en caso de diferencia de valoración se puntúa, para cada problema, la configuración ontosemiótica más completa. Una configuración ontosemiótica se considera:

- *Pertinente*, puntuada con 2 puntos, si comprende la secuencia de prácticas elementales y para cada unidad de éstas se refieren correctamente los objetos involucrados.
- *Poco pertinente*, valorada con 1 punto, si describe la secuencia de prácticas elementales pero no aparecen referidos todos los objetos involucrados o algunos de ellos no son correctos; o bien, la secuencia de prácticas es incompleta pero los objetos que aparecen referidos son correctos.
- En otro caso, se considera *nada pertinente* (0 puntos).

Siguiendo estos criterios de valoración, la puntuación máxima que podían obtener en cuanto a la elaboración de configuraciones ontosemióticas es de 8 puntos (valorando también con 0 puntos cuando no se realizaron las configuraciones). En la tabla 9.5 se recogen las frecuencias de respuestas en cada una de estas categorías. Como observamos, más de la mitad de los futuros maestros realizaron una configuración medianamente pertinente en cada uno de los problemas planteados.

Sin embargo, analizando de forma global las respuestas de los futuros maestros, existe una gran dispersión en los resultados: los valores más frecuentes en la puntuación (sobre 8) son: 0 en un 32,95% de los casos, y 4 en un 31,82% de los mismos. La mediana se sitúa en 4 y el valor máximo obtenido, de 7 puntos, sólo fue obtenido por 2 de los 88 futuros maestros.

Tabla 9.5. Frecuencias absolutas (porcentajes) de grados de pertinencia en las configuraciones ontosemióticas

Pertinencia en la configuración	Problema 1	2	3	4
No contesta	3 (3,41)	3 (3,41)	3 (3,41)	3 (3,41)
0	30 (34,09)	39 (44,32)	32 (36,36)	37 (42,05)
1	46 (52,27)	44 (50)	49 (55,68)	46 (52,27)
2	9 (10,23)	2 (2,27)	4 (4,55)	2 (2,27)
Total	88 (100)	88 (100)	88 (100)	88 (100)

El análisis detallado de las configuraciones ontosemióticas nos ha permitido detectar deficiencias y limitaciones en el reconocimiento por parte de los futuros maestros de los tipos de objetos matemáticos involucrados en la práctica matemática. Resumimos los principales conflictos semióticos encontrados en las configuraciones de objetos de los estudiantes, incluyendo algunos ejemplos que ilustren las categorías:

– Conflictos conceptuales:
    - No se reconoce la relación de proporcionalidad directa o se hace de forma inadecuada (CC1).
    - Confunde concepto con procedimiento/argumento (CC2). Por ejemplo, es frecuente encontrar “regla de tres”, “producto en cruz”, “cálculo de porcentajes”, “despeje de la incógnita” o “razonamiento lógico” como conceptos.
    - Considera elementos que no son conceptos matemáticos como nombres propios de personas (Ana, María) o cosas (árboles) (CC3).
    - Identifica de forma incorrecta ciertos conceptos matemáticos: “razón de semejanza” en lugar de “constante de proporcionalidad” o de “relación de semejanza” en lugar de “relación de proporcionalidad directa”, o “magnitudes de cantidad” (CC4).

– Conflictos proposicionales:
    - Confunde proposición con intencionalidad (CProp1). Por ejemplo, E68 incluye como proposición “pasar el total de alumnos a porcentajes”. A veces

aparece incluso en forma interrogativa, por ejemplo “Proposición: ¿cuánta materia grasa hay en 100 gramos de producto?” (E25).

- Confunde proposición con procedimiento (CProp2). En este caso los estudiantes refieren a “comparación” o “cálculos aritméticos” como proposiciones.
- Confunde proposición con argumento (CProp3). Por ejemplo E29 indica “las proposiciones son las justificaciones que hemos dado al problema”.
- Incluye proposiciones incompletas (CProp4). No se comprende que una proposición es un enunciado sobre conceptos. Por ejemplo, E20 incluye como proposición “la cantidad de árboles plantados es directamente proporcional” sin referir a qué, o “el precio que tiene que pagar cada alumno es directamente proporcional” igualmente sin decir a qué lo es. El estudiante E28 incluye como proposición en el problema 2 “Los amigos son proporcionales”.

– Conflictos argumentales:

- No reconoce más argumentos que los de tipo deductivo o los basados en propiedades aritméticas (CA1).
- Identifica argumentos erróneos (CA2). Por ejemplo, E20 señala como argumento “continuar con la hipótesis inicial” en cada práctica elemental o E32 indica como argumento “usa el sentido común”
- Confunde argumento con intención o procedimiento (CA3). Por ejemplo, E8 señala como argumento “calcular la cantidad de materia grasa que hay en 100 gramos de producto.” También es frecuente encontrar “regla de tres” u “obtener fracciones con el mismo denominador” como argumento.
- Basado en la relación de proporcionalidad directa cuando la relación es indirecta (CA4). Por ejemplo, E4 indica como argumento en el problema 3 “Argumentos: basado en la propiedad de la proporcionalidad directa entre dinero y amigos que pagan.”
- Confunde argumento con proposición (CA5). Por ejemplo, E54, indica para la práctica elemental “Por lo tanto en 100 gramos de producto hay 18,18 gramos de materia grasa” indica como proposición “obtención de resultado” y como

argumento asociado “Argumento: tras la realización de todas las operaciones, como resultado final obtenemos que por cada 100 g de producto tenemos 18,18 gramos de materia grasa”.

De los 88 futuros maestros, 48 (un 54,54%) mostraron algún tipo de conflicto de tipo conceptual, 54 (61,36%) manifestaron algún conflicto de tipo proposicional y 64 (72,72%) de tipo argumentativo. En la tabla 9.6 desglosamos las frecuencias asociadas a los distintos tipos de conflictos descritos anteriormente. Como vemos, dentro de los conflictos de tipo conceptual, el más frecuente es confundir concepto con procedimiento (frecuentemente, “regla de tres”) o argumento (“deducción”). Más de la tercera parte de los futuros maestros, interpretan una proposición como la intención que se persigue con la práctica. Entre los conflictos de tipo argumental, destaca fundamentalmente considerar argumento como intención o procedimiento.

Tabla 9.6. Conflictos detectados en las configuraciones ontosemióticas y frecuencias (n=88)

Conflictos		Frecuencias (%)
Conceptuales	CC1	12(13,64)
	CC2	36 (40,91)
	CC3	8 (9,09)
	CC4	5 (5,68)
Proposicionales	CProp1	32 (36,36)
	CProp2	21 (23,86)
	CProp3	10 (11,36)
	CProp4	7 (7,95)
Argumentales	CA1	15 (17,05)
	CA2	20 (22,73)
	CA3	40 (45,46)
	CA4	3 (3,41)
	CA5	10 (11,36)

4.3 Enunciado de variantes del problema

La creación de problemas, su solución por diversos métodos y el análisis de los conocimientos puestos en juego en los mismos, constituyen una parte esencial de la facetas epistémica, instruccional y cognitiva del modelo CCDM, en tanto permiten al profesor graduar la complejidad de las tareas que propone a sus estudiantes, comprender los conflictos de aprendizaje y gestionar la institucionalización de los conocimientos.

En la consigna 4 se pedía a los futuros maestros que construyeran nuevos problemas a partir del inicial, modificando la información o requerimiento y manteniendo el entorno matemático (situaciones de proporcionalidad), de manera que los variantes propuestos para cada problema, implicasen un cambio en el nivel de algebrización de la actividad matemática involucrada. Esto supone que los futuros maestros tenían que tener en cuenta las soluciones previamente propuestas a los problemas dados.

En general, los futuros maestros tuvieron dificultades para elaborar variantes del problema inicial. En su intento de conseguir un determinado nivel de algebrización, sacrifican la significatividad del enunciado, de manera que en gran medida, la tarea que proponían estaba mal planteada: la solución estaba implícita en el enunciado, carecía de sentido o bien la información que facilitaba el enunciado no permitía responder a la pregunta. Tal es el caso del enunciado propuesto por E72 que incluimos como ejemplo en la figura 9.12.

En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. Si en clase de 5º hay 40 alumnos, ¿cuántos leerán? ¿En qué curso se lee más?

Figura 9.12. Ejemplo de variante mal planteada propuesta por E72 al problema 2.

Un enunciado significativo (bien planteado) se considera:

- *Pertinente* si se obtiene modificando la información o el requerimiento en el problema inicial y se mantiene el entorno (véase la figura 9.13).
- *Poco pertinente*, si se obtiene modificando información o requerimiento pero no se mantiene el entorno (véase la figura 9.14).
- *Nada pertinente* si no es una variación del problema inicial (no comparte información, requerimiento ni entorno).

En la Tabla 9.8 resumimos la información relativa a la pertinencia de los enunciados de las variantes propuestas por los estudiantes. Para cada variante, el nivel de algebrización asociado debía ser distinto a los empleados en la primera consigna del trabajo. Como vimos en la sección 4 (tabla 9.4) el tipo de estrategias más empleadas por los futuros maestros al resolver los problemas fueron las correspondientes al nivel 1 de algebrización, en los problemas 1, 2 y 4, y las de nivel 0 en el problema 3.

Tabla 9.8. Frecuencias (porcentajes) según grados de pertinencia de los enunciados de las variantes del problema (n=88)

Enunciado propuesto	Problema			
	1	2	3	4
No contesta	17 (19,32)	29 (32,95)	30 (39,09)	34(38,64)
Mal planteado	7 (7,95)	18 (20,45)	6 (6,82)	11 (12,5)
Nada pertinente	30 (39,09)	8 (9,09)	21 (23,86)	15(17,04)
Poco pertinente	18 (20,45)	18 (20,45)	13 (14,77)	16 (18,18)
Pertinente	16 (18,18)	15 (17,05)	18 (20,45)	12 (13,64)

En menor medida emplearon estrategias propias de un nivel 2. Por este motivo, los estudiantes recurrieron con mayor frecuencia a variantes que implicasen un nivel 0 (figura 9.14) en los problemas 1, 2 y 4, y a variantes de nivel 2 o nivel 3 (figura 9.13) en el problema 3.

Variante: "Un grupo de 5 amigas han comprado un regalo de cumpleaños para otra amiga. Posteriormente se unen 4 amigas más, por lo que finalmente acaban pagando 1,4 euros menos por persona. ¿Cuánto vale el regalo?"
Solución: Se plantea una igualdad en que aparece el símbolo literal a ambos lados de los términos, por lo que se puede asignar un nivel 3. La expresión para la resolución sería $5(x+1,4) = (5+4)x$ que requiere de agrupamiento y despeje de la incógnita.

Figura 9.13. Variante pertinente (NA 3) propuesta por E51 al problema 3.

Variante: "En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria, 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿Cuántos alumnos no leen un libro a diario en cada curso?"
Solución (nivel 0 de algebrización). Para resolver esta actividad, lo que hacemos es realizar dos restas. En la primera, para averiguar el número de alumnos que no leen un libro a diario en 6º curso de primaria, realizamos la siguiente operación: 60-15=45 alumnos que no leen un libro a diario. En el caso de 5º curso de primaria, de nuevo realizamos otra operación: 40-12=28 alumnos no leen un libro a diario.

Figura 9.14 Enunciado poco pertinente (NA 0) propuesto por E57 (modifica requerimiento pero no mantiene entorno) al problema 2.

Si nos fijamos en los niveles de algebrización asignados por los estudiantes únicamente a las variantes de los problemas correctamente planteados, observamos que les ha resultado difícil elaborar enunciados que motivasen un cambio de nivel de algebrización.

Tabla 9.9 Frecuencias absolutas (porcentajes) según grado de corrección en el nivel de algebrización (NA) asignado a enunciados pertinentes.

NA en variante propuesto	Problema			
	1	2	3	4
No contesta	17 (26,56)	17 (33,33)	22 (42,31)	20 (46,51)
Incorrecto	7 (10,94)	7 (13,73)	6 (11,54)	8 (18,60)
Correcto. No cambia NA	27 (42,19)	19 (37,25)	13 (25)	5 (11,63)
Correcto. Cambia NA	13 (20,31)	8 (15,69)	11 (21,15)	10 (23,26)
Total	64 (100)	51(100)	52 (100)	43 (100)

Como observamos en la tabla 9.9, sólo entre un 15,69 % (problema 2) y un 23,26 % (problema 4) de los NA asignados a las variantes son correctos y efectivamente suponen un cambio con aquellos empleados por los estudiantes al resolver el problema inicial. Entendemos que la dificultad es mayor cuando los estudiantes emplearon dos estrategias con niveles de algebrización distintos en la primera consigna.

5. Resultados en la faceta cognitiva

Cuando se lleva a cabo una práctica matemática, interviene una red (configuración) de objetos matemáticos que están vinculados entre sí. Por otro lado, el significado de cada objeto matemático está determinado por el sistema de práctica en el que aparece involucrado. El análisis ontosemiótico de los sistemas de prácticas que conducen a la aparición de objetos y procesos matemáticos es crucial para establecer el significado de estos objetos y procesos. Además, permite al maestro identificar posibles conflictos de aprendizaje y promover actividades dirigidas al desarrollo del razonamiento proporcional desde la escuela primaria en adelante.

5.1 Previsión de dificultades

Se espera que los maestros conozcan la diversidad de formas con las que los alumnos de primaria pueden comprender el contenido y los conflictos que pueden presentar en la aplicación de conceptos y procedimientos en la resolución de las tareas de proporcionalidad propuestas. El conocimiento de las dificultades de aprendizaje de los objetos matemáticos involucrados, sirve de soporte para diseñar y gestionar tareas que refuercen determinados conceptos o procedimientos, adaptando las tareas a las finalidades.

Casi todos los futuros profesores respondieron a esta consigna (salvo 4 en el primer problema, 5 en el segundo, 4 en el tercero y 3 en el cuarto). Sin embargo, de forma general las dificultades identificadas se asignan a las situaciones-problema y no suelen distinguirlas según las estrategias proporcionadas para cada problema, que era lo que se esperaba en esta tarea. Salvo 4 estudiantes que plantearon de forma global dificultades de tipo situacional y procedimental (aritméticas y de resolución de la regla de tres) para los cuatro problemas, se puede considerar que mayoritariamente las respuestas dadas por los futuros profesores son bastante pertinentes.

A continuación, incluimos ejemplos específicos de las respuestas de los futuros maestros a las tareas, lo que nos permitirá determinar el grado de competencia de análisis cognitivo alcanzado con la implementación de la intervención formativa.

En la Figura 9.15, el alumno E37 resuelve el problema 1 mediante dos procedimientos diferentes. El primero tiene un carácter proto-algebraico de nivel 1 y en el segundo usa la regla de tres (nivel proto-algebraico 2). La primera solución ofrecida no es correcta, ya que utiliza relaciones de múltiplos y divisores en la tabla de proporcionalidad que impiden obtener exactamente la cantidad de gramos de grasa en 100 gramos de barra. El alumno identifica la necesidad de aproximarse como posible dificultad de esta estrategia para potenciales alumnos de primaria. En la segunda solución, que es correcta, considera como posibles dificultades el reconocimiento de la relación de proporcionalidad entre las magnitudes (que justifica informalmente) y las complicaciones inherentes a la regla de tres y al producto cruzado.

Solución 1.

Gramos de barrita	1.1	5.5	11	22	44	88	99	100
Gramos de grasa	0.2	1	2	4	8	16	18	18+0.2=18.2

:5 ***:2*** ***:2*** ***×2*** ***×2***

Sumamos los gramos de grasa de 99 y 1.1 gramos de barrita para obtener los de 100g

Se completa la tabla por división o multiplicación de valores que permiten relacionar 100g con otras cantidades aproximadas. Se deduce que 100g puede obtenerse sumando 99 g y 1.1g, que es aproximadamente el valor que estamos buscando (101g), y operamos por redondeo.

Dificultades: El estudiante realiza la tarea por intuición, sin obtener un resultado exacto.

Solución 2.

Las magnitudes son proporcionales, ya que a más cantidad de gramos de producto tendremos más cantidad de gramos de grasa. Procedemos por medio de una regla de tres

$$\frac{22\ gramos}{100\ gramos} = \frac{4\ gramos\ de\ grasa}{x\ gramos\ de\ grasa}$$

Despejamos la incógnita x:

$$x = \frac{100\ gramos \cdot\ 4\ gramos\ de\ grasa}{22\ gramos} = 18.\widehat{18}$$

Por tanto, 100 gramos de producto contienen $18.\widehat{18}$ *gramos de grasa.*

Dificultades.

- *No identificar la proporcionalidad entre las magnitudes*
- *No utilizar apropiadamente el producto cruzado.*

Figura 9.15. Estrategia de solución y dificultades asociadas elaboradas por E37 al problema 1.

Como hemos mencionado, con frecuencia los futuros maestros asignan dificultades a las situaciones-problema sin distinguir aquellas vinculadas a los procedimientos y objetos matemáticos que aparecen directamente involucrados en cada método de solución. Por ejemplo, las soluciones propuestas por E76 para el problema 2 y las dificultades que ella considera asociadas se muestran en la figura 9.16. De las cuatro dificultades mencionadas, las dos primeras se refieren al contexto y la situación de proporcionalidad (común en ese caso a ambas soluciones); el tercero se aplica al primer método de solución (regla de tres) y el último se formula de manera confusa.

No existe una dificultad específica con respecto al procedimiento utilizado en la segunda estrategia de solución basada en la obtención y comparación de las proporciones de los lectores por curso. E76 usa este método para comparar ambas razones a través de su expresión decimal.

Solución 1.

Para determinar en qué curso la razón de lectores es mayor, tomamos como referencia la clase de 6º curso para establecer una relación de proporcionalidad y así, conocer, con respecto al otro curso de 40 estudiantes, cuántos estudiantes deberían leer, de forma que las proporciones sean equivalentes y así determinar quién lee más o menos en función del resultado obtenido.

Establecemos la regla de tres para obtener la proporción:

$$\frac{60\,alumnos}{40\,alumnos} = \frac{15\,leen}{x\,leen}$$

$$(40 \cdot\ 15): 60 = 10\,alumnos\,leen$$

Al ser proporcionales, si en una clase de 60 alumnos leen 15, en una clase con 40 estudiantes deberían leer 10 estudiantes.

Como el enunciado del problema dice que en este curso, 12 alumnos leen a diario un libro, esto significa que este curso lee más de lo que proporcionalmente debería respecto al otro curso. Por tanto, en 5º curso los estudiantes leen más.

Solución 2.

Calculamos la razón de estudiantes que leen en cada uno de los cursos. Así puedo comparar los resultados y obtener qué curso es en el que se lee más:

$$\frac{15\,lectores}{60\,alumnos} = 0.25 \qquad \frac{12\,lectores}{40\,alumnos} = 0.30$$

Comparamos ambas razones: $0.25\ en\ 6º\ curso < 0.30\ en\ 5º\ curso$

Por tanto, como la razón de 5º curso es mayor que la razón de 6º curso, sabemos que los estudiantes de 5º curso son los que leen más libros.

Dificultades.

- *Pensar que el curso con el menor número de libros leídos es el curso que lee menos y no tener en cuenta la diferencia en el número de estudiantes de los que se componen las clases.*
- *No saber cómo usar adecuadamente el concepto de proporcionalidad para averiguar el resultado.*
- *No realizar correctamente el producto cruzado.*
- *No saber que de la relación de proporcionalidad directa, se obtiene la razón entre las dos magnitudes.*

Figura 9.16. Estrategia de solución y dificultades asociadas propuestas por E76 al problema 2.

El tercer problema plantea una situación de proporcionalidad inversa. Este es un contenido que no está incluido en el currículo español hasta el primer curso de educación secundaria, por lo que los futuros maestros deben tener esto en cuenta al desarrollar estrategias de solución adecuadas para sus estudiantes de primaria. La solución 1 propuesta por E57 en la figura 9.17 es de tipo aritmético (nivel 0 de algebrización). Este procedimiento se basa en obtener el precio total del regalo y luego dividirlo por el número total de amigos, suponiendo que todos los amigos participen por igual. La segunda solución que propone utiliza la regla de tres inversa. El estudiante para maestro indica dificultades comunes a ambas soluciones, que se refieren al contexto de proporcionalidad inversa en la situación que se presenta. En la primera solución menciona dificultades aritméticas acentuadas por la presencia de números decimales. En la segunda solución, se menciona como una posible dificultad utilizar apropiadamente la regla de tres inversa. Para algunos futuros maestros, este procedimiento puede confundirse con el de la regla de tres directa, de forma que los alumnos de primaria pueden confundir los nuevos productos que surgen en este algoritmo con la multiplicación en cruz característica de la regla de tres directa.

Solución 1. *Se supone que los cinco amigos que quieren hacer el regalo de cumpleaños participarán contribuyendo cada uno con la misma cantidad de dinero. Por tanto, lo primero que tengo que hacer es averiguar cuánto cuesta el regalo de cumpleaños. Para esto, uso la siguiente operación:* *5.40€ x 5 amigos = 27€* *Como ahora son 9 amigos los que participan en el regalo (los cinco primeros, más los cuatro amigos que se han unido después, 5 + 4 = 9), realizo otra división:* *27€: 9 amigos = 3€* *Así que ahora ellos deben poner 3€ cada uno, puesto que el coste total del regalo, 27 € se distribuye entre 9 amigos.* *Dificultades.* *Una de las dificultades que los estudiantes pueden encontrar durante la resolución de este problema podría ser no considerar que cada uno de los amigos participa en el regalo con la misma cantidad de dinero, de modo que de esta manera sería mucho más complicado resolver la tarea. Otra dificultad que puede aparecer es que consideren que cinco amigos participaron primero, y luego cuatro en lugar de nueve. También puede suceder que los alumnos cometan errores durante los procedimientos de multiplicación y división, acentuados debido al uso de decimales*
Solución 2. *En el enunciado se asume que se establece una correspondencia de proporcionalidad inversa entre las magnitudes: "número de amigos" que contribuyen al regalo y "cantidad de euros" que cada uno aporta. Cuanto mayor es el número de amigos que participan en el regalo, menor es la cantidad de dinero que cada uno debe aportar. Por lo tanto, para calcular cuánto dinero debería dar cada uno de los nueve amigos, uso la siguiente regla de tres inversa:* *5 amigos ---------- 5,40€ cada uno* *9 amigos ---------- x* *x = (5 amigos • 5,40€ cada uno) / (9 amigos) = 27/9 = 3€ cada uno* *Esto es, como resultado final obtenemos que ahora cada uno de los nueve amigos debe*

poner 3€ para el regalo.

Dificultades.

Una dificultad que podemos encontrar en esta actividad es que los estudiantes se equivoquen al usar la regla de tres inversa, es decir, que no coloquen los datos adecuadamente o no sigan los pasos correctamente. De nuevo, otra dificultad que podemos encontrar es que los estudiantes se equivoquen con la multiplicación y la división, ya que en este caso también operan con decimales. Además, en esta forma de resolver el problema, puede suceder lo mismo que en la solución anterior y que los estudiantes consideren que al principio participaron cinco amigos, y luego cuatro en lugar de nueve.

Figura 9.17. Estrategia de solución y dificultades asociadas propuestas por E59 al problema 3.

El último problema se centró en distinguir las relaciones aditivas de las multiplicativas y promover la generalización y la justificación matemática.

En la mayoría de las respuestas de los futuros maestros, la diferencia entre las soluciones propuestas para este problema radica en la forma de expresar la regla general que permite obtener la cantidad de árboles plantados por Luis y María, dada la cantidad de árboles plantados por Ana. Por ejemplo, la figura 9.18 muestra las soluciones propuestas por E53 para este problema. En la primera solución, la regla general se expresa en lenguaje natural (que supone un nivel de algebrización 1), mientras que en la solución 2, el simbolismo algebraico se usa para determinar las relaciones funcionales (nivel de algebrización consolidado 3) entre las cantidades de árboles plantados por Ana y María, y por Ana y Luis.

El estudiante para maestro E53 identifica como una posible dificultad común a ambas estrategias, distinguir la relación aditiva de la relación multiplicativa, haciendo un uso excesivo de la proporcionalidad en el caso de las magnitudes: número de árboles plantados por Luis y número de árboles plantados por Ana. Por otro lado, indica la dificultad para establecer la regla general (el patrón) en la primera estrategia y la dificultad con el uso del simbolismo algebraico en el segundo método.

Es interesante notar que pocos futuros maestros elaboraron un juicio sobre las dificultades de la tarea de acuerdo con el nivel de algebrización de las soluciones propuestas, o refiriéndose de alguna manera a la presencia de ciertos objetos algebraicos en las prácticas.

Solución 1. *Luis comienza antes y trabajan* [Ana y él] *al mismo tiempo, por lo tanto, lleva la ventaja de los árboles que ha plantado antes de que empiece Ana.* *María empieza al mismo tiempo que Ana pero va más rápido, por lo tanto, esto le dará ventaja. Existe una relación de proporcionalidad directa entre las dos. Así:* – *Luis planta siempre cuatro árboles más que Ana: 20+4=24 árboles* – *María planta el triple de árboles que Ana: 20x3=60 árboles* *Como sabemos que María siempre plantará el triple que Ana y Luis cuatro más que Ana, sabiendo el número de árboles que planta Ana, sabremos cuántos ha plantado cada uno de los otros. Hemos encontrado el patrón: para conocer los árboles que planta María, la cantidad de Ana será multiplicado por 4 y para conocer la cantidad de árboles de Luis, se añade 4 a la cantidad de Ana.* *Solución 2.* *Si llamamos x al número de árboles que planta Ana, podemos llamar y al número de árboles que planta María y z al número de árboles que planta Luis. Se tiene entonces que para cualquier valor de x, y = 3x y z = x + 4*
Dificultades: – *No identificar la relación de proporcionalidad que existe sólo entre Ana y María, siendo siempre 3 veces los de Ana, ya que María va más rápido.* – *Pensar que Luis y Ana son proporcionales y no es así. Luis va al mismo ritmo que Ana, la diferencia está en que él comenzó antes y por esto él siempre tendrá 4 árboles de ventaja.* – *No reconocer el patrón que existe entre los tres chicos, cuando plantan árboles. (Solución 1)* – *El planteamiento algebraico puede generar dificultad al no tener un valor final objetivo, o al poder explicar y justificar la resolución del problema. (Solución 2)*

Figura 9.18. Estrategia de solución y dificultades asociadas propuestas por E53 al problema 4.

A continuación, resumimos los tipos de dificultades señaladas por el grupo de estudiantes:

- *Dificultades con la situación-problema* (DS). Dificultades para entender el contexto o comprender el enunciado.

  Por ejemplo, E22 señala en el problema 3: “no considerar que el precio del regalo es el mismo independientemente del número de personas que tengan que pagarlo”. Este tipo de dificultades aparece identificado en las diferentes respuestas incluidas en las figuras 9.15, 9.16, 9.17 y 9.18.

- *Dificultades de tipo conceptual*. Dificultades para:
  - Comprender la correspondencia de proporcionalidad directa establecida entre las magnitudes (DC1).

- Reconocer la relación de proporcionalidad inversa entre magnitudes (DC2). Por ejemplo, E20 menciona como una dificultad en el problema 2, “dificultad cuando relacionan que a más gente menos dinero”.
- Diferenciar situaciones aditivas de situaciones de proporcionalidad directa (DC3).

  Por ejemplo, en el problema 4, E4 señala “Si observamos la tabla que hemos puesto cuando hemos resuelto el problema, vemos claramente que Luis planta 4 árboles más que Ana y María 4 más que Luis. De esta manera el alumno podría pensar que si Ana planta 20 árboles, Luis planta 24 y María 28 árboles”
- Comprender el significado del valor unitario (DC4)

  Por ejemplo, E56 sugiere como dificultad en el problema 1 “no comprender la correspondencia del valor unitario de 1 gramo de barrita para saber qué cantidad de materia grasa le corresponde a este gramo”.

– *Dificultades de tipo procedimental*:
  - Con cálculos aritméticos (DA). Por ejemplo, la presencia de decimales en el problema 1 y 3, o la reducción de fracciones en el problema 2. Cuando comparan las fracciones en este problema, obtienen las expresiones decimales de éstas y ante la dificultad de trabajar con números decimales, sugieren “aproximar (o redondear) estos números para reducir la complejidad del problema”.
  - Con el procedimiento de la regla de tres (DP1). Dificultades con la operatividad del algoritmo.
  - Con el cálculo de porcentajes (DP2).

– *Dificultades con el lenguaje simbólico* (DL). Dificultades en el uso de los símbolos literales, tanto en el caso de ser receptores como incógnitas.

Dado que, como hemos mencionado, los casos de futuros maestros que distinguieron dificultades según las estrategias seguidas son minoritarios, para simplificar la exposición, se resumen en la tabla 9.10 las frecuencias de dificultades señaladas en cada uno de los problemas siguiendo las categorías anteriores.

Tabla 9.10. Categorías y frecuencias de dificultades identificadas en cada problema.

Dificultades	Problemas 1	2	3	4	Total por categoría (n=465)
DS	14	28	41	40	123 (26,45%)
DC1	22	16	7	14	59 (12,68%)
DC2	1	2	28	3	34 (7,32 %)
DC3	0	0	0	18	18 (3,87%)
DC4	9	0	0	0	9 (1,94%)
DA	27	30	19	14	90 (19,35%)
DP1	48	10	14	16	88 (18,93%)
DP2	0	22	0	0	22 (4,73%)
DL	7	0	8	7	22 (4,73%)
Total por problema (n=465)	128 (27,53%)	108 (23,23%)	117 (25,16%)	112 (24,08%)	465 (100%)

Como se observa en la tabla 9.10, que no existen diferencias relevantes entre las frecuencias de dificultades indicadas en los distintos problemas. En este sentido, y aunque no es el foco de atención de este trabajo, mencionemos que existe una considerable diferencia de éxito entre los tres primeros problemas y el cuarto: casi todos los estudiantes resolvieron correctamente los primeros tres problemas (más del 93% de los estudiantes dieron una solución adecuada a cada uno) mientras que solo el 39% de los futuros maestros resolvieron correctamente el último problema.

