UNIVERSIDAD DE GRANADA

Departamento de Didáctica de las Matemáticas

Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico.

TESIS DOCTORAL

1994

Luisa RUIZ-HIGUERAS

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA

Universidad de Granada

Dpto. Didáctica de la Matemática

CONCEPCIONES DE LOS ALUMNOS DE SECUNDARIA SOBRE LA NOCION DE FUNCION: ANALISIS EPISTEMOLOGICO Y DIDACTICO

Tesis Doctoral

Luisa RUIZ HIGUERAS

Granada, Noviembre de 1993

ISBN- 84-600-9052-3

CONCEPCIONES DE LOS ALUMNOS DE SECUNDARIA SOBRE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN: ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO Y DIDÁCTICO

Tesis Doctoral

Luisa Ruiz Higueras

Memoria realizada bajo la dirección del Dr. D. Juan Díaz Godino y leida en la Universidad de Granada el día 7 de Febrero de 1994 ante el tribunal constituido por los profesores:

Presidente: **Dr. D. Miguel de Guzmán Ozamiz**

Dto. de Análisis Matemático. Universidad Complutense de Madrid

Secretario: **Dr. D. Luis Rico Romero**

Dto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Vocales: **Dra. Dª. Michèle Artigue**

Dto. de Análisis Matemático. Universidad de París VII

Dra. Dª. Carmen Azcárate Jiménez

Dto. de Didáctica de la Matemática y de las C.C. Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona

Dr. D. Modesto Sierra Vázquez

Dto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Salamanca

Esta Tesis Doctoral ha sido realizada integramente en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada de acuerdo con el Proyecto PS91-0114.1, "Obstáculos y concepciones inconsistentes en los alumnos de Secundaria sobre la noción de función", subvencionado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT).

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento más sincero al profesor Dr. D. Juan Díaz Godino, director de esta investigación, por su total dedicación, ayuda y valiosa colaboración.

De igual forma, agradezco a la profesora Dra. Dª. Mª del Carmen Batanero Bernabeu sus múltiples consejos y su generosa disponibilidad, así como su inestimable ayuda en el proceso de análisis de datos.

Mi gratitud al profesor Dr. D. Luis Rico Romero, por las críticas constructivas y observaciones precisas que me ha facilitado.

A todos los compañeros, profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, agradezco las indicaciones y consejos aportados en las reuniones del Seminario de Investigación donde este trabajo ha sido expuesto y discutido.

Un agradecimiento especial merecen los alumnos y profesores de los Institutos de Bachillerato que han participado en las experiencias educativas cuyo estudio es una parte importante de este trabajo.

De manera muy especial, quisiera agradecer al profesor D. José Luis Rodríguez Fernández su ayuda incondicional, sus valiosos consejos y el firme apoyo que me ha mostrado en todo momento.

Todos los anteriormente mencionados, estarán siempre en mi recuerdo agradecido, y deseo que sepan que no considero cancelada mi deuda de gratitud con esta simple mención.

A José Luis.
A Manuel José y Florencio.

INDICE

INDICE GENERAL

PAGINA

PAGINA

PAGINA

PAGINA

PAGINA

INDICE DE TABLAS

PAGINA

PAGINA

PAGINA

PAGINA

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCION

La Didáctica de la Matemática, como campo de investigación científica, estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tratando de identificar los factores que condicionan dichos procesos y de construir teorías que proporcionen un control práctico sobre los sistemas didácticos. Tres son los componentes esenciales que intervienen necesariamente en el ámbito de estudio de la Didáctica: los conocimientos matemáticos, que la sociedad valora y considera deben ser enseñados y aprendidos en su sistema de enseñanza (esto es, los saberes matemáticos), los alumnos (o estudiantes, o sea, los sujetos que aprenden) y los profesores encargados de gestionar la enseñanza.

Entre los distintos marcos teóricos o paradigmas usados en las investigaciones didácticas, han predominado hasta la fecha los que han considerado al sujeto cognitivo como el componente primario (y con frecuencia único) de los problemas de investigación: el fin de los sistemas de enseñanza es que los estudiantes aprendan (adquieran/ construyan) los saberes matemáticos. En consecuencia, muchos de los factores identificados y las dificultades encontradas en el aprendizaje se han indagado sistemáticamente en la propia *"cabeza de los estudiantes"* (limitaciones del desarrollo psicológico, procesos cognitivos, estrategias, etc.). La naturaleza del propio conocimiento matemático y su génesis histórico-cultural, han sido considerados transparentes; también han pasado frecuentemente desapercibidas las adaptaciones necesarias de los objetos matemáticos para hacerlos viables en los sistemas didácticos. De estos procesos, así como de la propia naturaleza compleja del significado de los conceptos y procedimientos matemáticos, surgen variables que interaccionan inevitablemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje y que, por tanto, deben ser objeto de investigación.

La consideración del análisis del propio saber puesto en juego, como el polo primario de entrada para los estudios didácticos, es una característica principal del marco teórico iniciado en Francia por Brousseau, Vergnaud, Chevallard, etc., en el que situamos explícitamente nuestra investigación.

Dentro de este marco conceptual, cuyos elementos describimos en la Sección 1.2, el problema en el que se centra esta investigación se refiere al estudio didáctico de la noción de función, lo que comprenderá, su génesis epistemológica, el estatuto que recibe en la enseñanza y la caracterización de las relaciones personales de los estudiantes de secundaria a este objeto matemático.

El interés teórico de este estudio se justifica al proporcionarnos un modelo de investigación en Didáctica de la Matemática que, partiendo del análisis epistemológico (histórico y escolar), lo usa como punto de referencia para estudiar la génesis y desarrollo de las concepciones de los alumnos sobre una determinada noción matemática (en nuestro caso, la noción de función).

El interés que este trabajo proporciona de cara a la práctica de la enseñanza de las matemáticas, estimamos que es evidente, ya que permite poner de manifiesto la distancia que en numerosas ocasiones existe entre los conceptos formalmente introducidos y los conocimientos efectivamente construidos por los alumnos, determinando los factores y fenómenos didácticos que condicionan este hecho.

Las fases de que consta nuestra investigación son las siguientes:

1. Estudiaremos de forma exahustiva la noción de concepción como herramienta teórica de investigación en Didáctica de la Matemática; para ello, no sólo analizaremos las aportaciones que diferentes investigadores han proporcionado sobre este concepto desde distintos marcos teóricos, sino que pondremos en evidencia sus semejanzas y diferencias con otros conceptos próximos o relacionados. Estableceremos así una visión global, y específica a la vez, de esta parcela de investigación en Didáctica de la Matemática.

2. Situaremos nuestro trabajo en el seno de la enseñanza y el aprendizaje de las funciones como área problemática psicológica y didáctica. Para ello, haremos un recorrido a través de las investigaciones más significativas que se han llevado a cabo sobre las concepciones de los alumnos, en referencia a la noción de función, teniendo en cuenta sus diferentes aproximaciones tanto teóricas como metodológicas y poniendo de manifiesto los aspectos en los que se detectan insuficiencias o limitaciones.

3. Estudiaremos desde un punto de vista epistemológico-histórico la evolución de la noción de función, tratando de identificar las variables y factores condicionantes que han determinado distintos estadios en su desarrollo. Esto nos aportará conocimientos relevantes para comprender los factores determinantes del proceso de enseñanza-aprendizaje de esta noción en los distintos niveles de enseñanza y los fenómenos de transposición didáctica correspondientes, así como para analizar las concepciones que manifiesten los alumnos.

4. Realizaremos un estudio de la enseñanza de la noción de función a través del currículo, los manuales y los apuntes de clase de los estudiantes. Ello nos permitirá analizar cómo *"vive"* el objeto función en nuestro sistema de enseñanza. La importancia de este estudio se justifica al proporcionarnos elementos y fenómenos didácticos ligados al proceso de transposición didáctica de esta noción.

5. Llevaremos a cabo un estudio experimental a través del cual nos proponemos evaluar las concepciones que manifiesta una muestra de alumnos de secundaria sobre la noción de función. Estableceremos, asimismo, las relaciones pertinentes entre estas concepciones y las condiciones y restricciones ejercidas por el sistema de enseñanza en el que han estado inmersos dichos alumnos.

Cada una de estas fases de la investigación se describe en los cinco capítulos de que consta esta tesis doctoral.

CAPÍTULO 1

CAPITULO 1

FUNDAMENTOS Y MARCO CONCEPTUAL

1.1. INTRODUCCION

En este capítulo realizaremos una recopilación de los fundamentos teóricos utilizados en nuestra investigación. En primer lugar, analizaremos la noción de sistema didáctico así como sus diferentes componentes, posteriormente, estudiaremos el proceso de transposición didáctica señalando la influencia que en ella tienen los imperativos debidos a la epistemología y a las hipótesis de aprendizaje y, poniendo en evidencia los principales fenómenos ligados al control de este proceso.

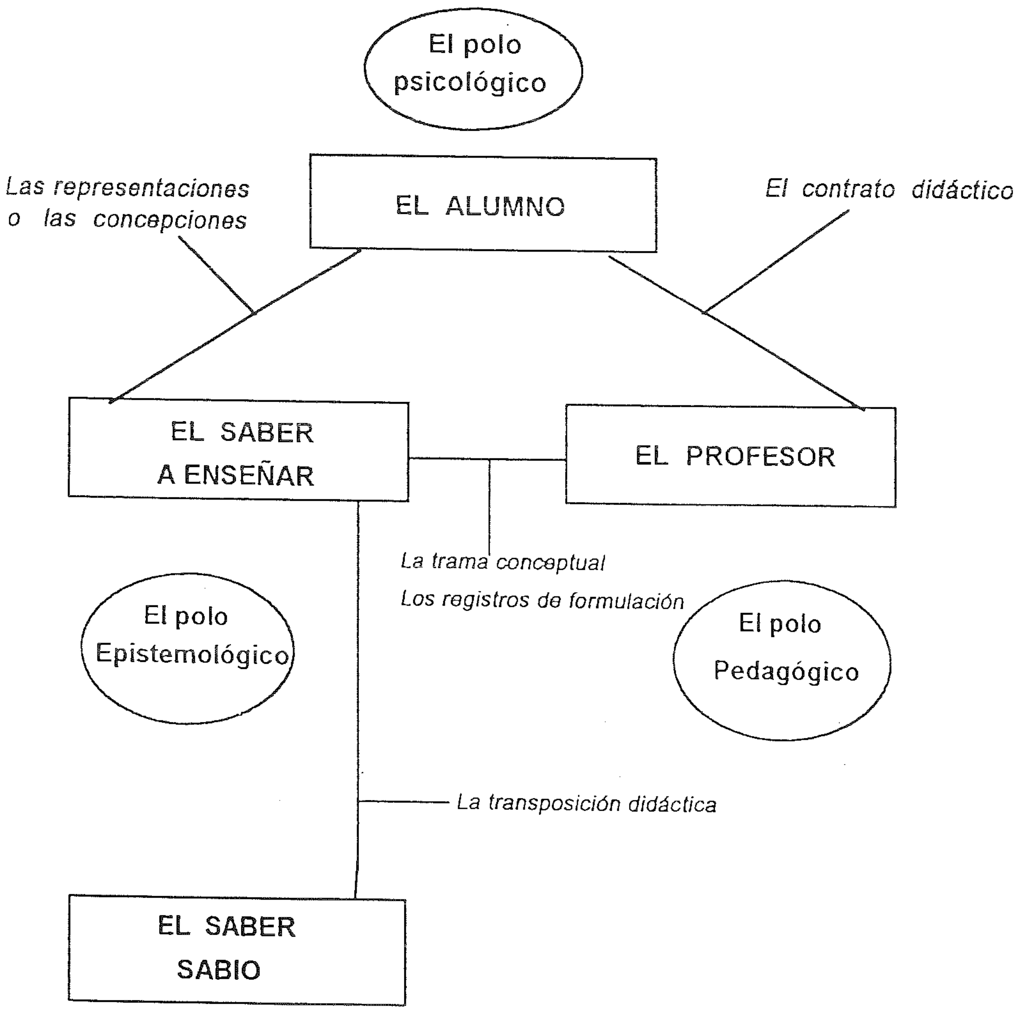
Puesto que nuestro trabajo tiene un interés primordial en el estudio de las concepciones y obstáculos que manifiestan los alumnos sobre la noción de función, realizaremos un análisis exahustivo de la noción de concepción en Didáctica de las Matemáticas así como de otros conceptos teóricos próximos a la misma, tales como el de *relación al saber* o el de *significado* de un objeto matemático; estudiando las diferencias y semejanzas que existen entre los mismos. De igual modo, analizaremos la noción de obstáculo en Didáctica de las Matemáticas, sus diferentes tipos, así como otros conceptos cercanos a la misma.

Los análisis anteriores nos permitirán clarificar todas estas nociones teóricas para posteriormente hacer uso de ellas en la parte experimental de nuestro estudio.

1.2. UN ENFOQUE SISTÉMICO PARA LA DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS

Desde hace relativamente pocos años y bajo el impulso de numerosos investigadores tales como Brousseau, Chevallard, Vergnaud, Artigue, Douady etc. se ha constituido un grupo de investigación, que se esfuerza en una reflexión teórica sobre el objeto y los métodos de investigación específicos en Didáctica de la Matemática. Como característica de esta linea - llamada por sus autores *"fundamental"*- puede citarse el interés por establecer un marco teórico original, desarrollando sus propios conceptos y métodos, así como, su concepción global de la enseñanza, estrechamente ligada a la matemática y a teorías específicas del aprendizaje. Los modelos desarrollados comprenden dimensiones epistemológicas, sociales y cognitivas y tratan de tener en cuenta la complejidad de las interacciones entre el saber matemático, los alumnos y el profesor, dentro del contexto particular de la clase.

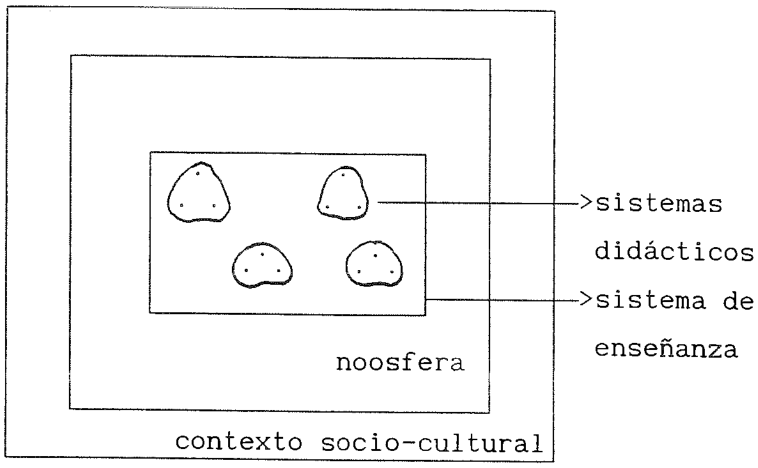
Una característica relevante de este marco teórico, aunque no sea original ni exclusiva, es su consideración de los fenómenos de enseñanza-aprendizaje bajo un enfoque sistémico. Bajo esta perspectiva, el funcionamiento global de un hecho didáctico no puede ser explicado por el estudio separado de cada uno de sus componentes. La Didáctica de las Matemáticas se considera como *"el estudio de la evolución de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto"* (Brousseau, 1986, p. 5). Es pues el estudio de un sistema - **el sistema didáctico** - así como el de su funcionamiento. Como se indica en Godino (1992), en la Didáctica de la Matemática el enfoque sistémico es claramente necesario, como ocurre en general en todas las ciencias sociales, pues además del sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto, y de los propios sistemas conceptuales, hay que considerar los sistemas didácticos materializados en una clase, los cuales están formados por el profesor, los alumnos y el saber enseñado. Veamos el esquema siguiente:



(Arsac, y cols. 1989, p. 61)

En el esquema se destacan tres elementos determinantes: **pro-**

fesor, **alumno y saber a enseñar**, así como las interacciones entre ellos. "*Los* **sistemas didácticos** *son formaciones que aparecen cada año hacia del mes de septiembre: en torno a un saber (designado ordinariamente por un programa); un contrato didáctico se constituye alrededor de un proyecto compartido de enseñanza y de aprendizaje que agrupa al profesor y a los alumnos en un mismo lugar. El entorno próximo de un sistema didáctico está en principio constituido por un* **sistema de enseñanza**, *que reune el conjunto de sistemas didácticos, y presenta un conjunto diversificado de dispositivos estructurales que permiten el funcionamiento didáctico*". (Chevallard, 1991, p. 23)



En el sistema de enseñanza influye todo un sistema complejo que Chevallard (1991) llama **"noosfera"** que comprende todas las personas que, en la sociedad, piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza, influyendo, por tanto, de una manera directa o indirecta sobre ella (formadores de profesores, escritores de textos y materiales curriculares, investigadores, asociaciones de profesores, padres de alumnos, diseñadores del curriculum, políticos, directores y administradores de centros de enseñanza, ..). Es en la noosfera, donde se desarrollan los problemas que nacen del encuentro con la sociedad y sus exigencias, donde se defienden y discuten doctrinas, se conducen las negociaciones y se buscan las soluciones. Existe, así, en su interior, una constante producción y debate de ideas - sobre lo que podría cambiarse y sobre lo que sería necesario hacer-. Pero además, los sistemas didácticos están inmersos en un **entorno social**, cultural, tecnológico y científico que influye y condiciona su funcionamiento.

Los subsistemas: alumno, saber, profesor

Estos tres subsistemas principales del sistema didáctico tienen, según Johsua y Dupin (1989), determinantes propios ligados a sus historias respectivas, así:

- **el alumno** es un sujeto psicológico y al mismo tiempo un sujeto social, pero especialmente nosotros lo vamos a considerar un sujeto *"que conoce"* en una determinada situación de enseñanza. Esta elección es inevitable ya que nos interesamos en las relaciones que el alumno puede establecer con un dominio específico del saber a enseñar.

- **el saber enseñado** que constituye el objeto principal de la enseñanza y que tiene también una historia particular. Mantiene relaciones culturales y sociales con el exterior de la clase, estas relaciones determinan, en gran medida, el contenido a enseñar y la forma de presentación. Depende de muchos factores relacionados entre sí: concepciones epistemológicas dominantes entre los matemáticos y profesores, objetivos fijados en la enseñanza, relaciones culturales establecidas por la sociedad con las matemáticas y sus aplicaciones. El objeto a enseñar, tal como se presenta en una clase, es así el producto de determinantes múltiples. Fruto, como ampliaremos más adelante, de un proceso de transposición.

- **el profesor**, también él tiene una historia propia que se manifiesta en lo que podríamos llamar una *"ideología privada"*. En ella se mezclan opciones educativas generales, opciones más específicas sobre el modo en que los alumnos aprenden matemáticas y una reformulación particular de la epistemología de las matemáticas y de las finalidades atribuidas a su enseñanza.

Influencia del sistema didáctico sobre cada uno de sus componentes

El sistema didáctico, que reposa sobre las relaciones específicas constituidas entre sus tres componentes, actúa en principio como un selector; integra o rechaza elementos de la historia de cada uno de sus componentes y no retiene más que los aspectos compatibles con los actos didácticos.

Así, el alumno no entrará en su integridad, sino como sujeto didáctico. El saber sufrirá un tratamiento especial que no se puede considerar solamente como una *"simplificación"* del saber científico, sino que se trata de un saber didáctico que posee una historia y una epistemología particulares. El profesor entrará en la estructura didáctica como *"instructor"* ya que su interacción con el alumno está determinada por el conjunto de relaciones que debe establecer con el saber que está encargado de transmitir.

El sistema didáctico tiene también un peso muy significativo en la determinación de las relaciones entre sus diferentes componentes ya que estas deben configurarse de acuerdo a las necesidades propias del funcionamiento del sistema. Una de estas necesidades - la **transposición didáctica** del saber *sabio* a saber enseñado - ha sido ampliamente estudiada por Chevallard (1991) y la trataremos posteriormente con mayor amplitud. Otra viene determinada por el **contrato didáctico** considerado como regulador de la estructura del sistema: el alumno entra en relación con un saber no de forma privada sino por medio de sus relaciones con otros alumnos y sobre todo con el profesor. El concepto de <u>contrato didáctico</u> ha sido introducido por Brousseau (1986): *"es un conjunto de reglas, generalmente implícitas que organizan las relaciones entre el saber enseñado, los alumnos y el profesor"* (p. 298). Entre el profesor y los alumnos se establece una relación que determina -explícitamente en parte, pero sobre todo implícitamente- lo que cada protagonista - profesor y alumno- tiene la responsabilidad de desarrollar y administrar en clase, así como, las obligaciones recíprocas entre ellos. *"Es la regla de juego y la estrategia de la situación didáctica"* ya que fija el lugar y las funciones de cada parte.

El sistema didáctico como estructura condicionada por factores externos

Del mismo modo que el sistema didáctico impone restricciones al alumno, al saber y al profesor, a su vez está también sometido a múltiples restricciones exteriores ya sean de carácter institucional (horarios, cursos, programas, etc) o bien sociales, que tienden a adecuar el funcionamiento didáctico con las concepciones educativas dominantes en una cierta cultura. Todo esto es consecuencia de la influencia de la *"noosfera"* del sistema educativo.

1.3. LA TRANSPOSICION DIDACTICA: DEL SABER SABIO AL SABER ENSEÑADO

El término transposición didáctica designa el conjunto de transformaciones que sufre un saber científico con el fin de ser enseñado. *"La existencia de estas transformaciones es un hecho conocido aunque aún muy poco estudiado"* (Arsac y cols. 1989, p. 3). Para transmitir un saber es necesario crear todo un proceso de enseñanza. Sin embargo, en el sistema de enseñanza, el fenómeno de la transposición a veces se oculta y en muchas ocasiones la *"distancia"* entre el saber a enseñar y el saber científico tiende a pasar desapercibida, a ser borrada. Estamos interesados en estudiar todo el complejo sistema de adaptaciones y restricciones que debe sufrir un saber formalizado científicamente hasta llegar a convertirse en un saber adaptado a la enseñanza escolar.

1.3.1. PRIMERA APROXIMACION A LA TRANSPOSICION DIDACTICA: LOS IMPERATIVOS DEBIDOS A LA EPISTEMOLOGIA Y A LAS HIPOTESIS DE APRENDIZAJE

El profesor en su clase debe enseñar una parte de un saber que Chevallard (1991) denomina *"saber sabio"* (saber científico); los matemáticos profesionales, universitarios o investigadores puros, son sus tenedores y sus fabricantes permanentes. Es, normalmente la sociedad, quien solicita que una determinada parte de este saber se lleve a la enseñanza (el cálculo de áreas, la resolución de ecuaciones, etc) porque supone que será de gran utilidad social. Pero es preciso transformar este *saber* para que sea posible su enseñanza a un cierto nivel.

Construcción del objeto de enseñanza correspondiente

El trabajo del profesor supone, por una parte, el conocimiento del objeto del saber matemático correspondiente, y por otra, supone tambien asumir una representación del modo en que los alumnos (sujetos que aprenden) asimilan los conocimientos, es decir, debe tener una hipótesis de aprendizaje. Esta reglará de forma implícita las condiciones y restricciones del contrato didáctico. En la actualidad, aunque es evidente que se podrían adoptar muchas, podemos considerar que oscilarían entre las dos hipótesis siguientes:

- una hipótesis **constructivista** según la cual se supone que el alumno -sujeto que aprende- construye los conocimientos a partir de su propia actividad.

  En este caso se considera que la situación de aprendizaje ideal es aquella en la que se sitúa al alumno ante una situación problema, cuya solución óptima es precisamente el conocimiento que se desea que aprenda. El conocimiento, así, es recontextualizado y aparece como solución a un problema particular en el proceso personal de descubrimiento del alumno (*repersonalización*). De este modo, el camino seguido por el profesor en la búsqueda de recontextualizaciones y repersonalizaciones para que el alumno pueda construir un saber es inverso al seguido por el investigador.

Para que el útil de resolución de un problema, así descubierto por el alumno, se transforme en "*objeto*" del saber matemático, es preciso que exista un nuevo trabajo de despersonalización y descontextualización. El alumno recorre etapas parecidas a las del investigador, pero en un marco creado artificialmente por el profesor.

Bajo esta hipótesis de aprendizaje la función del error es fundamental ya que a través de él se pueden superar las concepciones no adaptadas a una determinada situación. En el marco de un aprendizaje por adaptación, el error es uno de los motores del aprendizaje.

- una hipótesis **empirista** según la cual el alumno no construye los conocimientos; estos le son suministrados directamente por el profesor. El alumno se limita a recibir las nociones de un modo perfecto a partir del discurso del profesor. La enseñanza ideal se reduce a un curso donde el profesor no cometería ningún error, seguido por unas pruebas que debe responder correctamente, pues ello demostraría que ha comprendido perfectamente. En el ideal empirista el maestro y el alumno no deben equivocarse: "*Se trata de hacer un especie de barrera al error. Aceptar los errores para canalizarlos y posteriormente evacuarlos, pondría en duda de forma profunda el sistema de enseñanza.....Esta concepción empirista se apoya en el modelo "yo aprendo/yo aplico" y en la eliminación casi total del error*" (Margolinas, 1993, p. 179)

Según Brousseau (1986), los métodos de enseñanza que se apoyan en esta hipótesis se caracterizan porque admiten los principios siguientes:

- Cada definición o explicacción debe ser formulada y justificada en el lenguaje de la ciencia enseñada, o al menos en su expresión cultural más extendida.
- Cada *"enseñanza"* da lugar a un aprendizaje identificable y controlado, y, en el límite, sólo es enseñado lo que puede ser aprendido.
- Las adquisiciones se prolongan y se justifican por el uso - importancia y frecuencia - que se ha hecho en las lecciones anteriores.

Estos principios conducen, según este autor, a una concepción de la optimización de la enseñanza que implica principalmente que:

- Cada lección debe aspirar al máximo de adquisición compatible con las capacidades de aprendizaje de los alumnos.
- El aprendizaje de un concepto debe hacerse bajo una forma que utilice al máximo los conocimientos anteriores y los modifique lo menos posible.
- Debe demandar el mínimo de tiempo y se debe rentabilizar por el uso ulterior bastante frecuente en las aplicaciones de interés práctico.

Es en la *"noosfera"* donde se procederá a la selección de los elementos del saber científico que, designados por ella como **"saber a enseñar"**, se someterán al trabajo de transposición. Asumirá, por tanto, la parte visible de este trabajo, denominado *trabajo externo de la transposición didáctica* en oposición al *trabajo interno*, que se desarrollará en el interior del sistema de enseñanza después de la introducción oficial de nuevos elementos del saber. El proceso de transposición didáctica se puede, así, representar por el siguiente esquema:

objeto del saber "sabio"

$\downarrow$ 1ª etapa

objeto del saber a enseñar

$\downarrow$ 2ª etapa

objeto del saber enseñado

La determinación de los objetos del saber a enseñar pasa necesariamente por la mediación de los programas y cuestionarios oficialmente establecidos. La organización y secuenciación de los saberes, la temporalización, la división en cursos, son procesos que necesariamente han de transformar los saberes matemáticos. Toda esta transformación constituye la primera etapa del proceso de transposición. El profesor no interviene, en general, más que en la segunda etapa.

En el curso de nuestra investigación vamos a estudiar las diferencias entre el *objeto del saber* (saber "sabio" matemático) y *el objeto de enseñanza* (saber a enseñar). Según Chevallard (1991), la noción de *saber a enseñar* no se reduce sólo al texto que aparece en los programas y cuestionarios, sino también a sus posibles interpretaciones. El saber a enseñar es todo aquello que el profesor piensa que debe enseñar cuando ya están los manuales escolares publicados, los comentarios en las revistas profesionales, es decir cuando se ha fijado casi definitivamente la interpretación del programa. Chevallard habla de *"texto del saber"* señalando que este texto no está nunca completamente escrito en ninguna parte.

1.3.2. EVOLUCION CONCEPTUAL LIGADA AL PROCESO DE TRANSPOSICION DIDACTICA

Chevallard, en su teoría de la Transposición didáctica, hace una clasificación de diferentes tipos de nociones en el campo de las matemáticas, con el fin de utilizarlas como herramientas para el análisis epistemológico del régimen didáctico. Así, las clasifica en :

- **nociones matemáticas:** Si las encontramos ya bajo el control de una teoría que fija sus definiciones, sus propiedades así como su posición epistemológica. Se convierten así en objetos del conocimiento matemático (la noción de número, la noción de grupo,...). En general las nociones matemáticas se construyen, se dan sus propiedades y se reconoce un cierto número de ocasiones de empleo.

- **nociones paramatemáticas:** Si son consideradas como herramientas útiles, conscientemente utilizadas, reconocidas y designadas en la resolución de diferentes problemas, pero no son tratadas aún como objetos de estudio. Son nociones de la actividad matemática tales como parámetro, ecuación, demostración,...

- **nociones protomatemáticas:** Si están en un estado en el que sólo se movilizan de manera implícita en diferentes usos y prácticas; sus propiedades son utilizadas para resolver ciertos tipos de problemas, pero no son reconocidas *ni como objetos de estudio ni como herramientas*. Constituyen los estratos más profundos del funcionamiento didáctico del saber (la noción de modelo, la noción de simplicidad, ...)

Hemos de señalar que la clasificación anterior no es absoluta, es una clasificación relativa, ya que depende de numerosos factores. Una misma noción puede ser en un nivel considerada como paramatemática y en otro nivel más elevado sería considerada matemática. (Por ej. un "sistema de ecuaciones" sería una noción para-matemática en los cursos escolares, mientras que sería una noción matemática en COU).

1.3.3. FENOMENOS LIGADOS AL CONTROL DE LA TRANSPOSICION DIDACTICA

Brousseau (1986) ha puesto en evidencia algunos fenómenos ligados al proceso de transposición didáctica, entre ellos se encuentran el **"efecto Topaze"**, el **"efecto Jourdain"** y el **"deslizamiento metacognitivo"**.

El **"efecto Topaze"** se caracteriza porque la respuesta que debe dar el alumno está determinada de antemano, el maestro (o en su caso el manual) elige las preguntas a las cuales puede dar esta respuesta. Evidentemente, los conocimientos necesarios para producir estas respuestas cambian también su significado. Eligen cada vez cuestiones más fáciles, tratando de obtener el significado máximo para un máximo de alumnos. Así, los conocimientos que se desean enseñar desaparecen completamente: es el efecto Topaze. Efectos de este tipo los encontramos con frecuencia en aquellos profesores que creen que sus alumnos han construido correctamente un concepto cuando sólo manejan códigos, *"reglillas"* o algoritmos relacionados con el mismo.

El **"efecto Jourdain"** es aquél en que el profesor, para evitar una eventual constatación de fracaso, reconoce indicios de un cierto conocimiento científico en los comportamientos o en las respuestas del alumno, aunque estén motivadas por causas y significaciones triviales . Un ejemplo lo tenemos en el alumno al que se le proponían manipulaciones un poco extrañas con botes de yogures o cromos de colores y se le decía: acabas de descubrir un grupo de Klein.

El **"deslizamiento metacognitivo"** se presenta cuando un medio de enseñanza se convierte en objeto de enseñanza. Así cuando una actividad ha fracasado, y el profesor, quizás intentando justificarse para continuar su acción, toma sus propias explicaciones y sus medios heurísticos como objetos de estudio en lugar del verdadero conocimiento matemático . El ejemplo más sorprendente es probablemente el que concierne al uso de los grafos en los años 60 para enseñar las estructuras, método asociado al nombre de Papy.

1.4. LA NOCION DE OBSTACULO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

Uno de los objetivos fundamentales que persigue actualmente la investigación en Didáctica de la Matemática es precisamente la de investigar las dificultades y los fracasos en la enseñanza. Se intenta con ello responder a las preguntas: ¿qué hay detrás de los errores de los alumnos?, ¿qué tipo de errores se han de investigar?, ¿cuáles son los que tienen una importancia significativa en una determinada población?

En un reciente trabajo de investigación sobre *"Errores de aprendizaje en Educación Matemática"*, Rico (1992a, p.9-10) manifiesta: *"Al cometer un error, el alumno expresa el caracter incompleto de su conocimiento, ... Los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje de las Matemáticas. Los errores son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; constituyen un elemento estable de dichos procesos"*.

Evidentemente, no todos los errores han de investigarse, la Didáctica se interesa principalmente por aquellos cuyas manifestaciones no son fortuitas, sino repetidas y resistentes y cuyo origen puede escapar al sujeto. En este último caso se hablará de **obstáculo cognitivo**.

La noción de obstáculo epistemológico o cognitivo fue introducida por Bachelard (1884/1962) en su obra *"La formation du sprit scientifique"*, en ella nos dice: *"Cuando buscamos las con-*

diciones psicológicas de los procesos de la ciencia, llegamos pronto a la convicción de que es en términos de obstáculos como es preciso exponer el problema del conocimiento científico ... se conoce contra un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal hechos, superándolos" (Bachelard, 1983, p.15)

La introducción de la noción de obstáculo en Didáctica de la Matemática se debe a Brousseau: *"El error no es sólamente efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, según se creía en las teorías empirístas o conductístas del aprendizaje; sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos"* (Brousseau, 1983, p. 173)

Analizando esta definición, se perfilan las características fundamentales de todo obstáculo cognitivo:

- se trata siempre de un conocimiento y no de una ausencia de conocimiento;

- este conocimiento permite al alumno producir respuestas correctas en determinados problemas o dominios de problemas;

- este mismo conocimiento engendra respuestas erróneas para ciertos problemas o dominios de problemas;

- los errores producidos no son esporádicos sino muy persistentes;

- este tipo de errores producidos son muy resistentes a la corrección.

Los obstáculos que se presentan en nuestros alumnos pueden ser debidos, según Brousseau, a diferentes causas, es decir, su origen puede ser diferente:

- **de origen ontogenético:** son debidos a las limitaciones del sujeto en un momento de su desarrollo, es decir, están ligados a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los alumnos en su proceso de aprendizaje.

- **de origen didáctico:** Están ligados al sistema de enseñanza en que se encuentran inmersos nuestros alumnos. Son debidos a las decisiones del sistema educativo o a las del profesor en el aula. Resultan, pues de las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza.

- **de origen epistemológico:** están ligados al conocimiento mismo. Se pueden encontrar en la evolución histórica de los propios conceptos matemáticos, por lo tanto deben ser considerados como parte del significado del concepto.

En general, podemos afirmar que los obstáculos entran en el proceso de construcción normal del conocimiento, pero es preciso señalar que *"frente a la teoría psicológica que atribuye los errores de los alumnos a causas de tipo cognitivo, se admite aquí la posibilidad de que tales errores puedan ser debidos a causas epistemológicas y didácticas, por lo que la determinación de este tipo de causas proporciona una primera via de solución"* (Godino, 1991, p. 135)

Según las aportaciones de Brousseau (1983) en su teoría sobre los obstáculos en Didáctica de la Matemática, los alumnos poseen concepciones de una determinada noción que en algunas ocasiones se revelan falsas, insuficientes, ineficaces o simplemente inadaptadas para la resolución de una situación-problema, provocando errores repetitivos y resistentes. Estas concepciones pueden hacer obstáculo a la emergencia de una nueva concepción. *"El rechazo de una concepción y la adopción de una nueva no se hace por una sim-*

ple explicación del maestro, ... sino cuando el alumno se enfrenta a situaciones específicas donde la nueva concepción aparece bien como solución necesaria y única, bien como solución más económica, más segura, mejor adaptada, óptima para su resolución" (El Bouazzaoui, 1988, p.38) Para ello es preciso que el alumno se encuentre ante un auténtico *conflicto cognitivo* y se produzca un salto informacional. Este determinará la existencia de un obstáculo epistemológico poniendo de manifiesto los límites de una concepción antigua.

Se pueden determinar, según Artigue (1989), diferentes procesos que, tanto en la historia de la matemática como en nuestros alumnos, se constituyen en productores de obstáculos:

- *la generalización abusiva:* Se manifiesta, por ejemplo, en ciertos errores de nuestros alumnos cuando aplican propiedades de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ - *"entre 1,4 y 1,5 no existe ningún número"*

- *la regularización formal abusiva:* Se identifica en los errores tenaces que presentan los alumnos, tales como: $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

- *la fijación sobre una contextualización o una modelización familiares:* Lo encontramos, por ejemplo, en la enseñanza cuando, de modo exclusivo, se identifican las fracciones con el fraccionamiento de la unidad.

- *la amalgama de nociones sobre un soporte común:* Es frecuente encontralo en contextos geométricos, por ejemplo, los relativos a las medias de longitudes y áreas: *"si el área de una superficie permanece constante, el perímetro también "*

Si bien es verdad que estos procesos tienen consecuencias que pueden generar obstáculos *"no podemos por ello atacar a los procesos en sí mismos ya que son parte integrante del funcionamiento normal de la matemática ... y han sido profundamente pro-*

ductivos en su evolución histórica" (p. 13)

Otras teorías próximas a la teoría de los obstáculos de Brousseau

- Los "conocimientos locales"

Leonard y Sackur (1990) han desarrollado lo que ellos denominan una estrategia de investigación para intentar ayudar a los alumnos en su aprendizaje, tratando de analizar los conocimientos que éstos construyen. Su teoría reposa sobre la noción de *"conocimiento local"* y se desarrolla bajo una triple aproximación: matemática, psicológica y situacional.

> *"Llamamos* **conocimiento local** *a un conocimiento del alumno que tiene las dos propiedades siguientes:*
> *1) es un conocimiento* correcto *en ciertos límites*
> *2) el alumno ignora la existencia de dichos límites*
> *Por ejemplo, un alumno que no conozca más que los números naturales atribuirá la misma significación a las dos frases siguientes:*
> $x^2 > x$ *, en el conjunto de los naturales*
> $x^2 > x \quad , \forall x$
> *la primera es simpre verdadera, mientras que la segunda es falsa."* ((Leonard y Sackur, 1990, p. 209)

> *"Los conocimientos locales son pues, como conocimientos, válidos* (matemáticamente), *coherentes* (psicológicamente) *y eficaces* (didácticamente), *pero limitados; poseen cada una de estas propiedades, pero en ciertos límites que el utilizador ignora".* (Leonard y Sackur, 1990, p. 211)

Consideran que , después de Bachelard, todo conocimiento científico es siempre local, y, que desde el más experto profesor hasta el más novicio de los alumnos tienen siempre conocimientos locales, que pueden jerarquizar de algún modo, si sus límites son conocidos. Su interés se centra en los conocimientos que se adquieren en una situación de enseñanza y en los errores de los alumnos:

> *"La didáctica se interesa por los conocimientos locales que corresponden a errores identificables de los alumnos, conviene no obstante, no olvidar la relatividad de los conocimientos del experto, y particularmente, de los conocimientos enseñados"* (Leonard y Sackur, 1990, p. 211)

Para estos investigadores la noción de *"conocimiento local"* está muy próxima a la de *obstáculo epistemológico:*

> *"Entre todas las nociones correspondientes a las representaciones de los alumnos, la de obstáculo epistemológico o didáctico, es ciertamente la más proxima al conocimiento local"*.(p. 208)

Admitiendo esta proximidad, justifican, no obstante su teoría ya que *"preferimos una noción que evite la referencia a la construcción histórica y social de los conocimientos,.... evitamos el término obstáculo ya que la connotación negativa puede conducir a descuidar los aspectos positivos. ... Los conocimientos locales de los alumnos los conducen a cometer errores, en este sentido se trata de conocimientos "falsos", pero calificarlos de concepciones erróneas (misconceptions) conduce a descuidar los aspectos positivos de estos conocimientos."*

- Ideas matemáticas "inconsistentes" en los estudiantes

Existen diferentes investigadores Tirosh y Graeber (1990), Wilson (1990), Behr y Harel (1990), Vinner (1990), Tall (1990), Tirosh (1990), Steffe (1990) cuyos trabajos se interesan por la determinación de las *"ideas inconsistentes"* de los alumnos.

Consideran que la consistencia es un término clave tanto en matemáticas como en psicología cognitiva. En Matemáticas, una de las primeras características que se demandan en todo conjunto de axiomas es que sea consistente, es decir que no haya ninguna posibilidad de deducir de ellos teoremas contradictorios. En Psicología cognitiva se observa como un deseo de todo ser humano la eliminación consciente de cualquier tipo de inconsistencia de su pensamiento. Dada esta función central de la *consistencia* para estas dos ciencias, consideran que los educadores matemáticos también la deben considerar básica.

En sus trabajos afirman que en la construcción de los conceptos matemáticos, los estudiantes incorporan ideas inconsistentes que pueden ejercer una profunda influencia en la resolución de problemas. Estas inconsistencias pueden ser de dos tipos:

1. Inconsistencias entre la estructura matemática propia de los estudiantes y la teoría matemática convencional. Dentro de este primer tipo de inconsistencias se encontraría la teoría de Vinner y Tall sobre el *"concept image"* y el *"concept definition"*, así como el fenómeno de compartamentalización.

2. Inconsistencias (generalmente no reconocidas como tales por los estudiantes) en el interior de la propia estructura matemática de los alumnos.

Vinner (1990, p.85) basa su definición de las ideas inconsistentes de los estudiantes en las inconsistencias de la lógica formal:

> *"Si una persona cree en las proposiciones p y q. Desde p puede derivar una proposición r y desde q puede derivar* $\bar{r}$*. En otras palabras, desde dos proposiciones que una persona cree verdaderas, se puede obtener una contradicción"*

Tirosh (1990, p. 111) presenta varias situaciones donde existe un grado diferente de consciencia por parte de los alumnos respecto a sus inconsistencias:

- Estudiantes que no examinan las ideas conflictivas simultáneamente y, en consecuencia, no reconocen su mutua incompatibilidad. (ej. *"al dividir siempre obtenemos un resultado más pequeño"*, y, "4 : 0.5 = 8", ambas son inconsistentes entre sí)

- Estudiantes que examinan las ideas conflictivas simultáneamente, pero no las ven como inconsistentes. (Ej. los contraejemplos los examinan muchos estudiantes como una legítima excepción de un teorema, pero ello no implica que dicho teorema sea necesariamente falso).

- Estudiantes que identifican los elementos conflictivos en una situación como inconsistentes y, por lo tanto, problemáticos. No estarán satisfechos con sus propios conceptos e intentarán resolver la inconsistencia. Terminarán necesariamente en un estado de desequilibrio, es decir, en un conflicto cognitivo.

Entre las posibles fuentes que señala Tirosh para las *"Ideas inconsistentes de los estudiantes"*, figuran las siguientes:

A) **Las Matemáticas:** debido principalmente a su naturaleza relativa, ya que hay campos de la misma en los que un determinado problema no tiene solución mientras que en otros si lo tendría. (Por ej. $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, geometrías no euclideas, análisis no standard, etc)

B) **La mente:** Pueden entrar en conflicto el conocimiento y las creencias:

- discrepancias entre el conocimiento formal, intuitivo o algorítmico del alumno;
- discrepancias entre el "*concepto imagen*" y el "*concepto definición*";

- cambio en la naturaleza del contexto en el que ha adquirido un conocimiento;
- resistencia al cambio conceptual;
- percepción personal de los estudiantes sobre las matemáticas (*"ciencia de las pruebas exactas", "colección estática de hechos", "herramienta para otras áreas", etc*

C) El mensaje:

- El lenguaje matemático puede ser fuente de inconsistencias porque los estudiantes lo usen de forma ambigua (*"grupo", "conjunto", "límite", "función", etc)*

- El curriculo, ya que la presentación, organización y secuenciación de tópicos tiene una gran influencia.

- La instrucción, ya que ciertas estrategias didácticas pueden ser determinantes.

1.5. LA NOCION DE CONCEPCION EN DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS

Comenzamos nuestro análisis viendo el sentido del término concepción en el lenguaje cotidiano. Consultando el diccionario de *"uso del español"* la palabra *concepción* se define como *"acción de concebir"* y, concebir, a su vez, es *"formar o empezar a tener ciertas cosas en la mente"* (Moliner, 1984, 1, p.704-705). Hemos de señalar que el término concepción no es el único que se emplea con este sentido, se han utilizado también los de modelo, representación, imagen conceptual, etc, aunque parece que existe una mayor convergencia hacia el uso casi generalizado del término *"concepción"*.

> *"Podemos utilizar el término general de representación para caracterizar el conocimiento; decimos así que la intuición es una representación singular (se construye sobre lo singular) y el concepto es una representación*

general" (Enciclopaedia Universalis, 1989, 6, p.290)

"El término modelo, epistemológicamente, ha sido empleado en muchos sentidos, destacamos entre ellos el de alguna representación de la realidad o serie de realidades, de algún proceso o serie de procesos. En cierto sentido, los términos imagen y representación tienen el mismo significado" (Ferrater Mora, 1986, p.1625-26)

En general, podemos afirmar que todos los términos anteriores son utilizados por los investigadores como recursos explicativos del fenómeno del conocimiento.

Analizando la posible proximidad entre los términos de representación y concepción, El Bouazzaoui (1988, p. 15), nos aporta lo siguiente: *"Algunos investigadores hablan de representación en lugar de concepción. La representación parece empleada principalmente en psicología cognitiva y tiene sentidos variables según los autores"*. Para Vergnaud (1983), por ejemplo, una <u>representación</u> es una comprensión que se manifiesta a través de procedimientos. Por otra parte Janvier (1987) menciona tres sentidos diferentes para el término <u>representación</u> en Didáctica de la Matemática, el primero el de esquematización o de ilustración; el segundo reenvia a una cierta organización del conocimiento en el sistema mental humano y la memoria a largo término, mientras que el tercero se refiere a las imágenes mentales.

En su trabajo sobre la adquisición de series numéricas en la enseñanza superior Robert (1982) utiliza indistintamente el término <u>modelo</u> y <u>representación</u>, uno y otro los considera como sinónimos.

Bodin (1992, p. 22) trata de clarificar los términos anteriores pero concluye afirmando: *"Me he debido rendir a la evidencia: se han desarrollado numerosas formas de hablar de un mismo objeto y por ello los campos semánticos se superponen exactamente"*

Como vemos, existe un problema con el vocabulario que utilizan unos y otros autores y a veces las definiciones, si existen, resultan un poco vagas o ambiguas. Además, *"creemos que estas diferencias de vocabulario recubren posiciones teóricas profundamente diferentes, en particular, para autores tales como Vergnaud, Brousseau o Chevallard, ...No obstante, la palabra más extendida en la literatura didáctica, en todas las 'escuelas' es la de* **concepción**, *que interviene desde que el discurso se sitúa a nivel de aprendizaje"* (Margolinas, 1993, p. 100)

Una reflexión sistemática sobre la importancia y significación de la idea de concepción en Didáctica se efectúa por Artigue (1989). Para ella la noción de concepción responde en Didáctica a dos necesidades distintas:

> *"1) Poner en evidencia la pluralidad de los puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático, diferenciar las representaciones y modelos de tratamiento que le son asociados, poner en evidencia su adaptación más o menos buena en la resolución de diferentes tipos de problemas.*
> *2) Ayudar al didacta a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica inducida por la epistemología escolar y los conocimientos efectivamente construidos por el alumno"* (p.14)

Por su parte, para Brousseau (1983) el objeto de la Didáctica es justamente estudiar las condiciones que deben cumplir las situaciones o los problemas propuestos al alumno para favorecer la aparición, el funcionamiento y el rechazo de concepciones sucesivas.

El término concepción no sólo se usa para referirse a los conocimientos y creencias de los sujetos, esto es, con un sentido cognitivo. Artigue (1989) y El Bouazzaoui (1988), por ejemplo, lo emplean en un sentido epistemológico o institucional para referirse a tipologías de conocimientos existentes en un cierto período histórico o circunscritos a los textos, programas, etc, de cierto nivel de enseñanza. Por otro lado, para ambos tipos de concepciones (subjetivas y epistemológicas) se hace la distinción entre concepciones globales y locales. Mientras que el primer tipo describe holísticamente las concepciones ligadas a un concepto u otro objeto matemático, las concepciones locales tendrían en cuenta aspectos parciales de los sistemas anteriores. En las siguientes secciones analizaremos los cuatro tipos de concepciones y sus conexiones con otros conceptos teóricos.

1.5.1. LAS CONCEPCIONES DEL SUJETO EN DIDACTICA DE LAS MATEMATICAS

En los últimos años la investigación en Didáctica de la Matemática se ha distinguido por el esfuerzo realizado en la comprensión de los procesos de adquisición de los conocimientos. Sin embargo, todavía quedan caminos por recorrer tratando de identificar las concepciones de los alumnos a través de las regularidades que se encuentran en sus diferentes producciones, distinguir aquellas que pueden constituir obstáculos para la producción de otros conocimientos, y clarificar las condiciones en las que estas concepciones, a veces muy resistentes, pueden ser modificadas. Precisamente el interés pedagógico de la noción de obstáculo reside en el hecho de que a partir de ella se abre el horizonte pedagógico hacia el reconocimiento del *"derecho al error"*, y hacia la consideración de las concepciones del sujeto que aprende como uno de los puntos de partida de los estudios en Didáctica.

La gran amplitud que, tanto en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias, está tomando el estudio de las concepciones de los estudiantes sobre núcleos conceptuales específicos, lo muestra el trabajo de recensión realizado por Confrey (1990), en el que se incluyen investigaciones de muy diversos paradigmas y ligados a los distintos núcleos conceptuales.

Esta autora realiza una clasificación de las investigaciones que reseña en tres grupos: trabajos sobre epistemología genética Piagetiana; investigaciones influenciadas por la epistemología o filosofía de la ciencia y estudios sobre errores sistemáticos en el marco psicológico del procesamiento de la información.

Confrey (1990) atribuye un sentido muy amplio y difuso al término concepciones de los estudiantes ya que incluye las creencias de los estudiantes, sus teorías, explicaciones y significados sobre los conceptos científicos. Asimismo, indica que otros términos han sido empleados en la investigación como sinóminos al de concepción. Entre estos términos cita los siguientes:

- *"ciencia de los niños"*
- *"aritmética de los niños"*
- *"matemáticas de la tribu"*
- *"preconcepciones"*
- *"teorías ingenuas"*
- *"primitivas conceptuales"*
- *"conceptos privados"*
- *"marco conceptual alternativo"*.

Cuando estas concepciones se hallan en conflicto con los significados aceptados en matemáticas o ciencias se utiliza el término *"misconceptions"*.

Leinhardt y cols (1991) describen las "misconceptions" como ciertas características incorrectas o inapropiadas del conocimiento de los estudiantes sobre un objeto matemático específico, que puede o no haber sido enseñado, y que son repetibles y explícitas. Pueden desarrollarse como resultado de sobre-generalizar una concepción esencialmente correcta, o pueden ser debidas a interferencias del conocimiento de la vida cotidiana. Una *"misconception"* debe ser un sistema de ideas razonablemente bien formulado, no simplemente una justificación para un error. Aunque una "misconception" no tiene por qué ser una teoría completa, debería ser repetible y/o explícita, no aleatoria y tácita. Algunas concepciones incorrectas se puede relacionar lógicamente con las intuiciones, pero otras se pueden interpretar como un resultado de un aprendizaje formal incompleto.

Según señala Confrey, en el trabajo citado, el interés de la investigación sobre concepciones está motivado por numerosos resultados de la misma, que indican que:

- antes de comenzar la enseñanza formal sobre un núcleo conceptual, los estudiantes tienen sistemas de creencias firmemente asumidos de los fenómenos científicos o conceptos lógico- matemáticos;
- estos sistemas de creencia difieren en aspectos fundamentales de los sistemas conceptuales propuestos en los curricula;
- ciertas constelaciones de estos sistemas de creencias muestran una consistencia notable a través de la edad, capacidad y nacionalidad de los estudiantes;
- estas concepciones son resistentes al cambio por medio de la instrucción tradicional.

Como consecuencia de estos resultados, los investigadores que participan de esta problemática, coinciden en rechazar la idea de que el alumno comienza la instrucción sin ideas previas o preconcepciones sobre el tema que se trata de enseñar (hipótesis de la "tabula rasa"), y son conscientes de que estas preconcepciones no pueden ser ignoradas o sustituídas mediante una enseñanza directa.

Al estudiar la literatura de investigación dedicada al tema de las concepciones observamos que, a pesar de su extensión, la mayor parte de los investigadores no han realizado un análisis del significado preciso que dan al término "concepción" (o de otros términos equivalentes) sino que toman su sentido del propio lenguaje cotidiano.

Dado que el objetivo principal de nuestra investigación consiste en estudiar las concepciones de los alumnos sobre un objeto matemático relevante (como lo es la noción de función), hemos considerado necesario llevar a cabo una revisión sistemática de las herramientas conceptuales pertinentes para dicho fin, completando otros análisis del término concepción, como los realizados por Artigue (1989) y El Bouaizzaoui (1988), que se presenta en esta sección.

En una investigación realizada por Artigue (1984) sobre las concepciones asociadas por los alumnos al objeto matemático círculo, afirma que el término concepción (del sujeto) se usa en Didáctica de las Matemáticas con el fin de establecer una distinción entre el objeto matemático que es único, y las significaciones variadas que le pueden asociar nuestros alumnos .Además, la uniformidad de las definiciones y ejercicios propuestos en los manuales oculta la riqueza y la complejidad de las concepciones que se le pueden asociar.

Vergnaud considera la concepción como un estado cognitivo global del sujeto y llega a la determinación de una concepción partiendo de la definición de un concepto matemático: *"La noción de concepción nos da cuenta del estado de los conocimientos de un alumno en relación a un concepto"*. Según este investigador, todo concepto matemático estaría determinado por una terna (S, I, s), siendo:

S: el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto;

I: el conjunto de invariantes que constituyen el concepto;

s: el conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere.

"análogamente, una concepción estaría formada por esa misma terna, pero considerándola en un momento dado de la evolución del concepto". (Verganud, 1982b)

Artigue, siguiendo la misma linea de Vergnaud, nos dice lo siguiente:

"Así como distinguimos en un concepto matemático:

- *la noción matemática tal como está definida en el contexto del saber científico en una época dada;*
- *el conjunto de significantes asociados al concepto: representaciones simbólicas e icónicas;*
- *los instrumentos, útiles, teoremas, técnicas algebraicas específicas del tratamiento del concepto;*

distinguiremos en las **concepciones del sujeto** *estas diversas componentes y, en particular:*

- *la clase de situaciones-problema que dan su sentido al concepto para el alumno;*
- *el conjunto de significantes que él es capaz de asociarle, en particular, las imágenes metales, las expresiones simbólicas;*
- *las herramientas, útiles, teoremas, algorítmos de los cuales dispone para manipular el concepto"* (Artigue, 1984, p.9-10)

Brousseau destaca la estrecha relación entre las concepciones del sujeto y las situaciones de enseñanza:

> *"Las concepciones de los alumnos son el resultado de un intercambio permanente con las situaciones problema en las cuales están situados y en el curso de las cuales sus conocimientos anteriores son movilizados para ser modificados, completados o rechazados"* (Brousseau, 1982)

Tanto en el trabajo de Vergnaud como en el de Artigue, se manifiesta claramente el carácter sistémico de la concepción, cuando se concibe ésta como estado cognitivo global del sujeto referido a un objeto dado. Este carácter sistémico y la relación de las concepciones con la clase de problemas- situaciones que dan sentido al concepto, ocasionan un problema metodológico en la evaluación de las concepciones de los alumnos. Las situaciones de evaluación tienen, necesariamente un carácter restringido, por lo que las tareas presentadas son sólo una muestra de las posibles situaciones que dan sentido al concepto. La caracterización del estado cognitivo global en relación a un objeto exigiría una muestra representativa y suficientemente amplia de situaciones de evaluación, lo cual es difícil de conseguir en una investigación concreta.

Para diferenciar entre la concepción global del sujeto, que es un constructo teórico inobservable y los aspectos parciales de las concepciones globales, que son inferidos a partir de las respuestas de los alumnos en las situaciones de evaluación, Artigue llamará **concepción local**, la que se manifiesta en una situación, ligada al saber puesto en juego, en un intento de operativizar la noción teórica de concepción.

Así, una concepción de caracter local permitirá reconocer y, en su caso, resolver una subclase de situaciones, consideradas como comparables, con la ayuda de los mismos esquemas, de los mismos términos y con procedimientos cercanos, justificado todo ello con razonamientos análogos y tratados con la ayuda de propiedades lógicamente relacionadas. (Brousseau, 1988)

La relación entre concepciones y tareas realizadas en una determinada situación también queda establecida por Coquin-Viennot (1985):

> *"¿Es posible definir el "grado de adquisición" de un concepto en función del número y de la naturaleza de las tareas realizadas? Analizando el tipo de errores cometidos podríamos evaluar no solamente el grado de adquisición sino también la "cualidad" de la adquisición. Este grado y esta cualidad correspondiente, corresponderían a una* **representación** *que el alumno se hace del concepto:* **una concepción.** *A diferentes estados de adquisición corresponderían diferentes "concepciones" más y más acabadas, pero estas concepciones diferentes pueden igualmente coexistir y estar más o menos disponibles según las* **situaciones**" (p.145-146)

Según Margolinas (1993) el término **concepción** (del sujeto) describe un modelo de comportamiento cognitivo del sujeto en situación, construido por el investigador . Consideramos muy significativa esta referencia, ya que presenta la **concepción** como una herramienta útil que, construida *"a priori"* por el investigador le permite describir o explicar los procedimientos, los modelos de comportamiento, las definiciones, etc. que los alumnos manifiestan en una determinada situación y, en consecuencia, locales y ligados a un saber específico de la matemática.

Estrechamente ligadas a este caracter *"local"* de las situaciones de enseñanza, están las relaciones que establecen Douady y Perrin entre las concepciones del sujeto y los **cuadros** en las que estas se desarrollan: *"Así para el área, los alumnos desarrollan una concepción forma ligada al cuadro geométrico, o una concepción número ligada al cuadro numérico."* (Douady, Perrin, 1989, p.395)

Para Douady, el término **cuadro** *"está tomado con el sentido que usualmente le damos cuando hablamos del cuadro aritmético, cuadro geométrico, ... Decimos que un* **cuadro** *está constituido por objetos de una rama de las Matemáticas, sus formulaciones, eventualmente diversas, y las imágenes mentales que el sujeto asocia en un momento dado a estos objetos y a estas relaciones. Estas imágenes juegan una función esencial en el funcionamiento como útiles, de los objetos del cuadro. Dos cuadros pueden comportar los mismos objetos matemáticos y sin embargo, diferir por las imágenes mentales y la problemática desarrollada."* (Douady, Perrin, 1989, p.398)

A través de las ideas aportadas por los autores anteriormente citados y a pesar de la falta de una definición explícita, podemos resumir que: la concepción (del sujeto) en su sentido local, está estrechamente ligada al saber puesto en juego y a los diferentes problemas en la resolución de los cuales interviene. (Artigue, 1989). En consecuencia, el alumno construirá progresivamente sus conocimientos pasando por concepciones sucesivas que la forma tradicional de enseñanza no le permite en, muchas ocasiones, explicitar. Un mismo alumno puede utilizar numerosas concepciones ignorando sus relaciones, o bien al contrario, relacionándolas con una concepción más general. (Brousseau, 1988)

Diversos tipos de concepciones del sujeto

Algunos investigadores matizan de forma expresa el término concepción (del sujeto) y hacen referencia a concepciones iniciales, espontáneas, ingenuas, naturales, resistentes, propias, etc. aunque no dan una definición previa de las mismas.

Así, por ejemplo, Sierpinska (1989a) utiliza en algunos de sus trabajos el término "*concepciones espontáneas*" :

> "*Debatiendo con los alumnos sobre sus primeras* **concepciones espontáneas** *del límite de series infinitas numéricas, surgieron discusiones sobre sus actitudes hacia las matemáticas, el infinito y el número*" (p.143)

También Johsua, Viennot, Resnik se interesan en sus trabajos por las "*concepciones naturales o ingenuas*" de los alumnos:

> "*Las* **concepciones ingenuas** *o incorrectas de los sujetos sirven de base activa a los razonamientos y acciones de los alumnos. Una enseñanza científica debe, en parte, ser construida contra estas* **concepciones naturales**" (Johsua, 1989, p.313)

> "*La noción de obstáculo epistemológico está fuertemente asociada a la gran corriente de estudios sobre las concepciones del sujeto ... Estas concepciones comunes o* **naturales** *aparecen en principio como dignas de interés, en tanto que se desvian de los saberes enseñados*" (Viennot, 1989, p. 117)

> "*los educadores .... pueden tratar de conducir a los*

alumnos a reemplazar sus **concepciones ingenuas** *ayudándoles a elaborar una concepción hipotética nueva (la concepción científica)"* (Resnik, 1989, p. 168)

En su tesis, dedicada al estudio de las concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de continuidad de una función, El Bouaizzaui (1988, p.20), realiza las siguientes distinciones:

- **concepciones iniciales**: previas a todo aprendizaje escolar sobre las nociones dadas.
- **concepciones inducidas por la enseñanza**:
  a) **concepciones controladas por la enseñanza**: construidas por los alumnos y provocadas intencionalmente por el profesor con objeto de hacerles adquirir una noción.
  b) **concepciones incontroladas por la enseñanza**: construidas por los alumnos a través del proceso de adquisición de una noción y no provocadas intencionalmente por la enseñanza.

Bodin (1992, p. 23) se refiere también a diferentes tipos de concepciones: *"Sería preciso distinguir las concepciones* **accidentales**, *ligadas a un contexto preciso (se traducen por comportamientos inestables), de las concepciones* **provisionalmente estables** *aunque destinadas a evolucionar, las concepciones (erróneas o no) que se erigen o se erigirán en obstáculos, las concepciones conocidas y reconocidas como tales por los enseñantes de las que ellos ignoran en tanto que concepción, etc."*

En la actualidad existen diferentes investigadores interesados en estudiar las concepciones de los alumnos desde un punto de vista particular -*"operacional"* y *"estructural"*-. Entre ellos se encuentran Dubinsky, Hawks, Nichols y Sfard.

Para estos autores la noción de **concepción** se trata de un término de naturaleza esencialmente cognitiva, ya que fundamentan su trabajo en una teoría general derivada del concepto de abstracción reflexiva de Piaget. De acuerdo con dicha teoría, el conocimiento matemático de una persona reside en su tendencia a responder a una situación problemática percibida, construyendo o reconstruyendo esquemas mentales de todo aquello de lo que trata la situación.

> *"Un esquema es para nosotros una colección más o menos coherente de objetos (físicos o mentales), junto con acciones y procesos internos que son aplicados a estos objetos. Está construido por ciertas actividades cognitivas que incluyen: interiorización, coordinación, reversibilidad y encapsulación (convierte un proceso en un objeto)"* (Dubinsky, 1989, p.291-292)

Según Sfard (1989) muchas de las nociones matemáticas pueden concebirse por los alumnos de dos formas: **operacionalmente** (como procesos) y **estructuralmente** (de una forma estática, como objetos abstractos). Asegura que *"estas dos aproximaciones, ostensiblemente incompatibles, (¿cómo puede algo ser un proceso y un objeto al mismo tiempo?)"* son para ella, en efecto, compatibles. Para explicar esto considera el fenómeno de **"reification"** que convierte un proceso en un objeto abstracto. Dubinsky utiliza el término **"encapsulation"**, pero ambos fenómenos son análogos - conversión de procesos en objetos matemáticos abstractos-.

> *En el proceso de formación de un concepto, la* **concepción operacional** *es con frecuencia, la primera que se desarrolla. Fuera de ella, la* **concepción estructural** *la iría envolviendo gradualmente. .... ciertas partes de la Matemática las podemos observar con cierto grado de jerarquización, lo que es concebido de una forma puramente operacional en un nivel, se podría concebir estructuralmente en un nivel más alto. En otras palabras, los procesos se convierten en un todo compacto y estático, es decir, son* **encapsulados**, *para llegar a ser unidades básicas de una teoría de un nivel más alto"* (Sfard, 1989, p.151)

Dubinsky, Hawks y Nichols (1989) llaman **concepción objeto** a "*aquella que la reconstruye el sujeto en un plano de pensamiento superior, a través de una* **concepción proceso** *y un rico repertorio de propiedades y experiencias. Todo esto retenido es "encapsulado"; y el sujeto piensa en la noción como un objeto*" (p.293). Según esta descripción podemos afirmar que existe una analogía total entre la concepción estructural y la concepción objeto.

1.6. SENTIDO EPISTEMOLOGICO DE LA NOCION DE CONCEPCION

En la descripción que hace Artigue del término concepción se aprecian dos sentidos complementarios para el mismo: el punto de vista cognitivo (los conocimientos y las competencias del sujeto en relación a un objeto matemático particular) y el punto de vista epistemológico, en especial al estudiar la génesis histórica, donde, para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo que, en su momento fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados.

El Bouazzaoui (1988) utiliza la expresión concepciones colectivas para referirse a los distintos tipos de conocimientos matemáticos transmitidos por los programas y manuales escolares o bien identificados en la génesis histórica.

1.6.1. CONCEPCIONES IDENTIFICADAS EN LA GENESIS HISTORICA DE UNA NOCION MATEMATICA

Los conceptos matemáticos que figuran en los manuales de los alumnos, o bien los manejados por los profesores en el aula, en general, se presentan como algo cerrado y acabado, algo definitivamente perfecto. Como consecuencia, "*esta presentación elimina completamente la historia de los saberes, es decir, la sucesión de* *dificultades y preguntas que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales, su empleo para tantear nuevos problemas, la introducción de técnicas y cuestiones nacidas de los progresos en otros sectores, el rechazo de ciertos puntos de vista que han resultado falsos o inadecuados y las innumerables discusiones que han ocasionado. Esta presentación enmascara el verdadero funcionamiento de la ciencia, imposible de comunicar, para poner en su lugar una génesis ficticia"* (Brousseau, 1986, p.283)

El estudio de la génesis de los conceptos constituye un método muy fecundo en la Didáctica de la Matemática, donde no se pretende reintroducir el método histórico en la enseñanza, pero sí estudiar los procesos que han seguido los conceptos matemáticos en su formación y en su desarrollo, los mecanismos de producción de estos saberes, y, en general, conocer las características de la actividad matemática.

Artigue (1989) en un trabajo titulado *"Epistemologíe et Didactique"* justifica la necesidad que el didacta tiene de realizar un estudio epistemológico.

> *"En un primer nivel el análisis epistemológico es necesario para el didacta puesto que ayuda a poner en distancia y bajo control las "representaciones epistemológicas" de las matemáticas inducidas por la enseñanza:*
> - *ayudando a dar una historicidad a los conceptos matemáticos que la enseñanza usual tiende a presentar como objetos universales tanto en el espacio como en el tiempo.*
> - *ayudando a dar igualmente una historicidad a nociones metamatemáticas que la enseñanza usual cultiva con la ficción de un rigor eterno y perfecto en las matemáticas"* (Artigue, 1989, p.1)

Precisamente el estudio de la transposición didáctica tiene como uno de sus objetivos poner de manifiesto todas las anteriores diferencias intentando con ello que el didacta tome consciencia de la distancia que separa la economía de los dos sistemas: el sistema científico y el sistema de enseñanza.

El análisis epistemológico permite también a la Didáctica *"desprenderse de la ilusión de* transparencia de los objetos del saber *que ella manipula, ayudando, con ello, al didacta a liberarase de las representaciones epistemológicas erróneas que tiende a inducir su práctica de enseñanza"* (Artigue, 1989, p.2)

La epistemología interviene también de modo muy decisivo en la configuración de los elementos constitutivos de la **significación** de un determinado concepto, analizando los diferentes sentidos con los que ha podido aparecer y su adaptación más o menos idónea a la resolución de distintos problemas.

Un análisis epistemológico de una determinada noción nos conducirá así, a la determinación de toda una serie de **concepciones históricas** ligadas a la misma , ello nos permitirá poner en evidencia *"toda la pluralidad de puntos de vista posibles que históricamente han estado asociados, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que le han sido asociados y observar su adaptación más o menos buena a la resolución de tal o cual clase de problemas. ... Ayudará también al didacta a luchar contra la ilusión de* transparencia de la comunicación didáctica *inducida por los modos empiristas del aprendizaje, permitiéndole diferenciar el saber que la enseñanza quiere transmitir y los conocimientos efectivamente construidos por los alumnos."* (Artigue, 1989, p.14)

1.6.2. CONCEPCIONES QUE SE TRANSFORMAN EN OBSTACULOS EN LA GENESIS HISTORICA DE UNA NOCION MATEMATICA

El mecanismo de adquisición y evolución del conocimiento, tanto a nivel cultural u objetivo como personal o subjetivo, implica una constante interacción con los conocimientos anteriores, sometiéndolos a revisión, modificándolos o, incluso, rechazándolos, hasta llegar a formar conocimientos nuevos. *"El mecanismo de* *la adquisición de conocimientos, puede aplicarse tanto a la epistemología o historia de las ciencias, como al aprendizaje o la enseñanza. Tanto en un caso como en el otro, la noción de obstáculo es fundametal para plantear el problema del conocimiento científico"*(Brousseau, 1983, p. 38)

Hay una serie de investigadores que utilizan el análisis epistemológico histórico determinando concepciones y obstáculos ligados al desarrollo y evolución de una noción matemática como una herramienta muy útil para el análisis didáctico de las concepciones y obstáculos que se pueden presentar en los alumnos. Entre ellos encontramos a Brousseau (1983), Sierpinska (1985, 1989, 1992), Artigues (1984), Janvier y René de Cotret (1989), El Bouazzaoui (1988), etc

Los obstáculos identificados en la génesis histórica de un concepto son obstáculos epistemológicos: *"tienen su origen en la propia constitución del conocimiento. Se les puede encontrar en la propia historia del concepto"* (Brousseau, 1983, p.173)

Sierpinska (1985) destaca de forma explícita la ayuda que ofrece al didácta el análisis epistemológico: *"En el cuadro de nuestra investigación la historia juega la función de un útil. Sin embargo, el estudio histórico no tiene por qué ser paralelo al estudio experimental. Los dos estudios están en interacción. Por una parte podemos esperar que el conocimiento de las condiciones históricas en las que un obstáculo ha sido reconocido y posteriormente superado ayudará a comprender las fuentes y la naturaleza de un obstáculo análogo descubierto en los alumnos, por otra parte, es posible que el descubrimiento y análisis de los obstáculos o de las dificultades encontradas en los alumnos de hoy día permita proyectar alguna luz sobre los puntos de vista adoptados por las matemáticas del pasado"*. (p.8)

Según Sierpinska (1992) podemos distinguir varios niveles en el origen de los obstáculos epistemológicos:

- **nivel de actitudes, creencias y convicciones** de nuestra visión del mundo: Este tipo de conocimiento es explícito o explicitable. Lo podemos siempre comunicar a los demás, por ejemplo, cuando decimos afirmaciones tales como: *"las matemáticas son el lenguaje de la ciencia"*. Pero esta clase de afirmaciones no exige ningún tipo de justificación sino que más bien están autorizadas por la tradición o el sentido común: es algo que todo el mundo conoce.

- **nivel de esquemas de pensamiento**: Este tipo de conocimiento se usa, en su mayor parte de forma inconsciente; está determinado por las diferentes formas con las que podemos aproximarnos a la resolución de un problema, por la manera de interpretar situaciones, por todo aquello que hemos aprendido en la práctica o por la imitación en el curso de nuestra socialización y educación.

- **nivel de conocimiento técnico:** Está formado por conocimientos explícitos, lógicamente justificados, necesarios en diferentes profesiones; las personas que lo poseen están asociadas, generalmente por un factor común, como puede ser pertenecer a una misma profesión o a un mismo grupo social.

Según Sierpinska, estos tres niveles no son independientes. Los diferentes enfoques "técnicos" con los que tratamos de dar solución a un determinado problema, pueden explicarse por los conocimientos que tenemos a nivel de creencias o a nivel de esquemas de pensamiento, y al contrario, nuestro conocimiento técnico, en un cierto momento, puede cambiar nuestras creencias e, incluso, nuestros esquemas de pensamiento.

"Si nuestras creencias son falsas creencias, y nuestros esquemas de pensamiento son inconscientes, pueden, muy bien, funcionar como obstáculos para nuestro pensamiento en un nivel técnico" (Sierpinska, 1992, p. 28). Por ejemplo, la creencia de los matemáticos griegos y, principalmente los pitagóricos, en la conmensurabilidad de todas las magnitudes geométricas se constituyó en un

obstáculo para el desarrollo de los irracionales. La manifestación de los obtáculos se hace a través de los errores que produce, pero estos errores no son, en ningún caso debidos al azar, sino que son reproductibles y persistentes durante largo tiempo.

"Si un obstáculo no es propio de un sola persona, sino que es mucho más general ya que puede estar presente en una cierta cultura durante algún período de tiempo, entonces se llama obstáculo epistemológico" (Sierpinska, 1992, p. 28). Así es como la noción de obstáculo *epistemológico* aparece como fundamental para plantear el problema de la evolución del conocimiento científico.

La noción de obstáculo epistemológico se convierte, pues, en un útil específico para el análisis de la matemática como ciencia en evolución. De este modo, ciertos elementos de los niveles formal e informal de la cultura matemática pueden funcionar como obstáculos. Inconscientes o ligados a fuertes convicciones y creencias, en general son difíciles de superar.

No obstante, los obstáculos epistemológicos no se pueden enumerar o definir de una vez por todas. Ciertas ideas, ciertos esquemas pueden, a veces, funcionar como obstáculos, o bien pueden ser fuentes de obstáculos en el desarrollo del pensamiento científico, pero no se pueden considerar como obstáculos en el sentido absoluto.

1.7. OTRAS NOCIONES RELACIONADAS CON LA DE CONCEPCION DEL SUJETO

Estamos interesados en estudiar otros términos que, aunque pertenecen a marcos teóricos diferentes, consideramos que pueden aportar una más completa visión del significado del término concepción en nuestra investigación.

1.7.1. IMAGEN CONCEPTUAL ("CONCEPT IMAGE") Y DEFINICION CONCEPTUAL ("CONCEPT DEFINITION")

Vinner y Tall (1981, 1983, 1989), aunque no definen el término *concepción*, desarrollan una teoría en la cual relacionan los significados que para ellos tiene la **definición** de un concepto (*"concept definition"*) y las **imágenes** que de dicho concepto (*"concept image"*) desarrollan los alumnos.

Para estos autores la mayoría de las nociones introducidas en Matemáticas las han encontrado, los alumnos, bajo diferentes formas: situaciones de la vida real, palabras utilizadas en expresiones coloquiales, analogía con otras nociones, etc. Existe pues, en los alumnos una estructura cognitiva extremadamente compleja asociada a cualquier noción matemática. Las definiciones rigurosas y formales a las que, con posterioridad, se enfrenten, no sustituyen de manera inmediata a toda la complejidad de esta estructura cognitiva. Contendrá, además de las definiciones formales de dicha noción, diversas imágenes mentales, representaciones, modelos, ejemplos y contraejemplos, relaciones con otras nociones, etc.

> *"Debemos formular una distinción entre los conceptos matemáticos formalmente definidos y los procesos cognitivos a través de los cuales se conciben"* (Vinner y Tall, 1981, p.151)

Estos autores consideran que todos los conceptos matemáticos, excepto los primitivos, tienen definición. Muchas de estas definiciones se introducen en los programas de Matemáticas, sin embargo, los escolares no usan necesariamente la definición cuando tratan con ejemplos o contraejemplos de un concepto. En la mayoría de los casos *"deciden en base a una* ***imagen conceptual,*** *es decir, teniendo en cuenta todo un conjunto de esquemas mentales asociados a dicho concepto"* (Vinner y Dreyfus, 1989, p.356)

El término *"concept image"* lo usan en el más amplio sentido de la palabra; incluye representaciones visuales del concepto (por ejemplo, para el caso del concepto de función, serían los gráficos, los diagramas sagitales e incluso los símbolos tales como "f(x)=", o bien, "y=") y propiedades que el alumno asocia a este concepto (por ej. podrían pensar que una función siempre se expresa algebraicamente). Sería también el resultado de su experiencia con ejemplos y contraejemplos de dicho concepto. Sin embargo, el conjunto de objetos matemáticos considerados por el estudiante como ejemplos de un determinado concepto no coincide necesariamente con el conjunto de objetos matemáticos determinados por la **definición.**

> *"Llamaremos* **"concept image"** *a la estructura cognitiva completa que está asociada al concepto, la cual incluye representaciones mentales, propiedades asociadas y procesos. Se construye a través de los años con experiencias de todo tipo, cambia si el individuo se encuentra con nuevos estímulos y madura de este modo"* (Vinner y Tall, 1981, p.152)

Vinner y Tall, estudian también las definiciones que, de determinadas nociones matemáticas, manifiestan los alumnos:

> *"Nos referimos al* **"concept definition"** *como el conjunto de palabras que se usan para especificar lo que es un concepto"* (Vinner y Tall, 1981, p.152)

A veces las definiciones que de algunos conceptos nos dan los alumnos difieren mucho de la definición formal de dicho concepto, *"son una descripción de la imagen conceptual que personalmente hayan construido"*. A este tipo de definición lo llaman *"definición personal"* y la consideran como una parte integrante de su propio *"concept image"*. (Vinner, 1983, p.294)

> *"A veces los estudiantes están tan seguros de su propia imagen conceptual que pueden considerar superflua e inoperante la teoría formal"*. (Vinner y Tall, 1981, p.155)

Estos autores sugieren que en el proceso de aprendizaje de los estudiantes se produce un fenómeno que denominan de **"compartamentalización"**: utilizan elementos en sus definiciones que posteriormente no emplean en sus argumentaciones para justificar determinadas respuestas. *"Este fenómeno de compartamentalización se manifiesta cuando una persona tiene dos esquemas que potencialmente entran en conflicto en su estructura cognitiva. Ciertas situaciones estimulan un esquema, mientras que otras situaciones estimulan otro, esto da lugar a conductas, que en numerosas ocasiones son inconsistentes."* (Vinner y Dreyfus, 1989, p.357)

Refiriéndose a las nociones anteriormente presentadas, Artigue opina que *"la noción de* **concept image** *está muy próxima a la de* **concepción del sujeto** *en su sentido más global"* (Artigue, 1989, p.15). Esta afirmación es compartida por nosotros.

Esta proximidad también está manifestada por Cornu en su tesis sobre el aprendizaje de la noción de límite:

> *"Para muchas nociones o conceptos matemáticos, el "concept image" no está vacío antes de que la noción aparezca explícitamente en la enseñanza. El alumno tiene ya un cierto número de ideas, de imágenes, de procesos, de palabras que forman un conjunto, que puede no ser coherente, pero que funciona en ciertas ocasiones. Nosotros llamamos* **concepciones espontáneas** *a estas ideas a priori, que no son fruto de una enseñanza organizada"* (Cornu, 1983, p.67)

1.8. LA NOCION DE RELACION AL SABER

En la noción de concepción hemos diferenciado la doble vertiente cognitiva (concepción del sujeto) y epistemológica (concepción en la matemática o transmitida en la enseñanza). Pero aún es posible ir más allá en esta diferenciación, ya que, dentro de las concepciones colectivas y desde un punto de vista didáctico, no son las instituciones matemática y escolares las únicas relevantes. Las matemáticas se emplean también en la ciencia, la técnica y en las diversas instituciones; incluso en la vida cotidiana, por ejemplo, y en las diversas asignaturas que configuran el curriculum. La significación, uso y restricciones del mismo sobre un concepto dado puede diferir en estas diferentes instituciones y las concepciones de cada sujeto serán influídas por los puntos de vista y usos específicos mantenidos sobre un objeto en las diferentes instituciones de las que forma o ha formado parte.

Para resaltar esta dependencia institucional de los conocimientos construídos por los sujetos y englobar, asimismo, los aspectos no meramente cognitivos, Chevallard en una serie de estudios realizados en los últimos años (1987, 1988, 1989, 1990) ha elaborado un sistema teórico en torno al concepto de **relación al saber**.

> "*Lo que ordinariamente llamamos* **el saber de un individuo** *(determinado) no es otra cosa que su relación al saber considerado. La noción de concepto se aplica al saber (de la institución) y no al saber del individuo; no hablaremos pues de formación de conceptos a propósito de sujetos, sino de formación de* **la relación** *de tal o cual individuo a tal o cual concepto*" (Chevallard, 1988a, p. 100)

Utiliza una metáfora para explicar mejor esta noción:

> "*Este nuevo concepto - relación al saber - se eleva a priori sobre una base metafórica. Pero la metáfora ha cambiado. En lugar de reenviar a un movimiento por el cual un objeto -el saber- pasaría de un lugar exterior al individuo a un lugar interior -la cabeza, la mente, el cerebro-, la metáfora aquí explotada reenvia a la imagen del faro que ilumina localmente un paisaje nocturno. El paisaje es el saber, el faro el individuo, el*

> *haz luminoso* **la relación al saber**. *Diremos entonces que el individuo tiene una cierta relación al saber - a tal o cual cuerpo del saber o a tal o cual objeto del saber".* (Chevallard, 1988b, p.9)

Con este concepto de **relación al saber** Chevallard trata de sustituir la escala unidimensional que va del *"saber"* al *"no saber"* por un sistema - la relación - en el cual se trata de describir el estado en términos de condiciones. El cambio, según él, es profundo: *"No podemos contentarnos con describir la relación a tal o cual objeto del saber - por ejemplo la noción de logarítmo - diciendo que tal individuo "sabe" o "no sabe", tiene, domina o no la noción de logarítmo. El concepto de relación permitirá recurrir a una descripción diferenciada, a una "cartografía" de la relación, cuya elaboración constituye un problema fundamental de la didáctica"* (Chevallard, 1988b, p.10)

En el marco de la relación al saber, Chevallard, distingue, en primer lugar, dos tipos de relaciones diferentes: **relación personal** y **relación institucional**, ya que, según él, la puesta en relación de un individuo y un saber no se realiza más que en el marco de una institución, bajo un contrato y a través de situaciones institucionalmente determinadas. La formación de la relación al saber, tal como lo genera la institución, supone la entrada del individuo en el contrato y la aceptación de las situaciones establecidas por la institución.

> *"Un individuo X no puede tener, con respecto a un objeto de saber dado O, más que una* **relación personal**, *que emerge de un sistema de* **relaciones institucionales**, *relaciones ternarias, donde el individuo X entra en relación con el objeto O y uno o varios agentes de la institución"* (Chevallard, 1989, p. 16-17)

Según este autor, en la enseñanza se tiene la creencia de que conocer un concepto es la capacidad de ponerlo en funcionamiento en un cierto número de situaciones. Esta identificación tradicional se encuentra respaldada en la noosfera por la epistemología científica, según la cual un concepto no sería más que la suma de sus usos. Esto nos llevaría *"a priori"* a una universalidad abstracta a-institucional, en la que dominar un concepto sería dominar el conjunto de sus usos en todas las instituciones donde el concepto está puesto en funcionamiento. Ahora bien, en cada institución, y en el sistema de enseñanza en particular, un concepto tiene un número restringido de usos o de empleos modelizantes. Esto nos conduce a poder analizar las relaciones que dicha institución mantiene con un determinado saber, es decir a caracterizar la **relación institucional**.

Mediante la introducción del término **-relación personal al saber R(X,O)-** Chevallard reemplaza *"todo lo que creíamos ordinariamente poder decir - en términos de "saber hacer", de "concepciones", de "competencias", de "imágenes mentales", de "representaciones", de "aptitudes", etc - de X a propósito de O. ...El concepto de relación personal a un objeto del saber aparece así como englobando los aspectos fragmentarios en los cuales los disociamos ordinariamente"* (Chevallard, 1989, p. 17)

Esta relación personal tiene, según este autor, dos componentes: una relación pública -visible y manifiesta- y una relación privada.

En un trabajo reciente realizado por Rouchier (1990) sobre el proceso de institucionalización sitúa las **concepciones del sujeto** dentro de las relaciones personales públicas al saber ya que, según él, las concepciones del sujeto son conocimientos que se manifiestan de forma pública. Se trataría, según terminología de Chevallard, de las relaciones personales públicas al saber. Ahora bien, el sujeto también conoce muchas regularidades que se constituyen como conocimientos privados. Todo esto conforma su relación privada al saber. El sujeto no lo utiliza de forma pública. Sería el lugar de los modelos implícitos, del teorema en acto, de las intuiciones, de las imágenes mentales, etc.

Por nuestra parte creemos que los términos *concepción del sujeto* y *relación personal* son próximos pero no sinónimos. En primer lugar, la relación al saber incluye otros aspectos, como los afectivos, o las competencias, que usualmente no son consideradas como concepciones. La relación al saber siempre tiene un carácter global, mientras que, como hemos visto, la concepción puede ser considerada bajo un punto de vista local.

Respecto a la relación institucional al saber, desde nuestro punto de vista sería próxima a la idea de concepción epistemológica, si la institución considerada es la Matemática o la escolar.

1.9. SIGNIFICADOS, CONCEPCIONES Y RELACION AL SABER

La mayor parte de los conceptos teóricos que hemos analizado tratan de definir los conocimientos y creencias de los sujetos sobre los objetos matemáticos, aunque pasan por alto una reflexión epistemológica previa sobre la naturaleza de estos objetos matemáticos. Como excepción particularmente notable citamos a Vergnaud (1982b; 1990) que aporta una noción de concepto a que hemos hecho referencia y que consideramos de gran relevancia y profundidad.

En Godino y Batanero (1993a, 1993b) se formula una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de campos de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado. El sistema teórico que introducen estos autores se inspira estrechamente en las nociones de práctica, objeto y relación al objeto propuestas por Chevallard (1989; 1992) aunque precisan algunas de estas ideas y explicitan su conexión con la actividad de resolución de problemas matemáticos. Proponen, además, un primer nivel de desagregación de la noción de relación al objeto, aportando una definición del significado que destaca los aspectos puramente epistémicos y semióticos de dicha relación de otros como los actitudinales.

El punto de partida de este trabajo es la idea de campo de problemas como conjunto de situaciones problemáticas para las cuales puede ser válida una solución equivalente. Lo que caracteriza un problema como matemático es la actividad desarrollada en su resolución que incluye: buscar lo esencial entre los contextos, simbolizar, validar, generalizar; en definitiva matematizar en términos de Freudhental (1991).

Al resolver el problema, validar su solución, comunicarla a otras personas o generalizarla a otros problemas se realizan actividades o **prácticas** (textuales, gráficas, orales, ...), que pueden ser manifestaciones empíricas observables o también acciones interiorizadas. Entre estas prácticas los autores diferencian las prácticas significativas, cuando la persona que resuelve el problema considera que las mismas desempeñan un papel en dicha resolución. Las prácticas no significativas incluirían los ensayos fallidos, que se abandonan por no ser considerados útiles para el fin pretendido.

Se diferencia entre **prácticas personales y prácticas institucionales** asociadas a un mismo campo de problemas. Las primeras dependen del sujeto y las segundas son socialmente compartidas por los sujetos de una misma institución, teniendo por tanto estas últimas el carácter de observables. Desde el punto de vista didáctico esta diferenciación entre prácticas personales e institucionales permite recoger en una teorización común, tanto los procedimientos y soluciones que, en la enseñanza del tema se consideran correctas, como los errores, que para los alumnos constituyen "buenas soluciones" al problema que se les ha propuesto.

A partir de la actividad de resolución de un campo de problemas y del sistema de prácticas asociado, se produce en las instituciones la emergencia progresiva (Morín, 1987) de ciertos objetos institucionales, productos globales de las actividades que forman este sistema de prácticas. Estos objetos, en un momento dado son nombrados y se reconoce su entidad cultural. Sucesivamente son generalizados, dotados de propiedades y empleados en la resolución de nuevos problemas. El sistema de prácticas asociado al objeto se define como **significado** del objeto institucional.

Similarmente, el aprendizaje del sujeto se produce mediante la emergencia progresiva del **objeto personal** a partir del sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas, que constituyen el **significado** de dicho objeto.

Para Godino y Batanero (1993a, 1993b) la noción de concepción del sujeto (respectivamente, en sentido epistemológico) puede describirse como un emergente del sistema de prácticas personales (respectivamente, institucionales) asociadas a campos de problemas, esto es, serían objetos personales o institucionales en su teorización. La distinción introducida entre el objeto (emergente inobservable de un sistema de prácticas) y el significado del mismo (sistema observable de prácticas en el caso de la institución y parcialmente observable en el caso del sujeto) permite analizar más nítidamente la problemática de la evaluación de los constructos no observables directamente como son las concepciones. Estas son inferidas a partir de sistemas de indicadores empíricos formados por las respuestas de los sujetos a situaciones de evaluación adecuadas.

1.10. CONCLUSIONES SOBRE LA NOCION DE CONCEPCION

En las Secciones anteriores hemos analizado la noción de concepción, y otras relacionadas con ella empleadas con frecuencia en la investigación didáctica, con el fin de estudiar las diferencias y semejanzas entre las mismas. Esto nos permitirá clarificar esta noción teórica y su uso en la parte experimental de nuestro estudio.

Hemos diferenciado, en primer lugar, entre la acepción cognitiva - concepciones del sujeto- y la acepción epistemológica de esta noción. La concepción en su carácter epistemológico puede referirse a la evolución histórica de los objetos del saber matemático, así como en los cuestionarios oficiales y libros de texto de los alumnos. Se trata así de una noción que tendría un carácter institucional porque se encuentra asociada a determinadas instituciones culturales y sociales (la matemática y el sistema educativo); esto supone la atribución de un carácter relativo a los objetos matemáticos.

La acepción como concepción del sujeto la utilizaremos para referirnos a los conocimientos del sujeto sobre un objeto, originados como consecuencia de los procesos de enseñanza - aprendizaje en el seno de sistemas didácticos o en entornos informales. Serían el resultado de un intercambio permanente de los sujetos con las situaciones de enseñanza o con su entorno.

Aunque las concepciones siempre tienen un carácter global, hemos señalado también el interés en hablar de concepción local, ligada a ciertos subconjuntos de situaciones que dan sentido al concepto, pues en una investigación específica son estos aspectos parciales - las concepciones locales- las que son accesibles al estudio didáctico.

La mayor parte de los autores reconocen ciertas características a las concepciones del sujeto: su existencia previa a la instrucción formal; su carácter a veces resistente, que no puede ser modificada con la instrucción expositiva; y, en particular, la estrecha relación con las situaciones en las que un concepto se dota de sentido.

Diferentes autores proponen tipologías para las concepciones del sujeto; así se distingue entre concepciones espontáneas y concepciones inducidas por la enseñanza (voluntaria o involuntariamente), concepciones accidentales o provisionalmente estables, etc. En particular el término de "misconception" se emplea para indicar una concepción inadecuada y el término obstáculo se identifica con una concepción que, aun teniendo un dominio de validez, provoca errores persistentes en otros dominios y cuyo origen puede escapar al sujeto.

Otros autores destacan aspectos parciales de las concepciones, proponiendo términos como "concept definition" y "concept image", concepción estructural y operacional.

Mención especial merece la noción de relación al saber, más amplia que la de concepción, ya que abarca los aspectos tanto puramente epistémicos como las actitudes y competencias de un sujeto o una institución con respecto a un objeto matemático. Este concepto tiene así una gran generalidad, pues permite considerar otras instituciones de referencia y recoge las dimensiones epistemológicas y psicológicas de las concepciones, así como los demás aspectos citados.

Pero las ideas de concepción sobre un objeto y de relación al objeto, tanto personal como institucional, parten de un dato previo cuya existencia y estructura interna no se analiza ni cuestiona: el objeto. Exceptuando a Vergnaud, no hay en la literatura de investigación didáctica revisada una formulación explícita de qué sea un concepto matemático, ni de cuál pueda ser la estructura interna de los objetos abstractos tomados en cuenta desde un punto de vista objetivo o cultural.

Puesto que este autor (Vergnaud 1982b, 1990) propone una definición de concepto, adaptada para los estudios psicológicos y didácticos, en la cual incluye no sólo las propiedades invariantes que dan sentido al concepto sino también las situaciones y los significantes asociados al mismo, consideramos que la concepción del sujeto debemos caracterizarla por:

- los invariantes que el sujeto reconoce como notas esenciales que determinan el objeto;

- el conjunto de representaciones simbólicas que le asocia y utiliza para resolver las situaciones y problemas ligados al concepto;

- el conjunto de situaciones, problemas, etc. que el sujeto asocia al objeto, es decir para las cuales encuentra apropiado su uso como herramienta.

Análogamente, en la noción de concepción considerada desde el punto de vista epistemológico (o institucional), tanto en la evolución histórica de los objetos del saber matemático, omo en los cuestionarios oficiales y libros de texto de los alumnos, hemos optado por diferenciar los tres componentes descritos, referidos según el caso a la institución correspondiente (histórica o escolar).

Por otro lado, hemos visto cómo el interés de las ideas de concepción y relación al saber es admitir la plurariedad de puntos de vista sobre un mismo objeto matemático. Sin embargo, no plantean el problema de la evaluación de estos diversos puntos de vista, no diferenciando, en el caso de concepciones subjetivas o relaciones personales al saber, estos diversos puntos de vista de sus manifestaciones observables, que pueden ser diversas y numerosas.

Este problema es abordado directamente por Godino y Batanero (1993a, 1993b) quienes resaltan la correspondencia existente entre las concepciones referidas a un objeto matemático, el campo de problemas o situaciones que dan sentido al concepto y las prácticas explicitadas por los sujetos en el proceso de resolución de estos problemas. Esta correspondencia es la que permite utilizar estas prácticas o respuestas a los ítems propuestos en las situaciones de evaluación para inferir las concepciones de los sujetos, para lo cual sería necesario emplear situaciones de evaluación en las que se pongan de manifiesto una muestra representativa de prácticas correspondientes a los tres tipos de componentes que caracterizan las concepciones, esto es:

- prácticas en las que el sujeto explicite las características o invariantes que reconoce como notas esenciales que determinan el objeto;
- prácticas en las que el sujeto precise emplear el conjunto de representaciones simbólicas que asocia al concepto;
- prácticas que permitan inferir el conjunto de situaciones, problemas, etc. que el sujeto asocia al objeto, es decir para las cuales encuentra apropiado su uso como herramienta.

La noción de concepción, completada con la idea de significado, como sistema de prácticas asociado a la misma, se convierte así, para el investigador, en un instrumento útil para el análisis didáctico. Proponemos para ello realizar, en principio, un estudio de las concepciones epistemológicas asociadas históricamente a la función, tratando de determinar la pluralidad de puntos de vista posibles que le han sido asociados, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento empleados y poner en evidencia su mayor o menor adaptación a la resolución de diferentes problemas. Estas concepciones epistemológicas nos aportarán un conocimiento relevante que nos servirá como "*marco de referencia*" para comprender los factores determinantes de los procesos de enseñanza-aprendizaje o los fenómenos de transposición didáctica.

Posteriormente proponemos determinar las concepciones que transmiten los cuestionarios oficiales y manuales escolares, analizando las condiciones y restricciones que impone el régimen didáctico a todo objeto de saber (proceso de transposición didáctica).

Por último, proponemos estudiar y analizar las concepciones de los sujetos que, como en toda investigación, se restringirá a los aspectos locales puestos en evidencia por las situaciones de evaluación empleadas. Utilizaremos un instrumento que permita recoger las prácticas de los alumnos referidas a las tres categorías que hemos descrito, permitiéndonos los estudios precedentes describir y explicar los procedimientos, los modelos de comportamiento, las definiciones, etc, que estos alumnos manifiestan en relación a la noción de función.

CAPÍTULO 2

CAPITULO 2

PROBLEMA DE INVESTIGACION. ANTECEDENTES. METODOLOGIA

2.1. INTRODUCCION

El concepto de función, siendo uno de los más importantes conceptos matemáticos debido a su naturaleza unificante y modelizadora, y estando presente en los currículos escolares desde los cursos de enseñanza primaria hasta los de Secundaria y COU, es, sin embargo, un concepto complejo ya que contiene una multiplicidad de registros representativos y genera muy distintos niveles de abstracción. Debido a estas características, han sido numerosos los investigadores interesados en estudiar diversos aspectos relacionados con el proceso de enseñanza- aprendizaje de esta noción. Nuestro interés se ha centrado de manera especial en aquellos trabajos que tratan de clarificar las formas de conocimiento generadas por los alumnos y de analizar el desarrollo de las diferentes concepciones manifestadas por los estudiantes.

En este capítulo presentaremos, en primer lugar, el estado de la cuestión de las investigaciones realizadas sobre el área problemática en la que se incluye nuestro trabajo y, en segundo lugar, la descripción del problema sobre el que desarrollaremos nuestra investigación, así como las diferentes fases de la misma.

2.2. AREA PROBLEMATICA. ANTECEDENTES. INVESTIGACIONES SOBRE LAS CONCEPCIONES DE LOS ALUMNOS RELATIVAS A LA NOCION DE FUNCION.

Los primeros estudios sobre la génesis de la noción de función en niños y jóvenes los encontramos en la obra de Piaget, Grize y Szeminska *"Epistemologie et Psychologie de la fonction"* publicada en 1968. Sin embargo, el interés por el estudio de las concepciones de los alumnos sobre la noción de función en las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas podemos decir que es bastante más reciente. En los últimos años se ha desarrollado una diversidad de investigaciones en torno a la noción de función como lo muestra el "survey" elaborado por Leinhardt y cols (1991) sobre funciones y gráficas.

Dado su carácter global y comprensivo, comenzaremos nuestra descripción del área problemática con una síntesis del trabajo realizado por Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990). En las secciones 2.2.1 y 2.2.3 profundizaremos en el estudio de las principales investigaciones publicadas sobre los problemas de enseñanza-aprendizaje de las funciones desde nuestra propia perspectiva.

El "survey" de Leinhardt, Zaslavsky y Stein

Este trabajo comprende los aspectos tanto del aprendizaje como de la enseñanza de las funciones y gráficas en los niveles de edades entre 9 y 14 años. Se propone determinar los principales aspectos investigados sobre cómo se aprenden las nociones sobre funciones y gráficos en estos niveles de enseñanza y cómo pueden ser enseñados. Adoptan como criterio de clasificación de los trabajos las tres categorías siguientes: analisis de tareas, aprendizaje y enseñanza. Describimos, a continuación, cada una de estas tres categorias.

a) Tareas

En las investigaciones clasificadas dentro del grupo *"análisis de tareas y su presentación"* se discuten las cuestiones según cuatro constructos no disjuntos:

- **La acción del alumno** (interpretación o construcción):

- tareas de predicción;
- tareas de clasificación;
- tareas de traducción;
- tareas sobre escalas;

- **La situación**, se refiere al entorno del gráfico o de la función y puede ser más o menos contextualizado o abstracto (un laboratorio de ciencias, la clase de matemáticas o los estudios sociales)

- **Las variables**, son los objetos de las funciones y gráficas; son los "datos", concretos o abstractos; discretos o continuos; medidos en forma categórica, ordinal, intervalo o razón.

- **El foco de interés**, la localización de la atención dentro de una tarea específica (interna al sistema de coordenadas, o sea sobre el gráfico y los componentes) o sobre el sistema de coordenadas (ejes, etiquetas o escalas)

b) Aprendizaje del estudiante.

Comprende aquellos trabajos que enfatizan los aspectos del desarrollo de la comprensión por los alumnos de las nociones de función y sus gráficas respectivas. A su vez destacan dos nociones teóricas como elementos organizativos: las intuiciones y las concepciones incorrectas ("misconceptions")

- Intuiciones

Las considera como características del conocimiento de los estudiantes que surgen principalmente de la experiencia diaria. La descripción de las intuiciones nos permiten ligarlas lógicamente con la noción de pre-concepción (concepción espontánea o previa a la instrucción)

"Las intuiciones naturales son solo parcialmente conscientes

y pobremente coordinadas. La tarea de la instrucción y el aprendizaje consiste en extender y reunir estos hilos aparentemente dispares, en una noción de función madura y unificada" (p. 6)

- **"Misconception"**

Leinhardt y cols (1991) describen las "misconceptions" como ciertas características incorrectas o inapropiadas del conocimiento de los estudiantes sobre un objeto matemático específico, que puede o no haber sido enseñado, y que son repetibles y explícitas. Pueden desarrollarse como resultado de sobre-generalizar una concepción esencialmente correcta, o pueden ser debidas a interferencias del conocimiento de la vida cotidiana. Una "misconception" debe ser un sistema de ideas razonablemente bien formulado, no simplemente una justificación para un error. Aunque una "misconception" no tiene porqué ser una teoria completa, debería ser repetible y/o explícita, no aleatoria y tácita. Algunas concepciones incorrectas se pueden relacionar lógicamente con las intuiciones, pero otras se pueden interpretar como un resultado de un aprendizaje formal incompleto.

De esta descripción de la noción de "misconception" deducimos grandes coincidencias con la noción de obstáculo aunque esta última noción tiene desarrollada una teorización más completa y profunda.

c) Enseñanza

La enseñanza de las funciones y gráficos se deriva de la estructura e idiosincrasia del dominio, así como del conocimiento del profesor sobre cómo se desarrolla la comprensión de los estudiantes sobre este tópico. Está necesariamente ligada a las cuestiones relativas a las tareas y al aprendizaje. Se reconocen también como factores pedagógicos condicionantes otros aspectos instruccionales como la selección de las tareas, la secuenciación, las representaciones, explicaciones, etc.

Leinhart y cols (1991) conceden una gran importancia a la idea de concepción. *"El fin de la instrucción es desarrollar las* *concepciones de los estudiantes"* (p.7). Explican su noción de concepción como características del conocimiento de un estudiante sobre un objeto matemático usualmente enseñado. *"Son ideas significativas que los estudiantes desarrollan que pueden servir como potentes "caballos de tiro" en los esfuerzos continuados de los estudiantes para alcanzar niveles de comprensión más integrados y profundos"* (p. 7). Por su propia naturaleza están en proceso de transición y desarrollo hacia su realización o capacidad más completa, por lo que, a veces, aparecen como frágiles, locales y/o mal aplicadas. *"No obstante, están suficientemente bien estructuradas como para intervenir en el trabajo del estudiante y lo suficientemente explícitas como para ser objeto de comunicación con otros... Por naturaleza las concepciones están en transición, o en un proceso de transformación"*. (p. 7)

En la sección segunda (Aprendizaje - "Misconceptions"), en la que estamos especialmente interesados dado el objeto de nuestro estudio, organizan el trabajo de revisión de las diferentes investigaciones en torno a este tema siguiendo el siguiente orden: (1) Qué es y qué no es una función, (2) correspondencia, (3) linealidad, (4) gráficos continuos o discretos, (5) representación de funciones, (6) interpretación y lectura relativa, (7) concepto de variable, (8) notación.

Los trabajos de investigación que referencian en este apartado son principalmente los de Lovell (1971), Vinner (1983), Vinner yDreyfus (1989), Markovits (1986), Marnyanskii (1975), Thomas (1975), Zaslavsky (1987), Janvier (1987), Carpenter (1981).

Las conclusiones a las que llegan después de esta revisión son las siguientes:

"Después de una revisión de la variedad de 'misconceptions' y dificultades presentadas en esta sección, podemos decir que existen problemas de aprendizaje en tres grandes áreas: un deseo de regularidad, un enfoque puntual (en los gráficos) *y una dificultad con las abstracciones de todo el campo gráfico. Los estudiantes han tenido siempre presente un deseo de regularidad para buscar*

modelos reconocibles en orden a determinar si un determinado gráfico era, o no, aceptable. Esto se manifestaba al no considerar como gráficos de funciones los gráficos irregulares, al manifestar sus preferencias por las correspondencias uno a uno, a su fuerte tendencia a la linealidad y a su inclinación a unir puntos en las gráficas ('porque así la vemos mejor'). Esta tendencia de los estudiantes a observar la gráfica como puntos individuales se manifiesta de varias formas: su discretización de datos contínuos, su falta de utilización del modelo de un gráfico para determinar su ecuación y su desproporcionado énfasis en los puntos singulares tales como máximos y mínimos y no en los intervalos". (p. 43)

Una vez revisado el *"survey"* elaborado por Leinhardt y cols (1991), pasaremos a realizar un análisis detallado de diversas investigaciones llevadas a cabo sobre las concepciones de los alumnos relativas a la noción de función. Teniendo en cuenta sus diferentes marcos teóricos de referencia, así como sus distintas aproximaciones metodológicas, podemos hacer la siguiente clasificación de las mismas:

1. Investigaciones de epistemología genética sobre el desarrollo de estadios: Piaget, Grize y Szeminska (1968), Vollrath (1986).

2. Investigaciones basadas en análisis previos de epistemología histórica: Sierpinska (1989, 1992), René de Cotret (1985, 1988).

3. Investigaciones basadas en la identificación de procesos cognitivos:

   3.1. Investigaciones basadas en un modelo teórico previo construido por sus autores:

   - *"Concept image" - "concept definition":* Vinner y Tall (1981), Vinner (1983), Vinner y Dreyfus (1989);

- *"concepción operacional" - "concepción estructural":* Sfard (1989, 1991, 1992), Dubinsky, Hawsks y Nichols (1989), Dubinsky, Breidenbach, Nichols y Hawks (1992), Dubinsky y Harel (1992);

- *"prototipos mentales":* Tall y Bakar (1992).

3.2. Investigaciones sobre el aprendizaje de las diferentes componentes de una función:

A. Aprendizaje de conceptos previos: Maryanskii (1979)

B. Determinación de estadios en el aprendizaje de las diferentes componentes y representaciones: Thomas (1975), Markovits, Eylon y Brukheimer (1986),

C. Aprendizaje de las diferentes componentes y representaciones: Dreyfus y Eisemberg (1982), Guzmán (1989), Eisemberg (1992)

D. Interpretación de gráficas: Bell y Janvier (1981), Janvier (1981, 1987)

Esta clasificación no implica que las clases sean mutuamente excluyentes ya que, por ejemplo, hay algunas investigaciones, que basándose en análisis previos de epistemología histórica, tratan de identificar también los procesos cognitivos de aprendizaje de los alumnos, no obstante, hemos tratado de clasificarlas atendiendo a su característica más significativa. Incluimos también en la clasificación anterior otras investigaciones que, aunque no dan definiciones previas sobre el término concepción, sin embargo lo utilizan continuamente en sus conclusiones y hacen referencia, a veces de forma implícita a diferentes aspectos relacionados con las mismas.

Pasemos a continuación a realizar una revisión de las mismas, así como de sus principales resultados:

2.2.1. INVESTIGACIONES DE PSICOLOGIA GENETICA: ETAPAS DE DESARROLLO COGNITIVO

Aportaciones de Piaget, Grize y Szeminska

En la obra *"Epistemologie et Psychologie de la fonction"* (1968) Piaget y sus colaboradores desarrollan en la primera parte un estudio sobre las funciones *constituyentes o preoperatorias* y sus transformaciones graduales en funciones *constituidas* ligadas a las operaciones; en segundo lugar, exponen cinco de las investigaciones seguidas con niños y adolescentes sobre la cuantificación de funciones y la proporcionalidad; y en tercer lugar, ofrecen un estudio teórico epistemológico sobre la estructura lógica de las funciones.

Analizan la constitución de *"prefunciones"* como conductas preoperatorias de caracter eminentemente cualitativo, reservando el término de *"función"* a las funciones cuantificadas que se constituyen como resultado de estructuras operatorias. A las funciones *"preoperatorias"* las llaman **funciones constituyentes**, mientras que a las *"operatorias"* las llaman **funciones constituidas.**

Según Piaget *"la función aparece cada vez más como origen común de las operaciones y de la causalidad, ..., es sólamente en el contexto de cambios entre estructuras operatorias y causales que la noción de función encontrará un estatus epistemológico estable"* (p. 199).