El porcentaje de dificultades que hacen referencia a la comprensión del requerimiento del enunciado o al contexto del problema es del 26,45%. Un porcentaje similar, 25,81%, presentan las dificultades de tipo conceptual en relación al conocimiento de la relación de proporcionalidad directa o inversa. Las dificultades de tipo procedimental (cálculo con decimales, fracciones, porcentajes, multiplicación en cruz en el algoritmo de la regla de tres) son las que los futuros maestros reflejan con mayor frecuencia (43,01%).

En este sentido, 75 futuros maestros (85,22%) aproximaron la solución del problema 1 con uno o dos decimales ignorando el período, de acuerdo con las dificultades identificadas para esta tarea (ver figura 9.15). Además, algunos de los errores detectados en las soluciones al problema 2 se deben al uso de una estrategia de tipo aditivo (ver figura 9.19), que se considera una posible dificultad (DC1, DC3).

Solución.

Veremos cuántos niños no leen de cada clase.

En primer lugar, el alumno resta al total de los estudiantes de 6º curso los 15

estudiantes que leen:
60 - 15 = 45 alumnos que no leen.
A continuación, el alumno resta al total de los estudiantes de 5º curso los 12 estudiantes que leen:
40 -12 = 28 alumnos que no leen.
Donde hay menos estudiantes que no leen, es la respuesta que estamos buscando, porque eso significa que esta es la clase donde leen menos. Por lo tanto, en 5º curso, los alumnos leen menos.

Dificultades.
Los niños pueden no entender el proceso de identificar primero los estudiantes que no leen.

Figura 9.19. Solución incorrecta y dificultades de aprendizaje propuestas por E23 al problema 2.

De manera similar, 51 futuros maestros (57,96%) consideraron la relación entre los árboles plantados por Ana y Luis de proporcionalidad directa (ver figura 9.20), y un estudiante consideró la relación entre los árboles plantados por María y Ana como una relación aditiva. Esta es también una dificultad mencionada por los futuros maestros que resolvieron correctamente el problema 4.

Solución.
Elaboramos una tabla en la que situamos los datos iniciales que nos da el enunciado y colocamos incógnitas en los datos que no conocemos y que queremos averiguar.

Personas	*Número inicial de árboles*	*Número final de árboles*
Ana	*4*	*20*
María	*12*	*x*
Luis	*8*	*y*

Relacionamos los datos por medio de la regla de tres, en la que la incógnita representa el número final de árboles plantados por cada uno. Existe una relación de proporcionalidad directa, ya que cuantos más árboles planta Ana, más árboles plantan los demás. Calculamos los árboles que plantan María y Luis.

María:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \rightarrow 20 \\ 12 \rightarrow x \end{array}\right\} \quad x=\frac{12\cdot 20}{4} \; x=60$$

Luis:

$$\left.\begin{array}{l} 4 \rightarrow 20 \\ 8 \rightarrow y \end{array}\right\} \quad y=\frac{8\cdot 20}{4} \; y=40$$

Dificultades.
Si observamos la tabla que hemos escrito cuando hemos resuelto el problema, vemos claramente que Luis planta 4 árboles más que Ana y que María planta 4 árboles más que Luis. De esta forma, el alumno podría erróneamente pensar que si Ana planta 20 árboles, Luis planta 24 y María planta 28 árboles.

Figura 9.20. Solución incorrecta propuesta por E4 al problema 4.

5.2 Análisis de respuestas de alumnos de primaria

El conocimiento especializado de las matemáticas permite a los futuros maestros interpretar las respuestas de los alumnos, más allá del hecho de determinar si la respuesta es correcta o incorrecta, analizar si muestran una comprensión de los conceptos matemáticos y comprender procedimientos no comunes de resolución de problemas.

Las seis respuestas de los alumnos de primaria (ver figuras 9.1, 9.2 y 9.3) habían sido seleccionadas de entre una muestra más amplia con la intención de permitir la reflexión de los futuros maestros sobre la complejidad de los niveles de algebrización y el papel que tienen en el carácter algebraico de una práctica matemática, la presencia de símbolos literales, el cálculo analítico que se desarrolla o no con ellos y el grado de generalidad de los objetos que intervienen en la misma. En total, los futuros maestros tenían que valorar 6 soluciones, 2 para cada uno de los problemas propuestos. Estos problemas son diferentes de los que se habían empleado tanto en la sesión formativa como en la sesión de trabajo en equipos. Los dos primeros problemas responden a situaciones proporcionales de valor faltante. El primero de ellos (P1, inspirado en Misailidou y Williams, 2003) nos permitió encontrar una solución errónea de un alumno de 6º curso de educación primaria (A1) en la que se empleaba la estrategia de suma constante identificada por las investigaciones sobre este tópico (Misailidou y Williams, 2002). Se espera que el futuro maestro identifique y justifique el error del alumno. En la segunda solución, el futuro maestro debe reconocer el papel del símbolo literal para denotar un número desconocido, pero sobre el cual no se realiza ningún cálculo analítico.

Para el segundo problema (Problema P2, figura 9.2), las dos respuestas de alumnos de primaria que se incluyen son correctas. Una de ellas (A3) corresponde a la de un alumno de 3º de primaria, que sigue una estrategia aritmética. Pretendemos evaluar la competencia del futuro maestro para valorar estrategias de resolución no-usuales y para juzgar argumentos informales en problemas de proporcionalidad. La otra solución se debe a un alumno de 6º de primaria que explicita la relación de proporcionalidad y resuelve mediante una estrategia proto-algebraica (multiplicación en cruz). En este caso, se espera que el futuro profesor aprecie el papel del lenguaje simbólico y el tipo de transformaciones aplicadas.

El tercer problema (Problema P3, figura 9.3) plantea una situación de reparto proporcional. Las respuestas de los alumnos (uno de 5º y otro de 6º curso de educación primaria) plantean estrategias distintas que llevan asociados distintos rasgos algebraicos. La solución dada por A5 se basa en una interpretación incorrecta de la tasa. El alumno obtiene de forma incorrecta el valor unitario (precio de cada bombón). Además, el resultado final del reparto es correcto aunque no lo es la estrategia seguida. En la solución de A6 destaca la relación entre proporcionalidad y porcentajes en el reparto.

Desde un punto de vista epistémico experto, la actividad matemática desarrollada por los alumnos A1 y A2 para resolver el problema 1 se considera aritmética, es decir, de nivel de algebrización 0: no hay objetos intensivos implicados y las operaciones se llevan a cabo sólo con objetos extensivos. En efecto, se opera sobre números particulares (la cantidad de botes de pintura roja y amarilla) en un lenguaje natural y numérico; los símbolos "?" -en el caso del alumno A1- y el literal "x" en el caso del alumno A2, refieren en ambos casos a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de las operaciones sobre los números particulares involucrados, por lo que no se considera presencia de objetos algebraicos. A2 emplea la estrategia de duplicación (Tourniaire, 1984). Identifica la relación multiplicativa "doble de pintura roja que de pintura amarilla" (que representa en el diagrama como "× 2"), lo que le permite argumentar que Sofía usará 14 botes de pintura roja porque es el doble de las siete de pintura amarilla.

La solución del alumno A3 sigue una estrategia de construcción progresiva. La actividad matemática que desarrolla también se considera de nivel 0 de algebrización; se emplea un lenguaje natural, numérico e icónico y se opera con los valores particulares de número de días y kilos de pienso. El argumento describe la estrategia seguida por el propio alumno para resolver el problema.

El alumno A4 reconoce la relación de proporcionalidad y plantea una ecuación proporcional, en la que las razones comparan los kilos de pienso con el número de días que pueden comer las gallinas. El alumno afirma "he utilizado la regla de tres"; sin embargo, la intervención del símbolo literal para representar la incógnita es el único carácter algebraico presente, ya que para encontrar el valor de la incógnita, no se hace explícita la formulación ni la solución de una ecuación de la forma $Ax = C$. El alumno, justifica su solución en base a la equivalencia de fracciones que aparecen en la relación de proporcionalidad (que vincula a la tabla de proporcionalidad). Por esas consideraciones el grado de algebrización de la actividad del alumno, siguiendo los criterios de Godino, Aké et al. (2014), sería proto-algebraico de nivel 1.

La solución propuesta por el alumno A5 lleva asociado un nivel de algebrización 0 ya que sólo aparecen involucradas operaciones aritméticas con números naturales y el lenguaje empleado en toda la actividad es natural y numérico. En el caso del alumno A6, la incorporación del uso de porcentajes para determinar la cantidad de bombones que corresponde a cada niño, a partir del porcentaje del precio de la caja que han pagado, supone un mayor grado de generalidad que, en términos del modelo de los niveles de algebrización, corresponde a un nivel 1 de algebrización. El argumento dado al ítem a (explicación A) reside en la relación entre las partes y el todo del precio de la caja de bombones. El argumento para el segundo ítem, establece la relación entre lo que Laura pagó de la caja de bombones y lo que le corresponde, y el complemento a 100 del porcentaje.

Los criterios para valorar el grado de corrección de las soluciones de los estudiantes se establecieron a priori, mientras que las categorías de explicaciones incorrectas dadas por los futuros maestros aparecen como consecuencia del análisis de sus respuestas. Los criterios de valoración en relación a la identificación del conocimiento de los alumnos se determinó igualmente a priori (también se aplicó en la intervención piloto). Sin embargo, las categorías de conflictos surgen del análisis de los datos recogidos. Finalmente, el estudio de los niveles de algebrización de las soluciones de los alumnos fue desarrollado a priori por el equipo de investigación.

Valoración del grado de corrección de las soluciones de los alumnos

En primer lugar, preguntamos a los futuros maestros por el grado de corrección en la respuesta de los 6 alumnos. Hemos considerado oportuno valorar positivamente las respuestas parcialmente correctas o incompletas, por lo que la puntuación otorgada a los ítems ha sido:

- 0 puntos si se valora de forma incorrecta el grado de corrección de la solución o no se justifica.
- 1 punto si se valora correctamente el grado de corrección de la respuesta pero la justificación es incorrecta.
- 2 puntos si la valoración dada es correcta.

Dentro de las justificaciones incorrectas dadas por los futuros maestros, encontramos tres categorías:

– *Justificación no concluyente* basada en observaciones generales que no permiten determinar la valoración del grado de corrección asignado a la respuesta de alumno.

  Por ejemplo, en esta categoría se encuentra la respuesta de E11 para el grado de corrección de A3 "El alumno A3 utiliza su imaginación para encontrar una solución al problema, lo cual valoro de forma muy positiva", o la respuesta de E9 al grado de corrección de A4: "porque la solución es la esperada".

– *Justificación de tipo procedimental*, frecuentemente basada en el uso o no de la regla de tres.

  Por ejemplo, el estudiante E4 señala que la respuesta dada por el alumno A1 no es correcta ya que "la manera adecuada sería llevando a cabo una regla de 3".

  En esta misma categoría se encuentra la justificación de E5 quien para asegurar que la solución del alumno A4 es correcta, afirma "utiliza recursos de su nivel, igualdad de fracciones, reglas de 3 y resolución de ecuaciones".

– Justificación basada en la solución experta o solución previa. En esta categoría encontramos respuestas en las que el futuro maestro justifica el grado de corrección de la solución del alumno en función de la solución que él ha obtenido previamente (es decir, la solución del alumno coincide con la solución que el propio futuro maestro da al problema), o bien la solución que otro alumno ha dado al problema y que el futuro maestro ha valorado previamente en términos del procedimiento o estrategia usada. Por ejemplo, E7 señala que la respuesta dada por el alumno A4 es correcta ya que "su resultado coincide con el que yo he obtenido por medio de la regla de tres". En otros casos, la corrección de las soluciones de A4 y A6 se basan en la concordancia con los resultados obtenidos por A3 y A5, respectivamente. Por ejemplo, E37 afirma respecto de la respuesta dada por A6 que “sería más fácil la solución del Alumno A5” (E37).

Dado que los futuros maestros tenían que valorar las respuestas de 6 alumnos (dos para cada problema: A1 y A2, para el problema 1; A3 y A4 para el problema 2; A5 y A6 para el problema 3), la puntuación máxima que podían lograr era de 12 puntos.

Observamos que 60 de los 88 futuros maestros (68,18%) obtienen 6 o más puntos, es decir, más del 68% de los participantes, valoraron con éxito las respuestas de los alumnos, si bien sólo un estudiante consiguió la puntuación máxima. El valor medio está en 6,4 (mediana 6).

Tabla 9.11. Frecuencias (porcentajes) en el grado de corrección de las valoraciones (n=88)

Pertinencia	Frecuencias en la corrección de la valoración a las respuestas de los alumnos de primaria					
	A1	A2	A3	A4	A5	A6
0	15 (17,04)	13 (14,77)	18 (20,45)	11 (12,5)	43 (48,86)	29 (32,95)
1	33 (37,5)	34 (38,64)	42 (47,72)	54 (61,37)	36 (40,91)	42 (47,72)
2	40 (45,45)	41 (46,59)	28 (31,81)	23 (26,14)	9 (10,23)	17 (19,32)

Como vemos en la tabla 9.11, los futuros maestros tuvieron éxito para evaluar el grado de corrección en las respuestas de los alumnos A1, A2, A3 y A4 (respondieron de forma nada pertinente menos del 20% en dichos casos). Se encuentran más dificultades a la hora de valorar la respuesta de los alumnos A5 y A6 al problema 3.

Tabla 9.12. Tipos y frecuencias de valoraciones no pertinentes.

Pertinencia	Respuestas de los alumnos de primaria					
	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Valoración incorrecta	5	3	0	0	12	9
No justifica	10	10	18	11	31	20
Total	15	13	18	11	43	29
No concluyente	11	12	19	19	14	12
Basada en solución previa o experta	5	3	3	5	2	4
Justificación procedimental	17	19	20	30	20	26
Total	33	34	42	54	36	42

En la tabla 9.12 sintetizamos los resultados obtenidos en relación a las respuestas poco o nada pertinentes. Para las respuestas no pertinentes (valoradas con 0 puntos en la tabla 1) distinguimos las valoraciones incorrectas de aquellas que fueron correctamente valoradas pero no justificadas. Para las respuestas poco pertinentes (valoradas con 1 puntos en la tabla 9.11), distinguimos según los tipos de justificaciones incorrectas señalados anteriormente. Como podemos observar, la mayor parte de respuestas con 0 puntos se debe a que no justificaron su valoración. Son menos frecuentes las respuestas de estudiantes que valoran de forma incorrecta las respuestas de los alumnos de primaria. A modo de ejemplo, en la figura 9.21 incluimos la respuesta del estudiante E54, que considera correcta la respuesta dada por A1 e incorrecta la respuesta dada por E2.

Tanto el procedimiento como el argumento planteado [por A1] *se consideran correctos. Como el problema dice que las dos niñas quieren pintar su habitación del mismo color, el estudiante razona que ambas deben usar el mismo número de botes de pintura, por lo tanto realiza la suma de los botes que si sabe de una de las niñas, Laura y al resultado obtenido de esa suma le resta el numero usado hasta el momento por la otra niña, Sofía.*

El procedimiento que realiza este alumno [A2] *sería correcto y estaría bien planteado si quisiéramos saber el doble de botes que usa Sofía, para eso hace el razonamiento usando los botes de pintura de Laura donde piensa, que si el doble de 3 es 6, los botes que usa Sofía tiene que ser el doble de 7, es decir 14. Esto no es correcto, porque la solución que nos da no es apropiada.*

Figura 9.21. Valoración incorrecta de E54 respecto a las soluciones de A1 y A2.

Como observamos en la figura 9.21, E54 no identifica como errónea la estrategia aditiva del alumno A1, mostrando una grave carencia en el conocimiento común sobre la proporcionalidad. En otros casos, los futuros maestros ante dos soluciones distintas a un mismo problema (como es el caso de A1 y A2) dan por buena la respuesta aparentemente más sencilla (figura 9.22).

Me parece adecuada la formulación de las operaciones que ha planteado para conocer cual serian la cantidad de pintura roja que se necesitaría, pudiendo resolver estas de manera clara y sencilla y llegando a la solución de manera fácil y adecuada.

Figura 9.22. Valoración incorrecta de E49 respecto a la respuesta de A1.

Otro ejemplo de valoración incorrecta a las respuestas de los alumnos A5 y A6, aparece en la figura 9.23. Como vemos, E1 da por bueno el procedimiento de A5 para obtener el valor unitario (precio de cada bombón) dividiendo el precio de la caja por el número de bombones de ésta.

La respuesta [de A5 al apartado a)] *es correcta, puesto que ha sumado, el dinero que han puesto ambos y ha averiguado lo que vale la caja de bombones, 10€, después esos 10€ los ha dividido entre los 20 bombones para saber cuánto vale cada bombón 2€, y por último ha multiplicado el precio de cada bombón por el dinero que han puesto para saber cuántos bombones le corresponden a cada uno 12 y 8 respectivamente.*

La respuesta [de A6] *a la pregunta a) es incorrecta, puesto que ha puesto que cada bombón vale 0,5, pero lo sorprendente es que el procedimiento para hallar el precio de cada bombón es correcto ha sumado el dinero y lo ha dividido entre 20 para saber cuánto vale cada bombón*

Figura 9.23. Respuesta incorrecta de E1 al valorar el grado de corrección de las respuestas de A5 y A6.

Las justificaciones más frecuentes en las valoraciones de todos los alumnos son de tipo procedimental. Además, observamos que los futuros maestros tienen dificultades para analizar y valorar estrategias de resolución no habituales a los problemas de proporcionalidad. Tal es el caso de la respuesta dada por el alumno A3. En la figura 9.24 incluimos un tipo de valoración recurrente en este sentido.

El alumno [A3] *ha conseguido llegar al resultado correcto en este caso pero sin realizar un correcto planteamiento del ejercicio. Se ha tratado de realizar el problema a la antigua usanza contando de seis en seis hasta llegar al resultado pretendido en lugar de realizar un correcto planteamiento mediante una regla de 3 u otra opción válida.*

Figura 9.24. Justificación no apropiada de E79 a la corrección de la respuesta de A3.

Como hemos observado varios estudiantes consideran poco apropiada la respuesta del alumno A3, asegurando que “si fueran números más grandes debería aplicar otro método para realizar el problema” o clasificándolo como “bastante laborioso y costoso de comprender”. Además, un gran número de ellos aseguran que “para la resolución de este tipo de problemas lo mejor sería realizar una regla de tres” cuando valoran las respuestas de los alumnos.

Identificación de conocimientos puestos en juego por los alumnos

Después de valorar el grado de corrección de las soluciones, los futuros maestros deben identificar los tipos de lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que reconocen en las respuestas dadas por los alumnos de primaria.

Consideramos los siguientes criterios para valorar la pertinencia en la identificación de los objetos:

- Nada pertinente (valorada con 0 puntos). Los futuros maestros identifican los objetos incorrectamente o sólo identifica apropiadamente los tipos de lenguajes y algún objeto más (normalmente procedimientos). También se consideran no pertinentes aquellas respuestas en las que los futuros maestros identifican objetos característicos del nivel de algebrización que han asignado previamente y no aquellos que efectivamente aparecen en la práctica. Por ejemplo, E11 identifica de manera general para el problema 1 (A1 y A2): "el lenguaje que se usa es el natural y el numérico y se reconocen los conceptos de multiplicación y suma de números naturales. El procedimiento seguido es inductivo.”
- Poco pertinente (1 punto). Identifica correctamente al menos tres tipos de objetos (normalmente, lenguajes, conceptos y procedimientos). Por ejemplo E61, incluye la siguiente tabla donde resume los objetos matemáticos que ha identificado en las soluciones de A5 y A6.

	Lenguajes	*Conceptos*	*Propiedades*	*Procedimientos*
A5	*Natural, numérico e icónico.*	*Multiplicación, división*	*El alumno no usa ninguna propiedad*	*Algoritmos de la multiplicación y división*
A6	*Natural, numérico, icónico y simbólico.*	*Porcentajes*	*El alumno no usa ninguna propiedad*	*Algoritmos de la multiplicación y división*

- Pertinente (2 puntos). Identifica correctamente los distintos objetos en las soluciones dadas por los alumnos. Por ejemplo, A68 identifica de una forma bastante adecuada, los objetos que emergen de la solución propuesta por A3:

Lenguajes: natural, numérico, simbólico, pictórico

Conceptos: suma de números naturales, multiplicación de números naturales, razón días-kilogramos de pienso

Proposición: Cada 30 días consumen 15 kilogramos de pienso

Argumento: Cada 6 días comen 3 kilogramos de pienso

Procedimiento: el niño realiza una secuencia de relaciones aditivas

Días	*6*	*12*	*18*	*24*	*30*
Kilogramos	*3*	*6*	*9*	*12*	*15*

Teniendo en cuenta estos criterios y la valoración asignada, la puntuación máxima que podían obtener los futuros maestros en esta tarea era de 12 puntos (dos por cada solución analizada). La puntuación media fue de 3,51 y la mediana de 3,5.

Los futuros maestros tuvieron grandes dificultades para responder de forma adecuada a esta consigna:

- 32 (36,36%) obtuvieron exactamente 0 puntos en esta consigna. De ellos 27 sólo identificaron los tipos de lenguaje en las distintas soluciones y 5 identificaron objetos genéricos característicos del nivel de algebrización que habían asignado previamente y no los reconocidos en las soluciones de los alumnos.
- 21 (23,86% del total) obtuvieron entre 1 y 6 puntos ya que identificaron en alguna de las soluciones propuestas por los alumnos algún objeto más además del lenguaje (frecuentemente procedimientos).
- Sólo 35 futuros maestros (39,77%) de los 88 obtuvieron más de 6 puntos y un único estudiante consiguió la puntuación máxima (12 puntos).

Tabla 9.13. Frecuencias (porcentajes) del grado de pertinencia en el conocimiento de objetos para cada respuesta de los alumnos (n=88)

Valoración	Respuestas de los alumnos de primaria					
	A1	A2	A3	A4	A5	A6
0	41 (46,59)	41 (46,59)	46 (52,27)	37 (38,64)	44 (50)	39 (44,32)
1	41 (46,59)	39 (44,32)	37 (38,64)	46 (52,27)	42 (47,73)	46 (52,27)
2	6 (6,82)	8 (9,09)	5 (5,68)	5 (5,68)	2 (2,27)	3 (3,41)

Como vemos en la tabla 9.13, no hay diferencias relevantes en las valoraciones según las respuestas de los alumnos de primaria. La actividad en la que fue más difícil para los alumnos identificar los objetos matemáticos fue la del alumno A3 (el 52,27% sólo identificó correctamente a lo sumo el tipo de lenguaje) y aquella con mejores resultados promedio fue la del alumno A4, si bien hubo un mayor número de respuestas pertinentes (8) en el análisis de la actividad del alumno A2. Estos resultados se deben a que los alumnos que identifican los objetos de forma algo pertinente (valorado con 1 punto) reconocen de forma apropiada los tipos de lenguaje (natural, numérico, icónico, diagramático, simbólico), conceptos y procedimientos, siendo las proposiciones y argumentos los objetos que menos identifican. Muchos estudiantes no identificaron ningún concepto en la actividad de A3 o de A5, o señalaron explícitamente "el alumno no utiliza ningún concepto" (E29 entre otros).

Como hemos mencionado, solo 56 (63,64%) de los futuros maestros identificaron algún objeto distinto de los lenguajes implicados en las prácticas de los alumnos. El análisis de este reconocimiento por parte de los futuros maestros nos ha permitido identificar algunos conflictos en su comprensión de *concepto, proposición* y *argumento*:

C1. Identifica como concepto un procedimiento o la intencionalidad de la práctica. Suelen reconocer como concepto “algoritmo de la suma y la resta” en la solución de A1, o “regla de tres” y “producto en cruz” en la solución de A4.

C2. Los argumentos que identifica son de tipo deductivo, o basados en propiedades aritméticas. En este caso, los futuros maestros identifican como argumentos “operaciones aritméticas” o “razonamiento”.

C3. Confunde argumento con la intención de la práctica o el procedimiento. Por ejemplo, E32 identifica como argumento en la práctica de A5 “Argumento: calcular cuánto cuesta cada bombón y cuántos les corresponde a cada uno”. E87 incluye como argumento en la práctica de A6 “Argumento: Calcula la proporción que corresponde a cada uno mediante porcentajes y operaciones aritméticas.”

C4. Confunde proposición con intención o procedimiento. Por ejemplo, E49 identifica en el análisis de la práctica de A4 “Proposición: saber cuántos kilos necesitaremos en 30 días”. E5 indica en el análisis de la práctica de A3 “Proposición: cálculos aritméticos”.

C5. Algunos estudiantes confunden el argumento empleado por el alumno en la resolución del problema, como objeto implicado en la actividad del alumno, con la justificación que ellos dan para valorar el grado de corrección de la respuesta de éste. Por ejemplo, E79 incluye en la configuración de objetos de la respuesta de A3 “la argumentación empleada es bastante pobre y liosa para el docente.” E74 afirma respecto al alumno A1 “el argumento no es adecuado, ya que está fundado por un procedimiento erróneo”.

En la tabla 9.14 resumimos la frecuencia con la que aparecen los conflictos descritos en las respuestas de los estudiantes que identificaron otros objetos distintos de lenguajes.

Tabla 9.14. Frecuencia en los conflictos identificados en el reconocimiento de objetos (n=56)

	Tipos de conflictos semióticos identificados en el análisis de las respuestas de los alumnos				
	C1	C2	C3	C4	C5
Frecuencias (porcentajes)	12 (21,43)	10 (17,86)	22 (39,29)	15 (26,79)	13 (23,21)

Diversas investigaciones muestran que con frecuencia los docentes centran la atención en el aspecto algorítmico recurriendo a argumentos procedimentales para justificar sus estrategias de resolución en problemas de proporcionalidad (Lamon, 2007; Riley, 2010). Esta falta de comprensión sobre el desarrollo del razonamiento proporcional motiva también que, cuando se trata de analizar las respuestas de alumnos de primaria, los futuros maestros revelen conflictos para reconocer apropiadamente los argumentos que aparecen en ellas (conflictos C3 y C5). En la figura 9.25 se muestra la respuesta de un futuro maestro sobre la no presencia de argumentos en las soluciones de los alumnos A1 y A2, que permite observar un conocimiento pobre y sesgado sobre el objeto argumento.

Ambas soluciones [A1 y A2] *utilizan un argumento nulo, porque no define el problema al no realizar ningún tipo de recogida de información sobre los distintos tipos de elementos y la relación que existe entre ellos* [..] *No terminan de argumentar y dar un resultado final a las soluciones.*

Figura 9.25. Identificación de procedimientos y argumentos de E46.

En general, observamos que los futuros maestros tienen grandes dificultades para identificar los argumentos, para leer entre líneas y ver más allá de lo que aparece escrito explícitamente en las respuestas de los alumnos.

Reconocimiento de niveles de algebrización en las prácticas de alumnos

Salvo 2 alumnos que asignaron de forma genérica a todas las respuestas “nivel 1 o 2” (E28) y “niveles 0 o 1” (E29) sin distinguir los niveles según las actividades de los alumnos, los demás asignaron justificadamente el nivel de algebrización a las distintas soluciones elaboradas por los alumnos de primaria. De manera general, se puede considerar que los futuros maestros realizaron con éxito esta consigna, ya que, como vemos en la tabla 9.15, 56 de ellos (63,63%) reconocieron correctamente el nivel de algebrización de las respuestas de los alumnos en 3 o más de los casos, aunque sólo 2 identificaron correctamente todos los niveles de algebrización,

Tabla 9.15. Grado de éxito en el reconocimiento de niveles de algebrización (n=88)

	Nº de valoraciones correctas en el nivel de algebrización de la actividad					
	1	2	3	4	5	6
Frecuencias (porcentajes)	16 (18,18)	12 (13,64)	24 (27,27)	21 (23,86)	9 (11,23)	2 (2,27)

A priori, la asignación de niveles de algebrización a las soluciones dadas por A3 y A5 no debía suponer dificultad a los futuros maestros. En el caso de las soluciones de los alumnos A1 y A2 la dificultad podría surgir en el uso del símbolo literal, la dificultad para identificar correctamente el nivel de algebrización de la actividad propuesta por A4, puede consistir en observar que no se desarrolla ningún cálculo analítico con el símbolo literal. Por otro lado, en el caso de A6, los futuros maestros deben percatarse del grado de generalidad que supone el uso de porcentajes, como una forma específica de describir comparaciones multiplicativas.

En la tabla 9.16 mostramos las frecuencias obtenidas en el reconocimiento de los niveles de algebrización para cada una de las soluciones dadas por los alumnos de primaria. Destacamos en negrita las frecuencias correspondientes a la asignación correcta.

Tabla 9.16. Frecuencias absolutas (porcentajes) en la asignación de niveles de algebrización a las respuestas de los alumnos (n=88)

Soluciones de los alumnos	No contesta	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2
A1	2 (2,27)	**63 (71,59)**	15 (17,05)	6 (6,82)
A2	1 (1,14)	**25 (28,41)**	45 (51,13)	15 (17,05)
A3	2 (2,27)	**60 (68,18)**	17 (19,32)	7 (7,95)
A4	3 (3,41)	6 (6,82)	**22 (25)**	55 (62,5)
A5	5 (5,68)	**59 (67,05)**	19 (21,59)	8 (9,09)
A6	6 (6,82)	35 (39,77)	**35 (39,77)**	10 (1,14)

Observamos que los futuros maestros tuvieron un éxito considerable para identificar correctamente el nivel de algebrización en la actividad desarrollada por el alumno A1 (71,59%), el alumno A3 (68,18%) y la del alumno A5 (67,05%). Mencionemos al respecto que todas estas corresponden a soluciones de carácter aritmético. Tuvieron mayor dificultad para asignar correctamente el nivel 0 de algebrización en el caso del alumno A2 (sólo lo hicieron apropiadamente el 28,41%), que fue mayoritariamente (51,13%) valorada con nivel 1 de algebrización, debido a la presencia del símbolo literal. En el caso de las actividades de carácter proto-algebraico (nivel 1) desarrolladas por los alumnos A4 (correcto el 25% de los casos) y A6 (correcto en el 39,77% de los casos), ocurre que los futuros maestros asociaron en su mayoría (62,5% de las respuestas) nivel 2 a la actividad desarrollada por A4, haciendo alusión a la regla de tres como procedimiento y en el caso de la solución propuesta por A6, el 39,77% no identificaron el grado de intensión (o generalidad) implicada en el uso de los porcentajes y asignaron un carácter aritmético (nivel 0) a la actividad matemática de este alumno.