Para Piaget, la noción de función expresa esencialmente una dependencia entre las propiedades variables, o constantes, de los objetos: *"Incluso definiendo la función por una aplicación, no descartamos la idea de dependencia, puesto que los pares en juego están ordenados, ya que la correspondencia es unívoca a la derecha: en este caso la aplicación de E sobre F expresa una dependencia del conjunto final en relación con el conjunto origen E, si no la correspondencia no sería más que una comparación y la aplicación una puesta en relación, pero no una función"* (p.200).

De los estudios clínicos llevados a cabo con 353 niños de 6 a 14 años, en las cinco experiencias realizadas, se identifican los siguientes estadios que permiten describir la evolución general de las conductas:

Estadio 1 (7 - 8 años): Está caracterizado por la dificultad de la puesta en relación de las variables en juego. El niño no llega a comprender el sentido de la variación ya que esto supone la conservación de una ordenación y la comprensión de una relación causal entre el factor responsable y el efecto producido. (Las variables se toman en el sentido de magnitudes que pueden tomar sucesivamente valores ordenados).

Estadio 2 (8 - 11 años): Durante esta segunda etapa, el niño se orienta hacia una investigación sobre la relación de las magnitudes puestas en juego. Establece relaciones, ensaya y trata de coordinar los resultados de las variaciones obtenidas empíricamente. Así comienza por establecer las relaciones seriales que conducirán, más tarde a la ley de progresión de las series. Esto implica la cuantificación no sólamente de las magnitudes sino también de las distancias entre los intervalos de la variación que la experiencia física le ha permitido comprender.
Piaget distingue en este estadio dos subestadios:

Estadio 2-a (8 a 9 años): El primer paso a dar para comprender las magnitudes variables es el de la conservación (que al volver al estado inicial se encuentren los mismos valores). En este subestadio, el niño que ha comprendido la relación directa entre las magnitudes variables, puede tener problemas para comprender la inversa.

Estadio 2-b (10-11 años): El progreso del niño en este estadio reside en la investigación de las diferencias relativas entre variables, de este modo llegará a obtener las relaciones de proporcionalidad

Estadio 3 (a partir de 11 o 12 años): La investigación de una ley de variación es la que marca el paso del estadio anterior a este. Para determinar esta progresión se deben dar dos condiciones: determinar los puntos límites de la variación y las razones entre las magnitudes sucesivas de la serie.

Aportaciones de Vollrath

Este investigador desarrolla en su trabajo *"Search strategies as indicator of functional thinking"* una experiencia para observar los comportamientos de sujetos de 4 a 14 años sobre relaciones funcionales de causa - efecto. Su fundamentación teórica se apoya en la teoría del desarrollo genético de la noción de función elaborada por Piaget. Su modelo de experiencia está basado en una llevada a cabo por Zseminska (1968) (se dejan caer objetos sobre un plano inclinado, y el sujeto debe relacionar su posición inicial con su recorrido y su posición final).

Los estadios que observa en el desarrollo genético del pensamiento funcional son los siguientes:

Estadio 0: La correlación entre las variables no la perciben los sujetos. La dependencia funcional no es decubierta.
Estadio 1: El sujeto descubre una cierta relación funcional, pero las variaciones de una variable no conducen de modo correcto al descubrimiento de los efectos sobre la variable dependiente.
Estadio 2: El sujeto descubre la dependencia funcional.

El autor nos dice que *"la habilidad para descubrir la dependencia funcional se desarrolla hacia los 11 - 12 años, pero he encontrado niños de 14 años en el estadio 0 y niños de 7 años en el estadio 2"*. (Vollrath, 1986, p.397)

2.2.2. INVESTIGACIONES BASADAS EN ANALISIS EPISTEMOLOGICOS HISTORICOS DE LA NOCION DE FUNCION

Aportaciones de Sierpinska

Los trabajos de esta investigadora se caracterizan principalmente por su fuerte apoyo en el estudio del desarrollo espistemológico histórico de las nociones matemáticas con las que trabaja. Ha estudiado, asimismo, la noción de obstáculo epistemológico (Bachelard, Brousseau), ampliando notablemente toda su significación no sólo dentro de la epistemología matemática sino de la didáctica.

En relación con la noción de función destacaremos dos de sus trabajos *"On 15/17 years old student' conceptions of functions, iteration of functions and attractive fixes points"* (1989) y el más reciente *"On understanding the notion of function"* (1992).

En el primero de ellos presenta al comienzo una experiencia de investigación llevada a cabo con estudiantes (15/17 años) de Secundaria través de una serie de situaciones didácticas en un contexto de iteración de funciones con ayuda de un ordenador. Según la autora, este contexto puede ayudar a los estudiantes a desarrollar sus concepciones no sólo de la noción de función, sino de la de límite. Los problemas que propone pueden sucesivamente aumentar su dificultad contribuyendo de esta manera a la investigación personal de los estudiantes. Realiza un estudio clínico minucioso con 5 de ellos.

En segundo lugar, presenta un breve análisis epistemológico histórico de la noción de función con objeto de determinar los principales obstáculos epistemológicos que han estado asociados a la misma. Identifica los siguientes:

1: los objetos variables son aceptados en ciencias naturales o en aplicaciones, pero no en la matemática pura.

2: las magnitudes son entidades cualitativamente diferentes de los números, la proporcionalidad es diferente de la igualdad.

3: fuerte creencia en el poder de las operaciones formales de las expresiones algebraicas.

4: lo más importante de la matemática es proveerse de un Cálculo poderoso que permita a los científicos resolver sus problemas

5: los objetos geométricos son tomados implícitamente como un todo que contiene en ellos mismos sus longitudes, sus áreas o sus volúmenes.

En tercer lugar, expone las concepciones que presentan cinco de los estudiantes, después de la realización de un estudio clínico y en relación con las situaciones de la experiencia. Son las siguientes:

<u>Concepción primitiva</u>: Una función es un desplazamiento de puntos sobre el plano o sobre una linea.
<u>Razón o proporción</u>: En un desplazamiento de puntos sobre el plano; la nueva posición puede ser descrita en relación con la posición inicial por una razón de distancias desde un punto fijo.
<u>Una visión sintética de la curva</u>: La función se identifica con su representación en el plano
<u>Tabla numérica</u>: las funciones están dadas por su tabla de valores.
<u>Expresiones algebraicas</u>: una función se identifica por su ecuación
<u>Una visión analítica de la curva</u>: la función es un ente "abstracto" en unos ejes de coordenadas.
<u>Una relación funcional</u>: existe un tipo especial de relaciones que llamamos funciones.

Las conclusiones a las que llega las podríamos resumir como sigue:

- Una valoración muy positiva del contexto social en el que se ha desarrollado la experiencia, ya que ha creado una situación de comunicación en pequeños grupos que favorece la evolución de las concepciones de los estudiantes.

- En cuanto al contexto matemático :*"las funciones iterativas y los puntos fijos atractivos"* han tenido una influencia muy positiva sobre todo en el desarrollo de las concepciones geométricas más que en las analíticas; y en el establecimiento de relaciones entre las representación geométrica y algebraica de funciones.

- En cuanto a los obstáculos epistemológicos, encuentra en los estudiantes uno en relación con su actitud hacia las Matemáticas: Las conciben esencialmente como un conocimiento algorítmico. Esta creencia puede entorpecer el desarrollo de las concepciones.

- El contexto de puntos fijos iterativos promueve concebir el límite como el resultado de una operación matemática con series. Tal concepción de límite está en oposición con el obstáculo epistemológico que consiste en concebir el paso al límite como una herramienta heurística para descubrir un nuevo hecho matemático.

En un trabajo posterior, *"On understanding the notion of function"* (1992), Sierpinska comienza planteando el problema general de la <u>comprensión</u> <u>de</u> <u>un</u> <u>concepto</u> <u>matemático</u>. Determina la existencia de cuatro categorías de actos de comprensión:

identificación: de un objeto entre varios objetos
discriminación: entre dos objetos, no sólo detectando sus diferencias sino también sus propiedades relevantes.
generalización: entendida como posibilidad de extetender el orden de las aplicaciones, abrir nuevas posibilidades de

interpretación y descubrimiento.

síntesis: la percepción de hechos aislados, tales como propiedades, resultados, relaciones, etc. se pueden organizar en un todo consistente.

Se hace una pregunta muy significativa sobre la definición de la noción de función: *"¿A qué hace referencia la definición de función? (X, Y, f).* **X** *e* **Y** *se refieren al mundo de los cambios, o bien a los objetos cambiantes; el símbolo* **f** *se refiere al mundo de las relaciones entre cambios u objetos cambiantes, o al mundo de los procesos que transforman objetos en otros objetos. Estas relaciones deben estar bien definidas y esto se refiere al mundo de los criterios, modelos y leyes."* (Sierpinska, 1992, p. 30-31)

Posteriormente pasa a enunciar las 19 categorías que, según ella, se pueden determinar en la comprensión de la noción de función. Se basa para ello en la epistemología histórica:

1: La identificación de los cambios observados en el mundo que nos rodea como un problema práctico para resolver.

2: La identificación de regularidades en las relaciones entre cambios como un medio de tratar con los cambios.

3: La identificación de los objetos que cambian en el estudio de cambios.

4: Discriminación entre dos modos de pensamiento matemático: uno en términos de cantidades conocidas y desconocidas, y otro en términos de variables y constantes.

5: Discriminación entre las variables dependiente e independiente

6: Generalización y síntesis de la noción de número

7: Discriminación entre número y cantidad.

> *"La discriminación entre números y magnitudes físicas, es una cosa, y percibir las relaciones entre las leyes físicas y las funciones matemáticas, es otra. Ambas, síntesis y discriminaciones, son necesarias para completar la comprensión del concepto de función.* **La percepción de las funciones como una herramienta apropiada para modelizar o matematizar relaciones entre magnitudes físicas (u otras) es una condición sine qua**

non para dar sentido al concepto de función en su totalidad".
(p. 42)

8: Síntesis entre el concepto de ley y el concepto de función; en particular, conocimiento del posible uso de las funciones en la modelización de relaciones entre magnitudes físicas (u otras).
9: Discriminación entre una función y las herramientas analíticas que se usan a veces para describir su ley.
10: Discriminación entre definiciones y descripciones de objetos.
11: Síntesis de la concepción general de la función como un objeto.
12: Discriminación entre los conceptos de función y relación.
13: Discriminación entre las nociones de función y sucesión.
14: Discriminación entre coordenadas de un punto de una curva y los segmentos "rellenos" de la curva de ciertas funciones.
15: Discriminación entre los diferentes significados de la representación de funciones y las funciones mismas.
16: Síntesis de las diferentes formas de dar las funciones, representar las funciones y hablar sobre funciones.
17: Generalización de la noción de variable.
18: Síntesis de los "roles" de las nociones de función y de causa
19: Discriminación entre las nociones de relaciones causales y funcionales.

Paralelamente va señalando también algunos obstáculos que pueden encontrarse a lo largo de estos diferentes aspectos de la comprensión. Termina su trabajo señalando las siguientes conclusiones didácticas:

1. <u>Motivación</u>: Los estudiantes deberían estar interesados en explicar los cambios, encontrando regularidades entre cambios.
2. <u>Contextos introductorios</u>: Las funciones expresadas de forma analítica deberían aparecer en primer lugar como herramientas para modelizar ciertas situaciones de la vida real o científicas.
3. <u>Contextos de desarrollo</u>: Los métodos de interpolación se deberían usar para desarrollar la noción de función
4. <u>Comprensión de la noción de función</u>: Los estudiantes deberían ser capaces de identificar no sólo aquello **que** cambia sino también **cómo** cambia.

5. <u>Prerrequisitos</u>: Un cierto grado de conocimiento algebraico es necesario para enfrentarse con las funciones

6. <u>Representaciones</u>: Los estudiantes deberían tener la oportunidad de adquirir cierta flexibilidad en el uso de diferentes modos de expresión y de representación (aplicaciones, transformaciones, etc)

7. <u>Definiciones</u>: La introducción de la deficición de función *"teórico-conjuntista"* como un grado especial de relación no está justificada ni desde un punto de vista didáctico ni epistemológico. La definición informal de Dirichlet es suficiente para el nivel Secundario.

8. La discusión en clase de las similitudes y diferencias entre las relaciones causales y las relaciones funcionales pueden contribuir a la comprensión de ambas nociones.

Por último señala, en referencia al desarrollo epistemológico - histórico y el desarrollo de los actos de comprensión en la mente humana lo siguiente:

> *"En la historia, los conceptos se presentan siguiendo siempre una evolución con gradiente positivo. El aprendizaje no puede seguir este modelo. En el desarrollo cognitivo ocurren catástrofes. Están marcadas por actos de comprensión cruciales para un concepto dado. Estos actos consisten en rupturas abruptas con un cierto grado de conocimiento, superando un obstáculo,... Hemos definido la comprensión del concepto de función en términos de cambios catastróficos de modos de conocer"*. (p.58)

Aportaciones de René de Cotret

La investigación que lleva a cabo se basa en las principales características de la evolución histórica del concepto de función y, a partir de ellas diseña una experimentación sobre las diferentes representaciones gráficas del movimiento con alumnos de Secundaria (12 a 15 años).

Según esta autora la evolución histórica de la noción de función muestra que, la idea de variable dependiente, es la base del concepto de función. Para comenzar la enseñanza del concepto de función, sería muy importante conservar la idea de **dependencia entre cantidades**. Esta idea requiere a su vez la noción de **variación**. De este modo, el concepto de **dependencia** permitiría a los alumnos acceder a un primer concepto de función estrechamente ligado a los fenómenos reales conocidos: "*Se ganará mucho si conservamos las nociones de* **variación** *y de* **dependencia** *que estaban presentes en el origen histórico del concepto, reagrupadas en la noción de* **variable dependiente**". (p. 8-9)

En su investigación construye varias situaciones problema en torno al movimiento, en las cuales, los alumnos han de movilizar las nociones de velocidad, tiempo y espacio. Las situaciones se caracterizan por su caracter cualitativo o cuantitativo. La autora llama aproximación cualitativa a la aproximación que realizan los alumnos de una determinada situación a través de las representaciones gráficas, sin instrumentos de medida. La aproximación cuantitativa, la realizan utilizando instrumentos de medida precisos.

Con este tipo de investigación, la autora quiere abordar una nueva forma de introducir el concepto de función en su sentido de variable dependiente, dándole a la variable una significación de variación dinámica. Quiere constatar que, es en el estudio del movimiento, donde la idea de variable dependiente y, en consecuencia la de función, habían surgido: "*Es a través de una interacción entre las aproximaciones* **cualitativa y cuantitativa**, *como, a nuestro juicio, las nociones de función y variable pueden ser construidas; la aproximación cualitativa ayuda a captar bien el aspecto de variabilidad, de continuidad del fenómeno y la cuantitativa permite precisar la ley de dependencia*" (p. 26)

La autora admite, en sus conclusiones, que realmente ha "*hecho funcionar*" el concepto de función en sus alumnos, movilizando una determinada significación de la variable dependiente a través de las relaciones entre velocidad, espacio y tiempo.

"Creemos que la **concepción cuantitativa** *del movimiento es indispensable para una buena concepción de la función, a fin de poder traducir precisamente, de forma numérica, las relaciones funcionales"* (p. 26)

2.2.3. INVESTIGACIONES BASADAS EN MODELOS TEORICOS CONSTRUIDOS POR LOS AUTORES

Se han desarrollado investigaciones muy significativas por el importante aporte teórico que encierran. Entre ellas destacaremos las de Vinner (1983), Vinner y Tall (1981), Vinner y Dreyfus (1989) en referencia la teoría elaborada sobre el *"concept image"* y el *"concept definition"*; las de Sfard (1989, 1992), Dubinsky, Hawks y Nichols (1989) y las de Dubinsky y Harel (1992) sobre la *"concepción operacional"* y la *"concepción estructural"*, y por último, la de Tall y Bakar (1992) sobre los *"prototipos mentales"*.

Aportaciones de Vinner, Tall y Dreyfus

En 1983 Vinner publicó un trabajo titulado *"Concept definition, concept image and the notion of function"* (Vinner, 1983, p. 239 - 305). En la primera parte del mismo explica de forma exahustiva el sentido de los términos *"concept image"* y *"concept definition"* (en los que no nos detendremos por estar explicados detalladamente en el capítulo 1 de este trabajo). La segunda parte la dedica a presentar una experiencia llevada a cabo con 65 estudiantes de grado 11 (High school) de Jerusalen en 1978. Pasó un test a estos alumnos cuyos objetivos eran clasificar las definiciones que daban de la noción de función y determinar las imágenes conceptuales que manifestaban de dicha noción, a través del análisis de sus respuestas.

Clasificó en cuatro categorías las definiciones que los estudiantes dieron del concepto de función :

I.- Definiciones que mezclan la definición del libro de texto con algunos elementos constitutivos de su concepto imagen. Los alumnos intentaban construir con sus propias palabras la definición del libro, pero a veces el resultado era totalmente incorrecto.

II.- Una función es un criterio de correspondencia. También usaban las palabras *"relación", "ley", "dependencia entre variables"*,etc.

III.- La función es una expresión algebraica, una fórmula, una ecuación, una manipulación aritmética,etc.

IV.- Definiciones en las que algunos elementos de la representación externa se dan como definición del concepto *("es un gráfico", "diagrama con flechas", "una curva", etc.)*

Clasificó a los alumnos en seis categorías, según las imágenes conceptuales (*"concept image"*) que manifestaban en las respuestas al cuestionario:

I.- Alumnos que admiten que una función puede darse por medio de un criterio, pero si encuentran dos criterios diferentes en dominios disjuntos, esto representa para ellos dos funciones diferentes.

II.- Alumnos que admiten que una función pueda expresarse por criterios diferentes en dominios disjuntos, pero sólo cuando estos dominios son semirrectas o intervalos de R. Así, por ejemplo, no admiten que

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x = 0 \\ -1, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

sea una función.

III.- Alumnos que creen que las funciones no expresables algebraicamente sólamente existen y son reconocidas por los matemáticos.

IV.- Alumnos que creen que el gráfico de una función ha de ser siempre *"razonable"* (es decir con cierta regularidad).

V.- Alumnos que creen que para todo valor **y** del rango hay sólamente un valor **x** del dominio que le corresponde. Según Vinner, este punto de vista es el resultado de una incorrecta memorización de la definición del libro de texto.

VI.- Alumnos que identifican una función sólo con una correspondencia uno a uno. Este punto de vista, según Vinner, es el resultado de una distorsión de la definición del libro de texto.

En 1989 aparece otro trabajo de Vinner y Dreyfus titulado *"Images and definitions for concept of function"* (Vinner y Dreyfus, 1989) . En el mismo, después de una descripción muy breve de su teoría sobre *"concept image"* y *"concept definition"*, presentan un estudio llevado a cabo con 271 estudiantes y 36 profesores de "junior school". Los autores pasaron un cuestionario cuyos objetivos eran, además de la clasificación de las posibles definiciones dadas por los alumnos y la determinación de las diferentes imágenes conceptuales de la noción de función, como en el trabajo anterior, realizar un estudio de la "compartamentalización", es decir, analizar con qué frecuencia los estudiantes compartamentalizan la definición formal de función y la imagen conceptual de la misma (expresan correctamente la definición de función, pero posteriormente no hacen uso de ella en las justificaciones de las respuestas a diferentes cuestiones).

Los resultados de este trabajo son, en primer lugar, una clasificación de las deficiones dadas por los alumnos y, en segundo lugar, una clasificación de las imágenes conceptuales que manifestaban en las respuestas al cuestionario.

Clasifican las definiciones de los estudiantes en seis categorías (dos más que en el trabajo anterior):

I.- Correspondencia
II.- Relación de dependencia
III.- Criterio
IV.- Operación
V.- Fórmula
VI.- Representación

Las imágenes conceptuales las clasificaron en las cuatro categorías siguientes : Unicidad, discontinuidad, dominio partido, puntos excepcionales (dos categorías menos que en el trabajo anterior). Los autores consideraron que algunos de los cuatro aspectos anteriores fueron las principales razones por las que muchos alumnos rechazaron una determinada relación como función. Así:

I.- Unicidad ("Si una correspondencia asigna exactamente un valor para todo elemento del dominio, entonces se trata de una función. En caso contrario, no lo será").

II.- Discontinuidad. Si es discontinua en algún punto del dominio no será considerada como función.

III.- Dominio partido. Si en cada subdominio hay un criterio diferente de correspondencia, no la admitirán como función.

IV.- Puntos excepcionales. Si existen puntos para los cuales el criterio general no es válido tampoco se identificará como función.

Aportaciones de Sfard, Dubinsky, Nichols y Hawks

Actualmente, existen diferentes investigadores interesados en estudiar las concepciones de los alumnos del concepto de función desde un punto de vista - operacional y estructural -

Como ya hemos señalado en el Capítulo 1 estos autores, fundamentan su trabajo en una teoría general derivada de los trabajos de Piaget sobre la abstracción reflexiva. Para Piaget existen dos modos diferentes de pensamiento matemático: *figurativo*, que indicaría un estado estático y momentáneo, y se correspondería con la *concepción estructural*, y *operativo* que se conduciría con transformaciones y se correspondería con la *concepción operacional*. Si bien, admiten que se han desarrollado otras categorizaciones del conocimiento matemático, tales como, *conceptual* y *procedimental*, (Lesh y Landau, 1983), (Hiebert, 1985); *instrumental* y *relacional* (Skemp, 1976), ellos intentan completar las anteriores con sus aportaciones.

Vamos a presentar a continuación cuatro de estos estudios. Dos llevados a cabo por Sfard a través del fenómeno de "reification" (1989, 1992); otro conducido por Dubinsky, Hawks y Nichols (1989) estudiando el proceso de "encapsulación" mediante el uso de logiciales de ordenador. Ambos procesos, "reification" y "encapsulation", son análogos, se trata analizar la conversión de procesos en objetos abstractos matemáticos. Y por último, un reciente trabajo de Dubinsky y Harel (1992).

Sfard (1989, 1992) ha realizado varios trabajos recientemente sobre el proceso de transición de la concepción operacional a la estructural, para la noción de función. Se trata de una particularización para este concepto de una investigación más amplia llevada a cabo con anterioridad sobre el papel de los algoritmos en la formación de conceptos matemáticos.

Para Sfard la peculiaridad del pensamiento matemático se puede investigar a través de una reflexión epistemológica y ontológica sobre los constructos matemáticos. Dependiendo del punto de vista que asumamos en un momento dado, podemos usar dos palabras diferentes para denotar el objeto matemático construido: la palabra *"concepto"* (a veces reemplazada por "noción") que se usaría cuando la idea matemática es tratada de forma "oficial" como un constructo teórico; y la palabra *"concepción"* que encerraría todo el complejo mundo de representaciones internas y de asociaciones que evoca el concepto - es la réplica del concepto en su caracter subjetivo.

La autora sugiere que muchas de las nociones matemáticas pueden concebirse por los alumnos a partir de dos concepciones diferentes: *"operacional" (como proceso)* que se caracterizaría por ser dinámica, secuencial y detallada; *y "estructural"* (de una forma estática) caracterizada por ser instantánea e integrativa. Así, para el caso de las funciones, se pueden concebir de modo estructural como una colección de pares ordenados, o bien de modo operacional como un cierto procedimiento de cálculo.

Sfard (1989) asegura que *"estas dos aproximaciones, aparentemente incompatibles, (¿cómo puede algo ser un proceso y un objeto al mismo tiempo?)"* (p. 150) son para ella, en efecto, compatibles y, en cierto modo, complemantarias. Para estudiar esto considera el fenómeno de "reification" que convierte un proceso en un objeto abstracto. Este tipo de transformaciones las considera totalmente indispensables para resolver problemas matemáticos avanzados.

> *"En el proceso de formación de un concepto, la concepción operacional es con frecuencia la primera que se desarrolla. Fuera de ella, la aproximación estructural la iría envolviendo gradualmente... En otras palabras, los "procesos" se convierten en un "todo compacto y estático", es decir, son 'encapsulados', para llegar a ser unidades básicas de una teoría de un nivel más alto."* (Sfard, 1989, p. 151)

Basandose en este modelo para la formación de conceptos, enuncia dos <u>principios</u> <u>metodológicos</u>:

I.- No se debería usar la descripción estructural para introducir una nueva noción matemática. En nuestras clases la aproximación operacional debería preceder a la estructural.

> *"Los profesores conocemos bien que las dificultades observadas en nuestras escuelas secundarias, se podrian*

deber a la práctica común de invertir este orden". (p.152)

II.- La aproximación estructural no se debería asumir hasta que nos encontrásemos dentro de una teoría de un nivel superior, para la cual esta aproximación fuese indispensable (Análisis Funcional, Topología, Lógica formal...).

La autora llevó a cabo un estudio experimental con estudiantes en un curso de Matemáticas de la escuela secundaria. Su principal fin es estudiar la transición de la concepción operacional a la estructural.

En un curso de 60 horas de enseñanza se desarrolló ampliamente la idea de algoritmo y el concepto de función se introdujo a través del trabajo con toda la amplia semántica de lenguajes algorítmicos. Inicialmente el término de función se usó como sinónimo de algoritmo, los estudiantes enfocaron principalmente su atención hacia el "resultado" estático de diferentes algoritmos más que en los algoritmos en sí mismos. Sólo tras una generalización final se presentaron funciones no algorítmicas. Sin embargo, la concepción estructural, como tal, no se desarrolló totalmente, ya que para muchos estudiantes permaneció sin significado.

Al final del curso se pasó a los estudiantes un test (contrastado con un grupo de control, donde la presentación estructural precedió a la operacional).

La autora admite que *"nuestro intento de promover la concepción estructural a través de la operacional no puede ser considerado como un éxito. ... La diferencia entre los esfuerzos de investigación y los resultados obtenidos es demasiado grande".*

Su principal conclusión es la siguiente: *"Aunque pudiesemos pensar en la existencia de deficiencias en el proceso de enseñanza, la "reification" es inherentemente dificil, para muchos estudiantes de secundaria es casi imposible llegar a la concepción estructural, cualquiera que sea el método de enseñanza."* (Sfard, 1989, p. 158)

En un posterior trabajo, *"Operational origins of mathematical objets and the quandary of reification - The case of function"* (1992), esta investigadora, bajo el mismo marco conceptual respecto a la consideración de la naturaleza dual de las concepciones matemáticas de los estudiantes: como proceso y como objeto, y apoyándose en los dos principios metodológicos enunciados anteriormente, desarrolla una experiencia de enseñanza apoyándose en ellos, y por último, analiza las respuestas de los alumnos a un cuestionario, pasado al término de la misma.

Las principales conclusiones de este trabajo son:

- La mayoría de los estudiantes desarrollan concepciones pseudoestructurales. Esto es debido a que tienen una fuerte tendencia a asociar las funciones con expresiones algebraicas. Esta tendencia puede ser indicativa de una concepción operacional (ya que los estudiantes conciben la fórmula como un algoritmo computacional), o bien de una concepción estructural (la fórmula se puede interpretar también como una relación estática de pares ordenados). Esta doble tendencia nos llevaría a considerar una concepción que llamaremos *pseudoestructural*.

- Los esfuerzos realizados en la experiencia de enseñanza, siguiendo los dos principios metodológicos no han dado los resultados que esperábamos en referencia al desarrollo de la concepción estructural en los estudiantes. *"Parece que el progreso hacia una concepción estructural no se hace indispensable para los estudiantes. Estos evolucionan hacia concepciones pseudoestructurales reemplazando, así, sus concepciones operacionales"* (p. 83)

> *"La diferencia entre los esfuerzos de investigación y el progreso actual en el pensamiento estructural es tan grande que nos mueve a ver los resultados como una evidencia particularmente fuerte de la tesis sobre la inherente dificultad de la reificación"* (p. 83)

- Exiten otros factores que influyen en el progreso de los estudiantes: el tiempo y la motivación. El tiempo es probablemente el menos relevante de todos los factores, pero para un objeto abstracto se necesita un largo período de incubación. La reificación puede necesitar, días, meses o incluso años. En nuestra experiencia (tres meses), la instrucción puede haber sido demasiado corta y, en consecuencia, insuficiente para promover la concepción estructural. En cuanto a la motivación, afirma: "*La motivación es necesaria en cualquier tipo de aprendizaje, pero en matemáticas es de crucial importancia*" (1992, p. 84). Para conducir correctamente el proceso de "*reificación*" de los estudiantes se necesitaría desarrollar una fuerte motivación; esta es una cuestión muy importante para estudiarla en el futuro.

Dubinsky, Hawks y Nichols (1989) en su trabajo "*Developement of the process conception of function by pre- service teachers in a discrete Mathematics course*", realizan un estudio de las concepciones de los estudiantes de la noción de función, insistiendo, al igual que Sfard, en la observación de las diferencias entre la concepción operacional y estructural.

Propusieron a los estudiantes, en una primera fase de estudio, que expresaran por escrito, lo que significaba para ellos una función matemática, así como que propusieran ejemplos de funciones. Analizadas las respuestas, los autores consideraron que existen cuatro tipos de concepciones sobre las funciones:

- correspondencia
- dependencia
- transformación
- entidad total

No obstante, los autores cada una de estas concepciones, las estudian separadamente, asociándolas a una concepción proceso, o bien, a una concepción objeto o estructural. Así, en la concepción correspondencia, cuando el sujeto trata de relacionar pares ordenados con unicidad a la derecha, *"el sujeto piensa en la función como un objeto. El proceso que resulta de coordinar dos tipos de variables ha sido encapsulado"* (p. 292)

Si el sujeto se refiere a dos variables y conoce que el valor de una de ellas está determinado por el valor de la otra, *"consideramos la dependencia como un ejemplo de concepción proceso de función"* (p. 292)

A un nivel muy bajo de pensamiento, especialmente cuando los ejemplos de funciones se refieren sólo a expresiones algebraicas, y la transformación se restringe a una sustitución en una expresión, *"consideramos que el sujeto piensa en la función como en una acción"* (p. 293)

"La sustitución en expresiones es una actividad usada con mucha frecuencia. Puede ocurrir que el sujeto tenga una tendencia a pensar en las funciones en términos de acción, y ésto le impida avanzar hacia una concepción proceso. Aquí consideramos que puede existir un obstáculo epistemológico" (p. 293)

Por último consideran la concepción entidad total *"esta concepción la reconstruye el sujeto en un plano de pensamiento superior, a través de una concepción proceso y un rico repertorio de propiedades y experiencias. Todo ésto retenido es "encapsulado"; y el sujeto piensa en la función como un objeto"* (p. 293)

El proceso de encapsulación del concepto de función, lo definen los autores del modo siguiente:

> *"Una concepción objeto encapsula la noción de función como un proceso que transforma dinámicamente una cantidad en otra cantidad dependiente, e incluye la idea de conjunto de pares ordenados con unicidad a la derecha como una expresión del proceso de ir de la primera componente a la segunda."*(p. 293-294)

Llevan a cabo un estudio a través de una experiencia de enseñanza con 41 alumnos (de los cuales 30 eran profesores en formación) durante 13 semanas aproximadamente, dedicando 75 min. por semana. Realizan diferentes tipos de observaciones y llegan a la siguiente conclusión:

> *"Parece razonable concluir que al final del curso, la mayoría de los estudiantes ha desarrollado una concepción de función como proceso. Esta concepción cuando los estudiantes la tuvieron que usar en nuevas situaciones, fue válida para aplicaciones tales como, bases de datos, e incluso permaneció relativamente estable cuando tuvieron que resolver problemas difíciles. Sin embargo, esta concepción no la tenian, o era muy débil, al principio del curso. Sugerimos, por tanto, que la concepción proceso ha sido desarrollada en los estudiantes a lo largo del curso. Aunque no estamos seguros de por qué esto ocurre.....podríamos sugerir la posibilidad de que las actividades con el ordenador podían ayudar a desarrollar la concepción de función como proceso."* (p. 297)

En un reciente trabajo de investigación *"The nature of the process conception of funtion"*, Dubinsky y Harel (1992) intentan, en primer lugar, realizar una tarea de clarificación de términos teóricos que se utilizarán más tarde, para la descripción de las concepciones de los alumnos sobre la noción de función. Así, definen:

Prefunción: Si el sujeto realmente no manifiesta casi nada respecto del concepto de función. Aunque el término es conocido por el sujeto, sin embargo, su significado no es muy útil en la resolución de tareas o de actividades relacionadas con funciones

Acción: Si existe una manipulación repetitiva, mental o física, de objetos. Tal concepción de función podría englobar, por ejemplo la habilidad para dar valores en una expresión algebraica y realizar los cálculos posteriores.

Proceso: Esta concepción implica una transformación dinámica de cantidades de acuerdo a un criterio repetitivo, tal que dada una misma cantidad original, se produciría la misma cantidad transformada. El sujeto sería capaz de pensar en una transformación como una actividad completa que comienza con objetos de una determinada categoría, hace algo sobre estos objetos, obteniendo nuevos objetos como resultado.

Objeto: Una función se concibe como un objeto cuando es posible dominar acciones, en general, acciones que transforman. Una concepción objeto se construye por *"encapsulación"* de concepciones proceso.

En esta investigación, los autores están interesados en probar que entre la concepción *"acción"* y la concepción *"proceso"* puede existir otra intermedia que llamarían concepción *"pre-proceso"*

> *"Podríamos considerar también que una concepción "acción" es, de algún modo, una clase de concepción "pre-proceso". Ya que muchos sujetos estarían, desde un punto de vista cognitivo, realizando transiciones desde la concepción acción a la concepción proceso, y recíprocamente"* (p. 86)

Para llevar a cabo su investigación desarrollan una experiencia de enseñanza con 22 estudiantes en un curso de Matemática Discreta. Se usó un tratamiento instruccional basado en la teoría constructivista de aprendizaje con actividades de ordenador utilizando programación en lenguaje ISETL. La metodología de investigación está basada en el análisis de respuestas a un cuestionario y en una serie de entrevistas a 13 de los 22 alumnos.

Las conclusiones de ese trabajo giran en torno a la cuestión de cómo están situados los estudiantes en cuanto a las concepciones *"acción" y "proceso"*. Esto tratan de identificarlo en las respuestas de los alumnos, teniendo en cuenta las siguientes características:

1. Restricciones que muestran los estudiantes sobre lo que es una función: (a) *restricción de manipulación* (si sólo se es capaz de reconocer una función cuando se representan las manipulaciones), (b) *restricción debida a la cantidad* (inputs y ouputs deben ser números), (c) *restricción de continuidad* (el gráfico de una función debe ser continuo)

2. Severidad de la restricción: Es decir determinar el grado o cualidad de las restricciones anteriores en cada estudiante.

3. Habilidad para construir un proceso cuando no está explícito en la situación y "autonomía" de los estudiantes en cada construcción.

4. Condición de unicidad a la derecha: determinar hasta qué punto existe confusión entre la correspondencia 1-1 (biunívoca) y la funcional (aplicación).

Los investigadores concluyen, en primer lugar, que la representación de la manipulación que realizan los estudiantes es en la actualidad un factor crucial en la determinación de la existencia de una función en una situación dada. En segundo lugar, la autonomía de los estudiantes depende de si la situación les presenta alguna forma de algoritmo. A pesar de ello, el estudiante puede ser capaz de ofrecer un análisis complejo e intrincado en el que invente un proceso para una función que describe una situación dada. En tercer lugar, una fuerte concepción proceso aparece para ayudar a los estudiantes a evitar la confusión de *"unicidad a la derecha"*. Por último, la mayoría de los estudiantes han superado la restricción de continuidad, algunos incluso llegando a ser conscientes de que poseían esta restricción.

Aportaciones de Tall y Bakar

Estos dos investigadores han desarrollado un trabajo reciente (1992) titulado *"Students' mental* **prototypes** *for functions and graphs"* en el que estudian el desarrollo del concepto de función en estudiantes de nivel A (16/17 años). Su problema de investigación se centra en determinar por qué los estudiantes son capaces de *usar* funciones en la práctica matemática, mientras que la *naturaleza teórica* del concepto de función permanece en ellos de una forma vaga e inconsistente. Su hipótesis está centrada en que *"los estudiantes desarrollan muchos* **prototipos** *para el concepto de función del mismo modo que desarrollan prototipos para conceptos de la vida diaria"* (p. 39)

> *"Nuestra hipótesis es que los estudiantes desarrollan 'ejemplos prototipos' del concepto de función, tales como $y=x^2$, o un polinomio, o 1/x, o la función seno. Cuando se le pide el gráfico de una función, en ausencia de una definición operativa de función, la mente intenta responder por resonancia con estos prototipos mentales"* (Tall y Bakar, 1992, p. 40)

Siguiendo las ideas de Vinner (1989) pasaron a 28 estudiantes (16/17 años) un cuestionario en el que se pedía en primer lugar que los alumnos explicaran lo que era para ellos una función, en segundo lugar debían reconocer una serie de gráficos de funciones y, en tercer lugar, debían determinar las funciones existentes en una colección de expresiones algebraicas.

Reconocen que ninguno dió una definición correcta de función. La mayoría *"tenía una concepción de la función como un* <u>proceso</u> *- algo entra, sufre una transformación, y luego sale (imputs, ouput). Pero ninguno mencionó un cierto* <u>dominio</u> *para los imputs, ni el* <u>rango</u> para los ouputs" (p. 41)

En las conclusiones finales los autores indican que, si bien, el concepto de función es dificil, ellos recomiendan seguir <u>un principio</u> <u>metodológico</u> con un criterio pragmático desenfatizando la teoría y enfatizando la práctica: *"Intentar enseñar la teoría como en las Matemáticas de los años 60 es un auténtico fracaso. Pero la otra cara de la moneda - enseñar el concepto a través de ejemplos, como en el curriculum actual - conduce a prototipos mentales que dan una impresión errónea de la noción de función. De la mayoría de los estudiantes que habian recibido enseñanza sobre función, sólo una pequeña minoría respondió coherentemente y consistentemente".* (p. 49)

La causa de este resultado suponen que se debe a la existencia de un *"formidable y fundamental obstáculo":*

> *"El principiante no puede construir el concepto abstracto de función sin ejemplos experimentales del concepto en acción, y no pueden estudiar ejemplos del concepto en acción sin desarrollar ejemplos prototipos que incorporan limitaciones al aplicarlo al concepto abstracto"* (p. 50)

2.2.4. INVESTIGACIONES SOBRE EL APRENDIZAJE DE LAS DIFERENTES COMPONENTES DE UNA FUNCION

Incluiremos en este apartado los trabajos de investigación cuyos autores están interesados en determinar los aprendizajes de los alumnos, bien de los conceptos previos que consideran básicos para la noción de función, bien, en referencia a las variadas representaciones que puede tener una función: Tablas, gráficos, fórmulas, diagramas, etc.

A. Aprendizaje de conceptos previos:

Aportaciones de Marnyanskii

Marnyanskii (1979,) en su trabajo titulado *"Psychological characteristics of pupils' assimilation of the concept of a function"*, nos presenta el análisis de las concepciones de los alumnos al término de una experiencia llevada a cabo con 132 alumnos de grado 8° y 10°. Recogió datos a través de pruebas escritas y principalmente por medio de numerosas discusiones llevadas a cabo con grupos de alumnos (3 a 8 en cada uno). Este investigador aunque utiliza el término concepción (del sujeto) a lo largo de todo su trabajo, no da una definición previa del mismo.

Para este investigador, una de las principales tareas fue *"buscar si los alumnos tenian un claro conocimiento de los conceptos en los cuales el concepto de función está basado: variable cuantitativa, conjunto y relación funcional"* (p. 164)

Así, en primer lugar, se formula la cuestión de ¿cuáles son los conocimientos que tienen los alumnos de cada uno de estos tres conceptos básicos?

Para el primero de ellos afirma que la mayoría de los alumnos comprendian el concepto de variable cuantitativa, y daban ejemplos de variables geométricas y físicas, pero no explicaron con precisión el significado de cantidad en general: *"cantidad es lo que es medible", "cantidad es lo que es largo o corto"*. Hacian una extensión impropia del ambito de este concepto: *"El ánimo es una cantidad ya que puede ser grande o pequeño", "la responsabilidad, la laboriosidad también, ya que pueden ser más grandes o más pequeñas"*.

Para el segundo, nos dice que la comprensión de los alumnos del concepto de conjunto fue imprecisa. Tuvieron problemas con los conjuntos unitarios (*"conjunto significa muchos"*) y con los conjuntos infinitos; en particular no podian imaginar la existencia de conjuntos infinitos que no contuvieran un primer elemento *("el primer elemento siempre debe estar allí")*.

Y por último, en referencia a la comprensión de la relación funcional, afirma que se observaron dos tendencias: una restricción sustancial del campo de este concepto (cuando la relación sólamente la toman para identificar relaciones muy simples o bien, como conexión causal para casos de la vida real); o una extensión extrema de su campo (cuando consideran cantidades funcionamente dependientes, incluso cuando no hay directamente una relación uno a uno entre sus valores). *"Esta extensión indica que los estudiantes identifican la dependencia aleatoria con la funcional"*. (p.166)

Según los resultados de esta experiencia:

> *"...en la mayoria de los alumnos la caracteristica más fuerte de la función no fue la de una correspondencia uno a uno entre los valores asignados a dos cantidades, sino el cambio entre cantidades y la presencia de una conexión general o causal entre ellas"*. (p.166)

> *"El experimento presentó que la* **concepción general** *de una función en las clases de grado 10°, cuyos alumnos conocían un gran número de funciones, es casi el mismo que en las clases de grado 8°, cuyos alumnos estaban justo al comienzo del estudio de funciones elementales"* (p. 167)

El autor, tratando de analizar las causas de este dominio tan *"pobre y limitado"* de los alumnos sobre el concepto de función, nos dice:

- La principal dificultad en el dominio del concepto de función es que este concepto excede los límites de lo que es ordinario para el alumno, no lo asocia con algún otro concepto familiar para él (así, el número complejo, aunque es un concepto muy abstracto, es de algún modo similar a los números reales, con los que el alumno está totalmente familiarizado). Hasta el estudio del concepto de función, los alumnos pensaban principalmente en términos de imágenes individuales, y no en términos de grupos de objetos.

- El hecho de que muchos alumnos consideren la variabilidad de una función como su más importante propiedad, lo podemos explicar en dos sentidos: Primero, en los libros de texto los conceptos de variable y constante están presentados como opuestos, y a la variable se le llama función. Segundo, la introducción de funciones, fija su atención en proporcionar a los alumnos una idea de lo que es una variable, creando de este modo una única *"hipnosis de variable"*.

- La concepción general de la noción de función de los alumnos de 10^{o} grado no es mucho más precisa que la de los alumnos de 8^{o} grado. Esta paradoja puede ser debida a que, después de haber estudiado formalmente la definición de una función, los alumnos no la usan en la práctica. No tienen necesidad de recurrir a esta definición, ni cuando intentan determinar funciones entre ejemplos que se le proponen como posibles, ni cuando intentan convencerse ellos mismos de que una función, en concreto, era efectivamente una función.

El autor concluye su trabajo, dando unas orientaciones metodológicas para los profesores:

1) La introducción de las relaciones funcionales en la escuela debe incluir la familiarización con los conceptos de conjunto numérico y relación entre elementos de dos conjuntos.
2) Es preciso desarrollar un sistema de ejercicios que ayude a los alumnos a reconocer las caracteristicas poco relevantes de una función (por ej. la variabilidad de los valores de una función) y a generalizar las caracteristicas esenciales de una función (relación uno a uno).
3) Para que los alumnos de los últimos cursos tengan una idea precisa del concepto de función, es necesario explicar el significado del término "variable" como la designación general de los elementos de cualquier conjunto.

B. Estadios en la comprensión de las diferentes componentes y representaciones de una función:

Aportaciones de Thomas

La investigación llevada a cabo por Thomas (1975) aporta una descripción de cinco estadios hipotéticos para el aprendizaje del concepto de función:

Estadio 1. Asignaciones únicas: Capacidad para determinar cuando una correspondencia entre elementos de un conjunto A y otro B es una aplicación de A en B.

Estadio 2. Vocabulario y simbolismo: Capacidad para operar eficazmente con el vocabulario y el simbolismo básico de funciones.

Estadio 3. Diagramas, gráficos y conjuntos de pares ordenados: Capacidad para identificar una función en varias representaciones, y capacidad para trasladar de una representación a otra. Conocer que una función está completamente definida por su grafo.

Estadio 4. Propiedades de operaciones con funciones. Capacidad para llevar a cabo operaciones con funciones, tales como, suma, multiplicación y composición. Capacidad para reconocer las propiedades que estas operaciones pueden poseer.

Estadio 5. Propiedades internas de una función: Capacidad para determinar las propiedades que una función puede poseer en relación a los elementos del dominio y el rango, y en relación a la forma del criterio de la función. El reconocimiento de las clases de funciones que definen tales proiedades: lineales y cuadráticas; monótonas, con saltos y continuas; proyecciones, dilataciones, traslaciones y reflexiones; isomorfismos, homomorfismos, isometrías y similitudes.

Este investigador diseñó un test en función de los estadios presentados, y lo pasó a 201 estudiantes de grados 7 y 8 con capacidad superior a la media (c.i. 125 o superior). La noción de función se había introducido a estos alumnos como una aplicación entre conjuntos, usando diagramas de flechas, criterios, pares ordenados y gráficos. Una función se definió como una terna (F, A, B), tal que F es un subconjunto de AxB y tal que a cada elemento de A le asociamos uno y sólo uno de B. Los resultados del test, se clasificaron de acuerdo con la jerarquización establecida en los estadios anteriormente presentados.

El autor afirma que después de seguir en la clase una cuidadosa instrucción a estos estudiantes verdaderamente capaces, "*los resultados del test nos aportan que 164 de ellos (82%) apenas si alcanzaron el más bajo nivel de comprensión*". Por lo que Thomas concluye:

> "*Esto fue un verdadero 'shock' para mi, en un grupo de estudiantes a los que habíamos introducido de forma verdaderamente cuidadosa el concepto de función, la mayoría no podían distinguir funciones de no funciones en situaciones simples y concretas*" (Thomas, 1975, p.169)

Aportaciones de Markovits, Eylon y Bruckheimer

Estos investigadores, aunque no definen en sus trabajos de forma explícita la noción de concepción del sujeto, sin embargo, en sus conclusiones aparece frecuentemente el término concepción referido a los comportamientos genéricos manifestados por los alumnos.

Para ellos "*una comprensión general del concepto de función*" incluye, por supuesto, muchos aspectos, tales como ser capaces de usarlo en otros campos no matemáticos, junto con el uso del concepto en diferentes contextos dentro de la propia matemática.

Analizan los estadios a través de los que pasan los estudiantes (o a través de los que podrían pasar) cuando aprenden de forma explícita las funciones. "*Primero aprenden que una función está compuesta de tres subconceptos: dominio, rango y criterio de correspondencia. Después aprenden que las funciones pueden representarse de varias formas, diagramas, representaciones verbales, gráficas y algebraicas.*" (p. 19)

En la determinación de las componentes básicas del concepto de función, tienen en cuenta, lo que ellos consideran dos factores básicos:

1.- Una función está definida por dos conjuntos, el dominio y el rango, y por un criterio de correspondencia que asigna a cada elemento del dominio exactamente un elemento del rango.

2.- La mayoría de las funciones (en el curriculum de precálculo) tienen varias representaciones - gráfica algebraica y diagramas de flechas, por citar cuatro.

Todo esto lo representan en la siguiente tabla:

REPRESENTACION DE UNA FUNCION Y SUS COMPONENTES

Table 1
Representations of a function and its components

representation / sub-concept	Verbal	Arrow diagrams	Algebraic	Graphical
Domain	verbal or mathematical notation	a curve enclosing the members of the domain	verbal or mathematical notation	the horizontal (x) axis or parts thereof
Range	verbal or mathematical notation	a curve enclosing the members of the range	verbal or mathematical notation	the vertical (y) axis or parts thereof
Rule of correspondence	verbal	arrows	formula	a set of points in the coordinate system

Así, afirman *"los estudiantes aprenden (en la mayoría de los casos en enseñanza media) que la misma función puede ser representada por cada una de las representaciones anteriores, aprenden también a trasladar una función dada de una representación a otra, tratando con los tres subconceptos y con dos representaciones simultáneamente."* (Markovits y cols. 1986, p. 18 -19)

De acuerdo con lo anterior, y teniendo en cuenta que, según ellos, una buena "comprensión" tiene dos estadios: el pasivo (y más fácil) - tal como clasificar, identificar, etc - y el activo (y más complicado) - tal como hacer algo, dar ejemplos,etc, determinan las siguientes <u>componentes en la comprensión del concepto de función</u>:

I) a.- Capacidad para clasificar relaciones (criterios) en funciones y no-funciones.

b.- Capacidad para dar un ejemplo de relación (criterio) que sea una función y uno que no lo sea.

II) a.- Para una función dada, la capacidad para identificar preimágenes (originales), imágenes, y pares (original e imagen).

b.- Dada una función, la capacidad para encontrar la imagen de un original dado y viceversa.

III) a.- La capacidad para identificar funciones. (Dos funciones f, g, se definen iguales, si tienen el mismo dominio y rango y si para cada x del dominio, $f(x) = g(x)$).

b.- La capacidad para transferir de una representación a otra. (Algebraica - tablas, gráfica - algebraica,...)

IV) A.- Capacidad para identificar funciones que satisfagan ciertas condiciones dadas.

B.- Capacidad para dar ejemplos de funciones que satisfagan ciertas condiciones dadas.

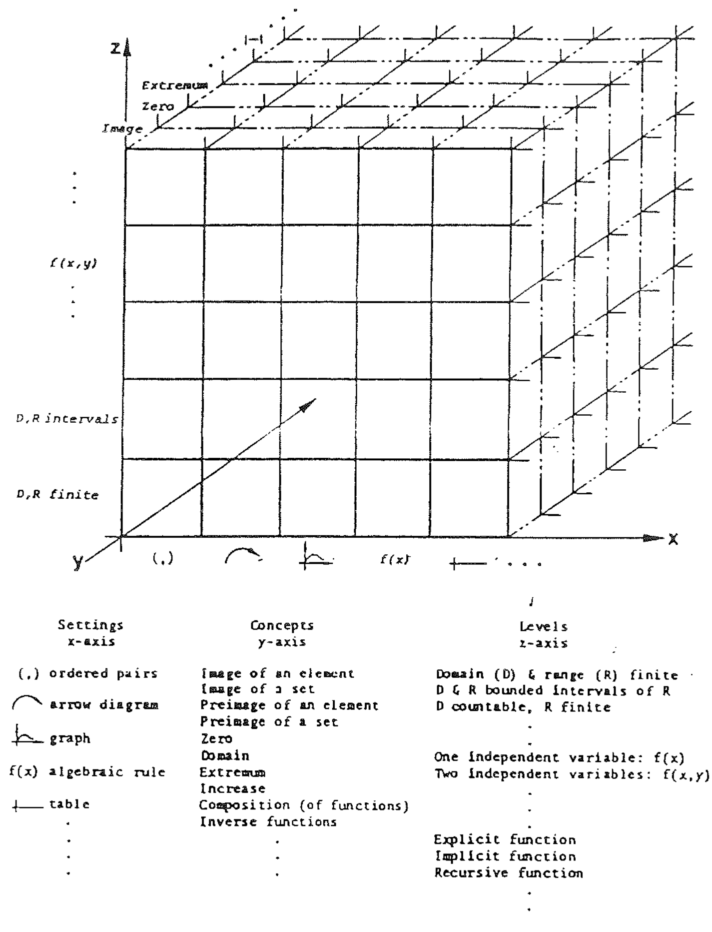
Examinaron alumnos de 9° grado (1° de BUP) que habían estudiado el concepto de función, en la clase de Matemáticas, como una correspondencia de varios a uno entre un dominio y un rango. Sin embargo, las funciones también se habían introducido en la clase de Ciencias como una relación entre variables. En la primera parte del estudio realizado por estos investigadores, se les pidió a los alumnos que dieran ejemplos de funciones que satisfacieran algunas restricciones determinadas y además que especificaran cuántas funciones de ese tipo existen (por ej.: Determina una función que pase por el origen, ¿Podrías decir cuántas hay?). En la segunda parte, los investigadores examinaron el efecto del contexto (matemático o científico). Encontraron que, independientemente del contexto, **la concepción de los estudiantes** de la función era lineal. La mayoría de las funciones que dibujaron los estudiantes se componían de segmentos rectos. Los estudiantes más capaces tuvieron mejores resultados en el contexto puramente matemático que en el científico; los estudiantes menos capaces tuvieron mejores resultados en el contexto científico.

La principal conclusión de los investigadores es que los alumnos de 9° grado tienen una imagen prototípicamente lineal de una función. Creen que esto es debido al hecho de que los estudiantes ven las funciones lineales como las funciones más simples que existen. Estos resultados ilustran cómo, inevitablemente, el conocimiento de la función lineal llega a ser un obstáculo en la posterior construcción de un esquema más general del concepto de función.

C. Aprendizaje de las diferentes componentes y representaciones de la noción de función

Aportaciones de Dreyfus y Eisenberg

Para estos investigadores la representación del concepto de función se adapta a un modelo tridimensional:



(Dreyfus y Eisemberg, 1982, p.365)

El eje **x** del modelo, contiene las formas diferentes según se puede representar una función: pares ordenados, diagramas de flechas, gráficos, tablas, etc. El eje **y** contiene conceptos relacionados con las funciones, tales como ceros, imágenes, originales, etc. La tercera dimensión corresponde a los niveles de complejidad, comenzando con dominio y rango con números enteros y finitos, funciones de varias variables, funciones implícitas y recursivas, etc. Según los autores, este modelo tridimensional contiene celdillas que caracterizan la representación de la función, el concepto específico y el nivel de complejidad.

Dreyfus y Eisenberg investigaron las bases intuitivas de los conceptos relacionados con las funciones entre 440 estudiantes de 6^o a 9^o grado (equivalentes a 6^o de EGB y 1^o de BUP). Hicieron preguntas relativas a la imagen, original, crecimiento, valores extremos, y pendiente, considerando tres modos diferentes de representación -gráficos, diagramas y tablas de pares ordenados- tanto en contextos abstractos como concretos. Encontraron que los estudiantes más capaces preferían la representación gráfica para todos los conceptos, mientras que los estudiantes menos capaces preferian las tablas. Los investigadores sugieren que los subconceptos de función deberían introducirse en formato gráfica para los estudiantes de alto nivel, y en formato tabla para los estudiantes de bajo nivel. Estas dos imágenes conceptuales -gráfico, tabla- tienen pues, según los resultados de esta investigación, diferentes grados de dificultad para los estudiantes encuestados. (Dreyfus y Eisenberg, 1982, p. 381 - 389)

Aportaciones de Guzmán

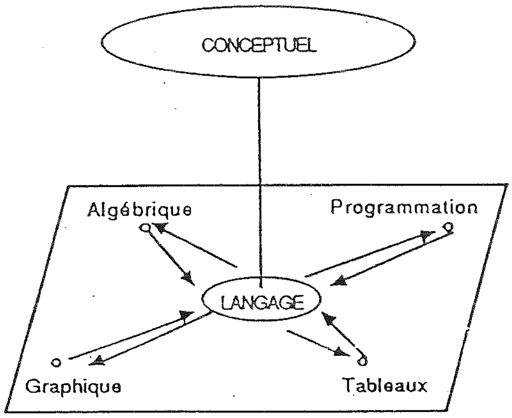
El trabajo de investigación llevado a cabo por Guzmán sobre *"Registres mis en jeu par la notion de fonction"* (1989) tiene como objetivo responder a las siguientes cuestiones:

- ¿Qué han retenido los alumnos de las funciones al final de 3^o (College)?

- ¿Cómo las perciben?
- ¿Qué grado de dominio pueden adquirir?

La autora considera que la función bajo un sentido didáctico, refleja una multiplicidad de registros, relacionados todos entre sí por el lenguaje. Para representar estos múltiples registros puestos en juego, propone el siguiente esquema:

REGISTRES MIS EN JEU PAR LA NOTION DE FONCTION



En este esquema *"los registros de tratamiento están situados en un mismo plano: tienen el mismo status, puesto que cada uno se caracteriza por la posibilidad de suministrar una representación concreta de la función. La estructura matemática de la función constituye su aspecto conceptual, elevado a un plano más alto. Las flechas indican las relaciones, con doble sentido, entre el lenguaje y cada uno de los registros. .... Por supuesto que el propio lenguaje puede constituir también un registro, no lo consideramos aquí con ese sentido, en razón de su naturaleza demasiado compleja. Entre otras el lenguaje permite 'decir la misma cosa' hablando de registros diferentes"* (p. 232-233)

Guzmán realiza una experimentación con alumnos de 3º de College; elige estos alumnos pues terminan un ciclo en el que han trabajado con las funciones de forma intuitiva, y van a comenzar a tratarlas de forma más matemática. Decide estudiar el aprendizaje de los alumnos teniendo en cuenta dos tipos de enseñanza diferentes: una tradicional y otra apoyada en programas de lenguaje LOGO.

Después de la experimentación llega a las siguientes conclusiones:

- La utilización del LOGO da mejores resultados que el tratamiento tradicional, en relación a las tareas de producción. Ya que el método tradicional privilegia el registro algebraico, mientras que a través del LOGO los alumnos ponen en juego el máximo de registros ligados a la noción de función.
- La enseñanza tradicional se revela más eficaz en relación a las tareas de aplicación directa de las propiedades y de reconocimiento de una función a partir de un gráfico.
- La enseñanza LOGO pone el acento en el paso entre registros y cubre los objetivos de producción, pero no alcanza algunos objetivos a nivel conceptual.
- La enseñanza LOGO aporta un nuevo registro a la noción de función - reconocerla como un procedimiento - .

Aportacionesde Eisemberg

En un reciente trabajo titulado *"On the developement of a sense for functions"* (1992), este investigador se cuestiona el significado de la expresión *"sentido de una función"*. Admite que es casi imposible definirlo, tanto de forma inclusiva como exclusiva, sin embargo, está convencido de el curriculum de secundaria y *"college"* debería desarrollar en nuestros estudiantes un auténtico *sentido de una función.* Existen muchas ideas que figuran en el currículum aisladamente y que, sin embargo, contribuyen a configurar este sentido, pero hay dos que lo determinan y desarrollan de un modo más significativo: las representaciones gráficas y analíticas.

Después de hacer una breve revisión de algunos trabajos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de función, centra su atención en las principales conclusiones de estos estudios sobre dos "*visualizaciones*" de la noción de función: la analítica y la gráfica.

> "*En general existe una fuerte tendencia en los estudiantes para concebir las funciones algebraicamente más que visualmente*" (p.165)

El autor, después de una detenida reflexión sobre este problema concluye que puede ser debido principalmente a tres causas:

- de tipo cognitivo: lo visual es más dificil. El procesamiento visual de las ideas matemáticas requiere niveles más elevados que el procesamiento de conceptos matemáticos expresados de forma analítica.
- de tipo sociológico: lo visual es más dificil de enseñar. Los profesores prefieren enseñar representaciones "*sentenciales*" más que "*diagramáticas*".
- relacionadas con las "*creencias*" sobre la matemática: lo visual no es matemático: "*Para los matemáticos las pruebas visuales no tienen valor, lo importante se demuestra siempre de modo algebraico*".

Termina su trabajo admitiendo que, si bien, no puede aportar soluciones definitivas para estos problemas, sin embargo, cree que ha podido ayudar a un mejor desarrollo y supervivencia del sentido de una función.

D. Interpretación de gráficos

Aportaciones de Bell y Janvier

Podemos considerar muy relevantes los trabajos realizados por estos investigadores en torno a la noción de función, entre ellos destacamos: *"Use of situations in Mathematics Education"* (1981), *"The interpretation of grahs representing situations"* (1981), *"Representation and understanding: The notion of function as an example"* (1987)

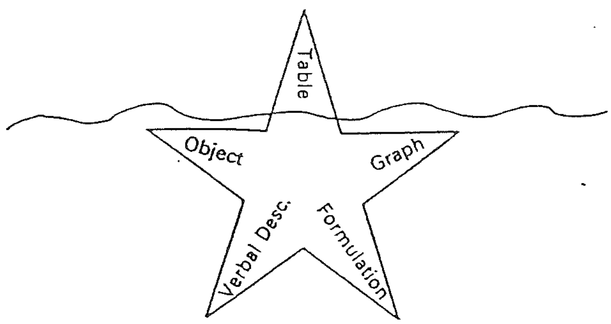
Para Janvier la representación mental del concepto de función tiene tres componentes:

- símbolos escritos
- objetos reales
- imágenes mentales

ya que detrás de la idea de función se encuentran muchos objetos básicamente diferentes, pertenecientes, según él, a diferentes dominios semánticos:

> *"Se observa que podemos definir transformación, variable, serie, permutación e isomorfismo con la estructura de función; estas nociones permanecen sustancialmente diferentes, en el sentido de que la mayoría de las formas de razonamiento concernientes a cada una de ellas, son también sustancialmente diferentes"* (Janvier, 1987, p.68)

Para Janvier una representación del concepto de función podría configurarse a partir de una especie de *"estrella iceberg"* (donde la parte sumergida es mayor que la que aparece en la superficie)



que presentaría una punta cada vez. *"Una transferencia consistiría* *en ir de una punta a la otra. Esta descripción de una* **representación** *tiene la ventaja de insistir en el caracter global e inseparable de un conjunto de esquematizaciones"* (Janvier, 1987, p. 70)

Han tenido mucha repercusión en el campo de la Educación Matemática las investigaciones llevadas a cabo por Janvier relativas a la comprensión de las representaciones gráficas, estudiadas normalmente en alumnos de Secundaria.

> *"La aproximación de la enseñanza convencional a los gráficos se hace construyendo en primer lugar una tabla de valores para más tarde construir el gráfico ... Mucho menos fácil es anticipar el tipo de variación que se espera. Los principales objetivos que perseguimos en este trabajo son los de identificar y descubrir cómo varían los números en diferentes situaciones y asociar esta variación a un trazo gráfico"* (Bell y Janvier, 1981, p. 34)

Observó que generalmente, a los alumnos les pedimos después de construir un gráfico, cuestiones que se podrían haber constestado directamente desde la misma tabla numérica: *"Esto nos hace pensar que los gráficos se usan más como tablas que para obtener de ellos informaciones más generales y significativas. Los gráficos se usan más como tablas que como instrumentos de información global."* (Bell y Janvier, 1981, p.35)

Su idea de usar la noción de variación junto con el trazado de un gráfico, conduce al alumno directamente desde la situación al gráfico (y viceversa); la relación gráfico - ecuación, según él, puede ser construida más tarde.

Entre las principales conclusiones que podemos destacar de sus trabajos, figuran las siguientes:

- Los alumnos son capaces de interpretar un gráfico punto a punto, pero muchos son incapaces de darle toda su significación global.

- Los gráficos, en numerosas ocasiones los observan los estudiantes como simples configuraciones visuales. Confunden el gráfico con el recorrido en las situaciones de movimiento.
- Tienen muchas dificultades para identificar el intervalo en el cual el incremento de la función (lineal o no) es máximo. Responden siempre con el máximo valor de la función. Esto señala la tendencia que tienen a dar la respuesta en referencia a un punto más que a un intervalo. Este tipo de respuestas nos indica que la interpretación puntual de los gráficos está profundamente anclada en la cognición de nuestros estudiantes y les impide avanzar hacia una percepción más global.

Hemos de señalar además que una de las principales aportaciones de Janvier con sus investigaciones es el diseño de múltiples situaciones para que los alumnos encontraran sentido a la relación situación - gráfico (y viceversa). Las situaciones que propone están formuladas en contextos sumamente accesibles a los alumnos para su comprensión e interpretación. Su interés fundamental es precisamente, este estudio global de los gráficos, tratando siempre de que el alumno los dote de sentido, a través de la observación de las variaciones de una determinada situación.

2.3. CARACTERISTICAS DE LOS ESTUDIOS REVISADOS

Una vez realizado un análisis exhaustivo de las investigaciones más relevantes en relación con las **concepciones** de los alumnos sobre la noción de función, las características más significativas que podemos deducir de ellas son las siguientes:

1. Las investigaciones sobre el desarrollo genético de concepciones, determinan, a través de diferentes estadios, la progresión de los aprendizajes de los sujetos bajo un aspecto particular de la dependencia funcional: el de *"causa-efecto"*. Se centran en el marco de la epistemología genética. Sus resultados son fruto de múltiples experiencias y estudios clínicos.

Las conclusiones de estos trabajos conducen a establecer estadios en el aprendizaje y, a través de ellos, a diferenciar las conductas *"preoperatorias"* (dependencias cualitativas) que aparecen en el primer estadio, de las *"operatorias"* (dependencias cuantitativas) que se estabilizan en el tercero, dando lugar, cada una de ellas, respectivamente, a las **funciones constituyentes** y a las **funciones constituidas**.

2. Las investigaciones fundamentadas sobre estudios de epistemología histórica de la matemática, podemos afirmar que ponen de relieve cómo el análisis de la evolución conceptual es una herramienta muy útil para las investigaciones didácticas.

Centradas en al aprendizaje de los alumnos, manifiestan un interés especial por determinar de un modo minucioso (Sierpinska) los grados o niveles de comprensión de la noción de función por los alumnos y, paralelamente, los posibles obstáculos epistemológicos. Se considera la noción de obstáculo inseparable de toda construcción del conocimiento.

Sus trabajos siempre finalizan con aportaciones metodológicas que, aplicadas a la enseñanza, se supone que mejorarían los aprendizajes de los alumnos. Tendrían, en este sentido, un carácter instruccional y normativo.

3. Las investigaciones centradas en el análisis de los resultados del aprendizaje de los alumnos (se considera que ya han recibido una enseñanza "oficial" sobre este concepto), obtienen sus resultados a través de pruebas (cuestionarios o tests) adaptadas a la enseñanza convencional sobre funciones.

Sus conclusiones conducen a determinar las *"concepciones previas"*, y las *"concepciones erróneas"* que han adquirido los alumnos durante su aprendizaje, y, en algunos casos, contrastarlas con las adquiridas a través de experiencias renovadoras de la enseñanza. También ponen de manifiesto, en algunos casos, la dificultad del aprendizaje en conexión con un currículo determinado.

Generalmente, concluyen que llegar al concepto general de función (tal como lo contempla la matemática en la actualidad) **es inherentemente dificil** para los alumnos, cualquiera que sea el método de enseñanza.

Algunos investigadores construyen un campo teórico que consideramos muy relevante y útil tanto por sus conceptos (*"concept image", "concept definition", "concepción proceso", "concepción objeto", etc)*, como por los procesos de aprendizaje que identifican: *"compartamentalización", "reificación", "encapsulación".*

En sus resultados encontramos, generalmente principios metodológicos que, aplicados a la enseñanza, se supone que mejoraría el aprendizaje de los alumnos. Se manifiesta aquí, también, un claro enfoque instrucional y normativo.

4. En todo el campo de investigaciones centradas en el aprendizaje de las diversas componentes y representaciones de la noción de función existe un interés primordial en sus autores por destacar las dificultades que todo ello conlleva para el alumno.

Con este objeto, construyen *"a priori"* diferentes estadios, donde de manera gradual van incorporando *"concepciones cada vez más abstractas y completas"* de la noción de función. Así, tratan de descomponer el aprendizaje de los alumnos, estableciendo diferentes secuencias metodológicas.

En sus conclusiones manifiestan que generalmente los alumnos, hasta los de más alto nivel intelectual, se quedan en los niveles más bajos de comprensión de la noción de función (Por ej. *"normalmente para los alumnos una función es siempre una función lineal"*).

En referencia a las investigaciones de Janvier sobre la representación gráfica de situaciones de variación debemos señalar que han constituido una aportación muy notable en cuanto al diseño de situaciones para el estudio *"global"* de los gráficos, ya que ha tratado siempre de dotarlos de toda su significación.

Teniendo en cuenta todo lo anteriormente expuesto, consideramos que:

- Las investigaciones anteriores analizan los resultados del aprendizaje de los alumnos y las consideramos de gran interés. Sin embargo, creemos que en ellas, no se estudian suficientemente las numerosas intervenciones didácticas ejercidas desde diferentes niveles sobre los objetos de enseñanza, ya que no podemos comprender de un modo suficiente el aprendizaje de los alumnos si no es en relación con las diversas condiciones que lo han hecho posible.

- El alumno se encuentra en el seno de un sistema didáctico configurado e influenciado por diversas instituciones que ejercen una función de mediación entre el sujeto y el saber, es necesario poner de manifiesto las condiciones y las restricciones que dicho sistema ejerce sobre las relaciones personales de los alumnos a la noción de función y, en consecuencia, sobre las concepciones que manifiestan. Esto permitirá, además, determinar y analizar los posibles fenómenos didácticos ligados a la actividad de enseñanza de esta noción matemática.

2.4. DESCRIPCION DEL PROBLEMA DE INVESTIGACION

El resumen que hemos presentado de las investigaciones sobre las concepciones de los alumnos respecto a la función revela la existencia de concepciones incorrectas e inconsistencias en el pensamiento funcional de los alumnos. A pesar de la abundancia de investigaciones sobre el tema, se ha puesto de manifiesto el interés de continuar esta línea de investigación, en especial en los aspectos siguientes:

- La puesta en correspondencia de las concepciones incorrectas encontradas en los estudiantes con obstáculos surgidos en el desarrollo histórico de la noción de función. Ello permitirá identificar obstáculos de tipo epistemológico que están ligados a la propia constitución del conocimiento.

- El estudio de la posible influencia de la enseñanza, sobre los errores, inconsistencias y concepciones erróneas de los estudiantes. Ello permitirá la identificación de obstáculos de tipo didáctico, sobre los cuales podría actuarse, mediante una correcta planificación de la enseñanza del tema.

- La determinación de las inconsistencias entre el conocimiento declarativo de los estudiantes y el procedimental, manifestado en el uso del concepto en la resolución de problemas y en el reconocimiento de funciones.

En términos de ecología conceptual (Toulmin, 1972, Godino (1993) podemos expresar el problema que nos interesa en esta investigación considerando el concepto de función como un objeto matemático que ha emergido progresivamente a la largo de la historia, y que sufre distintas "adaptaciones ecológicas" como consecuencia de usos específicos y circunstancias contextuales que se hacen del mismo en distintas instituciones, o por los propios sujetos. En consecuencia, en términos metafóricos, nos formulamos las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles han sido las etapas de desarrollo evolutivo del objeto función en los distintos momentos históricos?

- ¿Cómo "vive" en la actualidad en la institución matemática? ¿Qué papeles desempeña? ¿Con qué otros objetos se relaciona?

- ¿Cómo "vive" en los sistemas de enseñanza?. Particularmente, ¿Cómo "vive" en la noosfera didáctica (curriculos oficiales) y textos de enseñanza secundaria?

- ¿Cómo "vive" el objeto función en las clases de matemáticas de los niveles de enseñanza secundaria?

- ¿Qué tipologías de concepciones sobre el objeto función se pueden identificar en los alumnos de los secundaria? ¿Cuáles son los factores que determinan esas concepciones y qué consecuencias se derivan de las mismas de cara a la progresión de los aprendizajes?

En resumen, como objetivo fundamental de nuestra investigación nos proponemos caracterizar las concepciones que manifiestan los alumnos de secundaria sobre la noción de función, atendiendo a los distintos aspectos que configuran dichas concepciones: las propiedades invariantes que reconocen, las representaciones y las situaciones en que se usa el concepto y su posible relación con el desarrollo histórico y la enseñanza del tema.

Como variables que tratamos de poner en relación con las concepciones del sujeto introducimos el complejo de relaciones institucionales de nuestro contexto de enseñanza, esto es, las concepciones colectivas o institucionales implícitas en los curriculos oficiales, en los manuales usados en nuestros centros de enseñanza, así como, los usos, representaciones e invariantes característicos presentados efectivamente en las clases por los profesores. También es relevante la puesta en relación, tanto de las concepciones del sujeto como las colectivas presentes en la enseñanza, como consecuencia de los procesos de transposición didáctica, con las concepciones epistemológicas identificables en el largo proceso de la génesis histórica del concepto.

Fases de la investigación:

La investigación requiere, en consecuencia, tres estudios complementarios de naturaleza esencialmente cualitativa e interpretativa:

1. Análisis epistemológico de la noción de función:

El estudio de las concepciones de la noción de función a través de su génesis histórica nos debe proporcionar una visión profunda sobre la diversidad de concepciones que han estado asociadas a este concepto a la largo de su evolución. Ello facilitará claves para la identificación de las diferentes concepciones que del mismo figuren en los cuestionarios oficiales, en los manuales escolares o en los apuntes de clase, así como de las que manifiesten los alumnos. También servirá de base para la determinación de los obstáculos de índole epistemológica, esto es, los constitutivos del propio saber.

2. Análisis de la enseñanza de la función:

El estudio de una parte muy significativa (cuestionarios oficiales, manuales escolares y apuntes de clase) de las múltiples facetas de las relaciones institucionales que se mantienen con la noción de función, en los niveles de enseñanza secundaria, nos permitirá conocer diferentes condiciones y restricciones del tratamiento dado por el sistema de enseñanza a la noción de función, así como su influencia en la configuración de las concepciones manifestadas por los alumnos.

3. Estudio de las concepciones de los estudiantes:

Finalmente, esta última etapa nos permitirá completar los resultados de la investigación sobre concepciones de los estudiantes respecto a la noción de función. Como se ha señalado, nos interesa especialmente no sólo la determinación de las concepciones de los alumnos sino la identificación de las inconsistencias entre los conocimientos declarativos y el conocimiento procedimental, puesto de manifiesto en el reconocimiento de funciones y el empleo de las mismas en la resolución de problemas.

En esta fase nos preguntamos, más concretamente, si los alumnos de nuestro contexto socio-cultural serán capaces de movilizar los registros gráficos y algebraicos de la noción de función y usarlos como instrumentos para el planteo y resolución de situaciones-problemas. Las cuestiones propuestas representan pequeños sistemas que admiten una modelización algebraica y gráfica; la solución a las mismas se obtiene por medio de fórmulas (conocidas por los alumnos) que se deben contemplar como funciones, analizando adecuadamente la variación y la dependencia, es decir, haciendo un verdadero proceso de modelización. Esta se llevará a cabo por medio de una interacción compleja y progresiva entre lo numérico, lo literal y lo gráfico e incluso lo discursivo. Nos preguntamos, ¿serán capaces los alumnos de determinar las propiedades matemáticas de los modelos propuestos?.

Como fases previas a estos estudios, que se han cubierto en en el capítulo 1 y las secciones anteriores del capítulo 2, figuran:

a) Análisis teórico de la noción de concepción en Didáctica de la Matemática, que ha sido necesario para clarificar el uso de este término en nuestra investigación.

b) Estado de la cuestión de las investigaciones realizadas sobre este área problemática, que ha puesto de manifiesto la escasa atención que se ha dado en las mismas al estudio de las relaciones de las concepciones de los sujetos con las concepciones transmitidas por la enseñanza.

2.5. METODOLOGIA

Enfoque de la investigación

Se trata de una investigación fundamentalmente de tipo cualitativo o interpretativo, en la terminología de Erickson (1986). Para Kirk y Miller (1986), el análisis de los documentos y rastros físicos que describen la historia de las personas es una de las categorías de la investigación cualitativa. Scott (1988) indica también que cuando, en lugar de estudiar directamente a las personas se hace indirectamente a través del análisis de documentos, se trata de una investigación cualitativa, señalando como ejemplo el estudio de las guías y documentos curriculares y el análisis de textos. Goetz y Lecompte (1988) incluye también dentro de los estudios cualitativos la descripción o reconstrucción analítica de creencias compartidas, prácticas y conocimiento popular de un grupo de personas. Este autor indica que este tipo de investigación es, además de un producto, un proceso, destacando, entre otras, las siguientes características que compartimos en esta investigación:

- se emplean estrategias de investigación empíricas y naturalistas, evitando la manipulación intencional de las variables de estudio;

- se recurre, en este tipo de investigación, a la observación participante y/o no participante; aunque en nuestro caso ha sido no participante ya que aunque no se ha observado directamente la enseñanza recibida por los alumnos, si se ha efectuado una observación indirecta, por medio del estudio de los apuntes tomados en clase por estos alumnos.

- interés por datos fenomenológicos, que representan la concepción del mundo de los participantes investigados; en nuestro caso nos interesa la visión de los estudiantes sobre "el mundo de los objetos matemáticos"; no intentamos imponer nuestras categorías previas de análisis, sino describir las creencias de los sujetos tal como las perciben;

- caracter sistémico; estudio de fenómenos globales, desde diversas perspectivas, con técnicas múltiples de recogida de datos; en nuestro caso, se ha utilizado el análisis de contenido de diversos documentos: textos matemáticos, de historia de la matemática y de enseñanza; cuestionarios oficiales y apuntes de los alumnos, así como de las producciones escritas de los alumnos.

Como indican Goetz y Lecompte (1988), una investigación concreta nunca es totalmente cualitativa o cuantitativa, sino que se situa en un punto intermedio dentro de cada una de las cuatro dimensiones siguientes:

Dimensión inductivo-deductiva:

Hace referencia al lugar de la teoría en la investigación. En el enfoque deductivo se intenta hallar datos que confirmen las teorías previas y en el inductivo se comienza con la recogida de datos, que son explorados desde diversas alternativas, con objeto de generar a partir de ellos una teoría que los explique. En nuestro caso, se cuenta con el marco teórico previo general para la Didáctica de la Matemática descrito en el capítulo 1, así como los resultados específicos de las investigaciones sobre la función descritos en el capítulo 2, por lo que nos situamos más bien en el polo deductivo, aunque sin descartar la generación de nuevas hipótesis en el transcurso de la investigación, que deberán ser contrastadas en el curso de posteriores investigaciones.

Dimensión generativo-verificativa

Se refiere al lugar de la evidencia y a la medida en que los resultados del estudio son generalizables. La investigación verificativa prueba proposiciones generadas con anterioridad y se pretenden establecer generalizaciones más allá del grupo estudiado, dando idea del universo al cual es aplicable. La investigación generativa se centra en el descubrimiento de constructos o en la demostración de proposiciones en un grupo de datos. El comprobar si puede o no ser extendido a otros casos, suele ser tema de otros estudios posteriores. En nuestro caso, participamos de ambos enfoques: seguimos un paradigma generativo en el análisis de la relación entre las concepciones de los alumnos y la enseñanza recibida, puesto que las proposiciones generadas a partir del estudio de los grupos concretos de alumnos, deberán confirmarse o rechazarse en investigaciones posteriores. Por otro lado, en el estudio de las concepciones y errores de los alumnos, de las inconsistencias entre los componentes conceptuales y procedimentales de los mismos y en su relación con la génesis histórica de los conceptos, se dispone de hipótesis previas, generadas en otros estudios anteriores, por lo que la investigación presente aporta nuevos datos para la confirmación de las mismas.

Dimensión constructiva-enumerativa

Se refiere a la construcción de las categorías de análisis de las variables estudiadas en la investigación; si se parte de categorías ya construídas por otros autores o se trata de generar un nuevo sistema de categorización para ciertas variables o incluso de generar nuevos constructos, lo cual sería también un aporte de la investigación. En nuestro caso nos situamos en un punto intermedio; puesto que, para los argumentos de los alumnos, sus estrategias en la resolución de los problemas, sus concepciones, se parte ya de la existencia de categorías previas; no obstante, para algunas de estas variables se identifican nuevas categorías de análisis.

Dimensión subjetiva-objetiva

El enfoque subjetivo describe las pautas culturales tal como son percibidas por el grupo investigado; se utilizan estrategias para recoger datos subjetivos; el enfoque objetivo recoge datos con categorías conceptuales previas aportadas externamente. Puesto que en nuestro caso, en el análisis de documentos se parte de los documentos completos, y en el estudio de las concepciones de los alumnos se emplean respuestas abiertas, consideramos que nos encontramos situados en el polo subjetivo de la investigación.

Población y Muestras

La población objeto de estudio está constituida por alumnos de enseñanza secundaria (concretamente los cursos 2°, y 3° de Bachillerato y el Curso de Orientación Universitaria, COU) de nuestro entorno sociocultural. Sin embargo, al tratarse de una investigación cualitativa, hemos empleado el muestreo intencional, teóricamente informado. Aspiramos a la comparabilidad de nuestro estudio más que a la extensión del mismo a otras situaciones de enseñanza diferentes de la analizada. Para ello describiremos con detalle las características de los grupos estudiados.

Se ha considerado suficiente la selección de 3 centros, de los cuales se ha elegido una muestra de 323 estudiantes pertenecientes a los niveles de enseñanza citados.

Asimismo, se han empleado también dos muestras piloto, que se pasaron, respectivamente cada una, a grupos de 98 y 137 estudiantes de secundaria (2°, 3° de BUP y COU). A través de la experiencia obtenida por una parte, en la organización de su ejecución, y por otra, en el análisis de los resultados, pudimos rectificar el cuestionario tanto en la redacción de las preguntas como en la extensión y número de cuestiones, adaptándolo a un tiempo máximo de 60 minutos en su realización.

Debemos señalar asimismo, que en nuestra memoria de tercer ciclo los resultados obtenidos en el cuestionario pasado a 190 alumnos de enseñanza secundaria, los hemos utilizado como una valiosa experiencia a la hora de configurar el cuestionario definitivo.

Variables

De acuerdo con los objetivos de la investigación las variables que tenemos en cuenta son las siguientes:

Estudio de las concepciones de los alumnos:

Como hemos indicado en el Capítulo 1, estas concepciones no son directamente observables, sino que han de ser inducidas a través de las prácticas explicitadas por los alumnos en las situaciones de evaluación que les proponemos. Podemos diferenciar diversas categorías en estas prácticas:

Un primer tipo, a partir de las cuales deseamos inferir los aspectos declarativos de sus concepciones. Este tipo de prácticas comprende:

- Definiciones del concepto
- Elementos numéricos, algebraicos, y gráficos identificados en estas definiciones

Un segundo tipo de prácticas estaría orientado a inferir, a partir de ellas el reconocimiento de funciones, de sus propiedades, componentes y discriminación con otros objetos matemáticos por el alumno, esto es, aspectos complementarios que comprenden:

- Ejemplos de funciones propuestos y sus tipologías;
- Ejemplos de actividades que proponen realizar sobre las funciones;
- Dominios considerados para las funciones empleadas en los diversos ejercicios;
- Situaciones que reconocen/ no reconocen como función;
- Categorías de argumentos que utilizan para reconocer/ no reconocer una función.

Por último, estamos interesados en el empleo de las funciones, por parte del alumno, en situaciones de modelización. Para ello se estudiarán:

- Tipos de gráficas construidas;
- Expresiones algebraicas propuestas;
- Argumentos empleados para decidir si en la situación

es, o no, pertinente emplear una función;

- Estrategias de resolución de los problemas.

Todas estas variables han sido estudiadas de modo descriptivo, aunque también se ha estudiado la evolución de alguna de ellas en función del curso escolar; respecto al reconocimiento de las funciones se ha realizado un estudio de los argumentos en función de las variables de tarea de los ítems. En consecuencia, podemos considerar que las variables anteriores serían las variables dependientes de nuestro estudio, pudiendo identificar también las siguientes variables independientes:

- Variables de tarea en los ítems, que se describen en la Sección 5.3.2 y 5.3.3 de construcción del cuestionario.

- Curso escolar

Finalmente señalamos que, al ser la muestra de tipo intencional, el resto de las variables: colegios participantes, profesores, tipo de enseñanza recibida, libro de texto empleado por el alumno se consideran variables concomitantes que han sido mantenidas fijas en esta investigación.

Estudio de documentos

El estudio de los diversos documentos ha sido de tipo descriptivo, por lo que no consideramos pertinente la diferenciación entre variables dependientes e independiente. Remitimos al lector a las Secciones 4.2, 4.5 y 4.7 para la descripción de las variables analizadas.

Hipótesis

Hemos indicado que nos encontramos en un punto mixto respecto a los supuestos generativo-verificativos descritos por Goetz y

Lecompte (1988). En este punto sólo debemos especificar, en consecuencia, las hipótesis previas a la toma de datos, ya que las hipótesis generadas como consecuencia de nuestra investigación han de ser presentadas como un resultado de la misma en el capítulo 5 dedicado al estudio de las concepciones de los alumnos, y en las conclusiones finales de la investigación. Estas hipótesis han de ser entendidas como espectativa sobre los resultados, dentro de un paradigma cualitativo, y no como hipótesis en sentido estadístico.

Respecto al primer estudio - análisis epistemológico - esperamos completar el estudio realizado por otros autores como Sierpinska (1989, 1992) de identificación de diversas concepciones epistemológicas y obstáculos en la génesis histórica del concepto. Debido a que los resultados de investigaciones sobre otros conceptos como las de Artigue (1984, 1989) o la de El Bouazzaoui (1988), muestran que estas diversas concepciones tienen su reflejo en la génesis del conocimiento en los alumnos, formulamos la hipótesis siguiente:

Hipótesis 1: Se espera identificar en los alumnos de nuestra muestra una diversidad de concepciones locales respecto a la función. Algunas de estas concepciones pueden ser identificadas con concepciones epistemológicas que han sido mantenidas históricamente, pero que, en la actualidad serían concepciones parciales, al haber alcanzado el objeto función un mayor grado de generalidad.

La tendencia que ha seguido, en los últimos años, la enseñanza de las matemáticas en los niveles de secundaria se caracteriza por la presentación formal de los conceptos matemáticos, no siendo una excepción el caso de la función. Aunque en la actualidad asistimos a una propuesta de renovación de la enseñanza, que propugna la introducción de una metodología más activa y la recuperación del aspecto útil de los objetos matemáticos, los sujetos estudiados no habían alcanzado aún este cambio de filosofía en la enseñanza. En consecuencia, del estudio de los cuestionarios, libros de texto y apuntes de los alumnos, esperamos aportar datos que confirman la siguiente hipótesis:

Hipótesis 2: Esparamos mostar en el análisis de la enseñanza que han recibido los alumnos de nuestra muestra sobre la noción de funciónque, este tipo de enseñanza, enfatiza la función como un objeto de estudio en sí mismo, minimizando su consideración como herramienta de la actividad matemática que tenía en planes de estudio anteriores.

Hipótesis 3: En referencia a la modelización funcional algebraica y gráfica de situaciones de variación, esperamos mostar que, el conjunto de restricciones didácticas generadas por el sistema de enseñanza, dan lugar a concepciones parciales, muy limitadas que pueden constituirse en obstáculos para la formación de una concepción más general y completa de la noción de función en los alumnos.

Respecto del estudio de las concepciones del sujeto nuestras expectativas se centran en las siguientes:

Hipótesis 4: Las concepciones de la noción de función manifestadas por los alumnos a nivel declarativo no son siempre consistentes con las manifestadas a nivel argumentativo ante situaciones de reconocimiento de funciones o ante situaciones de modelización.

Hipótesis 5: Las variables de tarea de los ítems, influyen significativamente sobre el reconocimiento de las funciones por parte de los alumnos y sobre los argumentos empleados para apoyar este reconocimiento (o no reconocimiento). En particular esperamos probar que la característica de ser una aplicación (constituyente fundamental de la definición formal del concepto de función) no es considerada por los alumnos, sino después de haber utilizado otros criterios de decisión que reflejen estadios anteriores de la concepción epistemológica de la noción de función.

<u>Instrumentos de recogida de datos:</u>

Se han utilizado los siguientes instrumentos de recogida de datos:

Cuestionario escrito:

Goetz y Lecompte (1988) indican que la utilidad de las encuestas en la investigación cualitativa es que amplían la representatividad de los estudios, permiten el almacenamiento y análisis cuantitativo de los datos y proporcionan una información útil para determinar el modo en que los sujetos elaboran juicios y para registrar lo que creen que es socialmente aceptable hacer, aunque señalan también sus posibles limitaciones, frente a datos observacionales.

Como medio de aumentar la representatividad del estudio, y de efectuar, asimismo, un estudio cuantitativo de los datos, que permita comparar nuestros resultados con los de otras investigaciones sobre el tema se construirá una prueba escrita para ser administrada mediante la técnica de encuesta (Fox, 1980) a los alumnos participantes. Hay que destacar que, sin embargo, no es un instrumento estructurado totalmente pues, aunque las cuestiones son las mismas para todos los alumnos, se trata de cuestiones con respuesta libre, sobre los tres aspectos siguientes:

- Invariantes de la noción de función reconocidos explícitamente y a nivel declarativo.

- Identificación de funciones según los registros gráfico y algebraico.

- Uso de la noción de función en situaciones de modelización.

Lista de control de variables y categorías de las mismas a observar en el análisis de cuestionarios oficiales, libros de texto y apuntes de los alumnos, así como en el análisis de los datos obtenidos del cuestionario pasado a los alumnos.

Análisis de datos

El análisis efectuado de los diversos documentos (textos matemáticos e históricos; cuestionarios oficiales; libros de texto y apuntes de los alumnos) es de tipo cualitativo. Como señalan Miles y Huberman (1984) este tipo de análisis se realiza iterativamente a lo largo de toda la investigación, en un proceso de generación de hipótesis y búsqueda de plausibilidad de las mismas, con datos que las avalen o de casos discrepantes que contribuyan al refinamiento progresivo de estas hipótesis.

El análisis de las respuestas de los alumnos al cuestionario escrito comprenderá un doble proceso de análisis cualitativo y cuantitativo:

En primer lugar, será preciso realizar un análisis de contenido (Weber, 1986; True, 1989) de las producciones escritas de los alumnos, tomando como unidades de análisis las respuestas a cada ítem, en las cuales será preciso la categorización de las diversas variables que se han descrito previamente, todas ellas cualitativas. En este proceso de categorización y codificación será preciso una serie de revisiones y depuraciones, con objeto de asegurar la coherencia final de las categorías generadas y la fiabilidad del proceso de codificación.

- Tablas de frecuencias de las distintas variables generadas y clasificaciones cruzadas por curso escolar, con objeto de estudiar la evolución de estas variables durante el aprendizaje. También se relacionarán algunas otras variables entre sí.

- Análisis factorial de correspondencias (Cornejo, 1988; Escofier y Pagés, 1988) de los argumentos empleados por los alumnos en los 14 ítems de reconocimiento de funciones, con objeto de realizar un estudio de la estructura de estos argumentos y su puesta en correspondencia con las variables de tarea de los ítems, con lo que se espera determinar factores indicativos de diversos aspectos locales de las concepciones de los estudiantes, referidas a su concepción en sentido global.

- Análisis "cluster" (Celeux y cols. 1989; Lerman, 1981) de las respuestas a los ítems de reconocimiento de funciones para la identificación de agrupaciones entre los mismos.

<u>Cuestiones de validez y fiabilidad</u>

Puesto que el enfoque de la investigación es predominantemente cualitativo, estudiaremos los conceptos de validez y fiabilidad desde el punto de vista de este tipo de investigaciones. En ellas no se definen índices cuantitativos para la fiabilidad, sino que se sustituyen por la descripción objetiva y minuciosa de todos los componentes que puedan afectar a la interpretación de los resultados de la investigación.

Agar (1986) al hablar de la etnografía indica que ésta emerge de la relación entre las tradiciones del investigador, las del grupo estudiado y la de la audiencia a la que va dirigida el estudio, siendo este tipo de investigación un proceso de mediación entre estos diferentes marcos de conocimiento. Ello explica la dificultad de comparar diversos estudios etnográficos y, en general, diversos estudios cualitativos y nos lleva a la necesidad de especificar que puede entenderse por validez y fiabilidad en este tipo de estudio.

Para Kirk y Miller (1986) estos conceptos son los componentes de la objetividad del proceso de construcción del conocimiento científico. "*La fiabilidad es la extensión por la que un procedimiento de medida proporciona el mismo resultado donde y cuando se emplee; la validez es la extensión por la que da la respuesta correcta*" (p. 19).

Goetz y Lecompte (1988) diferencian entre fiabilidad interna y externa en los estudios cualitativos. La primera indica el grado con el que un segundo investigador, a partir de los constructos empleados en la investigación particular, ajustaría a ellos sus datos, tal como lo hizo el investigador particular. La segunda se relaciona con la cuestión de si otro investigador decubriría los mismos fenómenos o elaboraría los mismos constructos en el escenario estudiado u otro similar.

Con objeto de asegurar la fiabilidad externa, describiremos con detalle los aspectos siguientes:

- el contexto de la investigación, que incluye la descripción de la muestra de alumnos (Sección 5.2) y la enseñanza recibida por los mismos (Capítulo 4);

- las unidades de análisis, variables y categorías (Sección 5.3 y 5.4);

- los métodos de recogida de datos (en los párrafos anteriores de esta sección y en el Capítulo 5)

Respecto a la fiabilidad interna hay que tener en cuenta que la categorización de los datos ha sido realizada personalmente por el investigador, y se ha revisado y depurado varias veces este proceso, lo que asegura la correspondencia entre los datos empíricos y las inferencias realizadas a partir de ellos. Este estudio cualitativo de la fiabilidad se ha complementado con un estudio cuantitativo para un subconjunto del cuestionario compuesto por cuestiones homogéneas (14 apartados correspondientes a los ítems 2 y 3). Para ellos se ha realizado un estudio de la generalizabilidad que se describe en la sección 5.5.

Respecto a la validez, los autores citados diferencian también entre validez interna y externa. Las cuestiones de validez externa se refieren a la comparabilidad y traducibilidad, ya discutidas. La validez interna se refiere a si el investigador mide realmente lo que prentende. A este respecto remitimos a la Sección 5.5 donde se analizan las limitaciones asumidas en el instrumento de estudio de las concepciones de los estudiante y la validez de contenido de este instrumento respecto a los fines pretendidos.

CAPÍTULO 3

CAPITULO 3

EPISTEMOLOGIA HISTORICA DEL CONCEPTO DE FUNCION

3.1. INTRODUCCION

El concepto de **función**, tal y como se define actualmente en Matemáticas, es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 2000 años. En este capítulo realizaremos un estudio, que denominamos de epistemología histórica de la noción de función, para analizar dicha evolución.

Trataremos, en primer lugar, de explicar qué buscamos, por qué y cómo vamos a realizar esta fase de nuestra investigación.

El objetivo de un estudio epistemológico-histórico, según lo entendemos nosotros, debe aportar información a cerca de la evolución del concepto en los distintos momentos históricos, tratando de identificar las variables y factores condicionantes que han determinado distintos estadios de desarrollo de esta noción. Interesa, por tanto, identificar las situaciones problemáticas a las cuales las personas involucradas han dedicado sus esfuerzos, los atributos, propiedades características y grado de emergencia del concepto, así como las representaciones simbólicas asociadas.

Considerando cada momento histórico como definidor de una institución distinta, un estudio de este tipo podríamos describirlo como un análisis ecológico de la idea de función (Chevallard, 1989), o ecología conceptual (Godino, en prensa), o sencillamente, como hemos indicado, un análisis de la evolución del concepto.

Asímismo, el estudio nos permitirá identificar las concepciones que históricamente se han configurado como resistentes a su evolución y generalización y por tanto, pueden describirse como obstáculos epistemológicos.

El interés de este estudio para la didáctica es claro, ya que aportará conocimiento relevante para comprender los factores determinantes de los procesos de enseñanza-aprendizaje de esta noción a lo largo de los distintos niveles de enseñanza y los fenómenos de transposición didáctica correspondientes.

Estudiaremos, en una primera parte, el desarrollo histórico de la noción de función, deteniéndonos en los problemas más significativos a los que ha estado ligada en el curso de su evolución y que han determinado su avance. En este análisis veremos cómo han estado implicados diversos dominios de la Matemática, ya que según expresa Godement: *"Una buena parte de las Matemáticas ha sido construida generalizando cada vez más la noción de función"* (Godement, 1971, p.65). Para la realización de este análisis histórico nos hemos apoyado en libros, tanto de historia como de fundamentos de la Matemática, tales como: Boyer (1959, 1986), Ribnikovf (1987), D'Hombres (1987), Diudonné (1989), Eves (1969), Crombie (1979, 1987), Le Lionnais (1976), Alexandrov y col. (1973), Grattan-Guinness (1984), . También hemos utilizado trabajos y monografías implicados más directamente con la noción de función tales como los de Valiron (1976), Brunet (1976), Desantti (1976), Youschevitch (1976), Pedersen (1974), René de Cotret (1985) y Sierpinska (1989a, 1989b, 1992).

En una segunda parte, hemos realizado un análisis epistemológico estudiando, en primer lugar, el estatuto matemático de la noción de función. En segundo lugar, presentamos una descripción de las concepciones más representativas que han estado asociadas a su evolución histórica, terminando con un análisis de los obstáculos epistemológicos que han surgido en su desarrollo.

3.2. EVOLUCION HISTORICA DE LA NOCION DE FUNCION

El análisis histórico lo hemos dividido en varias secciones atendiendo a los problemas más representativos de su evolución. Veamos a continuación cuáles han sido las principales etapas de desarrollo:

3.2.1. LA ANTIGÜEDAD: HACIA UNA BUSQUEDA DE REGULARIDADES Y PROPORCIONES

En esta época, aunque se llevan a cabo estudios sobre diversos casos de dependencias entre cantidades de diferentes magnitudes, sin embargo, no se llegaron a aislar las nociones generales de cantidad variable y de función. En este período, trataremos algunas aportaciones de la Matemática babilónica y de la griega.

La matemática babilónica

De las civilizaciones mesopotámicas de la antigüedad, que de forma genérica conocemos como babilónicas (2000 a.C.- 600 a. C), han llegado hasta nuestros días cientos de tablillas de arcilla que contienen una gran cantidad de información sobre los conocimientos matemáticos de estos pueblos.

Los matemáticos babilónicos estaban principalmente interesados en los cálculos astronómicos, en los que realizaron una compilación de las efemérides del sol, de la luna y de los planetas. Estudiaron problemas de variaciones continuas, tales como la luminosidad de la Luna en intervalos de tiempo iguales, o los períodos de visibilidad de un planeta en relación con el ángulo que éste forma con el sol. Utilizaban en sus cálculos tablas sexagesimales de cuadrados y de raices cuadradas, de cubos y de raices cúbicas, otras contienen las potencias sucesivas de un número dado, de forma análoga a nuestras actuales tablas de logaritmos (o más correctamente dicho, de antilogaritmos). También se han encontrado tabulaciones de valores de $n^2 + n$ para valores naturales de n. Conocían la suma de la progresión geométrica $1 + 2 + 2^2 +..$, para sucesivos términos, así como la suma de la serie de los cuadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + .. + n^2$ para distintos valores de n.

Estas tablas suelen estar dispuestas en dos columnas, de forma análoga a las tablas de valores que acostumbran a construir nuestros alumnos para cualquier función f(x).

Aunque no utilizaban letras para representar cantidades variables, los mismos términos, longitud, anchura, área y volumen, servían perfectamente para este fin (7 longitud + 5 longitud = 12 longitud).

No se puede asegurar que los babilonios expresaran sus resultados de forma general. En las tablillas sólo consta el estudio de casos concretos, sin ninguna formulación genérica.

> *"El hecho de que no se haya conservado ninguna formulación general de estas tablas no significa necesariamente que no existiera en el pensamiento antiguo prehelénico consciencia de la generalidad de dichas reglas o principios. Si no hubiera, de una manera u otra, una regla general subyacente, sería muy difícil de explicar la analogía entre los distintos problemas del mismo tipo."* (Boyer, 1986, p.66)

Aunque investigadores como Youschkevitch (1976, p.13), aseguran que no hubo ninguna idea en general de función en la Matemática antigua, sin embargo, otros como Pedersen (1974) opinan que los matemáticos babilónicos poseyeron un auténtico *"instinto de funcionalidad"*, ya que una función no sólo es una fórmula sino una relación más general que asocia elementos de dos conjuntos, y esto si está presente en las numerosas tablas de los cálculos babilónicos. (Pedersen, 1974, p. 36).

Podemos afirmar pues, que este instinto de funcionalidad de los matemáticos y astrónomos babilónicos se manifestó en sus trabajos de profundización en los métodos cuantitativos a través de sus intentos de aritmetizar observaciones dificilmente medibles, ya que no se limitaron a una simple tabulación de datos empíricos, sino que usaron interpolaciones y extrapolaciones en una búsqueda de regularidades. Esta búsqueda de regularidades en sus tabulaciones es quizás su más importante caractaristica, aunque verdaderamente, existe una distancia muy grande entre el "instinto de funcionalidad" y la noción de función.

La Matemática Griega

Las ideas de cambio y de cantidad variable no eran extrañas al pensamiento griego. Los problemas del movimiento, de la continuidad, del infinito habian sido examinados desde la época de Heráclito y de Zenón, y además, una gran parte de la filosofía natural aristotélica estaba consagrada al estudio de estas cuestiones. Podemos afirmar que en el pensamiento griego existía una idea primitiva de función contenida en las nociones de cambio y relación entre magnitudes variables. Sin embargo, los filósofos griegos consideraban el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas. En el Cap. VII, libro XI de Metafísica, Aristóteles opone, la Física, que concierne a los objetos en movimiento, a la Matemática que es una ciencia estrictamente teórica: *"Los objetos matemáticos no están sujetos al movimiento con la sóla excepción de aquellos a los que se refiere la astronomía"*. Asimismo, en los Elementos de Euclides los objetos matemáticos y las relaciones son estáticas: se estudian los objetos fijos y sus relaciones.

Esta filosofía "estática" de la Matemática fue la razón por la que, a lo largo de mucho tiempo, los matemáticos pensaron y hablaron en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables. Esto condujo a las proporciones y ecuaciones, y no a las funciones.

Esta actitud hacia las Matemáticas, estuvo aferrada en la mente de los matemáticos durante mucho tiempo: observaban los entes matemáticos como algo "estático". Consideraban las magnitudes físicas y las proporciones entre ellas como algo diferente a las igualdades estrictamente numéricas. Esta concepción de la "variabilidad" como característica exclusiva de las magnitudes físicas puede considerarse un claro obstáculo para el desarrollo de la noción de función. Estuvo fuertemente arraigada en la mente de los matemáticos y perduró con Oresme, Galileo y Leibniz.

Según un estudio de René de Cotret (1985) las nociones que tuvieron una mayor influencia negativa en la evolución del concepto de función emergieron en la Matemática desde el tiempo de Pitágoras y fueron: la proporcionalidad, la inconmensurabilidad y la fuerte disociación existente, en el pensamiento griego, entre número y magnitud.

Actualmente asociamos de forma natural a cualquier cantidad de una magnitud, una cierta medida numérica, pero en el pensamiento griego, magnitudes y números eran cosas bien distintas.

Sin embargo, Pitágoras y, en general, la escuela pitagórica, cuya afinidad con el pensamiento babilónico era muy fuerte, creía que "todo es número". Así, para los pitagóricos, un número podía ser asociado a cualquier magnitud. *"Aunque estos dos conceptos eran bien distintos, el número correspondía a la aritmética y teoría de números, y la magnitud a la geometría, sin embargo, una voluntad de unificar el número y la magnitud reinaba en la escuela pitagórica".* (René de Cotret, 1985, p.34). Intentaron relacionar los números y las magnitudes por medio de las proporciones, ello les permitía resolver algebraicamente los problemas geométricos. Las proporciones representaban la razón numérica que se puede establecer entre dos cantidades de una misma magnitud.

"Esta costumbre de expresar todas las relaciones entre las cosas bajo forma de proporciones es un obstáculo al desarrollo de

la noción de función". (René de Cotret, 1985, p.35). Ya que cuando trabajaban con las proporciones les era muy difícil distinguir la relación entre magnitudes diferentes, pues siempre comparaban cantidades de la misma naturaleza. Así, por ejemplo, las áreas de los circulos o los volúmenes de las esferas son proporcionales al cuadrado y al cubo, respectivamente, de sus radios; no admitían que esta proporción pudiese ser válida para los radios simplemente, pues pertenecían a una magnitud diferente, la longitud. Este modo de pensar les impedía observar las relaciones de dependencia entre magnitudes diferentes que les hubiese aproximado a considerar relaciones funcionales.

La razón por la que los griegos establecían siempre de forma homogénea sus proporciones debemos buscarla en el significado geométrico que para ellos tenían las magnitudes variables. Así, una variable correspondía a la longitud de un segmento rectilíneo, el producto de dos variables al área de un rectángulo, y el producto de tres variables al volumen de un paralelepípedo rectangular. Este uso sistemático y riguroso de la Geometría para representar relaciones entre variables hizo que, al construir las proporciones, compararan siempre longitudes con longitudes, áreas con áreas, y volúmenes con volúmenes, de forma que una razón entre dos magnitudes distintas carecía de significado.

Según René de Cotret *"la homogeneidad que conducía a comparar siempre magnitudes de la misma naturaleza, pudo ser también un obstáculo al desarrollo de la noción de función"* (1985, p. 36), puesto que oscurecía e impedía encontrar, de forma significativa, dependencias entre variables de diferentes magnitudes, germen de toda relación funcional.

Como dijimos anteriormente, para los pitagóricos todo era número, esto les conducía a pensar que existía una unidad y que el mundo estaba compuesto por una multitud de unidades indivisibles. Hay, según esta escuela, elementos indivisibles de tiempo y de espacio, y una multitud de ellos componen el tiempo y el espacio. Imaginaban que existía una magnitud muy pequeña, indivisible, que era el elemento generador de todas las otras magnitudes. Esta tesis tuvo un fuerte oponente en Zenón con sus paradojas.

Más adelante, su principal adversario fue la aparición del problema de la inconmensurabilidad. En él, se mostraba la existencia de casos donde es imposible encontrar una medida común para dos cantidades. Desde entonces es absurdo expresar la razón entre dos magnitudes por medio de números enteros: *"se abre un auténtico cisma entre números y magnitudes.....Desde este momento los números dejan de ser considerados como entes contínuos, y las magnitudes dejan de ser asociadas a los números; a partir de ahora y, hasta la aparición de los irracionales, los números son discretos, y todo lo que es contínuo deja de ser numérico. Así pues, es imposible tener variables numéricas que representen magnitudes, pues los números son discretos y las magnitudes contínuas"* (René de Cotret, 1985, p.44).

Podemos pues afirmar, que *"la inconmensurabilidad y las paradojas son obstáculos a la noción de función, puesto que discretizan los números y esto impide que se establezcan relaciones generales numéricas entre las magnitudes"*.(René de Cotret, 1985, p.45). Como consecuencia, las proporciones se convierten en el mejor medio para comparar magnitudes desprovistas totalmente de su caracter numérico.

Esta fuerte separación entre números y magnitudes queda patentemente establecida en los Elementos de Euclides, pues trata en libros diferentes las propiedades de las proporciones, ya sean numéricas , o bien formadas por magnitudes. Los números los considera enteros y discretos, sin embargo, las magnitudes son continuas. Mientras que la noción de número continuo no sea aceptada, será muy dificil construir la noción de función, ya que los números, así considerados, sólo permitían construir una ilustración discretizada de los fenómenos de la naturaleza, enmascarando la continuidad existente en la variabilidad de los mismos.

3.2.2. REPRESENTACION CINEMATICA Y GEOMETRICA DE LAS RELACIONES FUNCIONALES: EDAD MEDIA

Después de la desaparición de la sociedad antigua, la floración de la ciencia en los paises de cultura árabe no aporta conocimientos nuevos y significativos en relación a la funcionalidad. Sin embargo, hemos de destacar los dos rasgos más caracteristicos de la matemática árabe: la separación del álgebra y la trigonometría como ciencias particulares dentro de la Matemática. En álgebra, además de realizar una clasificación exahustiva de todo tipo de ecuaciones, crearon las bases para la formalización de una teoría general de ecuaciones. La trigonometría, de un conjunto de medios auxiliares de la astronomía, pasó a estudiar muy seriamente todo tipo triángulos planos y esféricos. En ambas ciencias quedaba sólo un paso para que adquirieran el aspecto analítico habitual que tienen actualmente, la introducción de una correcta simbolización. Esto contuvo su desarrollo.

En el continente europeo las matemáticas aún siguen manteniendo una fuerte disociación entre número y magnitud, esto se reflejará en las concepciones cualitativas y cuantitativas del universo.

El pensamiento de la Edad Media estuvo presidido por la idea de explicación racional de los fenómenos. Esto se produjo gracias a la recuperación gradual de la Lógica de Aristóteles y de la Matemática griega y árabe. La Matemática se convierte en la Ciencia racional modelo, los científicos, siguiendo las ideas de Platón, mantenían que los sentidos eran engañosos, que sólo la razón podía alcanzar la verdad.

> *"Durante casi cuatro siglos, a partir del comienzo del s. XIII, la cuestión que dirigía la investigación científica fue descubrir lo real, lo permanente, lo inteligible, tras el mundo cambiante de la experiencia sensible, bien fuera esta realidad algo cualitativo, según se concebió al principio de dicho período, o bien algo matemático, como Galileo y Kepler iban a concebirla al final."* (Crombie, 1979, p.29).

En el estudio del mundo real, una de las mayores preocupaciones de la Edad Media, fue el análisis de los fenómenos sujetos al cambio y al movimiento. *"Se preguntaban por qué los planetas brillan, por qué el viento sopla, por qué se forma el arco iris, por qué la lluvia cae, mientras que el fuego sube. Trataban de encontrar un modelo de universo que respondiese a estas cuestiones."* (René de Cotret, 1985, p.52).

Los fundamentos filosóficos para dar respuestas los buscan en las ideas de Aristóteles y Platón. Estos dos filósofos buscaban la causa de los cambios cualitativos del movimiento. Pero, mientras que para Platón las matemáticas podían servir para definir la causa, para Aristóteles, física y matemáticas eran bien distintas - las matemáticas eran la ciencia de la cantidad abstracta - y, las causas del cambio, según él, había que buscarlas en las cosas materiales. *"La historia nos va a mostrar que es unificando, fundiendo las dos concepciones, como se van a poner las bases de la noción de función"* (René de Cotret, 1985, p.58)

A partir del siglo XIII, las matemáticas tienden a ocupar un lugar cada vez más importante en las ciencias de la naturaleza, se va poniendo cada vez más en duda la estricta demarcación establecida por Aristóteles entre ellas y las ciencias físicas. Según Crombie (1979), la historia de las ciencias europeas, del s. XII al XVII, puede ser considerada como una penetración progresiva de las matemáticas, junto con el método experimental, en el dominio que se creía pertenecía exclusivamente a las ciencias físicas.

El desarrollo de la noción de función se beneficiará, con aportaciones muy significativas de las escuelas de filosofía natural de Oxford y París. Filósofos, tales como, Grosseteste y Bacon, aseguran que las matemáticas son el principal instrumento para estudiar los fenómenos naturales.

Fenómenos sujetos al cambio, tales como, el calor, la luz, la densidad, la distancia, la velocidad -llamados cualidades o formas, según la terminología de Aristóteles- son estudiados planteándose no sólo por qué suceden los cambios sino fundamentalmente cómo suceden.

> *"En el siglo XIII fueron principalmente las disputas filosóficas las que determinaron los términos de la discusión del movimiento, y esto dió lugar en el siglo XIV a una mayor atención a la formulación matemática y cuantitativa de las leyes del movimiento. Comenzó a dirigirse la atención del* ***por qué*** *al* ***cómo.****"* (Crombie, 1979, p.58)

Las cualidades o formas son fenómenos que pueden poseer muchos grados de intensidad y que, de una forma general, cambian continuamente entre ciertos límites dados. Así, una **forma** era cualquier cantidad o cualidad variable en la naturaleza. La **intensidad** (intensio) o **latitud** de una forma era, el valor numérico que había que asignarle, en relación a otra forma invariable que llamaban **extensión** (extensio) o **longitud** (la distancia, el tiempo, o la cantidad de materia).

La teoría de la **intensidad de formas**, llamada también teoría de las **calculaciones**, y su parte más importante, la cinemática, habían sido desarrolladas en Inglaterra por Heytesbury y Swineshead, siguiendo una orientación *cinemática-aritmética*, mientras que en Francia, donde su principal representante fue Oresme, se desarrollaría también en dirección a la *geometría.*

> *"Así, el movimiento, respecto del cual había sido impotente la geometría griega -concebida estáticamente-, era estudiado por vez primera matemáticamente, conduciendo así a la fundación de la ciencia de la cinemática, esto es, al análisis del movimiento en términos de distancia y tiempo"* (Crombie, 1979, p.85)

Los nuevos métodos de la física matemática fueron desarrollándose en conexion con la idea de relación funcional. *"Existía una concepción sistemática de las variaciones concomitantes entre causa y efecto; expresando el fenómeno que debía ser explicado (la variable dependiente como la llamamos ahora) como una función de las condiciones necesarias y suficientes de su producción (las variables independientes), se puede mostrar exáctamente cómo es-*

tán relacionados los cambios de la primera con los de la segunda." (Crombie, 1979, p.86)

Para que este método fuese eficaz en la práctica, debían hacerse medidas muy sistemáticas, y en el período anterior al s. XVII, éstas fueron muy pocas. *"En el s. XIV la idea de relaciones funcionales fue desarrollada sin medidas efectivas y sólamente en principio"* (Crombie, 1979, p.86)

Se desarrollaron dos métodos principales para expresar las relaciones funcionales. El primero de ellos fue el **"álgebra de palabras"**, utilizado en la Mecánica por Bradwardino de Oxford, en el que se conseguía la generalización empleando letras del alfabeto, en lugar de números, para sustituir a las cantidades variables, mientras que las operaciones de adición, división, multiplicación, etc., realizadas con estas cantidades, se describían con palabras en vez de ser representados con símbolos como en el álgebra actual. El segundo fue a través de un método geométrico por medio de gráficas. Los griegos y los árabes utilizaron algunas veces el álgebra en conexión con la geometría, y la idea de describir la posición de un punto respecto de coordenadas rectangulares fue familiar a los geógrafos y astrónomos desde los tiempos clásicos. La representación gráfica de los grados de la *intensio* de una cualidad respecto de la *extensio*, por medio de coordenadas rectilíneas, se hizo común en Oxford y París ya al principio del s. XIV.

Por su interés, y debido sobre todo a los progresos que se realizaron a partir de ella, nos detendremos en la obra de Oresme (1320, 1382).

A Nicolás Oresme, antes del año 1361, se le ocurrió una idea brillante: ¿por qué no hacer un dibujo o gráfica de la manera en que las cosas varían? Aquí vemos una sugerencia primitiva de lo que ahora llamamos la representación gráfica de funciones. Todo lo que varía, se sepa medir o no, escribía Oresme, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo.

El objetivo de Oresme era representar por una figura las intensidades de una cualidad de una magnitud continua que depende de otra magnitud análoga. Estas intensidades estaban representadas por segmentos. Todo esto lo explica en su tratado "De configurationibus qualitatum et motuum"

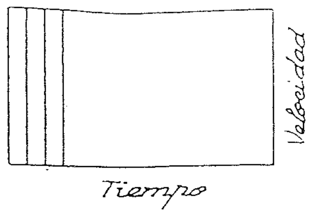
> *"Toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad contínua". (Omnis res mensurabilis exceptis numeris y,aginatur ad modum quantitatis continue).* (Youschevitch, 1976, p.18)

Como observamos en la expresión anterior, Oresme interpretaba la noción de número, como algo diferente a las magnitudes. Aún perduraba en esta época la concepción de número como un conjunto de unidades, análogo al pensamiento griego.

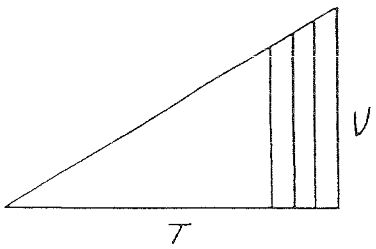
Oresme, siguiendo la praxis habitual, representó la *extensio* por una linea horizontal e hizo la altura de las perpendiculares proporcionales a la *intensio*. Su propósito era representar la *"cantidad de una cualidad"* por medio de una figura geométrica. Afirmó que las propiedades de la figura podían representar propiedades intrínsecas a la misma cualidad.

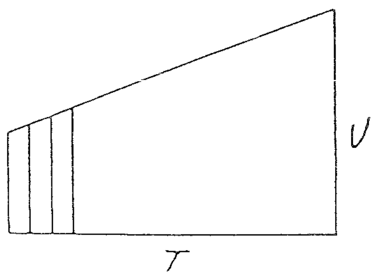
Oresme , según escribe D'hombres, distingue tres tipos de figuras o de configuraciones diferentes: 1) Uniformemente uniformes, 2) Uniformemente deformes y 3) Deformemente deformes. (Dhombres y cols. 1987)

1) Si consideramos la representacion de la velocidad según el tiempo, podemos asociar una figura uniformemente uniforme a una velocidad constante, donde las intensidades son las mismas cualquiera que sea el tiempo que se tome. Oresme dibuja una gráfica velocidad-tiempo en la que los puntos de una recta horizontal representan los sucesivos instantes de tiempo (o longitudes) y, para cada uno de estos instantes, traza un segmento (o latitud) perpendicular a la recta en dicho punto, cuya longitud representa la velocidad en ese instante. En este caso se obtiene un rectángulo:



2) Una figura uniformemente deforme corresponde a una velocidad con aceleración constante. En tal caso, la linea borde es una recta, pero la figura puede ser un triángulo o un trapecio, según la intensidad inicial de la cualidad:





Oresme expresaba esta cualidad diciendo: *"es aquella en la que si tomamos tres puntos de la recta considerada, la razón de la distancia entre el primero y el segundo, a la distancia entre el segundo y el tercero, es como la razón del exceso de la intensidad del primer punto sobre el segundo al exceso del segundo sobre el tercero"* (Youschevikch, 1976, p. 19).

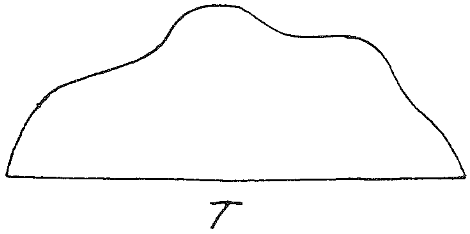
A esta descripción corresponde nuestra ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados (x_1, y_1), (x_2, y_2):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

La linea de intensidad, como se observa en las figuras, está representada por la hipotenusa de un triángulo rectángulo, o por el lado superior inclinado de un cuadrilátero que tenga dos ángulos rectos en la base.

3) Las otras figuras son deformemente deformes. Corresponden, según el ejemplo que estamos siguiendo, a las aceleraciones no constantes de la velocidad. Así, todos los casos en donde la linea borde no sea una recta corresponden a casos deformemente

deformes:



Aunque los términos latitud y longitud que utilizaba Oresme podrían ser semejantes a nuestras ordenadas y abscisas respectivamente, y sus representaciones gráficas se parecen mucho a nuestra geometría analítica, sin embargo, *"La longitud horizontal de Oresme no era estrictamente equivalente a la abscisa de la geometría analítica cartesiana; no estaba interesado en describir la posición de los puntos respecto de coordenadas rectilíneas, sino en la figura misma. En su obra no hay asociación sistemática de una relación algebraica con una representación gráfica, en la que la ecuación de dos variables determina la curva específica formada por valores variables simultáneamente de longitud y latitud, y viceversa. Sin embargo, su obra fue un paso adelante hacia la invención de la geometría analítica y hacia la introducción en la Geometría de la idea de movimiento de la que había carecido la matemática griega"* (Crombie, 1979, p.89). Podemos decir, no obstante que, fue capaz de captar el principio esencial de que una función de una variable se puede representar por una curva.

Observamos, que las representaciones de Oresme fueron más cualitativas que cuantitativas. No las podemos considerar como la expresión de una dependencia en el sentido actual, ello sería posible si nos centraramos en la linea superior o *"de intensidades"* o como tal, en su derivada, es decir, en la forma de la variación, pero analizando el trabajo de Oresme se ve como esta linea no aparece aislada sino que el fenómeno se representa a través de toda la figura, por su forma, (rectángulo, triángulo, trapecio) y por la superficie que queda bajo la curva, es decir por la integral de la curva.

Además, las relaciones funcionales no estaban dadas de forma analítica. Sin descripciones analíticas simultáneas, las representaciones gráficas, no podían ser usadas apropiadamente para explicar los fenómenos físicos. *"Una desproporción manifiesta se desarrolla entre el alto nivel de especulaciones abstractas teóricas y la fiabilidad de las herramientas matemáticas de la época"* (Youschevitck, 1976, p.22). No obstante, algunos historiadores creen que se anticipó a Descartes en la invención de la Geometría analítica. *"Podemos decir que Oresme ha tallado el árbol del bosque que permitiría más tarde a Descartes y a Galileo confeccionar la rueda"* (René de Cotret, 1985, p.73)

3.2.3. Siglos XV y XVI: el desarrollo de la notación algebraica

Durante los siglos XV - XVI no se introdujeron en las Matemáticas, al parecer, ideas brillantes, grandes descubrimientos, transformaciones radicales. A este período lo denominan algunos historiadores "siglos auxiliares" en las Matemáticas. En él se distinguen dos direcciones fundamentales de desarrollo: un perfeccionamiento serio del simbolismo algebraico y la formación definitiva de la trigonometría como una rama particular.

Las dos direcciones señaladas anteriormente van a beneficiar al desarrollo del concepto de función, la primera respecto a la simbolización y la segunda respecto al estudio de las funciones trigonométricas.

Los adelantos en la notación contribuyeron a desarrollar la formulación y la expresión de lo que hoy en día consideramos "variable" en una función o "incógnita" en una ecuación. Se elaboraron sistemas de símbolos muy cómodos para todas las operaciones matemáticas, perfeccionando así, las notaciones sincopadas debidas a Diofanto (250 d.C.) - "padre del Algebra"- y a Brahmagupta (589 d.C.)

Los éxitos en trigonometría fueron consecuencia del desarrollo de la astronomía heredada de la Grecia antigua y de la ciencia árabe posterior. En el siglo XV, cuando se hicieron posibles las navegaciones lejanas - descubrimiento de América (1492), primer viaje marítimo alrededor de Africa (1492) y alrededor del mundo (1519) - creció bruscamente el interés por la astronomía.

En el año 1461, el matemático alemán Müller (1436 - 1476), más conocido como Regiomontano, escribió la obra "Cinco libros sobre triángulos de cualquier tipo", en la cual la trigonometría fue separada de la astronomía y tratada como una ciencia independiente de las Matemáticas. Confeccionó múltiples tablas de funciones trigonométricas, destacándose las que, recibirían en el siglo XVII la denominación de tangente y cotangente. Según Valirón (1976, p. 165) está fuera de duda que, estos hábiles calculistas matemáticos, tenían una clara idea de lo que nosotros llamamos continuidad de funciones trigonométricas, ya que era muy alto el grado de aproximación que tenían los valores suministrados por sus tablas.

Otro gran matemático de esta época fue Galileo (1564 - 1642). La gran contribución de Galileo a la evolución del concepto de función fue su empeño en buscar los resultados y las relaciones que provienen de la experiencia más que las que provienen sólo de la abstracción. En esto reside su diferencia con Oresme, para quien la teoría pura, exenta de experiencia, era suficiente. Para Galileo, la experimentación estaba facilitada por los nuevos instrumentos de medida y así introdujo aspectos cuantitativos en campos en los cuales no se podía hablar antes más que de forma cualitativa, por ejemplo, el calor y el frio. A diferencia de Oresme, los gráficos de Galileo, proceden de la experiencia y de la medida. Las relaciones de causa efecto están expresadas de forma cuantitativa verificable.

El principal campo de estudio de Galileo fue el movimiento, y en consecuencia, la velocidad, la aceleración y la distancia recorrida. Busca relacionar estos diferentes conceptos con la ayuda de leyes que están inspiradas por la experiencia y la observación. Efectúa muchas medidas, realiza una y otra vez sus experiencias a fin de obtener resultados lo más exactos y "verdaderos" posibles. Sin embargo, formulando sus leyes volvió al viejo estilo de las proporciones: *"Si dos cuerpos están en movimiento uniforme entonces la razón de sus velocidades es igual a la razón de las trayectorias y a la razón inversa de los tiempos"*. Las expresaba siempre de forma homogénea, es decir, e:e'= t:t', en lugar de e:t = e':t', expresión que para nosotros es equivalente y permite poner de manifiesto la idea de velocidad constante que caracteriza a dicho movimiento. No obstante, esta insistencia de Galileo por estudiar los movimientos de forma cuantitativa, por medio de la experimentación, ha contribuido enormemente, según René de Cotret, a la evolución de la noción de función. Tuvo el deseo de relacionar de forma funcional las causas y los efectos, y esta necesidad fue un factor esencial en la concepción de la variable dependiente. (R. de Cotret, 1988, p. 13).

A finales del s. XVI surge la noción de logaritmo. En su *Triparty* (1484), Chuquet estudió simultáneamente la progresión aritmética 1, 2, 3, 4, ..., n, ...y la progresión geométrica a, a^2, a^3, a^4,...., a^n,..., observando que si hacía corresponder los términos de igual rango de estas progresiones, la suma de dos números de la progresión aritmética coincidía con el producto de los dos números correspondientes de la progresión geométrica. Completada por Stiefel en 1544, la observación de Chuquet condujo a la definición de los logaritmos. Mediante estos trabajos se iría gestando la idea mucho más moderna de funciones definidas directamente por una correspondencia determinada entre la variable independiente y la dependiente.

Neper procedió, para la introducción de los logaritmos, de modo diferente, comparó dos movimientos, uno uniforme y otro tal, que su velocidad se supone proporcional a su distancia a un punto fijo. Construyó la primera tabla de logaritmos (Edimburgo, 1614), utilizando para ello, progresiones engendradas por *fluxión*, es decir, por movimiento continuo. Esta idea de introducir los logaritmos mediante la comparación de movimientos muestra, por una parte, un profundo sentido de la continuidad y, por otra, la estrecha relación que existía, de nuevo, entre número y magnitud.

3.2.4. Siglo XVII. Introducción de la representación analítica

Según Youschkevitch (1976) el desarrollo de la teoría de funciones se basó fundamentalmente en tres pilares: el crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos, la creación del álgebra simbólico-literal, y la extensión del concepto de número (a finales del s.XVI abarcaba no sólo el campo de los reales sino de los imaginarios y de los complejos). Por otra parte, a principios del s.XVII, comienza a surgir una nueva concepción de las leyes cuantitativas de la naturaleza y esto incidirá notablemente en la evolución de la noción de función.

El poderoso instrumento algebraico permitió a Fermat (1601 - 1665) y a Descartes (1586 - 1650) el descubrimiento del mundo de la "representación analítica". Comenzó a formarse la geometría analítica como un método de expresión de las relaciones numéricas de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de coordenadas.

> "*Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una linea curva*" (Descartes, cit. por Boyer, 1986, p.437)

Según Boyer, esta proposición constituye uno de los enunciados más significativos de la historia de las Matemáticas. En efecto, introduce no sólo la geometría analítica, sino también la idea de variable algebraica.

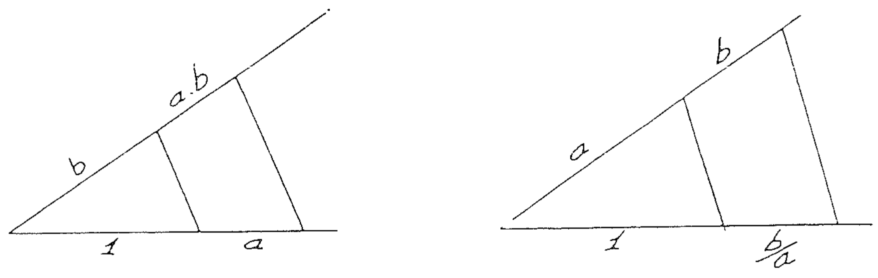
La importancia del método utilizado por Descartes y Fermat proviene del hecho de permitir traducir cualquier problema de geometría plana en un problema algebraico equivalente. "*Este fue el primer puente entre dos áreas diferentes de las matemáticas*". (Diudonné, 1989, p.79). El hecho de que las rectas, los círculos y las cónicas de un plano se pudieran definir por ecuaciones de la forma P(x,y) = 0, donde P es un polinomio con coeficientes reales, de primer o de segundo grado, condujo de modo natural a los matemáticos hacia el estudio de curvas con ecuaciones de este tipo, pero sin ninguna restricción en el grado. Así nació una nueva rama de las matemáticas, la geometría analítica. Además, la tarea de demostrar un teorema en geometría se cambia hábilmente por la de demostrar un teorema correspondiente en Algebra o en Análisis. Pero el método es aún más profundo: alcanzar un resultado algebraico o analítico puede conducir al descubrimiento de un resultado geométrico nuevo e insospechado. Por tanto, "*la Geometría analítica resulta ser un método notablemente fértil, tanto para resolver problemas como para descubrir nuevos resultados en Geometría*" (Eves, 1969, p.2)

> "*El método de las coordenadas constituye también el fundamento de los otros dos grandes progresos realizados en el s. XVII: la introducción de la noción de función y el cálculo infinitesimal*" (Diudonné, 1989, p.80)

La teoría de funciones ha sacado un enorme partido de la obra de Descartes, aunque según Boyer (1986), la idea de "forma" o "función" no pareció jugar ningún papel entre las motivaciones que condujeron a la geometría cartesiana. En este sentido, las coordenadas de Oresme están más próximas, en su motivación, al punto de vista moderno. Oresme representaba una ley trazando el gráfico de la función correspondiente, y la curva obtenida ilustraba geométricamente la relación de dependencia entre las dos variables. A Descartes no le preocupaban los lugares de puntos que satisfacen una ecuación dada, sino la posibilidad de construir estos puntos.

En el tercer apéndice de su libro "*Discours de la métode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences*", Descartes comienza con una explicación de algunos de los principios de la Geometría analítica demostrando un verdadero adelanto respecto de los matemáticos griegos. Para éstos, según dijimos anteriormente, una variable correspondía a la longitud de un segmento rectilíneo, el producto de dos variables al área de un rectángulo y el producto de tres variables al volumen de un paralelepípedo rectangular. Según Eves (1969), los griegos no fueron más lejos. Por el contrario, para Descartes, x^2 no sugería un área, sino más bien el cuarto término de la proporción $1:x =$

$x:x^2$ y, como tal, puede representarse por un segmento de recta que se construye fácilmente cuando se conoce x. Utilizando un segmento unidad se puede, de esta forma, representar cualquier potencia de una variable por un segmento de recta, pudiéndose construir este segmento con herramientas euclidianas. Con este concepto aritmético de la geometría, Descartes, en *"La Geometrie"*, toma **x** en un eje dado y después una longitud **y** que forma un determinado ángulo con dicho eje, tratando así de determinar puntos cuyas **x** e **y** satisfagan una relación dada.



Relacionando una curva plana algebraica con una ecuación entre las coordenadas de sus puntos, (las coordenadas eran consideradas de nuevo como segmentos de recta) Descartes escribía:

> *"Tomando sucesivamente infinitas diversas magnitudes para la linea **x**, encontraremos también infinitas para la linea **y**, y así tendremos una infinidad de diversos puntos por medio de los cuales describiremos la linea curva pedida"* (Youschkevits, 1976, p. 25)

Según Youschkevits, es aquí donde por primera vez, y, de una forma completamente clara, se sostiene la idea de que una ecuación en **x** e **y** es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que, permite el cálculo de valores de una de ellas correspondiente a los valores dados de la otra.

Con Descartes, es, con quien aparece claramente la ex-

presión de dependencia general entre dos magnitudes variables" (René de Cotret, 1985, p.76)

La introducción de funciones bajo forma de ecuaciones tuvo, según Youschevits (1976), el efecto de una revolución en el desarrollo de las matemáticas. La utilización de expresiones analíticas junto con las reglas para operar con ellas conferirá al estudio de funciones un status de verdadero cálculo, abriendo así horizontes enteramente nuevos a la Matemática.

Según Sierpinska (1989b), el desarrollo de la notación simbólica y de la resolución de ecuaciones fue tan significativo que, por medio de él, se fue superando el obstáculo epistemológico de la diferenciación existente entre números y magnitudes. Las letras usadas en Algebra van haciendo la noción de magnitud cada vez más abstracta, así para los matemáticos, el hacer una distinción entre magnitudes y proporciones, por una parte, y, números e igualdades, por otra, está cada vez menos justificada. No obstante, el Algebra, tan útil para vencer algunos obstáculos epistemológicos, trajo consigo otros. En el s. XVII se aprecia una fuerte creencia en el poder de las operaciones formales de las expresiones algebraicas, esto favoreció que se creara entre los científicos una actitud hacia las Matemáticas: *"Lo principal en Matemáticas es proveerse de un Cálculo poderoso, de un conjunto de algoritmos que capaciten a los científicos para resolver sus problemas"*. (Sierpinska, 1989b, p.3). Este encantamiento con el Algebra podría ser un obstáculo para el desarrollo del pensamiento funcional en Matemáticas, ya que se llegó a pensar que las únicas relaciones dignas de estudio eran aquellas que pueden ser descritas por medio de expresiones algebraicas y ecuaciones.

Proceso de creación de las matemáticas variables

La metrología física juega, en la evolución científica, un papel cada vez más importante. El deseo de precisión en las medidas cuantitativas tales como el calor o la presión, conduce a múltiples experiencias y observaciones, apoyadas en la invención de numerosos instrumentos científicos. Entre las ciencias, la Mecánica, está en el primer plano, y junto a ella, una de sus principales ramas, la Dinámica. El estudio de la relación entre el movimiento curvilineo y las fuerzas que afectan el movimiento era el principal problema de la ciencia. Esto hace que nazca una serie de problemas en el análisis infinitesimal que obtendrán solución a través de respuestas numéricas.

El surgimiento en las Matemáticas de la Geometría Analítica aligeró la formación del análisis infinitesimal. Se convirtió en un elemento imprescindible para la construcción de la Mecánica de Newton, Lagrange y Euler. En las Matemáticas del s. XVII, este nacimiento significó la aparición de las primeras posibilidades para la creación del análisis de las variables.

El nacimiento del Análisis Infinitesimal fue la culminación de un largo proceso," *cuya esencia matemática interna consistió en la acumulación y asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial e integral y la teoría de series"* (Ribnicov, p.167). Para el desarrollo de este proceso se habían formado hacia finales del s. XVII las premisas esenciales: existencia del álgebra, la introducción en las matemáticas de la variable y del método de las coordenadas, y, la asimilación de las ideas infinitesimales de los antiguos, especialmente de Arquímedes. "*Las causas que motivaron este proceso fueron los problemas de la mecánica, la astronomía y la física. Estas ciencias no sólo planteaban a las matemáticas problemas, sino que la enriquecian con sus representaciones de magnitudes contínuas y movimientos contínuos y, sobre todo, con la esencia y forma de las dependencias funcionales. En una estrecha interacción de las matemáticas y las ciencias contiguas se elaboraron los métodos infinitesimales que son la base de las matemáticas variables"*. (Ribnikov, 1974, p.167)

La primera etapa en la existencia del análisis fue la formación del cálculo diferencial e integral. Este último surgió como una parte independiente de las matemáticas, casi simultánemente de dos modos diferentes: en la teoría de las fluxiones de Newton y sus sucesores ingleses, y en la forma del cálculo de los diferenciales de Leibniz.

En su origen, el Cálculo infinitesimal apeló también a consideraciones geométricas o mecánicas. Los métodos del cálculo infinitesimal fueron creados principalmente para la resolución de problemas de mecánica y de problemas ligados a la geometría.

Según Brunet (1976, p.258), Newton no concedía a las Matemáticas más que un valor instrumental. Con esta concepción instrumental, creía que los cálculos deben servir, sobre todo, para la resolución de problemas concretos; lejos de constituir un fin en sí mismos, no son más que un medio práctico de encerrar, en fórmulas precisas y concisas, los datos con los cuales trabaja la mente, de hacerlos más manejables y de llegar así a resultados más claros.

El cálculo infinitesimal se presenta en la obra de Newton bajo dos formas equivalentes (Brunet, 1976, p. 264). Una de ellas mediante el método que él llama de *las primeras y últimas razones*, de las cantidades que nacen y se desvanecen, (que no es otro que el de los límites), y el llamado *método de las fluxiones.*

El principio en el cual basa Newton su método de fluxiones es el siguiente:

> *"No considero las magnitudes matemáticas como formadas por partes, por pequeñas que sean, sino como descritas por un movimiento contínuo. Las lineas son descritas y engendradas, no por yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de puntos; las superficies por el movimiento de lineas; los sólidos por el movimiento de superficies; los ángulos por la rotación de sus lados; los tiempos por un fluir constante. Considerando, pues, que las magnitudes que crecen en tiempos iguales son mayores o menores, según que crezcan con mayor o menor velocidad, busqué un método para determinar las magnitudes por las velocidades de los movimientos o crecimientos que las engendran; y llamando fluxiones a las velocidades de estos movimientos o crecimientos, mientras que las magnitudes engendradas toman el nombre de fluentes, dí con el método de las fluxiones".* (Newton, cit. por Brunet, 1976 p.265).

En una parte de los *Principios*, dedicada al método de las fluxiones, Newton afirma que ha "mezclado" este método con el de las series infinitas (desarrollos en serie por medio de expresiones algebraicas convergentes). La idea sobre la cual se basa es la de aproximación. Este método de "aproximación", junto con el de "interpolación" (método por el cual, una curva, por complicada que sea, siempre puede intercalarse entre dos curvas más simples, cuyo conocimiento exacto permitirá calcular aproximadamente la curva buscada) contribuyeron de manera directa a la creación del cálculo infinitesimal, y eran esenciales para el pensamiento newtoniano.

La **concepción mecanicista** está evidentemente presente en la invención del Cálculo diferencial. Newton, como Barrow su maestro, elige el tiempo como noción universal e interpreta las variables dependientes como cantidades que transcurren de forma continua y poseen una velocidad de cambio. En su terminología, la función es una fluente, es decir, una cantidad que transcurre en el tiempo, la derivada es la velocidad o fluxión, y sirve para estudiar las variaciones de la fluente.

Leibniz, que dió en 1675 la definición y las reglas del Cálculo Diferencial, se situó, ante todo, bajo una **concepción geométrica**; consideró siempre elementos geométricos ligados a una curva. Describe la diferencial (dy) de una ordenada de una curva cualquiera como un segmento cuya relación a dx, es igual a la relación que existe entre la ordenada y la subtangente,

$$dy/dx = y/S_t$$

Expresó la idea general de dependencia funcional, introduciendo el término "función". La palabra función aparece por primera vez en los manuscritos de Leibniz en 1673 (*Methodus tangentium inversa, seu de fonctionibus*). Pero, en un principio, Leibniz no utiliza el término función para designar la relación formal entre la ordenada de un punto de una curva y su abscisa, en el sentido que le dan los matemáticos actuales, sino más bien, en el sentido corriente que describe la función de un órgano en un organismo, o en una máquina. "In figura functionem facere" significaba para él, por ejemplo: tener un punto de contacto con la curva, ser perpendicular a la curva, considerar su sub-tangente, su sub-normal, etc, (Youschekevitch, 1976)

Más tarde, en sus manuscritos la noción de función se identificará con ciertas longitudes tales como abscisas, ordenadas, tangentes, normales, etc, asociadas con la posición de un punto en una curva. Este mismo sentido es también usado por Jean Bernoulli (1694) en toda su obra. Según Youschevitch, la correspondencia mantenida por Leibniz y Bernoulli, muestra que, la falta de un término general para representar las cantidades arbitrarias que dependen de una variable, va a conducir bien pronto al uso de la palabra función en el sentido de una expresión analítica.

Debemos señalar la constante tendencia, tanto en el pensamiento newtoniano, como en general, en el de los grandes matemáticos de esta época, a rechazar todo tipo de explicaciones más o menos teñidas de metafísica o que implicasen suposiciones arbitrarias o gratuitas. Newton, la imposibilidad de traducción en formulas, la interpretaba como un hecho desfavorable, mientras que, se mostraba satisfecho con cualquier concepción que, expresada en fórmulas, permitiese abordar lo real de manera eficaz.

> "*Esta preocupación constante por lo real, entendida en el sentido físico del término, le hizo tomar una actitud que podría calificarse de pragmática*" (Brunet, 1976, p.260)

La maravillosa eficacia de los cálculos formales de las Matemáticas, se constituyó en un obstáculo epistemológico para el desarrollo de la noción de función, ya que favoreció el desarrollo de una filosofía pragmática de las matemáticas:

> "*Se promovió, principalmente una actitud hacia las matemáticas, según la cual, lo principal de las matemáticas es proveerse de un Cálculo poderoso, un conjunto de algoritmos que capaciten a los científicos para resol-*

ver problemas" (Sierpinska, 1989b, p.13)

Esta filosofía justificó una disgregación de la validación en Matemáticas y retardó la justificación de las nociones usadas intuitivamente como herramientas en la resolución de problemas. Cavalieri decía que *"el rigor era la ocupación de filósofos no de los matemáticos"*.

Las funciones consideradas por Descartes en su Geometría eran sobre todo funciones algebraicas definidas por curvas geometricas simples; lo mismo que aquellas a las cuales Fermat aplicó sus procedimientos en la misma época.

Después de Descartes surgió la idea de que los métodos de la geometría analítica eran válidos no solamente para todas las funciones elementales - polinomios, fracciones racionales, funciones trigonométricas y sus inversas, - sino que se podían aplicar también a las funciones algebraicas generales y a las combinaciones, en número finito, de estas funciones. Según Valiron, en éste período, una función algebraica de **x** es considerada como la función $y(x)$ obtenida al resolver por **y** la ecuación $P(x,y)=0$, donde $P(x,y)$ es un polinomio en **x** y en **y**. Toda función considerada por Descartes era representable geométricamente en los ejes coordenados OX y OY. *"La determinación práctica de la ordenada **y**, dada la abscisa **x**, introdujo el concepto de aproximación indefinida de los números definidos por ciertas fórmulas algebraicas.....El concepto aritmético de convergencia de una sucesión infinita de números hacia un número conocido fue discernido por Wallis (1655). Newton, Leibniz, y Jean Bernoulli introdujeron y utilizaron algunas series, pero fue en el s. XVIII cuando muchos analistas emplearon con gran habilidad las sucesiones y las series infinitas, admitiendo la existencia del límite cuando la serie converge, pero omitiendo a menudo demostrar esta convergencia. Hubo que esperar hasta comienzos del s.XIX para ver reaparecer el rigor en estas cuestiones."* (Valiron, 1976, p.167).

Estos planteamientos fueron fundamentales para el nacimiento y posterior desarrollo del concepto de número real y, en consecuencia, para la elaboración de la Teoría de Funciones.

3.2.5. SIGLO XVIII: EL CONCEPTO DE FUNCION SE CONSIDERA CENTRAL EN LAS MATEMATICAS

Desde finales del s. XVII, con Leibniz y Jean Bernoulli el concepto de función se desprende de muchas consideraciones accesorias y toma una forma analítica que, si bien, permanece vaga en los escritos de Bernoulli, se precisa en gran parte de los de Euler.

No obstante, la primera consideración de una función como expresión analítica aparecía en un artículo de Jean Bernoulli en 1718:

> "*Llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes*". (Bernoulli, cit. por Boyer, 1986, p. 531)

En este mismo artículo Bernoulli propone la letra griega φ para designar la "*caracteristica*" de una función (término debido a Leibniz), escribiendo todavía el argumento sin paréntesis: φ x.

Como vemos en la definición, Bernoulli no explicita el modo de constituirse las funciones a partir de la variable independiente, sin embargo, según afirman la mayoría de los historiadores, en esta época se pensaba en las funciones como expresiones analíticas. Esto está en relación con la tendencia del análisis infinitesimal, que aún conservando,e, incluso, reforzando sus relaciones con la geometría, la mecánica y la física, durante todo el s.XVIII, se va convirtiendo en una disciplina científica cada vez más inmersa en ella misma y en sus propios principios.

> "*Todos los conceptos iniciales del cálculo pierden gradualmente su caparazón geométrico y mecánico, tomando una formulación aritmética o algebraica.*" (Youschkevitch, 1976, p.35)

La idea de que el análisis matemático es una ciencia general de las variables y de sus funciones, parece ser debida a Euler, quien así lo escribía en el prefacio de su obra *Introductio in analysis infinitorum*, publicada en 1748. El proceso por el cual, el análisis matemático, se va a constituir lógicamente como una *disciplina autónoma* va a llevarse a cabo durante bastante tiempo, hasta culminar en el s.XIX con la aritmetización del mismo.

El desarrollo posterior del concepto de función, según todos los historiadores, se considera obra exclusiva de Euler, alumno de Jean Bernoulli. En el Cap. I del volumne 1^0 de su "*Introductio in analysis infinitorum*", Euler analiza detenidamente el concepto de función. Comienza definiendo las nociones iniciales: *una constante* es una cantidad definida que toma siempre un sólo y único valor, mientras que una *variable* puede tomar valores en un conjunto (o un subconjunto) de números complejos.

> "*Una cantidad variable es una cantidad indeterminada, o si se quiere, una cantidad universal, que comprende todos los valores determinados.....Una cantidad variable comprende todos los valores en ella misma, tanto positivos como negativos, los números enteros y fraccionarios, los racionales, trascendentes e irracionales. No debemos excluir ni el cero ni los números imaginarios*". (Euler, cit. por D'Hombres y col. 1987, 193)

En la definición que propone Euler del concepto de función, sigue la definición dada por su maestro Bernoulli, pero reemplazando el término "*cantidad*" por el de "*expresión analítica*":

> "*Una función de una cantidad variable es* **una expresión analítica** *compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes*" (Euler, cit. por D'hombres y cols. 1987, p. 194)

Para dar a esta definición la mayor posibilidad de generalidad, Euler admitía tanto valores reales como imaginarios del argumento. Una función conceptuada simplemente como una expresión analítica, se forma, según Euler, mediante una clase de operaciones admisibles en la cual entran las operaciones aritméticas, las potencias y raíces. A ellas Euler adjuntó las funciones trascendentes elementales: $\mathbf{e^z}$, $\mathbf{\ln z}$ y las funciones trigonométricas.

La clasificación de las funciones la realiza en correspondencia con la definición de este concepto:

> *"Las funciones se dividen en algebraicas y trascendentes; las primeras están formadas por operaciones algebraicas solamente, y las últimas necesitan para su formación operaciones trascendentes. (..) Las funciones algebraicas se subdividen en racionales e irracionales. En las ultimas la variable está afectada por radicales, y en las primeras no está afectada(..).Las funciones racionales, por último se dividen en enteras y fraccionarias".* (Euler, Introducción al análisis de los infinitos, 1748) (Dhombres, 1987, p. 195)

Euler complementó esta clasificación con la introducción de las funciones uniformes y multiformes, pares e impares, y definió los criterios para su determinación. La clasificación de las funciones realizada por Euler significó una nueva etapa en la evolución de este concepto. Sin embargo, al restringirse en la consideración de función sólo a las expresiones analíticas, todas las funciones las consideraba representadas por una serie de potencias:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \ldots\ldots + a_n z^n + \ldots\ldots$$

(donde z, en términos generales, era complejo)

Más tarde ampliaría la expresión analítica para potencias de la variable z, no sólo enteras, sino cualesquiera, afirmando que *toda función de z puede ser transformada en una expresión de la forma:*

$$f(z) = A z^{\alpha} + B z^{\beta} + C z^{\gamma} + \ldots\ldots$$

(siendo α, β, γ, ...números cualesquiera)

Esta afirmación tan rotunda, no es de extrañar, ya que, en la época de Euler, casi la totalidad de las funciones utilizadas eran analíticas.

En lo que se refiere a la notación del concepto de función, Euler fue el primero en utilizar f(x), tan familiar para nosotros hoy en día. Aparece por primera vez utilizada en los "Comentarii de San Petersburgo" de 1734. Según Boyer, se puede afirmar, sin ninguna duda, que nuestro sistema actual de notaciones matemáticas le debe más a Euler que a ningún otro matemático a lo largo de toda la historia. (Boyer, 1986)

Euler se apoyó en el Cálculo diferencial de Leibniz y en el Método de Fluxiones de Newton, integrándolos en una rama más general de la Matemática que ha recibido desde entonces el nombre de "Análisis", es decir, estudio de los procesos infinitos. Sus trabajos en este campo están recogidos en "Introductio in Analysin infinitorum", este tratado en dos volúmenes (1748), se puede considerar como la piedra angular del nuevo análisis. Desde este momento, la idea de "función", pasó a ser la idea fundamental del análisis.

El matemático francés Lagrange (1736 - 1813), aportó dos grandes tratados sobre funciones: "Teoría de las funciones analíticas" y "Lecciones sobre el Cálculo de las funciones" en las que desarrolla una tentativa muy ambiciosa: dotar al Cálculo de un fundamento sólido reduciéndolo al Algebra. *"El Algebra no es otra cosa que la teoría de funciones. En el Algebra las cantidades buscadas deben ser funciones de cantidades dadas, es decir, expresiones representadas por diferentes operaciones, las cuales es necesario realizar con esas cantidades para obtener los valores buscados".* (Lagrange, cit. por Ribnikov, 1987, p. 237)

En la definición que propone Lagrange de la noción de función, la identifica como **"toda expresión de cálculo"**:

> *"LLamamos función de una o varias cantidades a* **toda expresión de cálculo** *en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes*

que pueden estar mezcladas" (Lagrange, cit. por Grattan-Guinness, 1984, p. 133)

Según Youschevitch (1976, p.40), tanto Lagrange como Euler, como casi todos los matemáticos del s. XVIII consideraban, sin apenas duda, que *toda función del análisis matemático podía ser representada por una serie de términos proporcionales a las potencias reales de la variable independiente,* además Lagrange intentó probar que, generalmente, las potencias que intervienen son de enteros positivos, mientras que las potencias fraccionarias o negativas no pueden intervenir más que para valores aislados particulares del argumento.

Estrechamente ligada a la noción de función estaba la noción de curva, para Euler existían dos tipos de curvas *"continuas"* y *"discontinuas o mixtas"*. Según él, *"continuidad"* significaba inmutabilidad, invariabilidad de la ley de la ecuación determinante de la función en todo el dominio de valores de la variable, mientras que la *"discontinuidad"* de una función significaba un cambio de la ley analítica, la existencia de leyes diferentes sobre dos intervalos, o más, de su dominio (las funciones discontinuas o mixtas corresponderían a nuestras funciones analíticas continuas por partes). Esta terminología estuvo presente en las matemáticas hasta que Bolzano (1817) y Cauchy (1821) aportaron la definición de continuidad admitida hasta la actualidad.

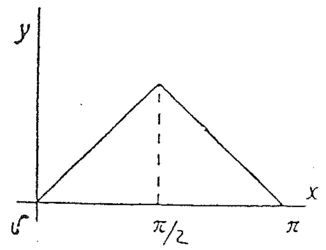
La definición general de función según EULER

El principal impulso para el posterior desarrollo del concepto de función proviene de los trabajos de Euler sobre la física-matemática, el más significativo de todos ellos fue el problema de las vibraciones infinitamente pequeñas de una cuerda finita, homogénea y fijada a sus dos extremidades.

Fue a través de la resolución de este problema práctico como Euler tuvo necesidad de considerar funciones más generales que las funciones analíticas: las "funciones arbitrarias". Así, definía como arbitraria funciones como:

$y = x$ en $[\, 0,\ \pi/2 \,]$

$y = \pi - x$ en $[\, \pi/2,\ \pi \,]$



(Rey Pastor, 1951, p.162)

compuesta por trozos de dos funciones. Esta expresión, cuya representación es poligonal, es precisamente la función inicial que define la vibración de la cuerda sonora al pulsarla por su punto medio. Este tipo de funciones que intervenían en la solución de la ecuación de las cuerdas vibrantes, no estaba necesariamente definida por expresiones analíticas, sino más bien - y en expresión de Euler - *por un gráfico obtenido por el trazo libre de la mano.*

Comienza, pues, Euler a construir, una noción mucho más abstracta y universal de función. Así, aparece en el prefacio de su obra "*Institutiones calculi differentialis*" publicada en 1755:

> "*Si ciertas cantidades dependen de otras cantidades de tal manera que si las otras cambian, estas cantidades cambian también, entonces, tenemos la costumbre de nombrar estas cantidades funciones de estas últimas; esta denominación es la más extensa y contiene en ella misma todas las formas por las cuales una cantidad puede ser determinada por otras. Por consiguiente, si* **x** *designa una cantidad variable, entonces todas las otras cantidades que dependen de* **x**, *no importa de qué manera, son llamadas funciones de* **x**". (Euler, cit. por Youschkevitch, 1976, p.49)

Nos encontramos, pues, ante la presencia de dos nociones de función: la concepción formal de expresión analítica y la concepción más general de correspondencia arbitraria; el problema de la relación entre las dos estaba propuesto y su solución debía esperar a finales del s. XIX.

El impacto de la continuidad en el progreso de la noción de función

Como sabemos, las funciones analíticas podían ser representadas por series enteras, el estudio y el descubrimiento de las principales propiedades de esta clase particular de funciones, va a conducir, en primer lugar, a analizar los problemas relativos a la "continuidad" de estas funciones. Toda la teoría de la continuidad desarrollada en el s.XIX por Cauchy, Riemann y Weierstrass, tiene sus raices en los trabajos de Euler y D'Alembert.

En general, los matemáticos del s. XVIII, no dan ninguna definición de la continuidad (o discontinuidad) de las funciones. Según Youschevits (1976, p.51) no tenían necesidad de tal definición porque la solían expresar de forma descriptiva: Euler describe el comportamiento de la función discontinua

$$X = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

en la vecindad del punto $x=1$ diciendo que, un crecimiento muy pequeño de x produce un cambio extremadamente grande de la función X, pero no utiliza nunca el término continuidad.

No había nada más ambiguo en tiempos de Euler que la expresión *fonctio continua*. Prácticamente, desde Newton y Leibniz, los geómetras trabajaron con expresiones analíticas (algebraicas y trascendentes) a las cuales aplicaban las operaciones de derivación e integración y a las que podían representar por medio de curvas continuas (salvo en ciertos puntos excepcionales). No concebían otras funciones que aquellas que se sabían definir y manejar de esta manera, a las que llamaban *fonctiones continuae*, sin duda, para destacar el hecho de que eran siempre perfectamente determinadas, indefinidamente derivables, desarrollables por medio de una serie de Taylor, integrables y representables mediante una curva algebraica o trascendente. Pero a finales del s. XVIII ya no era posible mantener este empirismo de la continuidad. Se hizo evidente que la noción de correspondencia funcional contenía mucho más de lo que implicaba la expresión analítica que, generalmente, la traducía. Vemos, pues, que la idea sobre la que se centraba la reflexión fue la de *continuidad* y, a través de ella, la noción de *correspondencia funcional*.

Las primeras críticas al concepto de función "mixta" (o discontinua) de Euler las formuló Charles en 1780 mostrando que funciones que están definidas por expresiones analíticas diferentes en regiones diferentes de un intervalo (finito o infinito) pueden ser representadas también por una sola ecuación. Cauchy en 1844 propuso, en este mismo sentido, el siguiente ejemplo:

"*Consideremos la función*

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

sería discontinua en el sentido de Euler, pero al mismo tiempo, también puede ser representada por una sola ecuación $\sqrt{x^2}$ *para todo* $-\infty < x < +\infty$, *de tal modo que sería así "continua"*. De esta manera tan simple Cauchy hizo insostenible la discriminación de Euler entre funciones continuas y mixtas.

La crítica a estas nociones eulerianas se hizo muy fuerte también en el marco de la teoría de las series trigonométricas. En 1822, Fourier, superando las tradiciones existentes en el s. XVIII afirma que una serie trigonométrica puede ser utilizada para representar toda función "mixta" (o no continua en el sentido de Euler). Desarrolla todos sus razonamientos de forma muy detallada en su *"Théorie analytique de la propagation de la chaleur dans les solides"*.

Esta ampliación se hizo necesaria desde que un estudio mucho más profundo de la ecuación de las cuerdas vibrantes condujo a Fourier, a mostrar que ciertas funciones no continuas, pueden ser representadas por medio de una serie trigonométrica convergente de la forma:

$$\sum_{n=0} (a_n \cos nx + b_n \text{ sen } nx)$$

en la cual se pueden determinar los coeficientes a_n y b_n.

> *"La contribución más importante de Fourier, ya clásica hoy en la Matemática, fue la idea, intuida ya por Daniel Bernoulli, de que cualquier función y = f(x) se puede representar por una serie trigonométrica, serie que conocemos hoy con el nombre de serie de Fourier"* (Boyer, 1968, p. 686)

Las representaciones por medio de tales series permiten un grado de generalidad mucho mayor, en cuanto al tipo de funciones a las que se puede aplicar, que el que permite la serie de Taylor. Incluso si hay muchos puntos en los que no exista la derivada o en los que la función no sea continua, la función puede tener un desarrollo en serie de Fourier. Pero este resultado, no se limitaba sólamente a explotar nuevos métodos de cálculo, sino que introducía en el análisis una idea general nueva: *el desarrollo en serie trigonométrica permite representar una clase más general de funciones.* Las funciones ya no necesitaban ser de tan "buen comportamiento" en su forma como las que los matemáticos habian manejado hasta entonces. Sin embargo, con esto aparecía un problema nuevo: ¿en qué condiciones es convergente la serie trigonométrica asociada a una función dada?

Pero la respuesta a este interrogante implica, según expresión de Dirichlet, *"la sustitución de las ideas al cálculo"*, y, ante todo, una definición de la correspondencia funcional independiente de toda forma de expresión analítica.

3.2.6. SIGLO XIX: LA IDEA DE CORRESPONDENCIA ARBITRARIA

Al considerar el concepto de función como la idea principal del nuevo análisis, se fueron creando las condiciones necesarias para el tratamiento de las funciones como correspondencias de tipo muy general.

Así, encontramos en el "Curso de Análisis Algebraico" de Cauchy (1827) la siguiente definición: *"Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable".* (Cauchy, cit. por Youschkevitch, 1976, p. 58)

Lobachevsky, en el año 1834, afirmó: *"El concepto general exige llamar función de x a un número, el cual se da para cada x y paulatinamente varía junto con x. El valor de la función puede estar dado por una expresión analítica, o por una condición, es decir, la dependencia puede existir y quedarse desconocida".* (Lobachevsky cit. por Ribnikov, 1987, p. 229)

Dirichlet, propuso análogamente, en 1837, otra definición sumamente amplia y general: *"Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x".* (Dirichlet cit. por Boyer, 1986, p.687). Para mostrar lo arbitraria que podía ser la regla de correspondencia, propuso Dirichlet una función de "muy mal comportamiento": *Sean c y d dos números reales distintos; cuando x sea racional sea y=c, y cuando x es irracional sea y=d.* Esta función es tan patológica que es discontinua para todos los valores de x.

Más tarde, en Riemann (1858) encontramos la siguiente definición: "*Se dirá que y es función de x si a todo valor bien determinado de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que une a* **x** *y a* **y**". (Riemann cit. por Desanti, 1976, p. 192)

Como vemos, para establecer con toda generalidad y con todo rigor, las propiedades relativas a las funciones, no habrá que hacer intervenir en un razonamiento concerniente a estas propiedades la forma particular de expresión, algebraica o trascendente, por la cual se expresa generalmente una función. Con esto se generaliza también el concepto de curva; las curvas *"mecánicas"* (no geométricas, es decir, aquellas que no tenían una determinada expresión algebraica, pero se podían describir recurriendo al movimiento) se integran al dominio del análisis. Simultáneamente, se libera al concepto de función de la exclusividad de la intuición geométrica.

> *"...el nuevo Cálculo dejaría de chocar con los obstáculos del realismo geométrico de la extensión y del realismo aritmético del número natural."* (Desanti, 1976, p. 190)

De ahí la definición rigurosa - totalmente aritmetizada - de la continuidad, debida a Cauchy, en la cual existe ya una fuerte disociación entre la definición y la intuición geométrica. Este descubrimiento no revela solamente la autonomía de las técnicas del análisis con respecto a la geometría, sino que muestra también hasta qué punto el espíritu de rigor, aportado por Cauchy, introduce los riesgos de una nueva crisis. En adelante, el análisis carece del apoyo de la intuición geométrica, debe fundar en sí mismo sus propios principios y delimitar por sus propios medios su dominio; si la intuición geométrica ya no basta para evitar el absurdo, ¿dónde hallar un criterio adecuado de claridad y racionalidad?. De esta crisis debía surgir la teoría de conjuntos.

Tenemos que esperar hasta el año 1872, en el cual, y casi simultáneamente, aparece una serie de trabajos muy significativos. En la revista "Mathematische Annalen" fue publicado el primero de los trabajos de Cantor sobre los fundamentos de la aritmética. Se publicó, asimismo, la obra de Dedekind "Continuidad y números irracionales". Aparecieron también trabajos sobre este mismo tema de Heine. Todas estas obras perseguian un único objetivo: formular una teoría rigurosa del número real.

"De este modo, a través del largo rodeo de la teoría de funciones, el análisis vuelve a su punto de partida: el descubrimiento de los irracionales. Lo que a los pitagóricos les parecía un escándalo se presenta en adelante como la justificación esencial de la operación constitutiva del análisis: el paso al límite" (Desanti, 1976, p. 197)

Para lograr estos avances fue necesario, como hemos visto, eludir las falsas evidencias de la intuición y las limitaciones de la expresión analítica. Aún quedaba por construir la teoría de conjuntos como medio de análisis del infinito. El desarrollo de la teoría de funciones de Weiertrass y la teoría de conjuntos de Cantor se produjo en los últimos años del siglo XIX en un ambiente de aguda crítica y lucha. Sin embargo, la teoría de conjuntos ejerció una influencia enorme en el desarrollo de las matemáticas. Sirvió de base a la actual teoría de funciones de variable real, a la topología, al álgebra, al análisis funcional, etc.

3.2.7. SIGLO XX: EL CONCEPTO DE FUNCION COMO TERNA

Según escribe Spivak: *"El concepto más importante de las Matemáticas es, sin dudarlo, el de función. En casi todas las ramas de la Matemática actual, la investigación se centra en el estudio de funciones. No ha de sorprender, por lo tanto, que el concepto de función haya llegado a definirse con una gran generalidad"* (Spivak, 1978, V.1, p. 47).

Las definiciones actuales del concepto de función se basan formalmente en la noción general de función introducida por Dirichlet, pero en su construcción, hay definiciones en las que permanece el caracter de <u>correspondencia</u> <u>unívoca</u> (aplicación) y se mantiene explícita la idea de asignación entre variables; mientras que en otras, en un intento de mayor precisión y rigor matemáticos, se introduce a través de la noción de <u>grafo</u> (pares de elementos <u>relacionados</u>).

Según Dieudonné *"en la actualidad se prefiere considerar el concepto de función como* aplicación*"* (1989, p. 187). En este sentido lo encontramos en muchos textos matemáticos, veamos por ejemplo el siguiente de nivel universitario:

"Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una función f definida en un conjunto X y con valores en Y es una ley mediante la cual se hace corresponder *a cada elemento de X un elemento de Y. Se dice también que f es una* aplicación *de X en Y. Para un elemento genérico $x \in X$ denotaremos habitualmente por f(x) el elemento de Y correspondiente a ese x, y se dirá también que f(x) es el valor de la función f en x, esto se expresa a veces mediante la igualdad $y = f(x)$. Para denotar que f es una aplicación de X en Y, se escribe ordinariamente $f: X \longrightarrow Y$, y a veces también $x \longmapsto f(x)$, notación, esta última, que quiere indicar, más bien la operación de pasar de un elemento cualquiera $x \in X$ a su transformado $f(x) \in Y$. En ocasiones, por emplear un lenguaje geométrico, se habla de transformación de X en Y, en lugar de función o aplicación definida en X y con valores en Y".* (Fernández Viñas, 1976, p.20)

Otros autores, en un intento de formalización y precisión completa de los términos introducidos en la definición, afirman que: *"en la expresión anterior se han utilizado palabras de las que no hemos dado definición matemática; por ejemplo: ¿qué significa hacer corresponder?. Debemos, en consecuencia modificar la definición anterior y reemplazarla por la siguiente:*

Se llama función a la terna *$f = (G, X, Y)$, en donde G, X, Y son conjuntos que verifican las condiciones siguientes:*
1) $G \subseteq X x Y$
2) Para todo $x \in X$ existe un y solo un $y \in Y$, tal que, $(x, y) \in G$, G es la gráfica de la función f.

El único elemento y de Y tal que $(x, y) \in G$ se llama valor de la función f en x, y se utiliza para designarlo $y = f(x)$.

Es evidente entonces que la gráfica G es el conjunto de pares de la forma (x, f(x)) *donde $x \in X$, lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función.*
A X se le denomina conjunto de partida de f y a Y conjunto de

llegada de f." (Godement, 1971, p.63-64)

En esta última definición permanece implícito el caracter de <u>relación</u> <u>binaria</u> con el que se encuentra en otros muchos textos universitarios:

"Una relación F se llama una función cuando

$(x,y) \in F$ y $(x,z) \in F$, *implique* $y = z$

una función es, pues, un conjunto de pares ordenados que tiene la propiedad especial de que siempre que dos pares (x,y) y (x,z) del conjunto tienen el mismo primer elemento, deben siempre tener idéntico el segundo" (Apostol, 1960, I, p. 29)

Respecto al sentido dado a la función en esta definición, nos parece adecuado considerar la opinión de Russell:

"La idea de función es tan importante, y tan a menudo ha sido considerada con referencia exclusiva a los números, que será conveniente llenar nuestras mentes con ejemplos de funciones no numéricas. ...Por muchísimas razones es conveniente identificar la función y la relación, es decir, si y = f(x) es equivalente a xRy, donde R es una relación, es conveniente hablar de R como de la función, ...pero se debe recordar que la idea de funcionalidad es más importante que la de relación" (Russell, 1967, p. 306-307)

Con este sentido de relación es muy frecuente encontrarlo en los textos y trabajos de lógica-matemática. Así, Mosterín (1981, p. 55) considera:

R es una función $\longleftrightarrow \forall\, x,y,z,\ (x,y) \in$ **R y** $(x,z) \in$ **R** $\longrightarrow y=z$

Para completar la visión general que sobre la evolución general del concepto de función hemos desarrollado, nos parece muy interesante incluir las opiniones que Hausdorff (1978, p. 15) nos ofrece:

"El concepto de función es casi tan fundamental y primitivo como el concepto de conjunto. Una relación funcional está formada

por pares de elementos, al igual que un conjunto está formado por elementos individuales.

Los pares ordenados hacen posible la introducción del concepto de función. ...Así, para una función univalente **f(a)** *lo único que cuenta es que para un* **a** *dado,* **f(a)** *debe estar unívocamente determinado por algún criterio definido (dado anteriormente por un conjunto de pares P); es innecesario conocer si este criterio puede ser dado o no en términos de "expresiones analíticas" o bien de otra manera; es también innecesario conocer si en algún caso con los instrumentos que tenemos a nuestra disposición nos permiten o no encontar siempre para un valor de* **a** *la determinación actual de* **f(a)**. *Lo que nosotros hemos dicho aquí sobre el concepto general de función , definido por Dirichlet, podría haber sido dicho sobre el concepto de conjunto de Cantor. El conjunto de los racionales está bien definido, aunque no conozcamos si* π^{π} *pertenece o no a dicho conjunto; la función f(a) que es igual a 1 si a es racional y 0 si a es irracional, está bien definida, aunque no conozcamos el valor de f(* π^{π} *)."*

En esta descripción, clara, precisa y estática ya no hay la menor sugerencia a las cantidades que fluyen engendrando magnitudes variables, ni el menor recurso a puntos moviéndose sobre curvas, ni aparece la vieja y sugestiva idea de variabilidad. Es evidente que la noción primitiva de función era mucho más intuitiva, la actual tiene un alto grado de formalización que la hace mucho más abstracta. Freudenthal, dirá que *"aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático".* (Freudenthal, 1983, p. 497)

3.3. ANALISIS EPISTEMOLOGICO DEL CONCEPTO DE FUNCION.

Un analisis epistemológico del concepto de función, requiere un estudio de su evolución histórica bajo consideraciones que nos aporten conocimientos significativos para la investigación en

Didáctica de la Matemática.

Nosotros hemos realizado este análisis bajo tres aspectos distintos:

- Un estudio de la evolución de su *status matemático* basado en la clasificación que Chevallard (1991) realiza de las nociones matemáticas.

- Una descripción de las concepciones más representativas a través de las cuales se ha desarrollado históricamente la noción de función, apoyándonos fundamentamente en los trabajos de Youshkevitch (1976), Valiron (1976), Brunet (1976), Desanti (1976), D'hombres y cols.(1987), René de Cotret (1988), Sierpinska (1989b).

- Un análisis de los obstáculos epistemológicos basado en las aportaciones de Brousseau (1986) y de Sierpinska (1989a, 1989b, 1992).

3.3.1. STATUS MATEMATICO (GRADO DE EMERGENCIA DEL CONCEPTO)

Teniendo en cuenta los fundamentos teóricos que incluimos en el capítulo 1 (1.3.2), intentamos, en este apartado, poner de manifiesto las diferentes formas bajo las cuales se ha manifestado la noción de función, es decir, su evolución conceptual:

a) La noción de función como objeto protomatemático: Desde la antigüedad, según hemos visto en su desarrollo histórico, el concepto de función se utilizaba de forma implícita en la construcción de tablas numéricas, muy prácticas para los cálculos aritméticos y para la astronomía. El concepto de función se encuentra en estado "protomatemático", al no ser reconocido ni como herramienta, ni como objeto de estudio.

b) La noción de función como objeto paramatemático: En el siglo XIV aparece una incipiente noción de función, incluida en la teoría denominada "Latitud de las formas". Estamos en una época en la que existe un deseo de relacionar las causas con los efectos. Hemos visto, como con Oresme aparece incluso explicitamente la representación gráfica de la variación (de forma cualitativa), aunque sólo para explicar los fenomenos físicos. Esta descomposición del cambio en estados sucesivos nos indica que está abriéndose un camino puramente reflexivo y abstracto. La designación de una característica en cambio por un gráfico representativo constituye una primera etapa en la dirección del dominio del cambio.

La función, como latitud de forma, se constituye ahora en una noción "paramatemática" : Se considera como un instrumento conscientemente utilizado, determinado de un modo específico como "cantidad de intensidad de una cualidad", pero no es tratado como objeto de estudio en si mismo.

En esta misma trayectoria seguirán los trabajos de cinemática de Galileo. Más tarde Newton para proseguir sus estudios de mecánica, denominaría a las diferentes formas del movimiento continuo "fluentes". Leibniz en 1.673 será el que dé por primera vez el nombre de función, a "Las porciones de lineas rectas asociadas a la posición de un punto sobre una curva".

c) La noción de función como objeto matemático: Sería en el s.XVIII, con matemáticos como Bernoulli y Euler cuando la noción de función comenzará, aunque muy primariamente, a ser considerada como un concepto matemático. No sólo es un instrumento para dar solución a múltiples problemas, sino que se va convirtiendo poco a poco en un objeto de estudio.

En esta época el concepto de función comienza a ser central en el desarrollo de las matemáticas. Aparecen los primeros tratados sobre funciones y cambia su papel exclusivamente utilitario que habia desempeñado tanto en la Mecánica como en la propia Matemática, para convertise a su vez en objeto de estudio dando lugar a la creación de una nueva rama, denominada Teoria de Funciones.

El orden de exposición de los principales conceptos del análisis que sigue Euler es muy parecido al que puede figurar hoy en cualquier tratado de analisis: relaciones entre elementos de álgebra y propiedades de los números, estudio de las funciones, de las series, cálculo diferencial e integral y por último aparecen algunas aplicaciones a la geometría, a la mecánica etc. *"Es una auténtica conmoción en la arquitectura del edificio matemático, constituye una ruptura epistemológica en la historía de esta disciplina".* (D'hombres y cols. 1987, p.193)

3.3.2. DIFERENTES CONCEPCIONES ASOCIADAS A LA EVOLUCION HISTORICA DE LA NOCION DE FUNCION

El estudio de las situaciones problemáticas tratadas en los distintos períodos históricos, los invariantes de los que se ha tomado consciencia colectiva y las distintas representaciones simbólicas usadas, nos han permitido describir siete tipos distintos de concepciones colectivas o epistemológicas que describimos a continuación:

CE1. Identificación de ciertas regularidades en fenómenos sujetos al cambio: relación entre cantidades de magnitudes variables

Los fenómenos sujetos al cambio, tales como, el calor, la luz, la distancia, la velocidad, etc, pueden poseer distintos grados de intensidad y cambian continuamente entre ciertos límites dados. Estas magnitudes variables encierran la presencia potencial de medidas. La identificación de los elementos variables en el análisis cuantitativo de todo proceso real de cambio conduciría a la determinación de las variables.

Se establecieron relaciones sistemáticas entre las variaciones de las causas y los efectos. Primero comenzaron a ser cualitativas, para pasar más tarde a ser cuantitativas.

Las tablas numéricas recogidas en los trabajos de numerosos matemáticos, construidas mediante el cálculo de valores cambiantes de diferentes magnitudes dependientes, condujeron a una primera aproximación de ciertas relaciones funcionales. Pasar de la simple tabulación de datos empíricos a la búsqueda de regularidades, implica la existencia de un "cierto instinto de funcionalidad".

Caracterización de la concepción:

Situaciones: Todas las ligadas a los fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas variables.
Invariantes: Establecimiento de regularidades entre las relaciones de causa-efecto.
Representaciones: Medidas de cantidades. Tablas.
Momento histórico: Desde la matemática prehelénica, perdurando largo tiempo.

CE2. Razón o proporción

Históricamente, la herramienta ideal para realizar el análisis cuantitativo de lo real ha sido la proporción. Filósofos y matemáticos trataban de buscar la proporcionalidad como relación privilegiada o "prototipo" entre magnitudes variables. Esta concepción se ha mantenido desde el pensamiento griego y con matemáticos tales como Oresme o Galileo.

Caracterización de la concepción:

Situaciones: Todas las ligadas a las magnitudes físicas y en especial en dominios tales como la Geometría o la Astronomía.
Invariantes: Relaciones de conmensurabilidad entre magnitudes homogéneas.
Representaciones: Las proporciones en principio expresaban *"retóricamente"* las relaciones establecidas (por ej. el teorema de Thales), pasando posteriormente a expresiones tales como

$$a:b :: c:d$$

Momento histórico: Desde la matemática helénica, perdurando con matemáticos tales como Oresme y Galileo.

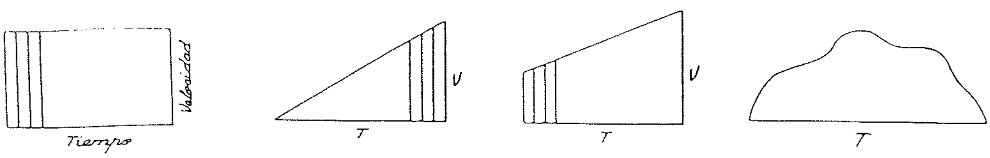
CE3. Gráfica (visión sintética)

Representar la relación de variabilidad entre magnitudes variables por medio de gráficas. Oresme utiliza el grafismo para representar los cambios y así describirlos y compararlos. Utiliza la continuidad de los segmentos, pues no disponía de un continuo numérico para representar el movimiento (p. e. la ausencia de los decimales).

Este tipo de gráficas se obtenían más por consideraciones cualitativas que por cuantitativas, se consideraban como modelos geométricos de las relaciones, y no necesitaban representar muy fielmente dichas relaciones.

Caracterización de la concepción:

Situaciones: Todas las ligadas a las magnitudes físicas: movimiento, luz, calor, etc., en las que se intentaba representar *gráficamente* tanto la variación como las dependencias entre dichas magnitudes.
Invariantes: Proporcionalidad entre magnitudes. Relación de dependencia cualitativa representada por medio de una figura que intenta describir la *cantidad de una determinada cualidad en relación con otra de la cual depende.*
Representaciones: Se usaban términos específicos: *"formas", "latitud", "longitud"*. Se representaba la dependencia por medio de gráficos que adquirían su significado de forma global (sintética).



Momento histórico: Comenzó en las escuelas de Oxford y París en el s. XIV y tuvo su representante más significativo en Oresme.

CE4. Curva (analítico-geométrica)

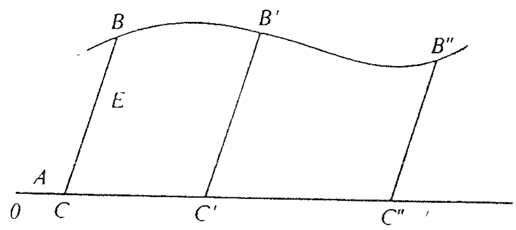
"Tomando sucesivamente infinitas diversas cantidades para la linea **x**, *encontraremos también infinitas para la linea* **y**, *y así, tendremos una infinidad de diversos puntos por medio de los cuales describiremos la linea curva pedida"* . Con esta expresión, se sostiene por primera vez la idea de que una ecuación en x e y es un medio para introducir la dependencia entre dos cantidades variables, relacionándolo asimismo con la noción de curva.

Caracterización de la concepción:

Situaciones: Se trataba de buscar un método de expresión de las relaciones numéricas establecidas entre determinadas propiedades de objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de las *"coordenadas"*. Se establecen al conectar los problemas de dos ramas de la matemática: Geometría y Algebra.

Invariantes: *"Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una linea recta o una linea curva"* (Descartes). - Representación analítica-

Representaciones: Ejes cartesianos, coordenadas, representación algebraica.



Momento histórico: Surgió a través de los trabajos de Descartes y Fermat (s. XVI-XVII) y permanece en la Matemática.

CE5. **Expresión analítica**

El nacimiento del Algebra permite expresar la dependencia entre variables por medio de expresiones analíticas : *Existe una ecuación en x e y que permite expresar la dependencia entre ambas* (Descartes, Fermat). Más tarde Euler la identificará con una expresión analítica, y Lagrange la ampliará a toda expresión de cálculo.

Caracterización de la concepción:

Situaciones: Tanto intramatemáticas como extramatemáticas. Los problemas de la Astronomía y la Física (Mecánica): el estudio del movimiento curvilíneo y de las fuerzas que afectan al movimiento. Los problemas del Cálculo Infinitesimal se intentaron resolver con aproximaciones *"físicas"* - teoría de las <u>fluxiones</u> de Newton-. Se tratan de resolver problemas a través de una profunda interconexión entre las ideas físicas y matemáticas: el método de fluxiones, el <u>desarrollo en series infinitas</u> (basado a su vez en las de aproximación e interpolación) y los aspectos geométrico-representativos ligados a dichas expresiones algebraicas.
Invariantes: Se identifican las cantidades variables con las expresiones analíticas: *"Una* **función de una cantidad** *es una expresión analítica compuesta de cualquier manera que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes".* Pero permanece aún la idea de asignar la variación a las *"cantidades".*

El cambio de la ley analítica o la existencia de leyes diferentes sobre dos intervalos o más de su dominio, para Euler y sus contemporáneos, determinaba una función, no continua que llamarían mixta.
Representaciones: Aparecen términos muy próximos tales como *fluentes* y *fluxiones.* En 1673 Leibniz introduce el término *función* representándolo con $\varphi\, \mathbf{x}$. Euler, más tarde, lo generalizará como una expresión analítica (desarrollo en serie):

$$\varphi\, \mathbf{x} = a_o + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

Momento histórico: Comienza con los estudios de Descartes y Fermat, prosigue con los trabajos mecanicistas y geométricos de Newton y Leibniz (s.XVII) en los inicios del Cálculo Infinitesimal y continúa con los de Bernoulli, Lagrange y Euler (s.XVII - XVIII) creando poco a poco una disciplina autónoma: el Análisis Matemático.

CE6. Correspondencia arbitraria: Aplicación

Al considerar el concepto de función como la idea principal del nuevo análisis, se considera necesario tratarla como una correspondencia de tipo muy general:"*Cada cantidad, el valor de la cual depende de una o varias cantidades, se denomina función de estas últimas, independientemente de que, sepamos, o no, por qué operaciones es necesario atravesar para pasar de estas últimas a la primera.*" (Lacroix)

Características de la concepción:

Situaciones: Continúan surgiendo de las conexiones entre la física y la matemática, siendo muy significativo el problema de la cuerda vibrante, a partir del cual se tendrá necesidad de crear una noción más general de función. Se tratan también los problemas existentes respecto a la continuidad de funciones, llegando a considerar como funciones incluso aquellas de no "*buen comportamiento*".

Invariantes: Se llega a la noción de correspondencia arbitraria: "*Si una variable y está relacionada con otra variable x, de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado <u>un único valor de y</u>, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x*". Permanece aún en esta definición el caracter de asignación entre variables que continuará en su consideración posterior como *aplicación.*

Representaciones: El término función se corresponde con la expresión **f(x)**, o bien con **y**; se representará más tarde a partir de la introducción de la teoría de conjuntos y el estructuralismo boubakista como f:X--->Y, o bien x ⟼f(x). Las representaciones gráficas siguen utilizando los ejes cartesianos, y aparecen unas nuevas representaciones de origen didáctico: los diagramas de Venn.

Momento histórico: Comienza esta consideración desde los últimos trabajos de Euler sobre funciones "*arbitrarias*" (s.XVIII), continúa en el s. XIX con los de Fourier sobre series trigonométricas y se consolida con los trabajos sobre los números reales de Cauchy, Dedekind, Lobachevsky, Riemman ó Dirichlet, entre otros.

CE7: Función como terna f = (F, X, Y)

En un intento de precisión y rigor matemáticos se llega a la determinación de una función como una terna f = (F, X, Y). Una función es, pues, un conjunto de pares ordenados que tiene la propiedad especial de que si, dos pares (x,y) y (x,z) del conjunto XxY, tienen el mismo primer elemento, deben siempre tener idéntico el segundo. Bajo esta consideración el caracter dinámico de asignación entre variables queda oculto, mientras que se pone de relieve una caracterización, mucho más estática, como colección de pares de elementos.

Características de la concepción:

Situaciones: Todas las de variación que deban ser modelizadas funcionalmente, dentro de cualquier dominio científico.

Invariantes:

$f = (A,B,G)$ es una función $\longleftrightarrow G \subseteq A\times B,\ \forall\, x \in A,\ \exists\, y \in B$ tal que $(x,y) \in G$

R es una función $\longleftrightarrow \forall\, x, y, z, (x,y) \in R$ y $(x,z) \in R \longrightarrow y = z$

Representaciones: Las expresadas anteriormente en cuanto a la notación y, en cuanto a las gráficas, se siguen utilizando los ejes cartesianos.

Momento histórico: A partir de la estructuración sistemática y lógica de la teoría de conjuntos, principalmente, cuando ésta se tomó como base y fundamento de toda la matemática. (finales del s.XIX y primeras décadas del s.XX).

3.3.3. DIFERENTES OBSTACULOS ASOCIADOS A LA EVOLUCION HISTORICA DE LA NOCION DE FUNCION

Trataremos, en este apartado de hacer un análisis de los obstáculos epistemológicos más significativos ligados al desarrollo histórico de la noción de función. Para ello, nos basaremos en las aportacions teóricas que figuran en el capítulo 1 (1.6.2)

Obstáculos a nivel de creencias y convicciones:

OB1: Obstáculo de la concepción estática

La idea más primitiva de función estaba contenida en las nociones de cambio y de relación entre magnitudes variables. No obstante, los matemáticos durante mucho tiempo, aferrados a la tradición euclidiana, observaban los entes matemáticos como algo "estático". Consideraban las magnitudes físicas y las proporciones entre ellas como algo diferente a las igualdades estrictamente numéricas. Esta concepción de la "variabilidad" como característica exclusiva de las magnitudes físicas puede considerarse como un claro obstáculo epistemológico para el desarrollo del concepto de función. Estuvo fuertemente arraigada en la mente de los matemáticos y perduró con Oresme, Galileo y Leibniz.

OB2: Obstáculo de la disociación existente entre magnitudes y números

Actualmente asociamos de forma natural a cualquier cantidad de una magnitud, una cierta medida numérica, pero en el pensamiento griego, magnitudes y números eran objetos bien distintos. Los números siempre eran discretos, mientras que las magnitudes eran continuas. Esta profunda disociación condujo a no observar las leyes físicas como funciones matemáticas, y constituyó, en consecuencia un obstáculo epistemológico.

Obstáculos a nivel de esquemas de pensamiento:

OB3: Obstáculo de la razón o proporción

Desde los griegos y hasta el s. XV, la proporción se escribía de forma discursiva y no como una igualdad escrita en forma de fracciones. Galileo, escribía: *"los espacios recorridos por un cuerpo en caida libre son, entre ellos, como el cuadrado del* *tiempo necesario para recorrerlos".* El aspecto funcional de la proporción quedó completamente oculto por su caracter estrictamente escalar. Por ello, se le considera como un obstáculo epistemológico para el desarrollo de la noción de variable y, en consecuencia, para la noción de función.

OB4: Obstáculo de la homogeneidad en las proporciones

La homogeneidad conducía siempre a comparar magnitudes de la misma naturaleza y ésto impedía encontrar, de forma significativa, dependencias entre variables de diferentes magnitudes, germen de toda relación funcional.

OB5: Obstáculo de la concepción geométrica de las variables

En la matemática griega también se fue configurando otro obstáculo con fuerte dependencia de la geometría.

Construyeron un Algebra Geométrica cuyos elementos primarios resultaron ser los segmentos de recta. Con ellos definieron todas las operaciones del cálculo. La suma se interpretaba como la adición de segmentos, la diferencia como la eliminación de una parte del segmento igual al segmento sustraendo. La multiplicación de segmentos condujo a la construcción de una representación bidimensional y el producto de dos segmentos a y b se consideraba un rectángulo con lados a y b. El producto de tres segmentos daba un paralelepípedo, y el producto de un número mayor de factores, en el álgebra geométrica, no podía considerarse. La división resultaba posible sólo bajo la condición de que la dimensión del dividendo fuera mayor que la dimensión del divisor.

El obstáculo creado con esta identificación lo llegarían a superar Descartes y Fermat. Para Descartes, el producto de dos o más variables no se identifica con áreas o volúmenes, sino que establece, de forma implícita, un isomorfismo entre los segmentos y los números reales. La suma, diferencia, producto o cociente de segmentos es siempre otro segmento. El concepto de variable adquiere así otra significación diferente. Se comienza a estudiar las propiedades de los puntos de una curva a través de las relaciones entre las "coordenadas" de estos.

Obstáculos a nivel de conocimiento técnico:

OB6: Obstáculo de la concepción algebraica.

La simbolización algebraica hizo que apareciese otro nuevo obstáculo en el desarrollo del concepto de función . En el siglo XVIII se define : *"Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de alguna manera por esa cantidad variable y números o cantidades constantes".* Se llegó a pensar que las únicas relaciones dignas de estudio eran aquellas que pueden ser descritas por medio de expresiones algebraicas y ecuaciones. Esta fuerte dependencia entre expresión analítica y función se constituye en obstáculo hasta que la idea de correspondencia arbitraria fue surgiendo en la mente de los matemáticos. Pero, para ello, era necesario que surgiesen nuevas herramientas, como la teoria de conjuntos y un desarrollo formal y definitivo de los números reales.

OB7: Obstáculo de la concepción mecánica de curva.

Posteriormente, el desarrollo del concepto de función estaría acompañado de la noción de curva. Pero, en un principio, las curvas no fueron consideradas como gráficos de la relación funcional; sino mas bien, fueron tomadas como trayectorias de puntos en movimiento (curvas "mecánicas"). Esta concepción permaneció en la mente de matemáticos tales como Galileo, Torricelli, Roberbal o Newton. No eran vistas como conjunto de puntos que satisfacen condiciones especificas dadas por la relación funcional.

CAPÍTULO 4

CAPITULO 4

LA FUNCION COMO OBJETO A ENSEÑAR Y COMO OBJETO DE ENSEÑANZA: ANALISIS DE LOS CUESTIONARIOS OFICIALES, LIBROS DE TEXTO Y APUNTES DE LOS ALUMNOS

4.1. INTRODUCCION

De acuerdo con los objetivos de la investigación, descritos en la sección 2.4, en este capítulo nos proponemos analizar cómo "*vive*" el objeto función en nuestro sistema de enseñanza, tomando como indicadores los programas oficiales, manuales usados por los alumnos, así como los apuntes tomados por éstos en las clases.

Este estudio permitirá caracterizar el entramado de relaciones institucionales al objeto función en que se desarrollan las concepciones de los sujetos, las cuales deben ser tenidas en cuenta como posibles variantes explicativas de las inconsistencias y errores de los estudiantes. Asimismo, las concepciones institucionales identificadas pueden ser el origen de obstáculos de tipo didáctico sobre los cuales debería actuarse mediante una correcta planificación de la enseñanza.

El interés de este estudio se pone de manifiesto, además, si se tiene en cuenta que nos permitirá poner al descubierto fenómenos didácticos ligados al proceso de transposición didáctica, de los que se precisa tomar consciencia para su control.

Analizaremos en primer lugar, los cuestionarios actualmente en vigor, y en segundo lugar, los libros de texto y apuntes de clase utilizados por los alumnos cuyas concepciones vamos a estudiar. Este análisis nos permitirá estudiar la progresión legal y lógica de los saberes a enseñar así como la estructuración seguida en la construcción del "*texto del saber*" no sólo por los autores de manuales escolares, sino tal como lo pone en funcionamiento el profesor en su clase.

4.2. LA DESIGNACION DE LOS OBJETOS A ENSEÑAR: PRESENTACION DE LA NOCION DE FUNCION EN LOS CUESTIONARIOS OFICIALES

En primer lugar, estudiaremos como se presenta en los cuestionarios oficiales la noción de función en los niveles de EGB, BUP y COU; posteriormente, realizaremos un análisis exhaustivo de la progresión que determinan de los *"saberes a enseñar"*, así como de la información que facilitan a los profesores, intentando determinar, con todo ello, las características de la primera etapa del proceso de transposición didáctica que realizan los programas oficiales.

Los cambios sufridos en los Cuestionarios y Programas a veces se suelen ver como meros cambios superficiales, pero provocan transformaciones muy profundas que, en numerosas ocasiones, permanecen opacas tanto en los manuales escolares como en el discurso del profesor en el aula.

4.2.1. LA NOCION DE FUNCION EN LOS CUESTIONARIOS OFICIALES

Analizaremos el tratamiento que dan los cuestionarios oficiales a las funciones numéricas, entendiendo por ello el estudio de los aspectos relacionados tanto, con su presentación y diferentes representaciones asociadas, como con sus distintas situaciones de empleo.

Estudiaremos el proceso de adaptación de este objeto matemático a las exigencias fundamentales que precisa todo saber que se desea figure en un sistema de enseñanza, que son las siguientes:

- la exigencia de dividirlo, fraccionarlo en campos de saber delimitados, dando lugar a prácticas de aprendizaje especializadas: **delimitación y autonomización saber.**

- la exigencia de separación del saber científico de la persona o personas a las que estuvo ligado - es la **despersonalización del saber.**

- la exigencia de definir una progresión ordenada en el tiempo para el saber a enseñar, lo cual implica una programación de los aprendizajes - es la **programabilidad de la adquisición del saber.**

- la exigencia de que esta progresión sea **legal y pública**, es decir, que sea controlada socialmente por los programas oficiales, y además que sea **lógica,** es decir, vigilada desde el punto de vista epistemológico.

- la exigencia de verificar la conformidad entre esta progresión y los conocimientos del alumno, es decir, **la necesidad de evaluación.**

Cuestionarios de EGB

Los Programas Renovados para la EGB, aparecidos en 1981, sólo se establecieron de forma oficial para los cursos 1° a 5°, mientras que, para el Ciclo Superior (Cursos, 6°, 7° y 8°) se mantuvieron con validez los de 1971 (Orientaciones Pedagógicas para la EGB), siendo estos últimos los que en la actualidad continuan vigentes. (Anexo2, Documentos n° 1 y n° 2).

En los Programas Renovados de 1981, para los Cursos 1° a 5°, no se determina de forma explícita ningún contenido relativo a funciones numéricas, aunque ya aparecen contenidos previos, tales como: Correspondencias. Coorespondencias unívocas y biunívocas.

En las Orientaciones Pedagógicas de 1971, para el Ciclo Superior, se señalan los siguientes contenidos:

6° Nivel:

- *Aplicaciones inyectivas. Aplicaciones suprayectivas.*

7° Nivel:

- *Funciones de variable entera. Gráficas. Ecuaciones.*
- *Proporcionalidad de magnitudes. Aplicaciones: interés, repartos proporcionales, etc.*

8° Nivel:

- *Funciones de variable racional*
- *Proporcionalidad.*
- *Funciones polinómicas. Polinomios.*
- *La ecuación de segundo grado. Parábola.*
- *Estudio descriptivo de la hipérbola.*

Figuran además los siguientes objetivos específicos, en relación a las capacidades que deberían desarrollar los alumnos:

- *Capacidad de representación gráfica.*
- *Capacidad de representar simbólicamente situaciones problemáticas.*
- *Capacidad de interpretar funciones y tablas.*
- *Capacidad de leer y de expresar datos cuantitativos.*

En estas Orientaciones Pedagógicas se incluyen también propuestas de posibles actividades para los alumnos:

- *Representar gráficamente correspondencias establecidas entre objetos de la vida real.*

- *Inventar y estudiar aplicaciones introduciendo operadores y expresarlas numéricamente.*
- *Confección, lectura e interpretación de gráficas.*
- *Expresar e interpretar gráficas que traduzcan datos cuantitativos.*

Las directrices del MEC sobre los programas renovados de EGB del año 1981 que, como se ha dicho anteriormente, no llegaron a entrar en vigor para el Ciclo Superior, establecían para este Ciclo, un bloque de contenidos exclusivamente dedicado al estudio de las funciones. (Anexo 2, Documento nº 2).

> *Estudiaremos en este bloque temático el conocimiento, representación e interpretación de las funciones del tipo: $y=ax+b$, $y=ax^2+bx+c$, con coeficientes en Q, y la resolución de ecuaciones y sistemas con coeficientes y solución en Q; la resolución de ecuaciones de segundo grado con solución en Q y el estudio intuitivo de la parábola como representación gráfica de funciones cuadráticas; el planteamiento y resolución de problemas que den lugar a ecuaciones y sistemas"* (Vida Escolar, 1981, p.60)
>
> *El conocimiento de la función lineal es la base para el posterior estudio en la EGB de la proporcionalidad y al estudiar la representación de la función cuadrática terminaremos dándole una ligera idea de concavidad y convexidad".* (Vida Escolar, 1981, p.60)

Los contenidos de este bloque se distribuían en los cursos del Ciclo Superior de la EGB de la siguiente forma:

7º de EGB

- *Funciones y su representación gráfica*
- *Funciones y ecuaciones de primer grado.*

8º de EGB

- *Función cuadrática. Ecuación de 2º grado. Parábolas.*

- *Sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.*

En el Bloque de "*Proporcionalidad de magnitudes*" figuraba lo siguiente:

> "*Todo el bloque girará alrededor de las aplicaciones de la forma x ---> ax, cuya representación gráfica es una recta que pasa por el origen y en torno al estudio de la razón constante entre las imagenes (Rango) y los originales (Dominio) de esa aplicación lineal.*
> *Para desarrollar este bloque es necesario que el alumno conozca, al menos intuitivamente, las magnitudes y la medida de ellas (contenidos que pertenecen al Ciclo Medio de la EGB),* **deben conocer también el concepto de función y el de dominio (conjunto original) y rango (conjunto imagen)**, *así como operar con números racionales* (Vida Escolar, 1981, p.67)

Los contenidos de este bloque temático se organizaban del siguiente modo en los cursos del Ciclo Superior:

7° de EGB

- *Aplicaciones lineales*
- *Magnitudes proporcionales*
- *Aplicaciones a la Aritmética mercantil*

8° de EGB

- *Proporcionalidad geométrica y su relación con la medida.*

En 1984 el MEC elaboró un documento que contenía los objetivos terminales para el Area de Matemáticas en el Ciclo Superior. Entre ellos encontramos los siguientes, en referencia al estudio de las funciones:

> <u>Objetivo</u> <u>13</u>: *Realizar sencillas operaciones con expresiones literales para adquirir soltura en el manejo de funciones, ecuaciones y fórmulas.*

Objetivo 14: *Representar las funciones de primer grado o lineales en el diagrama cartesiano, como instrumento de elaboración e interpretación de gráficas y tablas y resolución de situaciones problemáticas, por ejemplo: movimientos uniformes.*

Creemos significativo destacar que en estos objetivos se promueve de forma explícita la realización de actividades que conduzcan a los alumnos a *"manejar con soltura funciones"*, identificandolas de un modo restringido con expresiones algebraicas, estableciendo además la conexión fórmula ---> gráfico con este único sentido. Por último, se suscita también la conveniencia de *"aplicar"* los conocimientos anteriores a la resolución de situaciones problemáticas.

Cuestionarios de BUP

Los cuestionarios que actualmente están en vigor son los establecidos en 1975 (BOE, 18/IV/75), que incluyen, además de los programas de los tres cursos de BUP, unas orientaciones metodológicas para cada uno de ellos. (Anexo 2, Documento nº 3)

Observamos que existen cuatro grandes bloques temáticos para los tres cursos de BUP:

- Algebra
- Geometría
- Funciones reales
- Cálculo de Probabilidades y Estadística

Los contenidos del bloque temático dedicado a funciones se distribuyen en los tres cursos de BUP del siguiente modo:

1º de BUP

- *Funciones polinómicas de variable real. Representación gráfica*

- *Anillo de los polinomios*

2º de BUP

- *Funciones de variable real*
- *Funciones simétricas, monótonas, acotadas periódicas.*
- *Sucesiones convergentes en R*
- *Funciones continuas*
- *Función exponencial*
- *Función logarítmica*
- *Funciones trigonométricas*
- *Funciones derivables: estructura y derivada de las funciones elementales.*
- *Funciones integrables.*

3º de BUP

- *Concepto de derivada y diferencial*
- *Derivadas y diferenciales de las funciones elementales.*
- *Estudio local y global de una función derivable.*
- *Representación de funciones derivables.*
- *Integral definida.*
- *Aplicaciones de la integral definida.*

Cuestionarios de COU

- Matemáticas para la opción de "Ciencias"

Se establecen para los alumnos de "Ciencias", según la resolución de 17/III/78, en la cual figuran cuatro bloques temáticos: Algebra, Geometría, Cálculo Diferencial e Integral, y Cálculo de probabilidades. (Anexo 2, Documento nº 4)

Se proponen, de modo general, una relación de objetivos a conseguir durante el curso; los contenidos específicos de cada tema los determinan los propios profesores de cada Distrito Universitario, en colaboración con un profesor-coordinador de Matemáticas de COU, nombrado por la Universidad para este efecto. En relación con la noción de función, encontramos:

"El alumno debe adquirir claramente el concepto de aproximación local de una función mediante polinomios y su aplicación a funciones elementales. Deberá también afianzarse en el estudio y representación de curvas dadas en forma explícita" (BOE nº 65, 1978, p. 6449)

- Matemáticas para opciones de "Letras"

Debido a la modificación de la estructura del plan de estudios del COU (1988), se incorpora la enseñanza de Matemáticas a opciones no específicas de los alumnos de Ciencias. (Anexo 2, Documento nº 5).

"La finalidad de este programa es proporcionar a los alumnos, de una manera eminentemente práctica, algunas herramientas del bagaje matemático que constituyen una ayuda muy eficaz para el trabajo en Ciencias Humanas y Sociales" (BOE, nº 25, 1988, p. 3122)

El programa consta de tres bloques de contenidos:

- Elementos de álgebra lineal.
- Análisis descriptivo de funciones y gráficas.
- Elementos de probabilidad y Estadística

En el segundo bloque figuran los siguientes contenidos:

- *Significado práctico de las funciones como descripción de fenómenos. Ejemplos de funciones sencillas y su representación.*
- *Interpretación de gráficas.*
- *Idea intuitiva de continuidad.*

4.2.2. PROGRESION QUE DETERMINAN EN EL APRENDIZAJE

De la revisión de los Cuestionarios anteriores, EGB, BUP y COU, podemos deducir que el MEC, desglosa, en principio, los contenidos en grandes bloques (Algebra, Geometría, etc) con lo cual se satisface la exigencia de *"autonomización y delimitación del saber"*; posteriormente, determina de forma explícita, un listado de temas y propone unas orientaciones expresadas a modo de objetivos a conseguir; con esto garantiza la exigencia de *programabilidad*. Así, en el caso de la noción de función, se proponen los siguientes:

- *desarrollarán la capacidad de interpretar funciones y tablas.* (EGB)

- *adquirirán el concepto de función distinguiendo dominio (conjunto original) y rango (conjunto imagen).* (EGB)

- *representarán funciones lineales.* (EGB)

- *se estudiará la representación de la función cuadrática.* (EGB)

- *reconocer series de números proporcionales.* (EGB)

- *comprender y aprender las condiciones características de las aplicaciones lineales.* (EGB)

- *plantear y resolver problemas de regla de tres simple.* (EGB)

- *se estudiarán las funciones polinómicas.* (1°BUP)

- *se estudiarán las funciones no algebraicas.* (2°BUP)

- *las funciones circulares se definirán como razones.* (2°BUP)

- *estudiarán las funciones exponencial y logarítmica con sus* *propiedades fundamentales.* (2°BUP)

- *como aplicación del cálculo diferencial se hará el estudio local de funciones.* (3° BUP)

- *se aprovechará el estudio anterior para llegar a la representación gráfica de funciones algebraicas y trascendentes elementales.* (3° BUP)

- *se describirán gráficas manejando con corrección términos como crecimiento, máximo, mínimo, discontinuidad, asíntota, concavidad.* (COU - Letras)

- *el alumno utilizará todos los recursos a su alcance para representar funciones: cálculo de puntos, relación con otras funciones conocidas, uso de la calculadora, reflexión sobre la fórmula de la función, etc.* (COU - Letras)

- *el alumno debe asociar ciertas formas gráficas con la fórmula correspondiente. En particular, es interesante identificar comportamientos lineales, exponenciales y periódicos.* (COU - Letras)

- *se representarán en un mismo sistema coordenado una familia de funciones, con el fin de que el alumno valore la incidencia que tienen en la forma gráfica los parámetros que intervienen en la expresión matemática de la misma.* (COU - Letras)

- *el alumno adquirirá claramente el concepto de aproximación local de una función mediante polinomios y su aplicación a las funciones elementales.* (COU - Ciencias)

- *el alumno deberá afianzarse en el estudio y representación de curvas dadas de forma explícita.* (COU - Ciencias)

Según observamos a través de la progresión de los objetivos anteriores, el MEC hace una presentación que intenta conservar una lógica interna y lineal, así, la noción de función ha debido quedar adquirida en la EGB, para posteriormente ampliarla con el estudio de las funciones de variable real y utilizarla como herramienta básica en el Algebra, el Cálculo Diferencial e incluso en la Estadística, a lo largo de BUP y COU. También existe una determinada organización del tiempo legal de enseñanza (distribución de los saberes por cursos) que se identifica de forma implícita con tiempo "*legal*" de aprendizaje. Veamos, por ejemplo, los siguientes objetivos tomados del listado anterior, los dos primeros se refieren claramente al aprendizaje del alumno, mientras que los dos ultimos hacen referencia al modo en que se debe conducir la enseñanza:

- "*adquirirán el concepto de función*". (EGB)
- "*comprender y aprender las condiciones características de las aplicaciones lineales*". (EGB)
- "*las funciones circulares se definirán como razones*" (2°BUP)
- "*como aplicación del cálculo diferencial se hará el estudio local de funciones*" (3°BUP)

sin embargo, en la programación aparecen unos y otros de forma simultánea.

> "*La progresión de los saberes se estructura según un eje temporal, según un tiempo progresivo, acumulativo, irreversible, identificando el tiempo de enseñanza y el tiempo de aprendizaje: la ficción de un tiempo didáctico único se convierte en realidad*" (Chevallard, 1991, p. 71)

Observamos también que la concepción de la noción de función que inducen está basada en la de **aplicación entre conjuntos** numéricos **(CE6)** ("*Adquirirán el concepto de función, distinguiendo dominio (conjunto original) y rango (conjunto imagen)*"). Apoyándose en ella se estudian las ecuaciones y sistemas. Resolver una ecuación supone, según este planteamiento, obtener los elementos originales de un determinado elemento imagen para una aplicación dada. Basándose también en esta concepción, se aborda la proporcionalidad como una aplicación lineal, e incluso, se introduce el concepto de función polinómica antes de estudiar los polinomios.

Este modo de organización de los contenidos tuvo su origen en los Cuestionarios aparecidos en 1967 (B.O. del MEC, nº 80, p. 2429 - 2431). En ellos figuraba, entre otras, la siguiente consideración:

> *"Se trata de resaltar el sentido unitario de la Matemática fundiendo todas las nociones en unidades funcionales basadas en la teoría de conjuntos, en las ideas de correspondencia y de relación y en las estructuras algebraicas fundamentales".* (p.2429)

El saber de la comunidad matemática surgido en la primera mitad del siglo influye decisivamente en la configuración de estos nuevos programas, de estos nuevos "*saberes a enseñar*". En este sentido, nos parece muy significativa la opinión de Shubring, "*la enseñanza de la Matemática no puede ser simplemente asimilable a una estalagmita, sobre la cual la ciencia, independientemente de su propio crecimiento como estalactita, deja caer sólo algunas gotas. No podemos considerar el desarrollo del saber científico y del saber escolar como dos procesos que se desarrollan de manera independiente. El tipo de saber escolar depende estrechamente de los saberes dominantes en una cultura científica dada*" (Shubring, 1988, p. 137). Esta dependencia quedó patentemente establecida con la llamada corriente "*moderna*" de la Matemática.

Sin embargo, en esta ocasión los encargados de gestionar la transposición de los saberes matemáticos en objetos de enseñanza cayeron en la tentación de tomar los "*fundamentos*" de la Matemática moderna como los "*principios*" elementales de todo saber escolar y la progresión legal del aprendizaje asumió el estudio de los fundamentos desde los primeros cursos escolares.

Así, teniendo en cuenta la anterior consideración del MEC, los primeros contenidos que figuran en todos los cursos de estos Cuestionarios (1967) son:

- Conjuntos
- Relaciones
- Correspondencias. Aplicaciones.

La noción de función está incluida desde 3° de Bachiller en todos los cursos de Bachillerato (Elemental y Superior), y se presenta explícitamente basada en el concepto de aplicación:

- *Noción de aplicación. Aplicación lineal y = a.x. Proporcionalidad.* (BO del MEC, 3^er Curso, 1967)

Esta concepción de la noción de función como aplicación permanecerá en las nuevas Orientaciones Pedagógicas para la EGB aparecidas en 1971, y el estudio de la proporcionalidad, polinomios y ecuaciones se fundamentará en ella. (Anexo 2, Documento n° 1). Esta misma organización de los saberes coincide con la que presentan los Programas Renovados para la EGB de 1981, los de BUP de 1975 y los de COU de 1978.

El cambio conceptual de la noción de función es tan significativamente profundo que grandes masas del *"saber a enseñar"* se verán afectadas. Se trata de una noción que no sólo tiene una fuerte legitimidad epistemológica para la comunidad científica actual, sino que además su pertinencia epistemológica es tan sumamente fuerte que se convertirá en un útil imprescindible para ramas muy diferentes de la Matemática y, en consecuencia, de los contenidos que figuran en los Cuestionarios y Programas Escolares. Esto hace, como se ha dicho anteriormente, que cambie toda la organización de los contenidos matemáticos escolares desde 1967.

Para determinar mejor este cambio, basta con ver los Cuestionarios oficiales para Bachillerato de 1954 (B.O. del MEN, 16/2/54, p.16-20). Lo primero que observamos es que los saberes se organizan explícitamente en cuatro grandes bloques, diferentes a los actuales, y son:

- Aritmética
- Algebra
- Geometría
- Análisis

La *delimitación y autonomización* de los contenidos, al ser distinta, hace que la proporcionalidad figure siempre incluida en el bloque de Aritmética, mientras que la noción de función se inserta en el bloque de Algebra. El estudio de la proporcionalidad es siempre anterior al estudio del concepto de función. Incluso el estudio de polinomios y ecuaciones, dentro del mismo bloque - Algebra - es también anterior al estudio de funciones. Sólo en 6º Curso de Bachillerato la noción de función aparece incluida en el bloque de Análisis como base para el estudio de la derivada y diferencial, y en el de Geometría para abordar el estudio analítico de la recta.

Podemos decir, por lo tanto, que es a partir de 1967 cuando la noción de función como objeto a enseñar toma un nuevo status en los cuestionarios oficiales. Esto es consecuencia de su consideración como aplicación entre conjuntos mediante la cual se ve sometida a todo un proceso de renovación a través de un procedimiento de *"metamatematización"*. Se beneficiará de valores heredados de su consideración ontológica como objeto matemático, tales como complejidad, nobleza, generalidad, que le conducirán a ocupar un puesto muy superior en la escala de los *"saberes a enseñar"*. Esta nueva concepción hace que se transforme en los cuestionarios toda la organización de los contenidos y, consiguientemente, toda la progresión que determinan en el aprendizaje de los alumnos.

4.2.3. INFORMACION QUE FACILITAN LOS PROGRAMAS OFICIALES A LOS PROFESORES

En general todo profesor que se encuentre ante los cuestionarios oficiales no tendría una información puntual y exhaustiva respecto de todo el proceso de determinación y estructuración de los contenidos a enseñar. Esta ha de ser la intención del MEC cuando afirma: *"Estas orientaciones servirán para establecer la necesaria uniformidad en el enfoque de los programas, al tiempo que van expresadas en términos de amplitud suficiente para que en su marco encuentre cabida la iniciativa del profesorado en orden a la permanente renovación de la didáctica de sus enseñanzas"* (BOE, 18/4/75, p.8049)

La *"amplitud suficiente"* a que se refiere el MEC en la configuración de los programas varía mucho de unos niveles a otros. Hemos observado que, en general, existen diferencias en las orientaciones que ofrecen los cuestionarios oficiales a los profesores. Los de EGB están redactados con mayor precisión en sus objetivos, mientras que los de Bachillerato son excesivamente vagos en su formulación. Los de COU son también bastante ambiguos, aunque los cuestionarios de la opción de Letras son algo más explícitos que los de Ciencias.

La idea de *"permanente renovación de sus enseñanzas"*, refiriéndose a los profesores, está presente en todos los programas desde los aparecidos en 1967. Esta renovación va enfocada hacia dos vertientes, una en cuanto al aspecto estrictamente matemático: *"Proporcionar a los alumnos la posibilidad de adquisición de los conceptos y de los medios de trabajo de la Matemática actual"* (BO del MEC, nº 80, p. 2430), y la otra, en cuanto a los métodos a utilizar en clase: *"Facilitar al profesor la utilización de métodos activos, tan necesarios, y la posibilidad de adoptar un enfoque didáctico más o menos avanzado según la realidad lo aconseje"* (BO del MEC, 1967, nº 80, p. 2430). Este fenómeno de *continua renovación* de los contenidos hace que se consideren obsoletos los anteriores programas y permitirá restablecer un equilibrio entre el sistema de enseñanza y su entorno más próximo (*"noosfera"*). Los métodos también están llamados a renovarse intentando con ello buscar una *"eficacidad terapéutica"* en el aprendizaje de los alumnos.

En cuanto a la noción de función, sólo los *"Programas Renovados"* para la EGB (1981) explicitan a los profesores el modo en que ha de tratarse:

> **4. FUNCIONES**
>
> Se insistirá en el concepto de función, dominio y rango; concepto importante con incidencia en muchas disciplinas y ramas de la matemática y asequible para los alumnos de esta edad.
>
> La representación de las funciones cuadráticas, sólo se hará en casos sencillos y mediante aproximaciones, ya que estos alumnos no poseen el instrumental del cálculo diferencial. No se afrontará la representación de la hipérbola.
>
> Sólo se estudiarán ecuaciones lineales y ecuaciones de Segundo Grado con coeficientes en Q y sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas con coeficientes en Q.
>
> Se eliminan, por tanto, las ecuaciones irracionales y las inecuaciones, cuyo cálculo entraña la dificultad del manejo de las desigualdades, cálculo que se pospone para el Bachillerato.

Proporcionan además los objetivos a conseguir por los alumnos, seguidos de una colección de actividades modelo orientativas para los profesores. (Anexo 2, Documento nº 2)

Es muy significativa la secuenciación de los contenidos que figuran en las Orientaciones Pedagógicas de 1971, ya que el estudio de las ecuaciones es posterior al de las funciones. Podemos decir, pues, que a partir de esta secuenciación los profesores tuvieron que abordar las ecuaciones y sistemas basándose en el concepto de función, puesto que, incluso el estudio de los polinomios era posterior. El sentido con el que figura la noción de función es el de servir de instrumento para introducir las ecuaciones de un modo diferente, rompiendo con la tradicional introducción a partir de la algebraización de los problemas aritméticos. La noción de función también les volverá a servir de herramienta para estudiar la proporcionalidad como una aplicación lineal. Como vemos se presenta un fenómeno de *renovación* de numerosos objetos matemáticos que va encadenada a la renovación del objeto función. Se produce una reestructuración nueva y diferente a la ya existente.

En los restantes programas se supone que esta noción la deben conocer los alumnos desde la EGB y, ni en los cuestionarios de BUP, ni en los de COU, se hace referencia al modo de introducirlo como un objeto de enseñanza. En estos niveles, pues, se considera como un instrumento básico para trabajar otros conceptos tales como, límites, derivadas, continuidad, etc. Tan sólo en los programas de COU-Letras se hace explícito, aunque muy escuetamente, cómo se han de describir y representar las gráficas de funciones:

> Para describir una gráfica se deben manejar con corrección términos como crecimiento, mínimo, discontinuidad, asíntota, concavidad. No es imprescindible formalizar el concepto de límite ni utilizar una notación rigurosa para definir el vocabulario básico.
>
> Para representar una función el alumno utilizará todos los recursos a su alcance: cálculo de puntos, relación con otras funciones conocidas, uso de la calculadora para determinar la tendencia, reflexión sobre la fórmula de la función, etc. Cuando sea necesario para el propósito del problema, puede acudirse a la función derivada y determinar con exactitud los extremos de la gráfica.
>
> El alumno debe asociar ciertas formas de gráficas con la fórmula correspondiente. En particular es interesante identificar comportamientos lineales, exponenciales y periódicos.
>
> Se procurará representar sobre un mismo sistema coordenado una familia de funciones, con el fin de que el alumno valore la incidencia que tienen en la forma de la gráfica los parámetros que intervienen en la expresión matemática de la misma.
>
> Aunque los alumnos han estudiado en el segundo curso del Bachillerato el concepto y cálculo de derivadas, parece conveniente revisar la noción de derivada de una función en un punto a partir de la tasa de variación media y usando la calculadora. Para ello no es imprescindible la formalización del concepto de límite ni el cálculo sistemático de límites. El manejo práctico de derivadas puede llegar hasta la regla de la cadena en casos sencillos.
>
> La técnica más elemental de interpolación, la mera sustitución de valores en la fórmula general del polinomio, establece un puente entre esta parte del programa y la de álgebra. En cada caso concreto, y en problemas que respondan a datos de la vida real, se podrá enjuiciar el valor práctico de la interpolación y extrapolación que proporciona la función hallada.
>
> Excede el propósito de este curso demostrar la relación entre función primitiva e integral definida. Basta con que el alumno maneje la regla de Barrow para el cálculo de áreas.
>
> Tiempo estimado: Nueve semanas.