Es importante que los futuros maestros identifiquen los distintos usos del símbolo literal como receptor o incógnita identificando cuándo aparece un cálculo analítico y cuando no. El procedimiento de la regla de tres, lleva asociado el planteamiento de una ecuación del tipo Ax=B y el consecuente despeje de la incógnita (nivel 2 de algebrización). En las figuras 9.26 y 9.27, se muestran las respuestas de dos estudiantes que consiguen asignar correctamente el nivel de algebrización a la solución del alumno A4, apreciando la ausencia de cálculo sintáctico con la incógnita.

Considero que el nivel de algebrización utilizado es de nivel 1, porque independientemente de que se utiliza una regla de 3, se encuentra una incógnita que no llega a ser despejada.

Figura 9.26. E42 identifica el nivel 1 en la actividad de A4

En la respuesta de E42 incluida en la figura 9.26, se observa cierta confusión con el término regla de tres, algo que es habitual entre los futuros maestros.

Nivel 1 de algebrización [de la solución propuesta por A4] *Aunque indique en su argumento, que usará una regla de 3, no la realiza. Si introduce el símbolo "x" como variable incógnita, pero en ningún momento realiza esta regla de tres.* *Realiza la solución a través de fracciones equivalentes y mediante unos algoritmos de multiplicación puesto que ha averiguado que en 30 días hay 5 veces 6 días, y por tanto multiplica los 3 kilos que comen en 6 días por 5.*

Figura 9.27. Asignación de E72 de nivel de algebrización 1 en la actividad desarrollada por A4

6. Conclusiones

La importancia que tiene la proporcionalidad, tanto desde el punto de vista curricular como en el acceso al razonamiento algebraico temprano, nos ha motivado a plantear un estudio del razonamiento proporcional desde los niveles de algebrización. Por un lado, hemos distinguido diversos significados de la proporcionalidad (entendidos como sistemas de prácticas característicos de situaciones que involucran la proporcionalidad) en educación primaria vinculados a los niveles de algebrización (aritmético, proto-algebraicos y algebraico-funcional) y por otro, hemos desarrollado intervenciones formativas con futuros maestros, preocupados por la concepción deficiente y sesgada sobre la naturaleza del razonamiento algebraico elemental involucrado en tareas de proporcionalidad que muestran diversas investigaciones desarrolladas en el marco del EOS (Burgos, Beltrán-Pellicer, et al., 2018; Burgos, et al., 2017; Burgos y Godino, 2018c; Burgos, Godino y Rivas, 2019; Rivas y Godino, 2010, Rivas, Godino y Castro, 2012).

6.1. Análisis retrospectivo en la faceta epistémica

En este capítulo hemos informado del diseño, implementación y resultados de una experiencia formativa con futuros maestros de educación primaria focalizada en un primer lugar en el desarrollo de la competencia de análisis de los conocimientos puestos en juego en la resolución de tareas sobre razonamiento proporcional. Estos conocimientos se refieren a la resolución de problemas por varios métodos, la creación de problemas por variación y la identificando de los niveles de algebrización que se ponen en juego en la actividad matemática de solución de problemas que involucran la proporcionalidad. Se articula, por tanto, una problemática de formación inicial de profesores que involucra el razonamiento proporcional y su relación con el razonamiento algebraico elemental (early algebra).

Coincidimos con Guberman y Leikin (2013) en que al tratar con tareas que admiten diferentes métodos de solución basados en la intervención de diferentes objetos matemáticos, los maestros desarrollan sus conocimientos y habilidades en la materia. Sin embargo, como síntesis de los resultados obtenidos, en relación a la solución de los cuatro problemas propuestos por al menos dos métodos, y el reconocimiento de los niveles de algebrización en estas soluciones, observamos que un alto porcentaje de los futuros maestros que participaron ha tenido dificultades para responder a esta tarea. En línea con la investigación de Berk et al. (2009), quienes demostraron que los futuros maestros no son flexibles para resolver el mismo problema usando diferentes estrategias, nuestros resultados muestran que solo el 27,27% de los futuros maestros elaboró dos soluciones a los cuatro problemas y ninguno más de dos.

El grado de corrección de las soluciones dadas varía entre los problemas, siendo el problema 4 bastante conflictivo como muestra que el 59,09% de las soluciones dadas eran incorrectas. Estos resultados coinciden con los de investigaciones previas que señalan las dificultades de los futuros maestros para distinguir situaciones proporcionales de situaciones no proporcionales, lo que lleva a un uso excesivo de la linealidad (Buforn, Llinares y Fernánez, 2018; Van Dooren, De Bock, Janssens y Verschaff, 2008). La identificación del nivel de algebrización puesto en juego en las soluciones propuestas también ha sido problemática. Esta identificación fue incorrecta en aproximadamente el 55% en los problemas 1, 2 y 4, mientras que en el problema 3 este porcentaje fue del 31%.

Identificar el conocimiento involucrado en las prácticas matemáticas necesarias para resolver las situaciones-problema planteadas, permite al profesor anticipar conflictos de aprendizaje potenciales y efectivos, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) y procesos que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos apropiados de los procesos de instrucción. Esta ha sido una competencia difícil de desarrollar con nuestra intervención formativa. Entre el 50 y el 55% de los futuros maestros reconocieron tales conocimientos con un grado moderado de pertinencia, mientras que entre el 34 y el 44% de los estudiantes no los identificaron o lo hicieron incorrectamente. Hemos identificado categorías de conflictos que se refieren al reconocimiento de conceptos, proposiciones y argumentos relacionados con el razonamiento proporcional y estudiado su impacto en la muestra de futuros maestros. Al igual que en los resultados de las experiencias previas descritas, los futuros maestros de primaria generalmente consideran la regla de los tres como un concepto o confunden la proposición con la intencionalidad en lugar de una declaración sobre conceptos que necesita justificación o prueba. El objeto argumento es el menos identificado, y cuando lo es, generalmente no alude a la justificación de una proposición o procedimiento, sino a la intencionalidad o la descripción de la práctica.

Además de resolver problemas matemáticos, un profesor debe ser competente para escoger, modificar y plantear problemas con propósitos educativos específicos (Tichá y Hošpesová, 2013). Los futuros profesores que han participado en nuestra investigación, han mostrado dificultades para elaborar variantes significativas a los enunciados planteados. Crear nuevos problemas a partir de las situaciones dadas, de manera que su estrategia de resolución lleve asociado un cambio en el nivel de algebrización, ha supuesto una gran limitación. Un porcentaje relativamente alto de futuros maestros no ha respondido a esta consigna, variando entre el 19,32% para el problema 1 y el 39,09% para el problema 3. El porcentaje de enunciados apropiados también varía según los problemas: 17,05% para el problema 2 y 20,45% para el problema 3. En general, los enunciados propuestos están demasiado lejos del problema original, no son significativas o el contexto no es de proporcionalidad. Centrando la atención en las variantes de los problemas planteadas de manera pertinente, observamos que ha sido más difícil para los futuros maestros elaborar enunciados alternativos que motiven un cambio en el nivel de algebrización. Las respuestas que efectivamente implica un cambio en el nivel de algebrización, oscilan entre el 15,69% de las enunciados variantes al problema 2 y el 23,26% de variantes al problema 4 (el menos exitoso).

En esta investigación, hemos argumentado que el desarrollo de la competencia de análisis epistémico de tareas de matemáticas escolares en futuros profesores de matemáticas es relevante. Esta competencia se interpreta como la capacidad de:

- resolver los problemas por diferentes métodos,
- secuenciar la resolución del problema en prácticas elementales,
- reconocer los conceptos, proposiciones, procedimientos y la argumentación de estos objetos,
- identificar diferentes niveles de algebrización de las prácticas matemáticas, y
- elaborar nuevos problemas por variación de un enunciado dado.

Los resultados de nuestra intervención formativa han revelado la complejidad de lograr este objetivo, proporcionando información útil para el diseño de nuevos ciclos de formación. Desarrollar este tipo de competencia constituye un gran desafío para los formadores de profesores, especialmente cuando involucra el contenido de proporcionalidad y su relación con el razonamiento algebraico; por tanto, requiere una mayor dedicación e instrucción.

6.2 Análisis retrospectivo en la faceta cognitiva

Previsión de dificultades

Entre las muchas tareas que los profesores deben realizar, las actividades de diagnóstico se consideran fundamentales para preparar entornos instruccionales apropiados y crear oportunidades de aprendizaje (Osterman, 2018). Brodie (2014) sugiere que centrarse en los errores del alumno puede hacer que el docente se plantee los supuestos sobre su propio conocimiento matemático y su conocimiento del contenido pedagógico.

Como hemos señalado, varias investigaciones sobre el análisis de las dificultades de la tarea señalan esta actividad como un medio para mejorar el conocimiento y las competencias del profesor de matemáticas. Evaluar las posibles dificultades de una tarea se considera un requisito previo importante para seleccionar o elaborar tareas adecuadas que estén en consonancia con las habilidades de los estudiantes (Osterman, 2018, p. 580). Además, según sugieren Leikin y Zazkis (2007), al predecir las dificultades de los estudiantes, los profesores tienen la oportunidad de confrontar sus propias incertidumbres y cuestiones, y desarrollar su conocimiento del contenido matemático y didáctico.

En esta investigación, se pidió a los participantes que reflexionaran sobre las diferentes dificultades que los alumnos podrían tener para resolver el problema, utilizando cada estrategia que ellos mismos habían propuesto previamente. El hecho de que no haya diferencias relevantes entre las frecuencias de dificultades identificadas en los diferentes problemas, aunque existe una considerable divergencia de éxito entre los primeros tres problemas y el cuarto, sugiere que las dificultades que los futuros maestros creen que pueden tener sus alumnos no son lo que ellos encuentran en la resolución de la tarea. Hemos observado que los futuros profesores tienen muchas más dificultades para detectar objetos y procesos potencialmente conflictivos en sus soluciones que para resolver las tareas. Las dificultades más frecuentemente sugeridas por los futuros maestros están relacionadas con la comprensión de los requisitos del enunciado y con los procedimientos matemáticos (cálculos aritméticos elementales y regla de tres). Son (2013) sugirió que una comprensión limitada de los futuros maestros sobre razón y proporción y su escasa exposición a la identificación de los errores de los estudiantes los motiva a centrarse simplemente en las reglas y procedimientos a la hora de identificar la fuente de los errores de los estudiantes.

Pensamos que prever las dificultades que los alumnos pueden presentar cuando aplican los conceptos y procedimientos en una determinada estrategia de resolución de las tareas propuestas, dota a los futuros maestros de criterios para adaptar las tareas a las finalidades de aprendizaje y de seleccionar las estrategias más adecuadas al mismo. El profesor debe ser capaz de enseñar las diferentes formas de razonamiento que se pueden aplicar en situaciones de proporcionalidad y no limitarse a la aplicación de la regla de tres, de forma que sus alumnos puedan adquirir una comprensión profunda sobre las ideas fundamentales implicadas en la proporcionalidad y sus diferentes enfoques. Esto requiere que los formadores de profesores de matemáticas brinden más oportunidades para que los futuros maestros de primaria reconozcan y analicen las dificultades previsibles de los estudiantes para abordar la resolución de problemas de proporcionalidad.

Análisis de respuestas de alumnos de primaria

Desde la perspectiva del EOS, se asume que el reconocimiento por parte de los profesores del sistema de prácticas operativas y discursivas (significados), y la trama de objetos y procesos que intervienen y emergen de tales prácticas, en el análisis de las soluciones de los estudiantes a las tareas de proporcionalidad, es un aspecto clave del conocimiento didáctico-matemático de este contenido específico. Este es el primer paso para interpretar adecuadamente las soluciones de los alumnos, reconocer evidencias de razonamiento proporcional en sus respuestas e interpretar conflictos de aprendizaje efectivos cuando resuelven tareas de proporcionalidad.

Además de analizar si los futuros maestros identifican e interpretan adecuadamente las respuestas correctas o incorrectas de los alumnos, nos ha interesado analizar si discriminan objetos de carácter más o menos algebraico cuando describen las producciones de los alumnos. Los futuros maestros habían recibido formación sobre razonamiento algebraico elemental y sobre los niveles de algebrización y su conexión con tareas de proporcionalidad. Se trata de analizar si esta formación les ayuda a hacer un análisis microscópico de las respuestas de alumnos de educación primaria que vaya más allá del "la respuesta es correcta" o "es incorrecta”, identificando los conceptos y propiedades involucradas, los procedimientos empleados y los argumentos que se hacen ostensivos por medio del lenguaje.

Los futuros maestros mostraban un mayor interés por enfrentarse a las tareas resueltas por alumnos que en la resolución y análisis de tareas resueltas por ellos mismos. También reconocían sentirse más inseguros y menos formados al respecto.

Respondiendo a las cuestiones de investigación planteadas al inicio del capítulo, mencionamos que:

- En general, los futuros maestros evalúan con éxito las respuestas de los alumnos. Sin embargo, sus interpretaciones de las soluciones se basan principalmente en la descripción de los procedimientos y no en los significados (Fernández, Llinares y Valls, 2013). Además, observamos que los futuros maestros tienen dificultades para analizar y evaluar estrategias de resolución no usuales a las tareas de proporcionalidad. Las valoraciones incorrectas de las respuestas de los alumnos principalmente no identifican la estrategia incorrecta de suma constante utilizada por A1, o consideran que las respuestas de A3 o A6 son inapropiadas por ser "bastante laboriosas" o "difíciles de entender". Al evaluar las respuestas de los alumnos, los futuros maestros defienden la regla de tres como la "mejor estrategia" para emplear en tareas de proporcionalidad. En este sentido, pensamos que los maestros deben tener la competencia para reconocer estrategias de resolución no comunes y evaluar su grado de corrección. Como hemos observado, la regla de tres continúa ocupando un lugar central en la percepción que los futuros docentes tienen de la relación de proporcionalidad, lo que puede deberse al énfasis excesivo en los procedimientos rutinarios de resolución con los que frecuentemente se enseña la proporcionalidad en las escuelas (Fernández, Llinares y Valls, 2013).

- Los futuros maestros tuvieron grandes dificultades para identificar los objetos matemáticos (especialmente proposiciones y argumentos) en las soluciones elaboradas por los alumnos de primaria. Esto podría estar relacionado con la falta de conocimiento de la naturaleza de los objetos matemáticos. Este desconocimiento también podría explicar por qué los futuros maestros confunden procedimiento con concepto, o proposición y argumento con procedimiento. A este respecto, los futuros maestros mostraron serias limitaciones para reconocer argumentos distintos de los deductivos o aquellos basados en propiedades aritméticas. Creemos que se necesita mayor instrucción para que los futuros maestros conozcan las formas de argumentación y puedan interpretar el argumento utilizado explícita o implícitamente por sus alumnos. "Los profesores deben asumir que deberían ayudar a los estudiantes interpretando lo que están diciendo, llenando los huecos con lo que ellos piensan que el estudiante intenta decir" (Morris, 2007, p. 512). El conocimiento especializado de las matemáticas permite a los profesores desarrollar explicaciones matemáticas de las reglas y procedimientos utilizados, y comprender métodos inusuales de solución utilizados por los estudiantes (Hill, Ball y Schilling, 2008).
- A pesar de lo anterior, los futuros maestros reconocen correctamente los niveles de algebrización en las prácticas de los alumnos (a pesar de que estos niveles se definen en términos de los objetos, significados y procesos que emergen en la actividad matemática). La mayor dificultad surgió con las soluciones propuestas por A2 y A4: en el caso de la solución elaborada por A2, la complejidad apareció en el uso del símbolo literal, y en el caso de la solución A4, el problema consistió en percibir que no desarrolla ningún cálculo analítico con el símbolo literal. Esto puede deberse a que los futuros maestros decidieron el grado algebraico de las prácticas de los alumnos en base a la estrategia seguida y el hecho de que no han logrado correctamente evaluar el papel de los símbolos literales y el cálculo analítico en la práctica algebraica. Esto sugiere la necesidad de profundizar en el carácter algebraico de la actividad matemática, y en discriminar las actividades aritméticas de las algebraicas, considerando los tipos de objetos, representaciones, procesos de generalización y cálculo analítico.

Creemos que nuestros resultados proporcionan información valiosa adicional para el diseño de materiales en programas de educación docente que consideran las características del aprendizaje de los futuros docentes y su comprensión del razonamiento proporcional. En particular, el tipo de instrumento utilizado en esta investigación podría adaptarse para diseñar material didáctico centrado en el desarrollo de las competencias de los futuros docentes para analizar el trabajo escrito de los estudiantes. Para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes, los docentes deben conectar los objetos matemáticos identificados en las estrategias de resolución con la comprensión de los conceptos matemáticos, para lo cual necesitan un conocimiento suficiente en el campo de las matemáticas (Fernández, LLinares y Valls, 2013; Jacobs, et al., 2010).

Una característica de nuestro instrumento de investigación es que está elaborado a partir de la investigación basada en el modelo de niveles de algebrización. Los futuros maestros deben interpretar las respuestas escritas de los estudiantes de primaria, identificando los objetos matemáticos (lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) involucrados en las soluciones, y determinando en relación a estos objetos (no sólo a las estrategias particulares empleadas) cuál es el carácter algebraico de las prácticas matemáticas desarrolladas. La identificación de los niveles de algebrización de la actividad llevada a cabo por los alumnos de primaria permite percatarse de que el carácter algebraico no corresponde a la tarea en sí, sino a la actividad matemática que se realiza.

En este sentido, nuestra investigación podría considerarse como un enfoque alternativo para el desarrollo de la competencia “mirada profesional” de los maestros. Como señala Llinares (2013), cuando los futuros profesores utilizan elementos matemáticos cada vez más explícitos y características del desarrollo de la comprensión matemática para describir e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes, aumentan su conciencia profesional. Sin embargo, mencionamos algunos aspectos que deberían tenerse en cuenta. En primer lugar, los futuros maestros tienen dificultades para reconocer y diferenciar los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, argumentos) que surgen de las soluciones de los alumnos. Identificar los conceptos, procesos y argumentos matemáticos implícitos en la resolución de tareas de proporcionalidad, facilita a los futuros maestros interpretar las soluciones de los alumnos y reconocer evidencias de razonamiento proporcional en sus respuestas. No obstante, los resultados nos permiten considerar que este tipo de actividades son un desafío para los futuros maestros. En segundo lugar, es necesario una mayor investigación utilizando diferentes tipos de situaciones-problema para validar este enfoque, dado que las diferencias en la forma en que los futuros profesores interpretan las distintas respuestas de los estudiantes podrían estar relacionadas con las características del problema utilizado y el tipo de estrategia utilizada (estrategia de construcción progresiva que no es una estrategia común, regla de tres, el uso de razones). En tercer lugar, en el contexto de los programas de formación de los profesores de matemáticas, se debería complementar la tarea de evaluación con entrevistas a los estudiantes para maestro. Concluimos que una mejora de los resultados requiere un aumento del tiempo asignado a la intervención formativa (esto permitiría a los futuros maestros adquirir mayor familiaridad con las herramientas teórico-metodológicas). Esto también permitiría ampliar el número y la variedad de situaciones-problemas propuestos, sus soluciones y discusión.

CAPÍTULO 10.
DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE ANÁLISIS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA: EL CASO DE VÍDEOS EDUCATIVOS SOBRE PROPORCIONALIDAD

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., y Godino, J. D. (2020) La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria. *Revista Española de Pedagogía*, *275*, 27-45, DOI: https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07

1. Introducción

El uso de vídeos educativos disponibles en YouTube y otras plataformas ha crecido de forma desorbitada en los últimos años, convirtiéndose en un prometedor recurso de aprendizaje para los estudiantes y el público en general (Azer, AlGrain, AlKhelaif, y AlEshaiwi, 2013).

Estos recursos educativos y los modelos pedagógicos que los usan, como la "clase invertida" (Bergmann y Sams, 2012), deben ser un tema de investigación educativa ya que no está claro cómo es posible lograr un aprendizaje significativo mediante el visionado de clases grabadas. De hecho, diversos investigadores discuten el papel que el uso de YouTube y otros medios sociales pueden jugar en la educación formal, analizando cómo se organizan los recursos online y cómo pueden ser insertados como herramientas informales en contextos educativos precisos (Borba, Askar, Engelbrecht, Gadanidis, Llinares y Aguilar, 2016; Dabbagh y Kitsantas, 2012; Duffy, 2008; Portugal, Arruda y Passos, 2018; Ramírez, 2010). Se considera necesario que desde la didáctica se indague sobre la adecuación de los recursos educativos en línea asegurando que la tecnología esté en concordancia con los objetivos de aprendizaje (Turney, Robinson, Lee y Soutar, 2009, p. 80).

Las investigaciones en didáctica de las matemáticas sobre la utilización de vídeos educativos señalan la importancia de que los propios docentes valoren y recomienden los vídeos idóneos para su alumnado (Beltrán-Pellicer, Giacomone y Burgos, 2018;

Ruiz-Reyes, Contreras, Arteaga y Oviedo, 2017; Santos, 2018), dado que algunos de ellos muestran procedimientos formalmente incorrectos, no todos indican el nivel educativo al que se dirigen, o los significados puestos en juego pueden no ser pertinentes con lo que se está tratando en clase.

El modelo CCDM elaborado en el marco del EOS resalta la importancia de diseñar e implementar recursos formativos que promuevan la competencia de análisis de la idoneidad didáctica por parte de los profesores. El uso de la idoneidad didáctica permite al profesor hacer una reflexión sistemática sobre su propia práctica (Aroza, Godino y Beltrán-Pellicer, 2016; Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone, 2018; Posadas y Godino, 2017), pero también se puede aplicar para analizar aspectos parciales de los procesos instruccionales, como el uso de recursos tecnológicos. Consideramos que sería deseable que los profesores conozcan la herramienta idoneidad didáctica y adquieran competencia para su uso en el análisis crítico de los recursos educativos, particularmente del uso de vídeos disponibles en internet.

De manera específica, apoyándonos en las herramientas teórico-metodológicas del EOS, en Beltrán-Pellicer, Giacomone y Burgos (2018) analizamos el grado de idoneidad epistémica de una selección de los vídeos educativos más vistos por los usuarios en YouTube™ en relación con problemas de reparto proporcional. Encontramos, por un lado, una gran diversidad de enfoques y métodos de resolución, lo que puede interferir con el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula si estos vídeos no han sido previamente seleccionados o grabados por el docente. Por otro lado, la idoneidad epistémica de la muestra de vídeos analizados era muy desigual, con vídeos con errores e imprecisiones, además de que muchos de ellos ofrecían un tratamiento poco representativo o articulado del contenido matemático. Finalmente, observamos que los vídeos con métricas de mayor popularidad no coinciden con los más idóneos. Este trabajo constituye el principal antecedente de nuestra investigación actual.

Dado que tanto los profesores en formación inicial como en servicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; Ben-Chaim, et al., 2012; Berk, et al., 2009; Hilton y Hilton, 2018) y el uso de vídeos educativos de internet como recurso es cada vez más extendido entre los docentes, se hace preciso que la formación de profesores tenga en cuenta el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, que les permita analizar la pertinencia del uso de estos vídeos teniendo en cuenta los diversos aspectos implicados con relación a este tema.

Dentro de esta problemática el objetivo de este capítulo es informar sobre el diseño, implementación y evaluación de una acción formativa con futuros maestros de educación primaria, focalizada en el desarrollo de conocimientos y competencia para el análisis de la idoneidad epistémica de vídeos educativos sobre proporcionalidad disponibles en internet. El diseño del proceso formativo experimentado se describe en la sección 2. En la sección 3 se incluye el análisis a priori del vídeo sobre proporcionalidad que es usado como instrumento de evaluación de las competencias logradas por los futuros profesores. La sección 4 muestra detalladamente los resultados de la experiencia, analizando de manera cualitativa y cuantitativa los informes elaborados de manera individual por los futuros profesores. La última sección incluye la síntesis, implicaciones y limitaciones de la investigación.

2. Diseño del proceso formativo

La experiencia formativa se realizó en el marco de la asignatura de Diseño y Desarrollo del currículum en Educación Primaria durante el año lectivo 2018-2019, con 93 estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria.

Durante los estudios de grado, los futuros profesores han recibido formación específica sobre aspectos epistémicos (contenido matemático), cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades), instruccionales y curriculares, de forma que en el momento en que se desarrolla la experiencia, los estudiantes deben ser capaces de poner en práctica el conocimiento adquirido para analizar, diseñar, fundamentar procesos de enseñanza-aprendizaje de acuerdo a unos contenidos específicos (en nuestro caso la proporcionalidad).

Además, de forma previa al desarrollo de esta investigación, y de acuerdo con el modelo CCDM asumido, se habían llevado a cabo talleres de formación con el grupo de estudiantes focalizados en el desarrollo de la competencia de análisis de significados globales (basado en la identificación de situaciones-problemas y prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en su resolución), y el análisis ontosemiótico de las prácticas (descripción de la trama de objetos y procesos implicados en las prácticas) que se ponen en juego en la actividad matemática de solución de problemas que involucran la proporcionalidad.

En la primera sesión se desarrolló un taller de dos horas de duración en el que se presentaron las características de la Teoría de Idoneidad Didáctica y cómo se articulan entre sí las distintas dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica de un proceso de estudio determinado. Se pretende involucrar a los futuros maestros en una reflexión sobre la necesidad de disponer de un sistema de indicadores específicos que permitan valorar la práctica docente de manera sistemática.
En la siguiente sesión, también de dos horas de duración, los futuros maestros debían trabajar en equipos para analizar la idoneidad epistémica de vídeos educativos en línea, sobre proporcionalidad. El trabajo inicial en grupo permite a los estudiantes contrastar, discutir y enriquecer sus propuestas de valoración de idoneidad epistémica de distintos vídeos educativos en relación con la proporcionalidad.

En la tercera fase, los estudiantes realizaron de manera individual las tareas que se describen en la siguiente sección como instrumento de evaluación final y cuyos resultados analizamos en este trabajo.

3. Análisis *a priori* de la idoneidad epistémica del vídeo

En este apartado realizamos el análisis de la idoneidad epistémica, esto es, del conocimiento matemático que se pone en juego en el vídeo, que servirá de referencia para interpretar las respuestas dadas por los estudiantes a la valoración de la idoneidad del vídeo educativo. El análisis y valoración *a priori* fue realizada de forma independiente por los investigadores y confrontada después para decidir una valoración común.

El vídeo educativo que se analiza[6] trata el tema de la proporcionalidad directa desde el punto de vista aritmético presentando las nociones de razón y proporción (Ben-Chaim,

[6] El vídeo del canal *Clasemáticas* puede verse en https://www.youtube.com/watch?v=o1Mu-lkgv-o

et al., 2012). Se trata de que los futuros maestros vean detenidamente el vídeo y decidan, de manera crítica y siguiendo los componentes e indicadores de idoneidad epistémica (Godino et al., 2007, Godino, 2013), su grado de idoneidad.

En general, las situaciones-problema propuestas en el vídeo aparecen contextualizadas y las ideas matemáticas están conectadas. Se proponen diversas maneras para abordar los problemas, pero consideramos que la muestra de dichos problemas no es suficientemente representativa ni articulada. Los métodos de solución que propone se aplican únicamente a problemas de valor perdido, en los que a priori se asume la condición de regularidad, y no se consideran, por ejemplo, problemas de comparación de razones. El vídeo cuenta con una gran riqueza de registros y representaciones lingüísticas: registros natural (tanto oral como escrito), simbólico (numérico o algebraico), tabular y gráfico.

Por otro lado, hemos identificado algunos errores e imprecisiones en la presentación de las reglas (definiciones y proposiciones) y los argumentos:

- Error de expresión en el tratamiento de las simplificaciones de las fracciones. Para simplificar se tachan los números que aparecen en el numerador y denominador dejando como superíndice los factores que van quedando al cancelar términos.

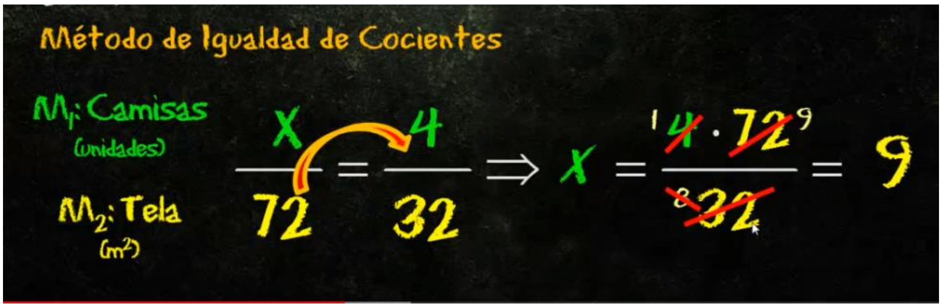


Figura 10.1. Captura de pantalla en el minuto 7.
Fuente: Vídeo del canal *Clasemáticas* que se analiza

- Error en la definición de razón y proporción.

  (1:00) *La razón, matemáticamente hablando quiere decir, cociente. La proporción, la razón, el cociente entre esas dos magnitudes siempre es el mismo.*

Aquí observamos un uso incorrecto de los conceptos de razón y proporción. Una razón no siempre es un cociente y no es lo mismo razón que proporción, confusión encontrada con alguna frecuencia en la práctica de la enseñanza.

- La regla de “a doble, doble” no tiene por qué denotar positivamente una relación de proporcionalidad directa.