En cuanto a la metodología a seguir por los profesores, vuelven a ser de nuevo los Programas Renovados para la EGB los más explícitos:

> *"Los principios metodológicos que deben regir el desarrollo de estos programas de Matemáticas son los de: actividad del alumno, respeto al ritmo personal y adaptación. En este sentido todos los conceptos deben ir precedidos de experiencias que permitan familiarizar al alumno con las fases del proceso de abstracción, respetando los ritmos de aprendizaje y las distintas capacidades intelectuales".* (Vida Escolar, 1981, p.4)

No obstante, y a pesar de que estos principios metodológicos promueven un aprendizaje por adaptación, subyace, en la propia secuenciación de los objetivos a conseguir (Bloque funciones), un modo de organización de los aprendizajes que, de forma implícita, induce a los profesores a presentar, en primer lugar, los conceptos de forma teórica y, posteriormente, aplicarlos a la resolución de ejercicios.(Por ejemplo: *Funciones. Aplicaciones lineales. Aplicaciones a la aritmética mercantil*)

En las Orientaciones Pedagógicas para la EGB de 1971, se intenta orientar la enseñanza de los profesores del siguiente modo:

> *"La segunda etapa de EGB pretende ir hacia una mayor profundidad en el formalismo matemático...... De ahí la justificación de introducir la matemática moderna, cuyos procedimientos facilitan la creación de estructuras formales que permiten ser utilizadas en gran número de situaciones distintas"* (Vida Escolar, 1971, p.26)

> *"El proceso matemático puede ser aplicado a múltiples situaciones problemáticas...... El plantear situaciones y su resolución acostumbrará al alumno a observar, relacionar, y analizar con precisión, evitando juicios*

precipitados y erróneos" (Vida Escolar, 1971, p.26)

En los programas de BUP y COU no se aconseja a los profesores de manera explícita ningún tipo de metodología para el proceso de enseñanza-aprendizaje. En general, estos cuestionarios se limitan a dar una lista de contenidos y unas muy escasas orientaciones, si es que las podemos llamar así. Sin embargo, a lo largo de todos ellos se detecta, de forma implícita, la presencia de una metodología de enseñanza: *"Se estudiarán los conceptos de continuidad y límite y se aplicarán a casos sencillos". "El estudio de la derivada de limitará a su concepto, interpretaciones y algunos ejemplos sencillos"*. Como vemos, refleja el modelo *"teoría-práctica"*. Los conceptos aparecen en los cuestionarios como objetos matemáticos de los cuales, en primer lugar, se estudiarán sus definiciones y propiedades y se aplicarán, posteriormente, a casos particulares: *"Es el marco de una enseñanza clásicamente estructurada en curso teórico y ejercicios, es decir, "yo aprendo, yo aplico", según expresión de Douady"* (Margolinas, 1993, p. 175)

4.3. INFLUENCIA DE LA "NOOSFERA" EN LA INTERPRETACION DE LOS PROGRAMAS

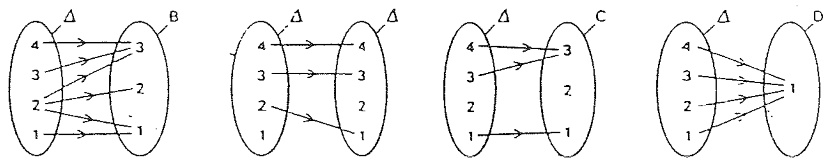
Durante los años de vigencia de los programas oficiales presentados anteriormente, han existido importantes movimientos ideológicos, en cuanto a la enseñanza de la Matemática, en la *"noosfera"*, y bajo su influencia se han ido configurando tratamientos muy diferentes de los contenidos matemáticos escolares.

A partir de los años 50 los matemáticos franceses tales como Dixmier, Revuz y otros, llevan a cabo un proceso de difusión del saber más recientemente acabado de la matemática entre los profesores de Liceos. Así comenzó el movimiento de la llamada *"Matemática Moderna"*. En la década de los 60 se extendió principalmente por toda Francia, Bélgica y U.S.A.. Aunque a nuestro pais llegó con algún retraso, sus directrices quedaron plasmadas legalmente en nuestros programas, y de modo efectivo en todos los textos escolares. El M.E.C (Ministerio de Educación y Ciencia) constituyó una Comisión Oficial que se encargó de dirigir, en conexión con la O.C.D.E., el ensayo de introducción de la Matemática Moderna en el Bachillerato. En 1968, esta Comisión publicó unos textos *"piloto"* para los alumnos de Bachillerato, así se determinó la transposición didáctica *"oficial"* de los saberes, dando pautas, con ello, a los demás autores de textos escolares. Los matemáticos que integraban esta Comisión (Abellanas, García Rúa, Royo López) intervenían en la misma como una especie de *"transmisores que autentificaban, garantizaban y apadrinaban los saberes nuevos"* (Chevallard, 1991, p.170), asegurando con ello la legitimación epistemológica de los mismos.

Influenciados por este movimiento aparecen definiciones como las siguientes en libros de 8^{o} de EGB:

Correspondencias unívocas (funciones)

Una correspondencia entre el conjunto A y el conjunto B viene definida por un conjunto R de pares ordenados de $A \times B$. Este conjunto R de pares se puede determinar, sin necesidad del criterio de la correspondencia, por enumeración o mediante un diagrama (diagrama de flechas o gráfica). En las correspondencias unívocas a cada elemento x del conjunto inicial le corresponde uno o ninguno del conjunto final. Un elemento x de A y otro y de B se llaman **homólogos** en la correspondencia cuando el par (x; y) pertenece a R. Si a $x \in A$ le corresponde $y \in B$, se dice que **y es imagen de x**.
El conjunto formado por todos los elementos de A (conjunto inicial) que tienen algún homólogo en B (conjunto final) se llama **conjunto original** de la correspondencia; el conjunto formado por los elementos de B (conjunto final) que tienen algún homólogo en A (conjunto inicial) se llama **conjunto imagen** de la correspondencia.



1. Diagramas de flechas de correspondencias

Las correspondencias unívocas se llaman también **funciones**. Toda función se puede considerar como un conjunto, finito o no, de pares de valores[1]. Para cada una de estas funciones indica su conjunto original (conjunto inicial: Q) y cinco pares de valores.

$x \longrightarrow 3x$ $\quad$ $x \longrightarrow 2x-3$ $\quad$ $x \longrightarrow 0{,}2x$ $\quad$ $x \longrightarrow 3x^2$ $\quad$ $x \longrightarrow \frac{12}{x}$

[1]) Cuando se trata de funciones, al conjunto original se le llama también dominio de definición, campo de variabilidad o campo de existencia; al conjunto imagen se le llama también recorrido o dominio de valores.

(Oehl, Pazkill, Rodríguez, 1979, p.42)

Vemos como las Matemáticas escolares sufrieron una gran transformación influenciadas por este movimiento. Numerosas nociones, de herramientas para resolver problemas, se convirtieron en objetos de estudio, sus situaciones de empleo importaban menos que toda la parafernalia de sus definiciones y propiedades. Según Chevallard, *"se llegó a creer que las Matemáticas eran un lenguaje y que por tanto, para 'hacer matemáticas' era suficiente con hablarlas"* (Chevallard, 1980. p.18). El espíritu de este comentario explica perfectamente las aberraciones cometidas en los libros de texto, que desasosegaron durante años a los alumnos y a los profesores, y a las que ningún tipo de reciclaje, de estos últimos, pudo poner remedio.

Los saberes matemáticos escolares, en general, adquirieron una fuerte legitimidad epistemológica, con lo cual se elevó su status, se ennoblecieron tanto interna (dentro de la propia Matemática) como externamente (ante la sociedad, en general). Se creó una enorme distancia entre los conocimientos sociales y los conocimientos matemáticos, incluso los de nivel muy elemental, tales como, la clásica regla de tres o la resolución de ecuaciones. Veamos, en el siguiente ejemplo, como ésta última se presentaba explícitamente basada en la noción de función:

En el tema anterior has estudiado funciones cuadráticas.

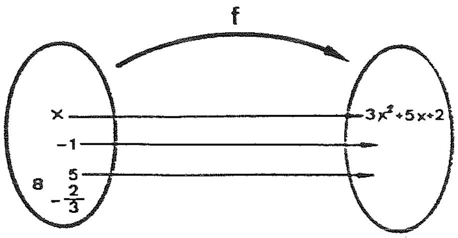


Fig. 1.

Escribe el polinomio de segundo grado asociado a la función f.

Halla la imagen de 1, 5, 8, $-\frac{2}{3}$ ¿Cuáles son los originales de 0?

Hallar los originales de 0 en esta aplicación f es **resolver** la ecuación de segundo grado:

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

Cada uno de estos originales es una raíz del polinomio $3x^2 + 5x + 2$ y una solución de la ecuación de segundo grado $3x^2 + 5x + 2 = 0$.

Ejemplo:

$$Q \xrightarrow{x^2 - 5x + 6} Q$$

$$x \longrightarrow x^2 - 5x + 6$$

$$2 \longrightarrow 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$$

$$3 \longrightarrow 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$$

(Prada y cols, 1974, p.205)

Resolver una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$ es hallar la antiimagen de **0** por la función de ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

(Vallés y cols., 1977, p. 164)

En la presentación que realizan estos textos de las ecuaciones observamos un fenómeno de *metamatematización*: la renovación de este objeto de enseñanza se realiza a través de un proceso matemático complejo *"en el que interesa menos su puesta en funcionamiento, su utilización, que el análisis de su construcción matemática, de su consideración formal. ..... Pasamos de la utilización del objeto como herramienta matemática, al plano de estudio matemático del objeto"* (Schneider, 1979, p.54)

Durante los años setenta de nuestro siglo prevaleció también, entre los matemáticos, una ideología referente a la necesidad de introducir una enseñanza mucho más rigurosa del Análisis en los cursos de Secundaria:

> *La experiencia de una enseñanza moderna del análisis llevada a cabo en el Centro Belga de Pedagogía de la Matemática, nos permite afirmar categóricamente que es posible iniciar a los alumnos de 15 a 18 años en las nociones fundamentales de continuidad, de límite, así como en los elementos del cálculo diferencial e integral. Nuestros alumnos no consideran el análisis como la parte más difícil del curso. ..... Hay una gran ventaja en introducir lo antes posible los conceptos más fundamentales y los modos de pensamiento más importantes, los más típicos. Los titubeos no están permitidos: la enseñanza del análisis se impone hoy en día a nivel secundario.* (Papy, 1968, p. VII-VIII)

La función, pues, se estudiará como elemento básico e imprescindible para los restantes conceptos del análisis matemático. Su tratamiento se fundamentaba epistemológicamente en la noción de aplicación:

FONCTION — APPLICATION

Attention!

FONCTION = APPLICATION

Les mots FONCTION et APPLICATION
sont *rigoureusement synonymes*

(Papy, 1968, p.20)

No obstante, y a pesar del enorme éxito obtenido por los impulsores de esta ideología que consideraba los **fundamentos de la Matemática** como los principios básicos en su enseñanza, en la mayor parte de los paises donde el sistema se implantó, el movimiento de vuelta comenzó hace ya bastante tiempo (en Francia al principio de los años 80). La promoción de las estructuras junto con una gran inflación teórica, tanto de lo numérico como de los geométrico, después de haber suscitado un vivo entusiasmo, desatarán pronto las críticas más serias, incluso antes de que se hubiera podido constatar el resultado. Para muchos, entre ellos matemáticos de primera categoría, estaba claro que aquello tenía que conducir a un enorme empobrecimiento.

> *"Se llega al rigor absoluto, sólo eliminando el significado ... y si se debe elegir entre rigor y significado elegiré este último. La tendencia modernista de la enseñanza representa un aumento de la cultura en detrimento de la naturaleza, es, en el estricto significado del término un preciosismo. Pero si el preciosismo tiene a veces encanto en arte y en literatura, puede no tenerlo en Matemáticas."* (Thom, 1974, p. 151-152)
>
> *"El verdadero problema que debe plantearse en la enseñanza de las Matemáticas no es el del rigor, sino el de la construcción del sentido, de la justificación ontológica de los objetos matemáticos"* (Thom, 1974, p.148)

En nuestro pais se dejaron sentir estas críticas y se comenzaron a hacer notables esfuerzos para ponerlas en práctica. Se trataba del inicio de una nueva transformación en la opinión generalizada de la *"noosfera"*. En 1980, Guzmán escribía: *"El mal está ya hecho y sus consecuencias las seguiremos sufriendo por algún tiempo. La correción de rumbo de los organismos oficiales no suele ser un proceso rápido y, lo que es aún peor, el furor conjuntista y abstraccionista de tantos de nuestros enseñantes no se frena ni se corrige fácilmente. Pero se puede tratar de catalizar la superación de esta etapa, lo que se va realizando ya con éxito en otros paises más ágiles que el nuestro"* (Guzmán, 1980, p.30). En 1984, Rico y Castro, refiriéndose a este problema en la EGB, escribían: *"Este fracaso, pequeño, pero importante fracaso, ha sido social: no se ha dada una respuesta correcta a la demanda de conocimientos útiles que exigía la nueva situación. La realidad es que no se ha promocionado el aprendizaje de unas Matemáticas generales y básicas. No se ha concebido la Matemática como una forma de aprender las cuatro reglas y unos rudimentos de Geometría del plano, se ha intentado impartir un minicurso de teoría intuitiva de conjuntos e introducción a las estructuras algebraicas, es decir, satisfechas las necesidades mínimas, se ha planteado un período básico de introducción a la Matemática por sí misma, con su desarrollo como única finalidad"* (Rico y Castro, 1984, p.133-134)

Este tipo de opiniones fueron invadiendo la *"noosfera"* y aún manteniendose los mismos programas oficiales, sus efectos se observaban explícitamente en las nuevas versiones de los manuales escolares. Durante la década de los 80 se produjo una nueva invasión en el mercado de manuales *"diferentes"*, *"renovados"* (aunque a veces, sólo aparentemente), donde los profesores podían encontrar plasmado el espíritu cambiante de la educación matemática. Veamos, para contrastarlo con el ejemplo anterior, la presentación diferente de la noción de ecuación:

Recuerda que una **ecuación** es una **igualdad** de dos **expresiones algebraicas.**	$4x+6$ y $-x-4$ son dos expresiones algebraicas que tienen la variable x. La igualdad $4x+6=-x-4$ es una ecuación.
En el curso pasado se estudiaron las ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros y una sola variable. En este curso estudiaremos también ecuaciones de primer grado, pero los coeficientes serán números racionales.	La ecuación $4x+6=-x-4$ es una ecuación con coeficientes enteros, pues 4, 6, -1 y -4 son números enteros. La ecuación $\frac{1}{2}x+3=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$ es una ecuación de primer grado con coeficientes racionales.
Un número racional $\frac{a}{b}$ es solución de una ecuación si al sustituir la incógnita por $\frac{a}{b}$, la ecuación **tiene el mismo valor numérico** en sus dos miembros. **Resolver** una ecuación es encontrar **todas** sus soluciones.	Comprobamos que el número racional 2 es solución de la ecuación: $\frac{1}{2}x+3=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$ $\frac{1}{2}x+3 \xrightarrow{x=2} \frac{1}{2}\cdot 2+3=\frac{2}{2}+3=1+3=\boxed{4}$ $\frac{2}{3}x+\frac{8}{3} \xrightarrow{x=2} \frac{2}{3}\cdot 2+\frac{8}{3}=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}=\frac{12}{3}=\boxed{4}$

(Amiguet y cols.1987, p.177)

Observamos que la ecuación se presenta de forma ostensiva, podemos decir que esa ha sido la forma que tradicionalmente había figurado en los manuales escolares:

67. **Identidad.** — Identidad (*) es la igualdad cuyos dos miembros están representados del mismo modo. V. g.: $6a - r = 6a - r$.

67 bis. **Ecuación.** — Se da el nombre de *ecuación* (**) a toda igualdad cuyos miembros contienen una o más cantidades desconocidas o incógnitas. V. g.: $6x = 72$.

68. **División de las ecuaciones.** — Se dividen en *ecuaciones con una incógnita*, con *dos*, con *tres*, etc., según que tengan una, dos, tres o más cantidades desconocidas.

Ecuación con una incógnita: $6x = 72$
Idem con dos incógnitas: $4x + 3z = 120$
Idem con tres incógnitas: $5x + 12z - 2y = 458$.

69. **Resolver una ecuación.** — Resolver una ecuación es hallar el valor de sus incógnitas.

70. **Despejar una incógnita.** — Despejar una incógnita es verificar las operaciones necesarias hasta conseguir que la incógnita quede sola en un miembro de la ecuación, con la unidad como coeficiente y exponente y con el signo positivo.

(Dalmau, 1897, p.454)

Podemos pensar que, en general, la *"Matemática Moderna"* introdujo en la Matemática escolar *"objetos demasiado gruesos"* que el sistema de enseñanza no pudo asimilar y tendió a expulsarlos, con mayor o menor rapidez. Vemos, por lo tanto, que toda renovación de los objetos de enseñanza no es aceptable, ya que en muchas ocasiones el nivel de complejidad se eleva enormemente; existe entonces un fenómeno generalizado de rechazo, para comenzar una renovación diferente, o bien una vuelta al pasado, *"a lo básico"*.

En la actualidad nos encontramos ante la entrada en vigor de los nuevos *"Programas de la Reforma Educativa"*, tanto para los niveles de Educación Primaria, como Secundaria. Su nueva configuración, en referencia a las Matemáticas, queda perfectamente reflejada en la opinión de Rico:

> *Podemos decir que el Diseño Curricular de Matemáticas está inspirado en las corrientes más conocidas y respetadas en las comunidades de Educadores Matemáticos anglosajones, con una fuerte tendencia a valorar las competencias cognitivas que se derivan de los procedimientos y estrategias necesarios para la resolución de problemas.*
> *El curriculo tradicional de matemáticas español, usualmente influenciado por las corrientes racionalistas y estructuralistas francesas y centroeuropeas, queda fuertemente modificado por un planteamiento empirista, pragmático y procesual de procedencia anglosajona y, parcialmente, holandesa."* (Rico, 1992b, p.21)

Han debido transcurrir más de diez años, la anunciada premonición de Guzmán, en cuanto a la lentitud de las reformas oficiales, es ciertamente un hecho.

4.4. CONCLUSIONES: CARACTERIZACION DE LA TRANSPOSICION DIDACTICA DE LA NOCION DE FUNCION QUE REALIZAN LOS CUESTIONARIOS OFICIALES

Todos los cuestionarios analizados se caracterizan, en su forma, por satisfacer las exigencias de *"delimitación"*, *"autonomización"* y *"programabilidad"* de los saberes a enseñar. Se establece, asimismo, una organización temporal de los saberes escolares - *"cronogénesis del saber"* - asignando un tiempo legal de enseñanza para los objetos matemáticos que, de forma implícita, se identifica con el tiempo *"legal"* de aprendizaje de los mismos.

La influencia de la ideología imperante en la comunidad matemática de mediados de siglo incide decisivamente en la configuración de los programas y cuestionarios anteriores. Influenciadas por este movimiento las Matemáticas escolares sufrieron una gran transformación. Numerosas nociones, de herramientas para resolver problemas, se convirtieron en objetos de estudio. Así, los saberes matemáticos escolares, en general, adquirieron una fuerte legitimidad epistemológica, con lo cual se elevó su status, se ennoblecieron, tanto interna (dentro de la propia Matemática), como externamente (ante la sociedad, en general). Se creó una enorme distancia entre los conocimientos sociales y los conocimientos matemáticos escolares, incluso los de nivel muy elemental.

A partir de 1967 la noción de función como objeto a enseñar toma un nuevo status en los cuestionarios oficiales. Es consecuencia de su consideración como aplicación entre conjuntos, así su enseñanza se ve sometida a un proceso de renovación a través de un procedimiento de *"metamatematización"*. Esta nueva concepción hace que se transforme, en los cuestionarios, la organización de los contenidos y, consiguientemente, la progresión que determinan en el aprendizaje de los alumnos.

En todos los cuestionarios está presente un fenómeno de *continua renovación* de los contenidos, esto hace que se consideren obsoletos los anteriores programas, permitiendo restablecer un equilibrio entre el sistema de enseñanza y su entorno más próximo ("*noosfera*"). Los métodos también están llamados a renovarse intentando con ello buscar una "*eficacidad terapéutica*" en el aprendizaje de los alumnos.

Veamos ahora más específicamente las características de cada uno de ellos (EGB, BUP y COU):

Cuestionarios de EGB

La concepción de la noción de función que inducen estos cuestionarios está basada en la de aplicación entre conjuntos (CE6). Se trata, como sabemos, de cuestionarios publicados entre 1971 y 1981 y, durante este tiempo, "*los didactas que alrededor de 1960 habían experimentado la teoría de conjuntos como una nueva revelación, creyeron debían imponer de forma tiránica esta revelación a la instrucción matemática, y de la cual la instrucción matemática no se ha recuperado todavía*" (Freudhental, 1983, p.498)

El hecho de adoptar esta concepción hace que cambie totalmente la organización de los saberes y, en consecuencia, la progresión de los aprendizajes. Así, el estudio de las ecuaciones e incluso de los polinomios se aborda a partir del concepto de función. Se utiliza también como fundamento para el estudio de la proporcionalidad, provocando con ello la salida del cuerpo de la Aritmética, donde tradicionalmente había estado incluida, de esta noción matemática. Se produce una "*auténtica catástrofe ecológica*" según terminología de Bosch (1991, p.114) ya que todo cambia su status en la organización de los saberes.

Sin embargo, a pesar de la consideración que de forma explícita dan a la función como aplicación, promueven su tratamiento al de "*fórmula algebraica*", restringiendo así la concepción inicialmente presentada.

La representación de funciones aparece en los ejercicios, generalmente como un punto de llegada, nunca de partida. En las actividades sugeridas a los profesores sólamente figura un único tipo de conexión: Fórmula ---> Gráfico. El gráfico es considerado por lo tanto, como un fin en sí mismo y no como un útil del trabajo matemático.

Cuestionarios de BUP

En los cuestionarios de BUP no aparece de forma explícita cómo ha de definirse el concepto de función. No obstante, por analogía con el tratamiento que reciben otros conceptos (*"Las sucesiones podrán introducirse como aplicaciones de N en R"*) así como por la propia denominación (*"Función real de variable real"*), podemos deducir que la concepción que adoptan para la noción de función está basada en el concepto de aplicación.

El estudio de funciones a lo largo de todos los cursos de BUP se refiere siempre a las algebraicas y trascendentes elementales. La representación gráfica sigue siendo, como en la EGB, un punto de llegada, es decir, un fin en sí mismo: *"Se aprovecharán los estudios anteriores para llegar a la representación gráfica de funciones elementales"* (3º de BUP).

De la observación global de los cuestionarios se puede deducir que durante el bachillerato los alumnos han de realizar lo que se suele llamar *"el estudio de una función"*, entendiendo por tal, el buscar un cierto número de informaciones sobre dicha función, tales como, su dominio, rango, límites de sus extremos, periodicidad, simetría, continuidad, derivabilidad, etc. y representarla gráficamente. Así, la función es la base para el inicio del estudio de los fundamentos del Análisis matemático.

Hemos de señalar que en estos cuestionarios encontramos incorporados por primera vez como objetos a enseñar, conceptos tales como:

- Función polinómica
- Función derivada
- Función primitiva
- Función de distribución

que no figuraban en otros cuestionarios anteriores. Nos basta observar los del año 1954, en ellos sólo se hace referencia a los polinomios, derivadas, integrales y al estudio de la curva normal. Todos estos objetos cambian radicalmente su status en la enseñanza y se organizan basándose en la nueva concepción de la función como aplicación.

Podemos concluir que, los cuestionarios oficiales proponen en BUP el estudio de funciones de variable real, primando el estudio de las funciones algebraicas y de las trascendentes elementales. Proporcionan además una metodología de enseñanza donde el conocimiento a enseñar, primero se formaliza, luego es traducido algebraicamente para pasar a aplicarse en la resolución de ejercicios.

Cuestionarios de COU

En la opción de Ciencias los alumnos adquirirán, según se indica, el concepto de aproximación local de una función mediante polinomios y lo aplicarán a funciones elementales, y se afianzarán en el estudio y representación de curvas. Se pretende, pues, que lleguen al concepto de función analítica y que utilicen todos los recursos del Cálculo Diferencial para la representación gráfica de curvas. Se da también una pequeña indicación de cómo se deben introducir los conceptos, *"se debe partir, tanto como sea posible, de situaciones experimentales"*.

Según hemos visto, se vuelve a hacer referencia a las *"funciones elementales"* de modo genérico. Creemos que se referirán, como en el resto del bachillerato, a las algebraicas y trascendentes sencillas.

En la opción de *"Letras"* aparece un tratamiento diferente a los anteriores: *"significado práctico de las funciones como descripción de fenómenos. Interpretación de gráficas"*. Vemos como de forma explícita aparece el calificativo de *"práctico"* como indicador de un tipo especial de significado, que creemos se opone al tratamiento formalizado y riguroso. Desaparece el término *"curva"* (concepto matemático) para sustituirlo por el de *"gráfica"* mucho más ambiguo, y más adaptable, en consecuencia, a numerosas funciones empíricas. Nos parece además muy significativa la relevancia que adquiere el concepto de parámetro: *"Se estudiarán familias de funciones, con el fin de que el alumno valore la incidencia que tienen en la forma de los gráficos los parámetros que intervienen en la expresión matemática"*. Podemos decir que para la opción de Letras se propone un tratamiento de la noción de función mucho más intuitivo y basado en la observación y descripción de fenómenos y situaciones de la vida real.

En suma, podemos concluir que la concepción que inducen los cuestionarios oficiales (1981-1988) a los que se han ajustado los estudios de nuestros alumnos, tiene la siguiente caracterización:

CC: Aplicación entre conjuntos numéricos

Invariantes: Aplicación entre conjuntos numéricos.

Representaciones: Promueven las expresiones algebraicas y la representación gráfica cartesiana.

Situaciones: Son situaciones intramatemáticas ya que a través de la noción de función se cambia toda la organización de los saberes escolares. Interviene así, en la nueva estructuración de:

- Polinomios. Ecuaciones.
- Proporcionalidad de magnitudes (aritméticas y geométricas)
- Cálculo Infinitesimal (sucesiones, *"estudio de una función"*, función derivada, función primitiva, ...)
- Logarítmos (función logarítmica)
- Trigonometría (funciones trigonométricas)
- Estadística (función de distribución,...)
- Significado práctico de las funciones como descripción de fenómenos. (COU-Letras)

4.5. LAS FUNCIONES COMO OBJETO DE ENSEÑANZA: ANALISIS DE LOS MANUALES ESCOLARES

En este apartado estamos interesados en realizar un análisis del proceso de transposición didáctica que sufre la noción de función hasta convertirse en un *"objeto de enseñanza"* incluido en los manuales escolares. Con ello, determinaremos los fenómenos didácticos a que dan lugar todas las transformaciones asociadas y las concepciones de la noción de función que inducen.

> *"El estudio de los contenidos de enseñanza y de sus variaciones en el curso del tiempo, de un manual a otro, permite poner en evidencia fenómenos didácticos vinculados a la transposición de los saberes"* (Laborde, 1988, p. 360)

La necesidad de transformación de los saberes matemáticos para ser incluidos en cualquier manual escolar, convirtiéndose así en objetos de enseñanza, hace que estos últimos tengan unas características específicas derivadas de las exigencias siguientes:

- exigencia de una "programabilidad" para la adquisición del saber, debe existir un inicio y una secuenciación;

- exigencia de una "textualización del saber", es decir una organización discursiva del conocimiento objetivo, que conduce a su vez a la:

  - *despersonalización* del saber (separación de las personas a las que estuvo ligado en su génesis).
  - *delimitación* en saberes parciales (se organizan *"piezas"* de un todo y se van acoplando según las necesidades estructurales del sistema didáctico).
  - *autonomización* de los saberes parciales (cada *"pieza"*, aislada del todo original, puede ser autónoma en el tratamiento dado por el sistema didáctico).
  - *explicitación* de algunas nociones matemáticas (las

que van a ser introducidas como objetos de estudio, aunque se empleen también como útiles para resolver problemas)

- *uso implicito* de nociones paramatemáticas y protomatemáticas (son nociones indispensables para la actividad matemática que no se introducen como objetos de estudio).

Hay que tener en cuenta que debido a la complejidad del significado de los objetos matemáticos, no es posible, en un primer estudio de un tema, adquirir por completo este significado. De este modo, un mismo objeto aparece a lo largo del currículo en diferentes niveles de profundización. En las primeras ocasiones su empleo será implícito, por lo que tendrá un carácter protomatemático o paramatemático para el alumno, aunque para el profesor tenga un carácter de objeto matemático de enseñanza.

- exigencia de una "objetivación" y una "publicidad" de los saberes "escolares", motivada por la necesidad del control social de los aprendizajes. Esta exigencia también se manifiesta en la construcción del conocimiento matemático, que no tiene tal carácter de conocimiento mientras no es objetivado y hecho público por sus autores.

Los manuales escolares, según Chevallard, (1991, p.61-62), tienen además dos características muy significativas: ofrecen *una concepción legitimada del texto del saber a enseñar* y, además, se convierten en la *norma de progresión del conocimiento de los alumnos*.

> "*La textualización autoriza una didáctica y esta didáctica se legitima entonces por la ficción de una concepción del aprendizaje isomorfo al proceso de enseñanza, del cual, el modelo a seguir es el texto del saber en su dinámica temporal. ... El aprendizaje del saber no es más que la copia del texto del saber*" (Chevallard, 1991, p.61-62)

4.5.1. PRESENTACION DE LA FUNCION EN LOS MANUALES ESCOLARES COMO OBJETO DE ENSEÑANZA

La noción de función, como objeto de enseñanza, aparece explícitamente definido en su aspecto formal, en casi la totalidad de los manuales escolares de 7° y 8° de EGB (hemos revisado los de editoriales tales como Algaida, Anaya, Edelvives, Santillana, S.M., etc); aunque la función es un útil (objeto paramatemático) que los alumnos manejan desde el principio de la segunda etapa de EGB. Interviene en el estudio de la proporcionalidad directa e inversa, a través del cuadro numérico y del cuadro gráfico (6° - 7°). En algunos manuales de 7° se introducen ya las expresiones algebraicas y, como consecuencia, se comienzan a utilizar algunas funciones expresadas de forma algebraica.

Al final de la EGB, todos nuestros alumnos, se han debido "*familiarizar*" con las funciones lineales, afines e incluso cuadráticas. Se introducen a través de los cuadros numérico, gráfico, algebraico y geométrico (se estudian rectas, parábolas y sus ecuaciones).

En BUP, el estudio de las funciones y sus propiedades, constituye uno de los nucleos más destacados de cualquier manual escolar. Los de 1° de BUP tratan sólo las funciones polinómicas de primer y segundo grado; es en 2° de BUP donde desarrollan un mayor número de contenidos: funciones de variable real, límites, derivadas, continuidad, función logarítmica, exponencial, funciones circulares, etc. En 3° amplían el cálculo de derivadas a las funciones trascendentes, realizan el estudio local de funciones, iniciando la representación gráfica de las mismas con la ayuda de las herramientas proporcionadas por el cálculo diferencial (sólo polinómicas de grado mayor que dos y racionales homográficas $(ax+b)/(cx+d)$).

Los manuales de COU realizan una ampliación del cálculo diferencial e integral. Estudian el concepto de aproximación local de una función mediante polinomios, aplicándolo a funciones elementales. Insisten en la representación de curvas dadas en forma explícita, utilizando todos los medios suministrados por el cálculo diferencial: límites, derivadas, continuidad, máximos y mínimos, etc.). Por otro lado, intentan que el alumno llegue al concepto de área de un recinto plano, y trabaje en el cálculo de áreas y volúmenes sencillos, como aplicación del cálculo integral.

A continuación analizaremos el modo en que se trata el objeto función en los manuales escolares utilizados por los alumnos a los que aplicamos el cuestionario. Los manuales a los que nos referiremos, son los siguientes:

1° de BUP - **(A)**. *Matemáticas 1,* (1990), Lazcano, Barolo. Edelvives.

(B). *Matemáticas - Funciones* (1989), Agustí, Vila. Vinces Vives.

2° de BUP - **(C)**. *Matemáticas 2,* (1992), Lazcano, Barolo. Edelvives.

(D). *Matemáticas 2*, (1986), Benedicto, Negro. Alhambra.

(E). *Matemáticas 2*, (1986), Caruncho, Gutiérrez, Gil. Santillana.

(F). *Matemáticas 2,* (1985), García, Rubio y Mariscal. Edelvives.

3° de BUP - **(G)**. *Matemáticas 3*, (1990), López Barriuso. Edelvives.

(H). *Matemática 3,* (1986), Caruncho, Vázquez, Rivera. Santillana.

COU - **(I)**. *Matemáticas COU* (1990), López Barriuso.Edelvives.

(J). *Matemáticas I* (1989), Guzmán , Colera. Anaya.

Estos manuales han sido elegidos intencionalmente, por ser los que han utilizado los alumnos de nuestra muestra. No pretendemos generalizar las conclusiones obtenidas a otros manuales diferentes, sino proporcionar información relativa a la enseñanza de los alumnos de los cuales se han estudiado las concepciones.

Sobre estos manuales se ha realizado un análisis de contenido (Weber, 1986). Las variables analizadas han sido las siguientes:

- Modo de presentación de los conceptos teóricos, respecto de los problemas y ejercicios; si se presentan en primer lugar los conceptos teóricos y los ejercicios se proponen tan sólo como aplicación de aquellos o si, por el contrario, se inicia el tema planteando una serie de problemas para cuya solución se presentan los conceptos como herramienta.
- Definición presentada para el concepto de función.
- Ejemplos propuestos.
- Relación establecida entre la función y los objetos matemáticos relacionados con ella: gráfico, dominio, rango, etc.
- Ejercicios propuestos.

A continuación presentamos los resultados del estudio llevado a cabo.

<u>Modelo seguido en la presentación del concepto</u>

Todos los manuales anteriores se adaptan perfectamente a la exigencia de *programabilidad de los saberes* organizando éstos de forma lineal y secuenciada. Observamos además que la estructura general con la que estos autores confeccionan los temas se adapta perfectamente al modelo *teoría ---> práctica*, aunque a veces se suele presentar algún ejemplo antes de introducir la definición correspondiente. Primero existe una presentación de las nociones matemáticas que el alumno deberá retener, seguida de ejercicios fabricados exclusivamente para que el alumno pueda reconocerlas y utilizarlas sin apenas ningún tipo de transformación. Hemos de destacar, sin embargo, que el manual *Matemáticas I* de COU (Guzmán, Colera) tiene una configuración diferente respecto de los restantes, ya que presenta los temas enmarcándolos dentro de la historia de las Matemáticas y propone en todas las unidades actividades introductorias de los mismos que, en numerosas ocasiones, son utilizada como un medio para dotar de significación a los conceptos, con una filosofía basada en la resolución de problemas. Es decir, consideran importante la "*actividad*" del alumno y la adoptan como medio para su motivación en la construcción de los conocimientos matemáticos.

Definiciones presentadas

En general, los autores de los textos anteriores, introducen los conceptos partiendo de su definición formal. En un esfuerzo de descontextualización de los saberes, van de lo general a lo particular. Es cierto, que a través de este método dan a los alumnos medios para usar de forma múltiple las nociones matemáticas. Sin embargo se corre el riesgo de ocultar la correspondencia "*significante ---> significado*".

En todos los manuales citados (salvo en Guzmán que no aparece de forma explícita) se introduce la noción de función a partir de definiciones análogas a la siguiente:

> *Una función real de variable real es una aplicación f de un subconjunto no vacío D de R en R, es decir, f: R --> R. El subconjunto D se llama dominio de definición de f y se escribe Dom(f).*

(Caruncho, Gutierrez y Gil, 1986, p. 138)

Si comparamos esta definición con otras aparecidas en los textos escolares desde finales del siglo pasado, observaremos que existe una gran diferencia:

CAPÍTULO XIII.

TEORÍA DE LAS FUNCIONES DERIVADAS.

§ I.—Definiciones y principios generales.

468. Hemos dicho (20) que *una cantidad, cuyo valor depende de los de otras cantidades, se llama una* FUNCION *de estas cantidades;* llamándose estas últimas *variables*, porque, para cada sistema de valores arbitrarios, que pueda dárseles, recibe la funcion un valor correspondiente.

469. Una funcion de una cierta cantidad, x, se indica por medio de notaciones, tales como; $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $F(x)$, $f(x)$, etc.

(Cirodde, 1879, *Lecciones de Algebra*, p. 280)

FUNCIONES

194. Noción de función.—Recordemos que, para calcular el área de un círculo, se multiplica la medida del cuadrado del radio por π, siendo π un número abstracto, cuyo valor aproximado es 3,141592, y que esto se expresa por la fórmula

$$S = \pi r^2.$$

Forman parte de esta fórmula tres cantidades: de ellas, una, π, representa siempre el mismo valor; y las otras dos, S (área del círculo) y r (radio), pueden adquirir muchos valores. De la primera π, se dice que es *constante y variables* las otras dos.

Veamos ahora qué diferencia hay entre una y otra variable.

El área depende del valor del radio, mientras que r puede tomar los valores que queramos asignarle, siendo por ello una *variable independiente*. Esto se expresa diciendo que S es una función de r.

(Barratech y Zalama, 1940, *Matemáticas 5°*, p.84)

56. **Función de una variable.**

***Dadas dos variables* A *y* B, *se dice que* A *es función de* B, *cuando a cada valor que demos arbitrariamente a* B, *corresponde un valor de* A.**

De las dos variables que intervienen en la función, a una se le dan valores arbitrariamente y es la ***variable independiente***. Los valores de la otra variable dependen de los que se den a la variable independiente, y se llama ***variable dependiente*** y es la *función*.

La variable función se suele representar por la letra y, representándose la variable independiente por la letra x.

Los ejemplos del párrafo anterior son ejemplos de dos variables, siendo una función de la otra y se dice:

El valor de una huerta es función de su área o superficie.

El área de un círculo es función del radio.

La estatura de una persona es función de su edad.

La cantidad máxima de sulfato de sosa que se disuelve en 100 partes de agua es función de la temperatura del agua.

(Ferré, 1945, *Matemáticas 6°*, p. 79)

El concepto de función

Ya en cursos anteriores ha empleado el lector el concepto de *función*, usándolo como sinónimo de ley de dependencia o correspondencia.

«Si existe una correspondencia entre los valores de una variable independiente x y otra variable y, dependiente de aquélla, de tal modo que a cada valor de x corresponde un valor de y, se dice que y *es función de* x.»

Cada clase de correspondencia que se establece, se representa por una letra f, φ, ψ, ..., F, Φ, Ψ, ..., llamada característica de la función, antepuesta a la variable independiente, que se encierra en un paréntesis, así:

$$y=f(x), \qquad y=\varphi(x), \qquad y=\psi(x)$$

(Rey Pastor, Puig Adams, 1957, *Matemáticas 6°*, p. 29)

Como vemos, en ellas aparecen los términos *"cantidad de una magnitud"*, identificada con la noción de variable, y *"cantidad que depende de otras cantidades"* identificada con la variable dependiente o función.

No hacen ninguna referencia a conjuntos numéricos, ni a dominios de definición. La concepción de función reflejada en los manuales escolares durante todos estos años es análoga a la que tenían los matemáticos del siglo XIX, tales como Lagrange, Fourier, Cauchy:

> *"Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente, y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable"* (Ribnikof, 1987)

En esta época aún no se había construido una teoría rigurosa del número real y, en consecuencia, en todas las definiciones era preciso hacer referencia a las *"cantidades variables"*.

Esta noción de función, en la que se presentan cantidades variables de ciertas magnitudes que dependen unívocamente, va a desaparecer de los manuales de Bachillerato con la influencia de la llamada *"Matemática moderna"*. Así, en un texto *"piloto"* editado por el MEC y elaborado por la *"Comisión oficial que dirige el ensayo de introducción de la Matemática moderna en el Bachillerato"*, creada en 1961, se propone la siguiente definición, típicamente bourbakista:

2. Concepto de función de variable real.

Cada subconjunto $C \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ define una correspondencia o función f del conjunto de los números reales en sí mismo. La forma de establecer tal correspondencia es, por tanto, la siguiente: cada $x \in \mathcal{R}$ tiene como imágenes los números $y \in \mathcal{R}$ tales que $(x, y) \in C$.

Esta correspondencia se representa en la forma

$$x \to f(x) = y.$$

Al conjunto original de f se le suele llamar variable independiente, y al conjunto imagen de f se le llama variable dependiente.

(Abellanas y cols. 1968, *Matemáticas 6°*, p. 38)

Aquí se presenta ya una definición en la que no existe la menor sugerencia a la dependencia entre magnitudes, ni aparece la vieja y sugestiva idea de variabilidad. Es evidente, que la noción de función presentada por los textos anteriores a esta "*reforma*" era mucho más intuitiva, la actual tiene un alto grado de formalización que la hace mucho más abstracta. Freudhental dirá que, "*aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo, se ha oscurecido su significado esencial como acción de asignación de variables, ha perdido su caracter dinámico para transformarse en algo puramente estático*" (Freudhental, 1983, p. 497)

Es evidente que, en los textos editados bajo la influencia de esta "*nueva matemática*", se produce una despersonalización y una descontextualización de la noción en relación con el campo de problemas de donde surgió históricamente. "*este es un proceso de deshistorización, en el cual el concepto toma el aspecto de una realidad ahistórica, intemporal, que se impone por ella misma, que no teniendo productor aparece libre en referencia a todo proceso de producción; no pudiendo poner en duda su origen, su utilidad, su pertinencia. Saber anónimo, saber descentrado de su producción histórica, toma el aspecto de un conjunto de verdades innatas*" (Chevallard, 1982, p. 207)

Ejemplos utilizados

Una vez presentada la noción de función a través de esta definición formal, algunos de los autores anteriores, en un intento de facilitar el tránsito del alumno hacia este aspecto riguroso proponen ejemplos de relaciones de dependencia sacadas de contextos sociales próximos al alumno. *"En la vida familiar o social se dice: A tiene por padre a ....., o bien B es oriundo de ....; tener por padre o ser oriundo, son relaciones de dependencia o funciones"* (García Rubio, 1981, p. 44). El contraste entre la ingenuidad de estos ejemplos y la definición dada es evidente.

Otros objetos relacionados con la función

A continuación, en los textos, se presentan las definiciones de dominio, rango, función par e impar, periódica, constante, creciente, decreciente. Todos estos *"saberes"* que figuran en la *estela* de la noción de función adquieren así autonomía propia. Es el fenómeno de *complexificación* del saber en saberes parciales. Destacaremos también que, una vez dada la definición formal de todas ellas, algunos autores, de manera destacable, incluyen *"notas"*, en donde sugieren al alumno un criterio más económico que la propia definición para determinar el dominio, o bien la paridad o el crecimiento de una función.

> *Nota: El conjunto de definición de las funciones enteras es R. El de las fraccionarias es el conjunto R, exceptuando los valores de x que anulan el denominador. Y el de las irracionales es el conjunto de valores de x, que hacen el radicando igual o mayor que cero.*

(García y cols. p.46)

Nota: Las funciones cuyos exponentes de la x son todos pares, son funciones pares y aquellas cuyos exponentes son todos impares son funciones impares. La inversa no es cierta, pues hay funciones que, sin tener todos los exponentes pares o impares, pueden ser funciones pares o impares.

(García y cols., p.47)

La inclusión de estas notas refleja el fenómeno que Brousseau (1986, p.288) llama *efecto "Topaze"*, puesto que el autor invita al alumno a realizar un *"contrato a la baja"*, señalándole aquello que ha de valorar y, en consecuencia, retener: no es preciso aplicar la definición, basta con utilizar las *"notas"* para llegar a tener éxito en la resolución de problemas.

Normalmente, es en los manuales de 1° y 2° de BUP donde se presenta la noción de gráfica de una función de variable real. Se define formalmente la noción de *grafo* de una función:

Sea f una función. A cada $x \in Dom(f)$ le corresponde un único número real $f(x)$ que es la imagen de x por f; entonces queda determinado un conjunto

$$T = \{ (x,f(x)) / x \in Dom(f) \}$$

que se denomina la gráfica o el grafo de f, y este conjunto de pares de números reales determina en el producto cartesiano RxR un conjunto de puntos que son los elementos de T; este conjunto de puntos, representados en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, se llama representación gráfica de f.

(Caruncho y cols., 1986, p. 139)

El gráfico de una función fue siempre, según expresión de Chevallard (1991, p. 182) una noción *"preconstruida"* pero en los manuales actuales se intenta dar la categoría de *"construido"* de la actividad matemática, con objeto de asegurarle una mayor legitimidad y dignidad matemáticas. Pasa por lo tanto, en el contexto escolar, de ser una noción *paramatemática* a ser considerado como una *noción matemática.*

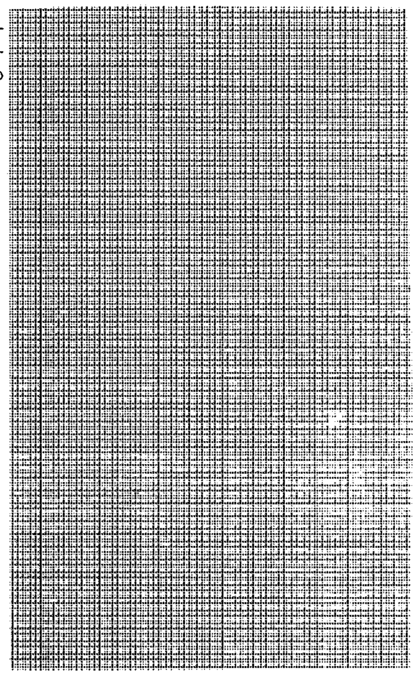
Sin embargo, algunos autores, en un reiterado intento de economizar el saber, sugieren a los alumnos cómo han de hacer en la práctica los gráficos: *"Como el conjunto de puntos pertenecientes a una función es ilimitado, se disponen en una* **tabla de valores** *algunos de los pares correspondientes a puntos de la función. Estos valores, llevados sobre el plano cartesiano, determinan puntos de la gráfica. Uniendo estos puntos con una linea continua se obtiene la representación gráfica de la función"* (Lazcano y Barolo, 1992, p.70).

11. Completa la siguiente tabla de pares ordenados (x, y) pertenecientes a la función de ecuación $y = 2^x$. Haz el gráfico aproximado.

x	y
—6	0,0156
—4	0,0625
—2	
0	
2	
4	
6	

12. Haz el gráfico de la función de ecuación $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	y
—6	64,00
—4	16,00
—2	4,00
0	1,00
2	0,25
4	0,0625
6	0,0156

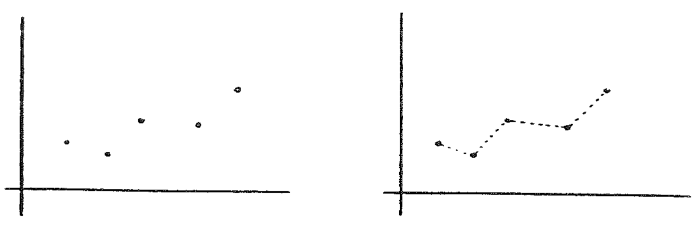


(Agustí Vila, 1989, p. 175)

Las afirmaciones tan rotundas expresadas por los autores anteriores respecto a la representación gráfica de una función, permite a los alumnos elaborar una creencia un poco ingenua. Incapaces de determinar, en la mayoría de los ejercicios, el conjunto de los infinitos pares del grafo, fácilmente, encontrarán unos cuantos que unirán inmediatamente entre sí. De esta manera, los alumnos, sin más herramienta que una pequeña colección de pares de números, son inducidos a unirlos y a contemplar de inmediato cómo surge la gráfica a través de un procedimiento sumamente sencillo. Se genera así en ellos un proceso de evidencia y de transparencia conceptual. Cuando estos mismos alumnos se enfrenten en cursos posteriores al estudio de la representación analítica de curvas, donde se han de usar todos los útiles que facilita el Análisis matemático (derivadas, límites, continuidad, etc), no tendrán más remedio que cuestionarse: ¿por qué ahora ha de ser necesario utilizar tantas herramientas, para algo que podría solucionarse con una pequeña tabla de valores?

Además, esta ingenuidad con que los manuales (principalmente en 1° y 2° de BUP) presentan la representación gráfica de funciones, conduce a los alumnos a observar los gráficos como conjunto de puntos aislados, más que en su aspecto global: *"cuando se les pide que identifiquen en una función el intervalo en el cual el incremento es máximo, en un porcentaje muy alto, no señalan este intervalo, sino el máximo valor de la función. Este tipo de respuestas nos indica que la interpretación puntual de los gráficos está profundamente anclada en la cognición de nuestros alumnos y les impide avanzar hacia una concepción más global"* (Janvier, 1987, p.70). Son incapaces de observar los vínculos esenciales que de forma global van unidos a la variación de una función y que son mucho más profundos de lo que aparenta la representación gráfica.

Hemos de señalar también que esta *"técnica"* inducida para representar gráficas de funciones lleva a los alumnos, en un porcentaje relativamente alto, a no admitir como funciones, gráficas del tipo:



Sin embargo, los alumnos afirman: *"si unimos los puntos, la* *curva que resulta si es una función"* (Ruiz Higueras, 1991, p. 167)

Autores tales como Caruncho y cols. (1986, p.145) dedican también en 2° de BUP una parte muy significativa del tema de funciones al estudio de las operaciones entre funciones llegando a construir el *"Espacio vectorial de las funciones de variable real definidas sobre D"*.

> Sea D un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Por las propiedades estudiadas en la página 148, $(\mathcal{F}(D, \mathbb{R}), +)$ es un grupo abeliano; de las propiedades estudiadas anteriormente se sigue que $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ **con la suma de funciones y el producto por números reales es un espacio vectorial real que se llama el espacio vectorial de las funciones reales de variable real definidas sobre D.**

Este interés por las estructuras algebraicas está motivado por la influencia estructuralista de la "*noosfera*" didáctica: *"Durante los años setenta fue la ideología del poder: la moda (real), la novedad (aparente), la verdad (dogmática y ficticia a la vez)"* (Chevallard, 1980, p. 7). Este será un saber que los autores de los manuales siempre considerarán exclusivamente teórico, nunca propondrán ejercicios donde se constituya en útil de la actividad del alumno. *"Sus situaciones de empleo importan menos que la parafernalia de sus propiedades"* (Chevallard, 1980, p.15)

Como hemos podido observar la noción de función en los manuales usados por los alumnos ha sufrido un proceso de renovación a través de un procedimiento de *metamatematización* en referencia al tratamiento dado en otros manuales de años anteriores. A través de este proceso la noción de función se ha beneficiado adquiriendo valores de complejidad y nobleza y ocupando así una categoría superior, pasando de simple útil de la actividad matemática a su estudio como objeto del saber matemático. Pero no sólo la noción de función ha sufrido este proceso, sino todos los objetos matemáticos ligados a ella, tales como los gráficos, o las estructuras algebraicas derivadas de las operaciones entre funciones:

"La noción adquiere legitimidad y dignidad matemáticas derivadas de su pertenencia al saber matemático, esto le da un peso de realidad, un coeficiente de existencia muy fuerte, repercutiendo enseguida, según las leyes de una filiación ontológica tácita pero efectiva sobre los objetos matemáticos que hará aparecer en su estela" (Chevallard, 1991, p. 197)

4.5.2. ANALISIS DE LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS EN LOS MANUALES ESCOLARES

Nos vamos a centrar principalmente en seis textos de 1° y 2° de BUP (A, B, C, D, E, F), ya que es en ellos donde se inicia el estudio del objeto función en Bachillerato. En los cursos 3° y COU se estudian y analizan las funciones pero ya contando con la ayuda del cálculo diferencial: derivadas, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, continuidad, etc.

En primer lugar precisaremos la significación que adoptamos para los términos *"problemas"* y *"ejercicios"*. Un problema lo consideraremos como *"una situación en la cual un individuo o grupo de ellos es invitado a resolver una tarea para la que no hay un algorítmo inmediato que determine completamente el método de solución"* (Lester, 1978, p.54). Los ejercicios no serían más que actividades de puesta en funcionamiento, como útiles explícitos, de los contenidos que figuran en un tema determinado; en este sentido se considerarían también como medio de aplicación y reforzamiento de dichos contenidos.

Como podemos observar en la tabla siguiente tan sólo aparecen ejercicios, no figuran problemas. Los ejercicios están preparados, en general para que el alumno pueda utilizar los contenidos que figuran en el manual sin apenas ningún tipo de transformación.

	1 BUP		2 BUP	
Tipos de ejercicios	**Frec.**	**%**	**Frec.**	**%**
Determinación del dominio			116	28.7
Constr. tabla de valores a partir de exp. algebr.	10	17.2	18	4.4
Estudio de la paridad			26	6.4
Estudio de la monotonía			28	7.0
Repres. gráfica (a partir de pares de valores)	48	82.8	74	18.3
Crecimiento/Decrecimiento			42	10.2
Oper.func.$(f\pm g)$,$(f.g)$, y deter. del nuevo dominio			69	17.1
Deter. criterio de la func inversa de una dada			27	6.7
Periodicidad			4	1.0
Total	58	100.0	404	100.0

En 1° de BUP dedican, en general, los manuales pocos ejercicios al estudio de funciones, ya dijimos anteriormente que en este curso se estudian principalmente polinomios. Sin embargo, la función sirve para introducirlos y, como vemos, la mayoría de los ejercicios demandan la representación gráfica de funciones dadas en forma algebraica. El alumno sólo dispone para ello del útil que le facilitan los pares de valores que puede obtener mediante la configuración de una tabla (objeto paramatemático).

En 2° de BUP aumenta considerablemente el número y la variedad de ejercicios que los manuales proponen a los alumnos. El mayor porcentaje, casi el 30% del total, corresponde a los que piden la determinación del dominio de funciones. ¿Por qué este interés, en los manuales de esta época, en la determinación del dominio de definición de una función?. No tenemos más que observar manuales de planes anteriores para ver, con sorpresa que no suelen aparecer ejercicios de este tipo. Veamos, por ejemplo, los ejercicios propuestos en un texto de 1945:

EJERCICIOS

1. *El espacio que recorre un móvil con movimiento uniformemente variado es función del tiempo, directamente proporcional a su cuadrado, multiplicado por* $^1/_2$ *de la aceleración. Hallar la expresión matemática de esta función, si la aceleración es 400 m. por minuto.*

2. *El volumen que ocupa un gas es función de la presión a que está sometido en forma inversamente proporcional. Hallar la función analítica que relaciona la función y la variable.*

3. *La intensidad de la corriente que pasa por un conductor es directamente proporcional a la diferencia de potencial entre sus extremos y a la resistencia. Si la resistencia del conductor es de 120 ohmios, hallar la función analítica de la intensidad.*

4. *El gasto de energía de un barco es directamente proporcional al cubo de su velocidad. Expresar la función analítica del gasto de energía, con respecto a la velocidad del barco.*

5. *¿Qué clase de función será la que relaciona la temperatura en las diversas horas del día?*

6. *En la función* $y = x^2 - x + 3$, *hallar los valores de la función, cuando a la variable se le dan los valores numéricos;* 1 ; 1,1 ; 1,2 ; 2 ; 3 ; 4 ; y 5 ;

7. *En la función* $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$, *calcular,* $f(0)$; $f(1)$; $f(10)$; $f(15)$ *y* $f(1,1)$.

8. *Si es* $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, *probar que*

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

9. *Dada la función* $y = \sqrt{1 - x^2}$, *hallar el campo de variabilidad de esta función.*

(Ferré, 1945, *Matemáticas 6° Curso,* p. 87)

La mayoría de ellos están referidos a contextos físicos, donde la noción de función se ha de utilizar como una herramienta modelizante para darles solución. Sólo hay un ejercicio donde se propone a los alumnos hallar el "*campo de variabilidad*" de la función (incluso aquí aparece la referencia al sentido de "*variación*").

Los textos analizados, según hemos visto, presentan en toda su generalidad el concepto de función. Desde finales del siglo XIX Dedekind generalizó al máximo este concepto, llamando función a toda aplicación F:E-->F, siendo E y F conjuntos cualesquiera. *"La importancia de este nuevo lenguaje reside en que permite a los matemáticos considerar relaciones entre objetos de naturaleza completamente indeterminada"* (Dieudonné, 1989, p.188). Precisamente por esta generalidad en su presentación, los matemáticos necesitan utilizar en el estudio de funciones, elementos de precisión, como son la determinación del dominio, la paridad, la continuidad, derivabilidad, etc. Los manuales reproducen esta misma necesidad y además, convierten la noción de función en un objeto de estudio en sí mismo, sustituyendo al tratamiento como herramienta que tenía en planes anteriores. *"La reforma de la Matemáticas modernas aparece, bajo este análisis, como gestora de la promoción masiva de nociones paramatemáticas en nociones matemáticas .... Sabemos que la inflación del tratamiento como objetos de estudio de nociones que anteriormente se observaban como simples herramientas de la actividad matemática ha reducido dramáticamente el lugar consagrado a su puesta en funcionamiento como útiles, dedicando gran cantidad de tiempo y energía en construirlas"* (Chevallard, 1982, p.189). Ahora se definen no sólo la noción de función, sino la de dominio, imagen, gráfico, operaciones con funciones, etc, cambiando definitivamente su status, de herramientas pasan a objetos del saber matemático. De ahí, que sea preciso hacer numerosos ejercicios donde el alumno pueda aplicar de forma inmediata, tanto las definiciones, como las *"reglillas"* propuestas.

Analizando también el modo de presentación que utilizan los autores para estos ejercicios de determinación del dominio, vemos que, están divididos en pequeños grupos, con enunciados diferentes:

4.9. Determina el campo de existencia de las funciones:

1) $x \longrightarrow f(x) = 2x - 3$

2) $x \longrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

3) $x \longrightarrow f(x) = 1/x$

4) $x \longrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

5) $x \longrightarrow f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

6) $x \longrightarrow f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{16}{x^2}}$

7) $x \longrightarrow f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 4}$

8) $x \longrightarrow f(x) = \sqrt{9 - 4x^2}$

9) $x \longrightarrow f(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 + x - 6}$

10) $x \longrightarrow f(x) = \sqrt{(1-x)(2+x)}$

11) $x \longrightarrow f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

12) $x \longrightarrow f(x) = \dfrac{2x}{2x^2 + 2x + 1}$

13) $x \longrightarrow f(x) = \dfrac{4x - 1}{x^3 + 1}$

14) $x \longrightarrow f(x) = \dfrac{x + 3}{x^3 - 8x^2 + 25x}$

4.10. **¿Para qué valores de la variable independiente, toman valores reales las siguientes funciones?:**

1) $x \longrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

2) $x \longrightarrow f(x) = \sqrt{\dfrac{9^2}{x} - 1}$

3) $x \longrightarrow f(x) = \sqrt{3 - x^2}$

4) $x \longrightarrow f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{2x - 6}$

5) $x \longrightarrow f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x - 7}$

6) $x \longrightarrow f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{2 - x}}$

4.11. Determina los conjuntos de definición de las funciones reales siguientes:

1) $f(x) = \dfrac{2x - 6}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

4) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}{x + 1}$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x^2 - 9}$

(García, Rubio, p.55-56)

Se trata de disimular la identidad de los ejercicios variando las cuestiones no pertinentes; así el alumno, sólo tendrá que buscar las analogías. Además, se trata de funciones que son fácilmente tipificables ya que su forma se encuentra siempre entre las siguientes: $P(x)/Q(x)$, $\sqrt{P(x)}$, o bien $\sqrt{P(x)/Q(x)}$. ¿Qué ha de hacer para resolver estos ejercicios?. Teniendo en cuenta las *"notas"* ofrecidas por el manual para cada uno de los tipos anteriores de funciones, es evidente que tan sólo ha de realizar una transferencia de los algorítmos ya conocidos en la resolución de ecuaciones o inecuaciones. Creemos, según se dijo anteriormente, que se presenta aquí un caso evidente del efecto *"Topaze"* (Brousseau, 1986, p.288): La respuesta que debe dar el alumno está determinada de antemano, el manual selecciona las preguntas a las cuales el alumno puede dar este tipo de respuesta codificada. No se trabaja sobre la noción de función, sino que se realiza una enseñanza reducida a la simple ejecución algorítmica. El alumno en la mayoría de las ocasiones resuelve los problemas más por transferencia de algoritmos que por comprensión del sentido, pero la pérdida del sentido es un fenómeno normal en los manuales manejados por estos alumnos. Sin embargo, *"el funcionamiento de los saberes institucionalizados depende de los conocimientos no descontextualizados enseñados previamente ... el autor ignora seguramente las referencias contextuales del alumno, pero éstas son necesarias para que no se pierda el fruto de sus experiencias en las nuevas adquisiciones"* (Brousseau, 1989, p.10)

Podemos añadir además que en estos tipos de ejercicios de determinación del dominio, es precisamente el *"dominio de una función"* el que determina fuertemente su papel como *objeto transaccional* entre pasado y presente: la resolución de ecuaciones e inecuaciones, que necesariamente se ha de llevar a cabo, sirve perfectamente como un útil *"antiguo"* en la historia escolar que enlaza con el *"nuevo"* objeto función.

El segundo tipo de ejercicios, que según el porcentaje (18.3%) se destaca en la tabla anterior, está configurado por aquellos en que se pide al alumno que represente gráficamente funciones expresadas algebraicamente. Las funciones que han de representar son afines, cuadráticas, por partes y del tipo y=E(x) (parte entera de x) o bien y=Mant(x) (mantisa de x). Como dijimos anteriormente, los autores no pueden pedir a los alumnos que representen otro tipo de funciones, ya que carecen de las herramientas que posteriormente les suministrará el Análisis. Los alumnos consecuentemente, tendrán que hacer el gráfico a partir de la tabla de valores. No proponen ningún tipo de cuestiones donde el alumno tenga que reflexionar sobre propiedades más generales y significativas de la variación de una función; así la representación de la función se convierte en un fin en sí mismo y no en un útil del trabajo matemático.

Cabe destacar que en un 17.1% de ejercicios se pide a los alumnos que operen con funciones, determinando el dominio de la función resultante. Se eleva así el nivel de complejidad de la tarea de determinación de dominios. Al proponer estos ejercicios existe un intento por parte de los autores de justificar, por una parte, la inclusión de la estructura del espacio vectorial de las funciones, y por otra, de dar un enfoque diferente buscando una mayor *legitimidad epistemológica* a la tarea rutinizada y mecánica de *determinación de dominios*: ahora debe adquirir un nuevo status mucho más ennoblecido que el anterior. Sin embargo estos ejercicios siguen estando fuertemente dexcontextualizados.

> *"La introducción de saberes formales, ampliamente despojados de sentido, puede ser costosa en ejercicios de aprendizaje. Estos ejercicios no introducen apenas sentido, lo que aumenta todavía más su dificultad .... Cuanto más ha sido entrenado el alumno en ejercicios formales, más dificil le es, más tarde, restaurar el funcionamiento fecundo de los conceptos así retenidos. La 'aplicación' de un saber que se ha aprendido, de forma totalmente acabada, se produce mal, porque la lógica articulación de las adquisiciones que lo componen es únicamente la del saber mismo, y porque la función de las situaciones se ha excluido a priori."* (Brousseau, 1986, p. 318)

El 100% de los ejercicios propuestos están formulados dentro del marco algebraico, y tan sólo cuando piden al alumno que represente la gráfica de la función (18.3% de los ejercicios), se promueve un cambio del cuadro algebraico al gráfico. *"Los problemas desaparecen rechazados al purgatorio de los ejercicios"* (Chevallard, 1980, p. 18)

Podemos decir, en general, que la preocupación dominante de los autores de estos manuales es: determinar un saber de base para transmitirlo, desglosándolo en unidades elementales que los alumnos puedan memorizar y que el profesor pueda evaluar sin dificultad. Se satisfacen con ello dos condiciones que generalmente cumple todo objeto de enseñanza, por una parte la *delimitación de los saberes en "saberes parciales"* conducida a través de la estrategia didáctica que Chevallard (1991, p. 57-63) denomina *la analítica del saber* (consiste en desglosar los objetos en segmentos elementales de tal suerte que cada segmento pueda ser objeto de un estudio casi autónomo) y por otra, la *restricción de evaluabilidad* de todo objeto de enseñanza (el alumno debe hacer cualquier cosa evaluable con el objeto que acaba de ser introducido). Por ello, siempre que le es posible, respetan ciertas condiciones:

- cada unidad debe encontrar sentido en ella misma, o remitiéndose fácilmente a las unidades anteriores (caso de resolución de ecuaciones o inecuaciones).
- cada lección debe aportar un conjunto de novedades reconocibles y dar lugar a un trabajo de parte del alumno que el profesor pueda fácilmente controlar. Por ello, se proponen un gran número de ejercicios como aplicación directa de los contenidos de la lección.

Con este modo de estructuración las partes algoritmizables del saber son privilegiadas hasta tal punto que se corre el riesgo de ver reducidos los contenidos a enseñar sólamente a estas partes, las más fácilmente comunicables y evaluables: **las reglas**, en detrimento de lo que tiene verdaderamente su razón de ser: **los conceptos subyacentes.**

4.6.- CONCLUSIONES: CARACTERIZACION DE LA TRANSPOSICION DIDACTICA DE LA NOCION DE FUNCION QUE REALIZAN LOS MANUALES ESCOLARES

En este capítulo se ha realizado un análisis del contenido de los manuales empleados por los alumnos a los que se ha hecho el estudio de sus concepciones. A continuación se exponen las conclusiones obtenidas respecto a dichos manuales.

Los manuales analizados se adaptan a la exigencia de *programabilidad de los saberes* organizando éstos de forma lineal y secuenciada. Observamos además que la estructura general con la que estos autores confeccionan los temas se adapta perfectamente al modelo *teoría ---> práctica*. Primero existe una presentación de las nociones matemáticas que el alumno deberá retener, seguida de ejercicios fabricados exclusivamente para que el alumno pueda reconocerlas y utilizarlas sin apenas ningún tipo de transformación.

En general, estos autores, introducen los conceptos partiendo de su definición formal. En un esfuerzo de despersonalización y descontextualización de los saberes, van de lo general a lo particular. Se presentan las definiciones de dominio, rango, función par e impar, periódica, constante, creciente, decreciente. Todos estos *"saberes"* que figuran en la *estela* de la noción de función adquieren así autonomía propia. Es el fenómeno de *"complexificación"* del saber en saberes parciales.

Los manuales incluyen *"notas"* que reflejan el fenómeno que Brousseau (1986, p.288) llama *efecto "Topaze"*, puesto que el autor invita al alumno a realizar un *"contrato a la baja"*, señalándole aquello que ha de valorar y, en consecuencia, retener: no es preciso aplicar la definición, basta con utilizar las *"notas"* para llegar a tener éxito en la resolución de problemas.

El gráfico en los manuales analizados se define como una noción matemática, intentándole dar la categoría de *"construido"* de la actividad matemática, con objeto de asegurarle una mayor legitimidad y dignidad matemáticas. Pierde así el carácter paramatemático con el que era considerado en manuales de épocas anteriores.

Se estudian las operaciones entre funciones llegando a construir el *"Espacio vectorial de las funciones de variable real definidas sobre D"*. Es una muestra de la complejidad creciente con la que se van configurando de los contenidos matemáticos en estos manuales.

La noción de función ha sufrido un proceso de renovación a través de un procedimiento de *metamatematización* en referencia al tratamiento dado en otros manuales de años anteriores. A través de este proceso la noción de función se ha beneficiado adquiriendo valores tales como complejidad y nobleza y ocupando así una categoría superior, pasando de simple útil de la actividad matemática a su estudio como objeto del saber matemático. Esto ha ocurrido no sólo con la noción de función, sino la de dominio, imagen, gráfico, operaciones con funciones, etc, cambiando definitivamente su status, de herramientas pasan a objetos del saber matemático. Esta conclusión prueba la **hipótesis 2** que habíamos formulado al principio de nuestra investigación.

Los ejercicios más abundantes en los manuales escolares analizados son los de determinación de dominios en funciones que son fácilmente tipificables ya que su forma se encuentra siempre entre las siguientes: $P(x)/Q(x)$, $\sqrt{P(x)}$,o bien $\sqrt{P(x)/Q(x)}$. Los alumnos sólo han de realizar una transferencia de los algoritmos ya conocidos en la resolución de ecuaciones o inecuaciones. Se presenta aquí un caso evidente del efecto *"Topaze"* (Brousseau, 1986, p.288): La respuesta que debe dar el alumno está determinada de antemano, el manual selecciona las preguntas a las cuales el alumno puede dar este tipo de respuesta codificada.

En los ejercicios de determinación del dominio, es precisamente, *"el dominio de la función"*, la noción que determina fuertemente su papel como *objeto transaccional* entre pasado y presente: la resolución de ecuaciones e inecuaciones que, necesariamente se ha de llevar a cabo, sirve perfectamente como un útil *"antiguo"* en la historia escolar que enlaza con el *"nuevo"* objeto función.

Las funciones que se proponen en los ejercicios de representación son afines, cuadráticas, por partes y del tipo $E(x)$ o bien $Mant(x)$. Los alumnos tendrán que hacer el gráfico a partir de la tabla de valores. No proponen ningún tipo de cuestiones donde el alumno tenga que reflexionar sobre propiedades más generales y significativas de la variación de una función; así, la representación de la función se convierte en un fin en sí mismo y no en un útil del trabajo matemático.

El 100% de los ejercicios propuestos están formulados dentro del marco algebraico, y tan sólo cuando piden al alumno que represente la gráfica de la función (18.3% de los ejercicios), se promueve un cambio del cuadro algebraico al gráfico.

Podemos decir, en general, que la preocupación dominante de los autores de estos manuales es: determinar un saber de base para transmitirlo, desglosándolo en unidades elementales que los alumnos puedan memorizar y que el profesor pueda evaluar sin dificultad. Se satisfacen con ello dos condiciones que generalmente cumple todo objeto de enseñanza, por una parte la *delimitación de los saberes en "saberes parciales"* conducida a través de la estrategia didáctica de *la analítica del saber* (fenómeno de *complexificación)* y por otra, la *restricción de evaluabilidad* de todo objeto de enseñanza.

Concepciones que inducen

Según el estudio que hemos realizado podemos afirmar que las concepciones que promueven los manuales escolares que manejan los alumnos de la muestra son las siguientes:

CM1: Expresión algebraica o fórmula

Invariantes: Una función siempre se determina por una fórmula algebraica.

Representaciones asociadas: Expresiones algebraicas del tipo $y=ax + b$, $y=ax^2+ bx + c$, $y=P(x)$, $y=P(x)/Q(x)$, $y=\sqrt{P(x)}$, $y= \sqrt{P(x)/Q(x)}$, $y=E(x)$, $y=Man(x)$, o bien *"a trozos"*, tal como

$$y = \begin{cases} p(x), \text{ si } x \in D_1 \\ r(x), \text{ si } x \in D_2 \\ s(x), \text{ si } x \in D_3 \end{cases}$$

Situaciones de empleo: Son situaciones que se reducen exclusivamente a la aplicación inmediata, casi algorítmica de *"reglillas"* útiles en la resolución de los ejercicios propuestos, principalmente de determinación de dominios, representación gráfica (a través de la tabla de valores) y operaciones con funciones.

CM2: Curva representada en un diagrama cartesiano

Invariantes: Una función es una curva representada en unos ejes cartesianos.

Representaciones asocidas: Rectas, parábolas, hipérbolas, funciones escalonadas, y otras compuestas por distintos *"trozos"* (varias rectas, rectas y algún trozo de parábola, etc).

Situaciones de empleo: Se limitan a los ejercicios de representación gráfica de funciones cuyas expresiones algebraicas se reducen exclusivamente a las asociadas con las representaciones anteriores. El procedimiento de construcción se realiza a través de la determinación de pares de puntos mediante una tabla de valores, la localización de los mismos en unos ejes cartesianos y la unión de dichos puntos configurando la gráfica.

CM3: Aplicación entre conjuntos numéricos

Invariantes: Una función es una aplicación entre dos conjuntos numéricos.

Representaciones asociadas: Diagramas de Venn, diagramas sagitales, tablas, conjuntos de pares de números, puntos sobre los ejes cartesianos, intervalos de $\mathbb{R}$ sobre los ejes cartesianos.

Situaciones de empleo: Sólo se utiliza para definicir formalmente los conceptos de función, operaciones con funciones (suma, resta, composición, ...), y otros conceptos básicos del cálculo infinitesimal, tales como límites, límites laterales, continuidad, función derivada, función primitiva, etc. No se promueven ejercicios o situaciones donde los alumnos deban movilizar los invariantes asociados.

4.7. UNA APROXIMACION AL SABER ENSEÑADO: ANALISIS DE LOS APUNTES TOMADOS EN CLASE POR LOS ALUMNOS

En esta sección realizaremos una aproximación al saber enseñado. Para ello vamos a estudiar los apuntes tomados en clase por alumnos de 2° BUP, 3° BUP y COU pertenecientes a los Institutos de Bachillerato donde pasamos el cuestionario.

Los cursos,y los diferentes profesores que impartían la asignatura en distintas clases se distribuían de la siguiente forma:

Cursos	Profesores					
2 BUP	MA	RJ	PT	AG	RJ	JM
3 BUP	MS	AG	JM	MS		
COU	RJ	NL	MS	MG	NL	

Hemos seleccionado para analizar un ejemplar de apuntes de un alumno por curso y profesor diferente, doce en total.

Revisaremos principalmente los apuntes correspondientes al tema donde se introduce la noción de función (1° y 2° de BUP), así como los de iniciación al Cálculo infinitesimal (límites, continuidad, derivadas, etc) (2°, 3° de BUP y COU).

Estamos interesados en conocer la progresión seguida por el profesor en la construcción y estructuración del *"texto del saber"*; por medio de la misma trataremos de aproximarnos a las restricciones y condiciones del contrato didáctico y a los fenómenos ligados al proceso de transposición didáctica que lleva a cabo el profesor en el aula.

El saber que figura en los apuntes de los alumnos - *"saber enseñado"* - debe contener la explicitación discursiva por parte del profesor de los contenidos que se manejan en el aula. Además, como todo saber que está sometido a los condicionamientos de un sistema didáctico, debe tener una progresión ordenada lógicamente y debe asimismo, tener la posibilidad de ser evaluado, es decir, de verificar la conformidad entre la progresión anterior y los conocimientos del alumno.

Por otra parte, y situándonos en el susbsistema *profesor*, debemos tener en cuenta que el trabajo del *"enseñante"* supone, en primer lugar, un conocimiento del objeto del saber matemático que debe enseñar, y, en segundo lugar, supone también una representación del modo en que los alumnos (sujetos que aprenden) asimilan los conocimientos matemáticos: todo profesor debe tener una hipótesis sobre cómo se realiza el aprendizaje.

El profesor además, está ligado a la sociedad en la que convive por un contrato de enseñanza: *"Este contrato, como el contrato didáctico que rige el funcionamiento de la clase, es normalmente implícito y una de sus cláusulas, que funciona de forma implícita, la podríamos enunciar así: "Todo el contenido de una lección de Matemáticas debe ser matemáticamente correcto". Esto, que en principio parece una tautología, sin embargo, nos conduce a explicar sus efectos en el sistema de enseñanza. Enunciar correctamente la lengua matemática corre el riesgo de volverse más importante que comprender los conceptos matemáticos e incluso de saberlos utilizar de forma pertinente. Esto tendría por corolario prohibir al profesor la subsistencia (o en el peor de los casos suscitar) conocimientos "intermedios" en la clase"* (Margolinas, 1988, p.54)

De una visión global de los apuntes de clase se puede afirmar que su contenido es preferentemente discursivo. Aunque en los apuntes de los alumnos no se encuentra todo lo dicho y hecho por el profesor en la clase, sin embargo, la información recogida apoya la hipótesis de que se realiza una presentación fiel y económica de las nociones matemáticas. Esto nos muestra la creencia de que *"los saberes dicursivamente transportados por el profesor son el medio más eficaz y económico para el aprendizaje de sus alumnos"* (Chevallard, 1980, p. 23). Adoptan, pues una hipótesis empírica sobre el aprendizaje de los alumnos: Un contenido matemático correcto no puede engendrar más que concepciones matemáticas correctas. Como consecuencia de esta hipótesis, se establece de forma implícita una identificación entre el *tiempo de enseñanza* y el *tiempo de aprendizaje* del alumno.

> "*El enseñante muestra su hegemonía no solamente dando por supuesto que* **sabe** *y anticipando este saber, debe mostrar que puede conducir la cronogénesis didáctica, afirmando así el caracter singular de su lugar en la construcción del saber: no contento de saber más y de programar el futuro de la clase debe mostrar que sabe de otra manera. ..... El se reserva la teoría, las leyes generales, el alumno se encuentra del lado de la "constatación", de la "verificación", de la "aplicación"* ". (Chevallard, 1991, p. 75)

En cuanto a los imperativos debidos a la epistemología de la matemática, en los apuntes estudiados, se trasluce como base fundamental para todo el desarrollo de los temas revisados, los fundamentos básicos de la teoría de conjuntos y, consiguientemente, toda su incidencia en la configuración actual de las nociones básicas del análisis matemático: número real, funciones de variable real, límites, continuidad, derivación e integración.

En la actualidad, según hemos visto anteriormente, en los cuestionarios oficiales la enseñanza del análisis matemático comienza en Secundaria: funciones, límites, continuidad, derivabilidad, etc están integrados en el currículo escolar. Los inicios de esta ideología referente a la enseñanza rigurosa del análisis en secundaria los encontramos, según se dijo ya anteriormente, alrededor de los años setenta.

La función es el elemento básico para la enseñanza de los restantes conceptos de análisis matemático. Su tratamiento en la actualidad está fundamentado epistemológicamente en la noción de aplicación:

La relation F est une **fonction** ou **application**

ssi

$\forall x \in \mathrm{dom}F,\ \exists!\, y : \quad (x,y) \in F$

Cet unique objet y est noté $F(x)$ ou $F'x$

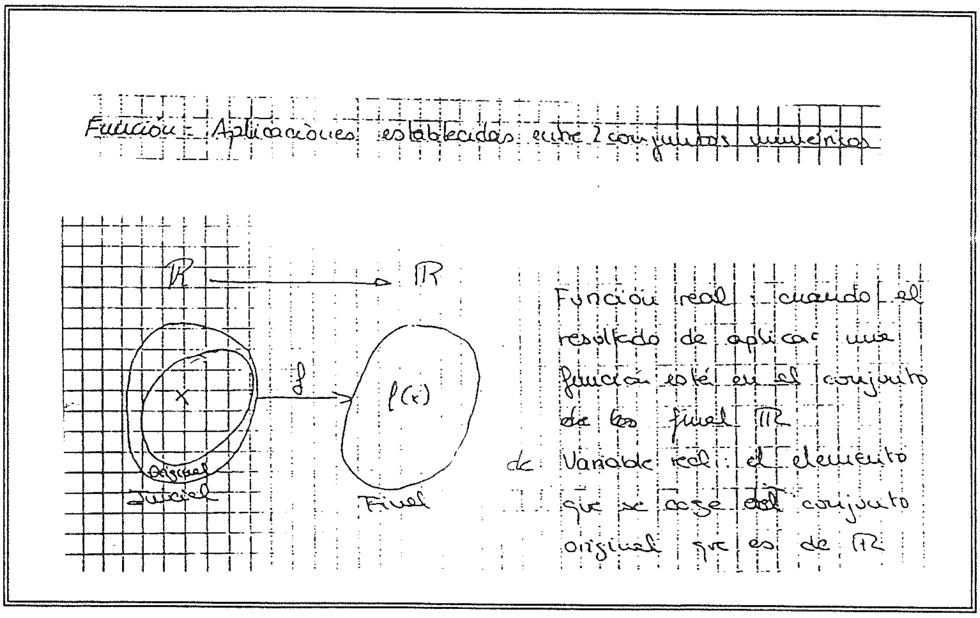
$F(x)$ est l'*image* de x par F

la *valeur* de F en x

On dit encore que F **applique** x *sur* $F(x)$

(Papy, 1968, p. 20)

En todos los apuntes examinados la definición que se adopta por parte de los profesores para el objeto función proviene de la anterior, y se configura como una especie de *discurso institucionalizado* (Margolinas, 1993, p.175). Veamos por ejemplo la siguiente:

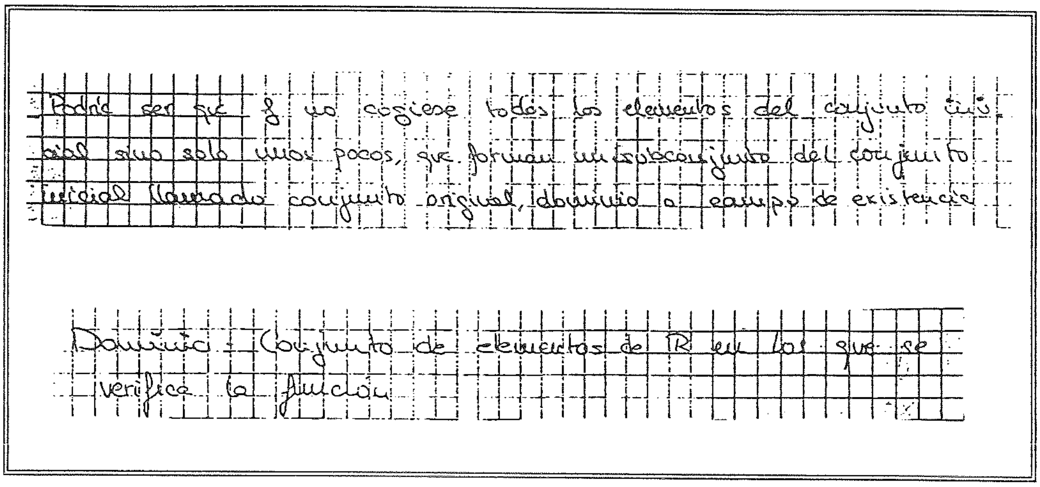


(2º BUP)

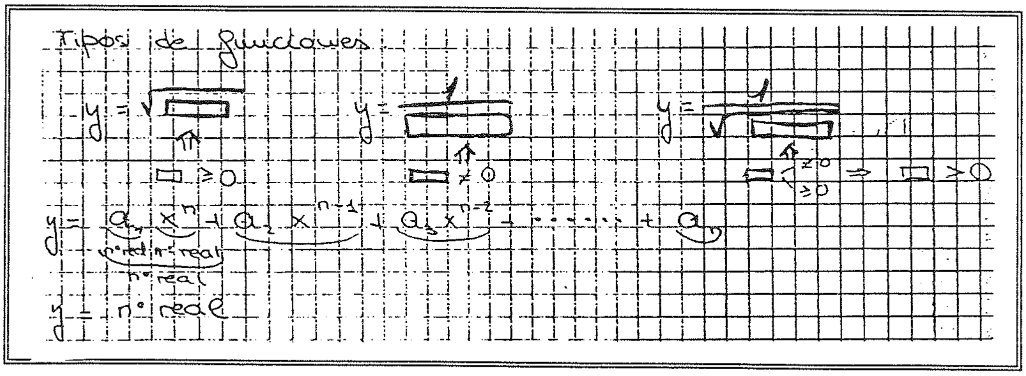
Como podemos apreciar los profesores adoptan un recurso intuitivo para la definición de función basado en los diagramas de Venn. Aún permanece en la epistemología escolar la convicción de que: *"Los diagramas de Venn constituyen un soporte intuitivo primordial y un ideograma gráfico riguroso."* (Papy, 1968, p. 2)

Este soporte permite al profesor situar la función en continuidad con nociones anteriores ya conocidas por los alumnos tales como las correspondencias, sin embargo esta continuidad se rompe rápidamente porque una vez introducida no se vuelve a utilizar más con este sentido. Los ejercicios y actividades de clase no pondrán en funcionamiento necesariamente la noción de función como aplicación entre conjuntos numéricos.

Inmediatamente, tal como ocurría en los manuales escolares, una vez dada la definición de función, se procede a la definición de Dominio e Imagen de una función de variable real.



Se dan *"reglas"* económicas para la determinación de dominios. Veamos por ejemplo:



(2º BUP)

La tipología de funciones sobre las que se calcularán dominios es normalmente la siguiente:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad f(x) = \sqrt{P(x)} \quad , \quad f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} \quad ,$$

$$f(x) = \sqrt{P(x)/Q(x)} \quad , \quad f(x) = \log \frac{P(x)}{Q(x)}$$

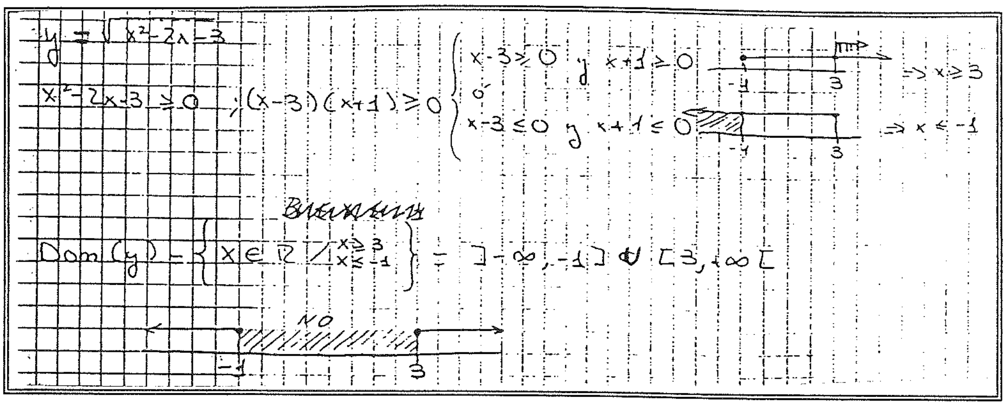
El profesor, con las *"reglas"* que propone, intenta reducir la incertidumbre de los alumnos cuando deban resolver ejercicios análogos. Introduce *"códigos"* externos al verdadero problema consiguiendo con ello *rutinizar* la tarea de determinación de dominios. Se podría considerar como un modo de *efecto "Topaze"*. Esto pone en evidencia la hipótesis empírica que sobre el aprendizaje tienen estos profesores: el error debe evitarse en las producciones de los alumnos, tanto a nivel de clase como en los exámenes.

Se recuerdan las técnicas de resolución de inecuaciones, de primer y segundo grado, para ello les proponen diversos ejercicios de aplicación. Estas mismas técnicas se aplicarán a la determinación de dominios. Por otra parte, observamos también en este proceso un aspecto del fenómeno de **transaccionalidad del saber a enseñar**: este debe progresar en el tiempo a partir de una contradicción *antiguo-nuevo*.

> *"Un objeto de enseñanza es en un principio presentado por el profesor como nuevo a los ojos de los alumnos, va a ser objeto de un aprendizaje. Al mismo tiempo, poco a poco, el profesor mostrará que este objeto puede estar relacionado con otros conocimientos ya adquiridos, que son "antiguos" en el orden lógico de adquisición".* (Arsac y cols., 1989, p.15)

El objeto función (y en particular el dominio) - nuevo para los alumnos - aparece de este modo en continuidad con otros objetos de enseñanza anteriores en la progresión escolar, tales como ecuaciones e inecuaciones.

En los ejercicios de determinación de dominios de funciones se comienzan a introducir unas *herramientas semióticas* (praxemas) tales como:

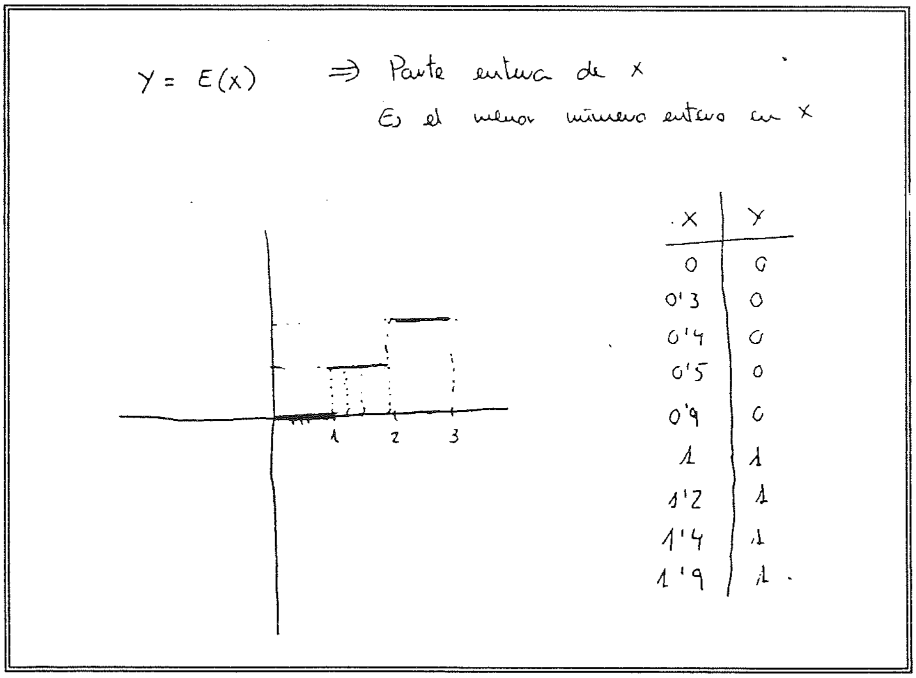


La utilización de estos *"praxemas"* muestran un fenómeno de **creatividad didáctica** por parte de los profesores: se crean objetos y herramientas de enseñanza que no figuran en el saber sabio.

> *"Un praxema es un instrumento de trabajo, que por su instrumentalidad contribuye al desarrollo de la actividad; y es al mismo tiempo un objeto material ostensivo que se manipula y se muestra"* (Bosch, 1991, p.1).

El tiempo y el esfuerzo que dedican la mayoría de los profesores al trabajo de los alumnos en la determinación de dominios de funciones es muy notable, casi la cuarta parte del total de ejercicios que desarrollan sobre el tema de funciones (principalmente en 2^{o}de BUP). El motivo de su éxito en la enseñanza parece bastante evidente: suministran múltiples posibilidades de ejercicios de evaluación de los alumnos, tanto a nivel de actividades de clase como para los exámenes. Permiten fácilmente al profesor satisfacer una de las condiciones del contrato didáctico: *La actividad del alumno debe ser prioritaria.* Así, una vez comenzado el tema y definidas las nociones de función, dominio y rango, el alumno, casi inmediatamente, *"se pondrá activo"* y *"aplicará"* la teoría a la resolución de ejercicios. Por otra parte, la restricción de evaluabilidad a que están sometidos los objetos de enseñanza hace que se generen, en numerosas ocasiones, tipos inéditos de problemas, que no se corresponden con sus raices epistemológicas. En este sentido Chevallard (1991) indica que uno de los objetivos del estudio de la transposición didáctica es el de ejercer una *"vigilancia epistemológica"*, es decir, examinar la distancia, la deformación, entre el objeto de saber y el objeto de enseñanza. En este caso podemos decir que la enseñanza ha deformado el objeto función adaptándolo fuertemente a sus necesidades de evaluabilidad *"rompiendo epistemológicamente"* con los problemas y contextos a los que está ligada esta noción desde su nacimiento.

Se comienzan a representar diferentes funciones expresadas algebraicamente, configurando siempre en primer lugar una tabla de valores. La tarea de representación gráfica de una función es, a lo largo de todos estos apuntes, siempre un punto de llegada, a través de la expresión algebraica de una función. Se establece pues la conexión **Fórmula --> Gráfico.** No presentan en ningún caso situaciones de variación donde la gráfica se observe como la representación de dicha variación y en la cual se determine la dependencia y conexión entre variables. Como en el caso de los manuales escolares, podemos decir que la gráfica se concibe como un fin en sí mismo y no como un útil del trabajo matemático del alumno.



Se representan en un principio funciones afines, cuadráticas y a "trozos", así como, funciones del tipo f(x) = |ax+b| y f(x) = E(ax+b). Sin embargo, las funciones con las que los alumnos trabajaron para determinar su dominio no se representan en casi ninguna ocasión. Existe pues, de forma implícita una clasificación de las funciones (siempre expresadas algebraicamente) dependiendo de la tarea que los alumnos han de realizar con ellas.

Es muy abundante la presencia de representaciones gráficas de funciones "*a trozos*" o tales como f(x) = E(ax+b), o bien f(x)= |ax+b|. En temas posteriores, según hemos podido observar, estas representaciones se utilizarán por el profesor como útil didáctico para dar un cierto grado de significación gráfica a conceptos matemáticos tales como límites laterales, continuidad, crecimiento o derivabilidad; ya que todos ellos se definen con alto grado de formalización y rigor. Veamos, por ejemplo, el tratamiento dado en un texto de nivel universitario a la noción de continuidad:

14.9. Funciones continuas

14.9.1. DEFINICIÓN.—*Sea f una función real o compleja definida en un intervalo* I *de* **R**, *y sea* $x_0 \in$ I. *Se dice que f es continua en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

De otra manera, f es continua en x_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\eta > 0$ tal que

$$|x - x_0| \leqslant \eta \quad \text{y} \quad x \in \mathrm{I} \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \epsilon.$$

14.9.2. Se puede definir también la continuidad en x_0 por la igualdad

$$\lim_{x \to x_0,\, x \neq x_0} f(x) = f(x_0).$$

Esto es equivalente a lo anterior, ya que ciertamente se verifica que $|f(x_0) - f(x_0)| \leqslant \epsilon$. Por el contrario, la condición

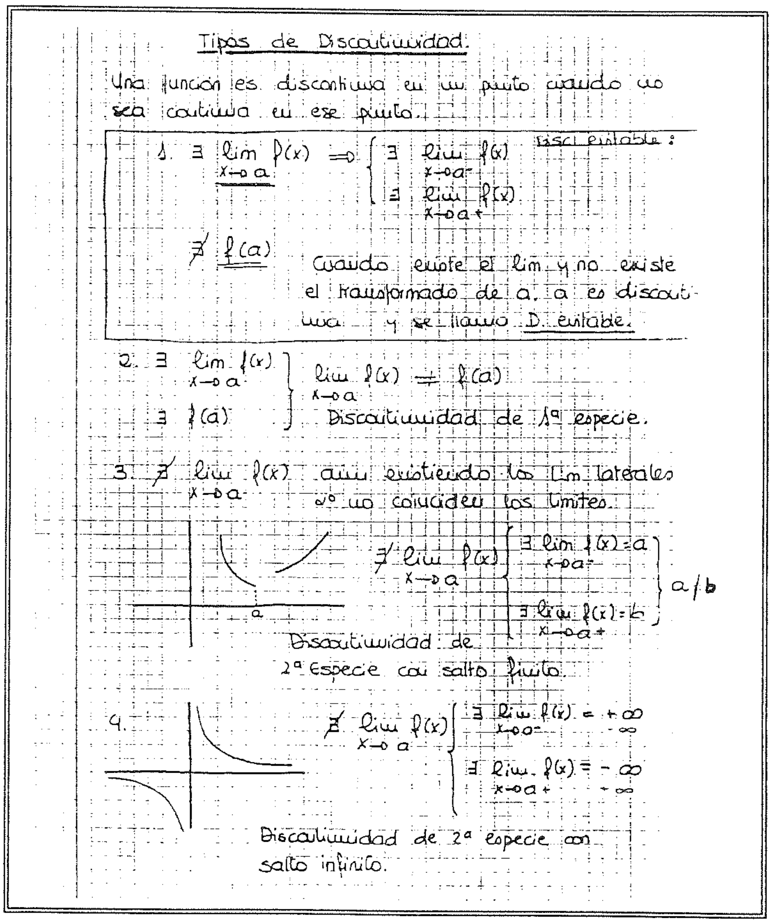
$$\lim_{x \to x_0,\, x > x_0} f(x) = f(x_0)$$

define un concepto nuevo, denominado *continuidad a la derecha* de f en x_0; de manera análoga se define la *continuidad a la izquierda*.

(Dixmier, 1974, p. 306)

Esta definición totalmente aritmetizada que expresa de una manera concisa y perfecta esta noción matemática, no necesita el recurso de la gráfica, es decir, del recurso figurativo. Como hemos visto en el capítulo 3, existía en la mente de los matemáticos de finales del s.XIX la necesidad de liberar la noción de continuidad de la evidencia geométrica. Así, en la definición anterior sólo aparecen números reales, la operación de restar, el valor absoluto y la relación *"menor o igual"* entre números reales. Hasta llegar a este grado de precisión y rigor la matemática necesitó siglos: *"La edad del rigor había llegado ya, sustituyendo los viejos recursos heurísticos y las ideas intuitivas por una perfecta precisión lógica. En 1872 Weierstrass y Heine habian conseguido aritmetizar el análisis"* (Boyer, 1986, p. 697)

Veamos ahora el tratamiento dado a esta noción en los apuntes de los alumnos:



Tipos de Discontinuidad.

Una función es discontinua en un punto cuando no sea continua en ese punto.

1. $\exists \lim_{x \to a} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \to a^-} f(x) \\ \exists \lim_{x \to a^+} f(x) \end{cases}$ Disc. evitable:

$\nexists f(a)$ Cuando existe el lim y no existe el transformado de a, a es discontinua y se llama D. evitable.

2. $\left.\begin{array}{l} \exists \lim_{x \to a} f(x) \\ \exists f(a) \end{array}\right\}$ $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ Discontinuidad de 1ª especie.

3. $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$ aun existiendo los lim laterales no coinciden los límites.

$\nexists \lim_{x \to a} f(x) \begin{cases} \exists \lim_{x \to a^-} f(x) = a \\ \exists \lim_{x \to a^+} f(x) = b \end{cases} a/b$

Discontinuidad de 2ª especie con salto finito.

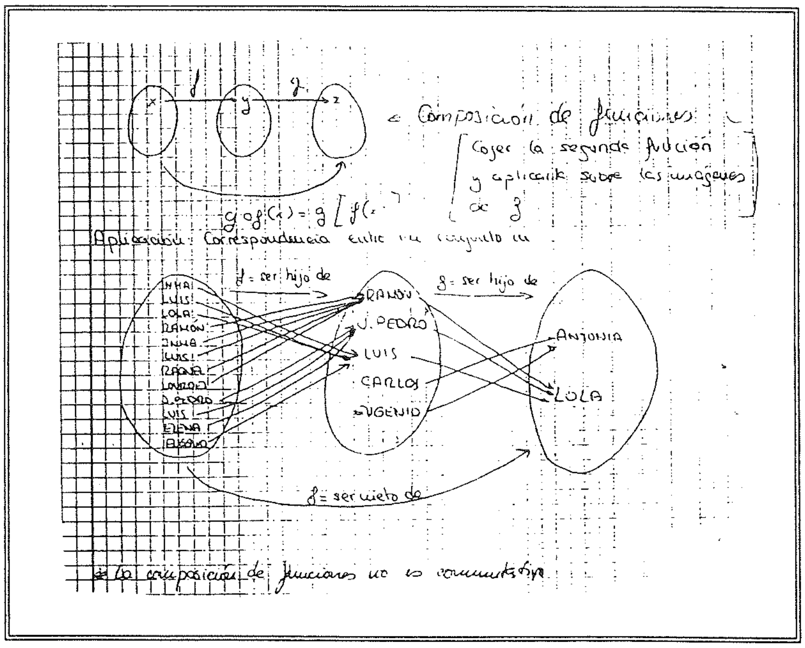
4. $\nexists \lim_{x \to a} f(x) \begin{cases} \exists \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \; (-\infty) \\ \exists \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \; (+\infty) \end{cases}$

Discontinuidad de 2ª especie con salto infinito.

el recurso mostrativo de la gráfica es constamente utilizado. El gráfico se constituye por lo tanto en un útil de significación para objetos matemáticos definidos con alto grado de rigor y formalización y, sobre todo, fuertemente descontextualizados. Es como un proceso inverso al seguido por la evolución histórica. En la actualidad el modelo de enseñanza valora enormenente, tanto por su economía como por su significación, el recurso geométrico de la gráfica.

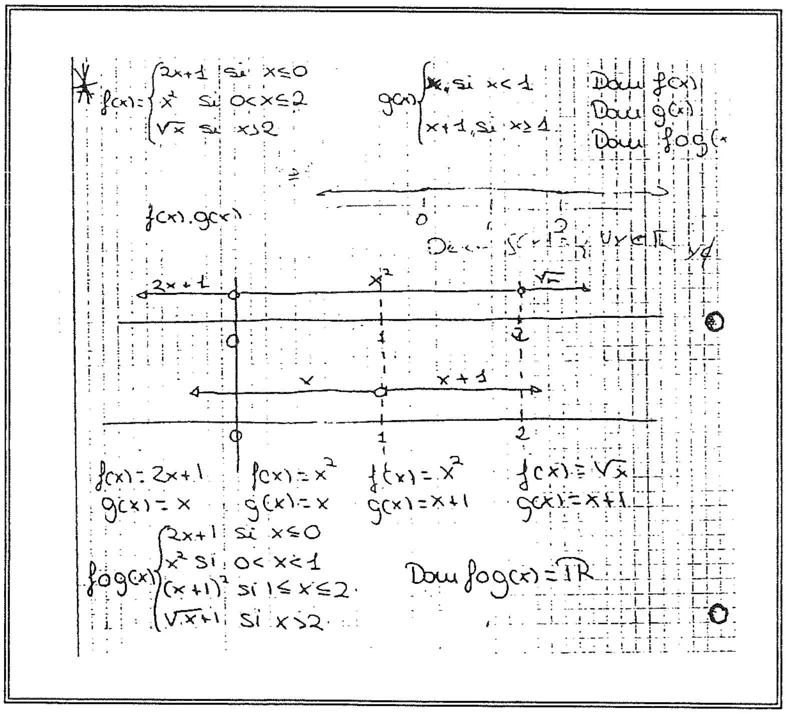
El enunciado discursivo del profesor necesita de la gráfica, ambos son indispensables, los dos se complementan. *"El contrato didáctico es diferente del contrato escolar habitual donde la figura no es más que una ilustración de un enunciado discursivo"* (Laborde, 1988, p. 356). La gráfica tiene así un caracter **ostensivo** de mostración inmediata del contenido del discurso del profesor. La gráfica se constituye así en la enseñanza en una herramienta ostensiva que, controlada por el profesor, sirve para salvar la distancia entre el rigor y la intuición, ya que los saberes que se manejan están fuertemente descontextualizados y no adquieren ningún otro tipo de significación.

Las operaciones con funciones (suma, resta, cociente, composición) se desarrollan con bastante extensión; primero se introducen las definiciones por el profesor de forma teórica rigurosa y formal, aunque apoyándose de nuevo en los diagramas de Venn como recurso intuitivo:



Los ejemplos propuestos mediante los diagramas muestran, en todos los apuntes, un claro intento por parte de los profesores para dar "algo" de significación a esta noción matemática, pero la distancia entre los ejemplos y los ejercicios a los que se verán enfrentados posteriormente es muy grande, con lo cual el intento se desvanece porque no tiene continuidad. Así, tanto la función, como la composición de funciones, mediante estos ejemplos quedan sumamente trivializados no llegando a adquirir ninguna significación matemática idónea.

Posteriormente, se realizan ejercicios de aplicación de composición de funciones. En estos ejercicios se insiste no sólo en la determinación del criterio (expresión algebraica) de la nueva función, sino principalmente en la determinación de su dominio. Aquí el grado de complejidad en la determinación del dominio aumenta considerablemente. El profesor vuelve a introducir *"reglas"* económicas para su determinación. De igual modo se introducen *herramientas praxémicas* de configuración gráfica, consideradas como artefactos didácticos, tales como:



Como vemos, en la determinación de dominios, para el caso de la suma, resta, o composición de funciones, los anteriores praxemas contribuyen a configurar un nuevo algoritmo que se constituye por una especie de adición de algoritmos ya ejecutados anteriormente. Esta tarea, ya rutinizada para funciones simples, adquiere ahora un status más *"noble"*, ya que, debido al aumento de complejidad en su determinación, sufre una revalorización tanto para el trabajo del profesor como para el del alumno. La *restricción de evaluabilidad* de todo saber a enseñar se ve plenamente satisfecha con este tipo de tareas, son muy fecundas en la generación de ejercicios facilmente algoritmizables y, en consecuencia, evaluables. En este sentido consideramos que: "*La algoritmización aparece en matemáticas como un medio de* **transacción** *entre el saber enseñado y el saber* a "saber" (*evaluable*). .... *El profesor no exigirá las respuestas más que de las formas frecuentemente algoritmizables del saber*" (Arsac y cols., 1989, p.24)

La inflación de este tipo de tareas en la enseñanza -ejercicios de aplicación reiterada de procedimientos algoritmizables- borra todo el sentido que la noción de función tiene de variabilidad, de cambio, de dependencia entre variables , ya que "*La reducción algorítmica de los objetos matemáticos contribuye al desvanecimiento del problema como motor de generación de conocimientos. ...mientras que por el contrario, la ausencia de algorítmos funciona como revelador del sentido de un problema*" (Schneider, 1979, p. 110)

En un intento de renovación matemática de los saberes a enseñar se introduce, por parte de todos los profesores, la estructura algebraica de *espacio vectorial de las funciones de variable real definidas sobre* $\mathbb{D}$. Encontramos aquí una clara influencia de la ideología estructuralista que conduce a un fenómeno de **metamatematización** de los saberes escolares. A los alumnos no se les pedirá posteriormente que realicen ningún ejercicio donde movilicen estas estructuras algebraicas. Esta característica queda implícita en el contrato didáctico y en los exámenes de evaluación no aparece ninguna pregunta en referencia a este contenido. Queda aquí patente además la estructura **topogenética** del sistema de enseñanza: el profesor estará siempre situado al lado de la teoría, mientras que los alumnos lo estarán de la práctica. "*Se instituyen dos modos diferentes de "saber", dos registros distintos de actos epistemológicos. ... Así se genera una dicotomización del objeto del saber: una versión para el enseñante y una versión para el enseñado*" (Chevallard, 1991, p. 75-76)

Según hemos visto, el objeto **función** está sujeto en su enseñanza al fenómeno de la **analítica del saber**, se ha desgajado en segmentos elementales: criterio-fórmula, construcción de tablas, determinación de dominios, representación gráfica; de modo que cada segmento puede constituirse a su vez en un objeto de estudio *"quasi"* autónomo. *"Esto implica una distorsión del objeto en relación con el saber sabio: el alumno verá muchos objetos allí donde el matemàtico no ve más que uno"* (Aussude y Artaud, 1991, p. 166). Esta fragmentación es consecuencia no sólo de la necesidad de *programabilidad, delimitación y autonomización* del saber enseñado sino de las restricciones del contrato didáctico debidas a la necesidad de evaluación. Así, de esta manera, el alumno rápidamente se pone a trabajar, a hacer ejercicios, no tiene que esperar largas exposiciones discursivas del profesor, nada más empezar el tema tiene ya "algo que hacer". Además, el profesor, intenta con ésto satistacer la ideología imperante en la *"noosfera"* didáctica respecto a la valoración de la actividad del alumno en el aula.

Todo lo anterior nos lleva también a admitir que la **economía** del sistema didáctico es el motor de la estructuración del conocimiento en la enseñanza: *"cuando la cantidad de información a tratar instantáneamente se vuelve excesiva para un sistema, esta se hace compleja, para tratar así de conducir la incertidumbre y la fiabilidad a un nivel aceptable"* (Brousseau y Centeno, 1991, p. 199). Así, hemos podido ver como el objeto función se divide, se analiza, se hace complejo, para controlar mejor cada segmento de este saber.

Podemos decir, en suma, que las tareas propuestas en clase a los alumnos en torno al objeto función son extremadamante localizadas y, de este modo, limitadas a unos estereotipos que permiten fácilmente ser evaluados. Así, podemos decir que existe una *"forma legítima"* que tiene las siguientes características:

- todos los ejercicios tienen solución (generalmente sólo una);
- todos los datos necesarios son suministrados;

- no hay datos superfluos;

por supuesto no hay ninguna regla escrita que precise estas condiciones, sin embargo, el profesor siempre las respeta. Son las reglas implícitas del contrato didáctico.

La restricción de evaluabilidad en las tareas propuestas a los alumnos garantiza así, una eficacia alta y económica: tratar de suministrar el máximo de buenas respuestas a los ejercicios propuestos en clase o bien en los exámenes.

4.8. CONCLUSIONES: CARACTERIZACION DE LA TRANSPOSICION DIDACTICA DE LA NOCION DE FUNCION QUE REALIZAN LOS PROFESORES EN EL AULA

(TOMANDO COMO INDICADOR LOS APUNTES DE CLASE DE LOS ALUMNOS)

Los profesores hacen una conducción de los saberes por un medio preferentemente discursivo. Aunque, en los apuntes de los alumnos no se encuentra todo lo dicho y hecho por el profesor en clase, sin embargo, la información recogida apoya la hipótesis de que se realiza una presentación fiel y económica de las nociones matemáticas. Adoptan una hipótesis empírica sobre el aprendizaje de los alumnos. Como consecuencia de esta hipótesis, se establece una identificación entre el *tiempo de enseñanza* y el *tiempo de aprendizaje* del alumno.

Adoptan como base fundamental para todo el desarrollo de este tema los fundamentos básicos de la teoría de conjuntos. La función se estudia como elemento básico para la enseñanza de los restantes conceptos de análisis matemático y su tratamiento formal está fundamentado epistemológicamente en la noción de aplicación.

Los profesores adoptan un recurso intuitivo para la definición de función basado en los diagramas de Venn. Este soporte permite al profesor situar la función en continuidad con nociones anteriores ya conocidas por los alumnos tales como correspondencias, sin embargo, esta continuidad se rompe rápidamente porque una vez introducida no se vuelve a utilizar más con este sentido. Hay pues una **ruptura epistemológica** entre la <u>concepción como</u>

aplicación adoptada por los profesores para introducir el objeto función y la concepción como fórmula algebraica que normalmente utilizarán de forma implícita en el desarrollo del temario.

El profesor introduce *"códigos"* para intentar reducir la incertidumbre de los alumnos en la resolución de ejercicios. Se podría considerar como un modo de *efecto "Topaze"*. Esto pone en evidencia la hipótesis empírica que sobre el aprendizaje tienen estos profesores: el error debe evitarse en las producciones de los alumnos, tanto a nivel de clase como en los exámenes.

El fenómeno de **transancionalidad del saber a enseñar** se presenta también en la resolución de ejercicios de determinación de dominios: el objeto función - nuevo para los alumnos - aparece en continuidad con otros objetos de enseñanza anteriores en la progresión escolar tales como ecuaciones e inecuaciones.

La enseñanza ha deformado el objeto función adaptándolo fuertemente a sus necesidades de evaluabilidad *"rompiendo epistemológicamente"* con los problemas y contextos a los que estuvo ligada esta noción desde su nacimiento.

En la tarea de representación gráfica de una función se establece siempre la conexión **Fórmula --> Gráfico.** La gráfica se concibe como un fin en sí mismo y no como un útil del trabajo matemático del alumno.

Se presenta, de forma implícita, una clasificación de las funciones (siempre expresadas algebraicamente) dependiendo de la tarea que los alumnos han de hacer con ellas (funciones para calcular su dominio, funciones para representar, funciones para estudiar su derivabilidad, etc)

La gráfica tiene además un caracter **ostensivo** de mostración inmediata del contenido del discurso del profesor. Se constituye así, para la enseñanza en una herramienta ostensiva que, controlada por el profesor, sirve para salvar la distancia entre el rigor y la intuición.

La determinación de dominios en el caso de la suma, resta, o composición de funciones, se constituye en una nueva tarea configurada por una especie de adición de algoritmos ya ejecutados anteriormente. Esta tarea, ya rutinizada para funciones simples adquiere ahora un status más *"noble"*, ya que, debido al aumento de complejidad en su determinación, sufre una revalorización tanto para el trabajo del profesor como para el del alumno. La *restricción de evaluabilidad* de todo saber a enseñar se ve plenamente satisfecha con este tipo de tareas, son enormemente fecundas en la generación de ejercicios facilmente algoritmizables y, en consecuencia, evaluables.

En un intento de renovación matemática de los saberes a enseñar se introduce, por parte de todos los profesores, la estructura algebraica de *espacio vectorial de las funciones de variable real definidas sobre* $\mathbb{D}$. Encontramos aquí una clara influencia de la ideología estructuralista que conduce a un fenómeno de **metamatematización** de los saberes escolares. A los alumnos no se les pedirá posteriormente que realicen ningún ejercicio donde movilicen de forma operativa estas estructuras algebraicas. Esta característica queda implícita en el contrato didáctico y en los exámenes de evaluación no aparece ninguna pregunta en referencia a este contenido. Queda aquí patente, además, la estructura **topogenética** del sistema de enseñanza: el profesor estará siempre situado al lado de la teoría, mientras que los alumnos lo estarán de la práctica.

Según hemos visto, el objeto **función** está sujeto en su enseñanza al fenómeno de la **analítica saber**, se ha desgajado en segmentos elementales: criterio-fórmula, construcción de tablas, determinación de dominios, representación gráfica; de modo que cada segmento puede constituirse a su vez en un objeto de estudio *"quasi"* autónomo. *"Esto implica una distorsión del objeto en relación con el saber sabio: el alumno verá muchos objetos allí donde el matemàtico no ve más que uno"* (Aussude y Arnaud, 1991, p. 166). Esta fragmentación es consecuencia no sólo de la necesidad de *programabilidad* del saber enseñado sino de las restricciones del contrato didáctico debidas a la necesidad de evaluación.

Todo lo anterior nos lleva también a admitir que la **economía** del sistema didáctico es el motor de la estructuración del conocimiento en la enseñanza; así, el objeto función se divide, se analiza, se hace complejo, para controlar mejor cada segmento de este saber.

Concepciones de la noción de función inducidas por los profesores en su enseñanza

A través del análisis de los apuntes de clase de los alumnos podemos determinar las siguientes concepciones:

CP1: Fórmula algebraica

Invariantes: Una función de variable real es una fórmula algebraica.

Representaciones asociadas: $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y=P(x)$,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad , \quad f(x) = \sqrt{P(x)} \quad , \quad f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} \quad ,$$

$$f(x) = \sqrt{P(x)/Q(x)} \quad , \quad f(x) = \log \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$f(x) = E(ax+b)$, $f(x) = \text{Mant}\ (x)$, $y = |ax + b|$,
funciones exponenciales
$f(x) = a^{p(x)}$, $f(x) = a^{1/x}$, $f(x) = e^{p(x)}$, etc.

funciones trigonométricas $y = \text{sen}\ x$, $y = \cos x$, etc.;
o bien, funciones "*a trozos*", tales como:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{si } x \in D_1 \\ ax + b, & \text{si } x \in D_2 \\ ax + b, & \text{si } x \in D_3 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{si } x \in D_1 \\ ax + b, & \text{si } x \in D_2 \\ ax^2 + bx + c, & \text{si } x \in D_3 \end{cases}$$

o de modo más genérico,

$$f(x) = \begin{cases} u(x), & \text{si } x \in D_1 \\ v(x), & \text{si } x \in D_2 \\ r(x), & \text{si } x \in D_3 \end{cases}$$

Situaciones: Sus situaciones de empleo están categorizadas según sus características. Así, se utilizan unas específicamente para la determinación de dominios (por ejemplo, las funciones racionales, irracionales o logarítmicas), otras para presentar y analizar conceptos tales como límites laterales o continuidad/discontinuidad de una función en un punto (por ejemplo, las funciones *"a trozos"*, o $y = E(x)$, etc), otras para presentar y estudiar la derivabilidad (por ejemplo, $y = |ax + b|$), otras para *"representarlas"* y hacer su estudio analítico, etc.

CP2: Curva representada en unos ejes cartesianos

Invariantes: Una función es una gráfica representada en unos ejes cartesianos.

Representaciones: Rectas, parábolas, hipérbolas, funciones *"a trozos"*, gráficas con puntos *"angulosos"*, funciones escalonadas, gráficas con intervalos de periodicidad, etc

Situaciones: El profesor hace inicialmente un uso de las gráficas con carácter ostensivo para mostrar de forma intuitiva e inmedita el contenido formal de su discurso. Se emplean para salvar la distancia entre el rigor y la intuición en la presentación de los principales conceptos del análisis matemático: límites laterales, continuidad, derivabilidad, máximos/mínimos, integrales definidas, etc. Posteriormente, la gráfica se concibe como el punto de llegada en los ejercicios de *"estudio analítico de funciones"*.

CP3: Aplicación entre conjuntos numéricos

Invariantes: Una función es una aplicación entre dos subconjuntos de números reales.

Representaciones asociadas: $f: \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$, o bien, $x \longmapsto f(x)$

Se emplean los diagramas de Venn y los sagitales para indicar de una forma muy intuitiva el carácter de asignación que lleva implícito la noción de aplicación entre conjuntos. También se usan representaciones triviales tales como *"máquinas"* que tratarían de mostrar, de algún modo, la transformación que sufre el elemento original hasta *"convertirse"* en imagen.

Situaciones: Se usa para la presentación de la misma noción de función, para introducir asimismo la composición de funciones y, en general, para la introducción formal de otras nociones del cálculo infinitesimal tales como límites, continuidad, derivabilidad, etc.

CAPITULO 5

CONCEPCIONES DE LOS ALUMNOS DE SECUNDARIA SOBRE LA NOCION DE FUNCION

5.1. INTRODUCCION

Uno de los objetivos planteados en nuestra investigación ha sido la evaluación de las concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Como indica Webb (1992, p.662), la evaluación debe ser "*el informe comprensivo del funcionamiento de un sujeto o grupo respecto a la matemática o en la aplicación de la matemática*". Por ello, no podemos reducir el proceso de evaluación a la clasificación de los sujetos según una escala numérica. Para nosotros es el aspecto cualitativo del conocimiento del sujeto - qué se conoce- el que verdaderamente nos proporciona un informe sobre la concepción del sujeto, en la cual debemos también diferenciar los tres componentes descritos en las conclusiones del capítulo 1, que son las siguientes:

- el conjunto de invariantes que el sujeto atribuye al objeto como notas esenciales que lo determinan;

- el conjunto de representaciones que emplea, en relación al objeto;

- el conjunto de situaciones para las cuales el sujeto considera apropiado el empleo del objeto dado como útil de resolución.

En este capítulo describimos un estudio de los aspectos cualitativos de estos tres componentes de las concepciones respecto a la noción de función, realizado sobre una muestra de alumnos de secundaria. Comenzamos describiendo la muestra y el cuestionario empleado, prosiguiendo con las conclusiones obtenidas del análisis de los datos.

5.2. DESCRIPCION DE LA MUESTRA

Los alumnos a los que hemos pasado el cuestionario pertenecen a los cursos 2º de BUP, 3º de BUP y COU de los Institutos de Bachillerato *"Santa Catalina de Alejandría"* (Jaén), *"Virgen del Carmen"* (Jaén) y *"Miguel Sánchez"* (Torredelcampo - Jaén); distribuyéndose de la siguiente forma:

CURSO	Nº de alumnos	Porcetaje
2º BUP	139	43.0
3º BUP	86	26.6
COU	98	30.3
Total	323	100.0

Los Institutos *"Santa Catalina"* y *"Virgen del Carmen"* están ubicados en una zona de Jaén capital cuya población es fundamentalmente de clase media. El Instituto *"Miguel Sánchez"* de Torredelcampo es el único que tiene este pueblo de 9.000 habitantes, situado a 20 Km de Jaén capital.

Hemos elegido tan sólo alumnos de 2º de BUP, 3º de BUP y COU porque es en estos cursos donde, según los cuestionarios oficiales, se incluyen la mayoría de los contenidos relacionados con "Funciones"; además, los alumnos, han de servirse de la función como un útil para trabajar otros múltiples conceptos matemáticos que se estudian en estos cursos, tales como: derivada, límite, continuidad, aproximación local de funciones, etc.

En cuanto a las especialidades de los alumnos, hemos de añadir que en 2º de BUP no hay asignaturas optativas y todos los alumnos cursan las mismas; sin embargo, en 3º de BUP y COU se trata de alumnos que pertenecen a la opción de "ciencias", en la cual, las Matemáticas figuran como materia obligatoria.

Las clases estaban compuestas por chicos y chicas, aunque nosotros en nuestro trabajo no hemos tenido en cuenta esta variable.

5.3. ELABORACION Y ANALISIS DEL CUESTIONARIO

<u>Método y técnica de recogida de datos</u>

Podemos clasificar el método de recogida de datos empleado como de medida (Fox, 1980), ya que el objetivo de la recogida de datos no es describir los resultados directamente observados, sino inferir a partir de ellos ciertos constructos teóricos subyacentes, de los cuales, las respuestas obtenidas constituyen los indicadores empíricos. La medida comprende la serie de procedimientos que nos llevan de un concepto teórico a una representación concreta de dicho concepto (Dane, 1990).

En nuestro caso, el interés se centra en las concepciones de los alumnos sobre la noción de función y, los datos analizados, son las respuestas de los alumnos -argumentos, representaciones simbólicas y gráficas y procedimientos- en los ítems de la prueba. Como se va a razonar al describir estos ítems, consideramos que en su conjunto constituyen una muestra representativa de las situaciones problemáticas asociadas al concepto de función para el nivel de enseñanza elegido. Puesto que las respuestas dadas por cada alumno constituyen para él prácticas significativas asociadas a las tareas propuestas, debido a la relación entre las tareas y la noción de función, el conjunto de respuestas de los alumnos es un conjunto de indicadores empíricos de sus concepciones sobre esta noción.

Respecto a las teorías psicométricas clásicas, consideramos que el instrumento se acercaría a los supuestos subyacentes en el método de *"maestría de dominio"* (Thorndike, 1989). Esta teoría presupone la existencia de un dominio de conocimiento definido y delimitado con claridad, para el cual se desea evaluar la competencia adquirida por los sujetos. El proceso de medición comienza en un muestreo de las tareas que componen este dominio. Una vez determinado el porcentaje de tales tareas resueltas correctamente por cada individuo, se infiere a partir de ello la proporción total de tareas del dominio que el sujeto sería capaz de resolver correctamente. Las respuestas a los ítems de la prueba se toman como indicadores empíricos del grado de dominio de los conocimientos del sujeto. Como vemos esta teoría es muy cercana a nuestros supuestos. Sin embargo, nuestro interés se centra en los aspectos cualitativos y no en los cuantitativos de las respuestas de los alumnos.

Como consecuencia, y para asegurar la relación entre los indicadores empíricos y los conceptos subyacentes inferidos a partir de los mismos, el instrumento empleado debe cumplir un doble requisito de validez y fiabilidad. La validez del instrumento nos indicaría la ausencia de sesgo sistemático, mientras que la fiabilidad indicaría su consistencia o precisión en la población medida (Carmines y Zeller, 1979). Estos aspectos han sido tenidos en cuenta y se describirán con detalle en las secciones posteriores de este capítulo.

La técnica de recogida de datos ha sido la encuesta, puesto que los datos han sido obtenidos a partir de las respuestas de los alumnos (Fox, 1980). Este autor considera que esta técnica es adecuada para las investigaciones de tipo descriptivo, evaluativo y comparativo, en las cuales puede englobarse la nuestra. Los datos fueron recogidos personalmente por la investigadora, utilizando un proceso de interacción mixta. En cada uno de los grupos participantes la investigadora personalmente se reunió con el grupo, explicándoles el propósito de la investigación, el fin del instrumento y el modo en que debía ser completado, respondiendo a cuantas dudas fueron suscitadas. A continuación distribuyó los cuestionarios y los alumnos los completaron de acuerdo con las instrucciones recibidas.

<u>Proceso de construcción del cuestionario</u>: <u>Validez de contenido</u>

Entre las distintas acepciones de la noción de validez, consideramos que la que mejor se ajusta al propósito de nuestra investigación es la de validez de contenido (López Feal, 1986; Messick, 1992). En esta acepción, un instrumento se considera válido si se puede razonar que mide lo que pretende, porque existe una base lógica y/o empírica para la elección del contenido real del instrumento. El contenido debe ser representativo en cuanto muestra de todos los contenidos posibles. Para probar la validez del contenido el investigador debe probar que conoce el universo o población de contenidos y que ha tomado una muestra representativa para elaborar el instrumento.

Como consecuencia, para asegurar este tipo de validez, y una vez decidido el contenido de la prueba, se siguieron las siguientes fases en la construcción del instrumento:

1) Recopilación inicial de posibles ítems a incluir en la prueba.

Estos ítems fueron tomados de investigaciones tales como las de Vinner y Dreyfus (1989), Vinner (1983) y Tall y Bakar (1992), de ejercicios y problemas incluídos en libros de texto de diferentes planes de estudios y de propuestas didácticas elaboradas por diferentes entidades.

2) Selección de ítems para constituir dos pruebas piloto.

Tuvimos en cuenta su mayor o menor adecuación a las tres componentes que queríamos determinar en la constitución de las concepciones del sujeto:

- invariantes que el sujeto podía atribuir como notas esenciales del objeto función,
- representaciones de dicho objeto;
- situaciones de variación en las que el sujeto podría (o no) considerar adecuado el empleo del objeto función como útil de modelización.

3) Elaboración de los ítems seleccionados.

Una vez seleccionada una colección que cumplía los requisitos anteriores, los sometimos al juicio de varios profesores de enseñanza secundaria a cuyos alumnos teníamos previsto pasar el cuestionario y de investigadores de nuestro departamento. Pedimos a todos ellos que valoraran la mayor o menor adecuación de los ítems seleccionados en referencia a las diferentes componentes de la noción de concepción. Considerando sus consejos tomamos una muestra de los ítems más adecuados, estimando además que los alumnos deberían poder contestar al cuestionario en una hora aproximadamente. Esta muestra constituyó nuestra primera prueba piloto.

4) Aplicación de la prueba piloto a una muestra de alumnos.

Una vez pasada esta prueba a un grupo de alumnos de secundaria, detectamos defectos de forma (comprensión de los enunciados) y de extensión (era insuficiente una hora para resolverla). Rectificados dichos defectos, construimos otra prueba que pasamos a otro grupo de alumnos de secundaria, detectando que era aún el tiempo de una hora insuficiente.

A partir de todas las experiencias anteriores construimos ya la prueba definitiva.

Análisis del cuestionario definitivo

Se trata de un cuestionario formado por 6 ítems, figurando un total de 25 cuestiones. En su elaboración hemos optado por cuestiones abiertas en lugar de opciones múltiples. Queremos estudiar el repertorio de posibles argumentaciones que los alumnos son capaces de expresar en las justificaciones de sus respuestas. Estas argumentaciones nos permitirán inferir sus concepciones sobre la noción de función. Hemos de insistir que nos interesa principalmente destacar las concepciones de los alumnos, no valorar su competencia escolar.

El cuestionario consta de tres partes, cada una de las cuales se refiere a uno de los componentes de las concepciones del sujeto que se describen en las conclusiones del Capítulo 1: la primera está formada por 3 cuestiones enfocadas, de tal modo, que los alumnos, en sus respuestas, puedan dar una descripción personal de la noción de función. La segunda parte contiene 14 cuestiones relacionadas con la representación simbólica de funciones, 7 de ellas referidas a la identificación de funciones representadas gráficamente, y 7 a la identificación de funciones expresadas algebraicamente. Por último, la tercera parte contiene tres situaciones-problema, propuestas para que los alumnos puedan modelizar las variaciones de diferentes magnitudes, así como sus dependencias, por medio de funciones matemáticas.

Pasemos a estudiar detenidamente las preguntas contenidas en el cuestionario:

5.3.1. **DEFINICION DE FUNCION** (Item 1, cuestiones 1, 2, 3)

> Si tuvieses que explicar a un alumno de 1º de BUP lo que es una función matemática, ¿qué le dirías?
> ¿le indicarías algunos ejemplos?, ¿cuáles?
> ¿le propondrías algún ejercicio, o algún problema, para que él lo resolviese? Indica alguno.

Hemos enfocado esta pregunta para que los alumnos, en sus respuestas, traten de dar una explicación de esta noción a los compañeros de cursos inferiores. Pretendemos con ello, que los alumnos procuren valerse de cuantos recursos sean necesarios para aclarar suficientemente lo que ellos entienden por una función matemática.

Nos interesa estudiar las definiciones que los alumnos elaboran del concepto de función, analizando, de una manera pormenorizada, los elementos matemáticos que incluyen en las mismas. Queremos observar el aspecto **declarativo** que encierran estas definiciones, ya que a través de ellas nos deben mostrar explícitamente una parte muy significativa de sus concepciones sobre la noción de función: los invariantes que ellos le asocian en la determinación de la misma.

Analizaremos además, si incluyen términos tales como:
- Aplicación, correspondencia, asociación;
- Transformación, dependencia.

Hemos incluido estos apartados porque consideramos que se trata de términos clave en la determinación de la noción de función. "*Aplicación, correspondencia, asociación*" indican de algún modo una asignación entre objetos, mientras que "*transformación, dependencia*" nos remiten a los efectos de la variación (regida por leyes o criterios) entre objetos cambiantes: "*Solo podremos percibir que una cosa* <u>*depende*</u> *de otra, variando cada una de ellas a fin de constatar cual ha sido el efecto de la variación y, en consecuencia de la* <u>*transformación*</u>" (René de Cotret, 1989, p. 7).

Además, tendremos en cuenta si los términos que incluyen en sus definiciones pertenecen a diferentes cuadros: numérico, gráfico, o bien, algebraico.

Teniendo en cuenta todo lo anteriormente expuesto, vamos a tratar de analizar en las definiciones de nuestros alumnos, qué términos son los que utilizan para describir su *"definición personal"* de la noción de función. Estudiremos el conjunto de palabras que usan para especificar lo que para ellos constituye una función matemática.

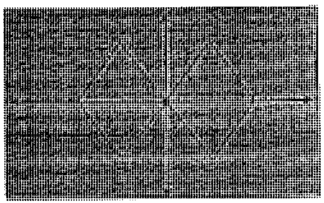
En esta primera pregunta, hemos pedido también a los alumnos que incluyeran ejemplos de funciones, e incluso que propusieran ejercicios sobre esta noción. Estamos interesados en conocer las *tareas* que proponen como ejercicios, así como, las funciones sobre las que se deben realizar estos ejercicios. Esto nos permitirá inferir algunas características del contrato didáctico existente entre profesor y alumnos. Asimismo, se pueden comparar los ejemplos presentados por el alumno con la definición dada de la noción. Los primeros corresponderán a prototipos de su *"imagen conceptual"*, mientras que los segundos serían una explicitación de su *"definición del concepto"*. Podremos ver si existe consistencia o no entre estos dos aspectos, o si se produce el fenómeno de *"compartamentalización"*.

Nos interesa también estudiar el tipo de dominio numérico que normalmente utilizan nuestros alumnos, tanto en los ejemplos como en los ejercicios que proponen. El número real es considerado en el temario de Secundaria como base para el estudio del Cálculo Infinitesimal, ¿utilizan nuestros alumnos $\mathbb{R}$, o cualquier subconjunto del mismo, como dominio en las funciones que proponen? O bien, se limitan a utilizar como dominio más común el conjunto de los naturales, con lo cual restringen la consideración de las funciones como sucesiones.

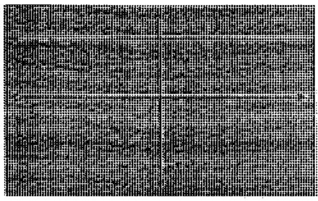
5.3.2. DETERMINACION DE FUNCIONES A PARTIR DE DIFERENTES GRAFICOS (Item 2, cuestiones 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)

2. Te presentamos a continuación varias figuras. Debes decir, para cada una de ellas, si se trata o no, de la representación gráfica de una función. Explica detalladamente tus respuestas.

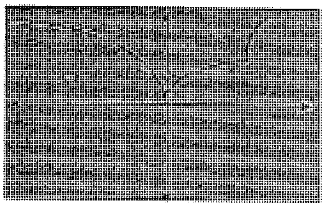
GA)



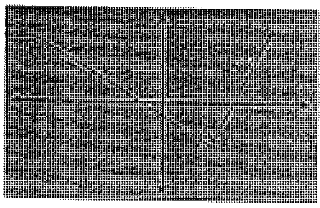
GB)



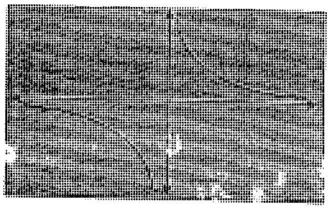
GC)



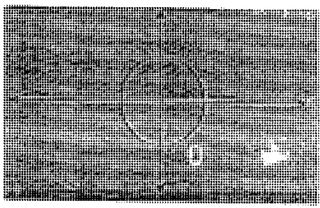
GD)



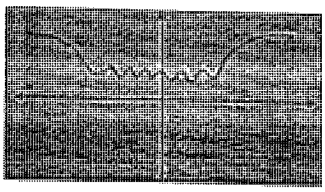
GE)



GF)



GG)



Este ítem implica para el alumno la realización de una tarea de identificación de gráficos de funciones, justificando en cada caso su respuesta. De forma intencional no hemos querido poner estas gráficas en ningún contexto concreto. Tan sólo aparecen las gráficas en los ejes cartesianos.

Los alumnos están ante varias correspondencias donde, de forma visual, se observa inmediatamente la unicidad, o no, del elemento imagen para un original dado. Se trata de un ejercicio "muy cómodo" para aplicar, de forma inmediata, la definición de la noción de función que aparece en sus manuales (correspondencia unívoca). Deben aplicar un saber que ya ha pasado por una fase de institucionalización.

Nos interesa, además, determinar si existe coherencia en las contestaciones de los alumnos a nivel declarativo y a nivel argumentativo. Es decir, si dan una definición de función (ítem 1) que posteriormente no usan en el resto de sus contestaciones al cuestionario.

Como variables de tarea del conjunto de ítems incluidos se han seleccionado las siguientes:

- Funciones constantes o no constantes;
- Gráficas con unicidad del elemento imagen o no;
- Funciones continuas o no continuas;
- Funciones derivables o no derivables;
- Funciones cuya gráfica presenta regularidad o no.
- Funciones cuya gráfica (y expresión algebraica correspondiente) figuran en el curriculo escolar o no.

5.3.3. DETERMINACION DE FUNCIONES A PARTIR DE DIFERENTES EXPRESIONES ALGEBRAICAS (Item 3, cuestiones 11, 12, 13, 14, 15, 16,17)

3. Te presentamos a continuación varias expresiones algebraicas. Debes decir, para cada una de ellas, si se trata o no, de una función. Explica detalladamente tus respuestas.

AA)
$$f(x) = \begin{cases} 4x + 3, & x \in \mathbb{R},\ x \leqslant 2 \\ 0, & x \in \mathbb{R},\ 2 < x < 3 \\ 2, & x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 3 \end{cases}$$

AB)
$$y = 4$$

AC)
$$x^2 + y^2 = 1$$

AD)
$$x.y = 5$$

AE)
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para todo } x \text{ racional} \\ 0 & \text{para todo } x \text{ irracional} \end{cases}$$

AF)
$$y = \frac{3}{x}$$

AG)
$$f(x) = \pm\sqrt{4x + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se trata, como en el caso anterior, de una tarea de identificación de funciones, ahora interna al registro algebraico. Los alumnos deben, además, dar una justificación razonada de dicha identificación. Nos interesa, por lo tanto, no sólo que identifiquen las expresiones que son funciones, sino que argumenten por qué. Con ello, queremos analizar, el aspecto **argumentativo** que encierran sus contestaciones, esto nos debe mostrar una parte muy importante de sus concepciones sobre la noción de función (representaciones, útiles, prácticas asociadas, etc) y además podremos determinar el grado de consistencia que tienen.

Hemos seleccionado siete expresiones algebraicas teniendo en cuenta principalmente su *"forma"* dentro del posible repertorio de Secundaria; adoptando la presentación que habitualmente figura en la sección de "ejercicios" de los manuales escolares utilizados por los alumnos a los que pasamos el cuestionario.

Se han elegido dos funciones *"por partes"* (AA - AE), una definida en tres intervalos de la recta real y otra conocida como la *"función de Dirichlet"* discontinua en todo punto.

Hemos creido conveniente presentar las expresiones algebraicas (algunas son funciones y otras no), tanto de modo explícito ($f(x) = 4x + 3$, o bien $y = 3/x$), como implícito ($x^2 + y^2 = 1$, o bien $x.y = 5$).

También se han incluido funciones constantes, así como, expresiones algebraicas racionales e irracionales.

De forma intencionada hemos excluido las funciones trascendentes, sólo figuran pues, las lineales, afines, racionales e irracionales, por estar presentes de forma más amplia y significativa en el currículo de Secundaria.

Como variables de tarea del conjunto de ítems incluidos se han seleccionado las siguientes:

- Expresiones algebraicas que representan funciones de variable real o no.
- Explícitas o implícitas.
- Definidas en todo $\mathbb{R}$ o en subconjuntos de $\mathbb{R}$.
- Con una única expresión algebraica o *"a trozos"*.

5.3.4. EMPLEO DE FUNCIONES EN SITUACIONES DE MODELIZACION

(Items 4, 5, 6, cuestiones 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25)

La tercera parte del cuestionario la constituyen tres situaciones problema. Están propuestas fundamentalmente para que los alumnos puedan utilizar la función matemática como una herramienta de modelización a través de sus representaciones gráfica y/o algebraica. Pensamos que *"la percepción de las funciones como una herramienta apropiada para modelizar* *relaciones entre magnitudes físicas u otras, es una condición* **sine qua non** *para dar sentido al concepto de función en su totalidad"* (Sierpinska, 1992, p.42).

Según hemos visto en la enseñanza Secundaria actual se ha logrado efectuar una descontextualización del objeto función de la red de problemas donde el concepto se inscribe: *"El verdadero origen del concepto de función está en plantear, pedir, producir o reproducir dependencias o conexiones entre variables acontecidas en el mundo físico, social o mental, esto es,* <u>*en*</u> *y* <u>*entre*</u> *estos mundos"* (Freudhental, 1983, p.494)

Hemos elegido tres sistemas diferentes a estudiar: uno geométrico, otro espacio-temporal y por último una situación de proporcionalidad. Hemos tenido en cuenta que una función expresa un determinado grado de dependencia entre variables, esto puede dar lugar a aspectos fenomenológicamente diferentes, así las situaciones 4 y 5 acentúan el sentido de la función como dependencia dinámica entre variables, mientras que la 6 expresa claramente una relación de proporcionalidad (estática).

Las funciones que modelizan las situaciones tienen las siguientes características:

1. Funciòn cuadrática cuyo dominio es un subconjunto continuo de $\mathbb{R}$.
2. Función *"a trozos"* compuesta por funciones lineales y constantes. Su dominio es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$.
3. Función lineal cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{N}$.

Intencionalmente hemos elegido tres situaciones no convencionales en la enseñanza de esta noción, ya que creemos que de este modo, podremos analizar mejor las representaciones, los útiles etc, en suma, las concepciones de los alumnos: *"el empleo de situaciones no-estandar está justificado por el deseo de hacer surgir, a través de posibles fracasos, las características de las concepciones movilizadas por los alumnos"* (Tonelle, 1979 , p.

67). Así, no solamente tendrán que aplicar los conocimientos de forma rutinaria, sino "*adaptarlos*" a una situación que no satisface las condiciones habituales.

Deben observar la constancia del fenómeno a través de la búsqueda de regularidades para establecer la ley de variación. Esto lo podrán hacer a través de una interacción entre aproximaciones cualitativas y cuantitativas. La aproximación cualitativa ayuda a captar el aspecto de variabilidad y continuidad del fenómeno, mientras que la cuantitativa permite precisar la ley de dependencia. Nuestros alumnos, como hemos visto en el capítulo anterior, manejan en la matemática de Secundaria una herramienta muy potente -la función- en sus registros algebraico y gráfico, pero también es cierto que se maneja de un modo *amorfo* sin llegar a captar su auténtico significado, y nos preguntamos ¿serán capaces de modelizar situaciones de variación con ella?. Han manejado, asimismo, útiles algebraicos y de representación (letras, tablas, variables, gráficos, ecuaciones, fórmulas, ...), tienen ante sí instrumentos de "*ataque*" idóneos para el planteo y resolución de las situaciones ¿cómo los pondrán en funcionamiento?

Es evidente que para resolver las cuestiones planteadas en estas situaciones, los alumnos deben construir un esquema pertinente, más o menos general a partir de fórmulas conocidas, sin embargo, al no estar contemplados este tipo de problemas, de modo general en la enseñanza actual, se encontrarán ante un cambio de contrato, que podríamos pensar, les conduciría a un cierto "*bloqueo*". Para salvar esta posibilidad hemos de señalar que todas las situaciones admiten una primera via de solución a través de un tratamiento empírico, ya que los alumnos pueden comenzar a estudiar la variación y la dependencia a través de un estudio numérico (tabla de valores) muy accesible, observando con ello el crecimiento o decrecimiento, la monotonía, etc. para pasar posteriormente a una representación más codificada (gráfica o algebraica). Esperamos, no obstante, que emerjan comportamientos erróneos que serán un índice de los límites de las concepciones de los alumnos

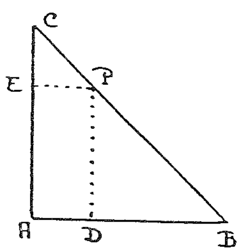
En suma, los objetivos específicos que perseguimos son los siguientes:

- analizar el modo en que los alumnos identifican los objetos que cambian y cómo cambian;
- analizar las herramientas que utilizan en el proceso de modelización: numéricas, tablas, gráficas, algebraicas, geométricas, ideográficas, ...;
- analizar la **adecuación** del modelo al sistema que modeliza;
- analizar las diferencias existentes entre el tratamiento que dan a la situación según el cuadro que movilizan:
  - algebraico,
  - físico,
  - gráfico,
  - geométrico,
  - numérico

A continuación analizamos las características específicas de cada una de las tres situaciones propuestas a los alumnos.

1ª Situación: Modelización en contexto GEOMETRICO
(Item 4, cuestiones 18, 19, 20)

4.- Dado el triángulo rectángulo ABC, cuyos catetos AB y AC miden ambos 11 cm, marcamos un punto P cualquiera sobre la hipotenusa y obtenemos el rectángulo PDAE. Queremos estudiar cómo varía el área del rectángulo cuando variamos la posición de P.



a) ¿Podrías dibujar una gráfica que represente la variación del área según la posición del punto P?

b) ¿Puedes encontrar una expresión matemática que represente de modo general la variación anterior?

c) ¿Crees que se puede determinar en esta situación una función matemática?. Explica con detalle tu respuesta.

Se trata de una situación de variación presentada en un marco geométrico: la variación del área de un rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

En esta situción hemos querido, de forma intencional, incluir la variación de este área, ya que existe una fórmula (S=b.h) sumamente conocida por ellos en Geometría, pero que en esta materia conserva un carácter fundamentalmente estático (los alumnos para calcular el área sólo deben sustituir). Están pues, ante una situación, en la que deben transformar una fórmula geométrica en una función matemática con un carácter de variación dinámica:

Fórmula geométrica ————> Función matemática

Nos interesa observar cómo los alumnos utilizan un *"modelo"* conocido -la fórmula (S=b.h)- como herramienta de modelización. Analizaremos el proceso de adecuación de este modelo a la situación, las posibles condiciones y restricciones, que lo transforman en función.

Además, en la fórmula S = b.h aparecen tres variables que ellos deben reducir a dos, estableciendo una doble relación de de dependencia (y = x(11 - x)).

Epistemológicamente existe un *"encadenamiento"* entre las fórmulas y las funciones: *"El sistema de operaciones que se deben realizar sobre cantidades dadas para deducir las cantidades que buscamos, es lo que llamammos en Algebra una* <u>fórmula</u>*; y cuando una cantidad depende de otras cantidades, decimos entonces que es una* <u>función</u> *de estas mismas cantidades, de tal suerte que podemos definir el Algebra como el arte de determinar las incógnitas por las funciones de cantidades conocidas o que consideramos conocidas"* (Lagrange, cit. por Chevallard, 1989b, p. 158). Según Chevallard, esta *"filiación"* entre fórmula y función surge desde el momento en que se investigan los diferentes dominios de validez de una fórmula, bien a través de sus variables, o de sus parámetros. Teniendo en cuenta esta consideración, prestaremos especial atención al tratamiento que dan los alumnos al dominio de la función en esta situación, es decir, si lo tienen en cuenta como parte constituyente de la misma y además cómo lo tienen en cuenta.

Por otra parte, están ante un dibujo geométrico (triángulo y rectángulo) que les permite visualizar cómo varía el área del rectángulo en función de la variación de sus lados, pero han de buscar un modelo matemático -el gráfico- que represente dicha variación. Así pues:

Dibujo geométrico ———> Gráfico de una función

Se necesitarían múltiples dibujos geométricos para intentar dar una aproximación a la simulación del cambio, cuando sólo una gráfica es suficiente para representar dicha variación.

Por último, se les pide también que expliquen si, en esta situación, pueden determinar una función matemática. Queremos, con ello, estudiar cómo los alumnos justifican el sentido modelizador de una función en una situación de variación, así como todas las técnicas de resolución que utilizan para obtener la solución. Es decir, creemos que no sólo deben dar la respuesta, sino dar sentido a esta respuesta con los conocimientos ya institucionalizados que poseen.

- 2^{a} **Situación: Modelización en contexto ESPACIO-TEMPORAL** (Item 5, cuestiones 21, 22, 32)

> 5. Un edificio de 5 plantas, en el que cada planta tiene una altura de 4m, dispone de un ascensor, con las siguientes características:
>
> | | |
> |---|---|
> | **Tiempo que tarda en subir un piso** | 5 seg. |
> | **Tiempo de parada en el piso solicitado** | 7 seg. |
>
> El ascensor hace el siguiente recorrido (a velocidad constante): **Parte de la planta baja y se para en el 2°, 3°, y 5° piso.**
>
> a) ¿Podrías determinar en esta situación una función matemática?
>
> b) ¿Podrías dibujar en unos ejes cartesianos, la gráfica que represente la variación del espacio recorrido por el ascensor, según el tiempo transcurrido?
>
> c) ¿Puedes encontrar una expresión matemática que represente la variación anterior?

Históricamente, la noción de variable dependiente surgió de la conjunción de los estudios cualitativos y cuantitativos del movimiento, teniendo como intermediarias las representaciones gráficas. En un principio, estas representaciones, no fueron más que cualitativas (Oresme), posteriormente, con el uso de los nuevos instrumentos de medida, Galileo introdujo el carácter numérico de las mismas. Teniendo en cuenta esta génesis histórica, hemos propuesto esta situación de movimiento.

En la asignatura de Ciencias Naturales y Física, los alumnos, utilizan desde el Ciclo Superior de la EGB, la ecuación del movimiento uniforme (e=v.t). Queremos observar cómo movilizan y de qué modo adecúan este útil a una situación de variación. ¿Cómo emerge el aspecto funcional en esta ecuación del movimiento?

Estamos, como en la situación anterior, en un caso evidente de "*encadenamiento*" entre una fórmula y una función. Todo lo expuesto anteriormente lo consideramos de igual modo pertinente para este caso. Además, en esta situación en particular, los alumnos deben tener un control muy minucioso del dominio de la función, ya que su expresión correcta sería:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}x & si \quad 0 < x \leq 10 \\ 8 & si \quad 10 < x \leq 17 \\ \frac{4}{5}(x - 17) + 8 & si \quad 17 < x \leq 22 \\ 12 & si \quad 22 < x \leq 29 \\ \frac{4}{5}(x - 29) + 12 & si \quad 29 < x \leq 39 \\ 20 & si \quad x > 39 \end{cases}$$

¿Facilita, la representación de la gráfica del movimiento del ascensor, el control del dominio de la función?, ¿qué tipos de registros semióticos están presentes en sus manipulaciones?.

- 3ª Situación: Modelización en contexto de proporcionalidad
(Item 6, cuestiones 24, 25)

6. En una cierta colectividad indígena, donde no se utiliza dinero para comprar, se establecen las siguientes equivalencias para realizar cambios:

Por 5 gallinas, recibirá 6 palomos
Por 4 palomos, recibirá 5 patos

a) Una persona quiere cambiar gallinas por patos. ¿Puedes encontrar la relación que determine, de modo general, la equivalencia entre gallinas y patos?

b) ¿Podrías determinar en esta situación una función matemática? Razona suficientemente tu respuesta.

Se trata de una situación típicamente de proporcionalidad. En la actualidad el campo de problemas de proporcionalidad, que en la matemática clásica estaba muy significativamente presente en el corpus aritmético, se encuentra desplazado, ya que la modelización algebraica, junto con el concepto de función, han englobado todos estos saberes en el campo de las funciones lineales.

Estamos ante una situación problemática en cuya solución, basta realizar una composición de dos funciones lineales, en las cuales la determinación y el control del dominio son fundamentales para dotarlas de toda su significación.

Sabemos, además, que la expresión $f(x) = 3/2.x$ tiene, en sí misma, un caracter instrumental muy limitado en el contexto del problema, puesto que necesariamente hay que delimitar su dominio de validez (un subconjunto de $\mathbb{N}$). Sin embargo, $2x=3y$, o bien *"por cada 2 gallinas, recibirá 3 patos"* son praxemas muy diferentes y con distinta carga de instrumentalidad.

Si los alumnos utilizan como mejor estrategia de resolución la *"regla de tres"*, según el tratamiento clásico de las situaciones de proporcionalidad, deben seguir el procedimiento de reducción a la unidad:

5 gallinas = 6 palomos ===> 1 palomo = 5/6 gallina
4 palomos = 20/6 de gallina

como 4 palomos = 5 patos ===> 20/6 de gallina = 5 patos

por lo tanto:
20 gallinas = 30 patos, o bien, 2 gallinas = 3 patos

Exige además que observen no sólo la relación absoluta entre las cantidades de las magnitudes, sino una relación *"relativa"* (razón) entre las mismas, lo que les conducirá a la proporcionalidad. La razón o proporción es un modelo del que pueden partir los alumnos pero sólo a través del análisis de su variabilidad, de su dominio de existencia, podrán conducir un proceso de modelización funcional.

También pueden utilizar la estrategia de "*poner en ecuación*":

$$5x = 6y$$
$$4y = 5z$$

formando así con los datos del problema un sistema de ecuaciones. Deben llegar a obtener una combinación lineal de las anteriores ecuaciones, en la que se relacionen **x** y **z**: $2x = 3z$. A esta ecuación se puede llegar manipulando las ecuaciones anteriores por procedimientos de reducción, igualación o sustitución.

Para este tipo de problemas existe en la Escuela Primaria un tratamiento que se inicia con el paso de la Aritmética al Algebra. Los alumnos comienzan a "*poner en ecuación*" expresiones análogas a las que figuran en el enunciado de esta situación. Pero pasar de la ecuación a la función, llegar a dotar de significado a la funcionalidad, es un paso que implica cambiar la noción de incógnita por la de variable. Se trata de observar el sistema bajo otro aspecto, el funcional, con toda la carga modelizadora de la variabilidad.

5.4. CATEGORIAS DE ANALISIS DEL CUESTIONARIO

Uno de los principales objetivos de nuestra investigación es estudiar las concepciones que manifiestan nuestros alumnos sobre la noción de función, para ello, analizaremos tanto las definiciones que proponen como las argumentaciones que emplean en sus respuestas y, observaremos detalladamente el uso que hacen de la noción de función en situaciones de modelización. El principal medio del que hemos dispuesto para conseguir estos fines ha sido el análisis de las respuestas manifestadas por los alumnos en el custionario escrito que pasamos en clase. Presentamos, a continuación, de forma detallada, cómo hemos realizado este análisis.

5.4.1. DEFINICION DE FUNCION (Item 1, cuestiones 1, 2, 3)

Hemos tratado de analizar las definiciones que dan los alumnos de la noción de función, teniendo en cuenta si los términos matemáticos que incluyen pertenecen a diferentes cuadros: numérico, algebraico, gráfico, y además, si utilizan términos tales como aplicación o transformación.

Analizaremos el conjunto de palabras que usan para determinar lo que para ellos constituye una función matemática. Si repiten, o no, la definición que aparece en sus manuales, o si construyen una definición personal de dicha noción. Esta definición puede que sea, según Vinner y Tall (1989), una descripción de la propia imagen conceptual que tengan de esta noción, o bien que se trate, según Freudhental (1973), de una definición operacional, es decir de una descripción de los usos que ellos recientemente han hecho de ella. Analizando después las argumentaciones que estos alumnos aporten, en las justificaciones de las respuestas a los restantes ítems del cuestionario, podremos observar si utilizan o no, de forma coherente, estas definiciones.

Veamos a continuación cómo hemos realizado este análisis:

- Términos matemáticos pertenecientes al cuadro numérico:

Hemos tratado de observar si en las definiciones dadas por los alumnos, éstos incluyen elementos fuertemente asociados al cuadro numérico. Veamos por ejemplo las siguientes:

> *"Una función matemática es un conjunto de números entre los cuales tiene que haber una relación entre una, dos o más incógnitas sin resolver. Se puede también representar gráficamente."* (2 BUP)
>
> *"Una función matemática sería hacer cálculos con números sustituidos en fórmulas"* (2 BUP)

"Es una expresión donde existen dos variables, una de las cuales está despejada, para que al darle valores a la otra, se deduzca el valor que le corresponde a la primera" (3 BUP)

"Una función matemática sería unos cálculos con números a través de los cuales podemos dar respuesta a algún problema o a alguna cuestión determinada" (3 BUP)

"Se diría que una función matemática es una expresión que transforma cualquier número en otro. Se trata de dar valores a una incógnita (variable independiente) y recoger el valor de otra (variable dependiente)" (COU)

Según vemos en los ejemplos anteriores, los alumnos, bien de forma implícita o explícita, hacen referencia en su definición a elementos matemáticos pertenecientes al cuadro numérico. Utilizan expresiones tales como *"conjunto de números entre los cuales existe una relación"*, o bien *"toda expresión que transforma un número en otro"*, etc. A veces, los alumnos suelen utilizar en la definición elementos pertenecientes a más de un cuadro, basta con observar las definiciones anteriores, en algunas de ellas hacen referencia también al cuadro algebraico o al gráfico.

- **Términos matemáticos pertenecientes al cuadro algebraico:**

Observamos si los alumnos hacen referencia en sus definiciones a *"procedimientos algebraicos"*. Por ejemplo, si mencionan términos tales como : igualdad, ecuación, polinomio, etc. Veamos, por ejemplo, las siguientes respuestas:

"Una función es un sistema con una o varias incógnitas" (2BUP)

$$f(x)=\begin{cases} 4x + 3 & x \leq 1 \\ 5x & 1 < x < 2 \end{cases}$$

"Es una igualdad con números y letras entremezcladas entre sí" (2 BUP)

"Es una ecuación matemática que podemos representar gráficamente mediante curvas" (3 BUP)

"Sería una ecuación donde hay incógnitas y la tenemos que resolver. Según el valor que le demos a una de ellas, así tendrá la otra su correspondiente valor" (3 BUP)

" Yo diría que una función es una fórmula que luego podemos representar" (COU)

"Una función es una expresión matemática en la que existen unas variables, a las que se le pueden dar distintos valores, y unas constantes" (COU)

- Términos matemáticos pertenecientes al cuadro gráfico:

En las definiciones de los alumnos, hemos observado también, si estos utilizan términos pertenecientes al cuadro gráfico, tales como: *"Representación gráfica", "curva", "linea", "puntos del plano"*, etc. Veamos, por ejemplo, las siguientes:

"Una función es una composición que se puede representar gráficamente" (2 BUP)

"Una función matemática es la representación gráfica de una línea" (2 BUP)

"Es una ecuación cuyos valores de la **x** *y de la* **y** *dan lugar a una serie de puntos, los cuales unidos forman una linea, ya sea curva o recta. A esa línea llamamos función"* (3 BUP)

"Es una expresión por medio de la cual se puede representar una figura, según los valores de la **x** *y de la* **y***"* (COU)

"Es una operación matemática que consta de una ecuación en la cual se van sustituyendo valores para obtener un resultado en una tabla. Esa tabla la podemos representar gráfica-

mente, obteniendo así una gráfica" (COU)

- Ultilización de los términos aplicación, correspondencia, asociación.

Nos interesa observar si en las definiciones que proponen los alumnos, incluyen estos términos que normalmente están presentes en sus libros de texto.

A veces utilizan también expresiones tales como "*criterio para asociar elementos*", o "*relación entre elementos*", dándoles el significado de *asociación* entre los elementos de dos conjuntos. No se corresponden con el concepto formalizado de función como relación binaria. Sólo indican que ha de existir algún tipo de conexión regularizada, no arbitraria.

Observaremos también si el uso de este tipo de terminología está ligado a los diagramas sagitales, tan usados en los textos de EGB (este modelo de representación ofrece a los alumnos una visión exclusivamente *discreta* del conjunto de pares del grafo de una función).

Veamos algunas de las definiciones propuestas por los alumnos:

"Es la relación que existe entre dos clases de números de los cuales, y mediante una ecuación, al introducir un elemento (número) le corresponde otro, así

$$f(x) = 4x + 5$$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$1 \longrightarrow 9$$
$$3 \longrightarrow 17 \qquad \text{(2 BUP)}$$

"Una función matemática es aquella que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde una sóla imagen del conjunto final" (2 BUP)

"Es una aplicación entre dos conjuntos de elementos" (3 BUP)

"Es una correspondencia en la cual hay un número que se corresponde con otro metiéndolo en una especie de máquina que es la ecuación" (3 BUP)

Normalmente los alumnos que utilizan este tipo de definición suelen dibujar diagramas de Venn, o bien, utilizan flechas que indican un modo de *"asociación"*.

- Utilización de los términos dependencia entre variables o transformación de variables

Debemos observar si los alumnos recurren a este tipo de expresiones en su definición de función. Históricamente fue a partir de las relaciones de dependencia entre cantidades variables como surgió la noción de función. Esta dependencia se puede manifestar a través de los cambios que sufre la variable independiente al *"transformarse"* en su imagen (variable dependiente). Veamos algunos ejemplos en las definiciones propuestas por los alumnos:

"Llamamos función, y lo representamos por f(x), a la ecuación a través de la cual obtenemos números de unos números que nosotros damos. Por lo tanto unos números dependen de otros" (2 BUP)

"Es una expresión capaz de transformar unos números en otros" (2 BUP)

"Una función matemática es una expresión que transforma cualquier número en otro. Se trata de dar valores a una incógnita (variable independiente) y recoger el valor de otra (variable dependiente)" (COU)

Según podemos apreciar, lo normal es que los alumnos incluyan en sus definiciones elementos de diferentes cuadros y variada terminología. Así, si analizamos la siguiente definición:

> "*Es una expresión matemática por la cual transformamos unos números reales en otros según un criterio. Consta de dos elementos fundamentales:una variable dependiente (f(x)), que va a representar a un conjunto imagen de números, y una variable independiente (x), que representa al conjunto origen. Con estos valores podemos además hacer una gráfica*" (COU)

observaremos que ha utilizado elementos del cuadro numérico ("*unos números reales*"), del cuadro algebraico ("*una expresión matemática*"), y del cuadro gráfico ("*podemos hacer una gráfica*"). Utiliza además términos tales como "*transformación*" y "*variable dependiente e independiente*".

- Ejemplos y ejercicios que proponen los alumnos

En este primer ítem hemos pedido también a los alumnos que, además de dar una definición de la noción de función, incluyeran ejemplos de funciones, e incluso que propusieran ejercicios sobre esta noción.

Hemos clasificado los ejemplos según el tipo de función: lineal, afín, cuadrática, "*a trozos*", trascendente, etc.

En cuanto a los ejercicios que propondrían hemos valorado, en primer lugar, el tipo de tarea que implica cada uno y, en segundo lugar, sobre qué función se ha de llevar a cabo. Así, hemos realizado esta doble clasificación:

Tipo de tarea

1. Representar gráficamente
2. Determinar una func. en una situación real
3. Construir una tabla de valores
4. Determinar el dom. de una func.

Tipo de función

1. Función lineal
2. Función afín
3. Fun. cuadrática
4. Func. racional
5. Func. irracional

5. Encontrar la expresión algebraica a partir de la repr. gráfica
6. Propone solo la fórmula
7. Estudiar el crecimiento, concavidad, etc
8. Resolver una ecuación
9. Operar con funciones

6. Fun. *"a trozos"*
7. Func. trascend.
8. Func. arbitraria

Veamos algunos ejemplos de ejercicios propuestos por los alumnos:

"Representar la función $y = 3x + 2$ " (2 BUP)

"Un verdulero compra lechugas conforme a la siguiente función $y = 2x$, donde x es el número de lechugas y 2 el precio al que las paga. Hallar la cantidad de dinero que obtendrá por 10 lechugas" (2 BUP)

"Hallar el dominio de la siguiente función $y = \sqrt{1 - x}$ " (3 BUP)

"Resolver la siguiente función: $f(x) = x^2 + 3x - 5$ " (COU)

Como podemos observar, en el último caso, se pide *"resolver la siguiente función"*, creemos que de forma implícita los alumnos están demandando la construcción de una tabla y la posterior representación de dicha función.

Nos interesa determinar el tipo de dominio numérico que generalmente usan, tanto en los ejemplos, como en los ejercicios que proponen:

"Si queremos representar la función $f(x) = 2x^2 + 3x + 6$, podemos darle a x los valores $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$, $x=-2$, y hallar los valores de $f(x)$"

Con este objeto hemos clasificado "a priori" los posibles dominios: Naturales, Enteros, Racionales, Reales.

5.4.2. DETERMINACION DE FUNCIONES A PARTIR DE DIFERENTES GRAFICOS (Item 2, cuestiones nº 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)

En cada una de las diferentes cuestiones que integran este ítem hemos valorado, en primer lugar, si el alumno admite, o no, la gráfica como la representación de una función y, en segundo lugar, hemos pasado a analizar las argumentaciones que emplean en la justificación de sus respuestas.

Basándonos en los resultados obtenidos en nuestro trabajo de investigación (Ruiz Higueras, 1991), así como en las aportaciones de otros investigadores tales como Vinner y Tall (1983, 1989), y Tall y Bakar (1992) teniamos ya elaborada "*a priori* "una cierta categorización de las posibles argumentaciones, pero la clasificación definitiva la hemos construido a partir del análisis y el estudio de las respuestas de los alumnos al cuestionario. Así, presentamos las siguientes categorías:

Aplicación:

Hay alumnos que justifican si una determinada gráfica representa, o no, una función considerando ésta como una correspondencia unívoca. Así, por ejemplo:

> "*No se trata de una función ya que en un mismo momento está en varios lugares a la vez*" (2 BUP) (Gráfica **GA**)

> "*No es una función ya que nunca pueden existir dos valores para el eje* **y** *para un mismo valor del eje* **x**" (COU) (Gráfica **GA**)

Elementos ideográficos (ideogramas):

Según Renaud (1990) "*la imagen aporta a lo discursivo una nueva identidad de tipo epistemológico: la imagen contiene y despliega plenamente una cuota de saber;... la visibilidad asumida por la imagen, incorpora, materializa iconológicamente el concep-*

to al cual aporta una información estética sensible" (p.12). Las representaciones gráficas de funciones con las que nuestros alumnos está familiarizados, constituyen así *"imágenes"* cuyo significado se articula dentro de una praxis en el sistema de enseñanza. Las podríamos considerar, según terminología de Zunzunegui (1989, p.75) como una especie de *"signos-objetos"* o ideogramas.

En numerosas ocasiones, tanto los manuales escolares como los profesores en las clases, tratan realmente los gráficos de funciones como ideogramas, es decir, los consideran como *"símbolos convencionales para reconocer formas de manera ostensiva"* (Lacasta, 1991, p.8). Nuestros alumnos también justifican sus respuestas siguiendo este tratamiento, así:

> *"Es una recta, por lo tanto claro que es una función"* (2 BUP)(**GB**)
>
> *"Si es una función puesto que es una circunferencia"* (2 BUP) (**GF**)
>
> *"No se trata de una función porque yo nunca he visto una función con esa forma"* (3 BUP) *(**GA**)*
>
> *"Es una función a trozos"* (COU) (**GD**)

Expresión algebraica:

Incluimos en este apartado aquellos alumnos que justifican que un determinado gráfico representa, o no, una función basándose exclusivamente en el conocimiento de su expresión algebraica. Veamos algunos ejemplos:

> *"Si es una función, es la función $y = 8$"* (2 BUP), (**GB**)
>
> *"Si es la función $y = x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$"* (COU) (**GF**)
>
> *"No es una función, no parece haber ninguna relación entre la gráfica y una expresión matemática"* (COU) (**GG**)

Dominio - Imagen (Abaco):

Existen alumnos que consideran la gráfica de una función como una especie de ábaco. Pueden dar valores a la **x** y, consiguientemente, por medio de la gráfica, obtener el correspondiente valor de **y**. Es decir, la gráfica evoca para ellos un cierto procedimiento de cálculo: pueden obtener a partir de ella una tabla de valores. Algunos utilizan este tipo de argumentación para determinar si un gráfico representa, o no, a una función. Veamos por ejemplo, las contestaciones siguientes:

Si es una función porque si a la **x** *le damos valores, obtendríamos otros para la* **y**, *y nos saldría esta función"* (2 BUP) **(GB)**

"Si es una función porque podemos tomar puntos de las **x** *y hallar otros de las* **y**, *y así nos iría saliendo toda la gráfica"* (3 BUP) **(GC)**

Continuidad - Discontinuidad:

En este apartado hemos clasificado las respuestas de los alumnos que justifican que una gráfica determinada es o no una función, basándose exclusivamente en sus caracteres de continuidad o discontinuidad. Así, nos encontramos contestaciones como las siguientes:

"Si es una función porque los puntos siempre van de forma continua" (2 BUP) **(GB)**

"No es una función, una función no puede tener saltos" (3BUP) **(GE)**

Crecimiento - Decrecimiento:

Incluimos en este apartado aquellas respuestas cuya argumentación está basada en el crecimiento o decrecimiento de la curva representada. Veamos los siguientes ejemplos:

"Si es una función porque es decreciente hasta un punto, que sería el mínimo de la función, y luego toma un valor creciente" (COU) (**GD**)

"No es una función porque crece y decrece de forma muy irregular, parece más bien un movimiento sísmico" (3 BUP) (**GG**)

Situación de la vida real:

Algunos alumnos, intentan justificar que un determinado gráfico representa verdaderamente una función argumentando que puede tratarse de la representación de una situación de la vida real. Así:

"Si sería una función porque esto es la gráfica de una empresa y en ella se ve que hay crisis y que al final se van superando" (2 BUP) (**GG**)

"Si podría ser una función pues la **x** *sería el espacio, y la* **y** *entonces representaría el tiempo. Esta función representaría en Física la gráfica de un movimiento uniforme"* (COU) (**GB**)

5.4.3. DETERMINACION DE FUNCIONES A PARTIR DE DIFERENTES EXPRESIONES ALGEBRAICAS

(Item 3, cuestiones n^{o} 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17)

Los alumnos para cada una de estas cuestiones deben justificar, si se trata o no, de la expresión de una función matemática, explicando detalladamente sus respuestas.

En este caso también hemos utilizado los resultados obtenidos en nuestro trabajo de investigación (Ruiz Higueras, 1991), así como en las aportaciones de otros investigadores tales como Vinner y Tall (1983, 1989), y Tall y Bakar (1992) para elaborar *"a priori"* una cierta categorización de las posibles argumentaciones, pero la clasificación definitiva la hemos construido a partir del análisis y el estudio de las respuestas de los alumnos al cuestionario. Así, presentamos las siguientes categorías:

Aplicación:

Existen alumnos que utilizan el criterio de univocidad para la determinación de una función. Así encontramos, por ejemplo:

"Si es una función pues para un valor de **x** *se obtiene un valor de* **y**" (2 BUP) *(***AA***)*

"Se trata de una función ya que **x** *siempre toma valores con respecto a* **y**, *y no toma un mismo punto en* **x** *dos valores en* **y**" (3 BUP) *(***AA***)*

"No es una función ya que a cada elemento le corresponden varias imágenes" (2 BUP) (**AC**)

"Si es una función porque para cualquier valor que le asignemos a la **x** *le corresponde un valor de la* **y**" (COU) (**AE**)

"*Si es una función por ser una aplicación de* ℝ en ℝ *según un criterio*" (COU) (**GG**)

Expresión algebraica / Ideograma algebraico

Si los alumnos basan su argumentación sólamante en la *"forma"* de la expresión algebraica, es decir, si reconocen en ella un modelo familiar para ellos. No dan ningún tipo de explicacción sólo el hecho de poder *"clasificar"* la función les basta para considerarla como tal. En caso contrario no la admiten como función. Hay también alumnos que sólo por tratarse de una fórmula, esto ya justifica por sí mismo la existencia de una función. Así:

"Si es una función por partes" (2 BUP) (**AA**)

"No nunca he visto una función con esta forma" (2 BUP) (**AC**)

"Si es una función circular" (COU) (**AC**)

"Si es una función porque hay una igualdad con incógnitas" (2 BUP) (**AF**)

"No es una función porque no aparece f(x)" (2 BUP) (**AD**)

Representación gráfica:

Algunos alumnos consideran que, si tienen la posibilidad de representar gráficamante una expresión algebraica, ésta será una función. Veamos los casos siguientes:

"Si es una función porque con estos datos que nos dan la podemos representar" (2 BUP) (**AA**)

"Si es una función ya que la podemos representar gráficamente" (2 BUP) (**AB**)

"No es una función porque al estar al cuadrado la **y** *no la podemos representar"* (3 BUP) (**AC**)

"No es una función porque es un producto y no lo podemos representar" (3 BUP) (**AD**)

Dominio - Imagen:

En esta categoría clasificaremos aquellas respuestas en las que los alumnos justifican la existencia de una función en la posibilidad de dar valores a **x** y obtener valores de **y**. Es decir, ven en la expresión algebraica un cierto procedimiento algorítmico.

"Si es una función porque a la **x** *le podemos dar valores"* (2 BUP) (**AA**)

"No es una función porque aquí al no haber **x**, *no le podemos dar valores"* (2 BUP) (**AB**)

"No es una función, no sé donde le voy a dar valores a la **x**" (3 BUP) (**AE**)

Variación / constante:

Hemos clasificado en esta categoría aquellas respuestas en las que los alumnos destacan el sentido de variación, de transformación que puede tener una función, es decir, si acentúan la naturaleza de cambio que existe en toda función. O bien, si por el contrario, la constancia es motivo para no ser una función. Veamos por ejemplo los siguientes:

Si es una función porque tenemos la posibilidad de poder transformar todos los valores de **x**" (3 BUP) (**AA**)

"No es una función, nunca varía" (2 BUP) (**AB**)

"No puede ser una función porque si le damos valores a **x** *no sabemos en qué se transforma. Siempre sale la misma* **y**" (3 BUP) (**AB**)

Ecuación:

Algunas de las expresiones que figuran en este ítem pueden, efectivamente, ser consideradas como ecuaciones, pero no por ello dejan de ser funciones. Nos interesa conocer si para los alumnos las nociones de ecuación y función se engloban en concepciones mutuamente excluyentes. Veamos algunos ejemplos:

"No sería una función, esto es una ecuación" (2 BUP) (**AC**)

"No, esto es un valor de **y**, *es la solución de una ecuación, pero no una función"* (3 BUP) (**AB**)

"No, esto es una ecuación matemática" (3 BUP) (**AD**)

5.4.4. EMPLEO DE FUNCIONES EN SITUACIONES DE MODELIZACION

(Items 4, 5, 6)

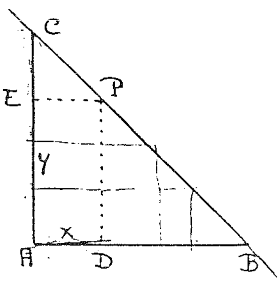
- **1ª Situación: Contexto GEOMETRICO**

(Item 4, cuestiones nº 18, 19, 20)

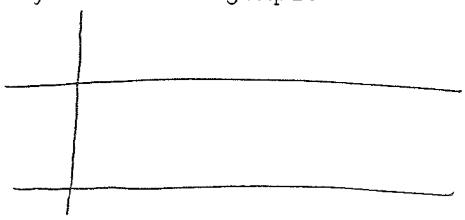
cuestión nº 18: *¿Podrías dibujar una gráfica que represente la variación del área según la posición del punto P?*

La clasificación de las posibles respuestas la hemos realizado de la siguiente forma:

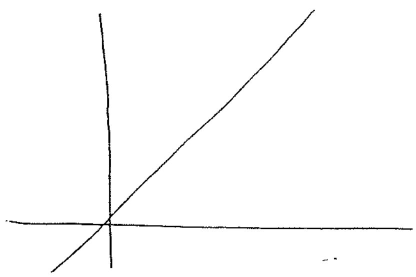
G1: Realizan dibujos sobre la figura dada en el enunciado y consideran que la recta que contiene a la hipotenusa es la gráfica que representa la variación. Así, por ejemplo:



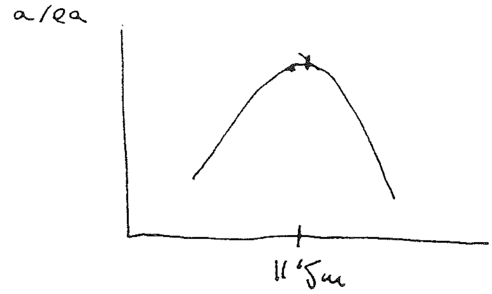
G2: Recta y = K. Por ejemplo:



G3: Recta y = x. Veamos el siguiente ejemplo:



G4: Parábola y = x(11 - x) (solución correcta). Por ejemplo:



G5: Otras (respuestas no clasificables en los apartados anteriores.

> **cuestión n° 19:** *¿Puedes encontrar una expresión matemática que represente de modo general la variación anterior?*

Clasificación de las respuestas:

E1: Expresión del área de un rectángulo (S = B.h)

E2: El área es constante, no varía

E3: y = x (11 - x)

E4: Otras expresiones

> - **cuestión n° 20:** *Crees que se puede determinar en esta situación una función matemática? Explica con detalle tu respuesta.*

En esta cuestión hemos valorado, en primer lugar, si los alumnos respondían, afirmativa o negativamente, a la cuestión formulada y, en segundo lugar, hemos analizado las argumentaciones que empleaban en sus respuestas. Estas las hemos clasificado del siguiente modo:

A1: Aplicación:

Al igual que ocurría en los ítems 2 y 3, hay alumnos que utilizan la noción de aplicación, correspondencia o bien de asociación entre elementos como sinónimos de función. Así hemos incluido en esta categoría respuestas tales como:

"Si se trata de una función porque aquí D y E son las incógnitas y si le damos un valor a una de ellas la otra toma otro valor y P queda determinado en un sitio, guardando siempre una relación" (2 BUP)

La función no existe puesto que la relación entre los lados del rectángulo es cada vez distinta, si yo le doy valores a uno el otro no sé cómo lo voy a obtener" (COU)

A2: Expresión algebraica

Incluimos en esta categoría las argumentaciones de aquellos alumnos que consideran imprescindible encontrar una expresión algebraica para poder determinar una función. Por ejemplo:

"Si es una función, la función $f(x) = 5x$, $x > 1$" (2 BUP)

"Si es función , ya que $x^2 + y^2 = h^2$" (2 BUP)

"Si es una función, la función $x.y = cte$" (3 BUP)

"Yo creo que no es una función porque no puedo encontrar su fórmula" (2 BUP)

A3: Representación gráfica

Hay alumnos cuyo argumento en la determinación de una función se apoya exclusivamente en la posibilidad de representarla gráficamente. Así:

"No es una función, no se puede representar" (COU)

"Si es una función ya que al hacer su gráfica vemos cómo varía, según los distintos valores de P" (COU)

A4: Transformación, cambio

Este argumento lo utilizan aquellos alumnos que identifican una función cuando existe en la situación dada algún tipo de transformación, de cambio o de variación entre diferentes elementos. Por ejemplo:

"Si podemos determinar una función porque el resultado varía en función de los valores que tengamos" (2 BUP)

"Si porque siempre que P varíe, el triángulo resultante CEP será mayor" (2 BUP)

"Yo creo que sí, puesto que el valor del área va a estar determinado por los valores que le demos a la base y a la altura, y cabiará siempre que cambiemos la base y la altura" (COU)

A5: Otras

En este apartado incluimos aquellas respuestas que por ser muy esporádicas y extrañas no han podido ser homologadas en los apartados anteriores. Por ejemplo:

"Este no es un problema de funciones, es de geometría" (2 BUP)

- Estrategias de resolución empleadas por los alumnos

Estamos interesados en estudiar las estrategias de resolución empleadas por los alumnos. El término *estrategia*, lo utilizaremos en el sentido dado por Bell y cols. (1985) que lo consideran como un conjunto de procedimientos que puede conducir las elecciones de nuestros alumnos para usar o elegir un determinado conocimiento, en cada una de las etapas de resolución de un problema o de verificación de un conocimiento. Así, nos preguntaremos, ¿cómo abordan las respuestas a las cuestiones propuestas?, ¿qué procedimientos utilizan?, ¿qué orden siguen en la ejecución de las tareas?, etc.

Después de haber revisado las producciones de los alumnos, hemos clasificado las estrategias utilizadas como sigue:

E1: Toman la fórmula del área del rectángulo y dan valores naturales, formando una tabla.

E2: Realizan una serie de dibujos sobre el triángulo dado, simulando el proceso de variación.

E3: Parten de la fórmula del teorema de Pitágoras

- Control del dominio

Es preciso observar si los alumnos tienen algún tipo de control sobre el dominio de la función que modeliza la situación. Para ello hemos considerado "a priori" la siguiente clasificación:

D0: No tienen en cuenta para nada el dominio de la función

D1: Dominio correcto $0 \leq x \leq 11, \quad x \in \mathbb{R}$

D2: Naturales

- 2ª Situación: Contexto ESPACIO - TEMPORAL
(Item 5, cuestiones nº 21, 22, 23)

- **cuestión 21:** *¿Podrías determinar en esta situación una función matemática? Explica con detalle tu respuesta.*

Al igual que en la situación anterior« hemos valorado en primer lugar si los alumnos respondían, afirmativa o negativamente, a la cuestión formulada, y en segundo lugar, hemos analizado las argumentaciones que empleaban en sus respuestas, clasificándolas de igual modo:

A1: Aplicación:

Alumnos que utilizan la noción de aplicación, correspondencia o bien de asociación entre elementos como sinónimos de función. Por ejemplo:

"Si, porque podemos establecer un valor para cada movimiento, uno para el tiempo y otro para el espacio" (2 BUP)

"Si, porque en cada segundo de tiempo el ascensor tiene un espacio recorrido" (COU)

"Si porque a cada distancia podemos asociarle una incógnita **x** *que vaya en función del tiempo"* (COU)

A2: Expresión algebraica

Argumentaciones de aquellos alumnos que consideran imprescindible encontrar una expresión algebraica para poder determinar una función. O bien, tienen una especie de *ideograma algebraico* del tipo de función que modelizaría esta situación. Por ejemplo:

"Si, sería una función a trozos" (COU)

"Si, la función sería $f(x) = 12.x$" (COU)

"La función sería el espacio que recorre por el tiempo que tarda en recorrer ese espacio, añadiendole 7 cuando se para el ascensor" (3 BUP)

"Si, es la función $y = 5x + 7$, **x** *representa el piso en que se para y se le suman los 7 seg. que se para"* (3 BUP)

A3: Representación gráfica

Alumnos cuyo argumento en la determinación de una función se apoya exclusivamente en la posibilidad de representarla gráficamente. Así:

"Si se puede determinar una función matemática ya que se puede hacer la gráfica y así solucionar el problema" (COU)

"Si es función, tiene su gráfica" (3 BUP)

A4: Transformación, cambio

Alumnos que identifican una función cuando existe, en la situación dada, algún tipo de transformación, de cambio o de variación entre diferentes elementos.

A5: Otras

En este apartado incluimos aquellas respuestas que por ser muy esporádicas y extrañas no han podido ser homologadas en los apartados anteriores. Por ejemplo:

"*La función de este problema no es matemática, es física*" (2 BUP)

- **cuestión 22:** *¿Podrías dibujar en unos ejes cartesianos la gráfica que represente la variación del espacio recorrido por el ascensor según el tiempo transcurrido?*

Clasificación de las respuestas:

G1: Gráfica correcta

G2: Gráfica y = k.x

G3: Otras (x = k, tiempo/pisos, esquema vertical del ascensor, etc)

- **cuestión 23:** *¿Puedes encontrar una expresión matemática que represente la variación anterior?*

Clasificación de las respuestas:

E1: Ecuación correcta del movimiento

E2: y = 4/5 t

E3: y = 5x + 7 , **x** pisos del edificio., **y** tiempo

E4: Otras

- **Estrategias de resolución empleadas por los alumnos**

Después de haber revisado las producciones de los alumnos, hemos clasificado las estrategias utilizadas como sigue:

E1: Comienzan construyendo la gráfica

E2: Realizan cálculos numéricos, tablas, etc.

E3: Dibujan un esquema vertical del ascensor y razonan sobre él.

- **Control del dominio:**

Consideramos "a priori" la siguiente clasificación:

D0: No lo tienen en cuenta

D1: $t \in \mathbb{R}$, $0 < t < 46$ (Dominio correcto)

D2: Naturales

- 3^a **Situación: Contexto de PROPORCIONALIDAD**

(Item 6, cuestiones nº 24, 25)

- **cuestión 24:** *¿Puedes encontrar la relación que determine de modo general la equivalencia entre gallinas y patos?*

Hemos clasificado las respuestas del siguiente modo:

E1: 1G = 10/15 P, o bien, 10 G = 15 P, o bien, 1G = 1,5 P

E2: Admiten la dependencia y tratan de buscar una expresión algebraica aunque no llegan a la correcta.

E3: Función afín $y = x + 1$, o bien, $y = x + 2$

E4: Sólo ponen en ecuación los datos del problema

$5x = 6y$

$4y = 5z$

- **cuestión 25:** *¿Podrías determinar en esta situación alguna función matemática?. Razona tu respuesta.*

Al igual que en las situaciones anteriores hemos valorado, en primer lugar, si los alumnos respondían, afirmativa o negativamente, a la cuestión formulada, y en segundo lugar, hemos analizado las argumentaciones que empleaban en sus respuestas, clasificándolas de igual modo:

A1: Aplicación:

Alumnos que utilizan la noción de aplicación, correspondencia o bien de asociación entre elementos como sinónimos de función. Por ejemplo:

"Si porque podemos relacionar las gallinas con los patos" (2 BUP)

"Si porque podemos asociar con un criterio las gallinas con los patos" (3 BUP)

"Si porque para cada valor de **x** *cambia el valor de* **z**. *A cada valor de* **x** *le corresponde otro de* **z**" (2 BUP)

A2: Expresión algebraica

Argumentaciones de aquellos alumnos que consideran imprescindible encontrar una expresión algebraica para poder determinar una función. Por ejemplo:

"Si hay una función, $y = 1,5$ patos" (2 BUP)

"Si hay una relación que se representa por la función $f(x) = 4/6\ x$" (2 BUP)

"Si la función $y = x + 1$" (3 BUP)

"Yo creo que hay dos ecuaciones $5x = 6y$, $4y = 5z$ " (3 BUP)

A3: Representación gráfica

Alumnos cuyo argumento en la determinación de una función se apoya exclusivamente en la posibilidad de representarla gráficamente.

A4: Transformación, cambio

Alumnos que identifican una función cuando existe, en la situación dada, algún tipo de transformación, de cambio o de variación entre diferentes elementos.

A5: Otras

En este apartado incluimos aquellas respuestas que por ser muy esporádicas y extrañas no han podido ser homologadas en los apartados anteriores.

- Estrategias de resolución empleadas por los alumnos:

Después de haber revisado las producciones de los alumnos, hemos clasificado las estrategias utilizadas como sigue:

E1: Plantean un sistema de ecuaciones

$$5x = 6y$$
$$4y = 5z$$

y lo resuelven por reducción, sustitución o igualación.

E2: Regla de tres reiterada (reducción a la unidad)

E3: Sólo ponen en ecuación $5x = 6y$, $4y = 5z$

E4: Añadir 1 ($y = x + 1$)

- Control del dominio:

Consideramos "a priori" la siguiente clasificación:

D0: No lo tienen en cuenta

D1: Naturales

D2: $Dom = 2K \ / \ \forall K \in N$

D3: Intentan controlar el dominio, pero lo hacen incorrectamente.

5.5. ANALISIS DE RESULTADOS DEL CUESTIONARIO

Una vez fijadas las categorías de análisis que hemos descrito en la sección anterior, se procedió a la codificación de los datos y su grabación para realizar el análisis estadístico, utilizando los paquetes SPSS y BMDP.

Puesto que la investigación es de tipo cualitativo no se ha asignado una puntuación a los diferentes tipos de respuesta ni se ha totalizado el número de soluciones correctas para cada alumno. Por el contrario, nos interesa analizar separadamente cada una de las variables dependientes identificadas en el análisis del cuestionario. Por ello, el análisis estadístico se ha restringido a la elaboración de tablas cruzadas de cada variable respecto al curso escolar y al análisis de correspondencias (Cornejo, 1988, Cuadras, 1991) y análisis "cluster" (Lerman, 1981, Celeux y cols. 1989) para el estudio conjunto de los ítems que se refieren al reconocimiento de funciones.

Fiabilidad del instrumento

Cualquier prueba consta de un conjunto de tareas que nos proporcionan una muestra del universo de respuestas posibles del sujeto. Como en todo proceso de muestreo se plantean las preguntas de cuales son el sesgo y la precisión de las inferencias realizadas. La primera -ausencia de sesgo- se relaciona con la idea de *validez* que ya hemos discutido. En este apartado estudiamos el problema de la estimación de la *fiabilidad* o precisión de la prueba.

Aunque la mayor parte de las variables obtenidas de las respuestas del cuestionario son de tipo cualitativo, podemos definir también algunas variables numéricas dicotómicas, utilizables en el cálculo de un índice de fiabilidad. Se trata de las respuestas de los sujetos a los ítems 2 y 3 relativos al reconocimiento de funciones (14 cuestiones en total) en los que puede asignarse al sujeto una puntuación 1 o 0 según la respuesta sea o no correcta. En el resto de las variables, puesto que el estudio se limita a una descripción de los comportamientos de los alumnos, consideramos que lo que es necesario es asegurar la fiablidad en el proceso de codificación de las respuestas. A tal objeto se describe con detalle en este capítulo el proceso y las categorías definidas, que fueron revisadas por el investigador y otros compañeros, con objeto de asegurar la fiabilidad citada.

Respecto a las 14 variables dicotómicas, se ha empleado como marco teórico en el estudio de la fibilidad la teoría de la generalizabilidad (Brenan, 1983), que emplea la descomposición de la varianza observada en la puntuación de la prueba, por medio del análisis de varianza, para la estimación de la fiabilidad.

En esta teoría, al igual que en la teoría clásica, se define la fiabilidad de la prueba como el porcentaje de varianza atribuible a la puntuación verdadera. Pero, como indica Thorndike (1989, p.193) "*lo que se incluye bajo el encabezamiento "varianza del error" dependerá de la forma en que se defina el universo que se supone representa la puntuación de la prueba, considerándose a ciertas fuentes de la varianza como error bajo una definición del universo y como puntuación verdadera bajo otra*". Por ello, esta teoría permite estimar el grado de generalizabilidad de las puntuaciones obtenidas para ciertas facetas o componentes de la varianza de las respuestas.

En nuestro caso dos son las principales fuentes de esta varianza:

La primera es debida a la variabilidad de las respuestas de cada uno de los sujetos en las diferentes preguntas; puesto que las preguntas no son homogéneas, un sujeto dado no tiene por qué responder del mismo modo a todas ellas. Por el contrario, las preguntas incluídas en estos ítems se han elegido de modo que se diferencien las diversas concepciones de los alumnos para el concepto de función. Debido al carácter local de las concepciones observadas por medio de un conjunto de situaciones dadas, y a la estrecha dependencia de éstas con las situaciones donde se ponen en juego, es de esperar que en nuestro instrumento se produzca una variabilidad moderada o fuerte entre unas preguntas y otras.

En segundo lugar, distintos sujetos responden de forma diferente cuando se plantean las mismas preguntas. Es decir, existe un error de muestreo lógico en la estimación de las proporciones de éxitos (y fracasos) en cada uno de los ítems. No obstante, y puesto que el tamaño de la muestra es relativamente elevado, es de esperar una precisión suficiente en estas estimaciones, debido a que el error de muestreo depende inversamente de la raiz cuadrada del tamaño de la muestra.

Empleando el marco analítico anterior, se ha aplicado un análisis de varianza de medidas repetidas (Dunn y Clark, 1987) con el paquete estadístico SPSS que nos ha proporcionado la estimación de la varianza debida a las preguntas, la varianza debida a los sujetos, así como la varianza residual. A partir de estas se han obtenido los dos coeficientes de generalizabilidad siguientes:

$G_S = 0.98$ (coeficiente de generalizabilidad entre sujetos)

$G_I = 0.48$ (coeficiente de generalizabilidad entre preguntas)

El primero de ellos muestra la alta precisión en las estimaciones de las varianzas de los ítems. El segundo, la variabilidad relativamente alta, entre los diversos ítems, que, como se ha indicado, era previsible.

Pasemos, a continuación a realizar un estudio de los resultados del cuestionario y de los análisis que hemos llevado a cabo con los mismos.

5.5.1. DEFINICION DE FUNCION (Item 1, cuestiones, 1, 2, 3)

La tabla siguiente muestra la frecuencia y el porcentaje, respecto al total de alumnos en cada curso y en la muestra completa, con que aparecen distintos términos en las definiciones propuestas por los alumnos de la noción de función:

Tabla 1.1: **Frecuencia y porcentaje de alumnos que utilizan diferentes términos matemáticos en la definición de función**

	Cursos			Total
Términos matemáticos	2 BUP	3 BUP	COU	
Numéricos	55 39.6	28 32.6	37 37.8	120 37.2
Algebraicos	75 54.0	52 60.5	68 69.4	195 60.4
Gráficos	43 30.9	35 40.7	39 39.8	117 36.2
Aplicación	27 19.4	3 3.5	14 14.3	44 13.6
Transformación	7 5.0	0 0.0	6 6.1	13 4.0

Señalaremos, en primer lugar, que los diferentes términos que aparecen en la tabla anterior no son mutuamente excluyentes, ya que en casi todas las definiciones, los alumnos incluyen elementos de más de uno de los apartados. Veamos, por ejemplo, las siguientes definiciones:

> *"Una función matemática es una ecuación que nosotros podemos representar gráficamente mediante curvas, y por medio de esta representación podemos estudiar todas sus características"* (3 BUP)

en esta definición el alumno ha utilizado términos del cuadro algebraico - *"una ecuación"* -y del cuadro gráfico - *"representar gráficamante"* -

> *"Es una ecuación en la cual podemos determinar el valor de una incógnita, dándoles valores a la otra incógnita"* (2 BUP)

en ésta otra se incluyen términos del cuadro algebraico -"*una ecuación*"- y términos del cuadro numérico - "*dándole valores*" -; también, de modo implícito, está presente una correspondencia entre variables (que el alumno denomina "*incógnitas*")

> "*Es una correspondencia en la cual hay un número que se transforma en otro metiéndolo en una especie de máquina que es la ecuación*"

en ésta aparece el término "*correspondencia*" entre números, y además incluye el sentido "*transformador*" de la ecuación, considerada trivialmente como una máquina. Están presentes también elementos del cuadro numérico - "*un número que se transforma en otro*"- y del cuadro algebraico - "*la ecuación*" -.

Una vez analizados todos los cuestionarios observamos que ningún alumno formula con precisión la definición de función. Incluso los que utilizan los términos "*aplicación o correspondencia*", no hacen alusión a la existencia del dominio o del conjunto imagen, ni a la necesidad de unicidad de los elementos imágenes. En general, la "*definición personal*" de estos estudiantes difiere de la definición formal que aparece en sus manuales.

> "*Las definiciones de los alumnos lo que enuncian frecuentemente es la acción (o acciones) que el alumno debe producir para obtener el objeto definido. Nosotros las llamaremos constructivas por oposición a las definiciones que dan los caracteres distintivos de los objetos definidos, que llamaremos funcionales*" (Salin, Mercier, 1988, p. 215)

Podemos pues afirmar, basándonos en lo anterior, que sus definiciones son **constructivas**.

Como resultado más significativo podemos destacar que más del 60% de los encuestados incluyen en su definición términos algebraicos: "*es una fórmula*", "*es una ecuación*", "*es una expre-*

sión con números y letras", etc.

El 37.2% de los alumnos utiliza en su definición elementos del cuadro numérico, incluyen términos tales como : *"operación entre números", "dar valores en una ecuación", "correspondencia entre números"*, etc.

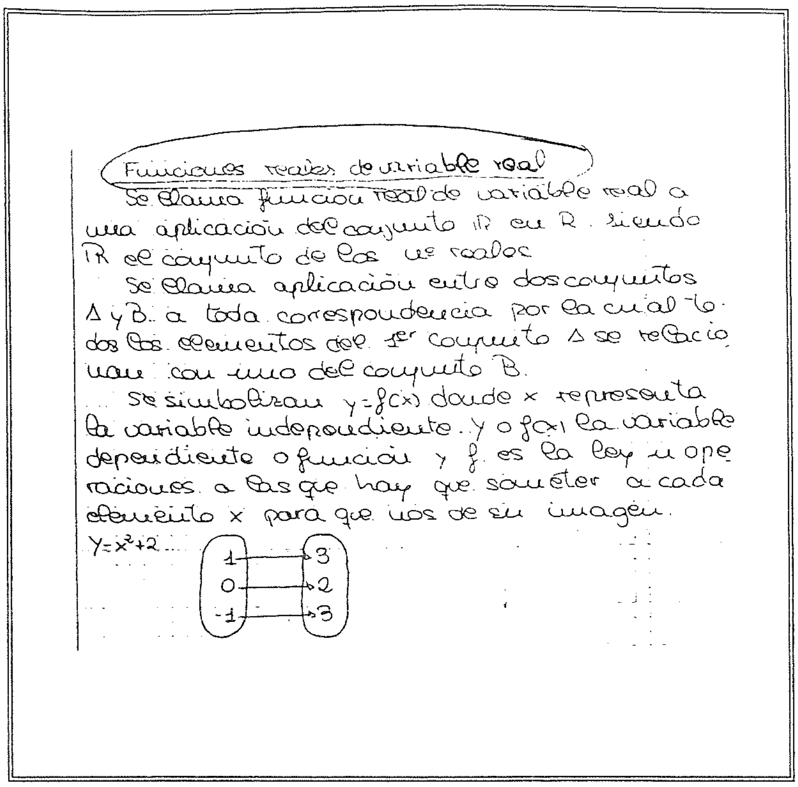
Como nos muestra la tabla, los mayores porcentajes corresponden a las definiciones que incluyen elementos del cuadro algebraico y numérico. Para una gran mayoría la función es una operación entre números. Sus definiciones son realmente un *"relato"* de las acciones que ellos normalmente realizan en la resolución de sus ejercicios en clase. Podemos afirmar que, evidentemente, las actividades de clase son uno de los principales determinantes del límite, más o menos restringido, de la localidad de los conocimientos de nuestros alumnos.

El 36.2% hace referencia en sus definiciones a la representación gráfica. Analizando éstas hemos observado que siempre incluyen el gráfico como el fin de un proceso algorítmico. Así, por ejemplo:

> *"Es una operación matemática que consta de una ecuación en la cual se van sustituyendo valores para obtener un resultado en una tabla. Esa tabla la podemos representar gráficamente, obteniendo así una gráfica"* (COU)

En este tipo de definiciones, la curva en casi ningún caso la presentaron como la representación de la relación que existe entre las variables. Es decir, no destacan el poder de visualización que tiene el gráfico de las propiedades globales de la función.

Los términos *"aplicación", "correspondencia"* o *"asociación"* los utilizan sólo el 13.6% de los alumnos. Tanto en sus manuales como en los apuntes de clase, la definición de función que aparece, según hemos visto en el capítulo anterior, es la siguiente:



Funciones reales de variable real
Se llama función real de variable real a una aplicación del conjunto R en R. siendo R el conjunto de los nº reales
Se llama aplicación entre dos conjuntos A y B. a toda correspondencia por la cual todos los elementos del 1er conjunto A se relacionan con uno del conjunto B.
Se simbolizan y=f(x) donde x representa la variable independiente. y o f(x) la variable dependiente o función y f. es la ley u operaciones a las que hay que someter a cada elemento x para que nos de su imagen.
$Y=x^2+2$

1 → 3
0 → 2
-1 → 3

El intento de metamatematización del objeto función ha conducido por una parte a presentarlo *"en continuidad"* con saberes anteriores tales como las correspondencias, y por otra, a aumentar en cierto modo su complejidad como consecuencia de una renovación de los programas.

> *"El acceso de la noción de función al plano puramente lógico-matemático debe exigir el sacrificio de la idea de variación, el abandono del tiempo y, en consecuencia el de la causalidad"*. (Grize, 1968, p. 173, 174)

Sin embargo, el modo de introducción que de este saber hacen los profesores, les lleva en numerosas ocasiones hacia una didáctificación, a veces trivial del mismo, presentando máquinas, diagramas de Venn, diagramas sagitales, etc. Los alumnos los utilizan en un intento de afianzar su definición con un sustrato *"ostensivo"* que les proporciona una cierta seguridad. Esto hace que la mayoría de este 13.6% de alumnos incluya en sus respuestas representaciones tales como:

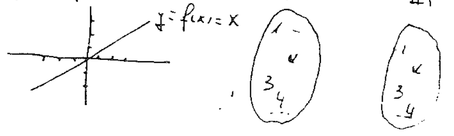
- Es una expresión matemática tal que hace corresponder un número a $\in \mathbb{R}$ con otro número b $\in \mathbb{R}$ según un criterio f.
Podemos decir que una función matemática es una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:
- Si le indicaría ejemplos:

$\mathbb{R} \xrightarrow{f(x)=x} \mathbb{R}$

1. $y \xrightarrow{f} x$

$1 \xmapsto{f} 1$

$2 \longmapsto 2$



Tan sólo el 4 % de los alumnos consideraron una función como una *"tranformación o un cambio entre variables"*. Cuando una función se considera como una variable, la naturaleza del cambio está acentuada. El concepto de variable es precisamente esta capacidad de la mente para caracterizar este cambio. Es evidente que, para nuestros alumnos, la presencia de *"incógnitas e indeterminadas"* es mucho más fuerte que la de *"variables"*. Esto debe ser consecuencia de que su experiencia con funciones les ha conducido generalmente a resolver ecuaciones e inecuaciones (la gran mayoría de los ejercicios que figuran en sus manuales y en los apuntes de clase pedían la determinación del dominio de una función), y no a trabajar con actividades donde deban movilizar la noción de variable.

Si analizamos los resultados por cursos observamos, en primer lugar, la columna correspondiente a los alumnos de 2° de BUP y, comprobamos que los mayores porcentajes, 54% y 39.6%, corresponden a las definiciones que incluyen elementos del cuadro algebraico y del cuadro numérico. Casi la quinta parte de ellos (19.4 %) utiliza términos tales como aplicación o correspondencia, siendo este porcentaje el mayor de entre todos los restantes cursos.

En los alumnos de 3º de BUP aumenta hasta un 60.5% la inclusión de términos algebraicos y el 40.7% incluye términos del cuadro gráfico. Sin embargo, disminuye considerablemente (3.5%) la consideración de una función como una correspondencia o aplicación entre conjuntos. Ninguno de estos alumnos hizo referencia a la función como transformación, variación o cambio entre magnitudes.

Por último, si observamos la columna correspondiente a los alumnos de COU, podemos ver que el 69.4% de ellos incluyen en sus definiciones elementos algebraicos, el 40% elementos gráficos y el 37.8% elementos numéricos. Tan sólo un 14.3% se refieren a una función como una aplicación y un 6% relacionan una función con una transformación o un cambio entre variables.

Comparando los resultados que hemos obtenido con los de otros investigadores tales como Vinner y Tall (1981), Vinner (1983), Vinner y Dreyfus (1989) o Tall y Bakar (1992) que realizaron análisis de las definiciones dadas por los alumnos sobre la noción de función podemos decir que son bastante diferentes ya que tan sólo un 9% de sus alumnos utilizaron términos algebraicos (tales como ecuación o fórmula) y el 4.5% la definieron como una operación, mientras que el 26% de ellos consideraron la función como una aplicación, y el 26.2% la definió como una relación de dependencia.

En suma, basándonos en todo lo anteriormente expuesto podemos decir que la presencia de términos algebraicos, junto con los numéricos y gráficos es bastante fuerte. Si utilizamos la terminología de Sfard (1989) diremos que los alumnos desarrollan una definición *"operacional" -conciben la función como un cierto procedimiento de cálculo-*, es casi sinónimo de algoritmo. Freudhental (1983) utiliza una expresión análoga para decirnos que se trata de definiciones *operacionales*, ya que sólo describen los usos que los alumnos han hecho recientemente de los conceptos. Según Salin y Mercier serían definiciones *constructivas* ya que relatan las acciones que realizan para construir lo que para ellos sería el objeto función. Dubinski, Haws y Nichols (1989, p.

292) aseguran que: "*A un nivel muy bajo de pensamiento, especialmente cuando los ejemplos de funciones se refieren sólo a expresiones algebraicas, y la transformación se restringe sólo a una sustitución de números en una expresión, consideramos que el sujeto piensa en la función como en una acción*". Así, aunque la presentación de la noción de función, tanto por los manuales como por los profesores en sus clases, se hace en su forma más general y actual, sin embargo los alumnos la determinan y definen sólo en los límites de los usos que hacen de ella. En este sentido Leonard y Sakur (1990, p. 217) afirman que "*los alumnos tratan, en sus respuestas, de reutilizar las organizaciones construidas en la clase, por lo tanto contienen una parte de conocimientos correctos aunque muy limitados por las restricciones inducidas por el sistema de enseñanza*". La localidad de los conocimientos es pues un efecto de la transposición didáctica llevada a cabo en el aula: la "*eficacidad*" a la que se ven sometidos los alumnos por las restricciones del sistema didáctico en cuanto a la evaluación hace que sus respuestas se adapten exclusivamente a la jerarquía y organización establecida por el contrato didáctico en las actividades de clase. En este sentido consideramos muy significativo el hecho de que tan sólo el 4% de los alumnos consideraron la función como una "*transformación o un cambio entre variables*". Los fenómenos sujetos al cambio y las relaciones de causa-efecto entre magnitudes variables, que fueron el germen de la noción de función, se encuentran ausentes de nuestras aulas; en consecuencia, para nuestros alumnos es mucho más fuerte la presencia de "*incógnitas e indeterminadas*" que la de "*variables*".

En la siguiente tabla podemos observar la frecuencia y los porcetajes respecto al total de alumnos de cada curso y en la muestra completa, de los ejemplos propuestos por los alumnos (Item 1, cuestión 2)

Tabla 1.2: Frecuencia y porcentaje de los alumnos que proponen diferentes tipos de funciones como ejemplos

Tipos de funciones	Cursos 2 BUP	3 BUP	COU	Total
No propone ejemplos	16 11.5	26 30.2	14 14.3	56 17.3
Afín	70 50.3	29 33.7	46 46.9	145 44.9
Cuadrática	30 21.6	18 20.9	27 27.6	75 23.2
Racional	7 5.7	11 12.8	4 4.1	22 6.8
Por partes	8 5.0	1 1.2	2 2.0	11 3.4
Irracional	0 0.0	0 0.0	1 1.0	1 .3
Trascendente	2 1.4	1 1.2	1 1.0	4 1.2
Vida real	6 4.3	0 0.0	3 3.1	9 2.8
Total alumnos	139 43.0	86 26.6	98 30.3	323 100.0

El mayor porcentaje corresponde a las funciones afines 44.9% (incluimos en ellas las lineales), siguiendo las funciones cuadráticas 23.2%. Es evidente que si en las definiciones han prevalecido fuertemente los aspectos algebraicos, los ejemplos que propongan sean en su gran mayoría funciones algebraicas. Podemos decir que, mostrando estos ejemplos, el discurso empleado en sus definiciones encuentra plena seguridad (*"Una función es $y = x^2 -3x + 2$"*) : *"Las definiciones encuentran la seguridad necesaria en lo ostensivo"* (Pascal, 1980, p. 102)

Señalaremos que en ningún caso los alumnos determinaban ni el conjunto inicial ni el final entre los que se establecía la función que proponían como ejemplo, ni precisaban su dominio. Se destaca, pues en nuestros alumnos una fuerte presencia de las leyes o criterios que rigen el comportamiento de la función (*cómo* varia) mientras que los elementos *variables* (qué varia) pasan desapercibidos. Hemos de admitir que en general los alumnos presentan ejemplos que contienen propiedades irrelevantes que no son requeridas por la definición formal del concepto. Existe pues, en general, una inconsistencia entre los ejemplos propuestos y la definición matemática del objeto función, y en algunos casos se presentan también inconsistencias entre los ejemplos y sus propias definiciones. Veamos el siguiente:

1- una función es una ecuación en la cuál debémos averigüar un dato al cuál llamámos incógnita

2- $y = 2x$ $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 4 \end{array} \right.$

3- $f(x) = \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 5x & 1 < x \leq 4 \\ 6x+3 & 4 \leq x < 7 \end{cases}$

Nos interesa también analizar qué tipos de ejercicios proponen nuestros alumnos, ya que como expresamos anteriormente, en la configuración de estas *"tareas"* debe influir necesariamente el contrato didáctico establecido en las aulas. En la siguiente tabla clasificamos los ejercicios propuestos por los alumnos (un total de 210 alumnos propusieron ejercicios) según la solución pedida y el tipo de función utilizada; los porcentajes presentados se refieren al total de la columna.

Tabla 1.3: Frecuencia y porcentaje de ejercicios propuestos según las funciones que utilizan y el tipo de tarea

	Tipo de función					Total
Tipo de tarea	Afín	Cuadrát	Racion.	Por partes	Otras	
Representar gráficamente	47 49.5	35 47.2	1 5.0	1 9.1	2 20.2	86 41.0
Determinar una func.en situac.	4 4.2	0 0.0	1 5.0	0 0.0	1 10.0	6 2.9
Construir tabla de val.	8 8.4	4 5.4	5 25.0	0 0.0	0 0.0	17 8.1
Determinar Dominio	1 1.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	1 .5
Determinar la exp. algebraica	0 0.0	2 2.7	0 0.0	0 0.0	0 0.0	2 1.0
Sólo propone la fórmula	16 16.8	20 27.1	9 45.0	10 90.9	6 60.0	61 29.1
Estudiar la monotonía	0 0.0	4 5.4	2 10.0	0 0.0	0 0.0	6 2.9
Resolver una ecuación	19 20.0	6 8.2	1 5.0	0 0.0	1 10.0	27 12.9
Operar con funciones	0 0.0	3 4.1	1 5.0	0 0.0	0 0.0	4 2.0
Total	95 45.2	74 35.2	20 9.5	11 5.2	10 4.8	210 100.0

(El 35% de los alumnos no propone ninguna tarea)

De los alumnos que proponen ejercicios el 41% demanda representaciones gráficas de funciones afines (incluimos en ellas las lineales) y cuadráticas en su gran mayoría. Dos de ellos piden representar funciones de una complejidad enorme tales como $f(x) = x^5 - 2x\sqrt{x-2}$, esto es debido a la transparencia e ingenuidad con que le son presentadas las representaciones gráficas de funciones, tanto por los manuales como por los profesores en el aula. Se reduce a una algoritmización: damos valores a la variable independiente, obtenemos pares, los situamos en los ejes cartesianos, e inmediatamente los unimos obteniendo la gráfica de la función. Esto conduce a los alumnos a construir conocimientos excesivamente locales, que pueden ser correctos en ciertos límites, pero generalmente los alumnos ignoran la existencia de dichos límites.

Un 29.1% al formular su ejercicio no indican ninguna tarea: *"Le propondría como ejercicio $f(x) = 3x + 1$"*.

Tan sólo un alumno (0.5%) propuso como ejercicio la determinación del dominio de una función. Aquí se presenta una profunda divergencia entre las actividades llevadas a cabo en el aula, donde se realizan múltiples cálculos de dominios de funciones y el hecho de que sólo un alumno propusiera este tipo de tarea. Creemos que el fenómeno de algoritmización profunda que acompaña en el sistema de enseñanza actual a la tarea de *"determinación de dominios"* hace que sea precisamente la comprensión del algoritmo la que sustituya a la comprensión del sentido de dicha tarea: *"¿Por qué es preciso determinar el dominio de una función?, ¿para qué nos interesa?"*

En la tabla 1.5 presentamos la clasificación de alumnos según el dominio que presentan en los ejercicios propuestos y curso escolar.

Según hemos dicho anteriormente, los alumnos no acompañan a las funciones que proponen como ejemplos o como ejercicios, de los conjuntos inicial y final entre los cuales se establece, ni del dominio para el cual están definidas; el 50% no propuso ningún tipo de dominio. Sin embargo, si hacen una tabla de valores, o bien la representan gráficamente, o incluso si construyen diagramas de Venn, al dar valores a la variable independiente, el 21.4% usó los naturales y el 16.7% los enteros, sólo un 8.1% + 3.8% utilizó los reales. Este uso de los naturales restringe los límites de la noción de función casi al de sucesión, mediante la discretización del dominio.

Tabla 1.4: Frecuencia y porcentaje de los alumnos que utilizan diferentes dominios numéricos según el total de alumnos

Tipos de dominios	N.alum.
No propone ninguno	105 50.0
Reales	8 3.8
Naturales	45 21.4
Enteros	35 16.7
Intervalos de la recta real	17 8.1
Total	210

(El 35% de los alumnos no propone ninguna tarea)

<u>Conclusiones de las respuestas al item 1</u>

Podemos concluir que, efectivamente, nuestros alumnos de Secundaria movilizan en sus definiciones términos de tres cuadros diferentes - numérico, algebraico y gráfico -. Manifiestan en general una concepción de la noción de función como un proceso algorítmico de cálculo entre números. Es evidente que esta concepción es el resultado de un cambio permanente con las situaciones, problemas y ejercicios con los que se enfrentan cotidianamente en clase. Podemos decir que sus definiciones no determinan de un modo correcto el objeto función, sino las relaciones que han mantenido con él, lo que determina sus definiciones. En este sentido, Vinner y Dreyfus aseguran que:"*los estudiantes prestan muy poca atención a los aspectos conceptuales de una determinada noción, mientras que prestan mucha más a sus aspectos computacionales u operacionales*" (Vinner, Dreyfus, 1989, p. 364). En suma, sus definiciones serían *"operacionales"* en el sentido de Freudhental (1983) y Sfard (1989), o bien *"constructivas"* en el sentido de Salin y Mercier (1988).

La gráfica de una función aparece para los alumnos de forma *"sintética-concreta"*, en ningún caso la presentaron como la representación de la relación que existe entre las variables ni analizaron sus características. Es decir, no destacan el poder de visualización que tiene el gráfico de las propiedades globales de la función.

Los términos tales como *"aplicación"* o *"correspondencia"*, que están presentes en todos sus manuales, sólo son incluidos por el 13% de los alumnos. Siendo de destacar que no hacen ningún tipo de observación sobre la necesidad de *"unicidad del elemento imagen"*.

Si recordamos brevemente las definiciones más significativas de la noción de función a lo largo de su historia:

> Euler: *"Una expresión o fórmula que representa una relación entre cantidades variables de magnitudes"*
>
> Dirichlet: *"Y es una función de x, si hay un criterio que determina únicamente un y para un valor dado de x"*
>
> Caratheodory: *"Un criterio de correspondencia entre conjuntos reales"*
>
> Bourbaky: *"Un subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos"*

observamos, como nuestros alumnos construyen en su gran mayoría sus definiciones muy próximas a la dada por Euler. Refiriéndose a este hecho, Malik, dice: *"La definición dada por Euler cubre todas las necesidades que tienen nuestros alumnos en un curso de Cálculo o de Precálculo, la definición de Dirichlet sería la mejor adaptada para un primer curso de Análisis, y la definición* *a partir de la teoría de conjuntos sería la más apropiada para los estudios de Topología".* (Malik, 1981, p.489)

Verdaderamente, como afirma Janvier *"el desarrollo de la capacidad de abstracción de nuestros alumnos no depende del uso de un vocabulario abstracto, sino de una construcción personal a partir de una gran base experimental"* (Janvier, 1981, p. 116)

Vinner y Dreyfus, en este mismo sentido, afirman que, la definición de Bourbaki no debería ser introducida en cursos elementales si no es estrictamente necesaria. *"La definición formal del concepto de función se podría construir como una conclusión a partir de los ejemplos introducidos a los estudiantes".* (Vinner y Dreyfus, 1989, p.365)

En los ejemplos y tareas que proponen no precisan ni el conjunto inicial, ni el final, ni determinan el dominio de la función, se centran exclusivamente en la expresión de los criterios o leyes -fórmulas algebraicas-, pero no dan ninguna relevancia a los objetos que cambian.

Los ejemplos que presentan contienen propiedades irrelevantes que no son requeridas por la definición formal del concepto. Existe pues, en general, una inconsistencia entre los ejemplos propuestos y la definición matemática del objeto función, y en algunos casos se presentan también inconsistencias entre los ejemplos y sus propias definiciones.

Teniendo en cuenta el conjunto de invariantes que los alumnos han atribuido al objeto función en sus producciones, que constituyen aspectos locales de sus concepciones, referidos al componente intensional del concepto, podemos identificar las siguientes tipologías:

> *"una función es un cierto procedimiento de cálculo algorítmico entre números"*

> *"Sólamente las relaciones descriptibles mediante fórmu-*

las analíticas pueden ser llamadas funciones"

"No existe ningún tipo de discriminación entre la noción de función y las herramientas analíticas que se usan a veces para describir su ley. Asi, las leyes y criterios se consideran en sí mismas funciones, independientemente de los objetos sobre los que actúan (conjunto inicial, final, dominio)"

"Toda función puede representarse en un gráfico cartesiano mediante una curva"

como podemos ver, las tres últimas están muy ligadas a dos de las concepciones epistemológicas determinadas en la evolución histórica **CE5** (expresión analítica) y **CE4** (curva analítico-geométrica).

Debemos afirmar asimismo que, en la configuración de estos invariantes, tiene un gran peso el funcionamiento del sistema de enseñanza actual, centrado en gran medida en el cuadro algebraico. Las restricciones sobre las que se apoya este funcionamiento las encontramos :

- en el plano epistemológico: la prolongada dominación de lo algebraico en el desarrollo histórico de la noción de función;

- en el plano didáctico: la fuerza que encuentra lo algebraico en el refugio algorítmico, potenciada por las restricciones ligadas a la evaluación (economía del sistema didáctico).

5.5.2. **IDENTIFICACION DE FUNCIONES A PARTIR DE SU REPRESENTACION GRAFICA** (Item 2, cuestiones 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 10)

En la siguiente tabla figuran la frecuencia y el porcentaje de aquellos alumnos que identifican una función en cada una de las gráficas cartesianas propuestas en el ítem n° 2.