> (3:20) Presenta un “truco” para saber si dos magnitudes son directamente proporcionales: *Para saber si dos magnitudes guardan proporción directa basta comprobar que se cumple que al doble de una le corresponde el doble de la otra, al triple el triple, ...*

Esta es una condición necesaria pero no suficiente para que dos magnitudes sean directamente proporcionales. La proporcionalidad de magnitudes es una función lineal establecida entre las cantidades de dichas magnitudes.

- Cuando se justifica la relación de proporcionalidad directa se basa en la relación, al doble de una magnitud corresponde el doble de la otra.

> (4:30) A continuación indica a los alumnos la pregunta que deben formularse después de localizar las magnitudes *¿Al doble de camisas necesitaré el doble de tela?*
>
> (4:43) *“Si la respuesta es sí, que naturalmente en este vídeo va a ser sí, porque si no, nos estaríamos dedicando a otro tipo de proporcionalidad* […] *estamos ante un problema de proporción directa.”*

Esto es incorrecto. La respuesta a una pregunta como la que formula puede ser no y que no aparezca involucrada ninguna otra situación de proporcionalidad.

- No se argumentan las operaciones en una proporción ni el porqué de la multiplicación en cruz.

Consideramos que el grado de idoneidad respecto a las relaciones entre objetos, en una escala ordinal de baja, media, alta, es media, ya que no todas las proposiciones y procedimientos tienen un argumento asociado. Además, los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas aparecen identificados en algunas ocasiones, pero no siempre, por lo que también en este aspecto el grado de idoneidad es media.

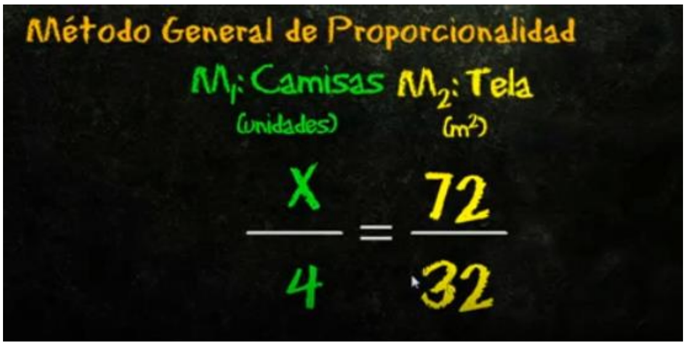


Figura 10.2. Captura de pantalla en el minuto 8:15, método general.
Fuente: Vídeo del canal *Clasemáticas* que se analiza

(8:15) *Es decir, está la igualdad de cocientes entre las magnitudes, dentro de ellas mismas o comparándola con la otra magnitud, luego este cociente también es cierto.*

En el primer método que presenta, el de "igualdad de cocientes", utiliza razones externas. Aquí, en el que el autor llama "método general de proporcionalidad", emplea razones internas, sin argumentar apropiadamente la relación entre ambas proporciones. Además, emplea el término proporción en lugar de razón para referirse a las fracciones que aparecen en la pantalla.

El último procedimiento para resolver problemas de proporcionalidad que presenta el autor del vídeo es la regla de tres:

(11:35) *Las magnitudes se colocan en forma de columna "ponemos x es a 72 como 4 camisas es a 32".*

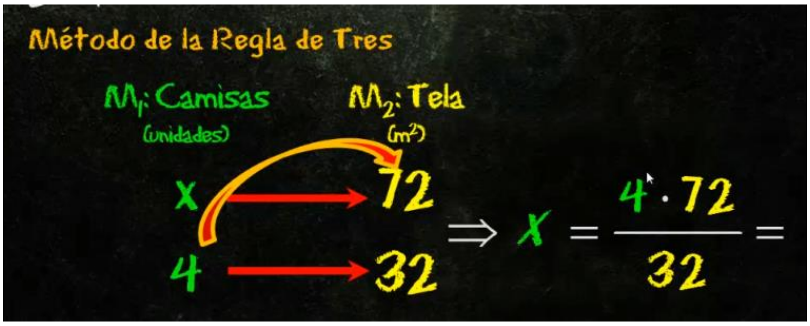


Figura 10. 3. Método de la regla de tres.
Fuente: Vídeo del canal *Clasemáticas* que se analiza

(11:47) *Y esto en realidad, si pudierais echar el vídeo hacia atrás es el método general, lo que pasa es que no sé por qué os encanta esto de poner las flechas. El método general tiene una argumentación matemática y éste no tanta.*

Relaciona el método de regla de tres, que luego resuelve por multiplicación en cruz con el método general. Se refiere a una "regla de tres degenerada", es decir, no plantea la ecuación proporcional, distinguiendo ese como otro método. Por lo tanto, lo que menciona como regla de tres es a la disposición diagramática (mediante flechas) acompañada de la multiplicación en cruz, que no aparece justificada en el vídeo.

Tabla 10.1. Valoración de la idoneidad epistémica según componentes

Componente	Puntuación asignada al vídeo
Situaciones-problema	1
Lenguajes	2
Reglas	1
Argumentos	1
Relaciones entre objetos	1
Articulación de significados	1
Puntuación final	7

En función de estos análisis se valora cuantitativamente el grado de idoneidad epistémica del vídeo en cada uno de los seis componentes, puntuándose cada indicador según su contribución a la idoneidad sea baja, media o alta (0, 1 o 2 puntos, respectivamente). La puntuación total máxima será, por tanto, de 12. En la tabla 10.1 hemos recogido las puntuaciones asignadas por el equipo investigador.

4. Resultados

Para la segunda sesión de trabajo, se propuso a los estudiantes que, en primer lugar, vieran en casa tres vídeos[7] sobre repartos directamente proporcionales con distinto grado de idoneidad. De manera individual debían decidir el mayor o menor grado de idoneidad de los mismos así como su nivel de algebrización, teniendo en cuenta el tipo de solución desarrollada. Después, en clase, debían discutir con el grupo de trabajo sus valoraciones, elaborando después una propuesta grupal sobre el grado de idoneidad de los distintos vídeos.

[7] Los vídeos que se propusieron pueden verse en

https://www.youtube.com/watch?v=0Z5DejetHR8

https://www.youtube.com/watch?v=v8KN44iNPls

https://www.youtube.com/watch?v=1uAbIb-McLo

Las consignas dadas a los estudiantes para analizar los vídeos son las mismas que se plantean en la tarea final. Es decir, se tienen en cuenta: a) la variedad de situaciones-problemas propuestos; b) presencia de distintos registros de representación; c) claridad y corrección de las definiciones, proposiciones y procedimientos; d) argumentación de las proposiciones y procedimientos.

Como resultado de esta sesión, observamos que los futuros maestros pasaban por alto los errores en definiciones, proposiciones o procedimientos presentes en los vídeos y que en la puesta en común en su grupo de trabajo resultaba difícil consensuar el grado de idoneidad de los distintos vídeos. Discutir las propuestas individuales les llevó en muchos casos a modificar su análisis a priori, identificando nuevos elementos en el análisis que habían pasado desapercibidos.

En esta sección analizamos las respuestas dadas por los estudiantes a la tarea de evaluación final (tercera sesión de trabajo) y que reflejan por consiguiente los aprendizajes logrados por dichos estudiantes. Seguidamente, se analizan las respuestas dadas a la consigna de valoración cuantitativa en cada uno de los seis componentes de la idoneidad, así como la adecuación global del vídeo. En la tabla 10.2 se indican las frecuencias y porcentajes de las respuestas dadas sobre las características de las situaciones-problemas presentadas en el vídeo.

Tabla 10.2. Variedad de situaciones - problemas propuestos (n=93)

Características de las situaciones	Frecuencias (%)
Se presenta una muestra representativa y articulada de problemas	83 (89.25)
Las situaciones aparecen contextualizadas	83 (89.25)
Las ideas matemáticas están conectadas	87 (93.55)
Se proponen diversas maneras de abordar los problemas	89 (95.70)

Observamos que de forma mayoritaria los estudiantes reconocieron adecuadamente que en el vídeo educativo bajo análisis las situaciones aparecen contextualizadas, las ideas están conectadas y se incluyen diversas formas de abordar los problemas. También en su mayoría (89,25%) aceptaron que se presenta una muestra representativa y articulada de problemas.

Con relación a la presencia de distintas representaciones y registros de lenguaje, los estudiantes no tienen dificultad para identificar el registro natural y el registro simbólico. Sin embargo, identifican en menor grado el tabular y el gráfico. Otros estudiantes, en menor medida, identifican animación y otros tipos distintos (Tabla 10.3).

Tabla 10.3. Identificación de representaciones lingüísticas(n=93)

Tipo de lenguaje	Frecuencias (%)
Natural (oral)	92 (98,9)
Natural (escrito)	93 (100,0)
Simbólico (numérico)	89 (95,7)
Simbólico (algebraico)	83 (89,2)
Tabular	74 (79,6)
Gráfico	28 (30,1)
Animación	49 (52,7)
Otros (icónico, multimedia, diagramático, …)	10 (10,8)

La mayoría de los futuros maestros tienen dificultades para localizar los errores o imprecisiones en las definiciones, proposiciones o procedimientos, así como en las argumentaciones dadas a las transformaciones, o cuando se justifica la relación de proporcionalidad directa en las situaciones planteadas (tabla 10.4).

Tabla 10.4. Claridad y corrección de definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos

Errores e imprecisiones en las reglas y en los argumentos		Frecuencias (%)			
		No indica	Dice explícitamente que no hay	Sí pero no especifica cual	Sí y describe cual
Reglas	Errores de tratamiento aritmético-algebraico	63 (67,7)	21 (22,6)	2 (2,2)	7 (7,5)
	Errores en definiciones	51 (54,8)	22 (23,7)	2 (2,2)	18 (19,4)
	Errores en proposiciones o procedimientos	51 (54,8)	21(22,6)	5 (5,4)	16 (17,2)
Argumentos	Error o imprecisión al argumentar una relación de proporcionalidad.	45 (48,4)	20 (21,5)	6 (6,5)	22 (23,7)
	Error o imprecisión al argumentar una transformación aritmética-algebraica	54 (58,1)	20 (21,5)	4 (4,3)	15 (16,1)
	Otros errores o imprecisiones	52 (55,9)	20 (21,5)	2 (2,2)	19 (20,4)

Cuando los futuros maestros identifican errores de tratamiento aritmético o algebraico, algunos mencionan que el autor del vídeo no explica algunos de los símbolos usados, entre ellos los subíndices, o que simplificar los resultados de las operaciones puede confundir a los alumnos. Con respecto a errores o imprecisiones en las definiciones que son reconocidos por los estudiantes, encontramos las siguientes categorías de respuestas:

- Error en la definición de razón. Esta es la categoría con mayor número de respuestas que identifican conflictos en las definiciones. Por ejemplo, E50 menciona:

  > *Razón: lo define como la proporción del cociente entre ambas magnitudes. Puede crear confusión, una alternativa seria "vínculo entre dos magnitudes que se pueden comparar entre sí"*

- Imprecisión en la definición de proporcionalidad directa.
- Definiciones confusas o no adaptadas al nivel de primaria.
- Además de estas categorías, algunos estudiantes incluyen como errores en las definiciones, apreciaciones no pertinentes con relación a procedimientos o modos de expresión. Así, E84 refiere:

  > *Puede causar confusión los nombres de los métodos empleados para realizar la proporción ya que en distintas partes se pueden utilizar diferentes nombres para dichos métodos.*

Los futuros maestros muestran dificultades para asignar los errores en la categoría adecuada y para hacer una descripción de forma pertinente. Hacen referencia a "explicaciones confusas" en errores relacionados con las definiciones. Por ejemplo, E54 señala como error en definiciones:

> *En la explicación del método de proporcionalidad (en el ejercicio de las camisas) despeja "x" como si fuese una ecuación. Debería haber sacado la proporción que existe entre las camisas y los metros de tela (cuantas veces es mayor los metros de tela que el número de camisas) y ya dividir entre los metros de tela para sacar la "x".*

y después menciona en errores en proposiciones/procedimientos:

> *En procedimientos pondría el mismo error que en "errores en las definiciones".*

La mayoría de los estudiantes que identifican conflictos en procedimientos, hacen referencia a la regla de tres:

Tachar números y despejar la x en la regla de tres de forma confusa, escribiendo números pequeños al lado de los grandes que puede dar la sensación que son potencias (E52)

Otros estudiantes identifican como errores de procedimiento:

En el método de igualdad de cocientes, situar la incógnita x en el numerador, siendo más fácil para el alumno colocarlo en el denominador de la fracción izquierda (E26)

o consideran que las explicaciones que acompañan a los procedimientos son complejas o insuficientes.

Solo un estudiante (E83) hace referencia al error en la proposición: *Para saber si dos magnitudes guardan proporción directa basta comprobar que se cumple que al doble de una le corresponde el doble de la otra, al triple el triple, …*

Ningún estudiante menciona como imprecisión que la argumentación de la relación de proporcionalidad directa se basa únicamente en la propiedad "al doble de una magnitud corresponde el doble de la otra". En esta categoría la mayoría de los estudiantes que incluyen algún error lo hacen de forma inapropiada, bien por que indican "explicación confusa", "argumentaciones escasas", bien porque hacen referencia a imprecisiones en la argumentación de transformaciones y no a la relación de proporcionalidad.

Solo seis estudiantes hacen alguna referencia a la falta de argumentación de las operaciones. Por ejemplo, E67 apunta que:

El único inconveniente que le veo a este vídeo es que a la hora de simplificar no argumenta este proceso, es cierto que el vídeo no va sobre simplificación pero en la resolución de problemas puede hacer que los alumnos se pierdan.

Con relación a otros errores, los futuros maestros señalan fundamentalmente:

- Errores o imprecisiones en la expresión (oral) o lenguaje empleado.
- Presentación no adecuada para alumnos de educación primaria.
- Dificultades para entender las diferencias entre los métodos de resolución del problema.
- Argumentaciones insuficientes para las transformaciones aritméticas.

Respecto al "truco" que presenta el autor del vídeo, E68 incluye como error lo siguiente:

Truco: “para saber si dos magnitudes guardan proporcionalidad directa, basta comprobar que se cumpla que al doble de una le corresponda el doble de la otra. Aunque es una forma rápida de ver si hay proporcionalidad directa o no, parece impreciso al hacer solo mención al doble. Habría que mencionar a “mitad, mitad” a “suma de, suma de” a “diferencia de, diferencia de”, es decir, aplicado a las cuatro operaciones.

En la tabla 10.5 incluimos las frecuencias de errores detectados por los futuros maestros.

Tabla 10. 5. Errores identificados por los estudiantes.

Errores e imprecisiones en las reglas y en los argumentos detectadas por los futuros maestros		Frecuencias				
		Respuesta pertinente	Respuesta no pertinente			Total (%)
			Es error pero no en la categoría señalada	Descripción no concluyente o subjetiva	No es un error	
En reglas	De tratamiento aritmético-algebraico	1	1	1	4	7 (7,5)
	Definiciones	7	3	5	3	18 (19,4)
	Proposiciones-procedimientos	4	3	5	4	16 (17,2)
En argumentos	Al argumentar la relación de proporcionalidad	3	8	4	7	22 (23,7)
	Al argumentar transformación	5	3	3	4	15 (16,1)
	Otros	5	2	7	5	19 (20,4)

Distinguimos aquellas respuestas que mencionan de forma algo pertinente un error en la categoría donde se incluye, de aquellas que no lo son porque no se incluye en la categoría indicada, porque la descripción del error no es concluyente o es subjetiva, o porque lo que incluyen no se puede considerar error o imprecisión. En general, los porcentajes de estudiantes que han reconocido errores e imprecisiones han sido bajos. El más alto ha sido el referido a la justificación de la relación de proporcionalidad, mencionado por 22 estudiantes (23,7%). En el apartado d) de la consigna se pide que identifiquen en el vídeo si los objetos matemáticos y los significados se presentan de manera relacionada. Salvo dos estudiantes que no respondieron a este apartado, el 73,12% de los futuros maestros consideran que los objetos matemáticos se encuentran relacionados de forma pertinente y que, por tanto, el grado de idoneidad en este aspecto es alta (Tabla 10.6). Por otro lado, el 63,44% afirma que siempre están articulados los diversos significados de los objetos implicados.

Tabla 10. 6. Relaciones entre objetos y significados

Relaciones entre los objetos matemáticos		Idoneidad	Frecuencia (%)
Relaciones entre objetos	Todas las proposiciones y procedimientos tienen argumento asociado	Alta	68 (73,1)
	Algunas proposiciones y procedimientos tienen argumento asociado	Media	23 (24,7)
	Ninguna de las proposiciones y procedimientos tienen argumento asociado	Baja	0 (0,0)
Se identifican y articulan los significados de los objetos que intervienen	Siempre	Alta	59 (63,4)
	A veces	Media	30 (32,3)
	Nunca	Baja	2 (2,2)

En función de los resultados obtenidos en los análisis previos (variedad y representatividad de las situaciones-problemas propuestas, riqueza de sistemas de representación, claridad y corrección de reglas y argumentos, conexión entre objetos y significados) los futuros maestros debían valorar cuantitativamente el grado de idoneidad epistémica del vídeo. Debían asignar la puntuación 0, 1, 2, si consideraban la idoneidad como, baja, media o alta, respectivamente.

Se observa en la tabla 10.7 que más de la mitad de los estudiantes asignaron el grado máximo de pertinencia en cada uno de los componentes de la idoneidad epistémica. El aspecto mejor valorado es la relación entre los objetos (el 72 % indicaron aquí idoneidad alta) seguido de la corrección de las reglas (61,3 %).

Tabla 10.7. Frecuencias (%) de valoración de la idoneidad epistémica según componentes

Componentes	Valoración del vídeo		
	0	1	2
Situaciones-problema	1 (1,1)	40 (43,0)	52 (52,9)
Lenguajes	3 (3,2)	37 (39,8)	53 (57,0)
Reglas	3 (3,2)	33 (35,5)	57 (61,3)
Argumentos	1 (1,1)	42 (45,2)	50 (53,8)
Relaciones entre objetos	4 (4,3)	22 (23,7)	67 (72,0)
Articulación de significados	2 (2,2)	37 (39,8)	54 (58,1)

Observemos que la puntuación máxima que se puede asignar al vídeo es de 12 puntos. La puntuación mínima asignada es de 4 puntos (un estudiante) y la media se sitúa en 9,5 puntos. La puntuación más frecuente (en el 29 % de los casos) es de 10 puntos. Además 9 estudiantes (10 %) asignaron la máxima puntuación al vídeo.

Tabla 10.8. Argumentos para dar una valoración positiva (n=93)

Indicador	Frecuencia (%)
Presentación atractiva	8 (8,6)
Lenguaje adecuado	43 (46,2)
Lenguaje variado	21 (22,6)
Riqueza de ejemplos (muestra representativa y articulada de situaciones problema)	26 (28,0)
Situaciones-contexto cotidianas/conexión con vida real	27 (29,0)
Argumentos adecuados/explicaciones claras	38 (40,9)
Argumentos suficientes	17 (18,3)
Procedimientos/métodos diversos y adecuados	23 (24,7)
Definiciones coherentes/adecuadas	19 (20,4)
Significados articulados	17 (18,3)
Favorece razonamientos o que construyan, perfeccionen y usen sus propias representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas	14 (15,1)
Relaciones entre objetos (proposiciones con argumento asociado; métodos relacionados) apropiadas	15 (16,1)
Ningún error en reglas ni argumentos	7 (7,5)

Los futuros maestros debían justificar los motivos que les habían llevado a asignar sus valoraciones de la idoneidad epistémica. El análisis de sus respuestas nos ha permitido encontrar las categorías que mostramos en las tablas 10.8 y 10.9, en las que distinguimos argumentos para una valoración positiva y otros para una valoración negativa.

Los futuros maestros valoran de forma positiva el lenguaje empleado y que los argumentos sean adecuados o las explicaciones claras. Por ejemplo, E14 valora con 2 puntos la componente lenguajes indicando:

> *El lenguaje utilizado es variado: natural (oral y escrito), simbólico (numérico y algebraico), tabular (a través de tablas), animación (un niño pensando y presenta una pregunta, gif con movimiento en el resultado del problema) y con flechas estableciendo relaciones de proporcionalidad. […] Además, el nivel del lenguaje es claro y sencillo adecuado al nivel de Educación Primaria al que va dirigido.*

E22 asigna 2 puntos a la componente argumentos:

> *No he considerado ningún error reseñable referido a los argumentos y a los procedimientos utilizados en el vídeo. En todo momento, las operaciones aritméticas se acompañan de una explicación y justificación. Tanto argumentos como procedimientos están claros.*

Sin embargo, estos componentes son también los utilizados con mayor frecuencia para dar una valoración negativa, aludiendo tanto a errores de expresión y lenguaje como a argumentos poco claros o confusos (Tabla 10.9). E38 señala:

> *Algunas veces utiliza un lenguaje un poco técnico para un niño de primaria, los argumentos los veo bien pero podrían ser un poco más claros en algunos de los 4 métodos que explica de la proporcionalidad directa.*

Tabla 10.9. Argumentos para dar una valoración negativa (n=93)

Indicador	Frecuencia (%)
Situaciones-problema no adecuadas a primaria	3 (3,2)
Errores de expresión/lenguaje	11 (11,8)
Lenguaje no adaptado al nivel de primaria	11 (11,8)
Representaciones pobres (poco conectadas, ausencia de lenguaje gráfico o poco visual)	3 (3,2)
Dificultad para distinguir métodos	4 (4,3)
Argumentos excesivos	3 (3,2)
Argumentos no claros, confusos o rápidos	19 (20,4)
Proposiciones sin argumento asociado	1 (1,1)
Definiciones incorrectas o insuficientes	2 (2,2)
Definiciones no adecuadas al nivel de primaria	4 (4,3)
Procedimientos no adecuados al nivel de primaria	3 (3,2)
Procedimientos no claros o rápidos	4 (4,3)
Errores en procedimientos (simplificación en regla de 3)	5 (5,4)
Argumentos no adaptados al nivel de primaria	4 (4,3)
Significados no articulados	12 (12,9)
Faltan situaciones de generación de significados o representaciones propias	3 (3,2)
El autor incluye ideas fuera de contexto o que pueden confundir (por ejemplo, proporcionalidad inversa/compuesta)	3 (3,2)
Situaciones poco contextualizadas o solo en contexto matemático	4 (4,3)

Todo el análisis debe llevar a los futuros maestros a decidir si les parece adecuado el vídeo argumentando su decisión. En este caso, hemos clasificado las respuestas de los estudiantes en “sí”, “sí, pero...” cuando presentan algún tipo de objeción y “no”. La tabla 10.10 incluye las frecuencias y porcentajes de cada una de estas opciones.

Tabla 10.10. Adecuación del vídeo en la reflexión final (n=93)

¿Te parece adecuado este vídeo?	Frecuencia (%)
Sí	48 (51,61)
Sí pero…	38 (40,86)
No	7 (7,53)

El 51,61% de los futuros maestros consideran adecuado el vídeo siendo lo más valorado por estos la presencia de varias formas de resolver los problemas y el grado de adecuación de las explicaciones. La tabla 10.11 resume los distintos argumentos empleados por los estudiantes para valorar como adecuado el vídeo.

Tabla 10.11. Argumentos cuando consideran totalmente adecuado el vídeo (n=48)

Indicador	Frecuencia (%)
Varias formas de resolver	46 (95,8)
Riqueza de ejemplos	22 (45,8)
Explicación adecuada y detallada	42 (87,5)
Simplifica las definiciones/ presenta la información más relevante y representativa	13 (27,1)
Representación/lenguaje adecuado	26 (54,2)
Utilidad/motivador	7 (14,6)
Incluye trucos/consejos	12 (25,0)
Contexto cercano	10 (10,8)
Lleva a reflexionar sobre el método más adecuado	6 (12,5)
No hay errores	7 (14,6)
Duración adecuada	2 (4,2)
Presentación atractiva, tono informal	5 (10,4)

El 40,86 % de los futuros maestros no consideran del todo adecuado el vídeo (Tabla 10.10). Señalan como inconvenientes la extensión, el lenguaje o algunos de los métodos empleados como poco adecuados para primaria, o que puede ser pesado para los alumnos.

Finalmente, solo el 7,5 % de los estudiantes no considera adecuado el vídeo. Aducen que las definiciones son poco o nada precisas y las explicaciones son inadecuadas o confusas para primaria.

Tabla 10.12. Argumentos que indican inconvenientes (“sí pero…”) (n=38)

Indicador	Frecuencia (%)
Lenguaje no adecuado a primaria	11 (28,9)
No detallan procedimientos aritméticos	4 (10,5)
Duración excesiva	6 (15,8)
Llega a aburrir o desconcentrar, falta animación o recursos visuales	19 (50)
Provoca confusión en los alumnos	6 (15,8)
Falta variedad de contextos	3 (7,9)
Explicaciones no acertadas	5 (13,2)
Largo y denso para primaria	11 (28,9)
No todos las situaciones/conceptos/métodos son adecuados a primaria	12 (31,6)
No toma en cuenta conocimientos previos o dificultades de aprendizaje	4 (10,5)
Presencia de errores	7 (18,4)

El análisis de las respuestas de los estudiantes nos ha permitido detectar algunos conflictos con relación a la identificación de componentes y descriptores en el análisis de la idoneidad epistémica, fundamentalmente en lo que a reglas y articulación de significados se refiere. Por ejemplo, E32 identifica reglas con formas de resolver un problema y afirma:

> *las reglas las he valorado con un dos porque si es verdad que muestra gran variedad de formas de resolver el problema.*

Similarmente, E56 señala que

> *en cuanto a las reglas he establecido una puntuación de 2 (alta) de evaluación de idoneidad, puesto que estoy de acuerdo en la forma en que realiza las operaciones en cada una de las resoluciones del problema y porque no creo que cometa ningún error al llevarlas a cabo.*

Algunos estudiantes consideran que los significados están articulados cuando se utilizan varios métodos o se justifica lo que se está haciendo en el vídeo. Por ejemplo, E41 indica

> *la articulación de significados considero que tiene un nivel alto, debido que utiliza varios métodos para la resolución de los problemas.*

E30 incluye

> *para la articulación de significados la idoneidad es alta ya que explica en todo momento lo que significa cada cosa que está realizando.*

5. Síntesis, implicaciones y limitaciones

El objetivo de este trabajo ha sido el diseño, implementación y evaluación de una acción formativa con futuros maestros centrada en el desarrollo de conocimientos y competencia para el análisis de la idoneidad epistémica de vídeos educativos sobre proporcionalidad. Se ha comenzado con plantear el interés del tema, dada la abundancia y disponibilidad de vídeos que se ofrecen como recurso para favorecer la enseñanza de las matemáticas. No obstante, teniendo en cuenta la desigual calidad y diversidad de significados de los vídeos educativos (Beltrán-Pellicer, Giacomone y Burgos, 2018) se justifica la necesidad de capacitar a los profesores para la valoración y uso pertinente de estos recursos.

La acción formativa se ha orientado a proporcionar a los futuros maestros una herramienta teórica para el análisis de la idoneidad epistémica, esto es, del contenido matemático presentado en un vídeo sobre proporcionalidad. El análisis a priori del vídeo hecho por los investigadores reveló errores e imprecisiones en las definiciones, proposiciones y procedimientos, así como carencia o inexactitud en los argumentos ofrecidos para justificar los procedimientos y proposiciones. También la presentación y tratamiento de una variedad de situaciones - problemas y la articulación de significados de la proporcionalidad tiene carencias importantes, por lo que el nivel de idoneidad epistémica se valora como media en la escala ordinal baja, media, alta. Sin embargo, la mayoría de los futuros docentes, tras el proceso formativo aplicado, valoraron el grado de idoneidad del vídeo como alto en casi todos los componentes.

El instrumento de evaluación usado, basado en los componentes e indicadores de la idoneidad epistémica tiene en cuenta la variedad de situaciones - problemas propuestos, la presencia de distintos registros de representación, la claridad y corrección de las definiciones, proposiciones y procedimientos, así como la justificación de los procedimientos y proposiciones con argumentos pertinentes y adaptados al nivel educativo correspondiente. El no haber reconocido la ausencia de algunos indicadores importantes ha llevado a un porcentaje elevado de estudiantes (51,6%) a considerar el vídeo como un recurso didáctico adecuado, sin identificar sus carencias.

Por otro lado, hemos constatado cierta variabilidad en la asignación de las puntuaciones por los participantes, encontrando valoraciones con la máxima puntuación en las que el estudiante señala más inconvenientes que en otras con menos valoración. Si bien estas fluctuaciones mantienen coherente la valoración global, nos indica que quizá sea necesario concretar más los criterios, con el objetivo de perseguir una mayor uniformidad inter-participantes. No obstante, hemos de tener en cuenta que se trata de una valoración cualitativa de la idoneidad y que el número final, dentro de unos márgenes, es solo el resultado sintético de un proceso más complejo donde se han identificado los diferentes componentes de la idoneidad.

Estos resultados sugieren la necesidad de profundizar en el desarrollo del conocimiento especializado del contenido de los futuros profesores, en este caso, sobre proporcionalidad, ampliando el tiempo de instrucción asignado, analizando una mayor variedad de vídeos educativos e incrementando la fase de discusión colectiva de los resultados de los análisis.

Este tipo de acciones formativas, centradas en el contenido de la disciplina, pero con una clara orientación hacia el conocimiento y las competencias didácticas, se alinean con trabajos de otros autores (Davis, 2015), donde se señala la repercusión que tiene su *estudio del concepto* tanto a la hora de revelar la complejidad de las ideas matemáticas subyacentes como del desarrollo de las matemáticas necesarias para la enseñanza.

Por otra parte, la herramienta teórica de la idoneidad didáctica incluye, además de la faceta epistémica, las facetas cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, las cuales no han sido abordadas en esta investigación. Aunque no es pertinente aplicar algunas de estas facetas en el caso del uso de recursos didácticos, en particular la faceta de los aprendizajes logrados, los demás aspectos podrían ser objeto de análisis y reflexión por parte de los profesores que usen estos recursos.

CAPÍTULO 11. SÍNTESIS Y PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN.

En esta tesis hemos abordado el estudio del razonamiento proporcional y su conexión con el razonamiento algebraico desde las perspectivas institucional y personal. Las nociones teóricas y metodológicas específicas del EOS, significado pragmático, configuración ontosemiótica y niveles de algebrización, nos han permitido abordar el problema de la complejidad ontosemiótica del objeto proporcionalidad. La ingeniería didáctica, fundamentada en la aplicación de las herramientas del EOS, ha sido el enfoque metodológico seguido para diseñar, implementar y evaluar acciones formativas, tanto con alumnos de primaria como con futuros profesores de educación primaria y secundaria. Por último, el modelo CCDM de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor, nos ha brindado el marco teórico sobre el que sustentar el conocimiento del profesor de matemáticas y herramientas eficientes para desarrollar sus competencias didáctico-matemáticas (competencias de análisis de significados globales, de análisis epistémico y cognitivo de prácticas y de análisis de la idoneidad didáctica).

1. SÍNTESIS Y APORTACIONES FUNDAMENTALES

A continuación se presenta una síntesis de los resultados más importantes obtenidos durante el desarrollo de esta tesis, en término de los objetivos de investigación planteados en el capítulo 1.

1. 1. Aportaciones derivadas del objetivo general OG1:

> *Establecer un modelo ontosemiótico de referencia para la proporcionalidad considerando sus implicaciones para el diseño curricular e instruccional.*

De acuerdo con el marco teórico del EOS, el primer referente en una investigación de didáctica de la matemática centrada en el estudio de la proporcionalidad debe ser la reconstrucción de su significado global, atendiendo a los conocimientos sobre las diferentes dimensiones o facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. La articulación de los diversos significados parciales en un significado global que sirva de sistema de referencia, permite orientar el desarrollo del currículo, comprender los procesos de enseñanza implementados y establecer pautas que guíen su mejora.

El universo de significados de la proporcionalidad se puede clasificar según distintos criterios, como puede ser el campo de aplicación (vida cotidiana, científico-técnico, artístico, geométrico, probabilístico, estadístico, etc.) o el nivel de algebrización de las prácticas matemáticas realizadas, esto es, el grado de generalidad de los objetos y procesos que intervienen en las prácticas de resolución de los problemas correspondientes. En el capítulo 3, hemos abordado este primer problema y hemos mostrado la relación entre los distintos significados de la proporcionalidad según los niveles de algebrización, haciendo referencia al nivel educativo en el que habitualmente se contempla su estudio (figura 3.3). Los niveles de algebrización han permitido modelizar el conocimiento institucional que se pone en juego en las prácticas implicadas en la resolución de problemas de proporcionalidad, describiendo la actividad matemática en términos de objetos y procesos característicos del álgebra.

El profesor de matemáticas debe conocer los significados de la proporcionalidad que corresponden al nivel educativo en el que imparte su docencia, pero también debe tener un conocimiento ampliado de cómo se articulan y conectan con los significados de los niveles posteriores. En este sentido, creemos que la visión holística sobre el significado de la proporcionalidad que hemos elaborado puede servir de base en los programas de formación de profesores sobre el contenido de proporcionalidad.

La complejidad ontosemiótica del aprendizaje matemático de un objeto matemático, como puede ser la proporcionalidad, nos ha llevado a analizar y justificar la importancia de aplicar un modelo didáctico dialógico-colaborativo para las situaciones de primer encuentro con los objetos de conocimiento matemáticos en el que el profesor y los estudiantes trabajan juntos en la resolución de las situaciones-problemas. La optimización del aprendizaje puede tener lugar localmente mediante un modelo mixto que articule la transmisión de conocimientos, la indagación y la colaboración, modelo gestionado mediante criterios de idoneidad didáctica, que han de ser interpretados y adaptados al contexto educativo por el profesor.

1.2. Aportaciones derivadas del objetivo general OG2:

Analizar e indagar formas de desarrollo del razonamiento proporcional en alumnos de educación primaria, teniendo en cuenta el papel que desempeñan los diferentes niveles de algebrización.

Después de analizar diversas propuestas de experiencias de iniciación al razonamiento proporcional en educación primaria, y asumiendo que optimizar la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático requiere de un modelo de instrucción dialógico-colaborativo de enseñanza y aprendizaje, experimentamos este modelo con alumnos de 5º curso de primaria que tenían su primer encuentro con las situaciones de proporcionalidad. Comenzamos presentando, en un formato dialógico-transmisivo, las nociones básicas de proporcionalidad conectando con las de semejanza y escala que les eran familiares a los alumnos. En las tareas correspondientes a las situaciones introductorias (primer acercamiento intuitivo a la proporcionalidad a través de factores multiplicativos y reconocimiento de la propiedad aditiva de la función lineal por medio de tablas numéricas y posterior introducción de la reducción a la unidad) predomina el aspecto indagativo y cooperativo.

Si bien se trata de un estudio de caso con un solo grupo y un enfoque de investigación descriptiva-interpretativa, lo que no permite concluir que los aprendizajes sean consecuencia exclusiva del modelo instruccional implementado, los resultados en el grupo muestran que el modelo de colaboración entre el profesor y los estudiantes en situaciones introductorias de la proporcionalidad permite detectar estrategias intuitivas y aquellas que los alumnos desarrollan con poca guía por parte del profesor (uso recurrente del registro tabular, estrategia de reducción a la unidad), así como aumentar el grado de implicación e interés del alumnado.

En la experiencia llevada a cabo con los alumnos de 5º de primaria, no sólo interesaba ver los efectos del modelo instruccional “trabajando juntos” para desarrollar en ellos el razonamiento proporcional, medidos en términos de logros de aprendizaje. Además queríamos analizar qué formas de razonamiento algebraico emergen de las prácticas matemáticas desarrolladas por los alumnos cuando se enfrentan por primera vez a tareas de proporcionalidad.

Los resultados muestran que la mayoría de los alumnos resolvieron las tareas con una actividad de carácter proto-algebraico y que existe cierta relación entre el grado de éxito en la respuesta y el carácter proto-algebraico de la solución elaborada. Además, constatamos que el uso de tareas introductorias sobre proporcionalidad, por medio de tablas numéricas y el planteamiento de cuestiones dirigidas a identificar las propiedades aditiva y homogénea de la función de proporcionalidad, puede permitir que los alumnos progresen hacia niveles superiores de razonamiento algebraico, evitando el uso incorrecto de estrategias de composición y descomposición que involucraba relaciones aditivas o aditivas y multiplicativas a la vez.

Así pues, en relación a la hipótesis 1 de investigación, podemos concluir que es posible reconocer los distintos niveles de algebrización en el razonamiento proporcional desarrollado por estudiantes de educación primaria, teniendo en cuenta los procesos de generalización matemática, la articulación de diversos registros y el cálculo analítico puestos en juego en la resolución de tareas escolares de proporcionalidad.

El libro de texto es un medio o recurso ampliamente usado en la práctica de la enseñanza, que la mayoría de los profesores emplean para planificar e implementar los programas de matemáticas (Dole y Shield, 2008). Los estudiantes usan el libro de texto como instrumento para la adquisición y consolidación de conocimientos matemáticos y para la resolución de tareas y problemas (Rezat, 2010).

En el caso de una lección de un libro de texto el autor presenta la información, incluyendo las situaciones-problemas que debe realizar el estudiante. El modelo instruccional consustancial a la presentación del contenido en este medio es esencialmente de tipo objetivista/transmisivo. El profesor debe ser el encargado de desarrollar su potencial hacia un modelo didáctico en el que la solución de las tareas (ejercicios y problemas) que propone el libro de texto pueda hacerse de manera dialógica y cooperativa.

¿Qué ocurre cuando el docente diseña y planifica el proceso de instrucción en base únicamente a las lecciones escritos de un libro de texto con un formato de libro tradicional? La intervención realizada con alumnos de sexto curso de educación primaria nos ha permitido analizar los conflictos cognitivos que se generan cuando los alumnos abordan el estudio de la proporcionalidad con una instrucción fuertemente guiada por una lección de libro de texto que prioriza el aspecto procedimental frente al conceptual. Para ello hemos tenido en cuenta el análisis de la lección realizada en Burgos, Castillo et al. (2020) y los conflictos epistémicos detectados (ver también Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino, 2019).

Los resultados nos han permitido conectar entre sí los conflictos epistémicos y cognitivos que se generan cuando los alumnos inician el estudio de la proporcionalidad y los porcentajes con una enseñanza centrada en el aspecto algorítmico. Los alumnos no habían justificado en su mayoría las respuestas dadas a las tareas de evaluación y cuando lo hicieron la justificación era de tipo procedimental. Además el procedimiento empleado de forma casi exclusiva es la regla de tres (en lo que hemos llamado forma degenerada). Sin embargo, en el momento de diálogo y cooperación observamos que: 1) entender la relación funcional y el significado de la constante de proporcionalidad, les permite adquirir flexibilidad en la resolución de las tareas empleando otros procedimientos distintos de la regla de tres, 2) empiezan a justificar los procedimientos y proposiciones empleados, conectando los distintos objetos que aparecen involucrados en una situación de proporcionalidad, y lo que es más importante, empiezan a reconocer la pertinencia y necesidad de una explicación a sus procedimientos.

Comunicar y argumentar sobre situaciones en las que aparecen relaciones de proporcionalidad (y de no proporcionalidad) como estrategia didáctica permitirá dotar de significado a los procedimientos y símbolos que emplean los alumnos cuando plantean una proporción. Para progresar en el razonamiento proporcional, el conocimiento procedimental debe ser enriquecido con la comprensión de los conceptos y propiedades que intervienen, y por otro lado, se debe favorecer la justificación de las respuestas a las tareas propuestas.

1. 3. Aportaciones derivadas del objetivo general OG3:

> *Analizar y promover el crecimiento profesional en los futuros profesores de matemáticas sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas relativos al razonamiento proporcional y su imbricación con el razonamiento algebraico.*

En el área específica de la formación de profesores de matemáticas, y bajo el modelo CCDM de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos propuesto por el EOS hemos desarrollado diversos ciclos formativos con futuros profesores de matemáticas, tanto de educación primaria como de educación secundaria, con el objetivo de desarrollar competencias y conocimientos didáctico-matemáticos sobre el razonamiento proporcional y su conexión con el razonamiento algebraico. En particular, en esta memoria hemos descrito el diseño, implementación y evaluación de una acción formativa con estudiantes del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria (especialidad de Matemáticas) y dos intervenciones con estudiantes de tercer curso del grado de educación primaria, destinadas a fomentar la competencia de análisis ontosemiótico de objetos y procesos y el reconocimiento de niveles de algebrización puestos en juego en las prácticas matemáticas en tareas de proporcionalidad.

Entre otros conocimientos y competencias, se requiere que el profesor sea capaz de analizar la actividad matemática implicada en la solución de los problemas que propone a sus estudiantes, con el fin de diseñar, gestionar y evaluar la implementación de situaciones de enseñanza-aprendizaje adecuadas. Esta competencia profesional global de análisis didáctico involucra conocimientos didáctico-matemáticos específicos cuyo dominio y aplicación debe ser objeto de atención de los programas de formación de profesores. Por un lado, se espera que los futuros profesores adquieran el conocimiento didáctico-matemático que les permita prever diferentes métodos de resolución para las tareas. El análisis ontosemiótico focalizado en la identificación de la trama de objetos y procesos y el reconocimiento de los diferentes niveles de algebrización que se ponen en juego en la resolución de dichas situaciones-problema les permite tomar conciencia de la complejidad ontosemiótica de un objeto como factor explicativo de potenciales conflictos y dificultades de aprendizaje, así como permite identificar progresivos estadios del funcionamiento de los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas. Finalmente, se espera que los futuros profesores desarrollen la capacidad de modificar alguna de las variables de la tarea para dar lugar a nuevas prácticas matemáticas con progresivo nivel de algebrización (Burgos, Giacomone et al., 2020).

Experiencia con futuros profesores de educación secundaria

Los profesores de secundaria obligatoria deberían tener una comprensión profunda tanto de los componentes conceptuales del razonamiento proporcional como de los proposicionales y argumentativos. Sin embargo, algunos estudiantes del máster de profesorado manifestaron una concepción pobre de la naturaleza del razonamiento proporcional y carencias en el conocimiento matemático y didáctico-matemático de la proporcionalidad. En particular, la descomposición en prácticas elementales de la solución de los problemas, la identificación de proposiciones, procedimientos y la argumentación de dichos objetos, el reconocimiento de los niveles proto-algebraicos de las prácticas matemáticas y la elaboración de problemas por variación de un enunciado dado, constituyeron un reto para los futuros profesores de matemáticas.

No obstante, como hemos observado, la acción formativa implementada mejora la competencia de los futuros docentes para identificar los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas, así como también para reconocer de manera pertinente los distintos niveles de algebrización puestos en juego. También se observa mejora en la formulación de variantes pertinentes de un problema dado, y en el reconocimiento del papel que el procedimiento empleado, el lenguaje y el grado de generalidad, tienen en dicho proceso.

Experiencia con futuros maestros de educación primaria

El análisis de los resultados del primer ciclo de investigación con estudiantes del grado de educación primaria, mostró que la intervención implementada mejora la competencia de análisis epistémico de los futuros maestros. En la fase de trabajo individual, todos los estudiantes realizaron las configuraciones ontosemióticas correspondientes a las estrategias utilizadas y en general no tuvieron dificultades para completar la secuenciación de las prácticas elementales implicadas. Sí para identificar los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y formular variantes pertinentes de un problema dado. En relación al análisis del nivel educativo y las dificultades previstas en sus estrategias de resolución, observamos que, por lo general, los futuros maestros de primaria adaptan mejor las estrategias al nivel educativo que los futuros profesores de secundaria, lo que nos lleva a pensar en la necesidad de plantear este tipo de tareas con futuros profesores de secundaria.

Cuando los futuros maestros analizan las respuestas de alumnos, consideran que éstos deben explicar los procedimientos seguidos y argumentar, con base en la relación de proporcionalidad directa, la estrategia seguida. Sin embargo, cuando identifican las prácticas elementales en las soluciones de los niños no consideran la justificación de los alumnos como práctica elemental.

En el segundo ciclo de investigación se reforzaron las tareas, incluyendo más situaciones-problemas que centraron el análisis epistémico (resolución por varios métodos, creación de variantes) y el análisis cognitivo incluyendo un mayor número de respuestas de niños de primaria que analizar correspondientes a distintos problemas y estrategias.
Todos los estudiantes resolvieron los problemas por al menos un método, pero sólo la cuarta parte de éstos resolvieron los cuatro problemas por dos métodos: los futuros maestros no son flexibles para resolver el mismo problema usando diferentes estrategias (Berk et al., 2009). Aunque los futuros maestros tuvieron dificultades para distinguir situaciones proporcionales de no proporcionales, la mayoría de las soluciones son correctas y corresponden al nivel proto-algebraico casi en su mayoría. No obstante, este nivel depende de la situación-problema resuelta.

Por otro lado, más de la mitad de los futuros maestros realizaron una configuración ontosemiótica pertinente en cada uno de los problemas planteados, lo que nos lleva a pensar que ofrecer una mayor variedad de situaciones permite que los futuros maestros mejoran esta competencia. Sin embargo, el análisis detallado de las configuraciones ontosemióticas nos ha permitido detectar conflictos semióticos en el reconocimiento por parte de los futuros maestros de los tipos de objetos matemáticos involucrados en la práctica matemática.

Crear nuevos problemas a partir de las situaciones dadas de forma que la estrategia de resolución implique un cambio en el nivel de algebrización, ha sido una de las tareas con mayor dificultad, tanto en el primer ciclo de investigación como en el segundo.

Los futuros maestros encuentran más dificultades para detectar objetos y procesos potencialmente conflictivos en sus soluciones que para resolver las tareas, los obstáculos se asignan a las situaciones-problema. Las dificultades que los futuros maestros creen que pueden tener sus alumnos no siempre coinciden con las que ellos encuentran en la resolución de la tarea. Así, las dificultades más frecuentemente sugeridas por los futuros maestros están relacionadas con la comprensión de los requisitos del enunciado y con los procedimientos matemáticos (cálculos aritméticos elementales y regla de tres). Tanto en el primer ciclo como en el segundo, los futuros maestros identifican como posible dificultad el uso de la regla de tres inversa, señalando que los alumnos de primaria pueden confundir los nuevos productos que surgen en este algoritmo con la multiplicación en cruz característica de la regla de tres directa. Es interesante notar que los futuros maestros no elaboraron su juicio sobre las dificultades de la tarea de acuerdo a la presencia de ciertos objetos algebraicos en las prácticas o con el nivel de algebrización de las soluciones propuestas.

Como señala Son (2013), la comprensión limitada de los futuros profesores de razón y proporción y una escasa exposición a la identificación de los errores de los estudiantes, les lleva a prestar más atención a reglas y procedimientos cuando buscan el origen de los errores de los estudiantes.

Aunque los futuros maestros encontraron más atractivo e interesante las consignas que involucraban el análisis de respuestas de alumnos de educación primaria, en general, desarrollar la competencia de análisis cognitivo con la intervención desarrollada ha sido más limitada que el aspecto epistémico. Nuestros resultados coinciden con los de Hines y McMahon (2005), quienes encontraron que los futuros profesores no reconocían de inmediato el uso del razonamiento aditivo por parte de los estudiantes de secundaria y que asignaban al planteamiento de la ecuación proporcional un nivel de desarrollo más alto dando menos valor a las estrategias menos simbólicas (concretas-pictóricas y numéricas –tabulares).

En relación a nuestras hipótesis de investigación comprobamos que los futuros profesores, tanto de educación primaria como de educación secundaria, muestran dificultades en la faceta epistémica del razonamiento proporcional (resolver los problemas por diferentes métodos, secuenciar la resolución del problema en prácticas elementales, elaborar las configuraciones ontosemióticas, identificar los diferentes niveles de algebrización y elaborar nuevos problemas por variación de un enunciado dado (Hipótesis 2 y 3) Así mismo, los resultados obtenidos tras las intervenciones desarrolladas con futuros maestros de educación primaria, permiten confirmar la Hipótesis 4, es decir, los estudiantes para maestros tienen dificultades para analizar las prácticas matemáticas puestas en juego en la resolución de tareas escolares, mediante la identificación de los objetos matemáticos que intervienen y emergen de ellas y para proponer variantes a las tareas que supongan cambios en el nivel de algebrización. No obstante, comprobamos que es posible avanzar en la superación de algunas de las dificultades y conflictos identificados mediante la implementación de acciones formativas como las descritas en esta tesis. Fundamentalmente, los futuros profesores progresan en la resolución de problemas de proporcionalidad por diferentes métodos, en la elaboración de configuraciones ontosemióticas y la identificación de niveles de algebrización de las prácticas involucradas. Estos son aspectos importantes en la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático en relación a la proporcionalidad. La creación de problemas por variación en términos de previsibles niveles de algebrización es una de las competencias en las que los futuros maestros sólo consiguen una ligera mejora. Los aspectos tratados de la faceta cognitiva del conocimiento especializado (previsión de dificultades, análisis de respuestas en términos de configuraciones cognitivas y niveles de algebrización) experimentan una mejora más limitada. Así pues, nuestra Hipótesis 5 se confirma de manera parcial.

En nuestra investigación hemos desarrollado finalmente una primera acción formativa desarrollada con los estudiantes del grado de primaria orientada a proporcionar a los futuros maestros una herramienta teórica para el análisis y valoración del contenido matemático presentado en un vídeo sobre proporcionalidad. Si bien en el análisis a priori del vídeo encontramos un grado medio de idoneidad (presentaba errores e imprecisiones en las definiciones, proposiciones y procedimientos, carencias en la presentación y tratamiento de una variedad de situaciones – problemas e inexactitud en los argumentos ofrecidos para justificar los procedimientos y proposiciones), la mayoría de los futuros profesores valoraron el grado de idoneidad del vídeo como alto en casi todos los componentes. Estos resultados sugieren: 1) es necesario revisar el instrumento de evaluación basado en los componentes e indicadores de la idoneidad epistémica (variedad de situaciones - problemas propuestos, presencia de distintos registros de representación, claridad y corrección de las definiciones, proposiciones y procedimientos, pertinencia de la justificación de los procedimientos y proposiciones) 2) se requiere, además, ampliar el tiempo de instrucción asignado, analizar una mayor variedad de vídeos educativos y reforzar la discusión colectiva de los resultados de las valoraciones.

2. FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se ha tratado de sintetizar las contribuciones realizadas al estudio del razonamiento proporcional y su conexión con el algebraico, desde una perspectiva ontosemiótica, teniendo en cuenta la caracterización de los significados, el aprendizaje de los escolares y la formación de profesores. Aún quedan muchos aspectos por investigar en los tres ejes que han vertebrado esta tesis. Presentamos a continuación algunas primeras cuestiones que permitirán contribuir a avanzar en el problema de investigación que se ha planteado en esta tesis.

2.1. Extensión del modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Articulación del modelo de niveles de algebrización y los niveles de desarrollo de razonamiento proporcional en escolares.

En nuestra investigación hemos considerado únicamente la relación de proporcionalidad directa en el contexto aritmético-funcional. Sin embargo, dado que distintos contextos de aplicación de las nociones de razón y proporción, como pueden ser el geométrico, probabilístico o estadístico conllevan la participación de objetos y procesos específicos de dichos campos en las prácticas de resolución de los problemas correspondientes, se hace necesario extender el análisis realizado a nuevos contextos. Este tipo de estudio permitirá desvelar la complejidad ontosemiótica de la proporcionalidad como factor explicativo de los conflictos y dificultades de aprendizaje en contextos de aplicación distintos del abordado en las investigaciones previas.

Como se indica en Godino y Burgos (2017) parece necesario y útil abordar el estudio de los niveles de algebrización desde una perspectiva más macroscópica. Desde el punto de vista personal, el estudio de niveles de algebrización se puede contemplar desde la perspectiva de niveles de *desarrollo cognitivo*, esto es, como etapas en la vida del estudiante de matemáticas que se pueden calificar como de incremento progresivo más o menos consolidado de conocimiento y competencia algebraica. Esta se plantea como una cuestión abierta que requiere nuevos estudios teóricos y empíricos.

La aplicación de los niveles de algebrización a los sistemas de prácticas vinculados a tareas de proporcionalidad, proporciona criterios para distinguir categorías de significados en la construcción progresiva del razonamiento proporcional, entendido como el sistema de prácticas operativas y discursivas que son desarrolladas por un sujeto para resolver tareas que involucran la proporcionalidad. Por otro lado, los niveles de razonamiento proporcional de los alumnos propuestos por autores como Langrall y Swafford (2000) o Misailidou y Williams (2003) se definen en términos de las tareas en las que los estudiantes pueden o no tener éxito, reflejando etapas de desarrollo cognitivo. No obstante, creemos interesante en un futuro próximo analizar las relaciones y posible articulación entre el modelo de niveles de algebrización y las escalas de razonamiento proporcional de estos autores.

2.2. Diseño e implementación de nuevas experiencias de desarrollo del razonamiento proporcional

La experimentación con los alumnos de 5º curso de primaria se realiza bajo un modelo didáctico de tipo mixto, en el que se propone un primer encuentro con la proporcionalidad con ejemplos introductorios, en cuya resolución tanto el docente como los estudiantes tienen papeles protagonistas.

Es necesario diseñar e implementar nuevos ciclos de investigación que promuevan el razonamiento algebraico en la resolución de problemas de proporcionalidad. Por un lado, sería interesante contrastar los resultados de la experiencia desarrollada con estudiantes de cursos previos (cuarto curso de educación primaria en primer lugar). Por otro lado, se requiere diseñar y experimentar nuevas situaciones que relacionen la construcción de tablas de proporcionalidad y la técnica de reducción a la unidad, propias de un primer nivel proto-algebraico, con actividades características de niveles superiores de algebrización, como serían el procedimiento de la regla de tres (nivel 2 de algebrización) o la representación de la función lineal en lenguaje formal (nivel 3 de algebrización).

Nos interesa también analizar si es posible reconocer los distintos niveles de algebrización en el razonamiento proporcional desarrollado por estudiantes de educación secundaria teniendo en cuenta los procesos de generalización matemática, la articulación de diversos registros y el cálculo analítico basado en las propiedades estructurales y los procesos puestos en juego en la resolución de tareas escolares.

Como señalan Godino et al. (2015, p. 119) "aunque se ha avanzado mucho en la caracterización del álgebra escolar, el problema no está completamente resuelto, particularmente en lo que se refiere a la conexión entre el álgebra en Primaria y Secundaria". Es claro que los niveles 1, 2 y 3 continúan manifestándose en secundaria, en particular, lograr el dominio del nivel 3 suele ser un objetivo central en el primer curso de secundaria. En el caso de la proporcionalidad, esto supone que los alumnos de primer curso de educación secundaria dominen y apliquen correctamente la noción de función lineal y las técnicas de resolución basadas en las propiedades de dichas funciones.

2.3. Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico en tareas de proporcionalidad

La relación entre el grado de conocimiento del profesor de matemáticas y el logro de aprendizaje de sus alumnos justifica el interés por determinar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que deben tener los futuros profesores.

La actividad de reflexión epistémica y cognitiva que implementamos en las distintas intervenciones formativas, está orientada al logro de una comprensión profunda, no solo de los componentes conceptuales del razonamiento proporcional, sino también los componentes proposicionales y argumentativos.

Creemos que el reconocimiento de diferentes niveles de algebrización en la resolución de tareas de proporcionalidad constituye otro aspecto importante del conocimiento didáctico-matemático requerido para una enseñanza idónea de este contenido. El estudio simultáneo de las dificultades asociadas a las estrategias empleadas, según los niveles de algebrización, motiva la reflexión sobre la eficacia de determinados métodos de solución, centrando la atención en la relación entre la estrategia y la pertinencia de su uso en relación con la identificación de conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos requeridos. Consideramos que este tipo de intervención formativa permite integrar el aspecto conceptual y procedimental en relación a razón, proporción y proporcionalidad, como se viene requiriendo desde la investigación en educación matemática.

En consecuencia, se pueden abordar temas de investigación como los siguientes:

1) Diseñar e implementar nuevos talleres en los que se profundice más en el carácter algebraico de la actividad matemática, discriminar las actividades aritméticas de las algebraicas, atendiendo a los tipos de objetos, representaciones, procesos de generalización y cálculo analítico puestos en juego en la actividad matemática. Es preciso ampliar el contexto de aplicación de las situaciones-problema prototípicas.
2) Diseñar e implementar acciones formativas centradas de manera específica en la creación de problemas que involucren el razonamiento proporcional y los niveles de razonamiento algebraico. Además de para resolver problemas matemáticos, un profesor debe ser competente para escoger, modificar y plantear problemas con propósitos educativos específicos (Tichá y Hošpesová, 2013). Crear nuevos problemas a partir de las situaciones dadas, de manera que su estrategia de resolución lleve asociado un cambio en el nivel de algebrización es un reto para la formación de profesores que requiere sin embargo de mayor dedicación e instrucción.
3) Revisar, diseñar e implementar nuevas experiencias de formación con futuros docentes tanto de educación primaria como de educación secundaria destinadas a desarrollar la competencia de análisis cognitivo en tareas de que involucren el razonamiento proporcional y algebraico. Se requiere ampliar el tiempo de dedicación y la variedad de situaciones que analicen los futuros docentes. Resultados como los de Fernández, Llinares y Valls (2011) muestran que los futuros profesores de secundaria encuentran dificultades para analizar e interpretar las respuestas de los alumnos y que no incluyen aspectos matemáticos significativos sobre las estrategias de los alumnos al resolver problemas que involucran el razonamiento proporcional. Sin embargo, la participación en la discusión en línea les permite avanzar en la mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes.

Para investigadores como Hines y McMahon (2005), brindar a los futuros profesores oportunidades para analizar estrategias de razonamiento proporcional generadas por estudiantes de secundaria, permite tomar conciencia de la necesidad de elaborar un marco de investigación que permita comprender mejor el desarrollo de este tipo de competencias. En particular, señalan que “un análisis de muestras cuidadosamente seleccionadas del trabajo de los alumnos puede permitir el acceso a este tema de una manera que sea útil y motivadora para los futuros profesores” (p. 100).

4) Se requiere diseñar nuevas intervenciones tanto con futuros docentes de educación primaria como secundaria, en las que se contemplen entrevistas con los futuros profesores y momentos de reflexión en grupo en relación a las valoraciones de las actuaciones de los alumnos. También planteamos incluir como consignas la reflexión sobre las posibles respuestas a los errores y dificultades de los estudiantes. Como sugiere Son (2013) la falta de capacidad para identificar los conflictos aumenta la falta de capacidad para responder correctamente a los estudiantes. Los formadores de profesores deben proporcionar oportunidades de aprendizaje para que los futuros docentes de primaria y secundaria reconozcan con precisión los errores de los estudiantes y planifiquen una instrucción más apropiada (p. 67).

2.4. Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en procesos de enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad

La aplicación de los criterios de idoneidad didáctica ayuda a sistematizar los conocimientos didácticos y su aplicación a la reflexión y mejora progresiva de la práctica de la enseñanza (Posadas y Godino, 2017). Utilizados a priori, permiten guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, orientando “cómo se deben hacer las cosas”. Aplicados a posteriori, sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado (Hummes, Font y Breda, 2019).

Los resultados no del todo satisfactorios obtenidos en el análisis de vídeos educativos por parte de maestros en formación requieren:

1) Revisar y delimitar los componentes y descriptores para el análisis de vídeos educativos de proporcionalidad.

2) Incluir explícitamente la reflexión sobre el carácter algebraico de las prácticas desarrolladas en los vídeos educativos, en este caso de proporcionalidad.
3) Ampliar el tiempo de instrucción asignado, analizando una mayor variedad de vídeos educativos e incrementando la fase de discusión colectiva de los resultados de los análisis.