Tabla 2.1: Frecuencia y porcentaje de alumnos que identifican como función la gráfica representada en cada cuestión

	Cursos			Total
Cuestión	2 BUP	3 BUP	COU	
GA	28 20.1	13 15.1	18 18.4	59 18.3
GB	122 87.8	78 90.7	96 98.0	296 91.6
GC	56 40.3	32 37.2	43 43.9	131 40.6
GD	94 67.6	45 52.3	83 84.7	222 68.7
GE	120 86.3	77 89.5	98 100.0	295 91.3
GF	26 18.7	42 48.8	51 52.0	119 36.8
GG	35 25.2	34 39.5	38 38.8	107 33.1
N. total de alumnos	139	86	98	323

Las gráficas que son aceptadas por casi la totalidad de los alumnos como representación de una función, son las que figuran en el aparatado **GB)**, recta y=k, y en el apartado **GE)**, hipérbola y=1/x. Sin embargo, sólo el 33% admitió como función la gráfica **GG)**. Las gráficas **GA)** y **GF)** que manifestaban una evidente falta de unicidad del elemento imagen para un original dado, y en las que podrían haber empleado con éxito total las definiciones de función que aparecen en sus manuales, fueron admitidas como funciones por el 18.3%, en el primer caso (**GA**), y por el 36.8% en el caso de la circunferencia (**GF**). En cuanto a las gráficas que representan funciones por partes **GC)** y **GD)** existe una diferencia muy considerable en cuanto a su consideración como funciones por los alumnos; mientras que la **GD)** es admitida por el 68.7%, la **GC)** tan sólo llega al 40%.

Pasemos a analizar los diferentes argumentos que utilizan nuestros alumnos para justificar las decisiones que les ha llevado a admitir, o no, una determinada gráfica como la representación de una función matemática. Hemos organizado, tres tablas en las que se presentan los argumentos por Cursos

Tabla 2.2: Frecuencia y porcentaje de diferentes argumentos expuestos por los alumnos de 2^{0}BUP en las diferentes cuestiones presentadas

	Cuestiones						
Argumentos	**a)**	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**	**f)**	**g)**
Aplicación (univocidad)	10 17.0	1 1.1	2 3.8	1 1.8	0 0.0	5 12.8	2 4.9
El. icónicos ideogramas	45 76.3	46 50.5	40 75.5	35 63.6	40 53.3	32 82.0	26 63.4
Expresión algebraica	1 1.7	30 33.0	5 9.4	9 16.4	10 13.3	0 0.0	2 4.9
Dominio / Imagen	3 5.1	5 5.5	1 1.9	2 3.6	2 2.7	1 2.6	1 2.4
Continuidad / Discont.	0 0.0	6 6.6	0 0.0	3 5.4	19 25.3	0 0.0	4 9.7
Crecimiento / Decrec.	0 0.0	0 0.0	4 7.5	3 5.4	4 5.3	1 2.6	3 7.3
Situación vida real	0 0.0	3 3.3	1 1.9	2 3.6	0 0.0	0 0.0	3 7.3
Total alum. que argument	59 42.4	91 65.5	53 38.1	55 39.6	75 54.0	39 28.0	41 29.5

Tabla 2.3: Frecuencia y porcentaje de diferentes argumentos expuestos por los alumnos de 3ºBUP en las diferentes cuestiones presentadas

	Cuestiones						
Argumentos	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Aplicación (univocidad)	6 15.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	1 2.0	1 3.1
El.icónicos ideogramas	27 67.5	36 57.1	20 64.5	23 76.6	48 78.7	42 84.0	15 46.8
Expresión algebraica	0 0.0	19 30.1	2 6.5	1 3.3	3 5.0	3 6.0	0 0.0
Dominio / Imagen	6 15.0	6 9.5	5 16.1	5 16.6	4 6.5	3 6.0	6 18.7
Continuidad / Discont.	0 0.0	1 1.6	0 0.0	0 0.0	5 8.2	0 0.0	2 6.2
Crecimiento / Decrec.	1 2.5	1 1.6	4 13.0	1 3.3	1 1.5	1 2.0	5 15.6
Situación vida real	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	3 9.4
Total de al. que argument	40 46.5	63 73.3	31 36.1	30 34.9	61 71.0	50 58.2	32 37.2

Tabla 2.4 : **Frecuencia y porcentaje de diferentes argumentos expuestos por los alumnos de COU en las diferentes cuestiones presentadas**

	Cuestiones						
Argumentos	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Aplicación (univocidad)	14 29.2	3 3.4	1 2.1	0 0.0	0 0.0	3 4.7	2 5.3
El.icónicos ideogramas	26 54.2	30 33.8	26 55.3	32 52.5	42 53.2	44 69.8	23 60.5
Expresión algebraica	3 6.2	42 47.2	8 17.0	16 26.2	23 29.1	12 19.0	6 15.8
Dominio / Imagen	4 8.3	4 4.5	2 4.2	6 9.8	2 2.5	3 4.7	1 2.6
Continuidad / Discont.	0 0.0	2 2.2	2 4.2	2 3.3	8 10.1	3 4.7	0 0.0
Crecimiento / Decrec.	1 2.1	6 6.7	8 17.0	5 8.2	4 5.0	1 1.6	6 15.8
Situación vida real	0 0.0	2 2.2	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0
Total de al. que argument	48 49.0	89 90.8	47 48.0	61 62.2	79 80.6	63 64.3	38 38.7

Elementos ideográficos

De forma muy significativa destacan los porcentajes de alumnos que basan sus argumentaciones en una concepción del gráfico como una especie de **ideograma**. Los porcentajes más altos corresponden a 2° de BUP (desde un 82% hasta un 50%) del total de las argumentaciones dadas por estos alumnos en los ítems **GF** y **GB**, respectivamente y 3° de BUP (desde un 84% en el ítem **GF**, hasta un 47% en el ítem **GG**), mientras que en COU varían desde un 70% de argumentos en el ítem **GF** hasta un 34% en el **GB**. Respecto al total de alumnos el porcentaje se sitúa en segundo entre el 14 y el 33 por ciento; entre el 17.5 y el 55.8 en tercero y entre el 23.5 y el 45 en COU según el ítem.

Estos alumnos consideran la "*forma*" de la gráfica como el mejor argumento para garantizar que se trata, o no, de una función. A lo largo de sus actividades en el aula han manejado modelos de gráficas de funciones, tales como: rectas, parábolas, hipérbolas, "a trozos", etc. Incluso la circunferencia constituye para ellos un cierto modelo de gráfica de una función, ya que es una figura matemáticamente estereotipada. En este sentido Sierpinska (1992, p. 52) afirma: *"Hay estudiantes que ven las funciones como objetos geométricos, como idealizaciones de lineas sobre el papel..... Identifican las funciones de acuerdo con la forma de estos objetos.... La forma de los gráficos de las funciones elementales pueden ser consideradas como prototipos de esta concepción"*. Podemos también afirmar que esta concepción de los gráficos como ideogramas corresponde a un visión de los mismos bajo una forma estrictamente sintética-concreta ya que no tienen en cuenta sus propiedades de variabilidad (visión analítica).

Elementos algebraicos

Los porcentajes correspondientes a los alumnos que justifican si un determinado gráfico representa, o no, una función, basándose exclusivamente en el conocimiento de su **expresión algebraica**, podemos considerar que son bastante notables respecto al total de argumentos expuestos en cada ítem. Así, en 2^{o} de BUP varían, desde un 0% hasta un 33%, en 3^{o} de BUP, desde un 0% hasta un 30%, y en COU, desde un 6.2% hasta un 47.2%. Para todos estos alumnos existe una fuerte dependencia entre una función y su expresión algebraica: *Solamente las relaciones decriptibles mediante fórmulas analíticas pueden ser consideradas funciones.* Podemos decir que no discriminan entre el objeto función y las herramientas analíticas que, a veces, se pueden usar para describir su ley. No obstante, observamos una gran diferencia entre el porcentaje de alumnos (60.5%) que definió la función como *"una expresión algebraica"*, y los porcentajes obtenidos en los distintos ítems que usan este mismo criterio para formular sus argumentos. Podemos pensar que para un alto porcentaje de alumnos no hay coherencia entre el *estatus declarativo,* expresado a nivel de definición, y el *estatus argumentativo* expresado en sus justificaciones.

Aplicación o correspondencia

La consideración de una función como **aplicación o correspondencia unívoca** que, en el caso de los gráficos cartesianos, se podría haber utilizado de forma económica y eficaz, tan sólo fue empleada en un porcentaje bajo de argumentos. En 2°de BUP oscila entre un 0% y un 17% (% medio 5.9), en 3° de BUP, entre un 0% y un 15% (% medio 2.9), y en COU, entre un 0% y un 29.2% (% medio 6.4), que suponen entre un 0% y un 7.2% de los alumnos de segundo; entre un 0% y un 7% de los alumnos de tercero y entre un 0% y un 14.3% de los alumnos de COU respectivamente.

El uso que el profesor hace en clase del gráfico, presentándolo en numerosas ocasiones de forma *"ostensiva"* hace que los alumnos tengan dificultades a la hora de tomar consciencia sobre la necesidad de una justificación respecto si representa o no una función.

5.5.3. IDENTIFICACION DE FUNCIONES A PARTIR DE SU EXPRESION ALGEBRAICA (Item 3, cuestiones 11, 12, 13, 14, 15, 16 y 17)

En la siguiente tabla podemos observar las frecuencias y porcentajes de los alumnos que identifican como función las expresiones algebraicas que figuran en el ítem 3.

Tabla 3.1: Frecuencia y porcentaje de alumnos que identifican como función la expresión algebraica que figura en cada cuestión

	Cursos			Total
Cuestión	2 BUP	3 BUP	COU	
AA	121 87.1	76 88.4	91 92.9	288 89.2
AB	66 47.5	38 44.2	59 60.2	163 50.5
AC	58 41.7	25 29.1	61 62.2	144 44.6
AD	71 51.1	30 34.9	52 53.1	153 47.4
AE	76 54.7	46 53.5	46 46.9	168 52.0
AF	99 71.2	62 72.1	78 79.6	239 74.0
AG	93 66.9	63 73.3	71 72.4	227 70.3
N. total de alumnos	139	86	98	323

Los porcentajes máximos corresponden a las expresiones que figuran en los apartados **AA)**, **AF)**, y **AG)**. De ellas, sólo la primera, una función "a trozos" puede realmente ser considerada como tal. La expresión $y = 3/x$ para ser conceptuada como función se debe precisar su dominio ($\mathbb{R} - \{0\}$); y por último, la expresión del apartado **AG)**, es evidente que no se trata de una función puesto que va precedida del doble signo ($\pm$).

La mitad de los alumnos (50.5%) admiten que la expresión y=4 se trata de una función matemática. Esto contrasta con el alto porcentaje de alumnos (91.6%) que admitieron como función la representación gráfica de la recta y = 8 en el apartado **AB)** del ítem 2 (la mayoría de ellos justificaba su respuesta diciendo: *"si, es la función y=8").* Basta un cambio de cuadro, del gráfico al algebraico, para mostrar una cierta falta de consistencia en sus respuestas. Podemos afirmar con Tirosh (1990, p. 117) que *"la falta de comprensión (de los alumnos) de la naturaleza relativa de las matemáticas se convierte en una fuente de inconsistencias para nuestros estudiantes".* Se trata también, según la terminología de Vinner y Tall, de un fenómeno de *compartamentalización.*

Tabla 3.2: Frecuencia y porcentaje de diferentes argumentos expuestos por los alumnos de 2° BUP en las diferentes cuestiones presentadas algebraicamente

	Cuestiones						
Argumentos	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Aplicación (univocidad)	6 6.0	2 2.0	2 2.4	2 2.5	4 6.4	2 2.9	2 3.4
Ideograma algebraico	59 59.0	49 49.0	37 44.0	35 43.7	22 35.5	17 24.6	19 32.2
Represent. gráfica	18 18.0	13 13.0	9 10.7	9 11.2	9 14.5	9 13.0	4 6.8
Dominio / Imagen	18 18.0	3 3.0	9 10.7	6 7.5	24 38.7	26 37.7	33 55.9
Variación / Constan.	2 2.0	9 9.0	0 0.0	2 2.5	1 1.6	4 5.8	1 1.7
Continuid. / Discont.	3 3.0	2 2.0	0 0.0	0 0.0	1 1.6	0 0.0	0 0.0
Ecuación	1 1.0	22 22.0	27 32.1	26 32.5	1 1.6	11 15.9	0 0.0
Total	100 72.0	100 72.0	84 60.4	80 57.5	62 44.6	69 49.6	59 42.4

Argumentos:

A1: Aplicación (univocidad)
A2: Ideograma algebraico / Expresión algebraica
A3: Representación gráfica
A4: Dominio/ Imagen
A5: Variación / Constante
A6: Continuidad/ Discontiniudad
A7: Ecuación

Tabla 3.3: Frecuencia y porcentaje de diferentes argumentos expuestos por los alumnos de 3° BUP en las diferentes cuestiones presentadas algebraicamente

	Cuestiones						
Argumentos	**a)**	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**	**f)**	**g)**
Aplicación (univocidad)	1 2.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0	1 3.7
Ideograma algebraico	29 58.0	27 50.0	16 35.5	19 44.2	7 38.9	11 35.5	6 22.2
Representac. gráfica	7 14.0	4 7.4	1 2.2	4 9.3	2 11.1	3 9.7	1 3.7
Dominio / Imagen	11 22.0	2 3.7	4 8.8	2 4.6	6 33.3	6 19.3	17 63.0
Variación / Constan.	2 4.0	8 14.8	2 4.4	1 2.3	2 11.1	2 6.4	2 7.4
Continuidad / Discont.	0 0.0	1 1.8	0 0.0	0 0.0	1 5.5	0 0.0	0 0.0
Ecuación	0 0.0	12 22.2	22 48.9	17 39.5	0 0.0	9 29.0	0 0.0
Total	50 58.1	54 62.8	45 52.3	43 50.0	18 20.9	31 36.0	27 31.4

Tabla 3.4: Frecuencia y porcentaje de diferentes argumentos expuestos por los alumnos de COU en las diferentes cuestiones presentadas algebraicamente

	Cuestiones						
Argumentos	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Aplicación (univocidad)	4 5.3	3 3.6	3 4.1	2 3.3	2 5.5	3 5.3	4 9.3
Ideograma algebraico	49 65.3	42 51.2	42 57.5	31 50.8	15 41.6	26 46.4	13 30.2
Representac. gráfica	11 14.7	18 22.0	7 9.6	9 14.7	3 8.3	8 14.3	5 11.6
Dominio / Imagen	4 5.3	0 0.0	3 4.1	5 8.2	9 25.0	13 23.2	16 37.2
Variación / Constan.	2 2.6	8 9.7	1 1.4	1 1.6	6 16.6	3 5.3	4 9.3
Continuidad / Discont.	5 6.7	0 0.0	0 0.0	0 0.0	1 2.7	0 0.0	1 2.3
Ecuación	0 0.0	11 13.4	17 23.3	13 21.3	0 0.0	3 5.3	0 0.0
Total	75 76.5	82 83.7	73 74.5	61 62.2	36 36.7	56 57.1	43 43.9

Si analizamos ahora los argumentos que utilizan los alumnos para justificar si las expresiones algebraicas dadas, se tratan o no de funciones, observamos, en primer lugar, que los mayores porcentajes corresponden al argumento **A2** (Ideograma algebraico). En nuestro análisis previo de respuestas hemos incluido en este apartado aquellas contestaciones que basan su argumentación exclusivamente en la *"forma"* de la expresión algebraica. No dan ningún otro tipo de explicación, sólo el hecho de poder *"clasificar"* la función por su *configuración algebraica* les basta para considerarala como tal. En caso contrario, no la admiten como función. Es decir, si los alumnos sólo ejercen un control *"sintáctico"* de la respuesta, y excluyen todo tipo de control *"semántico"*. Veamos algunos ejemplos de estas argumentaciones:

"Si es una función, es una función por partes" **(AA)**

"x.y = 5 *No es una función, pero si despejamos la y, entonces si lo sería"*

"y = 4. No es una función, no hay x"

"y = 4. Si es una función, la función constante"

$x^2 + y^2 = 1$ *. No es una función, es una circunferencia"*

Hemos de señalar que el argumento **A7** (Ecuación), es en realidad una subcategoría del **A2** (Ideograma algebraico), ya que clasifican como *ecuación* una determinada configuración algebraica. Es evidente que algunas de las expresiones que figuran en este ítem pueden, efectivamente, ser consideradas como ecuaciones, pero no por ello dejan de ser funciones. Sin embargo, podemos considerar que para un alto número de alumnos las concepciones de función y ecuación son mutuamente excluyentes. Según terminología de Vinner y Tall podemos afirmar que están fuertemente *compartamentalizadas.* Esto es consecuencia de la fuerte localización que el sistema de enseñanza, y en particular las restricciones debidas al contrato didáctico, ejercen sobre estos conocimientos, produciendo así, una falta de coherencia en las respuestas de los alumnos, generando así, concepciones inconsistentes.

Señalaremos también que existe una falta muy notable de coherencia entre el nivel declarativo, mostrado por nuestros alumnos en sus definiciones de la noción de función (más del 60% la definían mediante términos algebraicos) y el nivel argumentativo expresado en **A7** (una ecuación no puede ser una función). Estamos pues ante *"una colección de objetos que habitan en el mundo de los objetos formales sobre los cuales los alumnos no se sienten capaces más que de ejercer actividades formales, careciendo así de todo* **espesor semántico"**. (Legrand, 1988, p. 395)

Debemos destacar también que un alto porcentaje de alumnos

(55.9% en 2 BUP, 63% en 3 BUP y 37.2% en COU) utilizan el argumento **A4** en su justificación de la cuestión **AG** ($f(x)=\pm\sqrt{4x+1}$) Veamos algunos ejemplos:

"Si es una función, es una función para calcular su dominio"

"No es una función, su dominio no es $\mathbb{R}$*, tendríamos que calcularlo"*

Los alumnos, ante este tipo de expresión algebraica, se sienten fuertemente condicionados por las restricciones del contrato didáctico. Los ejercicios sobre los que ellos en clase han debido determinar dominios se centraban exclusivamente en expresiones de la forma: $A(x)/B(x)$, $\sqrt{P(x)}$, $\sqrt{P(x)/Q(x)}$, o bien, $\log A(x)$. No reparan en la presencia del doble signo que precede a la raiz; sólo la *"forma"* de la expresión algebraica les conduce a establecer una fuerte asociación con la actividad de *"cálculo de dominios de funciones"*. La adaptación del alumno al sistema de enseñanza produce, evidentemente una fuerte presión en el control de sus respuestas: *"Sus respuestas se apoyan en las conexiones analógicas que le permitan responder....preocupándose muy poco de su coherencia y de su significación. Hacer lo que le piden sin preocuparse por comprender, buscando sólo una estrategia eficaz"* (Leonard y Sackur, 1990, p. 217, 218). Buscan sólo poder manipular los formalismos que el enunciado del ejercicio les induce sin tener ninguna voluntad de ejercer un control *semántico*.

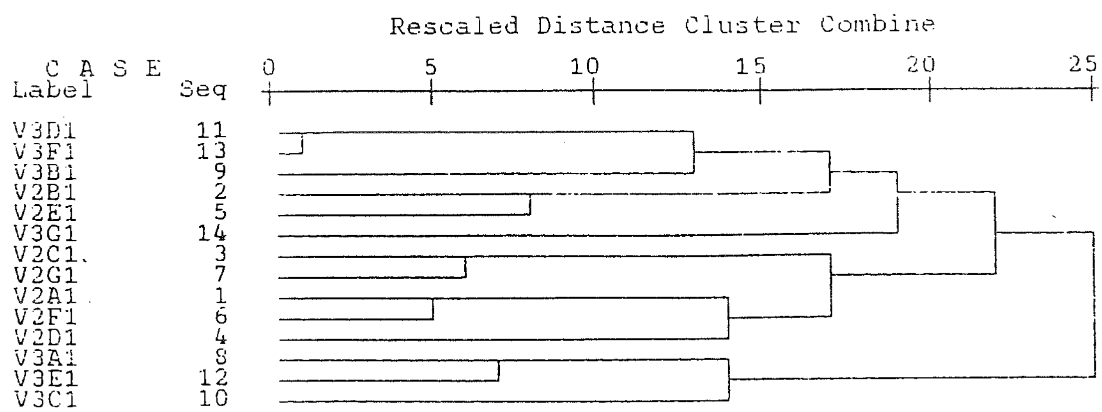
5.5.4. ESTUDIO MULTIVARIANTE DE LAS RESPUESTAS EN LA IDENTIFICACION DE FUNCIONES

En las secciones 5.5.2 y 5.5.3 se ha estudiado si los alumnos de la muestra reconocen o no como función las gráficas y expresiones algebraicas propuestas, así como los argumentos que emplean para apoyar su respuesta. El análisis que hemos hecho en estas secciones ha sido univariante, ya que la respuesta en cada uno de los ítems se ha considerado como una variable dependiente, en función sólo de las características del ítem, pero no de las respuestas en los ítems restantes.

Puesto que la respuestas de cada alumno particular sobre cada una de las gráficas y expresiones algebraicas propuestas depende de sus concepciones, cabe esperar una relación entre las distintas respuestas del mismo alumno en todas las preguntas que se refieren al reconocimiento de funciones. Un estudio de correlaciones o de coeficientes de asociación entre estas respuestas sería dificilmente interpretable, debido al tamaño de la matriz de correlaciones que se obtendría (14x14). Consideramos, en consecuencia, necesario la aplicación de técnicas de análisis multivariante que nos proporcionen una síntesis del conjunto de interrelaciones entre las respuestas en este grupo de ítems.

Análisis "cluster" de las respuestas (afirmativa o negativa) en el reconocimiento de funciones

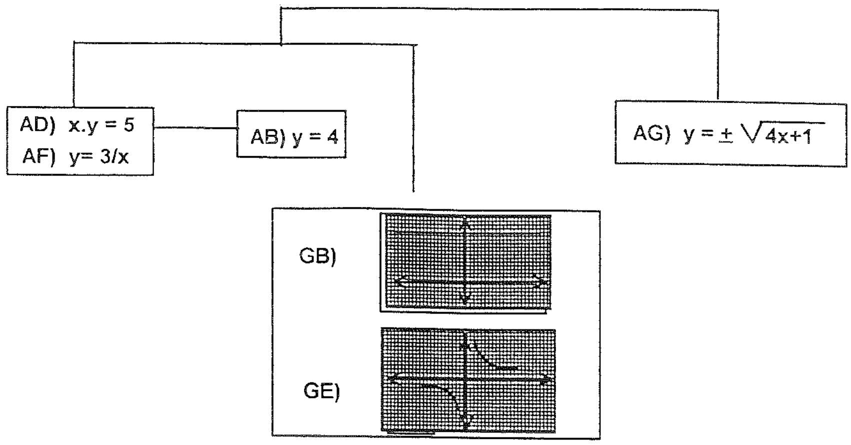
En primer lugar hemos realizado un análisis cluster (Celeux y cols., 1989, Lerman, 1981) en referencia a las 14 cuestiones propuestas a los alumnos sobre la representación gráfica y algebraica de funciones. Las jeraquías se han establecido teniendo en cuenta si los alumnos las identificaban o no correctamente como funciones. Ya que las variables son dicotómicas, podemos aplicarles, como medida de asociación el coeficiente de correlación de Pearson. Se ha empleado el paquete SPSS, con el método de la distancia promedio. El análisis presenta el siguiente diagrama:



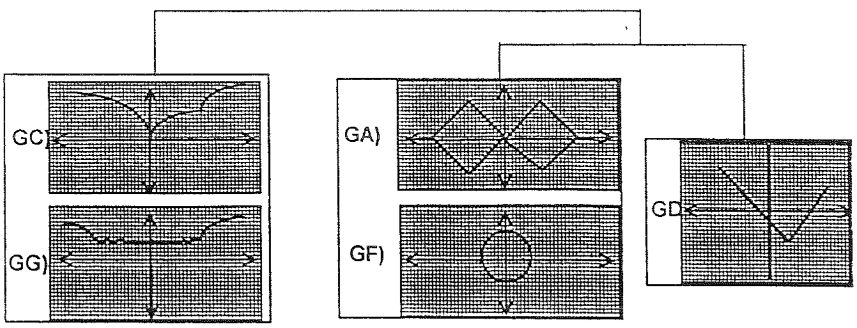
Del análisis del mismo podemos seguir las siguientes conclusiones:

- Aparecen en principio tres categorias bien diferenciadas entre las 14 cuestiones propuestas:

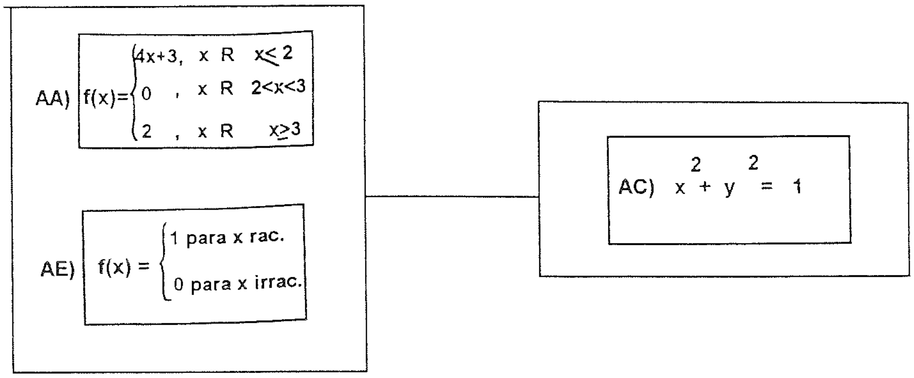
1. Expresiones fácilmente identificables por ser sus representaciones familiares a los alumnos en sus actividades de clase:



2. Representaciones gráficas cuyos caracteres permiten determinar de forma intuitiva la unicidad del elemento imagen, así como la derivabilidad en determinados puntos:



3. Funciones que tienen diferentes expresiones para distintas partes del dominio:



Podemos decir que, en principio, los alumnos han clasificado las funciones por su *"forma"* tanto gráfica como algebraica, son funciones fácilmente reconocibles por pertenecer al repertorio de ejemplos y ejercicios manipulados por ellos en sus actividades de clase. Sin embargo, es precisamente esta familiaridad la que les conduce, a veces, a no determinar correctamente la existencia o no de una función en las diferentes cuestiones, ya que, por ejemplo, el 70.3% identificó como función la expresión **AG** que no satisfacía la condición de unicidad del elemento imagen, y el 50% identificó como función la expresión **AB** (y=4), cuando el 91% identificó la gráfica **GB** (recta y=8) como función. Existe aquí un caso de cierta inconsistencia de las respuestas.

En la segunda clase de funciones están todas ellas representadas gráficamente. A su vez forman dos subclases bien diferenciadas, en una se encuentran las funciones de forma muy irregular (contienen puntos angulosos) y cuya expresión algebraica no es conocida por los alumnos y en la otra están las gráficas en las que se observa claramente la no unicidad del elemento imagen para un original dado. Sin embargo, aunque tanto para unas como para otras, la definición de función como aplicación es el criterio más económico para determinar su existencia, sólo lo emplearon entre el 1.3% y el 14% de los alumnos. La mayoría de ellos, como ya comentamos anteriormente, utiliza criterios basados exclusivamente en el aspecto más o menos familiar que presenta la gráfica, es decir, en los elementos ideográficos de la representación. La agrupación de todas estas gráficas en una misma clase muestra claramente esta tendencia de los alumnos.

La tercera clase que aparece en el diagrama *"cluster"* está configurada exclusivamente por expresiones algebraicas, y se pueden determinar a su vez dos subclases, una de ellas contiene funciones expresadas algebraicamente *"a trozos"*, y otra contiene sólo la ecuación de la circunferencia (que no sería una función).

El análisis "cluster" que acabamos de comentar nos proporciona una tipología de ítems que los alumnos consideran de algún modo equivalentes. Nosotros, personalmente hemos hecho una interpretación de las razones en que han debido basar esta clasificación. Sin embargo, debe ser el análisis de los propios argumentos de los alumnos el que nos complete esta interpretación.

Resultados del análisis factorial de correspondencias

Hemos realizado un análisis de correspondencias (Cornejo, 1988) de la tabla de datos que cruza los diferentes argumentos empleados por los alumnos en cada una de las 14 cuestiones presentadas para reconocer si son o no función (7 expresiones algebraicas y 7 gráficos), distribuida por curso escolar. Es decir, la matriz de datos resultante se configuró del modo siguiente: se fusionaron verticalmente las tablas (frecuencias absolutas) 2.2, 2.3 y 2.4 por un lado y 3.2, 3.3, y 3.4 por otro. Tras ello, se reordenaron las filas de las tablas parciales obtenidas de modo que correspondieran a los 8 tipos de argumentos siguientes: aplicación, elementos ideográficos, expresión algebraica, dominio/imagen, continuidad/discontinuidad, crecimiento/decrecimiento, representación gráfica y otros. Se fusionaron horizontalmente los dos ficheros de datos obtenidos y de este modo se tuvo la tabla de datos a analizar que constaba de 14 columnas (los ítems) y 24 filas correspondientes a los tres grupos de 8 filas (los diferentes argumentos) en cada uno de los cursos escolares.

La tabla 3.5 presenta estos datos totalizados por curso escolar, resultando una matriz de datos de 8 filas por 14 columnas, ya que la variable curso sólo se emplea como variable suplementaria y no directamente en el análisis. En la tabla 3.6 se presentan dentro de cada ítem, el porcentaje de los diferentes argumentos según las distintas cuestiones:

Tabla 3.5: Frecuencias de alumnos que expresan diferentes argumentos según las distintas cuestiones

	ITEMS (**)														
ARGUMENT(*)	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	GA	GB	GC	GD	GE	GF	GG	TOTAL
APLIC	11	5	4	4	6	5	7	30	4	3	1	0	9	5	94
IDEOGR	138	163	161	141	45	77	38	98	112	86	90	130	118	64	1461
EALG	0	0	0	0	0	0	0	4	91	15	26	36	15	8	195
DOMINIO	33	5	16	13	39	45	66	13	15	8	13	8	7	8	289
CONT	8	3	0	0	3	0	1	0	9	2	5	32	3	6	72
CRECI	0	0	0	0	0	0	0	2	7	16	9	9	3	14	60
GRAFICO	36	35	17	22	14	20	10	0	0	0	0	0	0	0	154
OTROS	6	25	3	4	9	9	7	0	5	1	2	0	0	6	77
TOTAL	232	236	201	184	116	156	129	147	243	131	146	215	155	111	2402

(*) APLIC - Aplicación

IDEOGR - Ideograma (algebraico o gráfico)

EALG- Expresión algebraica

DOMINIO - Dominio-Imagen

CONT - Continuidad/discontinuidad

CREC - Crecimiento/decrecimiento

GRAFICO - Representación gráfica

OTROS - Otros argumentos no clasificables en los anteriores

(**) Véase en las secciones 5.3.2 y 5.3.3 el enunciado de cada ítem

Tabla 3.6: Porcentajes de alumnos que expresan diferentes argumentos según las distintas cuestiones

	ITEMS														
ARG	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	GA	GB	GC	GD	GE	GF	GG	TOT
APL	4.7	2.1	2.0	2.2	5.2	3.2	5.4	20.4	1.6	2.3	0.7	0.0	5.8	4.5	3.9
IDE	59.5	69.1	80.1	76.6	38.8	49.4	29.5	66.7	46.1	65.6	61.6	60.5	76.1	57.7	60.8
EAL	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.7	37.4	11.5	17.8	16.7	9.7	7.2	8.1
DOM	14.2	2.1	8.0	7.1	33.6	28.8	51.2	8.8	6.2	6.1	8.9	3.7	4.5	7.2	12.
CON	3.4	1.3	0.0	0.0	2.6	0.0	0.8	0.0	3.7	1.5	3.4	14.9	1.9	5.4	3.0
CRE	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.4	2.9	12.2	6.2	4.2	1.9	12.6	2.5
GRA	15.5	14.8	8.5	12.0	12.1	12.1	7.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	6.0	6.4
OTR	2.6	10.6	1.5	2.2	7.8	5.8	5.4	0.0	2.1	0.8	1.4	0.0	0.0	5.4	3.2
TOT	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

El análisis de correspondencias proporciona, en primer lugar un contraste Chi cuadrado de independencia entre las filas y columnas de la tabla 3.5. Hemos comprobado previamente que la menor frecuencia esperada (2.77) es mayor que la unidad y que sólo 16 celdas (12.5% de las 128) tienen frecuencias esperadas menores que uno, con lo que se cumplen las condiciones de aplicación de este contraste estadístico.

El valor Chi cuadrado (1413.722; 91 g.l.) obtenido es altamente significativo, de lo que se deduce que no puede sostenerse la hipótesis de independencia; hay relación entre los ítems y los argumentos empleados por los alumnos.

Figura 1: Análisis de la tabla de frecuencias observadas

```
          TOTAL INERTIA = SUM OF EIGENVALUES =  0.5886

AXIS EIGENVALUE  % INERTIA CUM %      HISTOGRAM

1     0.278        47.2    47.2  ****************************************
2     0.124        21.1    68.3  :*****************
3     0.071        12.1    80.4  :**********
4     0.051         8.6    89.0  :*******
5     0.036         6.1    95.2  :*****
6     0.022         3.7    98.9  :***
7     0.007         1.1   100.0  :*

CHISQUARE VALUE WITH   91 DF =   1413.722
CHISQUARE ASSOCIATED P-VALUE =      0.000
```

Se observan tres factores principales, entre los cuales explican el 80.4% de la inercia (asociación entre las filas y columnas de la tabla de datos), por lo que consideramos suficiente la interpretación de estos tres factores.

Todos los argumentos e ítems empleados presentan una buena calidad de representación en los ejes de proyección obtenidos; el que tiene la calidad más baja (0.642), aunque también es fuerte, es el de OTROS, probablemente debido a que aquí hemos agrupado diferentes argumentos.

Hemos utilizado diversas filas y columnas suplementarias, totalizando las respuestas según diversas categorías. En este sentido, las filas y columnas suplementarias representan "individuos o categorías promedio". Estas filas y columnas son las siguientes:

- Las filas denominadas FUNCION y NOFUNCION representan, para cada uno de los ítems el total de sujetos que han reconocido o no han reconocido como función cada una de las 14 situaciones presentadas.

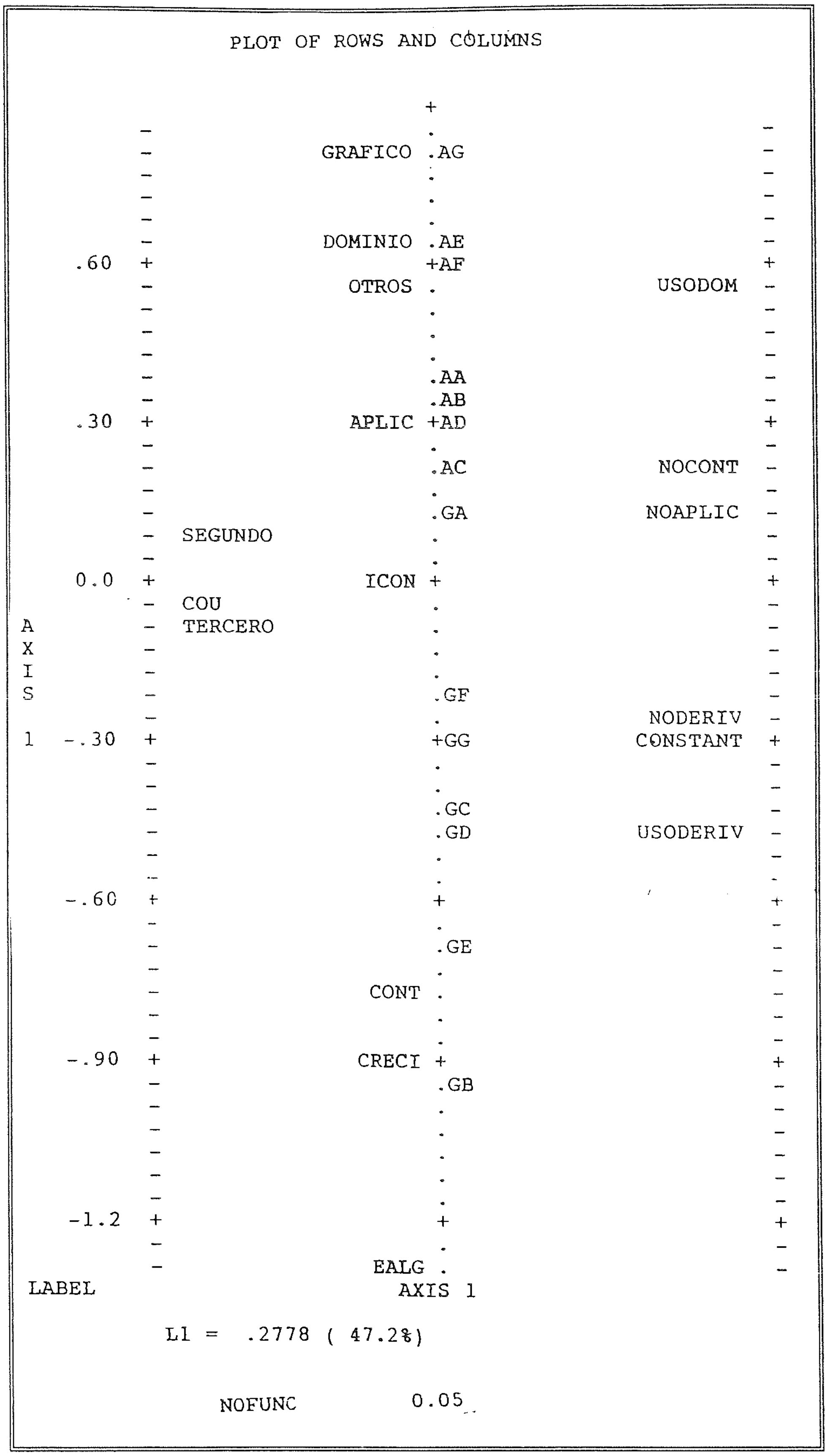
- Las filas denominadas SEGUNDO, TERCERO y COU totalizan para cada ítem el número de alumnos en cada curso que lo ha reconocido como función.

Respecto a las columnas suplementarias, representan para cada tipo de argumento, el número de veces que se ha empleado en cada una de las siguientes categorías de ítems:

- Funciones constantes (CONSTANT)
- Gráficas que no corresponden a una aplicación (NOAPLIAC)
- Funciones no derivables (NODERIV)
- Funciones no continuas (NOCONT)
- Funciones que se usan en la enseñanza para estudiar la derivabilidad (USODERIV)
- Funciones que se usan en la enseñanza para calcular su dominio (USODOM)

A continuación describimos los factores identificados. Para cada modalidad de fila o columna suplementaria, designaremos mediante la letra **x** la coordenada de la modalidad sobre el factor, y mediante la letra ρ el coeficiente de correlación al cuadrado (que mide la calidad de representación sobre este eje) entre la modalidad y el factor.

Figura 2: Representación gráfica del PRIMER FACTOR : "Cuadro de presentación del item" (47.2% de la inercia)



Este factor diferencia entre argumentos empleados en los ítems presentados en el cuadro algebraico (AA,....AG) que muestran puntuaciones positivas e ítems presentados en el cuadro gráfico (GA, ...GG) que muestran puntuaciones negativas. La característica más llamativa de este eje es la separación que produce entre estos dos tipos de ítems. Especialmente opone los ítems AG (x=0,809; ρ=0.414), AE (x=0.657, ρ=0.623); AF (x=0.613; ρ=0.785) y AA (x=0.402; ρ=0.663) con los GB (x=-0.927, ρ=0.577), GE (x= -0.665, ρ=0.712).

Respecto a los argumentos, este eje opone la referencia a expresión algebraica (EALG) (x=-1.292, ρ= 0.807) el crecimiento (CRECI) (x= -0.906, ρ =0.357) y la continuidad (CONT) (x= -0.75, ρ= 0.3), que al tener puntuaciones negativas serían los argumentos asociados a los ítems presentados en el cuadro gráfico, a los argumentos gráfico (GRAFICO) (x=0.814, ρ=0.655), y dominio (DOMINIO) (x= 0.639, ρ= 0.384) que estarían asociados a los ítems presentados en el cuadro algebraico.

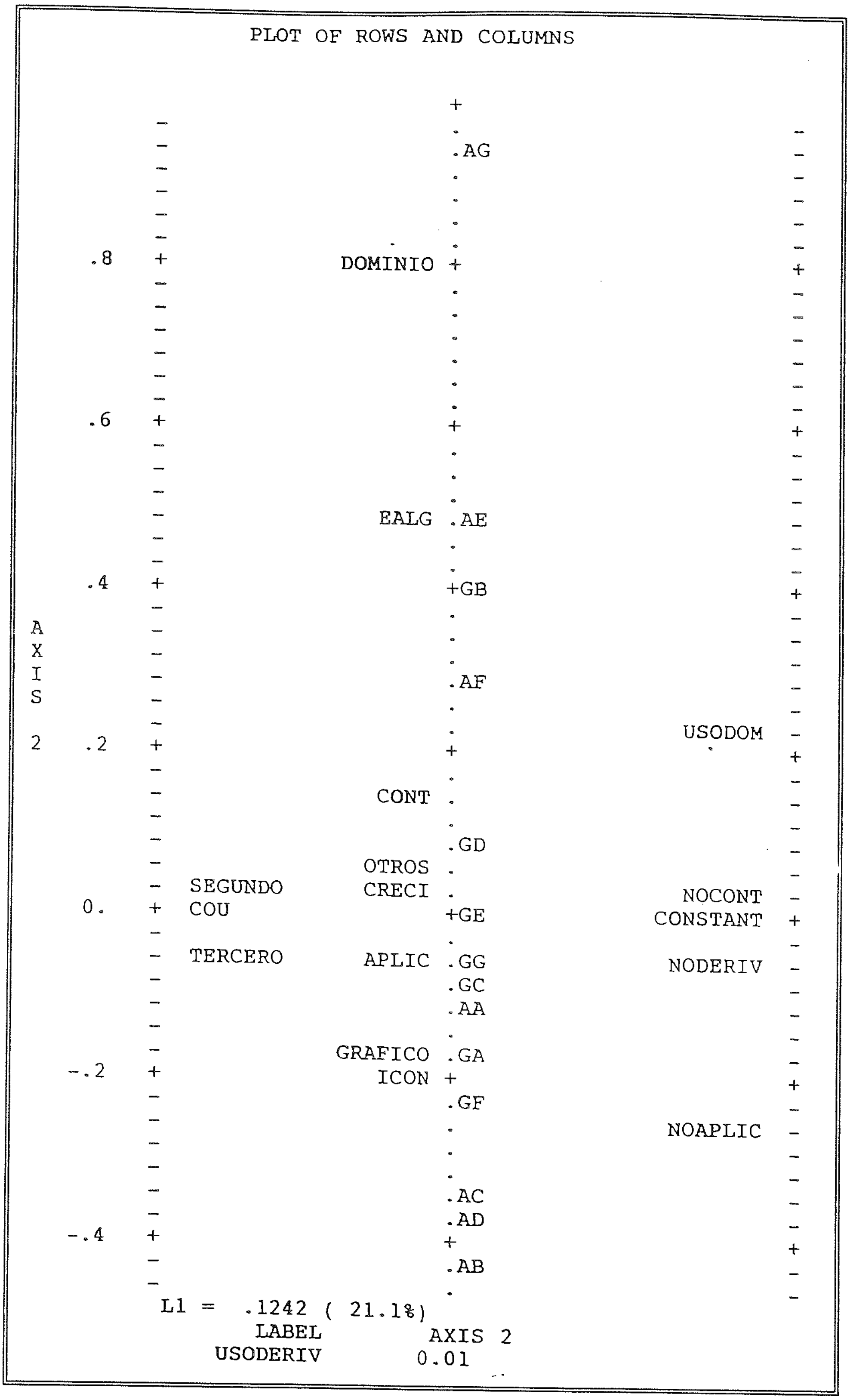
La oposición que se realiza en este primer eje nos muesta que los ítems expresados de forma algebraica están claramente opuestos a los expresados de forma gráfica; además los argumentos que emplean los alumnos para determinar en cada uno de ellos si se trata, o no, de una función matemática también están claramente opuestos, así el argumento GRAFICO ("*es una función porque la podemos representar gráficamente*") lo usan exclusivamente cuando se refieren a las expresiones algebraicas, igual ocurre con el argumento DOMINIO ("*es una función porque podemos dar valores a la x y obtenemos el valor de la y*, o bien, "*no es función porque al no tener x no podemos darle valores)*, lo emplean también casi exclusivamente para referirse a expresiones algebraicas, contemplan estas como un cierto procedimiento de cálculo. El argumento expresión algebraica (EALG) opuesto claramente a los dos anteriormente citados, lo usan los alumnos al referirse a las funciones expresadas gráficamente ("*es una función porque su ecuación es y = 8");* de forma análoga se sitúan los argumentos crecimiento (CRECI) y continuidad (CONT), nuestros alumnos los ponen en funcionamiento sólo para el caso de los gráficos (GB, GE).

En este primer eje no hay ninguna diferencia apreciable entre FUNCION y NOFUNCION (no aparece representadas en la figura 2 debido a que sus coordenadas son 0.05); interpretamos este hecho como indicativo que no hay un efecto apreciable de la presentación de los ítems en cuadro gráfico o algebraico sobre el reconocimiento por los alumnos de la función.

Respecto al resto de variables suplementarias ninguna tiene un peso fuerte en este eje. Destacamos la oposición entre el uso como dominio (USODOM) ($x=0.538, \rho= 0.829$) que se asocia a los argumentos relativos al dominio y la representación gráfica y el uso como derivada (USODERIV) ($x=-0.459$, $\rho=0.624$) (y con un peso menor, constante y funciones no derivables que se asocia a los argumentos de expresión algebraica, crecimiento y constancia).

Aparece un pequeño peso ($x= 0.268$ $\rho= 0.341$) de los argumentos para justificar que no es una función (NOFUNCION) y no aparece peso de los argumentos para justificar que el ítem es una función (FUNCION). En consecuencia, parece que los alumnos han empleado en este eje los mismos argumentos tanto para justificar que un ítem es una función como para justificar que no lo es. Lo mismo ocurre en el resto de los ejes, por lo que no los comentaremos.

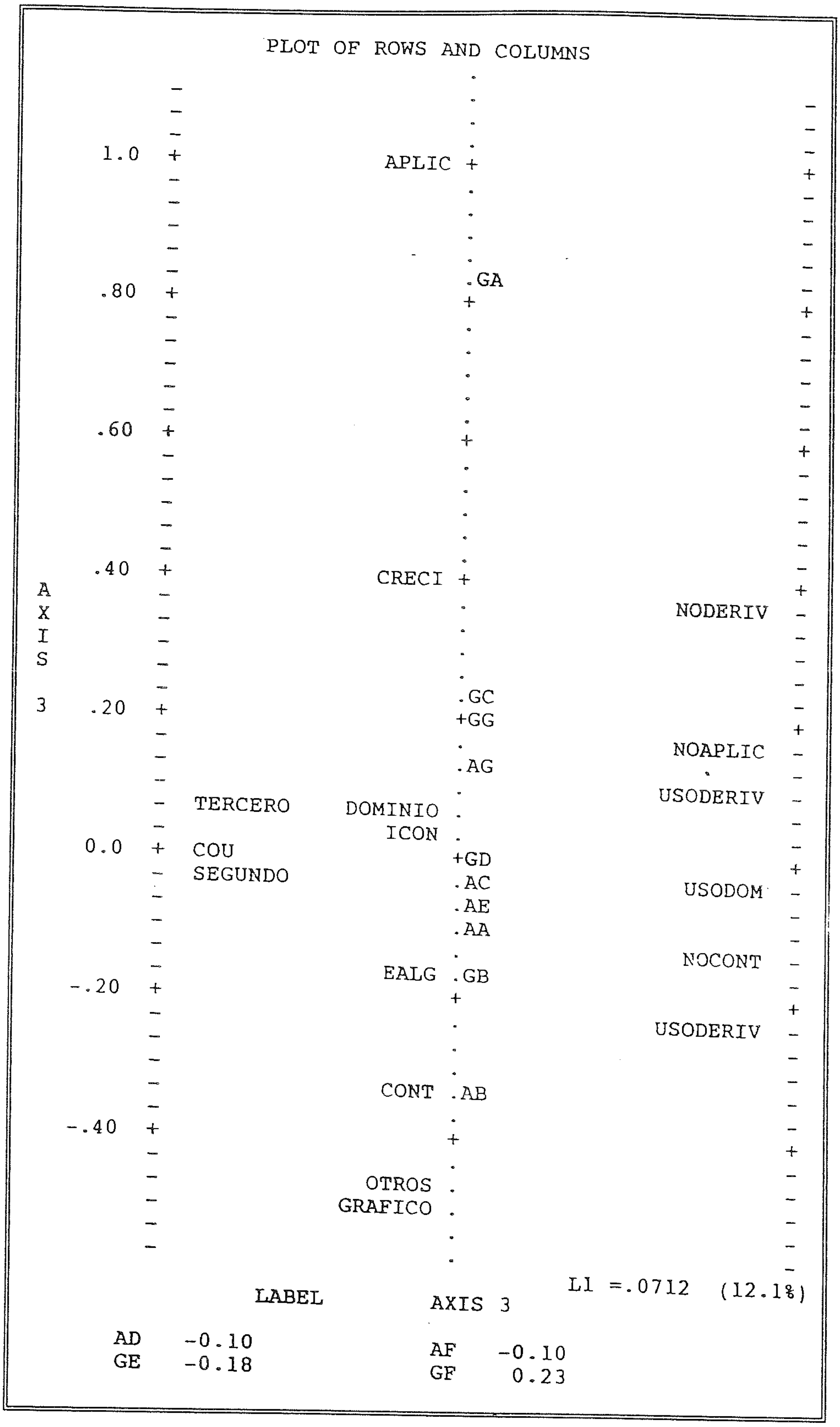
Figura 3: Representación gráfica del SEGUNDO FACTOR: Contraposición de argumentos relativos al dominio y argumentos ideográficos en el cuadro algebraico. (21.1% de la inercia)



El segundo factor separa los ítems algebraicos en dos grupos y apenas tiene influencia sobre los geométricos: Por un lado aparecen los ítems AG ($x= 0.943$, $\rho=0.563$) y AE ($x= 0.482$, $\rho= 0.335$); por otro los ítems AD ($x=-0.359$, $\rho= 0.5$); AC ($x= -0.342$, $\rho=0.497$); y AB (-0.419, $\rho= 0.353$). El primer grupo de ítems aparece asociado al argumento DOMINIO ($x= 0.794$; $\rho=$ o,593) y el segundo al argumento ideográfico (IDEOG) ($x= -0.210$, $\rho= 0.845$), que se oponen entre sí. En efecto, los ítems AG y AE presentan un porcentaje de argumentos relativos al dominio bastante superior a la media y un porcentaje de argumentos icónicos bastante inferior a la media y con los ítems AD, AC, y AB ocurre lo contrario. Esto nos explica que existen expresiones algebraicas que los alumnos identifican o no como función sólo atendiendo a la "forma" que tienen. Sin embargo, para el caso del ítem AG ($f(x)= \mp \sqrt{4x + 1}$) usan el argumento DOMINIO, este tipo de funciones normalmente figura en los ejercicios que en clase se emplean para la determinación del dominio.

En cuanto a las variables suplementarias, sólo se aprecia un peso negativo muy pequeño de los ítems que no son aplicación ($x=-0.267$; $\rho= 0.336$) y en los que los alumnos argumentan utilizando los elementos icónicos (GA y GF). Se trata de gráficos que tienen una forma muy particular, y que a través de la misma se puede determinar inmediatamente si se trata o no de una función.

Figura 3: Representación del TERCER FACTOR: Idea de aplicación (12.1% de inercia)



El tercer factor está marcado casi exclusivamente por la idea de aplicación ($x= 0.984$; $\rho= 0.716$) y opone el ítem GA ($x=0.833$, $\rho=0.793$) con el resto. En este ítem se ha usado con gran frecuencia el argumento de aplicación que, en general no ha sido empleado en los restantes. Al ser el tercer factor da la impresión que los alumnos han buscado primero otros argumentos (los ideográficos, expresión algebraica, gráfica, etc.) antes de comprobar si se trata o no de una aplicación. Parece ser que la función debiera cumplir otros requisitos previos, antes de éste para ser considerada como tal. Destacaremos también que el gráfico GA es muy peculiar y extraño, debido a su forma (no suele aparecer en los manuales escolares). Para los alumnos resulta muy eficaz y económico utilizar el argumento aplicación (APLIC), sin embargo, en estas mismas circunstancias, se encontraría el ítem GF y por tratarse de una circunferencia, una curva muy familiar para ellos, no utilizan este mismo argumento, sino que la identifican como una figura conocida (*"es una circunferencia"*) y esto les basta para considerarla como una función, no necesitan probar si es o no una aplicación.

La variable suplementaria curso escolar no ha tenido influencia en ninguno de los ejes: en consecuencia, observamos una permanencia de los argumentos empleados a lo largo de los diferentes cursos lo que puede ser un signo de permanencia de las concepciones.

Del análisis presentado referido a las cuestiones 2 y 3 podemos seguir las siguientes conclusiones (que deberemos completar y reforzar con el resto de las respuestas a la totalidad de los ítems del test).

1) Las justificaciones manifestadas por los alumnos en cuanto a las representaciones -gráficas y algebraicas- de una función constituyen una parte muy significativa en la configuración de una concepción ya que están ligadas a las prácticas y a las situaciones de enseñanza-aprendizaje,y, en consecuencia, a través de ellas podemos conocer el conjunto de invariantes asociados a

las representaciones de esta noción.

2) Las diferentes argumentaciones en referencia a las representaciones tanto algebraicas, como gráficas de funciones, las podemos agrupar en torno a distintas concepciones de la noción de función (la inconsistencia de las mismas y su posible constitución en obstáculos se determinará con el análisis de las restantes cuestiones del test).

3) Los argumentos que hemos clasificado anteriormente como GRAFICO pueden incluirse en una concepción configurada por la fuerte asociación entre fórmula y gráfica: "*Toda fórmula es representable por una gráfica*". Evidentemente esta concepción tendría un dominio de validez muy limitado, incluso en este mismo cuestionario, ya que en expresiones como la AE fracasaría.

Los argumentos incluidos en expresión algebraica (EALG) pueden incluirse también dentro de esta misma concepción, "*toda gráfica proviene de los valores dados a una fórmula*", ya que mantiene la asociación entre fórmula y gráfico. Su dominio de validez sería también muy limitado pues gráficas tales como la GG, no serían consideradas como funciones, al no conocer su expresión algebraica.

Podríamos considerar que esta concepción estaría ligada, en ciertos aspectos, a la concepción epistemológica determinada en la evolución histórica **CE4** (curva analítico-geométrica), sobre todo en lo referente a invariantes y representaciones asociadas.

4) Los argumentos que hemos incluido en DOMINIO contienen todos ellos la certeza de que sólo las expresiones algebraicas que posibiliten el dar valores a la **x** y obtener los correspondientes de **y** se pueden considerar como funciones. Pueden incluirse en una concepción que considera a la función como un cierto procedimiento de cálculo, una especie de algorítmo (input-output). Su dominio de validez también es muy limitado ya que excluye funciones tales como y=cte. Incluso en este mismo cuestionario, en expresiones como las AB o AE fracasaría.

Estas argumentaciones están estrechamente relacionadas con las definiciones que denominabamos anteriormente *"operacionales"* -consideran la función como un cierto procedimiento de cálculo algorítmico-. Los alumnos las manifiestan en referencia a las funciones expresadas algebraicamente. Podemos decir que están inducidas por una práctica muy arraigada en la enseñanza como es la configuración de *"tablas"* a partir de expresiones algebraicas. Se puede afirmar, en consecuencia, que es producto de decisiones didácticas.

5) Los caracteres de crecimiento (CRECI) o continuidad (CONT) sólo se incluyen en argumentaciones que tratan de justificar la existencia de una función mediante la descripción de la *"forma"* de su gráfica; sin embargo, no se utilizan para expresiones algebraicas tales como AA, AD, AE, o AF. Estos argumentos nos muestran cómo los alumnos consideran estas propiedades gráficas y no analíticas.

Estas argumentaciones manifiestan cómo el aprendizaje de los alumnos refleja la influencia del caracter *"ostensivo"* con que los profesores manejan las gráficas en la enseñanza para presentar conceptos altamente formalizados tales como límites laterales, continuidad, crecimiento, derivabilidad, etc. Los alumnos no responden a la cuestión de si se trata o no de una función sino que se limitan a "calificar" la gráfica.

6) Es muy alto el porcentaje de alumnos que basan sus argumentos en la *"forma"* de las expresiones algebraicas o de los gráficos para considerarlos, o no, como funciones. Este aspecto ideográfico (IDEOGR) podríamos incluirlo en otra concepción de la función muy restringida, ya que una expresión algebraica será considerada como función sólo bajo ciertas condiciones *"sintácticas"*; y un gráfico sólo bajo ciertas limitaciones sobre su configuración (debe presentar cierta *"regularidad")*. Su dominio de validez es también muy limitado pues funciones tales como AB, AD, AE, GC, GD, o GG quedarían excluidas.

Este tipo de argumentaciones manifestadas por los alumnos son producto de decisiones didácticas, ya que el repertorio de gráficos y funciones que figuran en la enseñanza justifican la configuración de esta concepción. La presentación que tanto manuales como profesores realizan de la noción de función en toda su generalidad (**CE6** o **CE7**) contrasta con las limitaciones del campo en el que normalmente se eligen los ejemplos y ejercicios (**CE3**, **CE4**, **CE5**).

7) Los argumentos clasificados como aplicación (APLIC) también podrían incluirse en la configuración de una concepción, que en general no ha sido empleada por los alumnos. Han utilizado con prioridad otros argumentos (gráfica, expresión algebraica, elementos ideográficos). Esta concepción estaría estrechamente ligada a la concepción **CE6** determinada en la evolución histórica y que considera la función como una correspondencia arbitraria unívoca.

Esta conclusión nos permite confirmar la **hipótesis 5** que nos habíamos formulado al comienzo de nuestra investigación. Los alumnos no consideran esta concepción, sino después de haber utilizado otros criterios de decisión que refejan estadios anteriores de la concepción epistemológica de función como aplicación.

8) No influye de forma decisiva el nivel escolar en la utilización de las argumentaciones, y en consecuencia, en la permanencia de las concepciones.

5.5.5. EMPLEO DE FUNCIONES EN SITUACIONES DE MODELIZACION

5.5.5.1. Modelización en contexto GEOMETRICO
(Item 4, cuestiones 18, 19, 20)

Análisis de las respuestas a la cuestión 18

En la siguiente tabla figuran las frecuencias y porcentajes de las respuestas dadas por los alumnos a la siguiente cuestión:

> *¿Podrías dibujar una gráfica que represente la variación del área según la posición del punto P?*

Tabla 4.1: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según las diferentes gráficas construidas para representar la variación (contexto geométrico)

	CURSOS			Total
Gráficos	2 BUP	3 BUP	COU	
G1	29 54.7	30 71.4	26 65.0	85 63.0
G2	3 5.6	2 4.7	2 5.0	7 5.2
G3	10 18.9	2 4.7	5 12.5	17 12.6
G4	1 1.9	8 19.1	5 12.5	14 10.4
OTRAS	10 18.9	0 0.0	2 5.0	12 8.9
Total respuest.	53 39.2	42 31.1	40 29.6	135 100.0

(el 58.2% de alumnos no contesta a esta cuestión)

Gráficas:

G1: Sobre el triángulo dado, la recta que contiene a la hipotenusa.

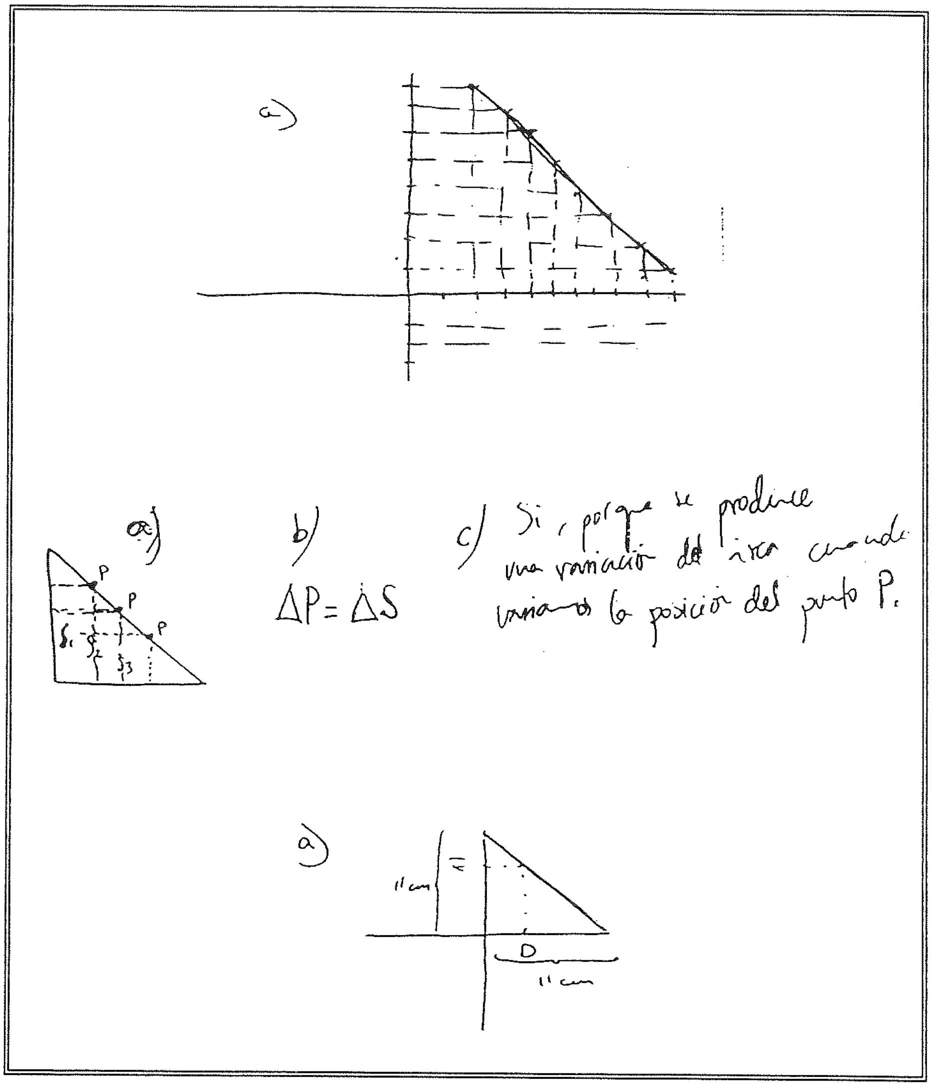
G2: Recta y = K

G3: recta $y = x$

G4: Parábola $y = x(11 - x) = 11x - x^2$

OTRAS

Sólo 135 alumnos (el 41% del total) ha respondido a esta pregunta, lo que indica su dificultad. Un porcentaje muy alto de los que han respondido (63%) representa la variación del área del rectángulo mediante la recta que contiene a la hipotenusa del triángulo que figura en el enunciado de la situación (toman los catetos del triángulo a modo de ejes cartesianos y prolongan la hipotenusa como si se tratase de una recta). Veamos algunas producciones de los alumnos:



Como vemos en los ejemplos anteriores, los alumnos, mediante procedimientos de simulación, intentan determinar, de modo figurativo, **cómo** varía el área, ignorando **qué** varía en esta situación (qué variables x e y son las pertinentes). Se quedan en una representación, mediante un modelo geométrico, de la variación de la situación.

> *"El concepto de gráfico es bastante dificil. Algunos estudiantes nunca llegarán a usar los gráficos de dos dimensiones espontáneamente para representar relaciones funcionales"* (Sierpinska, 1992, p. 52)

Si nos detenemos a observar las estrategias seguidas por los alumnos en sus respuestas (tabla 4.6), el 65% realizan dibujos sobre el triángulo dado en el enunciado, simulando con esto, el proceso de variación. Tan sólo el 12% construyen una tabla de valores a partir de la fórmula del área (A = b.h).

Podemos pensar también que el hecho de presentar en el enunciado de esta situación una figura geométrica, ha llevado a los alumnos a utilizarla como medio de expresión de la variación y como útil de prueba - existe realmente una variación del área, si variamos la longitud de los lados -. Se trataría según terminología de Margolinas (1993, p. 180) de una prueba pragmática de verificación, en la cual está ausente todo tipo de investigación, por parte del alumno, de la necesidad y de la generalización.

Según Bachellard (1983), en el desarrollo de todo pensamiento científico podemos encontrar el obstáculo (a nivel de esquemas de pensamiento) de la *persistencia de las primeras representaciones;* en esta situación una gran mayoría de alumnos, usa la figura geométrica como medio de representación del cambio. Esta primera representación es un obstáculo para la gráfica puesto que les lleva a admitir como gráfico de la función la recta que contiene a la hipotenusa. (Manifestación de error repetitivo). Se podría afirmar que existe un obstáculo ligado al status de la figura, ya que se utiliza ésta para representar el cambio por medio de la comparación de estados sucesivos.

Sólo el 10.4% de los alumnos que responden (3.7% del total), construyeron correctamente la gráfica que representaba la variación en esta situación. La estrategia que utilizan es la construcción de una tabla de valores.

Para pasar de la figura a la gráfica es preciso que el cambio se observe de una manera global: como una sucesión de estados que es preciso integrar, reunir en la noción de variable (dependiente e independiente)

En la figura los alumnos observan tres variables que cambian: base, altura y área. En la gráfica deben reducirlas a dos, base y área, y expresar su variación por un medio estrictamente **simbólico**, no figurativo.

> *Un gráfico representa la función de una forma indirecta, de modo simbólico. .... El gráfico es una representación estática que oculta todo el dinamismo de las funciones".* (Sierpinska, 1992, p. 52)

Análisis de las respuestas a la cuestión 19

En la tabla siguiente figuran las frecuencias de las respuestas y porcentajes respecto al total de respuestas dadas por los alumnos a la siguiente cuestión:

¿Puedes encontrar una expresión matemática que represente de modo general la variación anterior?

Tabla 4.2: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según las diferentes expresiones algebraicas propuestas para representar la variación (contexto geométrico)

	CURSOS			Total
Exp. alg.	2 BUP	3 BUP	COU	
E1	23 60.5	15 71.4	23 63.9	61 64.2
E2	7 18.4	2 9.5	2 5.5	11 11.6
E3		1 4.8	1 2.8	2 2.1
OTRAS	8 21.1	3 14.3	10 27.8	21 22.1
Total	38 43.0	21 26.6	36 30.3	95 100.0

(el 70% de los alumnos no contesta esta cuestión)

Expresiones algebraicas:

E1: Expresión del área de un rectángulo (S = b.h)
E2: A = cte., no varía
E3: $y = x(11 - x) = 11x - x^2$
OTRAS

Tan solo 95 alumnos contestan esta cuestión, de los cuales el 64.2% responden que la expresión que mejor representa esta variación es S = b.h.. Tan sólo 2 alumnos llegaron a construir correctamente la expresión de la función: $y = x(11 - x)$ (el 0.6% del total).

Los alumnos ante esta situación, ponen en funcionamiento una serie de procedimientos a nivel de situaciones de acción pero no llegan a una formulación funcional, ni tienen, en consecuencia, necesidad de validar los procedimientos pertinentes.

Hay una diferencia muy significativa entre la primera expresión (S=b.h) y la tercera ($y = 11x - x^2$), y no sólo por su aspecto externo, sino por sus raices epistemológicas. La expresión

S=b.h representa una ley que establece una relación entre magnitudes variables (longitud x longitud ---> Superficie); sin embargo, la expresión $y = x(11-x)$ determina una relación mucho más abstracta y general entre variables numéricas.

> *"La discriminación entre variables que representan conceptos físicos y variables numéricas es una condición necesaria para la comprensión de las funciones por parte de nuestros alumnos"* (Sierpinska, 1992, p. 42)

El paso de la fórmula, establecida entre magnitudes, a la función, establecida entre variables estrictamente numéricas, puede estar impedido por un *esquema de pensamiento inconsciente*: las fórmulas y las funciones no tienen nada en común, pertenecen a dominios diferentes. Esta compartamentalización entre fórmula y función puede constituirse en obstáculo para el desarrollo de la noción de función.

> *"La separación de dominios de realidad es intelectualmente muy poco satisfactoria, mientras que para el alumno en cambio es ventajosa, económica y segura: Si el alumno se situa, de entrada, en un dominio de familiaridad, donde él tiene buenas intuiciones y fuertes convicciones, nada le impulsará naturalmente hacia una investigación de la generalidad, en la que sabe que perderá probablemente sus puntos de referencia"*
> (Legrand, 1988, p. 395)

> *"La relación de la concepción intuitiva de variable (algo que realmente varía) con su concepción como herramienta notacional al servicio de la generalización, es raramente establecida por los alumnos"*
> (Schoenfeld y Acarvi, 1988, p. 420)

Análisis de las respuestas a la cuestión 20

En la tabla siguiente figuran las frecuencias de respuestas y los porcentajes respecto al total de respuestas de los diferentes argumentos expresados por los alumnos a la siguiente cuestión:

> *¿Crees que se puede determinar en esta situación una función matemática? Explica con detalle tu respuesta*

Tabla 4.3: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según los argumentos expuestos para probar la existencia de una función (contexto geométrico)

	CURSOS			Total
Argument.	**2 BUP**	**3 BUP**	**COU**	
A1	7 15.9	2 7.7	5 19.2	14 13.7
A2	12 27.3	3 11.5	3 11.5	18 17.6
A3	1 2.3	2 7.7	4 15.4	7 6.9
A4	14 31.8	17 65.4	10 38.5	41 40.2
OTROS	14 22.7	2 7.7	6 15.4	22 21.6
Total	48 47.0	26 25.5	28 27.5	102 100.0

(el 68.4% de los alumnos no contesta a esta cuestión)

Argumentos:

A1: Aplicación, correspondencia, asociación
A2: Expresión algebraica
A3: Representación gráfica
A4: Transformación, cambio
OTROS

TABLA 4.4: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según los diferentes argumentos utilizados para afirmar o negar la existencia de una función (contexto geométrico)

Argument.	SI	NO	Total
A1	12 15.2	2 8.7	14 13.7
A2	16 20.2	2 8.7	18 17.6
A3	5 6.3	2 8.7	7 6.9
A4	38 48.1	3 13.1	41 40.2
A5	8 10.1	14 60.8	22 21.6
Total	79 77.4	23 22.6	102 100.0

(el 68.4% de los alumnos no contesta a esta cuestión)

Argumentos:

A1: Aplicación, correspondencia, asociación
A2: Expresión algebraica
A3: Representación gráfica
A4: Transformación, cambio
A5: Otras

Sólo 102 alumnos (el 31.6% del total) ha respondido esta cuestión. Como observamos en la tabla **4.3**, el mayor porcentaje 40.2% corresponde al argumento según el cual los alumnos manifiestan que en esta situación existe una transformación, un cambio, y en consecuencia se puede determinar en ella una función, aunque no hay que olvidar que sólo representan al 12.7% de los alumnos.

Tan sólo el 17.6% de respuestas (6% de los alumnos) expresó como argumento la existencia de una expresión algebraica que relacionara entre sí las variables. Esto implica una falta de coherencia con las definiciones dadas por los alumnos de la noción de función, en las que más del 60% la consideraban como una expresión algebraica.

Tabla 4.5: Frecuencia de respuestas y porcentajes de las mismas según los diferentes Dominios empleados (contexto geométrico)

	Cursos			Total
Tipos de dominios	**2 BUP**	**3 BUP**	**COU**	
No lo tiene en cuenta	40 83.3	13 50.0	21 75.0	74 72.6
Naturales	8 16.7	13 50.0	7 25.0	28 27.4
Total	48 43.0	26 26.6	28 30.3	102 100.0

(el 68.4% de los alumnos no contesta a esta cuestión)

Tabla 4.6: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según las estrategias de resolución empleadas por los alumnos (contexto geométrico)

	CURSOS			Total
Estrateg.	**2 BUP**	**3 BUP**	**COU**	
E1	8 15.7	3 8.1	6 12.0	17 12.3
E2	25 49.0	29 78.4	36 72.0	90 65.2
E3	18 35.3	5 13.5	8 16.0	31 22.5
Total	51 37.0	37 26.8	50 36.2	138 100.0

(el 57.3% de los alumnos no emplea estrategias)

Estrategias:

E1: Toman la fórmula del área del rectángulo y dan valores naturales, formando una tabla.

E2: Realizan una serie de dibujos sobre el triángulo simulando el proceso de variación.

E3: Parten de la fórmula del teorema de Pitágoras

5.5.5.2. Modelización en contexto ESPACIO - TEMPORAL
(Item 5, cuestiones 21, 22, y 23)

<u>Análisis de las respuestas a la cuestión 21</u>

¿Podrías determinar en esta situación una función matemática?

Veamos a continuación las tablas **5.1** y **5.2** donde figuran las frecuencias de las respuestas y porcentajes de los argumentos utilizados por los alumnos para justificar la existencia, o no, de una función en esta situación:

Tabla 5.1: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según los argumentos expuestos para probar la existencia de una función (contexto espacio-temporal)

	CURSOS			Total
Argument.	**2 BUP**	**3 BUP**	**COU**	
A1	14 20.6	13 30.2	13 27.1	40 25.1
A2	49 72.0	27 62.8	32 66.7	108 68.0
A3	5 7.4	2 4.6	1 2.1	8 5.0
OTRAS	0 0.0	1 2.4	2 4.2	3 1.9
Total	68 42.8	43 27.0	48 30.2	159 100.0

(el 50.8 % del total de los alumnos no contesta esta cuestión)

Argumentos:

A1: Aplicación, correspondencia, asociación
A2: Expresión algebraica
A3: Representación gráfica
A4: Transformación, cambio
OTRAS

TABLA 5.2: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según los diferentes argumentos utilizados para afirmar o negar la existencia de una función (contexto espacio-temporal)

Argument.	SI	NO	Total
A1	39 28.4	1 4.5	40 25.1
A2	88 64.3	20 91.0	108 68.0
A3	7 5.1	1 4.5	8 5.0
A4	0 0.0	0 0.0	0 0.0
OTRAS	3 2.2	0 0.0	3 1.9
Total	137 86.2	22 13.9	159 100.0

(El 50.8 % del total de los alumnos no contesta esta cuestión)

Como podemos observar el 86.2% de los alumnos que contestan esta cuestión, admiten la existencia de una relación funcional en ella. El 68% de los que responden utilizan como argumento la existencia de una *"fórmula"*, que relaciona las variables. Tan sólo el 25% de los que responden (2.6% del total) admitió la existencia de una relación o correspondencia entre las variables que intervienen en la situación.

La frecuencia y el porcentaje de alumnos que proponen las diferentes gráficas para representar la variación en esta situación, aparecen en la tabla siguiente:

Análisis de las respuestas a la cuestión 22

> *¿Podrías dibujar, en unos ejes cartesianos, una gráfica que represente la variación del espacio recorrido por el ascensor, según el tiempo transcurrido?*

Tabla 5.3: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según los diferentes gráficos construidos para representar la variación (contexto espacio-temporal)

	CURSOS			Total
Gráficos	2 BUP	3 BUP	COU	
G1	41 38.0	22 33.3	32 51.6	95 40.2
G2	45 41.7	25 37.9	17 27.4	87 36.9
OTROS	22 20.4	19 28.8	13 21.0	54 22.9
Total	108 45.8	66 28.0	62 26.3	236 100.0

(El 27 % del total de los alumnos no contesta esta cuestión)

Gráficos:

G1: Gráfica correcta

G2: Gráfica y = k.x

OTROS: (x = k, tiempo/pisos, esquema vertical del ascensor, etc)

Hemos de señalar que un porcentaje bastante alto (40.2%) de alumnos que responden, construye la gráfica *espacio/tiempo* de forma correcta, aunque también es muy alto (37%) el porcentaje de ellos que representan la recta y = k.x

Sin embargo, aunque un 40% de los que responden (29.4% del total) representa correctamente la gráfica de variación, sólo 5 fueron capaces de asociarle correctamente la expresión algebraica correspondiente. Existe una profunda divergencia entre estos dos tipos de respuestas de los alumnos. Las gráficas espacio/temporales son objetos que en la asignatura de Física son sumamente familiares para los alumnos, y con los cuales se establece directamente una relación gráfica <---> situación. Sin embargo, nuestros alumnos una vez construida la gráfica son incapaces de generar un modelo algebraico adecuado a este modelo gráfico.

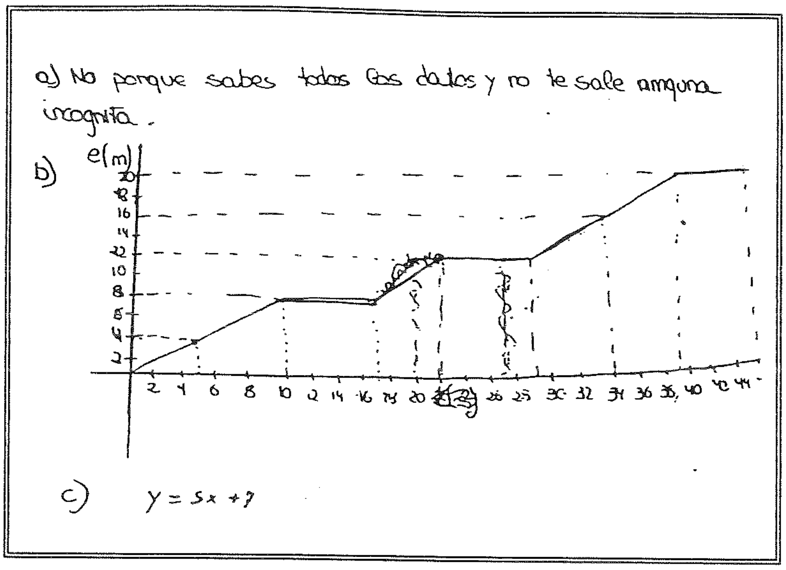
En la evolución histórica de la noción de función, y particularmente en los estudios del movimiento llevados a cabo por Oresme y más tarde por Galileo, *"su producción se presenta como un discurso bien estructurado apoyado sobre numerosas figuras geométricas. Utiliza exclusivamente el razonamiento proporcional, dejando aparecer el caracter escalar de las relaciones más que su naturaleza funcional. No realiza pues, más que de una manera gráfica, la designación de una característica en cambio. La variable matemática está siempre ausente. A pesar de tener la posibilidad de utilizar el simbolismo de Vieta, no encontramos en sus textos ninguna fórmula o ecuación"* (Janvier y cols., 1989, p. 73)

En relación con lo anterior, hemos encontrado en las producciones de nuestros alumnos numerosas expresiones tales como:

> *"No podemos encontrar una expresión algebraica porque en el problema todo son datos, no tenemos incógnitas"*

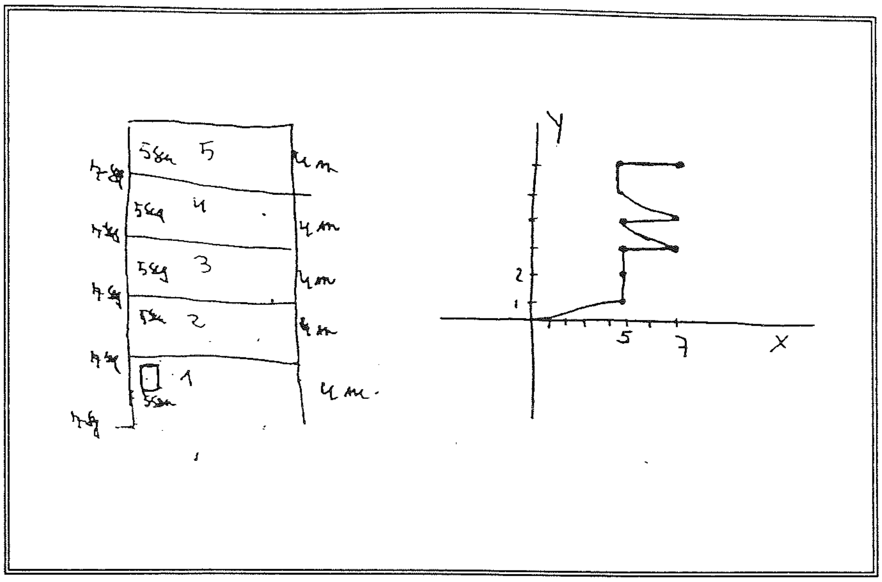
Para nuestros alumnos el álgebra puede ser considerada como la ciencia de los métodos y las técnicas eficaces para resolver *"problemas de incógnitas"* y esta concepción se puede constituir en un obstáculo (a nivel de esquemas de pensamiento, según terminología de Sierpinska, 1992) para la noción de variable, elemento esencial e imprescindible para la constitución de la noción de función.

Según la tabla 5.4, el 54% de los alumnos que hallan una expresión algebraica (14.9% del total), coincidió en representar la variación mediante la expresión algebraica: $y = 5x + 7$, en donde **x** representa las plantas del edificio e **y** el tiempo. Pensamos que este comportamiento puede ser reflejo de la existencia del obstáculo que Bachellard llama *obstáculo de la intuición primera*, ya que cuando nos subimos a un ascensor normalmente valoramos si hemos tardado mucho o poco tiempo en subir, pero casi nunca nos preguntamos por el espacio que hemos recorrido.



En estas producciones vemos como alumnos que representan correctamente la gráfica del movimiento del ascensor, utilizan la expresión y = 5x + 7 para representar algebraicamente la variación anterior. Vemos pues una falta de coherencia en sus respuestas, lo que le conduce a manifestaciones inconsistentes entre sí.

Según la tabla 5.6, el 25% de los alumnos que respondieron (13.6% del total) utilizó como mejor medio para representar la variación un esquema vertical que trataba de simular el movimiento real del ascensor. Hay alumnos, tanto en esta situación, como en la anterior, que utilizan la **simulación** como un instrumento fundamental de significación de la variación: *"Se simula una acción de suplencia respecto a la realidad para producir un proceso semiótico, un acto representativo"* (Bettetini, 1990, p. 70). Podemos decir con Piaget y Grize (1968, p.202) que se quedan en una descripción *cualitativa-figurativa* del cambio (*"Podemos hablar de prefunciones, debido a su carácter esencialmente cualitativo, reservando el término función, a las funciones cuantificadas"*).



Según Freudhental (1983, p.494):*"El verdadero origen de la noción de función está en plantear, pedir o reproducir dependencias o conexiones entre variables acontecidas en el mundo físico, social o mental; en y entre estos mundos"* Los alumnos pues, deben observar la constancia del fenómeno para poder establecer la ley de variación. Esto se llevará a cabo a través de una interacción entre aproximaciones cualitativas y cuantitativas, ya que: *"la aproximación cualitativa ayuda a captar bien el aspecto de variabilidad, de continuidad del fenómeno; y el cuantitativo permite precisar la ley de dependencia"* (René de Cotret, 1989, p.26)

<u>Análisis de las respuestas a la cuestión 23</u>

En la tabla siguiente podemos observar las frecuencias y los porcentajes de alumnos según las diferentes expresiones algebraicas propuestas para representar la variación pedida en la cuestión:

¿Puedes encontrar una expresión matemática que represente la variación anterior?

Tabla 5.4: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según las diferentes expresiones algebraicas propuestas para representar la variación (situación espacio-temporal)

	CURSOS			Total
Exp. Alg.	2 BUP	3 BUP	COU	
E1	0 0.0	0 0.0	2 7.2	2 2.2
E2	9 21.4	1 5.3	6 21.4	16 18.0
E3	21 50.0	14 73.7	13 46.4	48 54.0
OTRAS	12 28.6	4 21.0	7 25.0	23 25.8
Total	42 47.2	19 21.3	28 31.5	89 100.0

(El 72.4 % del total de los alumnos no contesta esta cuestión)

Expresiones algebraicas:

E1: Ecuación correcta del movimiento

E2: $y = 4/5\ t$

E3: $y = 5x + 7$, **x** pisos del edificio, **y** tiempo

OTRAS

Tabla 5.5: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según los diferentes dominios empleados (contexto espacio-temporal)

	Cursos			Total
Tipos de dominios	2 BUP	3 BUP	COU	
No lo tiene en cuenta	19 17.5	33 50.0	33 53.2	85 36.5
Dominio correcto	0 0.0	0 0.0	1 1.6	1 0.0
Naturales	89 82.4	33 50.0	28 45.2	150 63.5
Total	108 45.7	66 28.0	62 26.3	236 100.0

(el 27% de los alumnos no contestó ninguna cuestión de este item)

Tabla 5.6: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según las estrategias de resolución empleadas (contexto espacio-temporal)

	CURSOS			Total
Estrateg.	2 BUP	3 BUP	COU	
E1	62 63.3	21 45.6	23 71.9	106 60.2
E2	13 13.2	8 17.4	5 15.6	26 14.8
E3	23 23.5	17 37.0	4 12.5	44 25.0
Total	98 55.7	46 26.1	32 18.2	176 100.0

(El 45.5% del total de los alumnos no presenta ninguna estrategia, o bien, no es clasificable según la tabla anterior)

Estrategias:

E1: Comienzan a resolver las cuestiones construyendo la gráfica en los ejes cartesianos.

E2: Realizan cálculos numéricos, tablas, etc.

E3: Dibujan un esquema vertical del ascensor

El 60% de los que resuelven el ejercicio (32.8% del total) comienzan a resolver las cuestiones propuestas, no en el orden que figuran, sino construyendo en primer lugar la gráfica, o bien un esquema vertical del ascensor, 25% de respuestas (13.6% del total). Podemos pensar, en consecuencia, que para resolver este tipo de cuestiones el útil gráfico (representación en los ejes cartesianos), o en su caso el dibujo icónico constituyen las estrategias más movilizadas.

5.5.5.3. **Modelización en contexto de PROPORCIONALIDAD**
(Item 6, cuestiones 24 y 25)

Análisis de las respuestas a la cuestión 24

En la tabla siguiente podemos observar las frecuencias y los porcentajes de alumnos según las diferentes expresiones algebraicas propuestas para representar la relación pedida en la cuestión:

> *¿Puedes encontrar la relación que determine de modo general la equivalencia entre gallinas y patos?*

TABLA 6.1: **Frecuencia de respuestas y porcentaje de ellas según las expresiones algebraicas propuestas para representar la variación (contexto de proporcionalidad)**

	CURSOS			Total
Exp. Alg.	2 BUP	3 BUP	COU	
E1	42 36.8	16 25.4	28 41.8	86 35.2
E2	37 32.5	24 38.1	28 41.8	89 36.5
E3	12 10.5	2 3.2	2 3.0	16 6.5
E4	23 20.2	21 33.3	9 13.4	53 21.7
Total	114 46.7	63 25.8	67 27.5	244 100.0

(El 24.4 % del total de los alumnos no contesta esta cuestión)

Expresiones algebraicas:

E1: 1G = 10/15 P , o bien 10 G = 15 P, o bien, 1G = 1,5 P

E2: Admiten la dependencia y tratan de buscar una expresión algebraica aunque se equivocan,

E3: Función afín y = x + 1, y = x + 2

E4: Sólo ponen en ecuación los datos del problema

$$5x = 6y$$
$$4y = 5z$$

Los mayores porcentajes corresponden a las expresiones **E1** y **E2**. El 36.5% de los que responden intentan buscar una expresión, pero no lo consigue; el 35.2% de los que responden expresan relaciones tales como:

1G = 10/15 P , 10G = 15P , 1G = 1,5 P , 5G = 7,5 P
1G = 3/2 P

siendo destacable que en ningún caso hicieron mención a la necesidad de determinación del dominio, ya que sin este carece de total significación la relación establecida. Bastantes alumnos, en un intento de búsqueda de racionalidad entre la expresión algebraica y los elementos del dominio y la imagen (Números naturales), tratan de eliminar los decimales por aproximación (1,5 es casi 1, o bien, 7,5 es casi 7). A otros les lleva incluso a admitir que no puede ser una función por *"salir"* números decimales, o fracciones. No hubo ningún alumno que admitiese que sólo controlando el dominio se puede evitar el absurdo de obtener imágenes decimales (7,5 patos, 4,5 patos, etc).

> *Si las Matemáticas no aportan al alumno la posibilidad de anticipar y de estar seguros del resultado de sus acciones, corren el riesgo de perder gran parte de su interés. Así, la anticipación y la validación en las situaciones de aprendizaje nos parecen jugar una función fundamental en la constituación de una relación* **idónea** *a las Matemáticas"* (Margolinas, 1993, p. 222)

En esta situación, en la que la determinación del dominio es imprescindible para dotar de toda significación a la expresión algebraica obtenida, cabe preguntarnos: ¿Por qué los alumnos que responden, en un 98.8% no lo tienen en cuenta? (55.1% del total)

Si consideramos el estudio que anteriormente hemos realizado tanto de los manuales como de los apuntes de clase, estos alumnos han dedicado múltiples cálculos a la determinación de dominios en casos de mucha mayor complejidad, pero siempre en forma de automatismos. En este sentido compartimos la opinión de Freudhental (1983) cuando afirma que *"el verdadero orígen de las ideas puede quedar atascado por los automatismos. Los alumnos, a veces, finalizan dominando una actividad tan perfectamente, que el cómo y el por qué de la misma no les es pedida nunca, e incluso, no es comprendida por ellos como una cuestión significativa y relevante"* (p. 469).

Si tenemos en cuenta la estabilidad y la homogeneidad de las respuestas de los alumnos, podemos pensar que lo anteriormente expuesto puede ser consecuencia del fenómeno de la **analítica del**

saber: tanto se ha descompuesto el objeto función en segmentos para su enseñanza, que el alumno no logra posteriormente unificarlos dándole una significación global. El alumno ha visto muchos objetos allí donde sólo debía existir uno.

Observando las estrategias que emplean los alumnos para resolver las cuestiones propuestas vemos que el mayor porcentaje, 53.7% de los que responden (31.6% del total), corresponde a **E2**: una regla de tres reiterada (reducción a la unidad). Veamos por ejemplo:

5 gallinas ----> 6 palomos
x gallinas ----> 1 palomos   1 palomo = 5/6 gallina

4 palomos ---> 5 patos
1 palomos ---> x patos   1 palomo = 5/4 pato

y en consecuencia: 5/6 gallina = 5/4 pato, o bien expresan que 20 gallinas = 30 patos, o que, 2 gallinas = 3 patos.

Evidentemente el desarrollo de esta estrategia no implica un pensamiento funcional, sino proporcional. La proporción es ciertamente un tipo muy especial de relación: *"existe en la proporcionalidad tal grado de simplicidad, tal grado de evidencia que obviamente se impone"* (Grize, 1969, p. 171). La proporción se puede considerar como un obstáculo epistemológico para el desarrollo de la noción de función - el aspecto funcional queda oculto por el caracter escalar de la proporción.

<u>Análisis de las respuestas a la cuestión 25</u>

¿Podrías determinar en esta situación alguna función matemática?. Razona suficientemente tu respuesta.

Veamos a continuación las tablas **6.2** y **6.3** donde figuran las frecuencias de las respuestas y porcentaje de los argumentos utilizados por los alumnos para justificar la existencia, o no, de una función en esta situación.

Tabla 6.2: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según los argumentos expuestos para probar la existencia de una función (contexto de proporcionalidad)

	CURSOS			Total
Argument.	2 BUP	3 BUP	COU	
A1	23 27.4	15 34.9	24 45.3	62 34.4
A2	54 64.3	25 58.1	25 47.2	104 57.8
OTROS	7 8.3	3 7.0	4 7.5	14 7.8
Total	84 46.7	43 23.9	53 29.4	180 100.0

(El 44.3 % del total de los alumnos no contesta esta cuestión)

Argumentos:

A1: Aplicación, correspondencia, asociación

A2: Expresión algebraica

A3: Representación gráfica

A4: Transformación, cambio

OTROS

TABLA 6.3: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según los diferentes argumentos utilizados para afirmar o negar la existencia de una función (contexto de proporcionalidad)

Argument.	SI	NO	Total
A1	62 37.6	0 0.0	62 34.4
A2	98 59.4	6 40.0	104 57.8
OTROS	5 3.0	9 60.0	14 7.8
Total	165 91.7	15 8.3	180 100.0

Argumentos:

A1: Aplicación, correspondencia, asociación
A2: Expresión algebraica
A3: Representación gráfica
A4: Transformación, cambio
OTROS

Tabla 6.4: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según los dominios empleados (contexto de proporcionalidad)

	Cursos			Total
Tipos de dominios	2 BUP	3 BUP	COU	
No lo tiene en cuenta	82 97.6	43 100.0	53 100.0	178 89.0
Naturales	2 1.4	0 0.0	0 0.0	2 0.6
Dominio correcto	0 0.0	0 0.0	0 0.0	0 0.0
Total	84 46.6	43 23.9	53 29.5	180 100.0

Tabla 6.5: Frecuencia de respuestas y porcentaje de las mismas según las estrategias de resolución empleadas (contexto de proporcionalidad)

	CURSOS			Total
Estrateg.	2 BUP	3 BUP	COU	
E1	9 10.3	6 12.0	6 11.3	21 11.0
E2	43 49.4	23 46.0	36 67.9	102 53.7
E3	31 35.6	17 34.0	9 17.0	57 30.0
E4	4 4.6	4 8.0	2 3.8	10 5.3
Total	87 45.8	50 26.3	53 27.9	190 100.0

(El 41.2 % del total de los alumnos no emplea ninguna estrategia)

Estrategias:

E1: resolución del sistema de ecuaciones

$$5x = 6y$$
$$4y = 5z$$

por reducción, sustitución o igualación

E2: Regla de tres reiterada (reducción a la unidad)

E3: Sólo pone en ecuación: $5x=6y$, $4y=5z$

E4: Añadir 1 ($y = x + 1$)

5.5.5.4. Análisis comparativo de argumentos usados en las tres situaciones

Realizaremos, a continuación un análisis en el que relacionaremos los diferentes argumentos manifestados por los alumnos a las tres situaciones de modelización funcional.

Tabla 7.1: Frecuencia de respuestas y porcentajes de las mismas según los argumentos expuestos para probar la existencia de una función en las diferentes situaciones.

	SITUACIONES		
Argument.	**SIT.1**	**SIT.2**	**SIT.3**
A1	14 13.7	40 25.1	62 34.4
A2	18 17.6	108 68.0	104 57.8
A3	7 6.9	8 5.0	0 0.0
A4	41 40.2	0 0.0	0 0.0
OTROS	22 21.6	3 1.9	14 7.8
Tot.alum. responden	102	159	180

Argumentos:

A1: Aplicación, correspondencia, asociación
A2: Expresión algebraica
A3: Representación gráfica
A4: Transformación, cambio
OTROS

Como muestra la tabla anterior, el argumento **A4** (transformación) sólo lo emplean los alumnos en la situación de contexto geométrico (40.2% de los alumnos que responden). Estos alumnos movilizaron en su mayoría la estrategia **E2** (simular la variación mediante dibujos geométricos). Intuitivamente esta simulación muestra un cambio de *"forma"* -una transformación- por comparación de estados sucesivos, esto justificaría para ellos, la existencia de una función.

Sin embargo, ninguno de estos alumnos usó este argumento en las otras situaciones, sino que movilizaron preferentemente el argumento **A2** (expresión algebraica). La existencia de una fórmula que permitiese *"poner en ecuación"* los datos del problema fue la razón que justificaba la determinación de una función en las otras dos situaciones. Pero en ningún caso tuvieron en cuenta los conjuntos inicial y final ni el dominio de la función.

Conclusiones (en referencia a las tres situaciones de modelización)

1) Los alumnos que responden al ítem, mediante procedimientos de simulación, intentan determinar, de modo figurativo, **cómo** varía el área, ignorando **qué** varía en esta situación (qué variables x e y son las pertinentes). Se quedan en una representación, mediante un modelo geométrico, de la variación de la situación.

2) Podemos encontrar un obstáculo (a nivel de esquemas de pensamiento, según terminología de Sierpinska, 1992) -la *persistencia de las representaciones primeras-;* una parte importante de alumnos, usa la figura geométrica como medio de representación del cambio. Esta primera representación es un obstáculo para la gráfica. Se podría afirmar que existe un obstáculo ligado al status de la figura, ya que se utiliza ésta para representar el cambio por medio de la comparación de estados sucesivos.

3) Los alumnos, en gran parte (89.6% de los que respondieron, ya que sólo construyen la gráfica correctamente el 10.4% de ellos), no modelizan la variación de la situación (en contexto geométrico) de forma directa a través de la simbolización gráfica, es decir, no logran determinar las variables pertinentes de la situación y observar el cambio de modo global a través del gráfico.

4) Los alumnos, en general, no discriminan entre las variables que representan magnitudes físicas y variables numéricas. El paso de la fórmula, establecida entre magnitudes, a la función, establecida entre variables estrictamente numéricas, puede estar impedido por un *esquema de pensamiento inconsciente* : las fórmulas (leyes físicas, geométricas, etc) y las funciones no tienen nada en común, pertenecen a dominios diferentes. Esta compartamentalización entre fórmula y función puede constituirse en obstáculo (a nivel de esquemas de pensamiento) para el desarrollo de la noción de función.

5) Existe una falta de coherencia entre los niveles declarativos (expresados en las definiciones que propusieron de función) y argumentativos (expresados en las justificaciones sobre la existencia de función en las situaciones).

6) Casi la totalidad de los alumnos no tienen en cuenta los conjuntos inicial y final ni determinan el dominio de la función. Manifiestan en sus producciones que sus respuestas van encaminadas a intentar precisar **cómo** varía la situación sin analizar ni precisar **qué** varía. Existe una falta de coherencia entre el tiempo y el esfuerzo dedicado por estos mismos alumnos a la determinación de dominios de funciones en casos de mucha mayor complejidad. Esto muestra la falta de significación y de relevancia dada a la misma en el sistema de enseñanza.

7) El 40% de los alumnos construyeron, a partir de la situación espacio-temporal, la gráfica del movimiento, pero tan sólo el 2.2% fue capaz de generar un modelo algebraico adecuado al modelo gráfico.

8) En nuestros alumnos se ha podido generar un obstáculo (a nivel de esquemas de pensamiento) en cuanto a las fórmulas algebraicas y al álgebra en general, como el conjunto de técnicas eficaces para resolver *"problemas de incógnitas"*, ya que elimina el sentido de variable, elemento esencial para la constitución de la función.

9) Existe una parte muy significativa de alumnos (entre el 65.2% y el 25% de los que responden - entre el 42.7% y el 54.5% del total de alumnos) que utiliza la **simulación** como un instrumento fundamental de significación de la variación, se quedan en una descripción cualitativa-figurativa del cambio. La modelización algebraica o gráfica está ausente.

10) La *"regla de tres"* constituye para más de la mitad de los alumnos que responden a la tercera situación una estrategia de resolución que muestra una modelización proporcional y no funcional de la misma. Al igual que en la evolución histórica, la proporción se puede considerar como un obstáculo epistemológico para el desarrollo de la noción de función - el aspecto funcional queda oculto por el carácter escalar de la proporción.

5.6. CONCLUSIONES DEL CAPITULO 5

El estudio de las concepciones de los sujetos sobre la noción de función realizado en este capítulo, podemos concretarlo describiendo las tipologías identificadas de las respuestas a las distintas cuestiones, referidas a cada una de las tres componentes de las concepciones que hemos propuesto en el Capitulo 1.

De las respuestas al cuestionario de la muestra de sujetos de nuestra investigación, de acuerdo con dichos tres componentes, obtenemos las siguientes conclusiones:

Intensión del concepto

Respecto al conjunto de invariantes que el sujeto atribuye al objeto como notas esenciales que lo caracterizan, en la Sección 5.5.1 (análisis de las tablas 1.1 y 1.2) se han determinado las siguientes tipologías:

I1. Una función es un procedimiento de cálculo algorítmico entre números.

I2. Las funciones son relaciones descriptibles mediante fórmulas algebraicas.

I3: Una función se identifica con la gráfica o curva.

I4: Las leyes y criterios se consideran en sí mismos como funciones, sin tener en cuenta los objetos sobre los que actúan.

I5: Una función es una correspondencia entre conjuntos numéricos.

Del reconocimiento que los alumnos hacen de las funciones en los ítems 2 y 3 (Secciones 5.5.2 y 5.5.3, análisis de las tablas 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4) se han obtenido, además de una confirmación de las anteriores, la siguiente tipología adicional:

I6: La función sólo se asocia de modo ostensivo con ciertos prototipos o "ideogramas" algebraicos y gráficos que limitan estrechamente su configuración *"sintáctica" o "icónica"*.

Del análisis de los argumentos expuestos por los alumnos en las situaciones de modelización (ítems 4, 5 y 6; Sección 5.5.4) se deducen además de las anteriores, la siguiente:

I7: Una función es una transformación o un cambio entre cantidades de magnitudes variables.

Este carácter de variabilidad lo asocian casi exclusivamente a las transformaciones ligadas a las magnitudes físicas.

Aspectos representacionales

Del repertorio de funciones propuestas como ejemplos y ejercicios por los alumnosen el ítem 1 (sección 5.5.1, tablas 1.2 y 1.3), así como del conjunto de expresiones (gráficas y algebraicas) reconocidas como funciones en los ítems 2 y 3 (Secciones 5.5.2, 5.5.3 y 5.5.4), se identifican las siguientes tipologías de representaciones simbólicas asociadas por los alumnos a las funciones:

R1: Toda función debe expresarse algebraicamente de forma explícita;

R2: Las funciones son expresiones algebraicas que contienen "x" (rechazan las que se reducen sólo a una constante)

R3: Toda fórmula es representable por una gráfica, y, recíprocamente, toda gráfica proviene de los valores dados a una fórmula.

R4: Sólo las gráficas con cierta *"regularidad"* en su trazo se pueden considerar como funciones;

R5: Las funciones se identifican sólo con gráficas continuas.

R6: Los caracteres de continuidad/discontinuidad o bien de crecimiento/decrecimiento de una función se consideran exclusivamente gráficos y no analíticos.

Del análisis de las representaciones empleadas por los alumnos en la resolución de las situaciones de modelización (Items 4, 5 y 6; Sección 5.5.5), se obtienen, además, las siguientes tipologías de representaciones:

R7: La *"simulación"*, mediante una descripción cualitativo-figurativa del cambio, es un instrumento para representar la variación de cantidades de magnitudes variables.

R8: *"Poner en ecuación"* los datos que figuran en una situación de variación es un medio para representar el cambio, movilizando *"incógnitas"*, en lugar de *"variables"*.

Uso de las funciones

Respecto al conjunto de situaciones para las cuales el sujeto considera apropiado el empleo del objeto función como útil de resolución (obtenidas a partir de los ejemplos de ejercicios propuestos por los alumnos para explicar a un compañero el concepto de función), (Sección 5.5.1; ítem 1, tabla 1.4), obtenemos las siguientes tipologías de situaciones:

S1: Representación gráfica de funciones expresadas algebraicamente

S2: Construir la tabla de valores de una función expresada algebraicamente.

S3: Determinar el dominio de una función expresada algebraicamente.

S4: Resolver ecuaciones

Todas ellas son situaciones intramatemáticas, están referidas al propio objeto matemático y no a su empleo como útil de modelización en situaciones de variación.

Todos estos aspectos serían componentes de las diferentes concepciones que manifiestan nuestros alumnos de Secundaria sobre la noción de función y, en consecuencia, pueden ser considerados como aspectos parciales de las mismas.

Tipos de Concepciones identificadas en los alumnos

Las categorías descritas anteriormente en las componentes de las concepciones del sujeto no se combinan aleatoriamente, sino que nos es posible identificar asociaciones entre distintos subgrupos de las mismas. El análisis cualitativo y conjunto de los resultados obtenidos en las distintas secciones del capítulo 5, particularmente en las secciones 5.5.1 (análisis de la definición personal de la noción de función , ejemplos y tareas propuestas por los alumnos), 5.5.2 y 5.5.3 (análisis de las manifestaciones de los alumnos sobre distintas representaciones de la noción de función), 5.5.4 (análisis "cluster" y análisis factorial de correspondencias entre los distintos ítems y los diferentes argumentos expuestos por los alumnos), así como en la 5.5.5 (análisis de las producciones de los alumnos sobre modelización de situaciones de variación), nos autoriza a describir una tipología de concepciones de los alumnos sobre la noción de función. Estas concepciones están caracterizadas básicamente por las propiedades intensivas, pero se han generado y puesto de manifiesto ante ciertas situaciones específicas, por lo que presentarán un carácter fuertemente local, dinámico y difuso, pudiendo un mismo sujeto manifestar una o varias de esas concepciones, según las situaciones a las cuales se enfrenta. Así mismo, están ligadas a ciertos sistemas de representación. A continuación describimos la tipología de concepciones identificadas caracterizándolas, cada una, por las tres componentes citadas.

CA1: Algoritmo de cálculo

Una función matemática, para un alto porcentaje de alumnos (37.2%) se identificó con expresiones tales como *"una operación entre números"*, *"dar valores a una ecuación", etc.* con lo cual podemos considerar que estos sujetos la conciben como un cierto procedimiento de cálculo llevado a cabo a través de las expresiones algebraicas de diversas funciones incluidas en el currículo escolar.

Características de la concepción:

Invariantes: Sólo las expresiones algebraicas que posibiliten dar valores numéricos a la **x** y obtener los correspondientes de la **y** se pueden considerar como funciones.

Representaciones asociadas: Expresiones algebraicas en forma explícita.

Situaciones: Asociaciones, en general, entre elementos del dominio y la imagen de una función: configuración de tablas de valores, diagramas sagitales, etc.

CA2: Expresión algebraica

El 60.4% de los alumnos encuestados incluyó en su definición personal de la noción de función términos algebraicos, tales como *"es una fórmula"*, *"es una ecuación"*, *"es una expresión con números y letras"*, con lo cual podemos afirmar que para una gran mayoría, la noción de función y de expresión algebraica son sinónimos. Esta consideración está además reforzada por los ejemplos y ejercicios propuestos por estos alumnos, referidos casi en su totalidad a fórmulas algebraicas.

Características de la concepción:

Invariantes: Toda función se expresa por una fórmula algebraica.

Representaciones asociadas: Expresiones algebraicas tales como funciones lineales, cuadráticas, racionales y *"a trozos"*.

Situaciones: Cálculos de dominios, operaciones entre funciones (suma, resta, composición, etc.) y obtención de sus correspondientes dominios.

Esta concepción estaría muy ligada, principalmente en sus invariantes y en las representaciones asociadas, a la concepción epistemológica determinada en la evolución histórica **CE5** (expresión analítica).

CA3: Gráfica (construida a partir de una fórmula)

El 36.2% de los alumnos hace referencia en sus definiciones a la representación gráfica de funciones. Analizando éstas observamos que siempre incluyen el gráfico como el fin de un proceso que parte inicialmente de una fórmula (*"a la que se van dando valores")*. Por ello, en esta concepción, queremos destacar la fuerte asociación que para los alumnos existe entre ambas expresiones: algebraica y gráfica.

Características de la concepción:

Invariantes: *"Toda fórmula es representable por una gráfica"*
"Toda gráfica proviene de los valores dados a una fórmula"

Representaciones asociadas: Expresiones algebraicas principalmente tales como funciones lineales, cuadráticas, racionales, y *"a trozos"*.
Expresiones gráficas tales como rectas, parábolas, gráficas *"a trozos"*, hipérbolas.