Por otra parte, el instrumento elaborado para valoración de la idoneidad didáctica debería incluir componentes e indicadores de otras facetas como pueden ser la interaccional, mediacional o ecológica que no han sido abordadas en esta investigación.

La valoración de la idoneidad didáctica de recursos instruccionales por parte de los futuros profesores debe ampliarse a otros recursos y medios educativos (libros de texto, entorno de aprendizaje en línea, etc.). Se hace necesario también diseñar e implementar acciones formativas al respecto con futuros profesores de educación secundaria.

REFERENCIAS

Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T., y Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 5,* 25-48.

Alsawaie, O. N., y Alghazo, I. M. (2010). The effect of video-based approach on prospective teachers' ability to analyze mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(3), 223-241.

Alfieri, L., Brooks P. J., Aldrich, N. J. y Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 1-18. https://doi.org/10.1037/a0021017

Aroza, C. J., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. AIRES, 6(1), 1-29.

Artigue, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck y F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 225-237). Grenoble: La penséesauvage.

Artigue, M., y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM. Mathematics Education, 45,* 797–810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Azer S. A, AlGrain H. A, AlKhelaif R. A, AlEshaiwi S. M. (2013) Evaluation of the Educational Value of YouTube Videos about Physical Examination of the Cardiovascular and Respiratory Systems. *Journal of Medical Internet Research 15*(11): e241.

Balderas, R.; Block, D. y Guerra, M.T. (2014). Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestro de secundaria. *Educación Matemática* 26(2), 7-32.

Ball, D. L., y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizont: Knowing mathematics for teaching to learnes' mathematical futures. Paper presented at the *43Rd Jahrestagung Für Didaktik Der Mathematik Held in Oldenburg*, Germany.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L, Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 57-79.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime*, 8(3), 247-264.

Barnhart, T., y van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education, 45*, 83–93. doi:10.1016/j.tate.2014.09.005.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 57-79.

Bednarz N., Kieran C., y Lee L. (1996) Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. In: Bernarz N., Kieran C., Lee L. (Eds) *Approaches to Algebra*. Mathematics Education Library, vol 18. Springer, Dordrecht.

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). Macmillan: New York.

Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Burgos, M. (2018) Online educational videos according to specific didactics: the case of mathematics. *Cultura y Educación*, 30 (4), 633-662.

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema*, 32(61), 526-548.

Ben-Chaim, D., Keret, J., e Ilany, B. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 333-340.

Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Rotterdam: Sense Publisher.

Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 291-303.

Bentley, B. y Yates, G. (2017). Facilitating proportional reasoning through worked examples: Two classroom-based experiments. *Cogent Education*, 4 (1), pp. 1-14. https://doi.org/10.1080/2331186X.2017.1297213

Bergmann, J., y Sams, A. (2012). *Flip your classroom*. Eugene, Oregon: International Society for Technology in Education.

Berk, D., Taber, S. B., Gorowara, C. C. y Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(3), 113-135.

Bezuk, N. (1986). *Variables affecting seventh grade students' performance and solution strategies on proportional reasoning word problems*. Doctoral Dissertation, University of Minnesota, 1986). Digital Dissertations, 321. (AAT 8625870).

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (Eds.) (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9

Biza, I., Nardi, E., y Zhachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 301–309.

Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N., y Stylianou, D. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. In C. Kieran (Ed.). *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-year-olds. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practic*e (pp. 27-50). Cham, Switzerland: Springer.

Blanton, M. L., y Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears: Understanding Characteristics of Professional Development that Promote Generative and Self-Sustaining Change in Teacher Practice". *Teaching Children Mathematics*, 10, 70-77.

Blanton, M.L. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Johnsen, y A. Berit (Eds.), Proceedings of the 28thinternational group of the psychology of mathematics education (2) (pp. 135–142). Bergen, Norway: Bergen University College.Blanton, M., y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, y E. Knuth (Eds.), Early algebraization,advances in mathematics education (pp. 5–23). Berlín, Germany: Springer. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4 2

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu - Connaissances et savoirs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*, 2, 135-194.

Blomberg, G., Renkl, A., Sherin, M. G., Borko, H., y Seidel, T. (2013). Five research based heuristics for using video in pre-service teacher education. *Journal for educational research online, 5*(1), 90-114.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. London: The Macmillan Press. https://doi.org/10.1007/978-1-349-17273-3_5

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14, 125-133.

Boghossian, P. (2006). Behaviorism, constructivism, and Socratic pedagogy. *Educational Philosophy and Theory*, *38*(6), 713-722. https://doi.org/10.1111/j.1469-5812.2006.00226.x

Borba, M. C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S., y Aguilar, M. S. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. ZDM, 48(5), 589-610. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0798-4

Bosch M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad.* Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Boston, M. D. (2013). Connecting changes in secondary mathematics teachers' knowledge to their experiences in a professional development workshop. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 7-31.

Branco, N. y Ponte, J. P (2012). Developing algebraic and didactical knowlendge in pre-service primary teacher education. The 36th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Taiwan.

Breda, A., Font, V., Lima, V. M., y Pereira, M. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación*, 14(2), 162-176.

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255-278.

Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a

Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 221–239. https://doi.org/10.1007/ s10649-013-9507-1.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33-115.

Brousseau, B. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A. P. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Brousseau, G. (2004). Investigaciones en educación matemática. Documento descargado de https://laurabrichetti.files.wordpress.com/2010/12/brusseau-investigaciones-matemc3a1ticas.pdf

Brousseau, G. (2016). Petite histoire du concept « adidactique ». Disponible en, http://guy-brousseau.com/3326/rp-2016-4-petite-histoire-du-concept-adidactique/

Buforn, A. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA*, 28(48), 21-41.

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018) Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *23*, 229-251.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44*, 1-22.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2019). Ontosemiotic Analysis of a lesson on percentages. Proceedings of the INTED2019 Conference, Valencia, Spain.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2018). Pensamiento algebraico temprano de alumnos de quinto de primaria en la resolución de una tarea de proporcionalidad. En Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L., Aguilar-González, A., Alonso, P., García, F. J., Bruno, Al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 181-190).* Gijón, España: SEIEM.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). Desarrollo de la competencia de análisis de idoneidad didáctica de vídeos educativos de matemáticas en futuros maestros de educación primaria. *Revista Españoa de Pedagogía*, 78 (275), 27-45, DOI: https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07.

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema* (en prensa).

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM.

Burgos, M., Giacomone, B, Godino J.D. y Neto, T. (2020) Desarrollo de la competencia de Análisis Ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas mediante tareas de proporcionalidad. Monográfico RED8-Aprendizaje del profesor: Desarrollo de competencias. Servicio de publicaciones de la Universidad de Salamanca. (En prensa)

Burgos, M. y Godino, J.D. (2018a). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *BOLEMA*, 33 (63), p. 389-410.

Burgos, M. y Godino, J.D. (2018b) Solving collaboratively introductory problems to develop proportional thinking in primary school. *EDULEARN2018 Conference. 10th International Conference on Education and New Learning Technologies (pp.* 2492-2497) Palma de Mallorca, Spain: IATED Academy. ISBN: 978-84-09-02709-5.

Burgos, M. y Godino, J.D. (2018c) Recognizing algebrization levels in an inverse proportionality task by prospective secondary school mathematics teachers *Proceedings of the EDULEARN2018 Conference. 10th International Conference on Education and New Learning Technologies (pp.* 2483-2491) Palma de Mallorca, Spain: IATED Academy. ISBN: 978-84-09-02709-5.

Burgos, M., y Godino, J.D. (2019a) Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática, 31* (3), 117-150. DOI: 10.24844/EM3103.05

Burgos, M. y Godino, J. D. (2019b). Conflictos semióticos de alumnos de primaria en la resolución de una tarea de porcentajes. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIII (pp. 223-232). Valladolid: SEIEM.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020) Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria, *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matem*ática, en prensa.

Burgos, M., Godino, J. D., Giacomone, B., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Competencia de análisis epistémico de tareas de proporcionalidad de futuros profesores. ALME Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31(1), 706-713.

Burgos, M., Godino J. D y Rivas, M. (2019) Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Acta Scientiae, 2*1 (4), 63-81.

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno Logo. *Educación Matemática,* 22(31), pp. 55-86.

Cai, J. y Knuth, E. (2011) (Ed.). Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives. Berlin: Springer-Verlag.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.

Carpenter, T. P., Frankle, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P. y Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. (Res.Rep.00-2). Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA).

Carraher, D. W., Martinez, M. V., y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education* 40(1), 3-22.

Carraher, D.W. y Schliemann, A.D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F.K. Lester Jr (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 669-706). Charlotte, NC: Information Age Publishing; Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics

Carraher, D. W. y Schliemann, A.D (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5, Infancia y Aprendizaje, DOI: 10.1080/02103702.2019.1638570.

Castro, W., Pino-Fan, L. y Martínez-Escobar, J. (2017) Levels of Algebrization of the School Mathematics Activity: Text Book Analysis and Students Difficulties. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education,* 6 (2), 164-191.

Chapman. O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Dordrecht: Springer International Publishing.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12* (1), 73-112.

Clarke, B., Grevholm, B. y Millman, R. (eds.) (2009). *Tasks in primary mathematics teacher education. Purpose, use and exemplars*. London: Springer.

Clarke, D., Roche, A., Cheeseman, J., y van der Schans, S. (2014). Teaching strategies for building student persistence on challenging tasks: Insights emerging from two approaches to teacher professional learning. *Mathematics Teacher Education and Development*, 16(2), 46-70.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32, 1, 9–13.

Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire. Histoire et perspectives sur les mathématiques* [math.HO]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I. Disponible en, https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00827905.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2008) Generalising mathematical structure in Years 3-4: A case study of equivalence of expression. In Figueras, O., Cortina, J. L., Alatorre, S., Rojano, T. y Sepulveda, A., (Eds.) *Proceedings of the 32th Conference International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* (pp. 369-376). Morelia, México.

Cramer, K., y Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, 86(5), 404-407.

Crespo, S. (2000). Seeing more than right and wrong answers: Prospective teachers' interpretations of students' mathematical work. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(2), 155–181.

Dabbagh, B., and Kitsantas, A. (2012). Personal Learning Environments, social media, and self-regulated learning: A natural formula for connecting formal and informal learning. *The Internet and Higher Education, 12(1), 3-8.*

Davis, B. (2015). The mathematics that secondary teachers (need to) know. *Revista Española de Pedagogía, 73(261), 321-342.*

DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). *Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. Educational Researcher, 32(1), 5-8.*

Dole, S. y Shield, M. (2008). The capacity of two Australian eighth-grade textbooks for promoting proportional reasoning. *Research in Mathematics Education, 10*(1), 19-35.

Duffy, P. (2008). Engaging the YouTube Google-eyed generation: Strategies for using Web 2.0 in teaching and learning. *Electronic Journal of E-learning, 6*(2), 119-130.

Dupuis, C. y Pluvinage, F. (1981). La proportionnalité et son utilisation, *Recherches en didactique des mathématiques*, *2*(2), pp. 165-212.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 87-101.

English, L. D. (2008) Setting an agenda for international research in mathematics education. En Handbook of international research in mathematics education, 2nd Edition, p 3-19. New YorkyLondon: Tayolor and Francis (Routledge).

Ercole, L.K., Frantz, M., y Ashline, G. (2011). Multiple ways to solve proportions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 16(8), pp. 482-490.

Fernández, P., Caballero, P. y Fernández, J. A. (2013). ¿Yerra el niño o yerra el libro de matemáticas? *Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 83*, 131-148.

Fernández Lajusticia, A. (2001). *Precursores del racionamiento proporcional: un estudio con alumnos de primaria.* Tesis doctoral. Universitat de València. Recuperado de http://roderic.uv.es/handle/10550/38017

Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: Efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje*, 34(1), 67-80.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012) Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), pp. 129-142.

Fernández, C. Llinares, S., y Valls, J. (2011). Development of prospective mathematics teachers' profesional noticing in a specific domain: Proportional reasoning. In the Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 329–336). PME.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2011) “Mirando con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes sobre la razón y proporción. *Acta Scientiae,* 13(1).

Fernández, C., Llinares, C. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-012-0425-y.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1), 441-468.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (13), 39-61.

Fernández, C., y Yoshida, M. (2004). *Lesson study. A Japanese approach to improving mathematics learning and teaching*. Mahwah: Erlbaum.

Fielding-Wells, J., Dole, S. y Makar, K. (2014). Inquiry pedagogy to promote emerging proportional reasoning in primary students. *Mathematics Education Research Journal, 26*, 47-77.

Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número.* Madrid: Síntesis.

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T (2008). *Educational algebra. A theorical and empirical approach*. New York: Springer.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124.

Font, V., Planas, N. y Godino, J.D. (2010) Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (2), p. 89-105.

Fortuny, J. M., y Rodriguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretacion de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación matemática*, (1), 23-37.

Fox, R. (2001). Constructivism examined. *Oxford Review of Education, 27* (1), 23-35. https://doi.org/10.1080/03054980125310

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Hingham, MA: Kluwer.

García F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Tesis Doctoral. Universidad de Jaén, España.

Giacomone, B., Godino, J.D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018) Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 44, 1-21.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., y Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación*, *29*(4), 1-24.

Giménez, J., Vanegas, Y., Font, V., y Ferreres, S. (2012). El papel del trabajo final de Máster en la formación del profesorado de Matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 61, 76-86.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22* (2), 237-284.

Godino J. D. (2009) Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión*, 20, 13-31.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencia*s, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Batanero, C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2016). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics and experimental sciences. *Acta Scientiae*, *18* (4), 29-47.

Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education* 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactic. *For the Learning of Mathematics*, 39 (1), 37-42.

Godino, J D., Batanero, C., Font, V y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D. y Burgos, M. (2017). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 49-66). Zaragoza: SEIEM.

Godino, J. D., Burgos, M. y Wilhelmi, M. (2020) Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. Enseñanza de las Ciencias, (en prensa).

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9* (1), 117-150

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, 38, 25-48.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias, 27*(1), 59–76.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. Educational Studies in Mathematics, 77(2), 247-265

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8,* 117-142.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014) Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34, 167-200.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. Disponible en, https://hera.ugr.es/tesisugr/16582056.pdf

Guacaneme, E. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas* (Tesis de maestría no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Guberman, R., y Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers’ views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16 (1), 33-56.

Harris, P. L (2012). The child as anthropologist. *Infancia y Aprendizaje, 35* (3), 259-277. https://doi.org/10.1174/021037012802238920

Hernández, A. (2007). Libros de y profesionalidad docente. *Revista de la Asociación de Inspectores de Educación de España*, (6), 1-13.

Hill H. C., Ball D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Hines, E., y McMahon, M. T. (2005). Interpreting middle school students’ proportional reasoning strategies: Observations from preservice teachers. *School Science and Mathematics*, 105(2), 88–105.

Hilton, A. y Hilton, G. (2018). Primary school teachers implementing structured mathematics interventions to promote their mathematics knowledge for teaching proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education.* Published online: 28 March 2018. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9405-7

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*, 231-257.

Hummes, V. B., Font, V. y Breda, A. (2019). Uso combinado del estudio de clases y la idoneidad didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la propia práctica en la formación de profesores de matemáticas. *Acta Scientiae*, 21 (1), 64-82.

Inheler, B., y Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. New York: Basic Books.

Isoda, M. (2007). Where did lesson study come begin, and how far has it come? In M. Isoda, M. Stephens, Y. Ohara & T. Miyakawa (Eds.), *Japanese lesson study in mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement* (pp. 8–15). Singapore: World Scientific.

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S., y Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(11), em1599

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Jonassen, D. H. (1991). Objectivism vs. constructivism: do we need a new philosophical paradigm? *Educacional Technology Research & Development, 39*(3), 5-14. https://doi.org/10.1007/bf02296434

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kaput, J. y West, M. (1994). Missing-Value Proportional Reasoning Problems: Factors Affecting Informal Reasoning Patterns. In G. Harel, & J.Confrey, (eds.) *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*. Albany: State University of New York Press.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. (1983). Early adolescents proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14, pp. 219-233.

Kazemi, E., y Franke, M. L. (2004). Teacher learning in mathematics: Using student work to promote collective inquiry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*, 203–235

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.) (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. New York, NY: Routledge.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, 18(1), 139-151.

Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707- 762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Kieran, C., Pang, J. S., Schifter, D., Ng, S. F. (2016). *Early algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. Berlin: Springer.

Ku, K.Y. I., Ho, I. T., Hau, K. T. y Lai, E. C. M. (2014). Integrating direct and inquiry-based instruction in the teaching of critical thinking: an intervention study. *Instructional Science*, 42, 251-269.

Lamon, S. (2005). Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (2nd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En, F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). New York, NY: Information Age Pub Inc.

Langrall, C. W. y Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(4), 254–261.

Leikin, R., y Zazkis, R. (2007). A view on the teachers'opportunities to learn mathematics through teaching. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park, y D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 122-127). Seoul, Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *47*, 87-113.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations for the middle grades* (pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.

Lim, K.H. (2009). Burning the candle at just one end: Using nonproportional examples helps students determine when proportional strategies apply. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 14(8), 492-500.

Lin, P-J. (2018) The Development of Students Mathematical Argumentation in a Primary Classroom. *Educação y Realidade*, 43 (3), p. 1171-1192.

Lin, P-J. y Tai, W-H (2016). Enhancing Students' Mathematical Conjecturing and Justification in Third-Grade Classrooms: the sum of even/odd numbers. *Journal of Mathematics Education*, 9 (1), p. 1-15.

Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question, *Mathematics Teacher Education and Development,* 13 (2), 22-43.

Llinares, S. (2003) Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M. C. Chamorro (Coord.), Didáctica de la matemática para Primaria (pp. 187-220) Madrid: Pearson Prentice Hall.

Llinares, S., y Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(2), 177-196.

Lobato, J., Clarke, D. & Ellis, A. B. (2005). Initiating and eliciting in theaching: a reformulation of telling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (2), 101-136.

Malara, N. A. y Navarra G., (2018). New Words and Concepts for EarlyAlgebra Teaching: Sharing with TeachersEpistemological Issues in Early Algebrato Develop Students'Early AlgebraicThinking. In C. Kieran (Ed.). *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-year-olds. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practic*e (pp. 27-50). Cham, Switzerland: Springer.

Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el*

Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861-2866). Praga, República Checa.

Mallart, A., Font, V. y Diez, J. (2018) Case Study on Mathematics Pre-service Teachers' Difficulties in Problem Posing, *EURASIA J. Math., Sci Tech. Ed* 14(4), 1465–1481, DOI: https://doi.org/10.29333/ejmste/83682

Mason, J. (2016). Perception, interpretation and decision making: understanding gaps between competence and performance-a commentary. *ZDM, 48*(1-2), 219-226.

Mayer R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? *American Psychologist*, *59* (1), 14-19. https://doi.org/10.1037/0003-066x.59.1.14

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

McDuffie, A. R., Foote, M. Q., Bolson, C., Turner, E. E., Aguirre, J. M., Bartell, T. G., Drake, C., y Land, T. (2014). Using video analysis to support prospective K-8 teachers' noticing of students' multiple mathematical knowledge bases. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(3), 245-270.

Misailidou, C., y Williams, J. (2002). "Ratio": Raising teachers' awareness of children's thinking. Paper presented at the 2nd ICMI. Retrieved 16 February 2010, from http:/www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap143.pdf

Misailidou, C y Williams, J. (2003) Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behaviour, 22* (3), 335-368.

Milinkovié, J. (2015). Conceptualizing Problem Posing via Transformation. In J. Cai, N. Ellerton, y F.M. Singer (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From*

Research to Effective Practice, (47-70). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_3

Miyakawa, T. y Winsløw, C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics*, 72, pp. 199–218.

Mochón Cohen, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres, *Educación Matemática*, *24*(1), pp. 133-155.

Modestou, M. y Gagatsis, A. (2010) Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(1), 36-53.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), pp. 135-156.

Morris A. (2007) Factors Affecting Pre-Service Teachers' Evaluations of the Validity of Students' Mathematical Arguments in Classroom Contexts, *Cognition and instruction*, 25 (4), 479-522, DOI: 10.1080/07370000701632405.

Nathan, M. J. y Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instruction*, *18*(2), 209–237.

Nohda, N. (1991). Paradigm of the "open-approach" method in mathematics teaching: Focus on mathematical problem solving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 23(2), 32–37.

Norton, S. (2005) The construction of proportional reasoning. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, p. 17-24). Melbourne, Australia: PME.

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Relime*, *17*(1), 59-81.

Osana, H., Lacroix, G., Tucker, B. y Desrosieres, Ch. (2006). The role of content knowledge and problem features on preservice teachers' appraisal of elementary mathematics tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 347-380.

Ostermann, A. (2018). Factors influencing the accuracy of diagnostic judgments. In T. Leuders, K. Philipp y J. Leuders (Eds), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers* (pp. 95-108). Springer.

Ostermann, A., Leuders, T., y Nuckles, M. (2017). Improving the judgment of task difficulties: Prospective teachers' diagnostic competence in the area of functions and graphs. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 1-27.

Peirce, C. S. (1931-58). Collected Papers of Charles Sanders Peirce, 8 vols., C. Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (eds.). Cambridge: Harvard University Press.

Perrin-Glorian, M. J. (1993), Questions Didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes «faibles», *Recherches en Didactique des mathématiques, 13* (1.2), 5-118.

Pino-Fan, L. R., Assis, A., y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456.

Pino-Fan, L. R., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 14(3), 361-394.

Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 19(1), 71-98.

Ponte, J. P., y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers‘ learning and knowledge for teaching. In L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of* *international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 275–296). New York, NY: Routledge.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Quaresma, M., y Vélez, I. (2017). Elementary teachers' professional development in interrelation with the context of mathematics teaching practice. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 20(1), 1-24.

Portugal, K. O., Arruda, S. D. M., y Passos, M. M. (2018) Free-choice teaching: how YouTube presents a new kind of teacher. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, v. 17, n. 1, p. 183–199.

Posadas, P. y Godino, J. D. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, 1, 77-96

Post, T. R., Harel, G., Behr, M. y Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. En E. Fennema, T. P. Carpenter y S. J. Lamon (Eds.*),* *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 177-198). Ithaca, NY: SUNY Press.

Puig, L. y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H.Chick, y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. G. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, y R. Lins (Eds.) Perspectives in school algebra (pp. 13–36). Dordrecht: The Netherlands: Kluwer Academic.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Radford, L. (2008). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. Working Paper. Prepared for the ICMI Survey Team 7. *The notion and role of theory in mathematics education research.* Disponible en, https://www.researchgate.net/publication/253274896

Radford, L. (2011b). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. En J. Vallès, D. Álvarez y R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docent. Intervenció, innovació, investigació.* (pp. 33-49). Girona (Spain): Documenta Universitaria.

Radford, L. (2011a). Grade 2 Students´ Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives. (pp. 303-322) Berlin: Springer-Verlag.

Radford, L. (2012). Early Algebraic Thinking: Epistemological, Semiotic, and Developmental Issues. En S. J. Cho (ed.). *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education- ICME* (pp. 675-694). Seúl, Korea: National University of Education.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 257-277.

Ramírez, A. (2010). Youtube y el desarrollo de la competencia matemática. Resultados de una investigación cuasi-experimental. *Contextos Educativos*, *13*, 123-138.

Ramos, A. B., y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 233-265.

Rezat, S. (2010). The utilization of mathematics textbooks as instruments of learning. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6*, Working Group 7 (pp. 1260-1269). Lyon, Francia: Institut National De Recherche Pédagogique.

Riley, K. J. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. En P. Brosnan, D. B. Erchick y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 6, pp. 1055-1061). Columbus, OH: The Ohio State University.

Rivas, M. y Godino, J. D. (2010). Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad. *Educere, 14*(48), 189-205.

Rivas, M., Godino J. D. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema*, *26*(42B), 559-588.

Rondero, C. y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias, 33* (2), 29 – 49. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1386

Ruiz, E. y Lupiáñez, J. L. (2009). Detección de obstáculos psicopedagógicos en la enseñanza y el aprendizaje de los tópicos de razón y proporción en alumnos de sexto grado de Educación Primaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(7), 1.

Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. (2004). Connections between qualitative and quantitative thinking about proportion: The case of Paulina. En M. J. Hoines y A. B. Flugestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, 201–208). Bergen, Noruega: PME.

Ruiz-Reyes, K., Contreras, J. M., Arteaga, P., y Oviedo, K. (2017). Análisis semiótico de videos tutoriales para la enseñanza de la probabilidad en educación primaria. In J. M. Contreras et al. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Retrieved from enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Sadler, D. R. (2013). Making competent judgments of competence. En S. Blömeke, O. Zlatkin-Troitschanskaia, C. Kuhn y J. Fege (Eds.), *Modeling and measuring competencies in higher education: Tasks and challenges* (pp. 13-27). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishing.

Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(1), 65-97.

Santagata, R., y Yeh, C. (2014). Learning to teach mathematics and to analyze teaching effectiveness: evidence from a video- and practice-based approach. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(3), 491-514.

Santos, J. A. (2018). *Valoración de video tutoriales de matemáticas disponibles en internet. Nuevos instrumentos para el análisis de los procesos educativos* (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17(*1), 153-172.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., y Brizuela, B. M. (2007). Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.Schliemann, A. D., Carraher, D. W., y Brizuela, B. M. (2012). Algebra in elementary school. In L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier, y A. Robert (Eds.), Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives (pp. 103–118).Grenoble: La Pensée Sauvage.

Seckel M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática* (Tesis doctoral, Universidad de Barcelona). Recuperado de

http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/99644/1/MJSS_TESIS.pdf

Silvestre, A. I. y Ponte, J. P. (2011) Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. *Revista Educación y Pedagogía*, *23*(59), pp.137-158.

Simon, M. y Blume, G. (1994). Mathematical modelling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 13*(2), 183-197.

Simpson, A., y Haltiwanger, L. (2017). This is the first time I've done this: Exploring secondary prospective mathematics teachers' noticing of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(4), 335-355.

Singh, P. (2000) Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students, *Educational Studies in Mathematics*, 43 (3), p. 271-292.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números,* 77, pp. 5-34.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 49–70.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., y Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(2), 127-155.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics 32*, 49–92.

Stylianides, A., Beda, K. y Morselli, F. (2016) Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. In: Gutiérrez, A., Leder, G. y Boero, P. (Eds.). Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: the journey continues, p.315-351.

Streefland, L. (1985). Search for roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (towards… a theory) part II: the outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics,* 16(1), pp. 75 - 94.

Stylianou, D., Stroud, R., Cassidy, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A., y Demers, L. (2019). Putting early algebra in the hands of elementary school teachers: Examining fidelity of implementation and its relation to student performance. *Infancia y Aprendizaje/Journal for the Study of Education and Development*. 42:3, 523-569, DOI: 10.1080/02103702.2019.1604021

Sweller, J., Kirschner, P. A., y Clark, R. E. (2007). Why minimally guided teaching techniques do not work: A reply to commentaries. *Educational Psychologist*, 42 (2), 115-121.

Thomson, P. W. y Thomson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, part I: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(3), 279-303.

Thomson, A. G. y Thomson, P. W. (1996). Talking about rates conceptually, part II: Mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 2-24.

Tichá, M., y Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 133-143.

Turney, C. S. M., Robinson, D., Lee, M., y Soutar, A. (2009). Using technology to direct learning in higher education. The way forward? *Active Learning in Higher Education, 10*(1), 71-83.

Tourniaire, F., Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, pp. 181-204.

Ursini, S. (1996). Experiencias pre-algebraicas. Educación matemática, 8 (2), 33-40.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2008). "The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity", *Journal for Research in Mathematics Education,* 39 (3), 311-342.

Van Dooren, W., De Bock, D., y Verschaffel, L. (2010). From Addition to Multiplication ... and Back: The Development of Students' Additive and Multiplicative Reasoning Skills, *Cognition and Instruction,* 28 (3), 360-381.

Van Dooren, W., Verschaffel, L. y Onghena, P. (2003). Preservice teachers' preferred strategies for solving Arithmetic and Algebra word problems. *Journal of Mathematics Teachers Education, 6 (1), 27 - 52*

Vygotsky, L. S (1934). *Pensamiento y Lenguaje.* Madrid: Visor.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(2), pp.122-137.

Watson, J. M., Collis, K. F. y Moritz, J. B. (2007). The development of chance measurement. In *Stepping Stones for the 21st Century* (pp. 113-138). Brill Sense.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27* (1), 77-120.

Wu, Y. (2004, Julio). Singapore secondary school students'´understanding of statistical graphs. Trabajo presentado en el *10th International Congress on Mathematics Education*. Copenhagen, Dinamarca.

Zalavsky, O. y Sullivan, P. (eds.) (2011). *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics tasks to enhance prospective and practicing teacher learning*. London: Springer.

Zhang, L. (2016). Is inquiry-based science teaching worth the effort? Some thoughts worth considering. *Science Education, 25*, 897-915. https://doi.org/10.1007/s11191-016-9856-0

ANEXOS

ANEXO 1. ACTIVIDADES DE LA INTERVENCIÓN SOBRE RAE CON ESTUDIANTES DEL MÁSTER DE PROFESORADO

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de
Didáctica de la Matemática

Curso de posgrado:

Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en Matemáticas
2016 - 2017

Razonamiento algebraico en primaria y secundaria: niveles de algebrización

Componentes del grupo de trabajo:

OBJETIVOS DEL TALLER

1) Reflexionar y profundizar sobre las características del Razonamiento Algebraico en Primaria y Secundaria.
2) Distinguir tipos de objetos y procesos algebraicos en tareas matemáticas escolares.
3) Asignar niveles de razonamiento algebraico a la actividad matemática realizada al resolver tareas escolares.
4) Diseñar tareas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

METODOLOGÍA DEL TALLER

Durante el desarrollo del taller se realizarán las siguientes actividades:

1. Presentación de las características del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática, basados en los trabajos de Godino y colaboradores (Godino, et al., 2014; Godino, et al., 2015)

2. Trabajando en equipos realizar las siguientes actividades:

2.1. Resolver tareas matemáticas, propias de primaria y secundaria, a ser posible, de varias maneras.

2.2. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

2.3. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

3. Presentación, discusión de resultados y extracción de conclusiones.

3. RESUMEN DE CARACTERÍSTICAS DE LOS NIVELES 0 -3 DE ALGEBRIZACIÓN

NIVE-LES	OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	✓ Objetos con un primer grado de generalidad (números particulares) ✓ Significado operacional de la igualdad. ✓ Variables como receptores de números particulares	✓ Operaciones aritméticas con números particulares	✓ Natural, numérico, icónico, gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos.
1	✓ Objetos con un segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números) ✓ Significado relacional de la igualdad. ✓ Variables como incógnitas.	✓ Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.	✓ Natural, numérico, icónico, gestual; se usan símbolos implicando información espacial, temporal y contextual.
2	✓ Objetos con un segundo grado de generalidad (conjuntos, clases o tipos de números) ✓ Significado relacional de la igualdad ✓ Variables como incógnitas, números generalizados y cantidad cambiante	✓ Operaciones con objetos de primer grado de generalidad, aplicando propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia. ✓ Ecuaciones de la forma, $Ax + B = C$. ✓ En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se realizan operaciones con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	✓ Simbólico – literal, usado para referir a los objetos intensivos reconocidos, aunque todavía ligados a la información espacial, temporal y contextual.

3	✓ Se usan indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares. (Objetos intensivos con un segundo grado de generalidad)	✓ Operaciones con objetos de un segundo grado de generalidad. ✓ Ecuaciones de la forma Ax ± B = Cx ± D. ✓ Se hacen operaciones con indeterminadas o variables para obtener formas canónicas de expresión.	✓ Simbólico – literal; se usan los símbolos de manera analítica (sin significados), sin referir a información contextual.

4. RESUMEN DE CARACTERÍSTICAS DE LOS NIVELES 4 -6 DE ALGEBRIZACIÓN

NIVE-LES	OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
4	✓ Variables, incógnitas y parámetros; ✓ Familias de ecuaciones y funciones ✓ (Objetos intensivos con un tercer grado de generalidad)	✓ Hay operaciones con variables, pero no con los parámetros.	✓ Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.
5	✓ Variables, incógnitas y parámetros; ✓ Familias de ecuaciones y funciones ✓ (Objetos intensivos con un tercer grado de generalidad)	✓ Hay operaciones con los parámetros y, por tanto, con objetos con un tercer grado de generalidad.	✓ Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.
6	✓ Estructuras algebraicas abstractas (espacios vectoriales, grupos, anillos, …) ✓ Relaciones binarias generales y sus propiedades. (Objetos intensivos con un 4º grado de generalidad)	✓ Hay operaciones con los objetos que forman parte de las estructuras.	✓ Simbólico – literal; los símbolos son usados analíticamente, sin referir a información contextual.

LECTURAS BÁSICAS:

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.1, 199-219.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142.

SELECCIÓN DE TAREAS (PRIMARIA):

Tarea 1. Usos del signo igual

Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria:

> *¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera?*
>
> 8 + 4 = ___ + 5

Un alumno responde que el número es el 12. Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta. ¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?

Tarea 2. Propiedades de la adición

Se ha pedido a un alumno que indique si la expresión "13 + 11 = 12 + 12" es verdadera o falsa.

El alumno responde lo siguiente:

> *Es verdadera porque restamos uno al doce y lo sumamos al otro doce, y se obtiene lo que está ahí (en el lado izquierdo).*

a) Explica el razonamiento que pudo seguir el alumno para plantear su respuesta.

b) ¿Qué propiedades de la adición moviliza el alumno que justifica su respuesta?

Tarea 3. Justificación de conjeturas

Un alumno formuló la siguiente conjetura:

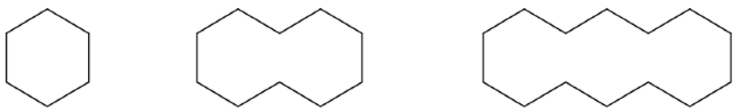
> *"Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número"*

a) ¿Es correcta la conjetura formulada por el alumno? Explica su posible razonamiento.

b) ¿Qué tipo de justificación piensas podría dar un alumno de primaria a esta conjetura?

Tarea 4. Patrón geométrico

Considera la siguiente secuencia de figuras.



a) Representa los dos términos siguientes de la secuencia e indica el número de segmentos necesarios para construir cada una. Explica cómo lo haces.

b) ¿Cómo cambiarías el enunciado de la tarea para inducir algún procedimiento de resolución que ponga en juego conocimientos de tipo algebraico?

c) ¿Cuáles serían tales conocimientos algebraicos?

Tarea 5. Presupuesto de gastos

Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días.

a) ¿Cuánto dinero recibió?

b) ¿Se puede resolver el problema mediante procedimientos exclusivamente aritméticos? ¿Cómo?

c) ¿Se puede resolver el problema usando conocimientos algebraicos? ¿De qué manera?

SELECCIÓN DE TAREAS (SECUNDARIA):

Tarea 1. Relación entre dos programas de cálculo aritmético

Noelia y Marga piensan, independientemente, sendos números. Noelia multiplica su número por 3, resta 18 y acaba dividiendo este resultado entre 9. Marga resta 4 al número que pensó, a continuación, multiplica el resultado por 5 y acaba dividiendo el resultado por 10. Si, casualmente, obtienen el mismo resultado final, ¿qué relación hay entre los números pensados por Noelia y Marga?

a) Resuelve la tarea.

b) Identifica los conocimientos algebraicos que se ponen en juego en la solución y asigna un nivel de algebrización.

c) Enuncia tareas relacionadas cuya resolución implique cambios en los niveles de algebrización que se ponen en juego.

Tarea 2. Familia de funciones cuadráticas

Considera la familia de funciones cuadráticas definida por la expresión, $y = ax^2$

Describe el comportamiento de las funciones distinguiendo los casos,

$a > 0$; $a < 0$; $0 < a < 1$; $a > 1$

a) Explica los efectos del parámetro a en las gráficas de dichas funciones.

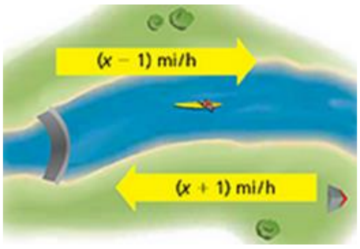
b) Identifica los conocimientos algebraicos que se ponen en juego en la solución, indicando los significados de los signos literales y de la igualdad.

c) Asigna un nivel de algebrización.

Tarea 3. Movimiento uniforme

Supón que remas en kayak 5 millas a favor de la corriente en un río desde tu campamento base hasta una presa, y que seguidamente regresas al campamento. La velocidad constante a la que remas en todo el viaje es de *x* millas por hora, y la velocidad de la corriente del río es de 1 milla por hora. Escribe una expresión que permita calcular el tiempo total del viaje.

a) Resuelve la tarea.
b) Identifica el nivel de algebrización que se pone en juego en la realización de la tarea.
c) Enuncia una tarea relacionada de manera que su resolución implique un nivel 0 de algebrización.
d) Ídem, para un nivel 4 y 5



Tarea 4. Familia de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

¿Para qué valores de k tiene solución el siguiente sistema de ecuaciones?

k - y = 2; x+ y = k

a) Resuelve la tarea

b) Identifica los conocimientos algebraicos que se ponen en juego en la solución y asigna un nivel de algebrización.

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de
Didáctica de la Matemática

Curso de posgrado:

Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en Matemáticas
2016 – 2017

Trabajo complementario opcional

NOMBRE:

A) Resolver los problemas incluidos en el anexo por al menos dos métodos.

B) Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones.

Para cada solución enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver *y justificar* la solución y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*

C) Teniendo en cuenta los conocimientos puestos en juego en cada solución *reconocer el nivel de algebrización* que se pone en juego en cada caso.

D) *Enunciar y resolver* tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización, justificando la asignación de dichos niveles.

ANEXO. ENUNCIADO DE PROBLEMAS

Problema 1.

Se quiere repartir 40 canicas entre Juan y Saúl según la razón 3:5. ¿Cuántas recibirá cada niño?

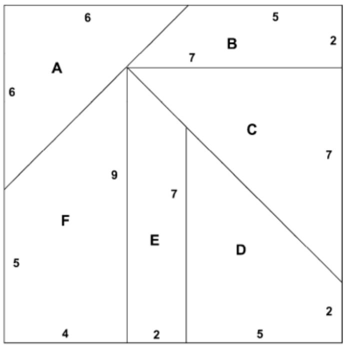
Problema 2.

En la isla de Ítaca, Penélope estaba esperando durante los últimos diez años, el regreso de su marido Ulises que fue a la guerra. En Ítaca, sin embargo, mucha gente quería tomar el lugar de Ulises y casarse con Penélope. Un día la diosa Minerva dijo a Penélope que Ulises inició su regreso y su nave tardaría 50 días en llegar a Ítaca. […]. Penélope reunió a sus pretendientes y les dijo: “Decidí, voy a elegir a mi marido entre uno de vosotros y la boda se celebrará cuando haya terminado de tejer una manta nueva para la cama. Voy a empezar hoy y prometo tejer cada dos días; cuando haya terminado, la manta será mi dote de boda". Los pretendientes estuvieron de acuerdo. La manta tenía que tener 15 palmos de larga. Penélope comenzó inmediatamente el trabajo, pero un día tejía un palmo de manta, mientras que, al día siguiente, en secreto, deshacía la mitad de un palmo; y así sucesivamente...

¿Tendrá que elegir Penélope otro esposo? ¿Por qué?

Problema 3.

En la figura adjunta se presentan las piezas de un puzle. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Construir en cartulina este puzle, pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4 cm tenga una longitud de 7 cm.



Problema 4.

El socio A de una empresa invierte 40,000 € y el socio B invierte 60,000€. El primer año la empresa da de beneficio 5,500 €. En los siguientes años los socios amplían su negocio. Cada año ganaron 2000 € más que el año anterior.
1) ¿Cómo se deberían repartir los beneficios entre los socios? Explica la estrategia y el razonamiento.
2) ¿Cómo se deberían repartir los beneficios en el tercer año? ¿Y el sexto? Explica la estrategia y el razonamiento.
3) ¿Cuántos años pasarán hasta que los socios hayan recuperado la inversión inicial?

Problema 5.

Si la longitud de la circunferencia delantera (grande) de la bicicleta es 462 cm y la de la trasera (pequeña) es de 132 cm, ¿qué distancia debe recorrer la bicicleta para que la rueda pequeña de 30 vueltas más que la grande.

Encuentra una explicación matemática del movimiento de la bicicleta. ¿Cómo lo explicarías a tus estudiantes?

ANEXO 2. ACTIVIDADES DE LA INTERVENCIÓN SOBRE RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y ALGEBRAICO CON ESTUDIANTES DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA. PRIMER CICLO DE INVESTIGACIÓN

ACTIVIDAD PARA TRABAJO EN GRUPO

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de
Didáctica de la Matemática

Diseño y desarrollo del currículum en educación primaria

2016-2017

Razonamiento algebraico en educación primaria

Componentes del grupo de trabajo:

1. OBJETIVOS

1) Reflexionar y profundizar sobre las características del Razonamiento Algebraico en Primaria.
2) Distinguir tipos de objetos y procesos algebraicos en tareas matemáticas escolares.
3) Asignar niveles de razonamiento algebraico a la actividad matemática realizada al resolver tareas escolares.
4) Diseñar tareas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

2. METODOLOGÍA

Se recomienda repasar el contenido de las trasparencias de clase, "Tareas", que aparecen en la plataforma Prado, dentro del Tema 2 y el ejemplo propuesto y resuelto en el Anexo II

Trabajando en equipos realizar las siguientes actividades:

2.1. Resolver las tareas matemáticas que aparecen a continuación, propias de primaria, de varias maneras. Usad todas las estrategias que conocéis, incluyendo las estrategias que pensáis que usarían vuestros alumnos para resolver el problema.

2.2 Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones. Para cada solución enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver el problema y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*

2.3. Discutir las distintas estrategias empleadas para resolver el problema, planteando para qué curso creéis que serían apropiadas y qué dificultades pueden observarse en la resolución del problema usando cada estrategia (para ello observad las prácticas, objetos y procesos identificados potencialmente conflictivos para los alumnos).

2.4. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

2.5. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

3. TAREAS A RESOLVER

Problema 1:

Se quiere repartir 40 canicas entre Juan y Saúl.

1) Si el reparto se hace según la razón 3:5. ¿Cuántas recibirá cada niño?

2) ¿Cómo se produciría el reparto si la razón fuese 2:4?

Problema 2:

1) Si la longitud de la circunferencia delantera (grande) de la bicicleta es 462 cm y la de la trasera (pequeña) es de 132 cm, ¿qué distancia debe recorrer la bicicleta para que la rueda pequeña de 30 vueltas más que la grande.
2) Encuentra una explicación matemática del movimiento de la bicicleta. ¿Cómo lo explicarías a tus estudiantes?

ACTIVIDAD INDIVIDUAL VOLUNTARIA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de
Didáctica de la Matemática

Diseño y desarrollo del currículum en educación primaria

Curso 2016-2017

Trabajo complementario opcional: Razonamiento algebraico en primaria

NOMBRE:

1. Resuelve la tarea matemática que aparece a continuación, propia de primaria, de varias maneras. Usa todas las estrategias que conozcas, incluyendo las estrategias que piensas que usarían tus alumnos de primaria para resolver el problema.

> *Es la fiesta de graduación en el Instituto Las Gaviotas. 7 estudiantes han sido escogidos para diseñar y decorar el salón de actos. Los 7 necesitarían trabajar 21 horas para dejar el salón a punto para la celebración. Desafortunadamente, antes de que ellos pudieran empezar con la tarea, 4 chicos se han puesto enfermos con varicela y se tienen que quedar en casa. ¿Cuántas horas les llevará a los estudiantes que quedan disponibles, diseñar y decorar el salón? Describe y explica la estrategia que has usado para dar tu respuesta.*

2. Para cada solución enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver el problema y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*

Conceptos: entidades matemáticas para las que se puede formular una definición más o menos formal.

Procedimientos: Técnicas, operaciones, algoritmos.

Proposiciones: enunciados para los que se requiere justificación o prueba

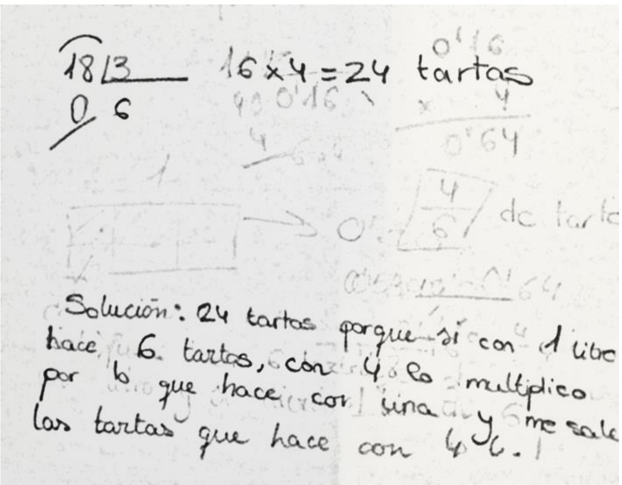
Argumentos: justificaciones de las proposiciones usadas.

3. Detalla qué dificultades puedes observar en la resolución del problema usando cada estrategia (para ello observa las prácticas, objetos y procesos identificados potencialmente conflictivos para los alumnos).

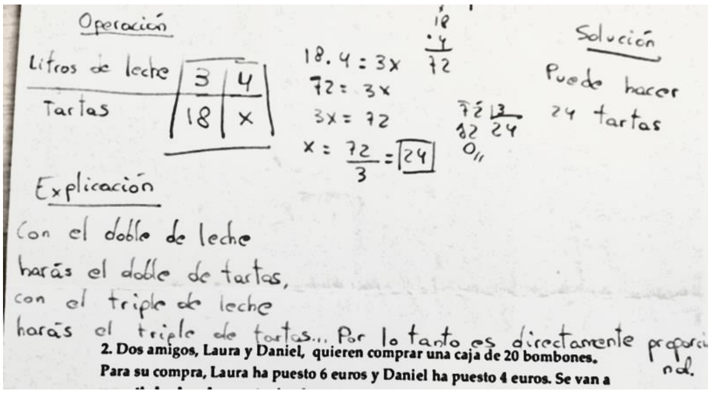
4. Asigna niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a la tarea, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

5. A continuación, aparecen las soluciones dadas por dos niños al siguiente problema:

Un pastelero usa 3 litros de leche para hacer 18 tartas iguales. ¿Cuántas tartas puede hacer con 4 litros de leche? Explica cómo lo has averiguado.



Alumno 1



Alumno 2

a) ¿Crees que son correctas las respuestas (resolución y argumentación) dada por los estudiantes?

b) ¿Qué nivel de algebrización asignas a las distintas respuestas? Justifica tu respuesta

c) Identifica en las soluciones dadas por los estudiantes las distintas prácticas elementales (pasos dados en la resolución del problema) involucradas

ANEXO 3. ACTIVIDADES DE LA INTERVENCIÓN SOBRE RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y ALGEBRAICO CON ESTUDIANTES DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA. SEGUNDO CICLO DE INVESTIGACIÓN.

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de
Didáctica de la Matemática

Diseño y desarrollo del currículum
en educación primaria

Curso 2017-2018

Razonamiento algebraico en primaria

Componentes del grupo de trabajo:

1. OBJETIVOS

1) Reflexionar y profundizar sobre las características del Razonamiento Algebraico en Primaria.
2) Distinguir tipos de objetos y procesos algebraicos en tareas matemáticas escolares.
3) Asignar niveles de razonamiento algebraico a la actividad matemática realizada al resolver tareas escolares.
4) Diseñar tareas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

2. METODOLOGÍA

Se recomienda repasar el contenido de las trasparencias de clase, RAE, que aparecen en la plataforma Prado y el ejemplo propuesto y resuelto en el Anexo II.

Trabajando en equipos realizar las siguientes actividades:

1. Resolver las tareas matemáticas que aparecen a continuación (sección 3), propias de primaria, de al menos dos formas distintas. Usad todas las estrategias que conocéis, teniendo en cuenta aquellas estrategias que pensáis que usarían vuestros alumnos para resolver el problema.

2 Identificar los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones. Para cada solución enumerar la secuencia de prácticas que se realizan para resolver el problema y completar la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*

3. Discutid las distintas dificultades que pueden observarse en la resolución del problema usando cada estrategia.

4. Asignar de forma justificada niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones dadas en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

5. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

6. En el apartado 4 se incluyen las respuestas dadas por unos niños a unos problemas.

a) ¿Crees que son correctas las respuestas (procedimiento y argumento) dadas por los alumnos? Justifica tu respuesta.

a) Identifica los tipos de lenguajes (natural, numérico, diagramático, simbólico,…), conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que identificas en dichas soluciones.

b) Asigna de forma justificada el nivel de algebrización a sus actividades.

3. TAREAS A RESOLVER

Problema 1. Un paquete de 750 gramos de café cuesta 2,5 euros más que el paquete de café de 500 gramos. ¿Cuál es el precio del paquete de café? Explica tu respuesta.

Problema 2. Ana y María han preparado una limonada. Ana ha utilizado 3 cucharadas de azúcar y 12 cucharadas de concentrado de zumo de limón. María utiliza 5 cucharadas de azúcar y 16 cucharadas de concentrado de zumo de limón.

a) ¿Cuál de las dos limonadas es más dulce, la de Ana o la de María? Justifica tu respuesta.

b) Si María quiere preparar una limonada con el mismo sabor que la de Ana, ¿cuántas cucharadas de concentrado de limón debe poner? Explica tu respuesta.

Problema 3. La piscina grande y la pequeña de mi urbanización son semejantes. La pequeña mide 15 metros de largo y la grande 30 metros. Responde de manera razonada:

a) ¿Si la pequeña tiene 1,40 metros de profundidad, ¿cuál es la profundidad de la grande?

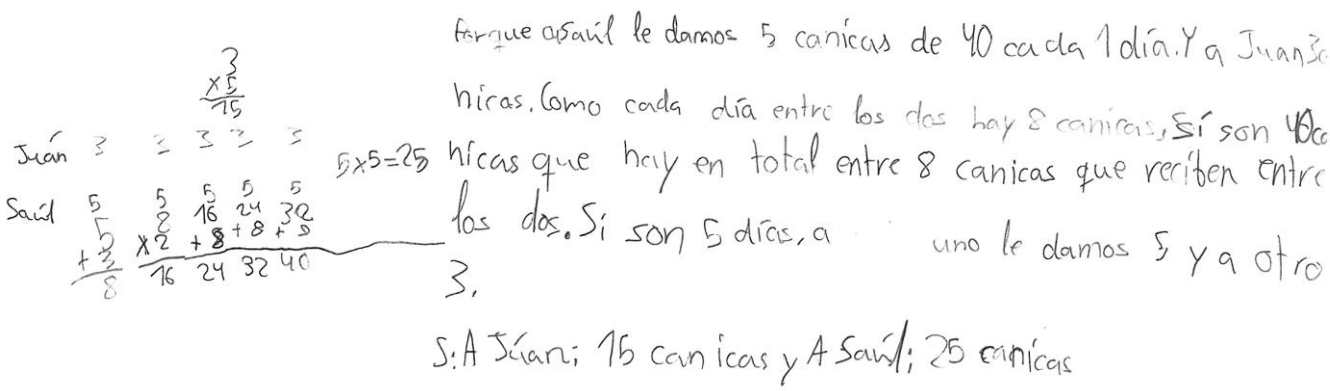
b) Llenar de agua la pequeña cuesta 200 euros. ¿Cuánto costará llenar la grande?

Problema 4. Para pintar una casa, el pintor dedica 8 horas diarias durante 6 días. Si trabajara 10 días, ¿cuántas horas diarias necesitaría?

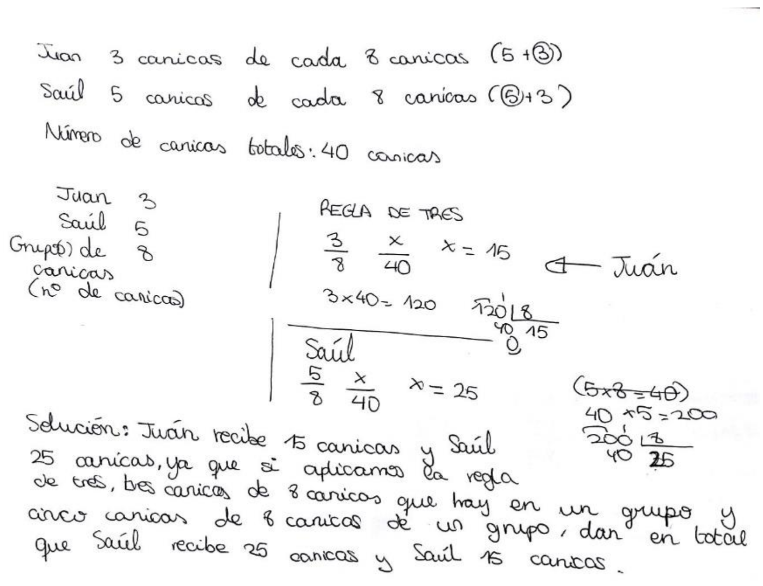
4. RESPUESTAS DADAS POR ALUMNOS DE PRIMARIA

Problema 1. *Se quiere repartir 40 canicas entre Juan y Saúl según la razón 3:5. ¿Cuántas recibirá cada niño? Explica tu respuesta.*

<u>Solución Alumno A</u>.



<u>Solución Alumno B</u>



Problema 2 *Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que va en coche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela ¿cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?*

<u>Solución Alumno C</u>

Niños	4	8	212
Coche	1	2	x

$$\frac{4}{1} = \frac{212}{x}$$

$$4 \cdot x = 212 \cdot 1$$

$$4 \cdot x = 212$$

$$x = \frac{212}{4} = 212 : 4 = 53$$

S: 53 alumnos utilizan el medio de locomoción.

S: Porque $\frac{4}{1}$ es equivalente a $\frac{212}{53}$

<u>Solución Alumno D</u>

Alumnos C.	Alumnos P.	Alumnos T.
1	3	212
2	6	
3	9	
4	12	
5	15	
6	18	
7	21	
8	24	
9	27	
	30	
10	60	
20	150	
50	210	
70		

- 70 niños en coche
- a pie 142

ANEXO I RESUMEN DE CARACTERÍSTICAS DE LOS NIVELES 0 -3 DE ALGEBRIZACIÓN

NIVE-LES	OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	Números particulares Significado operacional de la igualdad(operación igual a respuesta) Símbolos literales como receptores de números particulares.	Operaciones aritméticas con números particulares	Natural, numérico, icónico. Pueden intervenir símbolos sólo referidos a datos desconocidos.
1	Conjuntos, clases o tipos de números. Significado relacional de la igualdad. Variables como incógnitas, pero no se opera con ellos.	Operaciones aritméticas con números particulares. Se aplican propiedades de la estructura algebraica del conjunto N de los números naturales	Natural, numérico, icónico, gestual. Se pueden usar símbolos implicando información espacial, temporal y contextual.
2	Conjuntos, clases o tipos de números. Significado relacional de la igualdad. Variables como incógnitas	Operaciones con números particulares, aplicando propiedades de la estructura algebraica de N. Ecuaciones de la forma $\boldsymbol{Ax + B = C}$ No se realizan operaciones con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal aunque todavía ligados a la información espacial, temporal y contextual.
3	Se usan indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y algunas funciones particulares.	Ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. Se hacen operaciones con indeterminadas o variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal; Se usan los símbolos de manera analítica sin referir a información contextual.

ANEXO II EJEMPLO RESUELTO

Método

Se analizan las prácticas, objetos y procesos de distintas maneras de resolver un problema de proporcionalidad directa. El fin es desvelar cómo aplicando distintos procedimientos de resolver el problema y variantes del mismo es posible poner en juego los niveles 0 a 3 de algebrización y, por tanto, distintos significados de la proporcionalidad. El enunciado del problema es el siguiente:

Problema (enunciado inicial):

> Un coche consume 8,4 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros puede recorrer con 25,2 litros?

Solución 1. Aritmética, nivel 0 de algebrización

1) Se supone que el coche mantiene constante el consumo de gasolina. Es decir, siempre que recorre 100 km, su consumo en esta distancia es de 8,4 litros.
2) Por tanto, cuando haya recorrido 200 km, el consumo de gasolina será el doble del que ha consumido al recorrer 100km y cuando haya recorrido 300 km, habrá gastado el triple de gasolina.
3) Si consumió 8,4 litros al recorrer 100 km, consumiría 8,4x2=16,8 litros al recorrer 200 km y 8,4x3=25,2 litros al recorrer 300km.
4) Por tanto, con 25,2 litros puede recorrer 300 km.

Configuración ontosemiótica solución 1:

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos ...)*
1) Se supone que el coche mantiene constante el consumo de gasolina. Es decir, siempre que recorre 100 km, su consumo en esta distancia es de 8,4 litros.	Conceptos: magnitudes volumen y distancia; cantidades, medida. Proposición: el consumo es constante. Argumento: se acepta por hipótesis
2) Por tanto, cuando haya recorrido 200 km, el consumo de gasolina será el doble del que ha consumido al recorrer 100km y cuando haya recorrido 300 km, habrá gastado el triple de gasolina	Conceptos: doble, triple de una cantidad; correspondencia entre cantidades de dos magnitudes (función) Proposición P1: la imagen de la suma es la suma de las imágenes. Argumento: por la hipótesis formulada en 1)
3) Si consumió 8,4 litros al recorrer 100 km, consumiría 8,4x2=16,8 litros al recorrer 200 km y 8,4x3=25,2 litros al recorrer 300km	Procedimiento: cálculo del consumo al recorrer 300km Argumento: por aplicación de P1.
4) Por tanto, con 25,2 litros puede recorrer 300 km.	Proposición: enunciado de los km que recorre con la cantidad de gasolina dada Argumento: secuencia de prácticas 1) a 4).

Solución 2. Proto-algebraica de nivel 1 (Reducción a la unidad)

1) Se supone que el coche mantiene constante el consumo de gasolina.
2) Por lo tanto, la relación entre las magnitudes "volumen" de gasolina consumida y "distancia" recorrida es de *proporcionalidad directa.*
3) Calculamos primero los kilómetros que recorre el coche por cada litro consumido, dividiendo 100 entre 8,4:

100/8,4 = 11.904761 .., aprox. 11.905

11.905 son los kilómetros que puede recorrer el coche por litro.