Situaciones: Principalmente las ligadas a la representación gráfica y estudio analítico de las funciones anteriores.

Esta concepción podemos decir que estaría muy ligada a la concepción epistemológica **CE4** (curva analítico-geométrica) fundamentalmente en lo referente a sus invariantes y representaciones asociadas.

CA4: Ideograma (algebraico y gráfico)

De forma muy significativa destacan los porcentajes de alumnos que construyen sus argumentaciones en las respuestas al cuestionario, basándose en el tratamiento ostensivo como *"ideogra-*

mas", de las representaciones gráficas o algebraicas de una función (porcentajes medios 55.9 y 28.2, respectivamente). Estos alumnos consideran la forma "icónica" de la gráfica, o la configuración "sintáctica" de la fórmula como prototipos de funciones, ejerciendo a través de ellas un control sobre la noción de función y sus representaciones.

Características de la concepción:

Invariantes: Una función se determina mediante el reconocimiento ostensivo de su *"forma"* (algebraica o gráfica). Una expresión algebraica será considerada como función sólo bajo ciertas condiciones *"sintácticas"* y un gráfico sólo bajo ciertas limitaciones sobre su configuración (continuidad, *"regularidad", etc)*.

Representaciones asociadas: Repertorio de expresiones algebraicas y gráficas presentes en la actualidad en la enseñanza (principalmente funciones afines, cuadráticas, racionales y *"a trozos"*).
A veces, debido al carácter estereotipado de algunas curvas (por ejemplo, la circunferencia) se asocian también.

Situaciones: Identificación ostensiva de funciones elementales y familiares para nuestros alumnos, por su frecuente presencia en el currículo de Secundaria.

Esta concepción estaría ligada, sobre todo en lo referente a las representaciones gráficas asociadas, a la concepción **CE3** (curva visión sintética), porque no se destacan las propiedades analíticas de la gráfica, sino su aspecto icónico-representativo.

CA5: Correspondencia entre conjuntos numéricos

Los términos *"aplicación"* o *"correspondencia"*, aunque en un porcentaje mucho menor (13.6%), también están presentes en las declaraciones de nuestros alumnos sobre su definición personal de una función. En los ejemplos y ejercicios propuestos suelen considerar biyecciones, generalmente entre números naturales, aunque la mayoría no suele precisar ni el conjunto inicial ni el final, ni determina el dominio de la función.

A partir de los diferentes análisis realizados de las argumentaciones empleadas en la determinación de funciones a partir de su representación gráfica o algebraica, podemos decir que la consideración de una función como aplicación fue escasamente utilizada (16.1% medio) aunque era el criterio más económico y seguro. Esto nos refuerza la verificación de la **hipótesis 5**, probada ya en la sección 5.5.4 (conclusiones del estudio multivariante).

En las situaciones de variación los alumnos que respondieron (45.5% medio del total) admitían (en un 24.4% medio) una cierta asociación o correspondencia entre las cantidades variables aunque en ningún caso determinaron la necesidad de unicidad del elemento imagen ni precisaron el dominio de la función.

Características de la concepción:

Invariantes: Una función es una correspondencia entre dos conjuntos numéricos (no precisan, en general, la unicidad del elemento imagen).
Una función es una determinada asociación o correspondencia entre cantidades de magnitudes variables.

Representaciones asociadas: Diagramas de Venn, diagramas sagitales, tablas, conjuntos de pares de números, puntos (x,y) sobre los ejes y el plano cartesiano. Determinación de esta asociación por medio de *"fórmulas"* o *"ecuaciones"* que relacionen cantidades de magnitudes variables.

Situaciones: Estos invariantes y representaciones las usan principalmente los alumnos para definir la noción de función y en las situaciones de variación para justificar la existencia de una función en los diferentes contextos.

Esta concepción estaría de algún modo ligada a la concepción **CE6** determinada en la evolución histórica y que considera la función como una correspondencia arbitraria unívoca. Sin embargo hemos de admitir que los alumnos no señalaron, en general, la posible *"arbitrariedad"* ni la necesidad de unicidad de la imagen.

CA6: Transformación

Hemos de admitir que la consideración de una función como una transformación entre objetos dependientes entre sí está muy poco representada en nuestros alumnos. Tan sólo el 4% de ellos la empleó de modo declarativo en sus definiciones personales. Sin embargo, el 40.2% de los alumnos que respondieron a la situación de variación en contexto geométrico (12.7% del total) utilizaron como principal argumento la existencia de una transformación, de un cambio entre las cantidades variables.

Características de la concepción:

Invariantes: Una función es una transformación entre cantidades de magnitudes variables.

Representaciones: Simulación figurativa del cambio por medio de la secuenciación de estados sucesivos.

Situaciones: Situaciones de variación en contexto geométrico en las que el cambio de forma -la transformación- se aprecia de modo intuitivo.

Por otro lado en las Secciones 5.5.1, 5.5.2, 5.5.3, 5.5.4, 5.5.5 se han evidenciado los siguientes tipos de inconsistencias:

- Inconsistencias entre la definición que dan de la función y los ejemplos que proponen (p.342)

- Inconsistencias entre el estatus declarativo expresado en sus definiciones y el estatus argumentativo expresado en sus justificaciones. (p. 353)

- Inconsistencias en el reconocimiento de una misma función (la constante, o la circunferencia) en forma gráfica y algebraica. (p.356)

- Inconsistencias en el reconocimiento de funciones de forma implícita o explícita. (p.358)

- Inconsistencias en la consideración de fórmulas (geométricas, físicas, etc) y funciones. (p.384)

- Inconsistencias entre las representaciones gráficas y algebraicas en una misma situación de variación. (p.392)

Teniendo en cuenta las inconsistencias anteriormente expuestas, podemos de este modo confirmar la **hipótesis 4,** formulada en nuestra investigación ya que los aspectos intensivos expresados por los alumnos a nivel declarativo son, en numerosas ocasiones, inconsistentes con los formulados a nivel argumentativo. Además de las inconsistencias contenidas en la referida hipótesis hemos detectado otras que se han expresado anteriormente.

Teniendo en cuenta el análisis de las respuestas manifestadas por nuestros alumnos a la totalidad del cuestionario (Sección 5.5) y, a través de la observación de los errores sistemáticamente presentados, se han podido detectar los siguientes **obstáculos didácticos:**

- Las técnicas algebraicas desarrolladas por los alumnos para *"poner en ecuación"* los datos de determinados problemas a través de la movilización de *"incógnitas* o *"indeterminadas"*, pueden constituir un obstáculo para el desarrollo de las nociones de *"variable"* y de *"variabilidad"*, elementos imprescindibles para el pensamiento funcional.

- El tratamiento dado por nuestros alumnos a fórmulas, geométricas o físicas, tales como S=b.h, o bien e=v.t, (sólo retenían su aspecto mostrativo *-cómo las magnitudes se relacionan-*, mientras que no consideraron relevante ni pertinente el análisis del dominio de variabilidad *-qué cambia-*) puede constituirse en un obstáculo para el desarrollo de la noción de función como útil adecuado para modelizar las situaciones de variación.

- Las técnicas asociadas al tratamiento de la proporcionalidad, tales como la *"regla de tres"*, se pueden constituir en un obstáculo para el desarrollo del pensamiento funcional.

Los errores sistemáticos que han presentado los alumnos en sus producciones nos permiten también determinar los siguientes **obstáculos a nivel de conocimientos de los alumnos:**

- La persistencia de las primeras intuiciones sobre la variación y el cambio así como de las representaciones inicialmente asociadas (simulación icónico-figurativa) se puede constituir en un obstáculo para el desarrollo de la representación gráfica con su carácter estrictamente simbólico.

- La economía que ofrecen los números naturales (o enteros) en el cálculo numérico, hace que se puedan constituir en un obstáculo para el conocimiento de las funciones de variable real (cuyos dominios son subconjuntos de $\mathbb{R}$); ya que la mayoría de los alumnos en sus producciones se limitan a utilizar sólo números naturales, restringiendo la noción de función exclusivamente a la de sucesión.
Este obstáculo podría relacionarse con el **OB2**, identificado en la génesis histórica (establecía una disociación entre magnitudes y números; las primeras eran continuas, mientras que los segundos se consideraban discretos).

- Las concepciones **CA2 y CA3** manifestadas por los alumnos pueden constituirse en un obstáculo, debido al limitado dominio de validez de las mismas, ya que les impide considerar como funciones aquellas cuya generalidad y *"arbitrariedad"* no permita expresarlas algebraicamente o mediante gráficas cartesianas. Esto nos permite confirmar la **hipótesis** 3 que nos formulabamos al principio de nuestra investigación.

Este obstáculo podría relacionarse con el **OB6** identificado en la génesis histórica (consideraba que las únicas relaciones dignas de estudio eran aquellas que pueden ser descritas por medio de fórmulas).

Concluimos, pues, que existe en nuestros alumnos una diversidad de concepciones respecto de la noción de función, y, que mantienen cada una de ellas un carácter parcial al haber alcanzado el objeto función un mayor grado de amplitud y generalidad (**CE6** o **CE7**). Algunas de estas concepciones tienen invariantes y representaciones análogas a diferentes concepciones identificadas en la génesis histórica de la noción de función; aunque sus situaciones de empleo no son coincidentes ya que, las concernientes a los alumnos están condicionadas por la epistemología escolar. Con ello se ha visto confirmada la **hipótesis 1** que habíamos formulado en nuestra investigación.

Si observamos el repertorio de diferentes concepciones parciales identificadas en nuestros alumnos, podemos asegurar, a partir de las conclusiones establecidas en el Capítulo 4, que la configuración de **CA1**, **CA2**, **CA3**, **CA4**, y **CA5**, se debe a los condicionantes y restricciones que el sistema de enseñanza ejerce sobre el aprendizaje de los alumnos. Cuando éstos han debido movilizar las concepciones anteriores para tratar de modelizar diferentes situaciones de variación hemos podido apreciar los estrechos límites de las mismas. Tanto es así que los alumnos, en un porcentaje bastante alto, no han conseguido llegar ni a la modelización algebraica ni a la gráfica. Les resulta inaccesible el paso de la *"fórmula"* o de la *"ecuación"* a la función. Como se ha mostrado en el Capítulo 4, el sistema de enseñanza en el que se encuentran nuestros alumnos no promueve el estudio y análisis de la *variabilidad* de fenómenos sujetos al cambio, donde la función encontraría una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos. Todas las situaciones ligadas a las diferentes concepciones de los alumnos, como hemos podido observar anteriormente, se refieren a la ejercitación de rutinas y procedimientos algorítmicos: construir tablas, calcular dominios, representar funciones, etc. Todo lo anterior nos conduce de nuevo a confirmar la **hipótesis 3** que habíamos formulado en nuestra investigación, ya que el tratamiento dado por el sistema de enseñanza a la noción de función da lugar a la formación de concepciones muy limitadas que no generan una concepción más completa de la noción de función.

Debemos señalar, asimismo, como consecuencia de los resultados del análisis multivariante de argumentos llevado a cabo en la sección 5.5.4, que existe una permanencia de las concepciones anteriores en los alumnos, independientemente del curso escolar al que pertenezcan.

Algunos aspectos de las concepciones que a través de nuestra investigación hemos determinado en nuestros alumnos, han sido también identificados por otros autores en diferentes investigaciones.

Vinner (1981), Vinner, Tall y Dreyfus (1983, 1989) aunque no determinan las concepciones de los alumnos, si clasifican las definiciones de los mismos, de modo que tres de ellas coinciden con los invariantes que nosotros hemos asociado a las concepciones **CA2, CA3 y CA5.**

Sierpinska (1989, 1992) a través de un estudio clínico realizado con cinco estudiantes identificó concepciones análogas a las que presentan nuestros alumnos como **CA3, CA2 y CA5,** que ella denominó, respectivamente: *"visión analítica de la curva"*, *"expresiones algebraicas"* y *"relación funcional"*.

Teniendo en cuenta la aproximación *"operacional"* y *"estructural"* que investigadores como Sfard (1989, 1992), Dubinsky, Haws y Nichols (1989), Dubinsky y Harel (1992) y Tall y Bakar (1992) realizan en sus trabajos sobre estos dos tipos de concepciones en las manifestaciones de sus alumnos, podemos decir que identifican, entre otras, una concepción que tiene caracteres comunes con la concepción **CA1** y que ellos denominan - *"concepción proceso" o "concepción acción"* -y otra que tendría también caracteres análogos a la **CA5**, que denominan *"concepción entidad total"* o *"concepción objeto"*.

CONCLUSIONES FINALES

CONCLUSIONES FINALES

En la introducción general de esta memoria comenzamos indicando que el objetivo de esta investigación fue la realización de un análisis didáctico del concepto de función, lo que según nuestro punto de vista comprende el estudio de la génesis epistemológica del mismo, del estatuto que recibe en la enseñanza y la caracterización de las relaciones personales de los estudiantes sobre dicho objeto, es decir de las concepciones de los mismos. En suma, consideramos necesario que las investigaciones didácticas aporten conocimientos que clarifiquen el significado de los objetos matemáticos, su evolución, los papeles específicos que desempeñan en la institución escolar, así como sobre las tipologías de las relaciones posibles de los sujetos a los objetos matemáticos. La identificación de las restricciones que ofrece el funcionamiento de los sistemas didácticos en su contexto sociocultural para la adecuada progresión de los conocimientos de los alumnos es también objetivo de nuestra investigación.

En las conclusiones de los Capítulos 3, 4 y 5 hemos descrito los resultados de nuestra investigación en los tres aspectos básicos de la misma, epistemología histórica, epistemología escolar y concepciones de los alumnos. Remitimos, por tanto, al lector a dichas secciones para el detalle particular de las mismas. Vemos, no obstante, conveniente realizar una síntesis final de las mismas, valorar las implicaciones de nuestras aportaciones de cara a la práctica de la enseñanza de la noción de función, así como identificar aquellos aspectos sobre los cuales sería necesario profundizar en posteriores investigaciones, dadas las limitaciones inevitables de cualquier investigación.

Conclusiones del análisis de concepciones y obstáculos epistemológicos ligados a la evolución histórica de la noción de función

Los resultados del análisis epistemológico nos han mostrado que el objeto función ha evolucionado históricamente alcanzando diferentes niveles (protomatemático, paramatemático y matemático) según su grado de consideración, como objeto o como útil, de la actividad matemática. Las situaciones problemáticas a las que estuvo ligado en distintos períodos históricos, los invariantes que lo determinaron y las distintas representaciones simbólicas usadas, nos han permitido describir siete tipos de concepciones epistemológicas:

CE1: Identificación de fenómenos sujetos al cambio: relación entre magnitudes variables.
CE2: Razón o proporción
CE3: Gráfica (visión sintética)
CE4: Curva (analítico-geométrica)
CE5: Expresión analítica
CE6: Correspondencia arbitraria: Aplicación
CE7: Función como terna

El estudio de esta evolución nos ha permitido también determinar diferentes obstáculos epistemológicos ligados al desarrollo histórico de la noción de función:

Obstáculos a nivel de creencias y convicciones:

OB1: Obstáculo de la concepción estática

OB2: Obstáculo de la disociación entre magnitudes y números

Obstáculos a nivel de esquemas de pensamiento:

OB3: Obstáculo de la razón o proporción

OB4: Obstáculo de la homogeneidad en las proporciones

OB5: Obstáculo de la concepción geométrica de las variables

Obstáculos a nivel de conocimiento técnico:

OB6: Obstáculo de la concepción algebraica

OB7: Obstáculo de la concepción mecánica de curva.

Conclusiones sobre concepciones y obstáculos didácticos inducidos por la epistemología escolar sobre la noción de función
(Cuestionarios oficiales, manuales escolares y apuntes de clase)

A partir de 1967 la noción de función toma un nuevo estatus en los cuestionarios oficiales como consecuencia de su consideración como aplicación entre conjuntos. El desarrollo de las concepciones epistemológicas **CE6** y **CE7**, tuvo una influencia decisiva en la organización de la matemática escolar ya que condujo a los saberes matemáticos escolares a una auténtica *"catástrofe ecológica"*. Esta nueva concepción **(CC)** como aplicación entre conjuntos numéricos, hace que toda la Matemática gire en torno al objeto función, como elemento unificador y generalizador, llevándose a cabo una modelización uniforme de saberes que ocupaban lugares muy diversos en la Matemática (proporcionalidad, polinomios, ecuaciones, sucesiones, función derivada, función primitiva, función de distribución, transformaciones geométricas, etc.). Como consecuencia, se transforman en todos los programas, la organización de los contenidos y, consiguientemente, la progresión que determinan en el aprendizaje de los alumnos. A través de esta concepción **(CC)** su enseñanza se ve sometida a un proceso de renovación a través de un procedimiento de *"metamatematización"*.

El análisis de la transposición didáctica sufrida por el objeto función hasta llegar a ser un *"objeto de enseñanza"*, nos ha permitido determinar, en los manuales escolares manejados por los alumnos, las siguientes concepciones:

CM1: Expresión algebraica o fórmula
CM2: Gráfica representada en un diagrama cartesiano
CM3: Correspondencia unívoca. Aplicación.

La caracterización de las concepciones inducidas por los profesores la hemos llevado a cabo a través del estudio de la transposición didáctica que sufre el objeto función en la conducción que el profesor hace de los saberes en el aula, y que nosotros hemos analizado por medio de los apuntes de los alumnos. Determinamos las siguientes concepciones:

CP1: Expresión algebraica. Fórmula.
CP2: Gráfica representada en unos ejes cartesianos.
CP3: Aplicación entre conjuntos numéricos

Las concepciones **CM1**, **CM2**, **CP1 y CP2** conservan los invariantes y representaciones que figuraban en las concepciones **CE4** y **CE5** desarrolladas en la evolución histórica, pero las situaciones de empleo que promueve la enseñanza, a través de los manuales o por los profesores en el aula, rompem epistemológicamente con los problemas a los que estuvo asociada la noción de función. Se reducen a una ejercitación de rutinas y procedimientos casi algorítmicos que se ponen en funcionamiento sobre objetos segmentados y parciales en que se ha dividido la noción de función, tales como: dominios, fórmulas, gráficos, etc. La potencia modelizadora que ésta noción tuvo desde sus orígenes queda distorsionada en la actualidad. Las situaciones asociadas a las concepciones **CM1**, **CM2**, **CP1y CP2** inducidas por la epistemología escolar, son consecuencia de las condiciones que pesan sobre todo objeto de enseñanza,: por una parte, la *delimitación de los saberes en "saberes parciales"* conducida a través de la estrategia didáctica de *la analítica del saber* (fenómeno de *complexificación)* y, por otra, la *restricción de evaluabilidad* de todo objeto de enseñanza. Esto nos lleva también a admitir que la **economía** del sistema didáctico es el motor de la estructuración del conocimiento matemático en la enseñanza; así, el objeto función se divide, se analiza, se hace complejo, para controlar mejor tanto la enseñanza como el aprendizaje de cada segmento de este saber.

La concepción **CM3** y **CP3** (aplicación entre conjuntos numéricos), inducida también por manuales y profesores, conserva los invariantes de la concepción **CE6**. Sin embargo, algunas de las representaciones que le asocian, tanto autores cómo profesores, contrastan con su alto grado de generalidad, siendo análogas a las asociadas a la concepción **CE1** (tablas, diagramas sagitales, etc). Sus situaciones de empleo nos muestran como sus invariantes constituyen el eslabón fundamental para la construcción formalizada de los restantes conceptos, propiedades o teoremas del cálculo, de la geometría, etc. Sin embargo, no se promueven ejercicios o situaciones donde los alumnos, para alcanzar su solución, deban movilizar necesariamente los invariantes asociados.

La introducción que, tanto manuales como profesores, hacen de la noción de función se adapta a los invariantes determinados en **CM3** o **CP3**, es decir, la presentan en toda su generalidad (**CE6** o **CE7**), mientras que, normalmente, los ejemplos y ejercicios que eligen se adaptan, tanto en sus invariantes como en sus representaciones, a las concepciones identificadas en la génesis histórica **CE3, CE4,** o bien, **CE5.** Existe pues, una **ruptura epistemológica** entre la concepción, adoptada por los manuales o profesores para introducir el concepto, y las concepciones que normalmente utilizarán de forma más o menos implícita en el desarrollo del temario (**CM1, CM2, CP1, CP2**). Se presenta aquí un proceso inverso al seguido en la génesis histórica del concepto: su consideración como objeto matemático en su forma más acabada, es previa a su consideración como herramienta útil de la actividad matemática o extramatemática; obviando así su origen y evolución epistemológicos, eliminando en gran parte su significación como útil de resolución de problemas ligados a la variabilidad y al cambio, en los que *"fórmulas"* y *"gráficas"* adquirirían realmente su *"funcionalidad"*.

Las situaciones asociadas a las concepciones **CM1** y **CP1**, nos permiten afirmar que la enseñanza promueve, de forma implícita, una clasificación de las funciones dependiendo de la tarea que los alumnos deben realizar con ellas (funciones específicas para calcular su dominio, funciones configuradas especialmente para estudiar su continuidad, funciones adaptadas para analizar su derivabilidad, funciones cuya configuración permite aplicar teoremas como el de Rolle, del valor medio, etc); es decir, las adecúa a sus necesidades didácticas.

Por otra parte, y debido a la necesidad de introducir conceptos fuertemente formalizados y abstractos, debemos señalar también que las situaciones asociadas a la concepción **CP2** confieren a la gráfica de una función un carácter *ostensivo* de mostración inmediata del contenido del discurso del profesor. La gráfica de determinadas funciones se constituye así, para la enseñanza, en una herramienta ostensiva que, controlada por el profesor, sirve para salvar la distancia entre el rigor y la intuición. Por este motivo ha existido en los últimos años en la enseñanza una inflación de funciones tales como $y=E(ax+b)$, $y=|ax+b|$, $y=Mant(x)$, funciones *"a trozos"*, etc. que no figuraban en manuales de planes anteriores.

El análisis de las concepciones inducidas por la epistemología escolar nos muestra cómo la enseñanza ha configurado el objeto función adaptándolo fuertemente a sus necesidades, derivadas, por una parte, de una hipótesis empírica sobre el aprendizaje de los alumnos, y por otra, de las restricciones que establece el contrato didáctico en cuanto a la necesidad de *evaluabilidad* de los objetos de enseñanza.

Conclusiones sobre las concepciones manifestadas por los alumnos

Del análisis de las respuestas al cuestionario de los alumnos de la muestra, se han determinado las siguientes concepciones:

CA1: Algoritmo de cálculo
CA2: Expresión algebraica
CA3: Gráfica (construida a partir de una fórmula)
CA4: Ideograma (algebraico y gráfico)
CA5: Correspondencia entre conjuntos numéricos
CA6: Transformación

Existe en nuestros alumnos una diversidad de concepciones respecto a la noción de función, manteniendo cada una de ellas un carácter parcial al haber alcanzado el objeto función un mayor grado de amplitud y generalidad (**CE6** o **CE7**). Algunas de estas concepciones tienen invariantes y representaciones análogas a diferentes concepciones identificadas en la génesis histórica de la noción de función; aunque sus situaciones de empleo no son coincidentes ya que, las concernientes a los alumnos están condicionadas evidentemente por la epistemología escolar.

Si observamos el repertorio de diferentes concepciones parciales identificadas en nuestros alumnos, podemos asegurar, evidentemente, que la configuración de **CA1, CA2, CA3, CA4,** y **CA5,** se debe a las condiciones y restricciones que el sistema de enseñanza ejerce sobre el aprendizaje de los alumnos. Cuando éstos han debido movilizar las concepciones anteriores para tratar de modelizar diferentes situaciones de variación hemos podido apreciar los estrechos límites de las mismas. Tanto es así que, los alumnos, en un porcentaje bastante alto, no han conseguido llegar ni a la modelización algebraica ni a la gráfica. Les resulta inaccesible el paso de la *"fórmula"* o de la *"ecuación"* a la función. Como se ha mostrado anteriormente, el sistema de enseñanza en el que se encuentran nuestros alumnos, no promueve el estudio y análisis de la *variabilidad* de fenómenos sujetos al cambio, donde la función encontraría una especial significación estrechamente ligada a sus orígenes epistemológicos. Todas las situaciones asociadas a las diferentes concepciones de los alumnos se refieren a la ejercitación de rutinas y procedimientos casi algorítmicos: construir tablas, calcular dominios, representar funciones, etc. Serían consecuencia del funcionamiento del sistema de enseñanza actual, centrado en gran medida en el cuadro algebraico. Las restricciones sobre las que se apoya este funcionamiento se encontrarían: por una parte, en el plano epistemológico, debido a la prolongada dominación de lo algebraico en el desarrollo histórico de la noción de función; y por otra, en el plano didáctico, debido a la fuerza que encuentra lo algebraico en el refugio algorítmico, potenciada por las necesidades de *evaluabilidad*.

Todo lo anterior nos conduce a afirmar que el tratamiento dado por el sistema de enseñanza a la noción de función da lugar a la formación de concepciones muy limitadas y localizadas.

Debemos señalar asimismo, que no influye de forma decisiva el nivel escolar en la permanencia de las concepciones manifestadas por los alumnos.

Se ha evidenciado también la existencia de las siguientes **inconsistencias** entre los aspectos intensivos y el resto de las componentes de estas concepciones:

- Inconsistencias entre la definición que dan de la función y los ejemplos que proponen.

- Inconsistencias entre el estatus declarativo expresado en sus definiciones y el estatus argumentativo expresado en sus justificaciones.

- Inconsistencias en el reconocimiento de una misma función (por ejemplo, la constante, o la circunferencia) en forma gráfica y algebraica.

- Inconsistencias en el reconocimiento de funciones de forma implícita o explícita.

- Inconsistencias en la consideración de fórmulas (geométricas, físicas, etc) y funciones.

- Inconsistencias entre las representaciones gráficas y algebraicas en una misma situación de variación.

Teniendo en cuenta el análisis de las respuestas manifestadas por nuestros alumnos a la totalidad del cuestionario y, a través de la observación de los errores sistemáticamente presentados, se han podido detectar los siguientes **obstáculos didácticos:**

- Las técnicas algebraicas utilizadas por los alumnos para *"poner en ecuación"* los datos de determinados problemas a través de la movilización de *"incógnitas* o *"indeterminadas"*, pueden constituir un obstáculo para el desarrollo de las nociones de *"variable"* y de *"variabilidad"*, elementos imprescindibles para el pensamiento funcional.

- El tratamiento dado por nuestros alumnos a fórmulas, geométricas o físicas, tales como S=b.h, o bien e=v.t, (sólo retenían su aspecto mostrativo -*cómo las magnitudes se relacionan*-, mientras que no consideraron relevante ni pertinente el análisis del dominio de variabilidad -*qué cambia*-) puede constituirse en un obstáculo para el desarrollo de la noción de función como útil adecuado para modelizar las situaciones de variación.

- Las técnicas asociadas al tratamiento de la proporcionalidad, tales como la *"regla de tres"*, se pueden constituir en un obstáculo para el desarrollo del pensamiento funcional.

- El proceso de fragmentación a que está sometido en la enseñanza el objeto función, desgajándose en fragmentos elementales que el profesor controla independientemente, se puede constituir en obstáculo para que el alumno desarrolle un conocimiento idóneo de la noción de función.

- El tratamiento dado a la enseñanza de la noción de función por la epistemología escolar, puesto de manifiesto por las concepciones (**CM1, CM2, CP1, CP2**) desarrolladas por manuales y profesores, puede constituirse en un obstáculo, ya que inducen a los alumnos a configurar mayoritariamente los invariantes **I1** o **I2**, lo cual les conduce a una excesiva limitación de la noción de función.

Los errores sistemáticos que han presentado los alumnos en sus producciones nos permiten también determinar los siguientes **obstáculos a nivel de conocimientos de los alumnos**:

- La persistencia de las primeras intuiciones sobre la variación y el cambio, así como, de las representaciones inicialmente asociadas (simulación icónico-figurativa) se pueden constituir en un obstáculo para el desarrollo de la representación gráfica con su carácter estrictamente simbólico.

- La economía que ofrecen los números naturales (o enteros) en el cálculo numérico, hace que éstos se puedan constituir en un obstáculo para el conocimiento de las funciones de variable real (cuyos dominios son subconjuntos de $\mathbb{R}$); ya que la mayoría de los alumnos en sus producciones se limitan a utilizar sólo números naturales, restringiendo la noción de función exclusivamente a la de sucesión.
Este obstáculo podría relacionarse con el **OB2**, identificado en la génesis histórica (establecía una disociación entre magnitudes y números; las primeras eran continuas, mientras que los segundos se consideraban discretos).

- Las concepciones **CA2** y **CA3** manifestadas por los alumnos pueden constituise en un obstáculo, debido al limitado dominio de validez de las mismas ya que les impide considerar como funciones aquellas cuya generalidad y "*arbitrariedad*" no permita expresarlas algebraicamente o mediante gráficas cartesianas.

Este obstáculo podría relacionarse con el **OB6** identificado en la génesis histórica (consideraba que las únicas relaciones dignas de estudio eran aquellas que pueden ser descritas por medio de fórmulas).

Conclusiones sobre las hipótesis formuladas en nuestra investigación

En relación con las hipótesis formuladas (Sección 2.5, p. 138) podemos concluir que nuestro trabajo aporta datos experimentales suficientes en apoyo de las mismas. Así, la **hipótesis 1** que hacía referencia a la identificación de una diversidad de concepciones locales y parciales en nuestros alumnos, que además podían tener aspectos coincidentes con las concepciones determinadas en la evolución histórica, se ha visto confirmada; según se recoge en las conclusiones derivadas del análisis de respuestas al cuestionario pasado a los alumnos (p. 418).

Respecto a la **hipótesis** 2 hemos mostrado en el estudio y análisis de cuestionarios y manuales escolares (p.249) cómo, efectivamente, la enseñanza de la noción de función que han recibido los alumnos de nuestra muestra, ha enfatizado su tratamiento como un objeto de estudio en sí mismo, minimizando su consideración como herramienta de la actividad matemática que tenía en planes de estudio anteriores.

En referencia a la **hipótesis** 3 hemos puesto de manifiesto la existencia de un conjunto de restricciones didácticas (p.418, 419), generadas por el sistema de enseñanza, que inducen concepciones muy limitadas y parciales en los alumnos y se constituyen en obstáculos para la formación de una concepción más general y completa de la noción de función.

De igual modo hemos confirmado la **hipótesis 4** ya que, efectivamente, los aspectos intensivos expresados por los alumnos a nivel declarativo son, en numerosas ocasiones, inconsistentes con los formulados a nivel argumentativo (p.416).

Por último, en relación con la **hipótesis 5** hemos mostrado asimismo, cómo los alumnos, dependiendo de las tareas que han de realizar, utilizan diferentes criterios de decisión para el reconocimiento de funciones, siendo el carácter de aplicación (constituyente fundamental de la definición formal del concepto de función) considerado en último lugar. Los alumnos utilizaron preferentemente otros criterios de decisión que reflejan estadios anteriores de la concepción epistemológica de la función como aplicación.

Implicaciones para la enseñanza de las funciones

Uno de nuestros logros en la presente investigación, ha sido poner de manifiesto cómo el sistema didáctico (que pone en relación alumno, profesor y saber a a enseñar) produce determinadas restricciones sobre cada uno de sus elementos constitutivos, así como entre las relaciones que se establecen entre ellos. Estas restricciones se han identificado específicamente para el caso del objeto función.

El conocimiento de estas restricciones consideramos que es pertinente para poder identificar el dominio de las modificaciones, que didácticamente son posibles llevar a cabo, para optimizar el aprendizaje de los alumnos. En la configuración de este dominio sería necesario que, tanto los profesores como los agentes involucrados en el funcionamiento del sistema educativo, tuviesen en cuenta:

A. El conjunto de restricciones que inciden más directamente sobre las cláusulas del contrato didáctico:

- necesidad de establecer una diferenciación entre aquello que se enseña y aquello que el alumno aprende y que manifiesta a través de sus producciones (fenómeno de transparencia del saber enseñado).

- necesidad de realizar un análisis de la frecuente pérdida de sentido del objeto función debido a la actuación de factores externos al propio conocimiento matemático, tales como, la necesidad de evalución o de programabilidad, etc.

- necesidad de determinar la mayor o menor apertura de las situaciones de enseñanza, así como su gestión por el profesor con objeto de modificar las concepciones limitadas y estrechamente localizadas de los alumnos.

B. El conjunto de restricciones que inciden especialmente sobre la transposición didáctica del saber:

- Necesidad de conducir una vigilancia epistemológica del proceso de transposición didáctica del objeto función, ya que, como hemos mostrado en nuestra investigación, la enseñanza ha generado saberes parciales, saberes transaccionales, etc. que han recibido un estatus que no se corresponde epistemológicamente con el saber matemático.

- Analizar la idoneidad de las situaciones de enseñanza de la noción de función, determinando las variables pertinentes y no pertinentes de las mismas, en referencia a la significación matemática de dicho objeto. Es la etapa más importante del proceso de transposición didáctica debido a su naturaleza didáctica y matemática.

C. El conjunto de restricciones que son propias de las concepciones epistemológicas asociadas al objeto función y determinadas en su evolución histórica:

- Necesidad de asociar la noción de función con problemas ligados a situaciones de dependencia y de variabilidad (ligados a su génesis epistemológica).

- Necesidad de unir los problemas de modelización de diversas situaciones tanto matemáticas como extramatemáticas y los problemas funcionales donde la función muestre su carácter de herramienta útil y operativa de la actividad matemática.

- Necesidad de establecer la gráfica como curva que simboliza la variabilidad y la dependencia y no sólo como un soporte didáctico ostensivo que ayuda a intuir propiedades y definiciones formales.

D. El conjunto de restricciones que se derivan de las situaciones de enseñanza planteadas a los alumnos:

Esta sección se deriva de las tres anteriores, de tal modo que las restricciones que recaen sobre las situaciones propuestas a los alumnos tienen, por una parte, limitaciones debidas al contrato didáctico, y, por otra, limitaciones debidas al objeto matemático transpuesto. Por ello, es preciso establecer un equilibrio entre ellas de tal modo que las situaciones de enseñanza:

- permitan dar una significación idónea al objeto función adecuando para ello, pertinentemente, sus variables didácticas.

- permitan movilizar y ampliar los límites de las concepciones estrechamente limitadas y localizadas que poseen los alumnos del objeto función.

- hagan funcionar el objeto en su totalidad y no en fragmentos aislados donde pierde gran parte de su significación matemática;

- permitan *"recontextualizar"* aspectos modelizantes del objeto función asociados a su génesis epistemológica (no limitarlas sólo a ejercitación repetitiva de procedimientos)

- permitan que el alumno alcance la solución por motivaciones de origen mátematico y no de las derivadas de las cláusulas implícitas del contrato didáctico (*"reglillas"*, códigos implicitos, notas, definiciones basadas en una heuristíca etc)

Cuestiones abiertas

A pesar del ámbito limitado del contenido matemático abarcado por nuestra investigación -un sólo objeto cuya definición puede expresarse en pocas líneas- y el esfuerzo que hemos dedicado a desvelar los fenómenos implicados en los procesos de enseñanza-aprendizaje, creemos que no hemos resuelto todas las cuestiones pertinentes. Muy al contrario, tanto desde el punto de vista de la ecología conceptual - uso de la noción de función y las condiciones de sostenimiento en distintas instituciones y entornos operativos-, como de la ingeniería didáctica, quedan múltiples cuestiones por indagar. Asimismo, el estudio del pensamiento funcional y sus manifestaciones, esto es, los significados, las concepciones o relaciones personales al objeto función, en su doble vertiente de estado en un momento y circunstancias dadas, y su evolución como consecuencia del influjo de variables didácticas específicas, a penas ha sido iniciado.

A título de ejemplo, mencionamos algunas de estas cuestiones sobre las que continuaremos nuestra actividad investigadora.

1) Análisis sistemático de las variables que intervienen en los enunciados de las cuestiones relativas a los tres tipos de componentes del concepto de función: aspectos intensivos, representaciones y situaciones. Elaboración de pruebas escritas alternativas y guiones de entrevistas clínicas para situaciones de modelización distintas de las empleadas

en este trabajo, y estudio multivariante del conjunto de las respuestas de un mismo sujeto. Esto permitirá profundizar en la caracterización de la estructura de las concepciones de los alumnos sobre la noción de función y los objetos matemáticos asociados.

2) Análisis de las implicaciones que los nuevos entornos operativos informáticos suponen sobre la enseñanza y el aprendizaje del objeto función. En la actualidad se dispone ya de potentes logiciales que permiten la representación gráfica y manipulación simbólica de las funciones; esto induce nuevos sistemas de representación dinámicos interactivos y, en consecuencia, nuevos significados sobre este concepto. Se plantea el problema de estudiar qué aspectos de la noción de función se enfatizan y cuáles quedan en segundo plano o desaparecen, y cómo sería posible su integración en el curriculo matemático.

3) Teniendo en cuenta la tipología de concepciones, inconsistencias, obstáculos y restricciones en el funcionamiento de los sistemas didácticos, identificadas en nuestra investigación, se ve necesario proceder a la elaboración de propuestas curriculares detalladas para los distintos niveles de enseñanza secundaria, que ofrecieran a los profesores una tecnología didáctica que permitiese optimizar la enseñanza de las funciones.

4) Se necesita, asimismo, más investigaciones que estudien, por medio de ingenierías didácticas específicas, el papel de distintas variables de control en la evolución de las concepciones de los alumnos y la superación de obstáculos, tanto didácticos como epistemológicos, en el aprendizaje de la noción de función.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

ABELLANAS, P., GARCIA RUA, J., RODRIGUEZ LABAJO, A., CASULLERAS REGAS, J., MARCOS DE LANUZA, F. (1968). *Matemáticas 6º Curso.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

AGAR, M. (1986). *Speaking of ethnography.* Newbury Park, California: Sage University Press.

AGUSTI, J.M. y VILA, A. (1989). *Funciones.* Barcelona: Vinces-Vives.

ALEXANDROV, A.D., KOLMOGOROV, A.N., LAURENTIEF, M.A. y OTROS (1973). *La Matemática: Su contenido métodos y significado.* (Vol. 1). Madrid: Alianza Universidad.

ALEXANDROV, A.D., KOLMOGOROV, A.N., LAURENTIEF, M.A. y OTROS (1976). *La Matemática: Su contenido métodos y significado.* (Vol. 2 y 3). Madrid: Alianza Universidad.

AMIGUET, R., CALVIÑO, S., ESPEJO, G., LOZANO, R.M. y OLMO, J, (1987). *Matamáticas 8º EGB.* Madrid: Anaya.

APOSTOL, T. (1960). *Análisis Matemático.* Barcelona: Reverté. (Edición original 1957).

APOSTOL, T. (1976). *Calculus* (Vol. 1, 2). Barcelona: Reverté. (Edición original, 1967).

ARSAC, G., DEVELAY, M. y TIBERGHIEN, A. (1989). *La transposition didactique en Mathématiques, en Phisique , et en Biologie.* IREM et LIRDIS de Lyon. Universidad de Lyon.

ARTIGUE, M. (1984). *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques. Divers travaux de mathématiques et de didactique des mathématiques.* Thése de Doctorat d'Etat. Université Paris VII.

ARTIGUE, M. (1989). *Epistemologie et Didactique.* Cahier de DIDIREM, 3. IREM. Université Paris VII.

AUSSUDE, T. y ARTAUD, M. (1991). Topogénèse et emergence du rapport institutionel pour l'élève. En R. Gras (Ed.), *Actes de la VI^{eme} Ecole et Universite d'étè de didactique des Mathématiques* (p. 164-168). Institut Mathématique des Rennes et IRESTE de Nantes. Universite de Rennes.

BACHELARD,G., (1983). *La formación del espíritu científico.* Buenos Aires: Siglo XXI. (Edición original, 1948).

BARRATECH, B. y ZALAMA, C. (1940). *Matemáticas 5° Curso de Bachillerato.* Madrid: Libreria Enrique Prieto.

BAUMBERGER, P.F. (Ed.) (1989). *Enciclopaedia Universalis.* Paris: Enciclopaedia Universalis France S. A.

BEDNARZ, N. y GARNIER, C. (1989). *Construction des savoirs: Obstacles & conflits.* Otawa, Canada: CIRADE. Agence d'Arc.

BELL, E.T. (1985). *Historia de las matemáticas.* México: Fondo de Cultura Económica.

BELL, A. W., COSTELO, y J., KÜCHEMAN, D.E. (1985). *A Rewiew of Research in Mathematical Education.* Oxford: Nfer Nelsai.

BELL, A., y JANVIER, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the learning of Mathematics,* 2, 1, 34-42.

BENEDICTO, C. y NEGRO, A. (1986). *Matemáticas 2.* Madrid: Alhambra.

BETTETINI, G. (1990). Por un establecimiento semio-pragmático del concepto de simulación. En G. Talens (Ed.), *Videoculturas de fin de siglo* (p. 67 - 98). Madrid: Cátedra.

BODIN, A. (1992). Reflexions sur les representations, les conceptions et les competences. *Petit X,* 30, 17-40.

BOSCH, M. (1991). *El semiòtic i l'instrumental en el tractament classic de les situation de proporcionalitat.* Trebal de Recerca. Universitat Autònoma de Barcelona.

BOYER, C. (1959). *The history of the Calculus and its conceptual developement.* New York: Driver Publications.

BOYER, C. (1986). *Historia de las Matemáticas.* Madrid: Alianza Universidad. (Edición original, 1968).

BRENNAN, R.L. (1983). *Elements of generalizability theory.* Iowa: ACT Publications.

BROUSSEAU, G. (1982). Les objets de la didactique des Mathematiques. *Actes du 2^e Ecole d'Etè de Didactique des Mathématiques* (p. 1-26). IREM de la Universidad de Burdeos.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problemes en Mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques,* 4, 2, 164-198.

BROUSSEAU, G. (1986). *Théorisation des phénomenes d'enseignement des Mathématiques.* Thése de Doctorat d'Etat. Université de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1988). Representations et didactique du sens de la division. En G.Vergnaud, G., Brousseau, y M. Hulin, (Eds), *Didactique et adquisition des connaissances scientifiques. Actes du colloque de Sèvres* (p. 47-64). Grenoble: La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1989). Utilidad e interés de la Didáctica para un profesor (Primera parte). *SUMA: enseñanza y aprendizaje de la Matemática,* 4, 5-12. Federación española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

BROUSSEAU, G. (1990). Utilidad e interés de la didáctica para un profesor (Segunda parte). *SUMA: enseñanza y aprendizaje de la Matemática,* 5, 5-12. Federación española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

BROUSSEAU, G. y CENTENO, J. (1991). Rôle de la memoire didactique de l'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 11, 2.3, 167-210.

BRUNET, P. (1976). Ojeadas sobre el pensamiento matemático de Newton. En F. Le Lionnais (Ed.), *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (p. 258-269). Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

CARMINES E. G. y ZELLER, R. A. (1979). *Reability and validity assement.* London: Sage University Press.

CARUNCHO, J., GUTIERREZ, M. y GIL, J. (1986). *Matemáticas BUP 2.* Madrid: Santillana.

CARUNCHO, J., VAZQUEZ, F. y RIVERA, M. (1986). *Matemáticas 3.* Madrid: Santillana.

CELEUX, G., DIDAY, E. GOVART, G. y LECHEVALIER, Y. (1989). *Classification automatique des donnés.* París: Dunot.

CENTENO, J. (1991). La memoire dans le contrat didactique. En R. Gras (Ed.), *Actes de la VIème Ecole et Université d'èté de Didactique des Mathématiques* (p. 98-105). Université de Rennes.

CIRODDE, J.P. (1879). *Lecciones de Algebra.* Madrid: Bailey-Baillerie.

COLLETTE, J.P. (1985). *Historia de las matemáticas.* (Vol. 1, 2). Madrid: Siglo XXI.

CONFREY, J. (1990). A review of the research on student conceptions in Mathematics, Science, and programming. *Review of Research Education,* 16, 3-55.

COQUIN-VIENNOT, D. (1985). Complexité mathématique et ordre d'adquisition: une hierarchie de conceptions à propos des relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 7, 2, 133-192.

CORNEJO, J.M. (1988). *Técnicas de investigación social: Análisis de correspondencias (Teoría y práctica).* Barcelona: PPU.

CORNU, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite.* These de Doctorat de Troisieme Cicle de Mathematiques Pures. Université de Grenoble.

CROMBIE, A. C. (1979). *Historia de la Ciencia: De San Agustín a Galileo.* (Vol. 1). Madrid: Alianza Editorial.

CROMBIE, A. C. (1987). *Historia de la Ciencia: De San Agustín a Galileo.* (Vol. 2). Madrid: Alianza Editorial.

CUADRAS, C. M. (1991). *Métodos de análisis multivariante.* Barcelona: Eunibar. (Edición original, 1981).

CHEVALLARD, Y. (1980). Mathematiques, langage et enseignement: la reforme des années soixante. La politica de l'ignorance - Mathematiques, enseignement et societé. En G. Káleka, F. Ledoux, A.Rouchier y B. Rozoy-Sénéchal (Eds), *La politique de l'ignorance*: *Mathématiques-enseignement-societé* (p. 71-99). *Recherches,* 41.

CHEVALLARD, Y. y JOHSUA, M.A. (1982). Un exemple d'Analyse de la transposition didactique - la notion de distance. *Recherches en didactique des mathematiques,* 3, 2, 157-239.

CHEVALLARD, Y. (1987). Quelques representations touchant le concept de répresentations. *Actes du Seconde rencontre nationale sur la didactique de l'histoire, de la géographie et des sciences sociales* (p. 111-137). París: I.N.R.P.

CHEVALLARD, Y. (1988a). Esquisse d'une théorie formelle du didactique. En C. Laborde (Ed.), *Actes du Premier colloque franco-allemand de Didactique des Mathématiques el de l'informatique* (p. 97-106). Grenoble: La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1988b). L'univers didactique et ses objets: fonctionement et dysfonctionnements. *Interactions didactiques*, 9, 9-36. Faculté des Lettres. Université de Neuchâtel.

CHEVALLARD, Y. (1989a). Le concept de rapport au savoir - Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Intervención en el *Seminaire de didáctique des Mathématiques et de l'informatique*. Grenoble: Université Joseph Fourier.

CHEVALLARD, Y. (1989b). *Arithmetique. Algebre. Modelisation. Etapes d'une recherche.* IREM d'Aix-Marseille. Universidad d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Penseé Sauvage.

(Edición original, 1985)

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12, 1, 73-112.

D'HOMBRES, J., DAHAN, D., BKOUCHE, R., HOUZEL, C. y GUILLEMOT, M., (1987). *Mathematiques au fils des âges.* Paris: Gautiers Villards.

DALMAU, J.M. (1897). *Aritmética razonada.* Madrid: Dalmau.

DANE, F.C. (1990). *Research methods.* Berverly Hills, California: Brooks/Cole Publising Company.

DESANTI, J.T. (1976). De Cauchy a Riemann o el nacimiento de la teoría de funciones de variables reales. En F. Le Lionnais (Ed.), *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (p. 189-198). Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

DIUDONNÉ, J. (1989). *En honor del espíritu humano. Las Matemáticas hoy.* Madrid: Alianza Universidad.

DIXMIER, J. (1974). *Matemáticas generales.* (Vol. 1). Madrid: Aguilar.

DOUADY, R. (1984). *Le jeu de Cadres et dialectique outil objet dans l'enseignement des Mathématiques.* Thése de Doctorat d'Etat. Université de Paris VII.

DOUADY, R. y PERRIN, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics,* 20, 387-424.

DREYFUS, T. y EISEMBERG, T. (1982). Intuitive functional concepts: a baseline study on intuitions. *Journal for research in Ma-*

thematics Education, 13, 5, 360-380.

DUBINSKY, E., HAWKS,J. y NICHOLS, D. (1989). Development of the process conception of function by pre-service teachers in a discrete mathematics course. *Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p.291-298). París: Universidad de París.

DUBINSKY, E., BREIDENBACH, D., HAWKS, J. y NICHOLS, D. (1992). Developement of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics.* 23, 247-285.

DUBINSKY, E. y HAREL, G. (1992). The nature of the process conception of fonction. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (p. 85-106). USA: Mathematical Association of America.

DUNN, O. J. y CLARK, V. A. (1987). *Applied statictics. Analysis of variance and regresion.* New York: John Wiley.

EISEMBERG, T. (1992). On the developement of a sense for functions. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (p.153-174). USA: Mathematical Association of America.

EL BOUAIZZAUI, H. (1988). *Conceptions des eleves et des professeurs á propos de la notion de continuité d'une fonction.* Thése Ph. D. Université Laval.

ERICKSON, F. (1986). Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. En M. C. Wittrock (Ed.), *La investigación de la enseñanza II: Métodos cualitativos y de observación* (p. 119-161). Barcelona: Paidós.

ESCOFIER, B. Y PAGÉS, J. (1988). *Analyses factorielles simples et multiples: objectis, méthodes et interpretation.* París: Dunod.

EVES, H. (1969). *Estudio de las geometrías*. México: UTHEA.

FERNANDEZ VIÑA, J.A. (1976). *Lecciones de Análisis Matemático 1.* Madrid: Tecnos.

FERRATER MORA, J. (1986). *Diccionario de Filosofía.* (Vol. 1, 2, 3, 4). Madrid: Alianza Editorial.

FERRÉ, S. (1945). *Matemáticas 6º de Bachillerato.* Sevilla: Eulogio de las Heras.

FOX, D. J. (1980). *El proceso de investigación en Educación.* Pamplona: Eunsa.

FREUDHENTAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational task.* Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

FREUDHENTAL,H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

FREUDHENTAL, H. (1991). *Revisting mathematics education.* Amsterdam: Kluwe.

GARCíA, B., RUBIO, L., y MARISCAL, P. (1985). *Matemáticas 2º de BUP.* Zaragoza: Edelvives.

GODEMENT, R. (1971). *Algebra.* Madrid: Tecnos.

GODINO, J. D. (1991). Hacia una teoría de la Didáctica de la Matemática. En Gutierrez, A. (Ed.), *Area de conocimiento. Didáctica de la Matemática* (p. 105-148). Madrid: Síntesis.

GODINO, J.D. (1992). Paradigmas, problemas y metodologías en Didáctica de las Matemáticas. Ponencia presentada en el *Tercer Seminario de Investigaçao em Educaçao Matematica.* Viseu. Portugal. Sociedad Portuguesa de profesores de Matemáticas.

GODINO, J. D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la "noosfera" matemática. *Cuadrante. Revista teórica e de investigaçao*, 2, 2-7. Lisboa: Sociedad Portuguesa de Profesores de Matemáticas.

GODINO, J.D. y BATANERO, C. (1993a). La notion de signifié dans la didactique des mathématiques. Comunicación presentada en el *Coloquio "Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France"*. París: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

GODINO, J. D. y BATANERO, M. (1993b). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

GOETZ, J. P. y LECOMPTE, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en Investigación educativa*. Madrid: Morata.

GONZALEZ, E., GUTIERREZ, J., RICO, L. (1990). Iniciación al concepto de función. En S.A.E.M. Thales (Ed.), *Actas de las IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática* (p. 141-152). Sevilla: Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales".

GRATTAN-GUINNESS, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica.* Madrid: Alianza Editorial.

GRIZE, J. B. (1968). Analyses pour servir a l'etude épistemologique de la fonction. En J. Piaget (Ed.), *Epistemologie et psychologie de la fonction* (p. 167-198). Paris: PUF.

GUTIERREZ, J., RICO, L., GONZALEZ, E. (1990). La representación gráfica como expresión de relaciones entre variables. En S.A.E.M. Thales (Ed.), *Actas de las IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática* (p. 153-161). Sevilla: Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales".

GUZMAN, I. (1989). Registres mis en jeu par la notion de fonction. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 2, 230-260. IREM de Strasbourg. Universidad de Strasbourg.

GUZMAN, M. DE (1980). La enseñanza de las matemáticas. *Revista de bachillerato*, 13 - Suplemento (Cuaderno monográfico, 5), 29-31.

GUZMAN, M., COLERA, J. (1989). *Matemáticas I.* Madrid: Anaya.

HAUSDORF, F. (1978). *Set Theory*. London: Chelsea Publishing Company. (Edición original, 1934).

HIEBERT, J. (1985). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.

JANVIER, C. (1981). Use of situations in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics.*, 12, 113- 122.

Janvier, C. (1987). Representation and Understanding: The notion of function as an example. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p. 67-71). Londres: LEA Publications.

JANVIER, C. y RENE DE COTRET, S. y CHARBONNEAU, L. (1989). Obstacles épistemologiques à la notion de variable: perspectives historiques. En N.Bednarz, y C. Garnier (Eds.), *Constructions de savoirs: Obstacles & Conflits* (p. 64-75). Otawa, Canada: Agence d'Arc.

JOSHUA, S. (1988). Le contrat didactique et l'analyse des phenomenes didactiques. *Interactions didactiques:Recherches*, 8, 35-45. Faculté des lettres. Université de Neuchâtel.

JOSHUA, S. y DUPIN, J. J. (1989). *Representations et modélisations: le "debats scientifique" dans la clase et l'apprentissage de la physique.* Berna: Peter Lang.

JOHSUA, S. (1989). La perdurance des obstacles épistémologiques: un révelateur de leur nature. En N. Bednarz, y C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs: Obstacles & conflits* (p. 110-116). Ottawa, Canada: Agence d'Arc.

KIRK, J. y MILLER, M. L. (1986). *Reliability and validity in qualitative research.* Newbury Park, California: Sage University Press.

LABORDE, C. (1988). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'explotation de phénomènes didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9, 3, 337-364.

LACASTA, E. (1991). Génesis y desarrollo de un tema de investigación en Didáctica de la Matemática. Comunicación al *Segundo Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de la Matemática*. Madrid. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad Complutense de Madrid.

LAZCANO, I., y BAROLO, P. (1990). *Matemáticas 1º de BUP.* Zaragoza: Edelvives

LAZCANO, I., BAROLO, P. (1992). *Matemáticas 2.* Zaragoza: Edelvives.

LEGRAND, M. (1988). Rationalité et demonstration mathématiques, le rapport de la clase à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 9, 3, 365-406.

LEINHARDT, G., ZASLAVSKY, O. y STEIN, M.K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Task, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research,* 60, 1, 1-64.

LE LIONNAIS, F. (1976). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático.* Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

LEONARD, F. y SACKUR, C. (1990). Connaissances locales et triple approche, une metodologie de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10, 2.3, 205-240.

LERMAN, I. C. (1981). *Classification et analyse ordinale des donnés.* París: Dunod.

LESS, R. y LANDAU, M. (1983). *Adquisitions of mathematics concepts and processies.* New York: Academie Press.

LESTER, F. K. (1978). Mathematical Problem Solving in the elementary school: Some educational and psychological considerations. En L. L. Hartfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical Problem Solving. Papers from a research workshop* (p. 286 - 323). Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

LOPEZ BARRIUSO, J. (1990). *Matemáticas COU* . Zaragoza: Edelvives.

LOPEZ BARRIUSO, J. (1990). *Matemáticas 3°.* Zaragoza: Edelvives

LOPEZ FEAL, R. (1986). *Construcción de instrumentos de medida en Ciencias conductuales y sociales.* Madrid: Alamex.

MALIK, M.A. (1981). Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 11, 489-492.

MARGOLINAS, C. (1988). Un etude sur les dificultes d'enseignement des nombres reels. *Petit X*, 16, 51-66.

MARGOLINAS, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de Mathématiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

MARKOVITS, Z., EYLON, B. y BRUCKEIMER, M. (1986). Functions today and yerterday. *For the learning of Mathematics*, 6, 2, 18-28.

MARKOVITS, Z,. EYLON, B. y BRUCKEIMER, M. (1988). Difficulties students have with the function. En N.C.T.M. (Ed.), *The ideas of algebra*, K-12 (1988-Yearbook) (p. 43-60). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

MARNYANSKII, I. (1979). Psychological characterics of pupils' assimilation of the concept of function. En J. Kilpatrick, I. Wirszup, E. G. Begle y J. W. Wilson (Eds.), *Soviet Studies in Psychology of Learning and Teaching Mathematics*. Vol. 12. (p. 163-172). Stanford: National Council of Teachers of Mathematics.

MESSICK, S. (1989). *Validity*. En R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (p. 13-104). New York: American Council on Education/Macmillan.

MILES, M. B. y HUBERMAN, A. M. (1984). *Qualitative data analysis*. Beverly Hills, California: Sage.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA. (1971). Orientaciones Pedagógicas para la EGB. Vida Escolar, 124. 124. 126, 25-29.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA. (1981). Programas Renovados para la EGB. Vida Escolar, 210, 37-71.

MOLINER, M. (1984). *Diccionario de uso del español*. (Vol. 1, 2) Madrid: Gredos.

MORIN, E. (1987). *El método I: La naturaleza de la naturaleza*. Madrid: Cátedra (Edición original, 1986).

MOSTERIN, J. (1981). Sobre funciones y composición de relaciones. En R. Fernández González (Ed.), *Lógica, Epistemología y Teoría de la Ciencia* (p. 55-65). Madrid: Estudios en Educación. Ministerio de Educación y Ciencia.

NEIL, H., y STUARD, H. (1972). *From graphs to Calculus*. Blackie.

OEHL, W., PALZKILL, L. y RODRíGUEZ, M. (1979). *El mundo del* *número - EGB - 8°*. Madrid: Interduc/Schoroedel.

PAPY, G. (1968). *Le premier enseignement de l'analyse.* Bruxelles: Presses Universitaires de Bruxelles.

PASCAL, D. (1980). *Le problème du zéro. L'economie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur.* Memoire de D.E.A. de Didactique des Mathématiques. Université d'Aix-Marseille. Université de Bordeaux.

PEDERSEN, O. (1974). Logistics and the theory of functions. *Archive Internationel d'Histoire des sciences,* 24, 94, 29-50.

PIAGET, J., GRIZE, B., SZEMINSKA, A. y VINH-BANG (1968). *Epistemologie et psychologie de la fonction.* Paris: PUF.

PRADA, D., BUJANDA, M. P., CELA, P., CABELLO, T. y CORDON, M.J. (1974). *Matemáticas, 8° Curso de EGB.* Madrid: Narcea.

RENAUD, A. (1990). Comprender la imagen hoy. En G. Talens (Ed.), *Videoculturas de fin de siglo* (p. 1-11). Madrid: Cátedra.

RENÉ DE COTRET, S. (1985). *Etude historique de la notion de fonction: Analyse epistemologique et experimetation didactique.* Memoire de Maitrise en Mathématiques. Montreal:Université du Quebec.

RENÉ DE COTRET, S. (1988). Un etude sur les representations graphiques du mouvement. *Petit X,* 17, 5-27.

RESNICK, L. (1989). Convictions ontologiques dans l'apprentissagede la physique. En N. Bednarz y C. Garnier (Eds.), *Constrution des savoirs: Obstacles & Conflits* (p. 103-109). Ottawa: Agence d'Arc.

REY PASTOR, J. (1951). *La matemática Superior: Métodos y problemas del siglo XIX.* México: Iberoamericana.

REY PASTOR, J. y PUIG ADAMS P. (1957). *Matemáticas 6° Curso de Bachillerato.* Madrid: Biblioteca Matemática

REY PASTOR, J. (1973). *Teoría de funciones.* Madrid: Biblioteca Matemática.

RIBNIKOV, K. (1987). *Historia de las matemáticas.* Moscú: Mir. (Edición original, 1974).

RICO, L. y CASTRO, E. (1984). Los cuestionarios de Matemáticas para la EGB. *Escuela de Maestros,* 3, 129-139. Escuela Universitaria de Formación de Profesorado de EGB. Universidad de Granada.

RICO, L. (1992a). *Investigación sobre errores de aprendizaje en Educación Matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

RICO, L. (1992b). Evaluación en el sistema educativo español: El caso de las Matemáticas. *SUMA: enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas,* 10, 15-24. Federación española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

ROBERT, A. (1982). L'adquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 3, 3, 307-341.

ROBERT, A. y TENAUD, I. (1983). Une experience d'enseignement de la géometrie en terminale C. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 9, 1, 31-70.

ROUCHIER, A. (1988). Les obstacles épistemologiques. Comunicación a la *Université d'Etè.* IREM de Orleans. Université Orleans.

ROUCHIER, A. (1990). *Les situations de institutionalisation.* Curso de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

RUIZ HIGUERAS, L. y RODRIGUEZ FERNANDEZ, J.L. (1990). Los obstáculos en la enseñanza de la Matemática. En S.A.E.M. Thales (Ed.), *Actas de las IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática* (p. 125-132). Sevilla: Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales".

RUIZ HIGUERAS, L. y RODRIGUEZ FERNANDEZ, J.L. (1989). Epistemología histórica del concepto de función. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 3, 135-154.

RUSSELL, B. (1967). *Los principios de la Matemática.* Madrid: Espasa Calpe.

SALIN, M.H. y MERCIER, A. (1988). L'Analyse a priori. *Actes de l'Université d'Etè: Didáctique des Mathématiques et formation des maitres à l'ècole elementaire* (p. 203-244). IREM de Bordeaux. Universite de Bordeaux.

SCOTT, P. (1989). Introducción a la investigación y evaluacion educativa. *Lecturas en Educación Matemática*, 6. México: UNAM.

SCHNEIDER, O. (1979). *Le passage des équations numériques aux équations parametriques en clase de Seconde.* Mémoire du D.E.A. de Didactique des Mathématiques. Université Aix-Marseille.

SCHOENFELD, A. y ARCAVI, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher,* Septiembre, 420-427.

SCHUBRING, G. (1988). Discussions épistemologiques sur le statut des nombres négatifs et leur representations dans les manuels allemands et français de mathematiques entre 1795 et 1845. En C. Laborde (Ed.), *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand des Mathématiques et de l'Informatique* (p. 137-146). Grenoble: La Pensée Sauvage.

SFARD, A. (1989). Transition from operational to structural conception: The notion of function revisited. *Proceeding of the 13th Annual International Conference for Psychology of Mathematics Education* (p.151-158). París: Universidad de París.

SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics Education,* 22, 1-36.

SFARD, A. (1992). The case of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds), *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (p. 85-106). USA: Mathematical Association of America.

SIERPINSKA, A. (1985). La notion d'obstacle epistemologique dans la enseignement des Mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIAEAEM* (p. 73-95). Leiden.

SIERPINSKA, A. (1989a). Sur un programe de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. En N. Bednarz y C. Garnier (Eds.), *Constrution des savoirs: Obstacles & Conflits* (p. 130-148). Ottawa: Agence d'Arc.

SIERPINSKA, A. (1989b). *On 15-17 years old students' conceptions of functions, iteration of functions and atractive points.* Warsaw, Poland: Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Preprint, 454.

SIERPINSKA, A. (1992). Un understanding the notion of function. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds), *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (p. 25-58). USA: Mathematical Association of America.

SKEMP, R.R. (1976). Relational and instrumental understanding. *Aritmetics Teacher,* Nov. 9-15.

SPIVAK, M. (1978). *Cálculo Infinitesimal.* Barcelona: Reverté.

TALL, D. (1990). Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. *FOCUS on learning problems in Mathematics,* 12, 3&4, 49-64.

TALL, D. y BAKAR, (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal Mathematics Education Science and Technology,* 23, 1, 39-50.

THOM, R. (1978). Les Mathematiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique?. En J. Hernández (Ed.), *La enseñanza de las matemáticas Modernas* (p. 115-129). Madrid: Alianza Universidad.

THOM, R. (1978). Matemáticas modernas y matemáticas de siempre. En J. Hernández (Ed.), *La enseñanza de la matemáticas modernas.* (p. 140-156). Madrid: Alianza Universidad.

THOMAS, L. (1975). The concept of function. En M. F. Rosskopf (Ed.), *Children's Mathematical concepts six Piagetian studies in Mathematics Education* (p. 145-172). Columbia University. New York: Teacher College Press

THORNDIKE, R. L. (1989). *Psicometría aplicada.* Mexico: Limusa.

TIROSH, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *FOCUS on learning problems in Mathematics,* 12, 3&4, 111-130.

TIROSH, D., GRAEBER, A. O. (1990). Inconsistencies in preservice elementary teachers' beliefs about multiplication. *FOCUS on learning problems in Mathematics,* 12, 3&4, 65-74.

TONELLE, J. (1979). *Le monde clos de la factorisation au primer cycle.* Memoire de D.E.A. de Didáctique des Mathématiques. Université d'Aix-Marseille. Université de Bordeaux.

TONELLE, J. (1991). Etude de quelques problèmes liés à la transposition didactique. En R. Gras (Ed.) *Actes de la VI^{ème} Ecole et Université d'été de Didactique des Mathématiques* (p. 53-57). Université de Rennes.

TOULMIN, s. (1972). *Human understanding.* Vol. 1. *The collective use and evolution of concepts.* Princenton: Princenton Univetsity Press.

TRUE, J. A. (1989). *Finding out: Conducting and evaluating social research.* Belmont, California: Wadsworth.

VALIRON, G. (1976). Formación y evolución del concepto de función analítica de una variable. En F.Le Lionnais (Ed.), *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (p. 165-181). Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

VALLES, E., MARTINEZ, J., MARGALEF, N. y YABAR, J.M. (1977). *Matemáticas 8.* Madrid: S.M.

VERGNAUD, G. (1982a). Quelques orientations théoriques et métodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. Comunicación a *l'Ecole d'été de didactique des mathématiques.* Universite de Grenoble.

VERGNAUD, G. (1982b). Cognitive and developemental psychology and reseach in mathematics education: some theorical and metodological issues. *For the learning of mathematics,* 3, 2, 31-41.

VERGNAUD, G. (1983). Didactique du concept du volume. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 4, 1, 9-25.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 10, 23, 133-170.

VIENNOT, L. (1989). Obstacle épistémologique et raisonnements en physique. En N. Bednarz y C. Garnier (Eds.), *Constrution des* *savoirs: Obstacles & Conflits* (p. 117-129). Ottawa: Agence d'Arc.

VINNER, S. y TALL, D. (1981). Concept image and concept defini'tion in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151-169.

VINNER, S. (1983). Concep definition, concept image and the notion of function. *The International Journal of Mathematics Education in Science and Technology,* 14, 293 - 305.

VINNER, S., y DREYFUS, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20, 4, 356-366.

VINNER, S. (1990). Inconsistencies: Their causes and function in learning mathematics. *FOCUS on learning problems in mathematics,* 12, 3 & 4, 85-98.

VOLLRATH, H.J. (1986). Search strategies as indicator of functional thinking. *Educational Studies in Education Mathematics,* 17, 397-400.

WEBB, N. L. (1992). Assessment of student's knowledge of mathematics: step toward a theory. En D. A. Growus (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

WEBER, J. (1986). *Basic content analysis.* Newbury Park, California: Sage University Press.

YOUSCHEVITCH, A.P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century, *Archive for history of exact sciences,* 16, 36-85. Traducción de Bellemin, J.J., Fragmentos d'histoire des Mathématiques, *Broucheure APMEP,* 41, 7-68.

ZSEMINSKA, A. (1968). De la copropieté a la covariation. En J. Piaget (Ed.), *Epistémologie et psychologie de la fonction* (p. 79-91). Paris: PUF.

ZUNZUNEGUI, S. (1989). *Pensar la imagen.* Madrid: Cátedra.

ANEXOS

ANEXO Nº 1:
Cuestionario pasado a los alumnos

ALUMNO ______________________________ CURSO __________

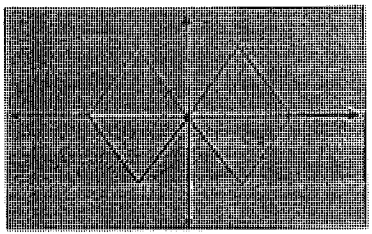
CENTRO ______________________________ POBLACION __________

Fecha ______________ Edad ______

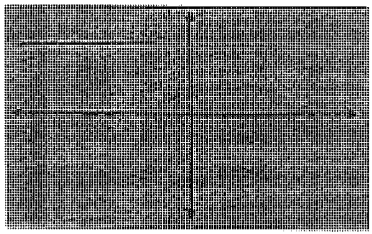
1. Si tuvieses que explicar a un alumno de 1º de BUP lo que es una función matemática, ¿qué le dirías? ¿Le indicarías algunos ejemplos?, ¿cuáles? ¿Le propondrías algún ejercicio, o algún problema, para que él lo resolviese?. Indica alguno.

2. Te presentamos a continuación varias figuras. Debes decir, para cada una de ellas, si se trata o no, de la representación gráfica de una función. Explica detalladamente tus respuestas.

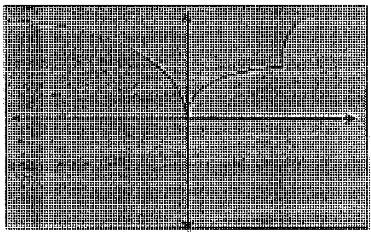
GA)



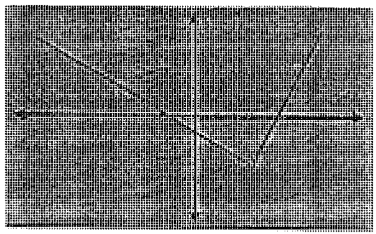
GB)



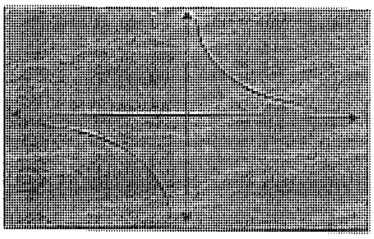
GC)



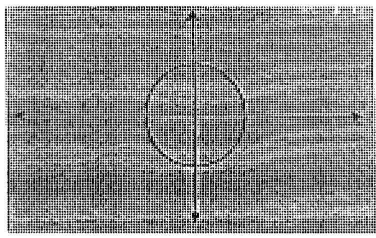
GD)



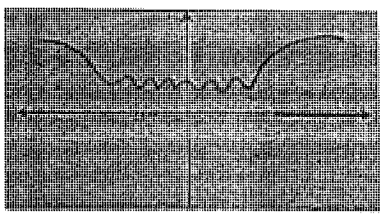
GE)



GF)



GG)



3. Te presentamos a continuación varias expresiones algebraicas. Debes decir, para cada una de ellas, si se trata o no, de una función. Explica detalladamente tus respuestas.

AA)

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 3 , & x \in \mathbb{R} ,\ x \leqslant 2 \\ 0 , & x \in \mathbb{R} ,\ 2 < x < 3 \\ 2 , & x \in \mathbb{R} ,\ x \geqslant 3 \end{cases}$$

AB)

$$y = 4$$

AC)

$$x^2 + y^2 = 1$$

AD)

$$x.y = 5$$

AE)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para todo x racional} \\ 0 & \text{para todo x irracional} \end{cases}$$

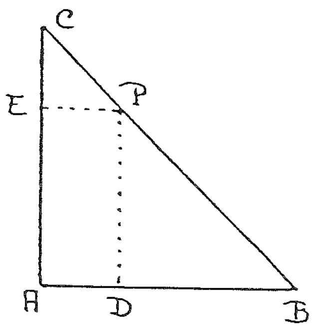
AF)

$$y = \frac{3}{x}$$

AG)

$$f(x) = \pm\sqrt{4x + 1} , \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

4. Dado el triángulo ABC, cuyos catetos AB y AC miden ambos 11 cm, marcamos un punto P cualquiera sobre la hipotenusa y obtenemos el rectángulo PDAE. Queremos estudiar cómo varía el área del rectángulo cuando variamos la posición de P.



a) ¿Podrías dibujar una gráfica que represente la variación anterior?

b) ¿Puedes encontrar una expresión matemática que represente, de modo general, la variación anterior?

c) ¿Crees que se puede determinar en esta situación una función matemática?. Explica con detalle tu respuesta.

5. Un edificio de 5 plantas, en el que cada planta tiene una altura de 4m, dispone de un ascensor, con las siguientes características:

Tiempo que tarda en subir un piso	5 seg.
Tiempo de parada en el piso solicitado	7 seg.

El ascensor hace el siguiente recorrido (a velocidad constante): **Parte de la planta baja y se para en el** 2°, 3°, y 5° **piso.**

a) ¿Podrías determinar en esta situación una función matemática?

b) ¿Podrías dibujar en unos ejes cartesianos, la gráfica que represente la variación del espacio recorrido por el ascensor, según el tiempo transcurrido?

c) ¿Puedes encontrar una expresión matemática que represente la variación anterior?

6. En una cierta colectividad indígena, donde no se utiliza dinero para comprar, se establecen las siguientes equivalencias para realizar cambios:

Por 5 gallinas, recibirá 6 palomos
Por 4 palomos, recibirá 5 patos

a) Una persona quiere cambiar gallinas por patos. ¿Puedes encontrar la relación que determine, de modo general, la equivalencia entre gallinas y patos?

b) ¿Podrías determinar en esta situación una función matemática? Razona suficientemente tu respuesta.

ANEXO Nº 2:
Cuestionarios Oficiales

Documento n^0 1:

CUESTIONARIOS DE MATEMATICAS DE EGB (1971)

AREA DE MATEMATICAS

Una de las funciones fundamentales de las matemáticas es la de ordenar conocimientos y crear estructuras formales que las resuman y expresen. Las estructuras formales están caracterizadas por unas leyes que permiten aplicarles, de modo preciso, unos automatismos, entre ellos el automatismo de la lógica que facilita su utilización en problemas variados. Ahora bien, estas estructuras y sus correspondientes automatismos no pueden permanecer inalterables, evolucionan constantemente para adaptarse a las nuevas situaciones.

De lo dicho se desprende que la enseñanza de la matemática en todos los niveles, y preferentemente en la E.G.B., debe centrarse en el proceso de matematización de problemas, creación de sistemas formales, utilización de las leyes de estos sistemas para obtener unos resultados e interpretación de los mismos. Estos objetivos se alcanzarán si se considera que las estructuras que el alumno maneja enlazan, cada vez más, las distintas áreas de expresión y de experiencia. Las bases de observación, experimentación y reflexión, dado el doble canal inductivo y deductivo de las matemáticas, están tanto en los hechos y fenómenos de la naturaleza, como en los datos, hechos y relaciones estrictamente humanos, pues unos y otros son cuantificables y la expresión final resultante del proceso es el símbolo numérico. De aquí la justificación de introducir la matemática moderna, cuyos procedimientos facilitan la creación de estructuras formales que permiten ser utilizadas en gran número de situaciones distintas.

En la primera etapa de E.G.B. se pretende que los alumnos sean capaces de llegar a la expresión numérica mediante el ejercicio y empleo consciente de las relaciones entre conjuntos, la comprensión del número como una propiedad de aquéllos y la idea funcional de algunos conceptos topológicos y construcciones geométricas. El número es un símbolo y como tal una abstracción, resultado de un proceso que, partiendo de la observación, tiene a su vez una expresión verbal, y recorre un camino que exige ordenar datos informativos y crear estructuras formales que los resuman. El número expresa también una relación y es preciso que antes de llegar a su utilización, se haya practicado no sólo la observación, sino el análisis y la síntesis. Se corre pues un grave riesgo si se introduce al alumno en los mecanismos operatorios sin recorrer antes el camino aludido.

Se evitará, por otra parte, la memorización de conceptos. Las operaciones en la aritmética constituyen un ejemplo altamente significativo. Tradicionalmente han sido enseñadas en forma memorística, sin el conocimiento previo de la numeración, y presentadas en forma aislada y poco coherente. Ahora, la etapa preparatoria de las operaciones entre conjuntos y la aplicación numérica subsiguiente subsanan este defecto.

La segunda etapa de E.G.B. pretende ir hacia una mayor profundidad en el formalismo matemático. Se atenderá más bien a criterios formativos que informativos en la elección de objetivos, contenidos, actividades y niveles.

En la vertiente formativa el alumno debe lograr claridad, rigor y precisión en el pensamiento, paralelamente al desarrollo de los poderes de expresión, traduciendo cada vez más las ideas en símbolos, logrando códigos de significación de creciente complejidad. La información llegará como resultado de considerar situaciones y problemas concretos en los distintos campos de la matemática.

Es importante advertir el enlace de este área con la expresión verbal; por ejemplo, se hace imprescindible en el campo de la significación. El simbolismo no ha de introducirse sin que previamente el alumno adquiera las ideas o nociones a las que corresponde. Aun así habrá que hacerlo con precauciones y aclaraciones. Toda vez que en matemáticas un mismo símbolo puede representar significaciones muy distintas.

El proceso matemático puede ser aplicado a múltiples situaciones problemáticas. En este sentido es obvia su interrelación con las demás áreas. El plantear situaciones y su resolución acostumbrará al alumno a observar, relacionar y analizar con precisión, evitando juicios precipitados y erróneos.

Los recursos lúdicos adquieren gran valor en todos los niveles de la Educación General Básica. Responden a los intereses de los alumnos y los llevan a la expresión y rigor lógicos. Mediante el juego se someten a las exigencias normativas del mismo y aceptan las leyes y ordenamientos lógicos en el planteamiento y solución de los problemas. Por otra parte, el juego libre les permite hacer asociaciones y combinaciones varias. Esta modalidad del juego les acostumbra a plantear los problemas de modo original y a buscar nuevas vías de solución. Caben, pues, dos modalidades de juegos: lógicos-dirigidos y libres-creativos. Con el primero el niño acepta y se ejercita en las reglas establecidas, mientras que con el segundo busca nuevos caminos y procedimientos para encontrar soluciones nuevas.

Objetivos específicos del área de matemáticas

- Desarrollo de la intuición espacial: distancia, proporción, perspectiva, etc...
- Capacidad de representación gráfica y construcción plástica.
- Adquisición del vocabulario básico para una adecuada expresión matemática.
- Logro de los mecanismos del cálculo operatorio elemental, partiendo de situaciones cuantificables.
- Adquisición de los automatismos de razonamiento lógico (demostraciones matemáticas).
- Desarrollo de la agilidad mental en el cálculo.
- Capacidad de crear estructuras formales.
- Capacidad de plantear simbólicamente situaciones problemáticas.
- Capacidad de interpretar funciones y tablas.
- Capacidad de leer y de expresar datos cuantitativos.

Sugerencias de posibles actividades:

Observación y manipulación

- Observar y manipular objetos.
- Observar y establecer correspondencia entre objetos mediante la manipulación.
- Comparar y clasificar objetos, estableciendo previamente algún criterio (forma, tamaño, color, grosor, etc.).
- Representar gráficamente las correspondencias establecidas.
- Formar y determinar conjuntos.
- Observar hechos y fenómenos y seriarlos teniendo en cuenta lo espacial y lo temporal (Segunda Etapa).
- Observar cuerpos sólidos y describirlos (Segunda Etapa).
- Plegado y desplegado de cartulinas para construir o analizar sólidos.

Reconocimiento y resolución de situaciones problemáticas

- Formular problemas tomados de la vida real.
- Identificar problemas y establecer gradualmente los pasos para su solución.

Intuición espacial

— Experimentar movimientos de planos con figuras adecuadas.
— Estimar distancias.
— Observaciones y predicción de transformación de figuras y conceptos de proyección (Segunda Etapa).

Traducción del pensamiento cuantitativo en frases matemáticas

— Hacer observaciones que puedan traducirse en datos numéricos y clasificarlos.
— Observar y expresar los movimientos rítmicos del cuerpo humano.
— Observar el ritmo de la vida diaria y hacer composiciones sobre la misma (Segunda Etapa).
— Formular datos cuantitativos, resultando de la medida de una misma distancia, partiendo de distintas unidades naturales.

Mecanismos y automatismos

— Establecer e identificar las propiedades de las operaciones que faciliten el mecanismo del cálculo operatorio.
— Confección, lectura e interpretación de tablas (Segunda Etapa).
— Dibujar líneas abiertas o cerradas con distinción de la región que delimitan y fronteras.
— Dibujar líneas convexas y no convexas.
— Medir longitudes con distintas unidades convenidas.
— Expresar e interpretar gráficas que traduzcan datos cuantitativos (Segunda Etapa).

Vocabulario

— Hacer inventarios de palabras relativas al espacio.
— Inventar y expresar frases con términos cuantitativos.
— Expresar situaciones relativas a objetos, empleando vocablos topológicos.
— Utilizar e interpretar expresiones orales con términos lógicos.
— Realizar composiciones y valorar la adecuación del empleo del vocabulario matemático.

Relación. Análisis. Síntesis. Abstracción. Razonamiento lógico

— Establecer y representar relaciones entre los elementos de un conjunto.
— Formar conjuntos de cardinal dado.
— Realizar participaciones de un conjunto.
— Descripción de las etapas realizadas para la introducción experimental de los conceptos matemáticos.
— Observar la correspondencia entre la suma de longitudes y sus medidas (Segunda Etapa).
— Observar y predecir transformaciones de figuras sobre una lámina flexible (Segunda Etapa).
— Inventar y estudiar aplicaciones introduciendo operadores y expresarlas numéricamente (Segunda Etapa).

Creatividad

— Expresar, libre y personalmente, situaciones y conceptos matemáticos (en definiciones, composiciones, representaciones gráficas, etc.).
— Estudiar e inventar situaciones que traduzcan el valor utilitario de la expresión numérica.
— Completar representaciones relativas a conceptos (crucigramas, gráficas, caminos, laberintos...).

AREA DE MATEMATICAS

Nivel preescolar (Para aquellos alumnos que no hayan asistido a centros de educación preescolar).

— Ordenar por tamaños objetos de uso corriente.
— Agrupar y clasificar objetos por formas, tamaños y colores.
— Conjuntos. Elementos. Relación de pertenencia. Propiedad característica.
— Conjuntos coordinables. Introducción funcional de la idea de número. Aprendizaje de las cifras.
— Conjuntos no coordinables. Ordenación.

Primer nivel:

— Conjuntos.—Idea de subconjunto. Representación de conjuntos. Unión de conjuntos disjuntos.
— Sistemas de numeración. Numeración decimal. Aprendizaje de los números hasta la centena.
— Adición de números. Sustracción de números. Problemas y ejercicios simultáneos. Automatización de dichas operaciones con números de una y dos cifras.
— Líneas poligonales abiertas y cerradas. Triangulaciones. Composición y descomposición de polígonos. Borde de un polígono.

Segundo nivel:

— Numeración decimal.—Aprendizaje de los números a partir de la centena.
— Iniciación a la medida con empleo de medidas naturales (pie, palmo, etc.). Medidas experimentales con el dm.
— Multiplicación como suma de sumandos iguales. Extensión del formalismo para llegar a la escritura de potencias.
— Particiones de un conjunto.—Iniciación a la división con situaciones experimentales familiares al alumno.
— Ejercicios de medida con el uso del metro.
— Descripción funcional y reconocimiento de cubos, pirámides y prismas.

Tercer nivel:

— Conjuntos. — Relación de pertenencias. — Relación de inclusión. — Operaciones de intersección, unión. — Conjuntos disjuntos. — Producto cartesiano de dos conjuntos.

— Multiplicación de números naturales. Automatización de esta operación.

— Plano, recta, semiplano, semirecta, segmento.

— Angulo, ángulos consecutivos, ángulos adyacentes.

— Introducción experimental al paralelismo de rectas.

— Círculo. — Polígonos. — Clasificación de polígonos.

Cuarto nivel:

— División entera. Automatización.

— Sistema métrico lineal.

— El cm^2.

— Magnitudes discretas. — Aproximación de una medida. — Números decimales. — Adición y sustracción de números decimales.

— Geometría del plegado. — Igualdad en el plano. — Angulo recto. — Perpendicularidad. — Paralelismo.

— Reconocimiento y descripción de poliedros y cuerpos redondos.

Quinto nivel

— Conjuntos. Operaciones con conjuntos. Propiedades.

— Correspondencias. — Aplicaciones. — Biyecciones.

— Relaciones de coordinabilidad: El número natural.

— Operaciones con números naturales. Propiedades.

— Concepto de múltiplo y divisor.

— Introducción experimental a los movimientos del plano. — Simetría axial. Producto de simetrías. — Traslaciones.

— Igualdad de triángulos.

— Circunferencia y círculo.

— El m^2. — Unidades de superficie. — Introducción experimental a la medida de la superficie de paralelogramos y triángulos.

— Introducción experimental a las fracciones.

Sexto nivel:

— Aplicaciones inyectivas. Aplicaciones suprayectivas. Relaciones de igualdad.

— Construcción de conjunto de los números racionales positivos.

— Suma y producto de números racionales positivos. El grupo multiplicativo de los números racionales positivos.

— Números decimales. Estructura multiplicativa.

— Segmentos generales. — Angulos generales.

— Igualdad de triángulos.

— Circunferencia. Círculo.

— Estudio experimental del paralelismo y perpendicularidad en el espacio.

— Operaciones con segmentos y ángulos generales: suma y producto por un número natural.
— Areas de figuras planas.
— Estudio descriptivo de poliedros regulares y cuerpos redondos. —La esfera.

Séptimo nivel:

— Construcción del conjunto de números enteros.
— Suma de números enteros. El grupo aditivo de los números enteros.
— Producto de números enteros. El anillo de los números enteros.
— Funciones de variable entera. Gráficas. Ecuaciones.
— Concepto de volumen. Unidades. Volúmenes de cuerpos estudiados.
— Proporcionalidad de magnitudes. Aplicaciones: interés, repartos proporcionales, etc.
— Nociones de estadística.

Octavo nivel:

— Construcción del conjunto de los números racionales.
— Suma de números racionales. Grupo aditivo.
Producto de números racionales. El cuerpo de los números racionales.
— Funciones de variable racional. Gráficas. Ecuaciones.
— Proporcionalidad de segmentos. Semejanza.
— Funciones polinómicas. Polinomios.
— La ecuación de segundo grado. Parábola.
— Estudio descriptivo de la hipérbola.

Documento n^0 2:

PROGRAMAS RENOVADOS DE MATEMATICAS PARA EGB (1981)

CICLO SUPERIOR

INDICE

481

Bloque temático n.º 4
FUNCIONES

En la época actual el comportamiento colectivo y las variaciones con el tiempo de los fenómenos tienen más interés que el comportamiento individual o la situación en un determinado instante. Interesa saber, por ejemplo, la vida media o el consumo de cigarrillos o de proteínas de los habitantes de una región, más que los datos particulares de cada habitante al respecto.

De aquí que haya que educar, desde el punto de vista matemático, en el uso de tablas de números y en el manejo de gráficos de las mismas. Tenemos que educar la intuición para que vea el conjunto por encima del individuo. Nace así, para el ciclo superior de E.G.B. la idea de Función que preside toda la matemática posterior.

Hay que desechar, en lo posible, las fórmulas estáticas para pasar a «ver» la «ley de variación»; o sea, la función que las rige.

Muchas veces han visto en los periódicos o en los libros de texto de Ciencias Sociales gráficas de movimientos bursátiles, gráficas de temperaturas medias climáticas, de carestía de la vida o de dependencia de la edad de una persona y la frecuencia de enfermedad.

Pues bien, las ideas de función lineal y parabólica que suministran son de mucha importancia conceptual.

Estudiaremos en este bloque temático el conocimiento, representación e interpretación de las funciones del tipo: $y = ax + b$; $y = ax^2 + bx + c$, con coeficientes en Q y la resolución de ecuaciones y sistemas con coeficientes y solución en Q: la resolución de ecuaciones de segundo grado con solución en Q y el estudio intuitivo de la parábola como representación gráfica de funciones cuadráticas; el planteamiento y resolución de problemas que den lugar a ecuaciones y sistemas.

El conocimiento de la función lineal es la base para posterior estudio en E.G.B. de la proporcionalidad y al estudiar la representación de la función cuadrática terminaremos dándoles una ligera idea de concavidad y convexidad, dejando el camino abierto para que en B.U.P. estudien dentro del Cálculo Diferencial la función derivada, concepto fundamental en numerosas ramas de la Matemática, Física, Economía, etc., y muy útil para el estudio del comportamiento de una función en uno de sus puntos, resolviendo problemas como son el cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de una función.

TEMA DE TRABAJO:

4.1. FUNCIONES

OBJETIVOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
4.1.1. Adquirir el concepto de función, distinguiendo dominio y rango.	1. **¿Cuáles de las relaciones siguientes son funciones? Indica el conjunto dominio y el conjunto rango.** *a)* (1, 3) (−1, −3) (2, 6) (3, 9) (−2, −6). *b)* (4, 3) (5, −3) (5, 4) (2, 5) (4, 5). *c)* (2, 1) (1, 1/2) (3, 3/2) (6, 3). *d)* (1, 5) (2, 10) (1, 3) (3, 15).
4.1.2. Representar funciones lineales.	1. Representar funciones del tipo: $y = ax$ e $y = ax + b$. $y = 1/2x$ $Y = -3$ $y = 2x - 3$ $y = -x$ $y = x$ $y = -x + 2$ $y = -3x + 4$ $x = 1$ $y = -2x$ 2. **Utilizando las gráficas de las funciones anteriores, conociendo originales hallar sus imágenes y viceversa.**

OBJETIVOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
4.1.3. Identificar en la parábola (como representación gráfica de la función cuadrática) su eje de simetría y vértice.	1. Representar funciones cuadráticas e identificar el eje de simetría y vértice. $y = 1/2x^2$ $y = 2x^2$ $y = -1/2x^2$ $y = -2x^2$ $y = x^2 - 4x + 3$ $y = x^2 - 1$ $y = x^2 + 2x + 1$ $y = -x^2 + 4$
4.1.4. Definir y caracterizar ecuaciones, diferenciándolas de identidades e igualdades.	1. Identificar y diferenciar identidades, igualdades y ecuaciones. Ejemplo: de las siguientes expresiones señala cuáles son identidades, igualdades y ecuaciones. $X = 5$ $3 = 3$ $6 = 5 + 1$ $X^2 - 5X = -6$ $X = Y$ $\frac{2x - 3}{2}$ 2. Escribir identidades, igualdades y ecuaciones. Ejemplo: *a)* Completa para que sea igualdad: $1 + 3 =$; $2 + 7 = 5$; $= 2(4 - 1)$ *b)* Completa para que sea identidad: .... = ... ; $-8 =$; $= x$ *c)* Completa para que sea ecuación: $x =$; $2x - 3 =$; $= x^2$
4.1.5. Enumerar e identificar las propiedades de la igualdad.	Dadas unas igualdades y operaciones efectuadas en ellas, identificar las propiedades que se han utilizado. Ejemplo: 1. En la igualdad. $3 + 1 = 4$; efectuamos. $3 + 1 + (-6) = 4 + (-6)$. ¿Qué propiedad hemos utilizado? 2. En la igualdad: $3 + 1 = 4$; efectuamos. $(-3)(3 + 1) = (-3)\ 4$. ¿Qué propiedad hemos utilizado? 3. En las igualdades: $5 + 1 = 6$; $7 + (-3) = 4$ efectuamos ; $5 + 7 + 1 + (-3) = 6 + 4$ ¿Qué propiedad hemos utilizado?
4.1.6. Adquirir los automatismos de la resolución de ecuaciones y sistemas. (Las ecuaciones de 1.º y 2.º grado con coeficientes en Q y los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, con coeficientes en Q).	1. Resolver ecuaciones, fundamentando los pasos que se realizan y propiedades que se aplican: *a)* $\frac{3x - 1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2x}{6}$; *b)* $2 - \frac{3(x - 1)}{4} = \frac{1}{6}$ *c)* $x - \frac{2x + 3}{4} = \frac{x}{12} - \frac{1}{8}$; *d)* $y = 3 - 2x$; $0 = y - x - 6$ *e)* $\frac{x + 1}{y} = \frac{1}{4}$; $\frac{x}{y + 1} = \frac{1}{5}$; *f)* $\frac{1}{3y - 2x} = \frac{-1}{7}$; $1 = 3x + 2y$ *g)* $x^2 - 16 = 0$; *h)* $3x^2 - 8x = 0$

OBJETIVOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
	i) $3(x - 2)(2x - 1) = 0$; *j)* $\frac{x - 1}{2} = \frac{3}{x - 2}$ *k)* $\frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + 20 = 12$
4.1.7. Plantear y resolver problemas que den lugar a ecuaciones y sistemas y plantear problemas conociendo la ecuación.	1. ¿Cuál es el número cuya tercera parte aumentada en 7 da 62? 2. La suma de dos números pares consecutivos es igual a 18. Hallar dichos números. 3. Un padre tiene 34 años y su hijo 12. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el duplo de la de su hijo? 4. Se quiere repartir 14 000 ptas. entre tres personas de forma que la segunda reciba el doble de la primera, y la tercera la mitad de la primera, ¿cuánto dinero le corresponde a cada una? 5. Un automóvil parte de un punto A con velocidad uniforme de 40 km./h. hacia otro punto B. Dos horas después sale de A dirección B otro automóvil con velocidad uniforme de 60 km./h. Dígase a qué distancia de A se encuentran. 6. Si al cuadrado de un número se le suma 20 se obtiene nueve veces dicho número. Hallar el número. 7. Hallar dos enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 25. 8. Hallar las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 50 m. y su área es 50 m.². 9. La hipotenusa de un triángulo es igual a 34 cm. Hallar las longitudes de los catetos sabiendo que uno de ellos es 10 cm. mayor que el otro. 10. Hallar dos números cuya suma es 28 y su diferencia, 12. 11. Hallar una fracción sabiendo que si el numerador se aumenta en dos unidades y el denominador en una unidad se obtiene 1/2, y que si el numerador se aumenta en una unidad y el denominador se disminuye en dos unidades, se obtiene 3/5. 12. Hallar la velocidad de un barco en aguas en reposo y la velocidad de la corriente de un río, sabiendo que tarda 3 horas en recorrer una distancia de 45 km., aguas arriba y 2 h. en recorrer 50 km. aguas abajo. 13. Dadas las siguientes ecuaciones enunciar para cada una de ellas un problema: 1) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{4}x = 700$ 2) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3$ y $3x + 2y = 42$ 3) $x^2 - 5x = -6$

482

Bloque temático n.º 5
POLINOMIOS

Este bloque temático se limita al reconocimiento de los polinomios y descripción de los elementos que los constituyen (coeficiente, indeterminada, grado) y, además, a conseguir los automatismos de las operaciones con ellos hasta llegar a la Regla de Ruffini.

No se pretende concluir en una estructura algebraica formalizada [anillo o álgebra de polinomios] ni en un estudio sistematizado de ellos, que se hará en el Bachillerato.

Este tema enlaza con el estudio de las ecuaciones que se dan en Educación General Básica, así como con las diversas formas de descomposición polinómica en los sistemas de numeración que ya se iniciaron en el Ciclo Preparatorio de Educación General Básica, como puede ser la descomposición de un número en base 10, que pasado el álgebra no es más que el valor numérico de cualquier polinomio para X = 10.

Lo mismo para otros sistemas de numeración, el paso de un sistema a otro se basa en descomposiciones polinómicas.

Este bloque se divide en dos temas de trabajo

TEMAS DE TRABAJO:

5.1. Polinomios. Elementos que los caracterizan.
5.2. Operaciones con polinomios: suma, diferencia, multiplicación y división. Regla de Ruffini.

TEMA DE TRABAJO:

5.1. POLINOMIOS: ELEMENTOS QUE LOS CARACTERIZAN

Se estudia el reconocimiento y descripción de los polinomios, indicando el grado, los coeficientes, términos, indeterminada, sin dar una definición formal de polinomio.

Hay que cuidar la presentación de grado de un polinomio, ya que hay algunas definiciones que son incorrectas; ¿de qué grado es el polinomio cero? Las funciones polinómicas constantes dan también lugar a polinomios. Son los que se llaman «polinomios unidades» en la estructura de anillo, pues son los únicos que tienen inverso; Ejemplo: 4, —3, 6 son polinomios, ya que se pueden expresar: $4x^0$, $-3x^0$, $5x^0$, y son polinomios de grado cero.

Se presentarán también los polinomios ordenados y completos.

OBJETIVOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
5.1.1. Definir, reconocer y escribir polinomios con coeficientes en Q.	1. De las siguientes expresiones algebraicas, indicar cuáles son polinomios 3×2^2; 5, $4^3x - 3x^2$, $\frac{3}{x^2} + 2$, $\frac{x + 1}{x - 1}$, 0, $3x^0$, [illegible] $3z^3$, $\frac{Z - 1}{Z + 3}$, $5Z^2$, $4r^2 - 3r + 1$

2. Escribir expresiones algebráicas, unas que sean polinomios y otras no, indicando por qué.

5.1.2. Ordenar y completar los términos de un polinomio y reconocer su grado.

1. Completar las siguientes casillas, poniendo un ejemplo en cada uno de ellos.

Polinomio completo y ordenado	Polinomio no completo y ordenado	Polinomio no ordenado y completo	Polinomio no ordenado y no completo

2. Indicar cuál es el grado de cada uno de los polinomios de la actividad 1.

5.1.3. Hallar el valor numérico de un polinomio y reconocer sus ceros o raíces.

1. Hallar el valor numérico de polinomios para valores dados, indicando cuáles son *ceros* o *raíces*.
2. Hallar el valor numérico del polinomio $2x^3 - 3x^2 - 2x - 3$ para $x = 1$, $x = 2$, $x = -3$, $x = -1/2$, $x = 3/2$, $x = 0$, $x = 1/2$

De todos estos valores de X indicar cuáles son *ceros* o *raíces*.

TEMA DE TRABAJO:

5.2. OPERACIONES CON POLINOMIOS

Se estudiarán: la operación adición entre polinomios, la sustracción considerada como adición del polinomio minuendo con el opuesto del sustraendo.

La multiplicación se presentará en todos los casos procurando una graduación en las dificultades. Multiplicación de polinomio por monomio, de polinomio por binomio, etc... Se ampliará la multiplicación al estudio de las potencias, particularmente cuadrados y cubos de polinomios.

Se estudiarán las propiedades de la adición y de la multiplicación, insistiendo en la propiedad distributiva que proporciona la información necesaria para poder sacar factor común y factorizar en muchos casos.

La división exacta de polinomios no siempre es posible, puesto que el conjunto de polinomios es un anillo. Se estudiará la división entera de polinomios por monomios y por el binomio $x - a$, hasta llegar a obtener la regla de Ruffini.

OBJETIVOS — ACTIVIDADES SUGERIDAS

5.2.1. Adquirir el concepto de la operación adición de polinomios en Q (x).

1. Explicar en qué condiciones se verifica una operación en Q (x) y cómo se hace.

5.2.2. Reconocer las propiedades de sumas y diferencias de polinomios en automatización de los cálculos.

1. Dados los polinomios $A = 3x^2 + 4x - 5$, $B = -2/3\,x^3 + 4x^2 + 7$, $C = 5x^3 - 4 + 7x^2 + 3x$, hallar: $(A + B) + C$ y $A + (B + C)$, ¿son iguales los resultados obtenidos? ¿Por qué?
2. Del ejercicio anterior calcula $A + B$ y $B + A$. ¿Los resultados obtenidos son iguales? ¿En virtud de qué propiedad?
3. Con los polinomios del ejercicio 1, calcula $A + B - C$, $A - B - C$, $A - B + C$, $A - B$, $B - A$, $A - C$, indicando en cada uno de los pasos dados en qué propiedad te basas, expresándolo sobre el signo igual.

5.2.3. Reconocer polinomios iguales y hallar la forma reducida de un polinomio.

1. Escribir polinomios iguales, uno de ellos incompleto. Por ejemplo. Dado un polinomio $3x^4 + 1$, poner los números necesarios en los rectángulos para que sea igual al siguiente:

$$3x^4 + \square x^2 - \square x^2 - \square x + 1 + \square x^3$$

483

2. Escribir polinomios y expresarlos en forma reducida. Por ejemplo

$$3x^4 \times 5x^2 + 2x^4 \times 6x^3 + x^2 - 5x + 4$$
$$2x^5 - 4x^4 + 6x^4 + 1.$$
$$2x^2 + x.$$

¿Qué ventaja tiene un polinomio en su forma reducida?

5.2.4. Adquirir el concepto de la operación multiplicación de polinomios.

1. Explicar en qué condiciones se verifica una operación de multiplicación en Q (x), y cómo se efectúa.

5.2.5. Reconocer las propiedades de la multiplicación de polinomios y sacar factor común y automatizar los cálculos.

1. Calcular los siguientes productos:
   - *a*) $(2x + 5x^4 - 7)\left(-\frac{3}{4}x\right)$
   - *b*) $\left(-5x^3 + 3x + \frac{2}{3}\right)(2x^4)$
   - *c*) $\left(\frac{2}{3}x^2 - 1\right) 1x^0$
   - *d*) $(3x^2 - 2x + 1)\,0$
   - *e*) $(3x^2)\left(-\frac{3}{4}x^3\right)$ Generalizarlo a otros casos
2. Dados los polinomios:

$A = 3x^2 + 7x - 5$ $B = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 2$ $C = x^2 - 9x + 2$ ...

calcular $(A + C)B$ y $AB + CB$. Haz igual con $(AC)B$ y $A(CB)$

Indica en cada uno de los pasos dados, en que propiedad te basas expresándolo sobre el signo igual.

3. Sacar factor común en los siguientes polinomios

$$3x^4 - 4x^2 + x^5 + 3x^3,\quad \frac{3}{4}x^3 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{5}{4}x^2$$
$$-10x^7 + 6x^5 + \frac{4}{3}x^4$$

4. Dados polinomios, sacar factor común en cada uno de ellos
3. Sacar factor común en las expresiones:

$$12x^6 - 15x^5 \div 6x^4 \qquad -3/2\,x^5 + 6/4\,x^4 - 3/2\,x^3$$

5.2.6. Desarrollar, reconocer y completar: el cuadrado de un binomio; suma de dos monomios por la diferencia de los mismos; el cuadrado de un polinomio.

1. Efectuar las siguientes operaciones:

$$x^2 + (x + 2)^2 - 4 \qquad (x + 3)^2 - (x - 3)^2 + (x + 3)(x - 3)$$
$$(2x^2 + 3)^2 \qquad (-2x \div 4)^2 \qquad (-3x^2 - 5x)^2 \qquad (-2x + 3y \ldots)^2$$

2. Completar las siguientes igualdades:

$$x^2 + 6x + 9 = (\square + \square)^2 \qquad x^2 - \square + 4 = (\square - \square)^2$$
$$x^2 + 12x + \square = (\square + \square)^2 \qquad 9x^2 + 6x + \square = (\square + \square)^2$$
$$\square - 4x + \square = (x - \square)^2$$

3. Indica cuáles de las siguientes igualdades no son ciertas

$$(x - 3)^2 = x^2 - 9 \qquad (x + 3)(x - 3) = x^2 - 6x + 9$$
$$x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4) \qquad x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

5.2.7. Dividir polinomios entre monomios y entre el binomio $(x - a)$.

1. De los siguientes polinomios, halla el inverso, cuando exista

$A = 5/6 - 5x + 7$ $B = 6$ $C = 0$
$D = 3x + 2$ $E = 1$ $F = -5$

2. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones

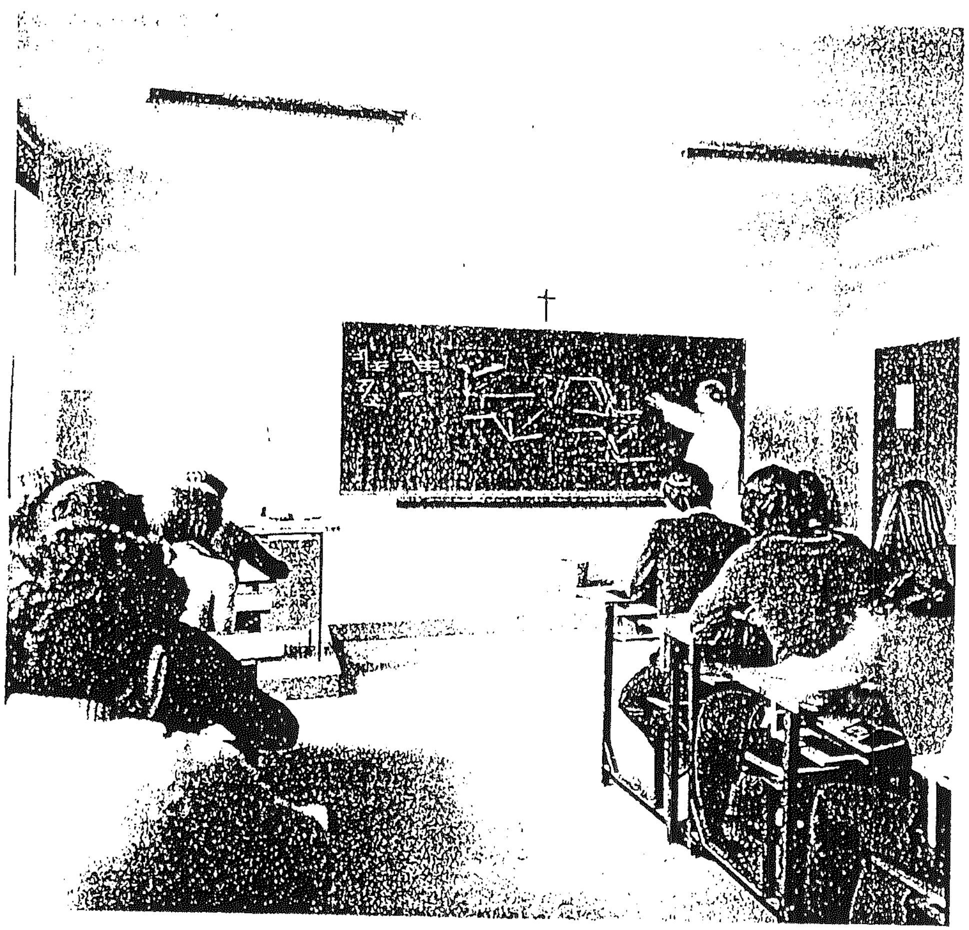
$$(x^5 - 3x^4 + 2 - x^2 + 3x^3 + x) : 3x^4$$
$$(x^5 - 7x^3 + 2x - 1) : (x - 2) \qquad (z^3 + 12z + 8) : (z + 2)$$

Generalizarlo en otros casos.

5.2.8. Aplicar la regla de Ruffini.

1. Al dividir el polinomio $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + ax - 15$ por ... da de resto 38. Calcular el valor de a por la regla de Ruffini.

OBJETIVOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
	2. Halla qué divisiones de las siguientes son más sencillas: — $(x^6 - 1) : (x - 1)$ $(3x^2 - 4x + 2) : (x + 2)$ $(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) : (x + 2)$ $(x^5 - 7x^3 + 2x - 1) : (x - 2)$
5.2.9. Factorizar polinomios de 2.º grado en su forma más sencilla.	1. Comprueba que el binomio $x + 3$ es factor del polinomio, $x^2 - 2x - 15$. Factoriza seguidamente este polinomio. Hacer lo propio con otros polinomios 2. Factorizar los siguientes polinomios: $x^2 - 16$ $4x^2 - 12x + 9$ $x^2 - 1$ $4x^3 - 16x^2 + 16x$



Bloque temático n.º 6

PROPORCIONALIDAD DE MAGNITUDES

Todo el bloque girará alrededor de las aplicaciones de la forma $x \to ax$, cuya representación gráfica es una recta que pase por el origen y en torno al estudio de la razón constante entre las imágenes [Rango] y los originales [dominio] de esa aplicación lineal.

Para desarrollar este bloque es necesario que el alumno conozca al menos intuitivamente las magnitudes y la medida de ellas [contenidos que pertenecen al ciclo medio de E.G.B.]; deben conocer también el concepto de función y el de dominio [conjunto original] y rango [conjunto imagen], así como operar con números racionales positivos.

Dado que el concepto de magnitud es muy abstracto y que las estructuras algebraicas serán tema importante de B.U.P., nos limitaremos a presentar al alumno los ejemplos de magnitudes, fundamentalmente los que él maneja continuamente: peso, masa, longitud, área, dinero, número de obreros...

Las dificultades en este bloque van a venir al tratar el tema de la medida. Hay que insistir en que la medida de magnitudes depende de la unidad elegida, pero teniendo mucho cuidado en no inducir al alumno al problema real de la medida; él medirá sin ninguna complicación los segmentos, por ejemplo.

Es incorrecto plantear la proporcionalidad de magnitudes diciendo que al aumentar una aumenta la otra y al disminuir una disminuye la otra, sino que es necesario que esta variación sea el resultado de multiplicar por un número racional positivo.

Otra dificultad proviene de no distinguir entre magnitud, cantidad de una magnitud y medida de una magnitud. Por ejemplo, en la magnitud, longitud, las cantidades de la magnitud son las clases de segmentos equivalentes [que tienen la misma longitud] y la medida es el número que obtenemos al medir uno de los segmentos con una unidad dada.

Este bloque puede establecer relaciones interdisciplinares con las ciencias sociales [aspectos económicos comercio, etc], con las ciencias de la naturaleza [coeficiente de proporcionalidad, en las fuerzas, las presiones Ley de Boyle, etc.].

Este bloque se divide en tres temas de trabajo

TEMAS DE TRABAJO:

6.1. Aplicaciones lineales. Magnitudes proporcionales.
6.2. Aplicación a problemas clásicos de la Aritmética.
6.3. Proporcionalidad geométrica y su relación con la medida.

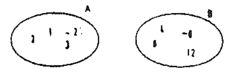
TEMA DE TRABAJO:

6.1. APLICACIONES LINEALES. MAGNITUDES PROPORCIONALES

Pretende este tema la captación del concepto de proporcionalidad. Para ello partimos del concepto de función como aplicación, ya estudiado, y en concreto al de las aplicaciones lineales, su caracterización e interpretación entre distintas magnitudes, llegando hasta la magnitud Q^+.

Es de señalar que nos encontraremos con que la medida de algunas magnitudes (longitud, área...) es un número real positivo, que nosotros no abordaremos dada su gran dificultad, la sustituiremos por una aproximación en Q^+.

Tendrá una proyección posterior el estudio de aplicaciones multilineales, tensores, etc.

OBJETIVOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
6.1.1. **Reconocer series de números proporcionales.**	Dados los conjuntos  1. Establecer una aplicación de A ——→ B de modo que sea proporcionalidad ¿cuál es la razón (coeficiente de la aplicación)? 2. Escribir conjuntos numéricos de manera que no sean proporcionales. 3. Establecer una aplicación de $Q^+ \longrightarrow Q^+$ de manera que sea una proporcionalidad. ¿Es biyectiva?
6.1.2. **Comprender y aprender las condiciones características de las aplicaciones lineales.**	1. Dada la aplicación de $Q^+ \longrightarrow Q^+$ definida por $f(x) = 4x$, efectuar: *a)* $f(1/2 + 2/5) = f(9/10) =$ *b)* $f(1/2) + f(2/5) =$ *c)* Relacionar *a)* con *b)*. *d)* $f(1/2 \times 3/5) =$ *e)* $1/2\ f(3/5) =$ *f)* Relacionar *d)* con *e)*. *g)* Relacionar $f(1/2 \cdot 3/5)$ y $f(1/2) \cdot f(3/5)$. *h)* $f(x + y) =$ *i)* $f(x \cdot y) =$
6.1.3. **Reconocer magnitudes proporcionales.**	1. Escribir ejemplos de magnitudes e indicar unidades que se emplean en cada uno de ellos. 2. Considerar la magnitud peso y la magnitud dinero, establecer entre ellas una proporcionalidad, tomada de la vida real. 3. Comprobar que la proporcionalidad del ejercicio anterior cumple las propiedades características de las aplicaciones lineales.
6.1.4. **Pasar de una proporcionalidad de magnitudes a una numérica y observar las propiedades de las proporciones.**	1. Calcular términos en una proporción numérica: *a)* Hallar x en cada una de las proporciones: $x/2 = 6/4$, $9/6 = 18/x$, $10/4 = x/6$, $5/6 = 20/x$, $18/12 = 12/x$ *b)* Hallar x e y en la proporción: $x/4 = y/5$, sabiendo que $x + y = 27$ *c)* Calcular x e y en la proporción: $x/y = 1/2$, sabiendo que $7x - 2y = 36$ *d)* Partiendo de $a/b = c/d$, hacer un cuadro resumen en el que figuren todas las formas en las que se puede escribir esta proporción.

TEMA DE TRABAJO:

6.2. APLICACION A PROBLEMAS CLASICOS DE LA ARITMETICA

Se ha separado este tema del anterior, aunque se deduce de él inmediatamente, debido a la cantidad de aplicaciones prácticas que de él se derivan. De la comprensión de la proporcionalidad entre magnitudes surgen fácilmente la realización de problemas de regla de tres simple y compuesta, de repartos proporcionales, de descuento comercial y de interés y regla de compañía, así como también el aspecto geométrico de la proporcionalidad entre segmentos que nos llevará al estudio de la homotecia y semejanza en el tema siguiente. [illegible] ralmente, hay que introducir previamente al alumno una terminología específica, como: rédito, interés, capital, descuento, valor nominal de una letra, etc.

El estudio de la regla de tres simple inversa lo [illegible] cimos a partir de la regla de tres compuesta, por [illegible] rencia con el bloque, pues de la forma tradicional llevaría a un estudio en tema aparte de la aplicación lineal $x \rightarrow a/x$.

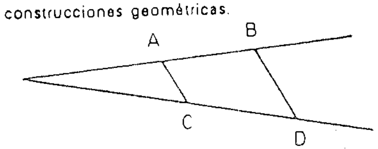
485

OBJETIVOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
6.2.1. Plantear y resolver problemas de regla de tres simple.	Antes de realizar estas actividades, buscar las magnitudes que son proporcionales y comprobar que cumplen las dos condiciones de proporcionalidad. 1. Un empleado cobra 12.000 ptas. por 8 días de trabajo, ¿cuánto cobrará si trabaja 17 días? 2. En una población de 15.000 habitantes el 30 por 100 son electores de los que 900, 1.350, 1.125 dan un voto a los partidos A, B y C respectivamente. ¿Qué tanto por ciento de electores se han abstenido? 3. En la compra de una bicicleta el vendedor ha hecho una rebaja del 12 por 100. Si le pagan 44.000 ptas. ¿Cuál es el precio de venta que marcaba? 4. Una factura en la que el vendedor ha hecho un 12 por 100 de rebaja se ha pagado con 3.828 ptas. ¿Cuánto marca la factura?
6.2.2. Plantear y resolver problemas de repartos proporcionales.	1. Para emprender un negocio tres socios A, B, C, aportan 3, 4 y 5 millones de pesetas respectivamente; si obtienen una ganancia de 2.400.000 ptas. ¿Qué beneficio corresponde a cada uno? 2. Repartir 1.200 ptas. en partes inversamente proporcionales a los números 3, 4 y 7.
6.2.3. Plantear y resolver problemas de regla de tres compuesta.	Antes de realizar estas actividades, buscar las magnitudes proporcionales a otra y comprobar que cumplen las dos condiciones de proporcionalidad. 1. Si 20 obreros hacen una obra en 6 días, ¿cuántos días tardarán en hacer esa misma obra 8 obreros? 2. Se han necesitado tres botes de pintura de 2 kg. para pintar una pared de 18 metros, ¿cuántos botes de 5 kg serán necesarios para pintar una pared de 60 m.? 3. 100 obreros construyen una tapia de 50 m. en 10 días. ¿Cuántos obreros se necesitarían para construir 40 m. de tapia en 4 días? 4. Un capital de 27.000 ptas. impuesto al 8 por 100 produce un interés simple de 2.430 ptas. ¿Cuánto tiempo ha estado impuesto? Expresa el resultado en complejo de años, meses y días. 5. ¿A qué tanto por ciento hemos de imponer un capital para que en 5 años se duplique? 6. El valor actual de una letra es 34.710 ptas., y el valor nominal, 35.100 pesetas, si el descuento se hace al 5 por 100 el día 30 de septiembre, ¿cuál era la fecha del vencimiento?

TEMA DE TRABAJO:

6.3. PROPORCIONALIDAD GEOMETRICA Y SU RELACION CON LA MEDIDA

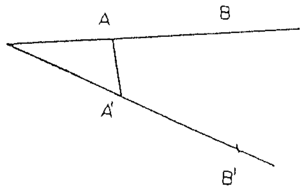
La proporcionalidad entre segmentos la resolveremos mediante construcciones geométricas.



Esta proporcionalidad le inducirá, de forma natural, a medir esos segmentos y encontrar que esas medidas forman una proporción numérica y, por tanto, le resultará sencillo trasladar todas las propiedades estudiadas en el tema 1.

Este tema comprende el concepto de segmentos proporcionales, el teorema de Thales y sus aplicaciones

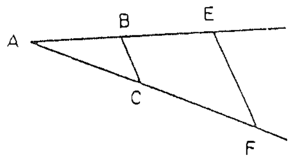
OBJETIVOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
6.3.1. Enunciar y aplicar el teorema de Thales.	1. Dada una proporcionalidad entre segmentos, calcular los originales y las imágenes de algunos segmentos, por ejemplo.



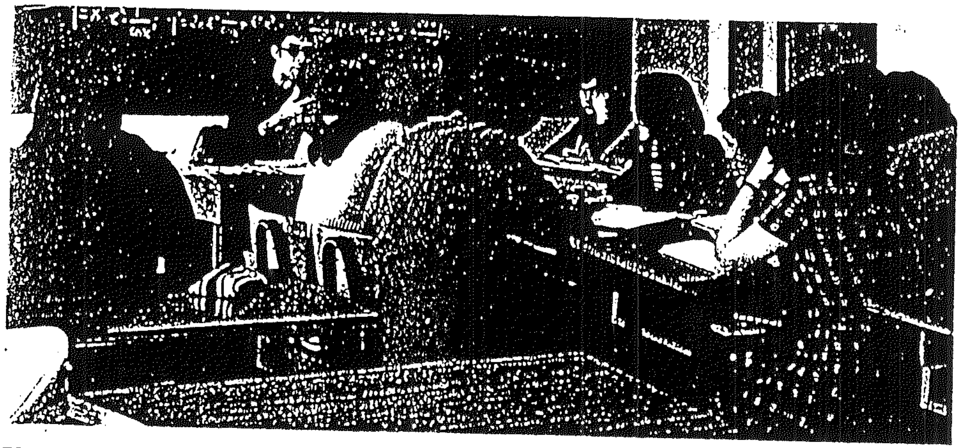
calcular la imagen de OB y el original de OB'

2. Medir los segmentos anteriores y observar si forman una proporción numérica

6.3.2. Desarrollar la capacidad de construcción gráfica que se deriva del teorema de Thales.	1. Dividir un segmento en partes iguales 2. Dividir un segmento en partes proporcionales 3. Dibujar tres segmentos de distinta medida, hallar y construir el cuarto proporcional.
6.3.3. Establecer las proporciones que se dan entre los lados de dos triángulos en posición de Thales.	1. Distinguir cuando dos triángulos están en posición de Thales. 2. Conociendo las medidas de algunos lados de dos triángulos en posición de Thales, calcular las de los demás. Ejemplo:



Sabiendo que AB = 15 cm., $\overline{AE}$ = 17 cm., $\overline{AF}$ = 22 cm. y $\overline{BC} = \frac{17}{2}$ cm., calcular las medidas de los lados $\overline{AC}$ y EF.



486

Documento n^0 3:

CUESTIONARIOS DE MATEMATICAS DE BUP (1975)

2. Las Bienaventuranzas descubren al hombre los valores de la verdadera felicidad.
3. Jesús, en obras y en palabras, manifestación de la plenitud de este espíritu.
4. Descripción y fundamentación de la fe cristiana como adoración, obediencia y alianza con Dios.
5. La oración cristiana como ejercicio radical de la fe.

Curso tercero

I. El hombre y su misterio.—Los jóvenes se preguntan ¿qué es el hombre? Todo hombre resulta problemático para sí mismo: Grandeza y limitación (Vaticano II, Constitución Pastoral «Gaudium et Spes», números 12, 13, 21, 24). El hombre se pregunta por el origen de la materia, del mundo, de la vida. Por el sentido del mal, del dolor, del sufrimiento en el mundo.

1. Respuestas no cristianas:

Búsqueda universal del sentido de la existencia, desde una perspectiva religiosa o laica:

— El hecho religioso. Principales religiones: Hinduismo-Budismo-Religiones mistéricas-Islamismo-Judaísmo.
— Algunos intentos de respuesta del pensamiento actual: Marxismo-Existencialismo-Liberalismo materialista-Nuevo positivismo.

II. Respuesta de Israel, Pueblo Escogido de Dios.

El pueblo de Israel depositario y conservador de la revelación de un Dios Salvador y Creador:

— La historia de Abraham, «padre de los creyentes» (Génesis, Cap. 12 a 15).
— Vocación de Moisés a la Primera Alianza (Exodo, Cap. 1 a 24).
— Un mensaje siempre actual: Amós y los demás Profetas del siglo VIII.
— Respuesta al problema del Mal (Libro de Job).

III. Respuesta de la Iglesia. Nuevo Pueblo de Dios.

El misterio del hombre sólo se esclarece en el misterio del Verbo Encarnado (Vaticano II, «Gaudium et Spes», números 10, 22, 45).

— El Misterio de Cristo, principalmente en las Cartas de la Cautividad de San Pablo.
— Jesucristo, Salvador de todo hombre y de todo el hombre (Vaticano II, «Gaudium et Spes», números 22, 38).
— Revelación de Dios en Jesucristo, como Padre, Trinidad, Providencia, Fuente de Gracia, Alianza.
— La Iglesia y la existencia cristiana; en esta perspectiva como signo de salvación y como existencia justificada mediante la Fe y los Sacramentos.
— Funciones y responsabilidades del cristiano en el mundo —religiosas, misioneras, temporales— en favor de los demás hombres.
— La Segunda Venida del Señor y la plenitud de la humanidad.
Escatología. El misterio de la Reprobación.

— El cristiano vive en la esperanza (Vaticano II, «Gaudium et Spes», números 38, 39; «Ad Gentes», número 9).
— La muerte del cristiano modelada por la muerte de Cristo (Carta a los hebreos).
— La Unción de los Enfermos.

— Los nuevos Cielos y la Nueva Tierra. El anuncio de la Nueva Jerusalén en el libro del Apocalipsis (capítulos 21-22).

— La plenitud definitiva en el Cristo Total.

Se tendrán en cuenta las siguientes orientaciones metodológicas:

Método inductivo:

Presentación de los hechos (acontecimientos bíblicos, actos litúrgicos, hechos de la vida de la Iglesia y de la vida cotidiana), examinándolos atentamente a fin de descubrir en ellos la significación que pueden tener en el misterio cristiano («Directorium Catechisticum Generale» número 72).

Pedagogía activa y personalizante:

Orientada a favorecer una respuesta activa, especialmente interiorizada.

Trabajos en grupo:

El grupo, que para los adolescentes y jóvenes es como una necesidad vital, puede ofrecer a sus miembros no solamente ocasión de formación religiosa, sino también una magnífica experiencia de vida eclesial (Cfr. «Directorium Catechisticum Generale» número 76).

Actitud del educador:

Ayudará a descubrir en la existencia humana de los adolescentes y jóvenes y, en referencia a la palabra de Dios y con miras al compromiso en la fe, la acción del Espíritu de Cristo, que salva, libera y renueva.

Tendrá en cuenta, ante todo, la búsqueda de Dios, y no sólo la mera transmisión de contenidos doctrinales. Se trata de una transmisión del mensaje cristiano que da sentido a la totalidad de la experiencia humana. Por eso, no puede quedarse tampoco en una mera dimensión humanística.

Exigencias intelectuales:

El adolescente posee, de suyo, el uso «formal» del razonamiento. Aprende a servirse de su inteligencia y descubre que la cultura que se le propone pide de él una reflexión y una aplicación a la vida.

Para consolidar su modo religioso de pensar, la educación en la fe ha de basarse en un gran rigor científico y ha de demostrar, también, con todo cuidado los fundamentos racionales de la fe. (Cfr. «Directorium Catechisticum Generale», número 88.) Métodos concretos de trabajo:

En cuanto al desarrollo concreto, son diversos los métodos que se pueden emplear, pero todos deben fundarse en la actitud descrita más arriba. En último término corresponde al educador, en el respeto a las condiciones concretas del Centro, crear con su grupo el método de trabajo que más le conviene, combinando los elementos que entre los posibles se sugieren a continuación: Exposición del educador —intercambio en grupo—, trabajos personales.

5. AREA DE LAS CIENCIAS MATEMATICAS Y DE LA NATURALEZA

El área de las ciencias matemáticas y de la naturaleza tratará de capacitar al alumno para comprender los fenómenos naturales, científicos y técnicos de su entorno. Se resaltará la importancia del mecanismo lógico implícito en el razonamiento científico habituando al alumno a los métodos deductivo e inductivo y a la experimentación.

5.1. Matemáticas

Curso primero

— Combinatoria. Probabilidad.
— Introduccion al número real. Aproximación decimal. Radicales.
— ariable estadística. Medidas de posición central y dispersión.
— Cuerpo de los números complejos.
— Anillo de polinomios. Binomio de Newton.
— Divisibilidad de polinomios. Divisibilidad. Cuerpo de fracciones.
— Funciones polinómicas de variable real. Representación gráfica.
— Resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas.
— Sucesiones. Progresiones. Interés compuesto y anualidades.

Partiendo de los conceptos de anillo y cuerpo introducidos en la segunda etapa de Educación General Básica, se pretende:

Conseguir un perfeccionamiento de los automatismos del cálculo;

Adiestrar al alumno en la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas;

Introducir la teoría combinatoria y noción de probabilidad para el caso de un universo finito;

Continuar el tratamiento estadístico de los colectivos, iniciado en la Educación General Básica;

Proporcionar al alumno como aplicación práctica nociones de aritmética comercial.

En la combinatoria se estudiarán las variaciones y permutaciones ordinarias y con repetición y las combinaciones.

Parece más conveniente limitarse a introducir de una manera intuitiva el concepto de número real; es importante cultivar en el alumno el sentido de la proximación.

Debe introducirse : concepto de potencia, de exponente fraccionario y del cálculo con radicales, dedicando especial atención a los cuadráticos.

Se introduce el número complejo por pares de números reales, llegando a su estructura como cuerpo.

Se completa el estudio de los polinomios en una indeterminada hasta llegar a poner de manifiesto su estructura de anillo euclídeo; el estudio de la divisibilidad de polinomios se podrá hacer simultáneamente con el de la divisibilidad en Z.

Las sucesiones podrán introducirse como aplicaciones de N en R, de las cuales se estudian las progresiones y su utilización en aritmética comercial. Para la resolución de estos ejercicios pueden utilizarse tablas financieras y máquinas de calcular.

Segundo curso

— Límite de sucesiones. El número «e». Cálculo de límites.
— Función real de variable real. Límite. Continuidad.
— Funciones exponencial y logarítmica. Representación gráfica y propiedades.
— Funciones circulares. Representación gráfica y propiedades.
— Concepto de derivada. Función derivada. Primitivas de una función.
— Vectores en el plano y en el espacio. Estructura de espacio vectorial.
— El plano afín. Introducción del espacio afín. Geometría afín plana.

Este segundo curso es de iniciación al análisis y la Geometría. Con este fin se estudian:

Los conceptos básicos de continuidad y límite;
Las funciones no algebraicas;
Las nociones de derivada y función primitiva;
La estructura fundamental de espacio vectorial y la de espacio afín, en el caso de dos y tres dimensiones.

El concepto de límite convendrá introducirlo en su forma métrica; el cálculo de límites debe reducirse a casos sencillos.

Las funciones circulares se definirán como razones, completando su estudio en el curso siguiente.

En el estudio de las funciones exponencial y logarítmica se darán sus propiedades fundamentales.

El estudio de la derivada y de las funciones primitivas se limitará a sus conceptos, interpretaciones y algunos ejemplos sencillos, fundamentalmente el concepto de tangente.

Los vectores libres se introducen como clases de equivalencia del conjunto de vectores fijos respecto de la relación de equipolencia, estableciéndose su estructura de espacio vectorial y los conceptos de combinación lineal, base y dimensión para su posterior utilización en el estudio del plano afín y del espacio afín de tres dimensiones.

En el plano afín se estudiarán sus sistemas específicos de referencia, cambios de los mismos y los problemas de incidencia y paralelismo.

Tercer curso

— Producto escalar. El plano euclídeo. El plano métrico. Trigonometría plana.
— Estudio del número complejo en forma polar. Operaciones.
— Geometría métrica plana. Cónicas.
— Cálculo diferencial. Aplicaciones.
— Cálculo integral. Aplicaciones.
— Variable aleatoria. Distribuciones binomial y normal.
— Distribuciones bidimensionales. Rectas de regresión. Correlación.

En este curso se completa la Geometría y se profundizan las nociones de Análisis y de Estadística. Con este fin se propone:

Estudiar el producto escalar para establecer la métrica euclídea y la trigonometría plana;

Considerar el número complejo en forma polar;

Estudiar los problemas métricos del plano y las cónicas como lugares geométricos;

Adquirir destreza en la aplicación de las reglas del cálculo diferencial;

Conseguir un conocimiento suficiente de la significación de la derivada y función primitiva en los fenómenos naturales;

Adquirir el concepto de variable aleatoria que permita la utilización de las funciones de distribución en su aplicación a las ciencias biológicas, físicas y sociales.

Después de introducir formalmente el producto escalar se sugiere este desarrollo: Base ortonormal, relación entre norma y producto escalar, componentes de un vector con relación a una base ortonormal.

Desarrollo formal de la Trigonometría, teoremas de adición, relaciones en los triángulos y resolución de los mismos mediante el único uso de tablas naturales.

En la Geometría métrica del plano se estudiarán los cambios de ejes coordenados, problemas de ángulos, distancias, así como la circunferencia y las ecuaciones reducidas de las cónicas.

Como aplicación de cálculo diferencial se hará el estudio local de las funciones. Podría completarse este estudio con algunos teoremas relativos a las funciones continuas y derivables.

Se aprovechará el estudio anterior para llegar a la representación gráfica de funciones algebraicas y trascendentes elementales.

El cálculo de funciones primitivas se hará para integrales inmediatas y algunos ejemplos sencillos por los métodos de descomposición y partes. Podría introducirse el concepto de integral definida para funciones escalonadas o funciones monótonas. Además de las aplicaciones geométricas del cálculo integral se podrían plantear problemas de aplicación física o técnica.

Se definirá, mediante ejemplos sencillos, el concepto de función de distribución, valor medio y varianza de la misma. Se introducirá el concepto de variable aleatoria continua. Estos conceptos se aplicarán a las distribuciones binomial y normal, respectivamente, debiendo utilizarse las tablas correspondientes en la resolución de ejercicios de aplicación.

Las distribuciones estadísticas bidimensionales se limitarán al caso de variables discretas.

5.2. Ciencias Naturales

Curso primero

1. Estructura y composición de la Tierra.
2. La materia mineral: estructura y propiedades.
3. Los procesos geológicos externos. Las rocas y los minerales sedimentarios.
4. Los procesos geológicos internos. Las rocas y los minerales endógenos.
5. Geología aplicada.
6. El suelo como asiento de la vida.
7. La Biosfera. Diversidad de los seres vivos: su clasificación.
8. Adaptación de los seres vivos: la vida en el agua y en la tierra. Biogeografía.
9. Individuos y comunidades. Especie y ecosistema.
10. Energía y ciclos biogeoquímicos.
11. La célula como unidad de vida.
12. Morfología y fisiología animal y humana.
13. Morfología y fisiología vegetal.
14. El mundo de los microbios. Inmunología.
15. La herencia biológica. Genética humana.
16. La historia de la vida: Paleontología.
17. La evolución. El origen del hombre.

La enseñanza de las Ciencias Naturales en el Bachillerato ha de tratar de proporcionar a los alumnos la formación y la información necesarias frente a los problemas que diariamente les surgen ante la Naturaleza.

Por consiguiente los objetivos que se pretenden en los dos cursos, pueden resumirse en los siguientes:

— Formación científica, capacidad de análisis, objetividad.
— Conocimiento de la Tierra. Su constitución y dinámica actual.
— Estudio del origen, desarrollo y evolución de los seres vivos que sobre la Tierra han existido y viven en la actualidad.
— Contribuir a despertar en los alumnos una conciencia de responsabilidad y respeto por la Naturaleza y, en consecuencia, por la comunidad humana.
— Adquisición de determinadas técnicas de experimentación y trabajo.
— Conocimientos específicos que permitirán su acceso con la debida preparación a los estudios superiores.

El estudio de esta materia sólo puede basarse en la aplicación rigurosa de los métodos científicos de observación y experimentación, tratando de lograr que el alumno llegue a deducir sus propias conclusiones.

Al ser optativo el segundo curso de Ciencias Naturales, este primer curso es la única oportunidad que tendrán muchos alumnos, dentro del Bachillerato, para estudiar esta materia. Por ello, en primer curso, se ha procurado seleccionar los contenidos de manera que proporcionen el nivel indispensable para conseguir los conocimientos científicos básicos imprescindibles para una formación integral.

Los seres vivos deben resolver el mismo tipo de problema común: utilización de la energía en la forma más rentable y con el mínimo desgaste posible, pero cada uno o cada grupo lo consigue de forma peculiar. El temario da preferencia al

Documento nº 4:

CUESTIONARIOS DE MATEMATICAS DE COU (1978)

instrumento de adquisición de hábitos intelectuales para el desarrollo de la personalidad del alumno.

El orden en que aparecen propuestas las materias en el temario no es preceptivo para su enseñanza. Así, conviene que el repaso y aprendizaje del vocabulario básico vayan repartidos a lo largo de las distintas lecciones.

De elegirse entre las lecturas textos no clásicos, sería conveniente que fuesen tales que su traducción no comporte dificultades a los alumnos que no posean conocimientos particulares de latín vulgar, medieval o renacentista, ni obliguen a usar diccionarios especializados.

De no haberse aprendido en cursos anteriores, deberá enseñarse en éste el manejo racional de un diccionario común.

2.4. GRIEGO

El contenido fundamental del curso es el estudio del tema «Grecia y su proyección en el mundo actual», a través de la lectura e interpretación de textos griegos.

Para su desarrollo se traducirán directamente textos, elegidos en función del tema general, de los siguientes autores:

Homero, Sófocles, Eurípides, Tucídides, Platón y Demóstenes.

Y además, eventualmente, se acudirá a la lectura complementaria de textos no sólo de estos mismos autores, sino también de:

Hesíodo, líricos griegos, filósofos presocráticos, Esquilo, Heródoto, Hipócrates, Aristófanes, Isócrates, Aristóteles y filosofía helenística.

Estas lecturas complementarias podrán hacerse con ayuda de textos bilingües, o bien, si fuera necesario, con la autorización de traducciones fidedignas.

Los aspectos que requieren una especial atención con referencia al tema general, con el fin primordial de relacionar la lengua y civilización griegas con el mundo de hoy y destacar su importancia como base de cualquier concepción humanística de la cultura son, entre otros, los siguientes:

— Forma y contenido de los géneros literarios griegos.
— Las fuentes escritas de la cultura griega y su transmisión hasta nosotros.
— La concepción griega del hombre.
— La evolución del pensamiento religioso griego.
— Individuo, sociedad y política en Grecia.
— Cuestiones fundamentales de la filosofía griega.
— El teatro griego.
— La ciencia griega.
— La lengua griega y el lenguaje científico de hoy.

El mundo actual es el resultado de la acumulación de una serie de experiencias del pasado que en cada momento debemos tener en cuenta y tomar como base.

Medio fundamental para conocer esas experiencias son, sobre todo, los textos, literarios o no, de cada cultura: sólo éstos, en su forma original, aseguran un contacto auténtico y directo con esa tradición.

En el caso de la cultura occidental, nuestras fuentes las hallamos evidentemente en Grecia; resulta, pues, imprescindible conocer a los autores griegos en su propia lengua. Cualquiera otra vía de acceso al mundo helénico sería a lo más una aproximación siempre imperfecta y que no respondería, desde luego, a la finalidad de este Curso de Orientación Universitaria.

El hecho de que este Curso se encamine fundamentalmente a la interpretación de los autores en función del lema «Grecia y su proyección en el mundo actual», no excluye, naturalmente, el que cada Profesor, según el grado de comprensión de la lengua griega que inicialmente demuestren sus alumnos, amplíe o insista en los conocimientos gramaticales y léxicos que en cada caso estime necesarios.

El seminario didáctico procederá a la ordenación a lo largo del curso tanto de las explicaciones teóricas como de la lectura de los textos.

Puesto que no es probable que en un curso puedan traducirse directamente más allá de 1.500 líneas, los trozos seleccionados, aun siendo forzosamente breves, habrán de proporcionar una visión suficientemente amplia de los diversos autores.

La dificultad que puedan presentar ciertos pasajes de algunos autores habrá de ser solventada mediante aclaraciones, todo lo amplias que sea preciso.

2.5. HISTORIA DEL ARTE

I

1. Teoría y función del arte.
2. Aportaciones artísticas de las civilizaciones mediterráneas antiguas.
3. El arte clásico: Grecia y Roma.
4. El arte prerrománico y la formación de Europa: Evolución estilística hasta el siglo X. La peculiaridad española.
5. Aportaciones del arte bizantino. El arte islámico en España.
6. El Románico: Evolución estilística, con especial atención a las escuelas españolas y su relación con las circunstancias históricas.
7. El Gótico: Evolución estilística, con especial atención a las escuelas españolas y su relación con las circunstancias históricas. El Mudéjar. La música medieval.

II

8. El Renacimiento italiano y su difusión por Europa.
9. El Renacimiento español en los dos primeros tercios del siglo XVI.
10. Formas artísticas españolas en el último tercio del siglo XVI. La música española del Renacimiento.
11. Principales escuelas del Barroco europeo.
12. El Barroco español: Arquitectura y escultura.
13. El Barroco español: Pintura.
14. Del Rococó al Neoclásico. Goya. La música en los siglos XVII y XVIII.

III

15. La arquitectura en el siglo XIX y sus relaciones con la revolución industrial.
16. Evolución de las artes figurativas hasta el impresionismo.
17. Evolución de las artes figurativas del impresionismo a la primera Guerra Mundial. La aportación española.
18. Evolución de las artes figurativas desde la primera Guerra Mundial hasta nuestros días, con especial atención a los artistas españoles.
19. La arquitectura del siglo XX. Los problemas y el desarrollo del urbanismo contemporáneo. La conservación del patrimonio artístico.
20. La música en los siglos XIX y XX.
21. El cine, arte y documento de nuestro tiempo.

El objetivo de este curso es ofrecer al alumno una visión de conjunto de las diversas manifestaciones artísticas, integrando todas las artes —incluidas las artes aplicadas y populares—, dedicando especial atención a las obras de arte existentes en el distrito universitario donde esté ubicado el Centro. Por ello, ha de ser complemento necesario —además de las diapositivas en clase que son imprescindibles— la visita frecuente a los museos y monumentos de la localidad, de la región y, en cuanto sea posible de las poblaciones cercanas. También debe fomentarse la asistencia a conciertos y la audición de música en los Centros.

Conviene insistir en el carácter universal y peculiar de cada obra de arte, en relación con el acontecer histórico, tanto general como local. Evitando la simple enumeración de obras y artistas, se debe orientar la enseñanza hacia el análisis comprensivo de la obra de arte como testimonio de un pensamiento, de una cultura y de un momento histórico que se nos manifiesta a través de la belleza de las formas.

La programación está distribuida en tres conjuntos, correspondientes a los trimestres del curso escolar. En cada trimestre se ha de desarrollar el conjunto de temas correspondientes con el objeto de que el retraso involuntario no repercuta en el trimestre siguiente, para no perjudicar el estudio de los últimos temas.

2.6. MATEMATICAS

1. Sistemas de ecuaciones lineales. Discusión (seis semanas)

El objetivo de este tema es capacitar al alumno para discutir y resolver, en su caso, sistemas de ecuaciones de primer grado de igual o diferente número de ecuaciones que de incógnitas.

En la práctica podrá limitarse a un número de ecuaciones no superior a cuatro y hasta cinco incógnitas. Al propio tiempo el alumno se ejercitará en problemas de eliminación de parámetros.

2. Espacios afín y euclídeo tridimensionales (ocho semanas)

El estudio del espacio afín tridimensional debe proporcionar una imagen geométrica de aplicación de los conocimientos del tema anterior. El alumno deberá resolver, sin vacilación, problemas de incidencia, intersección y paralelismo en este espacio.

En el espacio euclídeo se llegará a resolver bien problemas de perpendicularidad, ángulos, distancias, áreas de polígonos y volúmenes de poliedros.

Se considerarán igualmente los movimientos y semejanzas en dicho espacio, las coordenadas cilíndricas y polares y el estudio de curvas y superficies sencillas.

3. Ampliación del cálculo diferencial e integral (nueve semanas)

El alumno debe adquirir claramente el concepto de aproximación local de una función mediante polinomios y su aplicación a las funciones elementales. Deberá, también, afianzarse en el estudio y representación de curvas dadas en forma explícita y en aplicar el cálculo diferencial a la práctica de la separación y aproximación de raíces reales de ecuaciones y estudiar algunos métodos de interpolación.

Por otro lado, el alumno deberá alcanzar una idea precisa del concepto de área de un recinto plano y una cierta soltura en el cálculo de áreas y volúmenes sencillos, como aplicación del

cálculo integral. Asimismo se deberán considerar algunos métodos de integración numérica.

4. Ampliación del cálculo de probabilidades (cuatro semanas)

El alumno deberá profundizar las nociones de probabilidad, estableciendo una axiomática de esta teoría, en conexión con el álgebra de sucesos, llegando a obtener la noción de espacio de probabilidad. Conviene llegar hasta el teorema de Bayes, como primer ejemplo de inferencia estadística. Todo el tema deberá dar ocasión para proponer ejercicios, tanto de motivación como de aplicación de este modelo matemático, en relación con otras disciplinas y con la vida social.

El carácter del Curso de Orientación Universitaria aconseja que, por un lado, sirva de síntesis y ordenación de los conocimientos de los cursos anteriores y, por otro, de preparación para el acceso a la enseñanza superior.

Las diferentes especialidades a las que puede acceder el alumno de C.O.U. (piénsese en los estudios de Matemáticas, Ciencias experimentales e Ingeniería), aconseja que la enseñanza de este curso sea adecuada a esta diversidad de fines. Por ello, se estima que se debe partir, tanto como sea posible, de situaciones experimentales.

Con carácter indicativo se han expresado las semanas que parece conveniente dedicar al estudio de los temas respectivos.

2.7. FISICA

I. Dinámica de los sistemas de puntos materiales

Es conveniente en este tema hacer, a priori, una revisión de la dinámica del punto material y de las fuerzas de la inercia y de rozamiento. En cuanto a la dinámica de los sistemas, debe extenderse hasta incluir los teoremas de la cantidad de movimiento, del centro de masas y del momento cinético, destacando las leyes de conservación.

Prácticas: Medida de la constante elástica de un resorte y i aplicación a la medida de densidades.

II. Trabajo, energía. Campos escalares y vectoriales

Tras la definición de campos escalares, con ejemplos como el de densidades de un sólido no homogéneo y el de temperaturas, debe abordarse el estudio de los campos vectoriales introduciendo los conceptos de energía potencial y de potencial de los campos conservativos. Finalmente desarróllese el teorema de la energía de un sistema de partículas y el concepto de gradiente de un campo escalar.

Prácticas: Estudio de isolíneas. Estudio de líneas equipotenciales.

III. Dinámica de la rotación del sólido

En este tema se debe abordar el concepto de momento de inercia y su cálculo en casos sencillos, el teorema de Steiner y las expresiones de trabajo, momento cinético y energía de rotación.

Prácticas: Determinación de momentos de inercia. Oscilaciones por torsión.

IV. Campos gravitatorio y eléctrico

En el estudio simultáneo de ambos se deben incluir las expresiones de la energía potencial y del potencial. Deben resaltarse las analogías y diferencias entre ambos campos.

Prácticas: Algún método de determinación de la aceleración de la gravedad. Estudio del péndulo de longitud variable.

V. Movimiento ondulatorio

Este tema debe explicarse con generalidad para poder comprender cualquier tipo de ondas. Estúdiense elementalmente los fenómenos de interferencias, diafracción, polarización y absorción. Deben citarse diversos tipos de ondas.

Prácticas: Experiencias de la cubeta de ondas. Experiencias on cuerdas y resortes.

VI. Corrientes alternas

Como introducción hágase una revisión de la inducción electromagnética. Debe desarrollarse la expresión general de la ley de Ohm y utilizar diagramas vectoriales, dando especial énfasis al significado físico de los valores eficaces y la diferencia de fase.

Prácticas: Estudio de circuitos con autoinducciones y condensadores. Puentes en corriente alterna.

VII. Electrónica. Ondas electromagnéticas

En electrónica debe tenderse a la realización práctica de montajes sencillos con elementos semiconductores con preferencia a una rigurosa interpretación de su funcionamiento; inclúyaso también el fundamento de las calculadoras. Sólo debe desarrollarse una teoría elemental de las oscilaciones de alta frecuencia y de las ondas electromagnéticas, así como citar sus principales aplicaciones.

Prácticas: Montajes de circuitos electrónicos usando módulos de elementos semiconductores. Estudio de las características de un elemento no lineal.

VIII. Naturaleza de la luz. Dualidad onda-corpúsculo

La naturaleza de la luz debe presentarse como una revisión histórica de sus principales interpretaciones. Introdúzcase intuitivamente la relación de De Broglie para partículas y resáltese la importancia de la dualidad onda-corpúsculo como punto de partida de la física cuántica. Deben incluirse en el tema los efectos fotoeléctricos y Compton.

Prácticas: Manejo y características de células fotoeléctricas.

IX. Física nuclear de baja y alta energía. Energía nuclear

Debe tenderse sólo a una sencilla descriptiva de los principales procesos de baja y alta energía, incluyendo una revisión de la radiactividad y las aplicaciones de los radioisótopos. Estúdiese también elementalmente los dispositivos actuales de producción de energía por fisión y fusión.

Prácticas: Determinación de las características de un Geiger. Determinación del coeficiente de absorción del plomo para radiación gamma monoenergética.

El contenido de la Física del COU, puente entre los dos cursos de Bachillerato y el primero de los estudios universitarios de esta disciplina, debe ser presentado ante el alumno con el método teórico experimental propio de esta ciencia. Por tanto, cada tema que haya de ser desarrollado durante este curso debe constituir una unidad temática en la que se incluyan los diversos aspectos de teoría, problemas, cuestiones y técnicas experimentales.

En los temas que se proponen, se indica expresamente la extensión límite de su contenido y se aconseja la realización de prácticas de laboratorio, tales como las que se sugieren u otras análogas. Estos temas han sido elegidos de entre aquellos que no han sido tratados o han sido insuficientemente desarrollados en los cursos anteriores.

El cálculo vectorial deberá desarrollarse a medida que en el transcurso de los temas se vayan necesitando sus diversas operaciones. Igualmente deberá prepararse al alumno para que todas las medidas realizadas en las diversas prácticas sean llevadas a cabo utilizando cálculo de errores.

Se seguirá utilizando, de manera preferente, el Sistema Internacional de Unidades.

2.8. QUIMICA

1. La transformación química. Leyes ponderables. Teoría de Dalton. Ley de Gay-Lussac. Hipótesis de Avogadro.
2. Estructura extranuclear del átomo. Evolución histórica.
3. El enlace químico: Iónico, covalente, metálico. Fuerzas intermoleculares. Relación entre el tipo de enlace y las propiedades de las sustancias.
4. Energía de las reacciones químicas. Entalpías de reacción y de formación. Espontaneidad de las reacciones químicas. Equilibrio químico.
5. Reacciones de transferencia de protones.
6. Reacciones de transferencia de electrones. Potenciales normales. Aplicaciones.
7. Reacciones de precipitación. Iniciación al estudio de las reacciones por formación de complejos.
8. Estudio de las sustancias hidrógeno, nitrógeno, amoníaco, ácido nítrico y sus principales reacciones, basando tal estudio en los conceptos teóricos tratados.
9. Estudio de las sustancias oxígeno, azufre, dióxido de azufre, ácido sulfúrico y de sus principales reacciones, basando tal estudio en los conceptos teóricos tratados.
10. Hidrocarburos alifáticos y aromáticos. Estructura y propiedades.
11. Estructura y propiedades de alcoholes, fenoles, aldehídos, cetonas, ácidos y ésteres.
12. Estructura y propiedades de nitrocompuestos, aminas, amidas y nitrilos.

El objetivo fundamental de este temario es que el alumno adquiera conceptos claros, sepa relacionarlos y alcance soltura en su manejo, aun cuando ello obligue a prescindir, en algún caso, de una ampliación de los conocimientos adquiridos en cursos anteriores.

Se considera más positivo impartir todos los temas a un nivel acorde con el tiempo disponible, que el estudio más profundo de una parte de los mismos.

Por ser la Química una ciencia experimental, es indispensable que se realicen una serie de prácticas de laboratorio que pongan de relieve los aspectos teóricos del temario. Los experimentos deberían estar programados y entroncados con la teoría que se explique. Deberán dedicarse a la realización de estas prácticas no menos de diez sesiones de laboratorio.

Teniendo en cuenta la absoluta necesidad de que el alumno deba dominar el lenguaje químico con la máxima soltura posible, se dedicará al estudio y utilización de la nomenclatura y formulación química una atención preferente, tendiendo al empleo de las normas IUPAC.

Se recomienda, asimismo, la utilización del sistema periódico como instrumento de trabajo esencial para el adecuado desarrollo del temario y el uso de las unidades del Sistema Internacional.

Documento n^0 5:

CUESTIONARIOS DE MATEMATICAS DE COU (1988)

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA

:66 *RESOLUCION de 20 de enero de 1988, de la Secretaría General de Educación, por la que se establecen las normas a que ha de ajustarse el proyecto Fin de Carrera, en las Escuelas de Artes Aplicadas y Oficios Artísticos.*

El Real Decreto 799/1984, de 28 de marzo, estableció la ibilidad de autorizar por Orden, aquellas innovaciones y eriencias pedagógicas, que tendiesen al perfeccionamiento de las eñanzas artísticas.

Mediante sucesivas Ordenes, se implantaron planes experimen- :s en diversas especialidades, como es el caso de Diseño lustrial (Orden de 13 de junio de 1984, «Boletín Oficial del ado» del 19); Cerámica (Orden de 10 de julio de 1984, «Boletín icial del Estado» del 16); Técnicas de Volumen, Orfebrería, abado y Técnicas de Estampación, Conservación del Docu- nto Gráfico, Técnicas y Procedimientos Murales (Orden de 5 de io de 1985, «Boletín Oficial del Estado» de 19 de julio); Diseño áfico, Diseño de Interiores, Diseño Textil y Moda (Orden de 30) de 1986, «Boletín Oficial del Estado» de 9 de agosto), tc ándose en ellas a la Secretaría General de Educación para :tar las Resoluciones necesarias para su desarrollo y aplicación.

En dichas Ordenes se establece que, la obtención del título rrespondiente, exigirá la realización de un proyecto fin de rrera, que ha venido a sustituir al examen de reválida con que idicionalmente culminaban estos estudios. La presente Resolu- ón tiene como objeto establecer las normas para la ejecución del ferido proyecto de fin de carrera,

En su virtud, esta Secretaría General de Educación ha dispuesto:

Primero.–Para tener derecho a la expedición del título de raduado en Artes Aplicadas en alguna de las especialidades nplantadas con carácter experimental en las Escuelas de Artes plicadas y Oficios Artísticos será necesario superar un proyecto n de carrera, cuyo objetivo será demostrar que el alumno se icuentra en condiciones de realizar un trabajo inscrito en los impos de actuación habituales de un diseñador o profesional de especialidad correspondiente.

Segundo.–El proyecto fin de carrera consistirá en el diseño de bjetos o espacios físicos, documentado con suficiente información nemoria, planos, modelos y prototipos si fuese necesario), no udiendo versar sobre temas exclusivamente teóricos cuya finali- ad última no sea la realización material de lo proyectado.

Tercero.–El ejercicio objeto del proyecto podrá ser propuesto, egún se establece en el apartado quinto, por el alumno o por el entro docente.

Cuarto.–La definición del ejercicio podrá ser la misma para a alumnos, si bien, las propuestas definitivas serán siempre idividuales, pudiendo únicamente ser colectiva la información.

Quinto.–La realización y evaluación del proyecto fin de carrera e ajustará a las siguientes normas:

1. El equipo de Profesores que imparten la especialidad orrespondiente propondrá, al iniciar cada curso académico, un Tribunal que, constituido por cuatro Vocales y presidido por el Director del Centro o persona que éste designe, será el encargado le coordinar y evaluar los proyectos fin de carrera.

2. Dicho Tribunal será el competente para aceptar las pro- puestas de proyecto fin de carrera por parte de los alumnos, así omo para proponerles determinados proyectos que, en todo caso, leberán ser aceptados voluntariamente por éstos. Las referidas propuestas deberán formularse en el mes de octubre con anteriori- lad a la formalización de la matrícula.

3. El Tribunal determinará la viabilidad de las propuestas, en razón de su interés docente, de su factibilidad y de las ayudas de desarrollo que la propia Escuela pueda proporcionar.

4. Aceptado el proyecto y establecida la definición del ejerci- cio, el alumno elegirá un tutor entre los Profesores que constituyen el claustro, que dirigirá su trabajo y se encargará de establecer los contactos pertinentes con el Tribunal encargado de juzgar los proyectos fin de carrera.

5. Los proyectos fin de carrera se realizarán de acuerdo con el siguiente esquema general:

a) Información (documentación).
b) Proyecto (memoria, planos, costos, etc.).
c) Comunicación (representaciones y maquetas o prototipos).

6. El proyecto fin de carrera podrá desarrollarse en el propio Centro docente, en otra Escuela de Artes Aplicadas o en aquella institución, industria o empresa que, propuesta por la Comisión, facilite el acceso del alumno. Se podrán utilizar los talleres de las Escuelas de Artes Aplicadas y Oficios Artísticos en días y horas en los que no se interfiera la actividad docente diaria.

7. Cada uno de los miembros del Tribunal calificará el proyecto de cero a 10 puntos. La calificación definitiva será la puntuación media resultante, siendo necesario obtener cinco puntos para superar el ejercicio.

Sexto.–Los alumnos que hayan aprobado la totalidad de asignaturas que integran los correspondientes planes de estudio, formalizarán durante la última semana del mes de octubre, en la Secretaría del respectivo Centro, la inscripción para la realización de los proyectos fin de carrera, que deberán desarrollarse a lo largo del cuatrimestre noviembre-febrero y serán evaluados durante la primera semana del mes de marzo.

El Tribunal a que se refiere el apartado anterior podrá autorizar que el proyecto fin de carrera se realice a lo largo de todo el curso académico, cuando la índole y características del ejercicio así lo aconsejen. En este supuesto, la evaluación se efectuará durante el mes de junio.

Si el alumno no superara el proyecto fin de carrera, podrá proponer al Tribunal un nuevo desarrollo en el siguiente cuatrimestre o curso académico.

Séptimo.–Por la Dirección General de Centros Escolares se dictarán las instrucciones necesarias para aclarar cuantas dudas pueda suscitar el desarrollo y aplicación de la presente Resolución.

Madrid, 20 de enero de 1988.–P. D. (Orden de 23 de julio de 1985), el Secretario general de Educación, Alfredo Pérez Rubalcaba.

Ilma. Sra. Directora general de Centros Escolares.

2267 *RESOLUCION de 20 de enero de 1988, de las Direcciones Generales de Enseñanza Superior y de Renovación Pedagógica, por la que se aprueba el programa y orientaciones pedagógicas de las «Matemáticas II» del Curso de Orientación Universitaria.*

La Orden de 3 de septiembre de 1987 («Boletín Oficial del Estado» del día 14) ha modificado la estructura del plan de estudios del Curso de Orientación Universitaria que había sido fijada por las Ordenes de 22 de marzo de 1975 y de 11 de septiembre de 1976, distribuyendo en cuatro opciones las materias de las dos anteriormente existentes e incorporando a las opciones C y D las enseñanzas de «Matemáticas II», cuyo programa deberá responder a la naturaleza específica de estas opciones.

Dicha Orden, en la disposición tercera, encomienda a las Direcciones Generales de Enseñanza Superior y de Renovación Pedagógica el establecimiento de los contenidos y orientaciones pedagógicas de esta materia antes del comienzo del curso 1988.

A tal fin, y en virtud de las atribuciones que tienen conferidas, las Direcciones Generales de Enseñanza Superior y de Renovación Pedagógica han resuelto:

Primero.–Aprobar el programa y orientaciones pedagógicas de las enseñanzas de «Matemáticas II» del Curso de Orientación Universitaria, que figuran en el anexo de esta Orden.

Segundo.–Dicho programa, que tendrá vigencia a partir del año académico 1988-89, deberá impartirse en las opciones C y D del plan de estudios del Curso de Orientación Universitaria configurado en el punto uno de la disposición segunda de la citada Orden de 3 de septiembre de 1987.

Lo que se comunica a VV. II.

Madrid, 20 de enero de 1988.–El Director general de Enseñanza Superior, Francisco de Asís de Blas Aritio; el Director general de Renovación Pedagógica, Alvaro Marchesi Ullastres.

Ilmos. Sres. Subdirectores generales de Centros y Profesorado y de Ordenación Académica.

ANEXO

Opciones C y D

«MATEMÁTICAS II»

1. *Introducción*

La finalidad de este programa es proporcionar a los alumnos, de una manera eminentemente práctica, algunas herramientas senci-

llas del bagaje matemático que constituyen una ayuda muy eficaz para el trabajo en Ciencias Humanas y Sociales.

Se insistirá en el sentido y aplicaciones de los enunciados y no en la demostración y desarrollo matemático de los mismos.

Parece conveniente utilizar la Historia de las Matemáticas como fuente de problemas y situaciones motivadoras, así como, en algunos casos, para presentar al alumno una visión dinámica de los conceptos y del lenguaje matemático.

En aquellos casos en que sean necesarios cálculos muy laboriosos para dar un significado no trivial al ejercicio, se recomienda utilizar calculadoras de bolsillo o programas de ordenador.

El Profesor deberá tener presente que este programa está dirigido a alumnos que no necesariamente han cursado las Matemáticas del tercer curso de Bachillerato. El nivel de referencia será, por lo tanto, el de los dos primeros cursos, donde la asignatura es obligatoria.

2. *Contenidos y orientaciones pedagógicas*

2.1 Elementos de algebra lineal.

Sistemas lineales:

Planteamiento de problemas lineales.
Método de Gauss.
Interpretación de las soluciones.
Significado geométrico de los sistemas lineales.

Cálculo matricial:

Matrices.
Determinantes.

Programación lineal:

Iniciación a la programación lineal.
Planteamiento de problemas sencillos de programación lineal. Resolución por métodos gráficos.

Se debe aprovechar el conocimiento que tienen los alumnos de las técnicas de resolución de sistemas sencillos, para aplicarlas a casos más complejos, previa reflexión sobre cuál es la más conveniente para el problema concreto.

Esto puede ser el punto de partida para el manejo del método de Gauss como procedimiento general de resolución de sistemas lineales. En la práctica, dichos sistemas serán de cuatro incógnitas como máximo.

Debe insistirse en problemas de planteamiento sacados de diversos ámbitos y, en particular, de las áreas de mayor interés para los alumnos, procurando que los distintos tipos de sistemas que pueden plantearse (determinados, indeterminados e incompatibles), adquieran todo su significado al ser interpretados en un contexto.

El planteamiento o interpretación de sistemas sencillos en términos geométricos (posiciones de rectas y planos en el espacio) no debe dar lugar a un estudio especial de la Geometría Analítica. Si es necesrio, el enunciado de los problemas de este tipo puede incluir una breve explicación de los términos novedosos.

El alumno debe familiarizarse con la lectura y descripción de matrices utilizando el vocabulario adecuado: fila, elemento, diagonal, matriz triangular. Puede confeccionar matrices asociadas a diferentes contextos: matriz de un grafo, matriz como tabla de doble entrada, de un polígono, etc.

Las técnicas operatorias entre matrices opueden justificarse sobre la base del significado que adquieren en los contextos anteriores. Un ejemplo especialmente relevante es el de las matrices asociadas a transformaciones geométricas planas, que operan a través del producto.

El estudio de los determinantes ha de reducirse a los de segundo y tercer orden, encaminado al cálculo de la inversa de una matriz cuadrada.

El Profesor debe valorar los conocimientos de sus alumnos en aquellos conceptos previos necesarios al estudio de la programación lineal, como el planteamiento y la resolución gráfica de inecuaciones con una o dos incógnitas, y proceder, si es necesario, a un repaso de los mismos.

La justificación de dónde se encuentran las soluciones de un problema de programación lineal puede logarse con ejemplos concretos y apoyándose en el significado geométrico de la función «objetivo».

Tiempo estimado: Ocho semanas.

2.2 Análisis descriptivo de funciones y gráficas.

Funciones y gráficas:

Significado práctico de las funciones como descripción de fenómenos. Ejemplo de funciones más sencillas y su representación.
Interpretación de gráficas.
Idea intuitiva de continuidad.

La derivada:

Derivadas. Significados de la derivada.
Manejo práctico de las reglas de derivación en casos sencillos.
Aplicaciones al estudio de la variación de una función y a su representación gráfica.
Problemas de máximos y mínimos.

Interpolación:

Idea y significado de la interpolación polinómica.
Interpolación lineal y cuadrática.

La integral:

La integral. Integrales inmediatas.
La integral definida. Significado geométrico: Area bajo una curva. Aplicaciones al cálculo de áreas.

Para describir una gráfica se deben manejar con corrección términos como crecimiento, mínimo, discontinuidad, asíntota, concavidad. No es imprescindible formalizar el concepto de límite ni utilizar una notación rigurosa para definir el vocabulario básico.

Para representar una función el alumno utilizará todos los recursos a su alcance: cálculo de puntos, relación con otras funciones conocidas, uso de la calculadora para determinar la tendencia, reflexión sobre la fórmula de la función, etc. Cuando sea necesario para el propósito del problema, puede acudirse a la función derivada y determinar con exactitud los extremos de la gráfica.

El alumno debe asociar ciertas formas de gráficas con la fórmula correspondiente. En particular es interesante identificar comportamientos lineales, exponenciales y periódicos.

Se procurará representar sobre un mismo sistema coordenado una familia de funciones, con el fin de que el alumno valore la incidencia que tienen en la forma de la gráfica los parámetros que intervienen en la expresión matemática de la misma.

Aunque los alumnos han estudiado en el segundo curso del Bachillerato el concepto y cálculo de derivadas, parece conveniente revisar la noción de derivada de una función en un punto a partir de la tasa de variación media y usando la calculadora. Para ello no es imprescindible la formalización del concepto de límite ni el cálculo sistemático de límites. El manejo práctico de derivadas puede llegar hasta la regla de la cadena en casos sencillos.

La técnica más elemental de interpolación, la mera sustitución de valores en la fórmula general del polinomio, establece un puente entre esta parte del programa y la de álgebra. En cada caso concreto, y en problemas que respondan a datos de la vida real, se podrá enjuiciar el valor práctico de la interpolación y extrapolación que proporciona la función hallada.

Excede el propósito de este curso demostrar la relación entre función primitiva e integral definida. Basta con que el alumno maneje la regla de Barrow para el cálculo de áreas.

Tiempo estimado: Nueve semanas.

2.3 Elementos de probabilidad y estadística.

Estadística:

Terminología: Población, muestra, individuo, variable...
El porqué de las muestras. Cómo debe ser una muestra.
Manejo de tablas. Significado.
Gráficas estadísticas.
Parámetros estadísticos. Significado y cálculo: Media y desviación típica, varianza. Mediana, cuartiles y centiles.

Distribuciones bidimensionales:

Correlación. Significado. Cálculo del coeficiente de correlación e interpretación.
Regresión lineal.

Probabilidad:

Azar y probabilidad. Leyes de la probabilidad. Asignación de probabilidades: Probabilidad «a priori» y «a posteriori».
Experiencias compuestas. Probabilidad condicionada.
Cálculo de probabilidades sencillas.

Distribuciones de probabilidades discretas:

¿Qué es una distribución de probabilidad?
Parámetros μ y σ en una distribución de probabilidad.
Algunos ejemplos sencillos de distribución de probabilidad discreta.
Somera descripción de la distribución binomial. Aplicaciones.
Fórmulas para la obtención de μ y σ.

Distribuciones de probabilidad continuas:

Peculiaridades de las distribuciones de variable continua.
Ley de distribución normal. Descripción. Cálculo de probabilidades de distribuciones normales con el uso de tablas.
La binomial como aproximación a la normal.
Test de normalidad.

La finalidad de esta parte del curso es proporcionar a los alumnos algunas nociones de estadística aplicada a las Ciencias Sociales y Humanas.

Se debe pretender que el aparato conceptual indispensable para este objetivo se presente en todo momento firmemente apoyado en la intuición y apoyado en aplicaciones prácticas.

La aproximación a las tareas rutinarias de los cálculos estadísticos mediante el uso adecuado de la calculadora y el ordenador, facilitará las aplicaciones reales de la estadística.

A partir del estudio de nubes de puntos se puede llegar al concepto de relación estadística y su diferencia con la relación funcional. No es necesario formalizar el concepto ni el cálculo de recta de regresión.

El cálculo de frecuencias relativas y las observaciones referentes a su estabilidad deben ser el cauce para la noción de probabilidad.

Es importante hacer resaltar la diferencia entre la probabilidad que se asigna, y que dependerá de los elementos de juicio que se posean «a priori», y la probabilidad «a posteriori» obtenida experimentalmente.

La asignación de probabilidades debe realizarse mediante la experimentación o aplicando la regla de Laplace. El Profesor valorará la necesidad de repasar las técnicas de recuento, la combinatoria en particular, estudiadas en el primer curso.

Tiempo estimado: Nueve semanas.

Documento n^0 6:

CUESTIONARIOS DE MATEMATICAS DE BACHILLERATO (1967)

enseñanza del Latín irá orientada al conocimiento de los rudimentos de esta lengua y al estudio de los orígenes latinos de la lengua española»

Es fundamental el aprendizaje del vocabulario básico que se preceptúa en ambos cuestionarios, tanto más cuanto que un gran porcentaje de vocablos castellanos tiene su explicación directa en el conocimiento del vocabulario latino.

El total del léxico latino sugerido para cada curso debe adquirirse gradualmente y conciliando la menor dificultad de la forma de las palabras con su mayor frecuencia y resonancia en la vida romana, a razón de unas diez palabras por clase, procurando que responda, a modo de centro de interés, al contenido de los textos traducidos en cada una.

Dichos textos deberán hacer referencia principalmente a los aspectos fundamentales de la civilización romana, de modo singular a los que han informado y siguen informando nuestra cultura.

Se estima que para este grado los textos de cualquier autor latino, por sencillo que sea, deben proponerse convenientemente simplificados.

Lecturas en castellano de asunto clásico pueden completar el conocimiento de dicha civilización Es aconsejable que se realice por lo menos una a la semana, e incluso que figuren en los propios libros de texto.

Se recomienda encarecidamente que tanto en los libros de texto como en la práctica real de las clases se propongan las lecciones no en el orden sistemático de los cuestionarios, sino forma combinada, de tal manera que el estudio de la morfología, sintaxis vocabulario, ejercicios y traducción sea simultáneo y armónico

Como procedimientos prácticos de enseñanza de la traducción se aconsejan el de articulación del período y ejercicios repetidos hasta adquirir la rapidez de reflejos necesaria para llegar a la traducción rápida sin necesidad de previo análisis.

La traducción inversa no se considerará fin en sí misma, sino instrumento para afianzar el conocimiento de la gramática y del vocabulario propuestos en la lección respectiva.

MATEMATICAS

A.—Cuestionario oficial

Primer curso

1. Conjuntos. Inclusión. Partes de un conjunto.
2. Unión e intersección de conjuntos.
3. Correspondencias entre conjuntos.
4. El número natural.
5. Sistemas de numeración. Sistemas binario y decimal.
6. Operaciones con números naturales: adición y multiplicación.
7. El problema de la sustracción y el problema de la división exacta.
8. La división entera
   Las fracciones de términos sencillos.
.. Los números decimales. Operaciones.
11. Práctica de la división de números decimales.
12. Elementos geométricos: plano, recta, punto, rectas paralelas, semirrecta, segmento.
13. Transporte de segmentos. Clase de segmentos iguales: longitud Adición de longitudes. Multiplicación de una longitud por un número natural.
14. Medida de longitudes. El metro. Múltiplos y divisores.
15. El ángulo como región angular. Transporte de ángulos. Clases de ángulos iguales. Adición de ángulos.
16. Simetría axial en el plano. Mediatriz de un segmento. Bisectriz de un ángulo. Rectas perpendiculares. Angulo recto.
17. Polígonos. Triángulos. Cuadriláteros.
18. Circunferencia y círculo. Longitud de la circunferencia.
19. La traslación en el plano. Paralelogramos. Angulos de lados paralelos.
20. La cuadrícula. El metro cuadrado. Múltiplos y divisores. Areas de figuras planas.

Segundo curso

1. Conjuntos. Producto de conjuntos.
2. Correspondencias y relaciones. Relaciones de equivalencia
3. El número entero.
4. Operaciones con números enteros. Potencias de exponente natural
5. Segmentos orientados. Orientaciones de la recta. Abscisas.
6. El problema de la división Divisibilidad. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
7. Teorema de Pitágoras. Raíz cuadrada.
8. Movimiento del plano sobre sí mismo. Simetrías axiales. Traslaciones y giros.
9. El ángulo como giro. Medida de ángulos. Operaciones con medidas angulares.
10. La esfera. La esfera terrestre; longitud y latitud. Movimientos de la Tierra. Medida del tiempo.
11. El cubo. El metro cúbico. Múltiplos y divisores
12. Unidades de capacidad y de masa.
13. Estudio descriptivo del ortoedro. Prismas. Pirámides.
14. Cilindros y conos de revolución.
15. Determinación empírica de volúmenes de los cuerpos estudiados. Fórmulas.

Tercer curso

1. Revisión de las nociones de correspondencia y de relación de equivalencias. Relaciones de orden.
2. Fracciones. Clases de fracciones equivalentes. El número racional.
3. Operaciones con números racionales.
4. Fracciones decimales. Expresión decimal de un número racional.
5. Noción de aplicación. Aplicación lineal: $y = ax$. Proporcionalidad. Ejemplos.
6. La aplicación afín: $y = ax + b$. Representación gráfica. El movimiento uniforme y otros ejemplos.
7. Noción de ecuación. Resolución de ecuaciones lineales con una incógnita.
8. Inecuaciones
9. Ecuaciones con dos incógnitas. Sistemas sencillos de dos ecuaciones lineales
10. Resolución de problemas lineales relativos a cuestiones de la vida práctica: porcentajes; interés; descuento comercial; repartos proporcionales; mezclas.
11. Proporcionalidad de longitudes Triángulos en posición de Thales Propiedades Triángulos homotéticos.
12. Triángulos semejantes Semejanza. Escalas
13. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo. Construcción de cuartas, terceras y medias proporcionales.
14. Angulos en la circunferencia. Proporcionalidad entre los ángulos centrales y sus arcos correspondientes.
15. Razones trigonométricas de un ángulo agudo Tablas.

Cuarto curso

1. Polinomios de una indeterminada con coeficientes racionales. Adición y multiplicación.
2. División de un polinomio por $x - a$
3. La función polinomio. La función cuadrática. La parábola.
4. Ecuación de segundo grado. Radicales cuadráticos
5. Problemas de segundo grado
6. La función $y = \dfrac{k}{x}$. La hipérbola equilátera.
7. Tablas estadísticas. Valores medios Desviación típica. Gráficas.
8. Posiciones relativas de rectas y planos en el espacio. Estudio intuitivo de las relaciones de perpendicularidad y paralelismo
9. Angulo diedro. Resolución de problemas sencillos en el sistema de representación diédrico.
10. Descripción de los cinco poliedros regulares. Simetría en el cubo y en el octoedro. Simetrías en el tetraedro.

B.—Orientaciones metodológicas

En primer lugar, es de un interés extraordinario hacer notar las tres ideas fundamentales que han presidido la redacción de los presentes cuestionarios:

a) Todos los temas que figuran en ellos, su ordenación en los distintos cursos y su exposición adecuada a los niveles mentales de los alumnos han sido ampliamente experimentados durante varios años en numerosos centros oficiales y no oficiales de todo el país.

b) Aquellos cambios que aparecen deseables, pero sobre los cuales no se ha adquirido todavía una experiencia suficiente, se han aplazado hasta una posible renovación ulterior.

c) Suprimir los temas del cuestionario anterior que no son esenciales y aquellos otros que por su contenido o por el pretendido rigor con que tradicionalmente se exponían, resultaban inasequibles, como la experiencia docente de muchos años ha demostrado.

Otras consideraciones de carácter general que se han tenido en cuenta al elaborar los nuevos cuestionarios son los siguientes:

— Proporcionar a los alumnos la posibilidad de adquisición de los conceptos y de los medios de trabajo de la Matemática actual.
— Conjugar al mismo tiempo el valor formativo de las enseñanzas con las aplicaciones prácticas.
— Resaltar el sentido unitario de la Matemática fundiendo todas las nociones en unidades funcionales basadas en la teoría de los conjuntos, en las ideas de correspondencia y de relación y en las estructuras algebraicas fundamentales.
— Suministrar a los alumnos que han de continuar sus estudios en el Grado Superior las nociones y el simbolismo que facilitan los procesos de deducción y de axiomatización, mientras se proporciona a aquellos que terminan su escolaridad en este ciclo elemental las técnicas y la capacidad más precisas para su futura actividad profesional.
— Armonizar el estudio de la Matemática con los de la Física, Geografía, Dibujo, etc.
— Facilitar al profesor la utilización de métodos activos, tan necesarios, y la posibilidad de adoptar un enfoque didáctico más o menos avanzado según la realidad lo aconseje.
— Conducir al alumno, a partir de ejemplos concretos, hacia la creación de estructuras abstractas o la penetración en las que le sean propuestas, sin olvidar que la Matemática contiene en sí misma suficientes motivaciones para movilizar el interés de los alumnos.
— Contribuir de manera eficiente a la tarea esencial de este ciclo, cual es la formación progresiva de estructuras mentales y de su explicitación oral y escrita con un vocabulario preciso y una claridad de estilo.

La distribución de las materias en los distintos cursos se ha hecho procurando agrupar los temas alrededor de ciertas estructuras algebraicas fundamentales, que no se citan explícitamente en ninguna parte del cuestionario, y prescindiendo de la separación entre Aritmética y Geometría.

Por ello, el primer curso se centra en la estructura de semigrupo (números naturales, segmentos).

El segundo curso en la de grupo y anillo (números enteros, segmentos orientados, movimientos, ángulos como giros).

En el tercero aparece la estructura de cuerpo con los números racionales.

Introducidas así estas estructuras, necesarias en el Bachillerato Elemental, por medio de las teorías citadas, se estudian en cuarto curso unas nociones de la teoría de polinomios.

La relación de semejanza no se estudia hasta el tercer curso, pues no conviene presentar la idea de proporcionalidad ni los teoremas de Thales, aun sin demostrarlos, a alumnos de menos edad.

Otras cuestiones de evidente interés práctico se introducen en forma intuitiva en los diversos cursos, de acuerdo con las posibilidades de cada edad, como, por ejemplo, el estudio descriptivo de figuras y cuerpos geométricos, el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes correspondientes, la utilización de la geometría del espacio y unas nociones de Estadística.

Primer curso

1. Las nociones de teoría de los conjuntos se darán sobre la base de conjuntos concretos familiares a los alumnos, y se procurará que estas nociones se pongan de manifiesto a lo largo de todo el desarrollo del curso en los diversos temas.

2. El estudio de las fracciones en este curso se limitará a su aspecto intuitivo, utilizando términos sencillos, fácilmente concebibles y manejables por el alumno.

3. El concepto de ángulo como región angular y el de simetría axial deben ser introducidos con ejercicios de dibujo, plegado y recorte, llegando a la distinción de ángulos llanos, cóncavos y convexos, recto, agudos y obtusos, y con sólo estos recursos, sin emplear la medida de ángulos, reservada al segundo curso, a la construcción de ángulos complementarios y suplementarios.

4. Los temas propiamente geométricos deberán acompañarse del uso constante de los instrumentos de dibujo: transportador de segmentos, de ángulos, regla graduada y sin graduar, compás, escuadras, plantillas papel transparente y de calco, etc.

5. La descripción de los polígonos, y en particular de los triángulos y de los cuadriláteros, puede hacerse partiendo de la idea de línea poligonal abierta o cerrada. Las definiciones de los distintos tipos de triángulos y cuadriláteros pueden dar lugar a ejemplos muy sugestivos de conjuntos contenidos en otros.

6. La longitud de la circunferencia debe determinarse experimentalmente por medio de numerosas mediciones y comprobación de que en todos los casos se obtienen números próximos a π. Lo cual, por otra parte, puede constituir una primera iniciación a los métodos estadísticos.

7. El empleo sistemático de la cuadrícula puede ser muy fecundo en orden a la introducción empírica del cálculo de áreas, de las coordinadas cartesianas y a otras muchas situaciones interesantes

Segundo curso

1. En los temas relativos a la teoría de conjuntos se seguirán orientaciones análogas a las dadas para el primer curso.

2. Se introducen ahora el producto de conjuntos y la relación de equivalencia, pensando en la posibilidad de establecer el número entero como clase de pares equivalentes de números naturales, sin dejar por ello de utilizar recursos intuitivos que ilustren este proceso.

3. El conocimiento de número entero permite ya establecer la orientación de la recta y de los segmentos contenidos en ella.

4. En la teoría de la divisibilidad será suficiente estudiar casos sencillos de descomposición en factores primos y obtener el m. c. d. y el m. c. m. de números enteros positivos.

5. Los movimientos del plano pueden ser tratados, como en primer curso, con la ayuda del plegado y del papel transparente, poniendo de manifiesto qué giros y traslaciones son productos de simetrías.

6. Conviene hacer notar que ahora se introduce el ángulo como giro, y que este concepto difiere del dado en primer curso como región angular.

Tercer curso

1. En este curso la presentación de los conceptos no será ya estrictamente intuitiva.

2. En las operaciones con números racionales, la potenciación se limitará al caso de exponente natural. El problema inverso del de la expresión decimal de un número racional se tratará sólo en el caso de un número finito de cifras.

3. Aunque no se incluya de manera explícita ningún tema acerca del cálculo literal, se supone que se habrá ido introduciendo progresivamente desde los primeros cursos: al formular las propiedades de las operaciones, etc.

4. Se ha introducido la palabra «aplicación», universalmente admitida, reservando la de función para el caso de los conjuntos de números. La proporcionalidad, por ser una correspondencia entre magnitudes que tiene carácter de aplicación lineal, se ha incluído en este curso.

5. En el estudio de las ecuaciones y sistemas lineales, se pondrá de manifiesto que la posibilidad de su resolución depende y utiliza únicamente las propiedades del cuerpo de los números racionales.

6. La imposibilidad de demostrar el teorema de Thales sin hacer uso del cuerpo real, que no se introduce en el Bachillerato elemental, ha sugerido el llamar «triángulos en posición de Thales» a los que tienen un ángulo común y los lados opuestos a éste paralelos, y postular la proporcionalidad entre sus lados. A partir de aquí se puede estudiar la homotecia. La semejanza resulta como producto de una homotecia por un movimiento.

Cuarto curso

1. En el último curso del Bachillerato elemental se ha procurado introducir un mínimo de conceptos nuevos, dejando un amplio margen para la revisión y sedimentación de todos los adquiridos a lo largo de este ciclo.

2. Definidos los polinomios y las operaciones de adición y multiplicación, se pueden hacer observar las analogías entre las propiedades de éstas con las de los números enteros, poniendo así de manifiesto la misma estructura algebraica. De estas analogías surgen espontáneamente las ecuaciones lineales con polinomios, que no siempre tendrán solución, motivándose así el problema de la división entera de polinomios. Esta se estudiará sólo en el caso del divisor $x - a$, dados su sencillez de cálculo y su valor intrínseco.

3. Puesto que el alumno maneja ya la noción de aplicación, se ha hecho una distinción clara entre los conceptos de polinomio y de función polinomio, utilizando en este caso la palabra función para indicar que la aplicación es entre conjuntos de números. Con ello se elimina la expresión «valor numérico de un polinomio», que venía utilizándose hasta ahora.

4. Puesto que las ecuaciones de segundo grado que se presentan en la práctica carecen en general de soluciones racionales, se ha creído necesario la introducción de los irracionales cua-

dráticos, de los que sólo se darán las propiedades precisas para este objeto.

5. De acuerdo con las ideas fundamentales que han guiado la redacción de estos cuestionarios, el estudio de la geometría del espacio ha de quedar reducido a la mera observación y descripción de hechos, suprimiendo las demostraciones. Sin embargo, el manejo del sistema diédrico de representación permitirá al alumno resolver algunos ejercicios sencillos que le valorizarán las ideas y le ayudarán al desarrollo de su intuición espacial.

FISICA Y QUIMICA

A.—Cuestionario oficial

TERCER CURSO DEL BACHILLERATO

(Primer curso de Física y Química)

1. Medición de longitudes, superficies, volúmenes y tiempos.
2. La masa como cantidad de materia: su medida.
3. El movimiento uniforme.
4. Las fuerzas. El peso como fuerza.
5. Líquidos. Presión.
6. Gases. Presión atmosférica.
7. Temperatura: su medición.
8. Cambios de estado.
9. La luz: propagación, reflexión, refracción y dispersión. Propiedades de la materia.
11. Mezclas. Disoluciones.
12. La transformación química.
13. Relaciones ponderales. Concepto de átomo.
14. Naturaleza eléctrica de la materia.
15. Corriente eléctrica.
16. Electrólisis.
17. Efecto magnético de una corriente. Magnetismo.
18. Estudio monográfico de una especie química.

CUARTO CURSO DEL BACHILLERATO

(Segundo curso de Física y Química)

1. Concepto de aceleración en el movimiento rectilíneo. Caída de los cuerpos.
2. Fuerzas aplicadas a un sólido: su composición.
3. Relación entre fuerzas y aceleraciones.
4. Acciones entre masas. Gravitación universal. Peso.
5. Empuje de los fluidos sobre los sólidos sumergidos.
6. Trabajo. Potencia. Máquinas.
7. Energía: sus clases y fuentes. Principio de conservación.
8. Energía calorífica (calorimetría).
9. Dilataciones de sólidos y líquidos.
10. Dilataciones de gases.
11. Calor y trabajo. Máquinas térmicas.
12. Carga y campo eléctrico.
Corriente eléctrica. Leyes de Ohm y Joule.
14. Campo magnético.
15. Corrientes inducidas.
16. Movimiento ondulatorio.
17. Sonido.
18. La luz como movimiento ondulatorio.
19. Sustancias simples y compuestas.
20. Reacciones entre gases.
21. Manifestaciones energéticas en las reacciones químicas.
22. Energía eléctrica y transformación química.
23. Estructura atómica (modelo de Rutherford).
24. Acidos, bases y sales.
25. Hidrocarburos.
26. Combustión.

B.—Orientaciones metodológicas

PRIMER CURSO (3.º)

El curso de nociones de Física y Química pretende presentar por vez primera al alumno los fundamentos de la Física y de la Química dentro del marco de las Ciencias de la Naturaleza. En estas nociones se incluyen las magnitudes físicas más fundamentales y asequibles al alumno de este curso y una sencilla introducción al fenómeno químico.

Dado el carácter eminentemente experimental de estas ciencias, procede que el primer contacto del alumno con ellas sea a experiencia y el dato experimental.

Su desarrollo debe realizarse de forma experimental, llevando al alumno a participar activamente dentro de lo posible en el descubrimiento de leyes y teorías y en la obtención de conclusiones como resultado de los datos experimentales logrados en clase.

El método seguido ha de ser rigurosamente científico, interesando al alumno en la motivación de la experiencia, en su realización y en la obtención de conclusiones, sin más orientación del Profesor que la que en cada caso resulte imprescindible.

La participación del alumno en las experiencias podrá hacerse individualmente o en equipo. Se le exigirá que lleve el cuaderno de laboratorio en el que anotará la motivación y planeamiento previo de la experiencia, su realización, los datos obtenidos y los que le proporcionen sus compañeros de equipo; todos debidamente ordenados y tabulados como proceda, así como las conclusiones elaboradas por él junto con las que resulten del diálogo que se ha de mantener con posterioridad a la realización del experimento.

El estudio y supervisión del cuaderno de Laboratorio será elemento indispensable para orientar al Profesor en el desarrollo del curso.

Las experiencias serán sencillas en cuanto a aparatos y realización en la mayor relación posible con el ambiente en que el alumno se desenvuelva y claramente concluyentes.

SEGUNDO CURSO (4.º)

El objetivo fundamental de este segundo curso de Física y Química es introducir el concepto de energía, explicando sus diversas manifestaciones y sus variaciones, a cuya medida y cálculo debe llegarse dentro de los límites del programa. También se estima procedente iniciar en el alumno la idea de campo de fuerzas.

Para su desarrollo se cree esencial—en cuanto posible—mantener el carácter experimental, fenomenológico e inductivo que caracteriza al curso de Nociones.

En lo que sea oportuno, deberá preceder al desarrollo de las lecciones de este curso un recuerdo de los conocimientos y conceptos contemplados por el alumno en el anterior.

Se insiste en la importancia que adquieren—a este nivel de estudio—el cuaderno de laboratorio y el trabajo personal y/o en equipo del alumnado.

RECOMENDACIÓN GENERAL

Se considera importante utilizar, en exclusiva, unidades internacionales para expresar tanto los resultados experimentales como los procedentes de cálculos: el sistema metro kilogramo, segundo, grado centígrado, amperio, es especialmente recomendable incluso para las magnitudes de densidad (kilogramo/metro cúbico), presión (newton/metro cuadrado) y resistividad eléctrica (ohmio × metro) no empleadas en la práctica. No se prevén inconvenientes en facilitar a los alumnos cuando se presente la oportunidad un breve cuadro de equivalencias.

CIENCIAS NATURALES

A.—Cuestionario oficial

PRIMER CURSO

1. Monografía del gato como ejemplo de mamíferos.
2. Adaptaciones biológicas de los mamíferos.
3. Monografía de la paloma como ejemplo de aves.
4. Adaptaciones biológicas de las aves.
5. Monografía del lagarto común como ejemplo de reptiles.
6. Monografía de la rana común como ejemplo de anfibios.
7. Monografía de un pez común y generalidades sobre los peces.
8. Monografía de la langosta verde u otro insecto semejante.
9. Características y adaptaciones más frecuentes de los insectos.
10. Monografía de la araña de los jardines. Los arácnidos.
11. Monografía del cangrejo de río u otro crustáceo semejante. Los crustáceos.
12. Monografía del caracol de las huertas. Alusión a otros ejemplos marinos de moluscos.—Los moluscos en general.
13. Monografía de la lombriz de tierra. Alusión a las tenias y triquina.
14. Monografía de la estrella y erizo de mar. Generalidades sobre los equinodermos.
15. Nociones elementales sobre los pólipos, medusas y esponjas.
16. Los animales microscópicos.
17. Monografía de una planta herbácea (judía, guisante, etc.).
18. Monografía de una planta arbórea (almendro, cerezo, etc.).
19. Monografía del tulipán u otra planta afín. Alusión a los cereales.
20. Monografía del pino. Alusión a otros árboles afines.

Documento n° 7:

CUESTIONARIOS DE MATEMATICAS DE BACHILLERATO (1954)

ORIENTACIONES METODOLOGICAS

Es imprescindible en el primer curso el uso de la esfera armilar y de los mapas, con cuyo contenido y medida a escala debe familiarizarse el alumno.

Es recomendable también en el estudio analítico de los hechos geográficos explicar ante un Globo terrestre, para que los alumnos se acostumbren a la localización sobre el ámbito total de la Tierra. Además, el manejo del Globo terrestre habitúa al alumno a apreciar relativamente superficies.

Sólo cuando el alumno se haya acostumbrado al manejo del Globo deben utilizarse los mapas como instrumento de la explicación. Serán éstos necesarios para ver la parcelación física que se propone en el Cuestionario, y sobre todo, para la división política de la Tierra.

Las nociones de Geografía Económica de los primeros cursos están justificadas en atención a los escolares que se limitan a la obtención del título de Bachiller Elemental.

Por las mismas razones se insiste en la conveniencia de familiarizar al alumos con la localización de las unidades político-geográficas; y de agregar a éste algunas características físicas y humanas de la fisonomía geográfica de los Estados, por lo menos de los más importantes.

Parece obvio recomendar el uso de proyectores de dispositivas, fotografías y grabados, para fijar la atención en la variada gama de hechos geográficos que pueden ofrecer los paisajes naturales, rurales y urbanos.

En Geografía de España, se recomienda insistir en el conocimiento de la división administrativa, por su reflejo en la vida de la Nación.

Se utilizarán, siempre que sea posible, croquis sencillos de cuantos aspectos regionales y económicos lo reclamen.

Se dará la debida importancia a la Geografía Urbana, estudiándose las grandes ciudades del mundo; las condiciones de su situación y emplazamiento, su desarrollo histórico, estructura y funciones urbanas.

En los cursos superiores conviene interesar a los alumnos en las cuestiones de actualidad mundial.

Asimismo y en conexión con las excursiones que puedan hacerse, se les iniciará en ejercicios de lecturas cartográficas sobre hojas del mapa topográfico nacional a escala de 1:50.000; en especial de la región en que radique el Centro de Enseñanza.

En resumen: deberá exigirse a los alumnos, más que mucha erudición, ideas claras y precisas, y comprensión geográfica de los acontecimientos del mundo actual.

CUESTIONARIO DE MATEMATICAS FISICA Y QUIMICA

PRIMER CURSO

Aritmética: Números naturales.—Sucesión de números naturales. Numeración decimal hablada y escrita. Numeración romana. Adición, substracción, multiplicación y división de números naturales. Múltiplos y divisores.

Fracciones ordinarias: propiedades elementales. — Adición, substracción, multiplicación y división de fracciones.

Números decimales: propiedades elementales y operaciones con números decimales. Conversión de una fracción ordinaria en decimal. Aproximación decimal de un cociente hasta un orden dado.

Sistema métrico decimal.—Sistema cronométrico.

Números concretos: cambios de unidades, transformaciones y operaciones.

Geometría: Cuerpo, superficie, línea y punto.—Segmento rectilíneo y línea recta. Medida de segmentos. Superficie plana. Angulos. Rectas perpendiculares. Mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo.

Rectas paralelas.

Triángulos: Clasificación y primeras propiedades.

Cuadriláteros; paralelógramos: Clasificación y propiedades inmediatas.

Polígonos: su clasificación.—Polígono convexo.

Circunferencia y círculo; primeras propiedades sobre radio, diámetro, cuerdas y tangentes.

División sexagesimal de la circunferencia. — Medida de ángulos y arcos.

Expresiones de las áreas de polígonos y del círculo.

SEGUNDO CURSO

Aritmética: Potenciación de exponente natural de números naturales y fraccionarios: propiedadec fundamentales. Cuadrado de una suma de dos sumandos.

Raíz cuadrada de números positivos enteros y fraccionarios.—Práctica de la operación y aproximación decimal. Existencia de números no racionales.

Divisibilidad: caracteres de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 9, 11, 10n.—Números primos y compuestos. Números primos entre sí. Fracción irreductible. Descomposición en factores primos. Cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Reducción de fracciones al mínimo común denominador.

Reglas para obtener la fracción generatriz de una decimal periódica.

Razones y proporciones: propiedades.—Magnitudes relativas. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Reglas de tres, simple y compuesta. Interés simple y regla de compañía.

Geometría: Suma y diferencia de segmentos.—Múltiplos de un segmento. Angulos. Suma y deferencia de ángulos. Múltiplos de un ángulo.

Perpendicularidad de rectas. — Unicidad. Oblícuas. Relación entre los segmentos de perpendicular y oblícuas. Mediatriz de un segmento. Concepto de lugar geométrico.

Paralelismo. — Postulado de Euclides. Consecuencias. Angulos formados por dos paralelas y una secante. Relaciones entre ellos.

Triángulos: propiedades e igualdad.—Propiedades del triángulo isósceles. Casos de igualdad de triángulos. Triángulos rectángulos: casos especiales de igualdad.

Bisectriz de un ángulo como lugar geométrico.

Paralelogramos: propiedades fundamentales.—Igualdad de paralelogramos.

Polígonos: clasificación y propiedades.

Simetría respecto a un punto y a un eje.

Circunferencia y círculo: propiedades fundamentales.

Medida de segmentos y ángulos.—Angulos central, inscrito, interior y exterior en la circunferencia.

Equivalencia de figuras poligonales.—Areas del rectángulo, paralelogramo, trapecio, polígono regular e irregular.

Primeras construcciones geométricas con regla y compás.

TERCER CURSO

Aritmética y Algebra: Teoría de los números primos.—Algoritmo de Euclides. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Teoría de la divisibilidad.

El número negativo. — Números racionales. Leyes formales de las operaciones.

Expresiones algebraicas: operaciones con monomios y polinomios.

Fracciones algebraicas.

Ecuaciones: su equivalencia. — Ecuaciones de primer grado. Sistemas de ecuaciones: sus equivalencias. Sistema de dos o de tres ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas.

Concepto de función: su representación gráfica.—Representación gráfica de funciones de primer grado. Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Geometría: Proporcionalidad de segmentos.—Semejanza de triángulos: sus casos. Semejanza de polígonos. Razón de semejanza.

Circuncentro, intocentro, ortocentro y baricentro.

Propiedades métricas del triángulo rectángulo.—Teorema de Pitágoras. Razón de los segmentos en que las bisectrices de un ángulo de un triángulo dividen al lado opuesto, y definición de grupo armónico.

Polígonos regulares.—Inscriptibilidad y circunscriptibilidad. Lados y apotemas del exágono regular, triángulo equilátero y cuadrado en función del radio. Razón de las áreas de dos polígonos semejantes.

Longitud de la circunferencia, número π.—Area del círculo. Longitud del arco n grados y área del sector correspondiente.

Construcciones geométricas correspondientes a las teorías estudiadas.

Definición y construcción de elipse, hipérbola y parábola.

Angulo diedro; ángulo diedro recto.—Planos perpendiculares. Planos paralelos.

Funciones circulares.—Proyección ortogonal de un segmento sobre un eje. Tablas naturales trigonométricas. Resolución de triángulos rectángulos.

CUARTO CURSO

Algebra: Cálculo de potencias con exponente negativo.

Cálculo de radicales.

Cálculo de potencias con exponente fraccionario.

Ecuación de segundo grado.—Estudio de las funciones y $= ax^2 + bx + c$ y de la $y = \frac{K}{X}$. Representación gráfica.

Resolución de un sistema de dos ecuaciones, una de primer grado y otra de segundo, con dos incógnitas.

Idea de las funciones potencial y exponencial: sus representaciones gráficas.

Geometría: Determinación de un plano. — Intersección de dos planos. Posiciones de recta y plano y de dos rectas en el espacio.

Perpendicularidad de recta y plano.

Paralelismo de recta y plano y de planos entre sí.

Angulo de recta y plano.—Mínima distancia entre rectas que se cruzan y línea de máxima pendiente de un plano con respecto a otro.

Angulos diedros: su medida.—Propiedades.

Angulos tiedros.—Propiedades.

Simetría de figuras en el espacio con respecto a punto, eje o plano.

Poliedros: pirámides y prismas.—Propiedades. Estudio de los paralelepípedos. Areas lateral y total y volumen de pirámides, troncos de pirámide y prismas.

Poliedros regulares convexos: su número y descripción.

Superficie cónica y cono.—Superficie cónica y cono de revolución. Propiedades. Tronco de cono. Area lateral y total y volumen de cono y tronce de cono de revolución.

Superficie cilíndrica y cilindro.—Superficie cilíndrica y cilindro de revolución. Propiedades. Area lateral, total y volumen del cilindro.

Superficie esférica y esfera.—Intersección con recta y plano. Recta y plano tangentes. Círculos máximos y menores. Polos de un círculo de la esfera. Area del huso esférico. Volumen del sector esférico y de la esfera.

Coordenadas cartesianas: Diagramas e histogramas. Cartogramas.

QUINTO CURSO

Análisis: Variaciones, permutaciones y combinaciones sin repetición.

Concepto de probabilidad.

Potencia enésima de un binomio (n natural). Cuadrado de un polinomio.

División de un polinomio entero en X por (X-a).

Sistemas de dos o tres ecuaciones lineales determinados, indeterminados e imposibles. (Es potestativo aplicar los determinantes a esta teoría).

Sucesivas ampliaciones del concepto de número.

Progresiones aritméticas y geométricas. — Suma de los términos de una progresión geométrica decreciente indefinida. Determinación de las generatrices de las fracciones decimales periódicas.

Funciones exponencial y logaritmica: representación gráfica.

Logaritmo de productos, cocientes, potencias y raíces.—Logaritmos decimales: propiedades. Tabla de logaritmos: su manejo.

Interés compuesto y anualidades. — Operaciones de Bolsa.

Promedios: Medias aritméticas, simple y ponderada.—Media geométrica.

Complementos de Geografía: Cálculo de alturas, medianas y bisectrices de un triángulo.

Potencia de un punto respecto a una circunferencia. — Eje y centro radicales.

División aurea de un segmento.—Polígonos regulares, convexos y estrellados.

Triedros suplementarios.—Igualdad de triedros.

Enunciado del teorema de Euler, relativo a poliedros.—Poliedros regulares convexos.

Trigonometría. — Medida de un ángulo en radianes. Estudio detallado de las funciones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Angulos que corresponden a una razón trigonométrica dada. Reducción al primer cuadrante. Proyección ortogonal de una poligonal sobre un eje. Razones trigonométricas correspondientes a los ángulos, suma y diferencia. Idem del ángulo doble. Dado el coseno de un ángulo, determinar las razones trigonométricas del ángulo mitad. Transformación de sumas o diferencias de senos y cosenos en productos. Teoremas del seno y del coseno. Tablas logaritmico-trigonométricas: su manejo. Resolución de triángulos. Límite de la razón del seno al ángulo cuando éste tienda a cero. Las razones trigonométricas y los lados de los polígonos regulares.

SEXTO CURSO

Análisis. — Operaciones con números reales. Límite de una sucesión de números reales. Infinitésimos. Cálculo de límites.

El número e.

Número complejo. — Representación gráfica. Adición y sustracción de números complejos. Expresión trigonométri-

ca de los números complejos. Producto y cociente de números complejos.

Estudio completo de la ecuación de segundo grado.

Función.—Idea de función continua. Función de función.

Estudio analítico de la recta.—Problemas de intersección, paralelismo y perpendicularidad.

Derivada y diferencial.—Interpretaciones geométrica y mecánica. Derivadas sucesivas. Derivación de las funciones algebraicas. Derivadas de las funciones trigonométricas directas. Derivadas de las funciones logarítmica y exponencial. Derivación logarítmica. Ecuación de la tangente a una curva en un punto. Máximos y mínimos. Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

Ideas de la dispersión y de la correlación lineal. Curva normal.

ORIENTACIONES METODOLOGICAS

PRIMER CURSO

En el primer curso, inicial de Matemáticas, se omitirá todo razonamiento abstracto.

Las propiedades numéricas esenciales se harán notar con la repetición de ejercicios. Lo mismo cabe decir de las propiedades geométricas.

Conviene hacer notar a los alumnos que las figuras que ellos dibujan son sólo aproximadas, así por ejemplo: las rectas que trazan son toscas imágenes de las concebidas en la Geometría.

Los alumnos realizarán el mayor número posible de ejercicios. Al finalizar este primer curso, los que lo hayan cursado con aprovechamiento, deben manejar los números naturales, las fracciones ordinarias y los números decimales con soltura, es decir, sin equivocaciones en cálculos no excesivamente complicados. Hay que huir en principio de las operaciones compuestas fatigantes cuyo cálculo es casi incomprensible para los alumnos de este curso.

Objetivo primordial que debe alcanzarse es el manejo acertado del sistema métrico decimal, del cronométrico y las transformaciones de números concretos.

En las figuras geométricas sencillas que los alumnos han de dibujar, es de aconsejar la mayor pulcritud y ordenación. Cuando se trate de comprobar propiedades de una figura de tipo general, por ejemplo, de un triángulo; húyase de casos particulares a los que instintivamente se incline el alumno, es decir, que el triángulo que se dibuje debe ser escaleno, pero no equilátero ni isósceles.

Deben ser objeto de atención preferente problemas sencillos en que intervengan Aritmética y Geometría, exigiendo siempre que haya lugar un conocimiento perfecto del sistema métrico decimal.

SEGUNDO CURSO

Las primeras nociones de Aritmética expuestas en el primer curso se amplían en el segundo curso introduciendo el estudio *intuitivo* de la potenciación de exponente natural de números positivos enteros y fraccionarios y la radicación cuadrática de los mismos.

Debe hacerse notar muy claramente a los alumnos que en la extracción de la raíz cuadrada lo más frecuente es que no sea exacta y que, como consecuencia, el resultado de dicha operación será, en la mayoría de los casos, un número *no racional*.

Se dan a conocer los caracteres de divisibilidad por los módulos más sencillos: se descomponen los números compuestos en factores primos y se determina el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, especialmente de dos números. Como esta determinación se hace mediante la descomposición factorial antes indicada y sólo se conocen los caracteres de divisibilidad por los números primos, los alumnos deben contener, a lo más, estos factores primos y otro número primo absoluto.

El conocimiento del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo permite resolver multitud de cuestiones elementales en el cálculo de fracciones, debiendo el Profesor tener cuidado al proponer los ejercicios para que se pueda llegar fácilmente a las fracciones irreductibles.

Al presentar al alumno la idea de razón de dos magnitudes homogéneas, debe insistirse con gran número de ejemplos en el carácter abstracto de la razón y también en el de la medida de magnitudes.

Tanto la proporcionalidad directa como la inversa requieren una gran perseverancia con los alumnos para desterrar la falsa idea de que el crecimiento o disminución simultánea de dos magnitudes relativas entraña la proporcionalidad de ellas. Hay que extirpar la frase muy extendida, por desgracia, de que dos magnitudes son directamente proporcionales cuando van de *más a más* o de *menos a menos* y la expresión análoga en la proporcionalidad inversa.

Las reglas de tres simple y compuesta, la de interés y la de compañía se prestan a resolver numerosos problemas, los cuales deben siempre tratar de cuestiones ajustadas a la realidad, y no de otras más o menos atractivas, pero irreales.

La Geometría queda circunscrita en este curso segundo a una parte de la Geometría plana, y con ella han de iniciar los alumnos el razonamiento lógico, que es una de las finalidades de la enseñanza de la Matemática en el Bachillerato. Sin embargo, no se estima lo anterior como un *desideratum*, pues es imposible que niños de once a doce años puedan realizar un razonamiento lógico perfecto.

Con las nociones de Geometría desarrolladas, el niño puede llegar sin dificultad a la comprensión del sistema cartesiano de representación y dibujar gráficas de funciones sencillas tabuladas.

TERCER CURSO

El tercer curso, en el que se han de exponer someramente, pero con carácter lógico, los fundamentos de la teoría de los números, exige, por parte del Profesor, una atención profunda para no recargar al alumno con teoremas innecesarios.

No parece conveniente tratar la teoría de la divisibilidad por la de congruencias, aunque la elegancia que éstas imprimen en las demostraciones sea manifiesta. Ello obligaría a recargar el estudio del alumno con varias propiedades que pueden dejarse a un lado, empleando otros caminos de demostración.

Aparecen en este curso el número negativo, completando con él el racional, y las expresiones algebraicas enteras y fraccionarias. Aunque sea innecesario, creemos conveniente advertir que los primeros pasos en esa materia deben darse mediante expresiones sencillas, de ejemplos numerosos con polinomios de una letra, para pasar en última instancia a expresiones con dos o tres letras, número que no debe rebasarse.

Ejercicios y problemas de dificultad creciente deben constituir la parte más importante de la práctica de este tercer curso.

Con el epígrafe: "*Concepto de función*: su represen-

ación gráfica", no se trata de que un muchacho de trece años llegue al máximo alcance del concepto de *función*. La amplitud del mismo obliga a proceder por aproximaciones sucesivas, que es, desde el punto de vista histórico, el camino seguido por la humanidad en el progreso de todas las ramas del saber.

No obstante, esta idea de función debe figurar en todo Cuestionario de Matemáticas, empezándose, naturalmente, por la representación gráfica de funciones concretas y sencillas que permitan advertir caracteres de los fenómenos que estudian.

Domina en la Geometría la teoría de la semejanza y sus derivaciones, en las que se destaca de manera especial el teorema de Pitágoras, fundamento de muchas relaciones métricas de las que se hace uso constante y que constituye núcleo esencial de innumerables ejercicios y problemas geométricos.

La teoría de los polígonos regulares se reduce, no pasándose del lado del exágono, para no recargar el trabajo del alumno.

La inscripción y circunscripción de polígonos regulares sirve para que el alumno intuya la idea de límite, llegándose de manera elemental a la introducción del número π : dada la importancia de este número π, creemos que se debe exponer a los alumnos una breve noticia histórica del mismo, haciendo mención de la *imposibilidad* de resolver el problema de la cuadratura del círculo por la naturaleza de π. Debe evitarse que actualmente haya personas que acometan ese problema.

Finalmente se expondrán unas ligeras nociones de Trigonometría, limitadas a lo indispensable para llegar a la resolución de triángulos rectángulos, elementos precisos para [illegible] Física.

CUARTO CURSO

La primera parte del Cuestionario, titulada Algebra, se refiere al cálculo de potencias de exponente negativo, fraccionario y de radicales. Las primeras (exponente negativo y fraccionario) son indispensables para expresar las dimensiones de unidades físicas, y el cálculo de radicales, por la necesidad de operar con ellos directamente.

Como el Algebra propiamente tal se circunscribe al estudio de las ecuaciones, nada más natural que hacer el de la de segundo grado, aunque en esta primera etapa de Bachillerato se excluyan las raíces complejas. Los alumnos calcularán las sumas y productos de las raíces, así como expresiones simétricas muy sencillas de las mismas.

Nada más natural que, después de estudiarse la ecuación cuadrática con una incógnita, se aborde el estudio elemental del trinomio de segundo grado con variación de signo, ceros reales, máximo o mínimo, forma de la curva representativa, etc. Aquí también el Profesor tiene extensísimo campo de ejercicios y problemas que se presentan frecuentemente en la discusión de cuestiones algebraicas y geométricas de segundo grado.

La representación de la función $y = \frac{K}{X}$ viene obligada por el empleo de los gráficos de varias leyes físicas y químicas.

Y ya dentro del campo de la representación de funciones, es conveniente que el alumno construya gráficas de funciones diversas y, especialmente, de las funciones potencial y expotencial, limitándose a casos sencillos.

Parte muy importante del Cuestionario del cuarto curso es la referente al estudio de la Geometría del espacio, disciplina de positivo valor educativo y que merece gran atención.

Es indispensable insistir sobre los conceptos primarios de perpendicularidad y paralelismo en el espacio, multiplicando el uso de modelos corpóreos con los que el alumno se vaya acostumbrando a *ver en el espacio*. Cuanto más objetivos sean os razonamientos, tanto mejor se prepara el alumno para un ulterior estudio abstracto de la Geometría pura.

Necesario es el estudio de las simetrías, no sólo en sí mismas, sino como aplicación a la Física.

El estudio de los poliedros y de los cuerpos redondos no puede omitirse, como tampoco el cálculo de sus áreas y volúmenes. El estudio de la Geografía esférica se ha reducido al *mínimum* indispenasable para que los adolescentes puedan tener ideas claras de las cuestiones de Geografía astronómica, a veces mal comprendidas por falta de conocimientos geométricos.

Con el fin de que los alumnos se adiestren en las representaciones gráficas, se hace especial mención de la construcción de diagramas e histogramas, que, en un sistema de coordenadas cartesianas, pueden representar, por medio de poligonales o de rectángulos, funciones empíricas y toda clase de estadísticas.

Es conveniente tratar también de la representación mediante sectores circulares, cuya área sea proporcional a la cuantía del fenómeno que se quiere representar.

Para representar gráficamente la localización, se introducen los cartogramas, de tanta utilidad en las aplicaciones de la Economía, cuando, por ejemplo, se quieren señalar los lugares donde radican centros productivos, zonas de consumo, etc.; cartogramas que no deben realizarse en cuadernos especiales, sino en simples hojas de papel.

Durante [illegible] ocasiones se presenten para hacer aplicación de las materias explicadas a problemas fáciles de Física, que complementen los problemas abstractos de matemáticas, y que adiestren a los alumnos en el manejo de fórmulas y unidades físicas y en la interpretación de datos y resultados.

QUINTO CURSO

En este segundo ciclo del Bachillerato, las Matemáticas deben desarrollarse, sin dejar de presentarlas en contacto con la realidad, dándoles un carácter más riguroso, en un desarrollo lógico deductivo, intensificando, además, el propio "descubrir" del alumno, haciendo a los estudiantes pensar más y reduciendo al mínimo la información directa; es preciso despertar el interés, que, por otra parte, es el mejor estímulo del trabajo.

El alumno que ha optado por la rama de Ciencias y posee los conocimientos que se exigen en los cuatro primeros años debe ampliar aquéllos iniciándose en el conocimiento del Análisis con el estudio de las cuestiones que se detallan en el Cuestionario, que caen dentro del marco clásico de la Matemática elemental, pero que constituyen la iniciación de estudios superiores, a los que, en principio, el alumno ha de dedicarse.

La teoría combinatoria con el concepto de probabilidad—idea primaria en la Estadística Matemática—se remata con la deducción y estudio del binomio de Newton, en el caso de exponente natural.

Concepto de probabilidad.—El concepto de probabilidad, a que se refiere el Cuestionario, es el clásico, es decir, el de cociente de números de casos favorables y el de número de casos llamados posibles. Debe procurarse que la terminología empleada no conduzca al clásico círculo vi-

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

cioso que surge de la evidente relación entre los conceptos de posibilidad y probabilidad.

El cociente y el resto de la división de un polinomio entero en x por $(x-a)$ deben ser conocidos por los alumnos, que serán iniciados en la importancia que entrañan en el estudio de las ecuaciones.

Se insiste en el estudio de los sistemas de ecuaciones ineales determinados, indeterminados e imposibles, dejando en libertad al Profesor de abordar dicho estudio por leterminantes, pudiendo llegar hasta el teorema de Bouché-Frobenius.

El estudio de la función logarítmica como inversa de a exponencial, con sus representaciones respectivas, y el studio del cálculo logarítmico, es indispensable en este quinto curso. simismo no debe omitirse el interés compuesto, base para llegar al concepto de crecimiento geométrico continuo, que tanta aplicación tiene en fenómeos físicos.

Promedios: *Media aritmética*.—La teoría de promelios, y en especial de la media aritmética, es de máxima ilidad para el estudio de fenómenos estadísticos, ya que promedio representa, en cierto modo, al colectivo.

Esta teoría, expuesta elementalmente puede servir ara que el alumno adquiera conciencia de lo que es una escripción de estadística o de colectivo frente a una desripción causal.

Al estudiar la media aritmética, tanto la simple como ponderada, debe hacerse resaltar al alumno lo repreentativo de este promedio y comprobar su principal proiedad. de ser nula la suma de las desviaciones respecto la media aritmética. La media aritmética ponderada onduce al concepto de números índices ponderados, de ecunda aplicación en la Economía.

[illegible] os cuatro primeros cursos.

Análogamente, la Trigonometriaa plana que se exige la necesaria para utilizar poderosa herramienta matemática en sus múltipes aplicaciones.

SEXTO CURSO

Para completar la Matemática elemental del Bachillerato faltaba el estudio del número complejo y de las prieras nociones de cálculo infinitesimal.

Se completará el estudio de la ecuación de segundo ado introduciendo las raíces complejas.

Un apartado especial se dedica al número e, sin el al no es posible dar un paso en esta rama de la Matemática.

Al hablar de los promedios, en el quinto curso, se dijo e éstos representaban, en una primera aproximación, a conjunto de elementos que se consideraban en grupo. paso más en la descripción estadística obliga a preár la distribución de los valores de la variable estadísa en relación de posición respecto a la media aritmé-, determinando y midiendo su dispersión. Es convente establecer el concepto de correlación como relación atoria, distinta de la rigidez de la función puramenmatemática.

Para al mayor sencillez en la comprensión de la colación debe ayudarse con la construcción de tablas y áficos. De la curva normal sólo deberá indicarse su for-, algo sobre la distribución en ella de los diversos vaes del colectivo, y se hará ver a los alumnos, con ejems numéricos, la frecuencia con que este tipo de distriición se presenta en los fenómenos naturales.

FISICA Y QUIMICA

PRIMER CURSO

(TERCERO DEL BACHILLERATO)

Nociones de Física y Química

Estados de la materia.—Propiedades de la misma en sus tres estados. Medida del peso y del volumen. Densidad.

Moléculas y átomos.—Fenómenos físicos y químicos: cuerpos simples y compuestos.

Efectos generales del calor sobre los cuerpos.—Estudio experimental de la dilatación de los cuerpos. Cambio de estado del agua. Termómetros.

Propagación del calor.

Propiedades generales de los líquidos.—Presión. Principio de Pascal.

Cuerpos sumergidos y flotantes.—Principio de Arquímedes.

Estudio del agua.—El agua en la naturaleza, el agua como disolvente: el agua destilada. Ciclo del agua en la naturaleza. Componentes del agua. El hidrógeno.

El aire.—Atmósfera, composición. Regiones atmosféricas. Presión atmosférica. Fundamento y uso de barómetro.

El oxígeno.—Combustiones lentas y rápidas. Llama. Respiración. Combustibles. Anhídrido carbónico.

La luz y su propagación..—Cámara oscura.

La reflexión de la luz.—Espejos. Imágenes.

Experiencias sencillas de refracción de la luz.—Lupa y proyector. Cámara fotográfica.

[illegible] ción.

El azufre. El fósforo. Sus variedades.

Electricidad por frotamiento, contacto e influencia.—Conductores y no conductores.

La corriente eléctrica.—Estudio de un círculo simple. Nociones elementales de cantidad de electricidad, intensidad, diferencia de potencial y resistencia.

Calor y luz producidos por la corriente eléctrica.—Lámpara de incandescencia.

Magnetismo.—Brújula.

Electroimán.—El timbre eléctrico.

SEGUNDO CURSO

(CUARTO DEL BACHILLERATO)

Física y Química

Movimiento y sus clases.—Movimiento uniforme. Velocidad. Movimiento de caída de los cuerpos. Aceleración.

Fuerzas, composición y descomposición. La palanca. Balanza.

Gravedad y gravitación. Centro de gravedad, su determinación. Equilibrio y sus clases.

Ideas elementales del trabajo, potencia y energía.

Naturaleza y propiedades del sonido. Velocidad. Eco. Producción de sonidos.

Calor y temperatura.—Calometría. Calor específico.

Cambio de estado.—Estudio de la fusión y de la solidificación. Ebullición. Calores de cambio de estado.

Transformación del calor en trabajo. Idea de las máquinas de vapor y de los motores de explosión.