4) Si por cada litro recorre 11.905 km, con 25,2 litros recorrerá, 11.905 × 25.2 = 300 km

Configuración ontosemiótica solución 2:

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos ...)*
1 Se supone que el coche mantiene constante el consumo de gasolina, de manera que, con el doble, triple, etc. de combustible, podré recorrer el doble, triple, etc, de distancia.	Conceptos: multiplicación; secuencia ilimitada; correspondencia funcional; magnitud, cantidad, medida Proposición P1: enunciado de la práctica 1) Argumento: convención pragmática
2 Por tanto, la relación entre las magnitudes "volumen" de gasolina consumida y "distancia" recorrida es de proporcionalidad directa.	Concepto: proporcionalidad directa Proposición P2: la relación entre ambas magnitudes es de proporcionalidad directa Argumento: se cumplen las condiciones que definen la proporcionalidad directa
3 Calculamos los kilómetros que recorre el coche por cada litro de gasolina consumido: 100/8,4 = 11.904761 .., aprox. 11.905 11.905 son los kilómetros que puede recorrer el coche por litro	Conceptos: consumo unitario Procedimiento: cálculo consumo unitario (aproximado). Argumento: la relación es de proporcionalidad directa
4. Si por cada litro recorre 11.905 km, con 25,2 litros recorrerá, 11.905 × 25.2 = 300 km	Proposición: La distancia que recorrerá con 25,2 litros es 300 km. Argumento: Secuencia de prácticas 1) a 4)

Solución 3. Uso de diagramas (nivel 1 de algebrización):

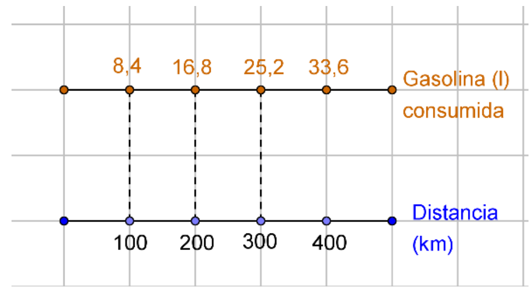


Figura 1a) Diagrama lineal

+8,4 +8,4 +8,4

Gasolina (l)	8,5	16,8	25,2	33,6
Distancia (km)	100	200	300	400

+100 +100 +100

Figura 2b). Diagrama tabular

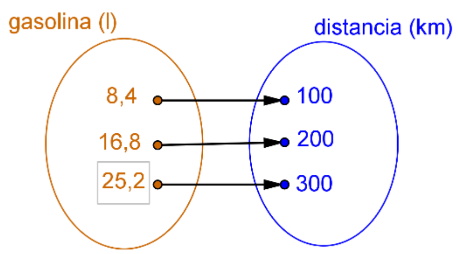


Figura 3c). Diagrama sagital

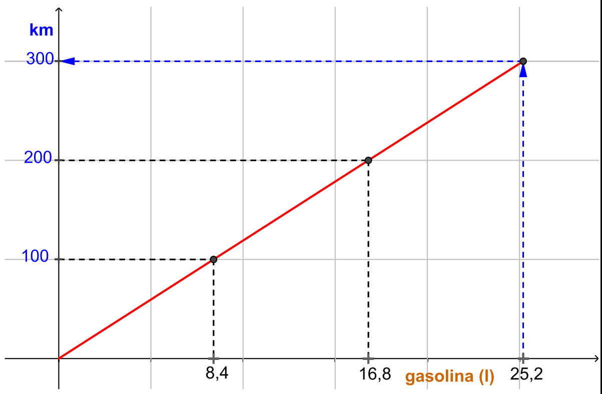


Figura 4d). Gráfico cartesiano

Conocimientos puestos en juego en las soluciones diagramáticas:

Procedimientos: representación, en la recta numérica (tabla, flechas, cartesiano), de los valores numéricos de las cantidades de las magnitudes volumen y distancia; cálculo del doble, triple, …, de la cantidad dada para el consumo de 8,4 l; puesta en relación uno a uno entre las dos series de valores numéricos que se suponen proporcionales.

Conceptos: cantidades de magnitud, medidas, valores numéricos de las medidas; recta numérica (disposición tabular; gráfico sagital y cartesiano)

Se supone que el diagrama debe ir acompañado de un argumento que sustente las condiciones de aplicación de la proporcionalidad directa entre las magnitudes.

Solución 4: Proto-algebraica. Nivel 2 (Regla de tres)

1) En el enunciado se supone establecida una correspondencia de proporcionalidad directa entre dos magnitudes: "distancia" recorrida por el coche, y "volumen" de gasolina consumida.
2) Por tanto, la razón de cantidades que se corresponden se mantiene constante:

$$\frac{100\ km}{8{,}4\ l} = \frac{x}{25{,}2l};$$

3) Teniendo en cuenta la igualdad del producto en cruz de los términos en una proporción,

$$x = \frac{100km \times 25{,}2l}{8{,}4l} = 300km$$

4) Es decir, el coche recorrerá 300 kilómetros con 25,2 litros de gasolina

Configuración ontosemiótica solución 4:

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos ...)*
1 En el enunciado se supone establecida una correspondencia de proporcionalidad directa entre las magnitudes: "distancia" recorrida por el coche y "volumen" de gasolina consumida.	Concepto: proporcionalidad directa Proposición: la relación entre ambas magnitudes es de proporcionalidad directa Argumento: se cumplen las condiciones que definen la proporcionalidad directa
2 Por tanto, la razón de cantidades que se corresponden se mantiene constante $\frac{100\ km}{8{,}4\ l} = \frac{x}{25{,}2l}$	Conceptos: razón de cantidades; proporción; incógnita Proposición P3: las razones son iguales Argumento: el kilometraje por litro de combustible es constante
3 Teniendo en cuenta la igualdad del producto en cruz de los términos en una proporción, $x = \frac{100km \times 25{,}2l}{8{,}4l} = 300km$	Procedimiento: despeje de la incógnita. Argumento: propiedades aritméticas
4 Es decir, el coche recorrerá 300 kilómetros con 25,2 litros de gasolina	Proposición: La distancia que recorrerá con 25,2 litros es 300 km. Argumento: Secuencia de prácticas 1) a 4)

Variante:

Mi coche y el de mi padre tienen el mismo consumo. El volumen de mi tanque es de 60 litros y el de mi padre es de 82 litros. Si mi padre puede recorrer 220 kilómetros más que yo con su coche antes de volver a repostar, ¿cuál es el consumo de mi coche?

Solución variante (nivel de algebrización 3)

1) Se asume una relación de proporcionalidad entre el consumo de combustible y la distancia recorrida.

2) Llamemos x a los kilómetros que puede recorrer mi coche con un litro de combustible.
3) Puesto que la capacidad de mi tanque es de 60 litros, con todo el depósito podré recorrer $60x$ kilómetros.
4) El consumo del coche de mi padre es el mismo que el mío, de modo que, si su tanque tiene una capacidad de 82 litros, hasta volver a repostar podrá recorrer $82x$ kilómetros.
5) Mi padre puede recorrer 220 kilómetros más que yo con su coche, es decir,

    $$82x=60x+220$$

6) Luego, $82x - 60x=220$. De aquí, $(82-60)x=220$, es decir, $22x=220$, y finalmente $x=220/22=10$ es el número de kilómetros que podemos recorrer con un litro de combustible.
7) Por tanto, el consumo es de 10 litros a los 100 kilómetros.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de
Didáctica de la Matemática

Diseño y desarrollo del Currículum
en Educación Primaria

2017 – 2018

Tarea de evaluación: Razonamiento algebraico en educación primaria

Nombre:

1. Resuelve las tareas matemáticas que aparecen a continuación (**Anexo I**), propias de primaria, de al menos dos formas distintas, teniendo en cuenta aquellas estrategias que pensáis que usarían vuestros alumnos para resolver el problema.

2. Identifica los conocimientos que se ponen en juego en las soluciones. Para cada solución enumera la secuencia de prácticas que se realizan para resolver el problema y completa la tabla incluida a continuación, añadiendo las filas necesarias.

Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)*

3. Destaca entre las prácticas, objetos y procesos identificados cuáles consideras potencialmente conflictivos para los estudiantes.

4. Asigna *de forma justificada* niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones que has dado en el punto anterior a las tareas, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

5. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

6. En el **Anexo II** se incluyen las respuestas dadas por unos niños a unos problemas.

   a) ¿Crees que son correctas las respuestas (procedimiento y argumento) dadas por los alumnos? Justifica tu respuesta.

b) Identifica los tipos de lenguajes (natural, icónico, diagramático, simbólico,…), conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que reconoces en dichas soluciones.

c) Asigna de forma justificada el nivel de algebrización que ponen en juego los niños en sus respuestas.

Anexo I

Problema 1. Si una barrita de cereales de 22 gramos contiene 4 gramos de materia grasa, ¿cuánta materia grasa hay en 100 gramos de producto?

Problema 2. En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más?

Problema 3. Cinco amigos quieren hacer un regalo de cumpleaños. Deben poner cada uno 5,40 euros. Otros cuatro amigos se unen para contribuir al regalo. ¿Cuántos euros deben poner ahora cada uno? Explica cómo lo has obtenido.

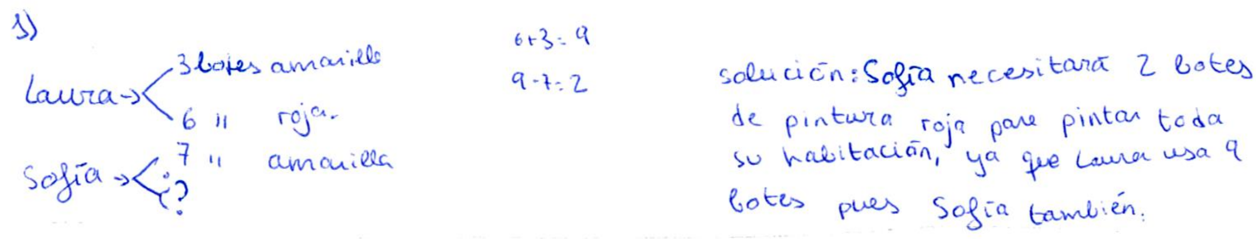
Problema 4. Ana, María y Luis están plantando árboles en el campamento “Repoblamos”. Ana y María empezaron al mismo tiempo, pero María es más rápida. Luis va a la misma velocidad que Ana, pero empezó antes. Cuando Ana había plantado 4 árboles, María había plantado 12 y Luis había plantado 8. Al acabar, Ana ha plantado 20 árboles.

a) ¿Cuántos habrá plantado María? Explica cómo lo has averiguado.
b) ¿Cuántos habrá plantado Luis? Explica cómo lo has averiguado.
c) Pasado un tiempo, si sabes el número de árboles que ha plantado Ana, ¿cómo podrías saber el número de árboles que ha plantado María? ¿Y el número de árboles que ha plantado Luis? Explica tu respuesta.

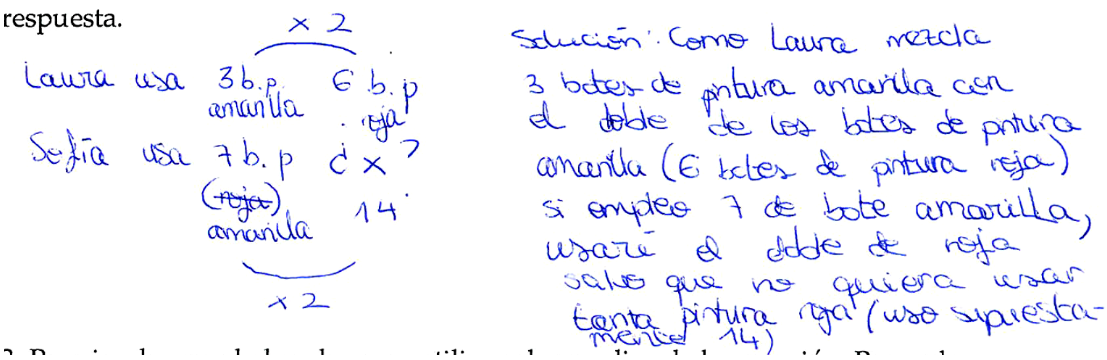
Anexo II

Problema 1. Laura y Sofía quieren pintar sus habitaciones del mismo color. Laura mezcla 3 botes de pintura amarilla y 6 de pintura roja. Si Sofía ha usado 7 botes de pintura amarilla, ¿cuántos botes de pintura roja necesitará? Explica tu respuesta.

<u>Solución Alumno A1</u>.

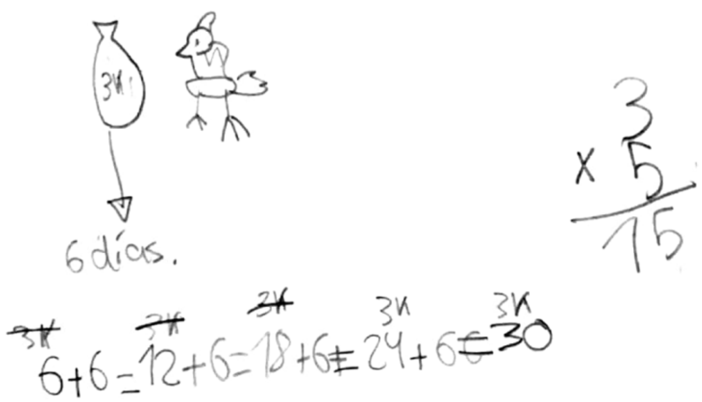


<u>Solución Alumno A2</u>



Problema 2 Con tres kilos de maíz mis gallinas comen 6 días. ¿Cuántos kilos de maíz necesitaré para 30 días? Explica tu respuesta.

<u>Solución Alumno A3</u>



Porque cada 6 días comen 3 K. Cada 12 días 6 Kilos, cada 18 días 9 Kilos, cada 24 días 12 K y cada 30 días 15 Kilos. Asique son 15 Kilos

Solución Alumno A4

$\frac{3}{6} = \frac{x}{30}$ $\quad 30 \times 3 = 90 \quad 90 : 6 = 15 \quad \frac{3}{6} = \frac{15}{30}$

En la segunda he utilizado la regla de tres. He descubierto la incógnita (que es 15).

Kilos	3	x
Días	6	30

$\frac{3}{6} \xrightarrow{\times 5} \frac{x¿?}{30}$ son fracciones equivalentes dentro de la tabla de proporcionalidad

$30 : 6 = 5 \quad \times 3 = 15$

Problema 3 Dos amigos, Laura y Daniel, quieren comprar una caja de 20 bombones Para su compra, Laura ha puesto 6 euros y Daniel ha puesto 4 euros. Se van a repartir los bombones, teniendo en cuenta la cantidad de dinero que ha aportado cada uno para la compra.

a) ¿Qué precio tiene cada bombón? Explica como lo has averiguado.

b) ¿Cuántos bombones le correspondería a cada uno? Explica cómo lo has obtenido.

Solución Alumno A5

$6+4=10$ $\quad$ $6\times2=12$ $\quad$ $12+8=20$

$20 \underline{|10}$ $\quad$ $4\times2=8$

(0) $\quad 2$

S: Cada bombón cuesta 2€, lo he averiguado ya que si Laura ha puesto 6€ y Daniel 4€ pues al sumarlo y dividirlo entre la caja de 20 bombones ya nos sale el precio de cada bombón.
Pues sabiendo que que Laura ha pagado 6€ pues al multiplicarlo por 2 saldría lo que le correspondería a cada uno. Es decir, a Laura le corresponderían 12 bombones y a Daniel 8 bombones.

Solución Alumno A6

a) ¿Qué precio tiene cada bombón? Explica como lo has averiguado. 0'5

b) ¿Cuántos bombones le correspondería a cada uno? Explica cómo lo has obtenido. 12 el de 6€ y 8 el de 4€

$6+4=10$ $\quad$ $100 \underline{|20}$ $\quad$ 60% de $20 : 100 = 0'2 \times 60 = 12$

$0'5$ $\quad$ $3'333$

$20 - 12 = 8$

Explicación A): Sumamos las cantidades de euros que han pagado para saber el precio y lo dividimos entre los 20 bombones

Explicación B): Como Laura a pagado el 60% de la caja calculamos cual es el 60% y eso es lo que se llevo. Restamos a 20 ~~el~~ 60% para saber el 40% y eso es lo que se llevo Daniel.

ANEXO 4. ACTIVIDADES DE LA INTERVENCIÓN SOBRE IDONEIDAD DIDÁCTICA DE VÍDEOS EDUCATIVOS CON ESTUDIANTES DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de
Didáctica de la Matemática

Diseño y desarrollo del Currículum en Educación Primaria:

Idoneidad didáctica de vídeos educativos

2017 - 2018

Idoneidad didáctica de vídeos educativos

Componentes del grupo de trabajo:

Motivación

El fenómeno de los vídeos educativos alojados en plataformas en línea no es nuevo. No sólo los alumnos, acuden a ellos con frecuencia para ayudarse en sus estudios sino que también se está convirtiendo en recurso por parte del maestro en su trabajo. Desde este punto de vista, como futuros maestros, debéis ser competentes para reconocer el grado en que dicho material reúne ciertas características que permiten calificarlo como adecuado para su uso en la práctica docente.

En esta práctica, nos centraremos en analizar la idoneidad epistémica de vídeos educativos en línea, referidos a repartos directamente proporcionales. La idoneidad epistémica se considera mayor en la medida que los contenidos pretendidos o implementados representan bien a los contenidos de referencia.

Vamos a centrar nuestra atención sobre repartos directamente proporcionales, haciendo uso además del modelo de niveles de razonamiento algebraico escolar para analizar ciertos componentes de la idoneidad epistémica.

Consigna.

Vamos a considerar los siguientes vídeos educativos:

Vídeo 1. https://www.youtube.com/watch?v=0Z5DejetHR8

Vídeo 2. https://www.youtube.com/watch?v=v8KN44iNPls

Vídeo 3. https://www.youtube.com/watch?v=1uAbIb-McLo

En esta práctica primero tendréis que ver los vídeos en casa y de forma individual, decidir el mayor o menor grado de idoneidad de los mismos así como su nivel de algebrización, teniendo en cuenta el tipo de solución desarrollada. Después, en clase, discutiréis con vuestro grupo de trabajo vuestras valoraciones, elaborando después una propuesta grupal.

El trabajo a entregar será:

1. Los resultados sobre la valoración de la idoneidad didáctica y el nivel de algebrización de cada vídeo para cada uno de los integrantes del grupo realizados de manera individual en casa (siguiendo las instrucciones del ANEXO 1).

2. El resultado consensuado del grupo sobre la valoración de la idoneidad didáctica y el nivel de algebrización de cada vídeo (siguiendo las instrucciones del ANEXO 1) realizado en clase.

ANEXO 1

Completar tanto para la parte individual como para la parte grupal el mismo esquema

1. Para analizar la idoneidad epistémica de cada uno de los vídeos, tendremos en cuenta los componentes y descriptores que hemos estudiado. En primer lugar, analizamos:

a) la presencia de distintos registros y representaciones lingüísticas,
b) si las definiciones, proposiciones y procedimientos son claros y correctos y
c) si las proposiciones o procedimientos tienen argumento asociado y se identifican los diversos significados de los objetos que intervienen.

Para ello completaremos las siguientes tablas identificando en cada vídeo las características señaladas.

Registros y representaciones lingüísticas			
	Vídeo1	**Vídeo 2**	**Vídeo 3**
Natural (oral)			
Natural (escrito)			
Natural (escrito, solo etiquetas)			
Gestual			
Simbólico (numérico)			
Simbólico (algebraico)			
Tabular			
Gráfico			
Animación			
Otro (indica cual)			

Errores e imprecisiones en las reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos) y en los argumentos.				
		Vídeo1	**Vídeo 2**	**Vídeo 3**
Reglas	Errores de tratamiento aritmético-algebraico.			
	Un reparto directamente proporcional es aquel en el que el que *más* aporta es el que *más* recibe.			
	Otros errores o imprecisiones.			
Argumentos	Comprobar que el total es la suma de las partes obtenidas, sin aludir a que no es condición suficiente.			
	Comprobar que el que *más* aportó es el que *más* recibe y que el que *menos* aportó es el que *menos* recibe, sin aludir a que no es condición suficiente.			
	Otros errores o imprecisiones			

Relaciones entre los objetos matemáticos					
		Idoneidad	**Vídeo1**	**Vídeo 2**	**Vídeo 3**
Relaciones entre objetos	Todas las proposiciones y procedimientos tienen un argumento asociado	Alta			
	Algunas proposiciones y procedimientos tienen un argumento asociado	Media			
	Ninguna de las proposiciones y procedimientos tienen un argumento asociado	Baja			
Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen	Siempre	Alta			
	A veces	Media			
	Nunca	Baja			

2. El análisis anterior de los vídeos nos permite concluir el nivel de algebrización de las prácticas desarrolladas en ellos:

Tipos de soluciones y niveles de algebrización (NA)						
Solución / **Vídeo**	**Parte -todo**	**Reducción a la unidad**	**Valor faltante**	**Regla de tres**	**Otro (indica brevemente cual)**	**NA**
Vídeo 1						
Vídeo 2						
Vídeo 3						
Otro						

3. En función de los resultados obtenidos en el análisis anterior, vamos a valorar cuantitativamente el grado de idoneidad didáctica de los vídeos (en el ANEXO 2 se recogen los descriptores de las distintas componentes). Así cada uno de los indicadores se valorará según su contribución a la idoneidad fuera baja, media o alta, asignando los valores numéricos 0, 1 o 2, respectivamente.

VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD EPISTÉMICA			
Componente	**Vídeo 1**	**Vídeo 2**	**Vídeo 3**
Lenguajes			
Reglas			
Argumentos			
Relaciones entre objetos			
Articulación de significados			

ANEXO 2

COMPONENTES	DESCRIPTORES:
Lenguajes	- Se usa un amplio repertorio de representaciones (materiales, icónicas y simbólicas) para modelizar problemas e ideas matemáticas, analizando la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realizando transformaciones entre las mismas. - Se favorece que los estudiantes construyan, perfeccionen y usen sus propias representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas. - El nivel del lenguaje usado es adecuado a los estudiantes a que se dirige.
Reglas (Definiciones, propiedades, procedimientos)	- Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen - Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar y generalizar definiciones, propiedades y procedimientos
Argumentos	- Se favorece el razonamiento y la prueba de los enunciados y proposiciones matemáticas mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba. - Los estudiantes formulan con frecuencia conjeturas sobre relaciones matemáticas, las investigan y justifican. - Las explicaciones y comprobaciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen.
Relaciones	- Se favorece el establecimiento y el uso de conexiones entre las ideas matemática (problemas, representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos) - Los contenidos matemáticos se presentan y estudian como un todo organizado - Se reconocen y aplican las ideas matemáticas en contextos no matemáticos.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Departamento de
Didáctica de la Matemática

Diseño y desarrollo del Currículum en Educación Primaria: Idoneidad didáctica de vídeos educativos
2017 - 2018

Tarea de evaluación: Idoneidad didáctica de vídeos educativos

NOMBRE:

Motivación

El fenómeno de los vídeos educativos alojados en plataformas en línea no es nuevo. No sólo los alumnos, acuden a ellos con frecuencia para ayudarse en sus estudios, sino que también se está convirtiendo en recurso por parte del maestro en su trabajo. Desde este punto de vista, como futuros maestros, debéis ser competentes para reconocer el grado en que dicho material reúne ciertas características que permiten calificarlo como adecuado para su uso en la práctica docente.

En esta tarea, nos centraremos en analizar la idoneidad epistémica de un vídeo educativo en línea sobre proporcionalidad directa. La proporcionalidad es un objeto matemático longitudinal y transversal en el currículo tanto de Educación Primaria como de Secundaria.

Bloque	**Descriptores**
Mat 2. Números	*CO*: Porcentajes y *proporcionalidad*. Porcentajes: Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes. Aumentos y disminuciones porcentuales. *Proporcionalidad* directa. La *Regla de tres* en situaciones de *proporcionalidad* directa: ley del doble, triple, mitad. Resolución de problemas de la vida cotidiana. *CE* 7. Iniciarse en el uso de los de porcentajes y la *proporcionalidad* directa para interpretar e intercambiar información y resolver problemas en contextos de la vida cotidiana. *EAE* 7.4. Usa la *regla de tres* en situaciones de *proporcionalidad* directa: ley del doble, triple, mitad, para resolver problemas de la vida diaria. *EAE* 7.5. Resuelve problemas de la vida cotidiana utilizando porcentajes y *regla de tres* en situaciones de *proporcionalidad* directa, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.
Art 1. Educación audiovisual	EAE 2.5. Elabora carteles con diversas informaciones considerando los conceptos de tamaño, equilibrio, *proporción* y color, y añadiendo textos en los utilizando la tipografía más adecuada a su función
Art 2. Expresión artística	EAE 2.4. Organiza el espacio de sus producciones bidimensionales utilizando conceptos básicos de composición, equilibrio y *proporción*.

Leyenda *Asignaturas*: MAT: Matemáticas; ART: Educación Artística
Descriptores: CO: Contenido; CE: Criterio de Evaluación; EAE: Estándar de aprendizaje evaluable

Consigna.

Vamos a considerar el siguiente vídeo del canal Clasematemáticas

https://www.youtube.com/watch?v=o1Mu-lkgv-oyindex=2ylist=PLZNmE9BEzVIkOdmbGm3jJH7F7sf1hpvYa

Se trata de ver detenidamente el vídeo y decidir de manera crítica y siguiendo los componentes e indicadores de idoneidad epistémica el mayor o menor grado de idoneidad del mismo.

1. Para analizar la idoneidad epistémica del vídeo, tendremos en cuenta los componentes y descriptores que hemos estudiado:

a) **variedad de situaciones-problemas propuestos**. Señala en la siguiente tabla aquellas características que identifiques a lo largo del vídeo.

Situaciones-problema	Vídeo
Se presenta una muestra representativa y articulada de problemas	
Las situaciones aparecen contextualizadas	
Las ideas matemáticas están conectadas	
Se proponen diversas maneras de abordar los problemas	

b) **presencia de distintos registros y representaciones lingüísticas.** Marca en la siguiente tabla aquellos que identifiques a lo largo del vídeo.

Registros y representaciones lingüísticas	Vídeo
Natural (oral)	
Natural (escrito)	
Simbólico (numérico)	
Simbólico (algebraico)	
Tabular	
Gráfico	
Animación	
Otro (indica cual)	

c) **claridad y corrección de las definiciones, proposiciones y procedimientos.** Identifica la presencia de errores o imprecisiones que en la siguiente tabla:

Errores e imprecisiones en las reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos) y en los argumentos		Descripción del error
Reglas	Errores de tratamiento aritmético-algebraico.	
	Errores en las definiciones	
	Errores en las proposiciones/procedimientos	
Argumentos	Error o imprecisión al argumentar una relación de proporcionalidad.	
	Error o imprecisión al argumentar una transformación aritmética-algebraica	
	Otros errores o imprecisiones	

d) **las proposiciones o procedimientos tienen argumento asociado y se identifican los diversos significados de los objetos que intervienen**. Atribuye en la siguiente tabla las características mencionadas según su mayor o menor presencia en el vídeo.

Relaciones entre los objetos matemáticos		Idoneidad	Vídeo
Relaciones entre objetos	Todas las proposiciones y procedimientos tienen un argumento asociado	Alta	
	Algunas proposiciones y procedimientos tienen un argumento asociado	Media	
	Ninguna de las proposiciones y procedimientos tienen un argumento asociado	Baja	
Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen	Siempre	Alta	
	A veces	Media	
	Nunca	Baja	

2. En función de los resultados obtenidos en el análisis anterior, valora cuantitativamente el grado de idoneidad didáctica de los vídeos. Cada uno de los indicadores se puntuará según su contribución a la idoneidad sea baja, media o alta, asignando los valores numéricos 0, 1 o 2, respectivamente.

VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA	
Componente	**Valoración del vídeo**
Situaciones-problema	
Lenguajes	
Reglas	
Argumentos	
Relaciones entre objetos	
Articulación de significados	
Puntuación final	

Argumenta los motivos que te han llevado a asignar esas valoraciones de la idoneidad para cada vídeo:

3. ¿Te parece adecuado este vídeo? Justifica tu respuesta.

ANEXO 5. PUBLICACIONES VINCULADAS CON LA TESIS DOCTORAL

ARTÍCULOS EN REVISTAS O CAPÍTULOS DE LIBRO

Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Burgos, M. (2018) Online educational videos according to specific didactics: the case of mathematics. *Cultura y Educación*, 30 (4), 633-662.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, *44*, 1-22.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). Desarrollo de la competencia de análisis de idoneidad didáctica de vídeos educativos de matemáticas en futuros maestros de educación primaria. *Revista Españoa de Pedagogía*, 78 (275), 27-45, DOI: https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07.

Burgos, M. Giacomone, B, Godino J.D. y Neto, T. (2020) Desarrollo de la competencia de Análisis Ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas mediante tareas de proporcionalidad. Monográfico RED8-Aprendizaje del profesor: Desarrollo de competencias. Servicio de publicaciones de la Universidad de Salamanca. (En prensa)

Burgos, M. y Godino, J.D. (2018a). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *BOLEMA*, 33 (63), p. 389-410.

Burgos, M. y Godino, J.D. (2019) Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática*, *31* (3), 117-150. DOI: 10.24844/EM3103.05

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020) Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria, *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matem*ática, en prensa.

Burgos, M., Godino J. D y Rivas, M. (2019) Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Acta Scientiae, 2*1 (4), 63-81.

Godino, J. D., Burgos, M. y Wilhelmi, M. (2020) Papel de las situaciones adidácticas en el aprendizaje matemático. Una mirada crítica desde el enfoque ontosemiótico. Enseñanza de las Ciencias, (en prensa).

PARTICIPACIÓN EN EVENTOS CIENTÍFICOS

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2019). Ontosemiotic Analysis of a lesson on percentages. Proceedings of the INTED2019 Conference, Valencia, Spain.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2018). Pensamiento algebraico temprano de alumnos de quinto de primaria en la resolución de una tarea de proporcionalidad. En Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L., Aguilar-González, A., Alonso, P., García, F. J., Bruno, Al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 181-190).* Gijón, España: SEIEM.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM.

Burgos, M. y Godino, J.D. (2018b) Solving collaboratively introductory problems to develop proportional thinking in primary school. *EDULEARN2018 Conference. 10th International Conference on Education and New Learning Technologies (pp.* 2492-2497) Palma de Mallorca, Spain: IATED Academy. ISBN: 978-84-09-02709-5.

Burgos, M. y Godino, J.D. (2018c) Recognizing algebrization levels in an inverse proportionality task by prospective secondary school mathematics teachers*Proceedings of the EDULEARN2018 Conference. 10th International*

Conference on Education and New Learning Technologies (pp. 2483-2491) Palma de Mallorca, Spain: IATED Academy. ISBN: 978-84-09-02709-5.

Burgos, M., Godino, J. D., Giacomone, B., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Competencia de análisis epistémico de tareas de proporcionalidad de futuros profesores. ALME Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31(1), 706-713.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2019b). Conflictos semióticos de alumnos de primaria en la resolución de una tarea de porcentajes. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIII (pp. 223-232). Valladolid: SEIEM

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D. y Burgos, M. (2017). Perspectiva ontosemiótica del razonamiento algebraico escolar. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 49-66). Zaragoza: SEIEM.