UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

TESIS DE DOCTORADO

SIMBIOSIS DIDÁCTICA CURRICULAR ENTRE EL NÚMERO IRRACIONAL Y LA FRACCIÓN CONTINUA EN EDUCACIÓN SECUNDARIA: RESTRICCIONES, INTERACCIONES E IDONEIDAD

DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Tesista:
LUIS DARÍO REINA

Director de tesis:
DR. MIGUEL R. WILHELMI
Codirectores de tesis:
DR. PABLO F. CARRANZA
DR. DANIEL PRIETO CASTILLO

Mendoza, 2015

DEDICATORIA

A mi esposa e hija,

por su compresión y amor

A mis padres

por todo su apoyo y amor

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Miguel Rodriguez Wilhelmi,
mi director, por sus inapreciables
aportes desde el conocimiento.
Por su constante orientación,
ánimo y estimulación para la
concreción de este trabajo.

Al Dr. Pablo Fabián Carranza,
mi codirector, por sus contribuciones
certeras a esta obra.
Por alentarme desde sus
incipientes inicios a realizarla.

Al Dr. Daniel Prieto Castillo
mi codirector, por su inestimable
acompañamiento desde
su humildad y sencillez.

A quiénes generosamente desde su conocimiento
y experiencia contribuyeron al desarrollo de esta tesis

Dr. Abraham Arcavi
Dra. Carmen Sessa
Dra.Vera W. de Spinadel

A quiénes desde la distancia aportaron desinteresadamente
sus escritos y herramientas de investigación

Dra. Analía Bergé
Dr. Francisco Aragón Artacho

Índice

CAPÍTULO 5. Significado institucional de referencia de la fracción continua

Índice de figuras

Índice de tablas

Resumen

En esta tesis, enmarcada en el domino de la Didáctica de la Matemática, se aborda el problema de la construcción y comunicación de la noción de número irracional en Educación Secundaria.

Se estudian los antecedentes relativos a la enseñanza y aprendizaje de los números irracionales y a sus dificultades asociadas; asimismo, se determinan las configuraciones epistémicas de referencia para el análisis de libros de texto. Posteriormente, se realiza la construcción de un holo-significado de dicha noción. Tras un estudio piloto, se diseña y se aplica una secuencia de actividades diseñadas ad hoc.

Tres grupos son parte de la experimentación: dos de control (sin modificación en el proceso de estudio usual) y otro experimental, donde se recurre a la noción de fracción continua como medio de introducción de los números irracionales. Se analizan las trayectorias epistémicas y didácticas asociadas.

La interacción entre objetos matemáticos en las secuencias de enseñanza, los conflictos semióticos asociados y el acoplamiento entre holo-significados, constituyen la base de los resultados, cuya discusión conlleva el análisis de la idoneidad didáctica del proceso de estudio efectivamente implementado. Se concluye con implicaciones para la enseñanza de los números irracionales en Secundaria.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se realiza una breve introducción y se muestra la organización de la memoria (apartado 1.1). Además se estudian los antecedentes relativos a la enseñanza y aprendizaje de los números irracionales y sus dificultades asociadas (apartado 1.2). Posteriormente se describe, justifica y fundamenta el problema a investigar (apartado 1.3) y los objetivos generales y específicos propuestos (apartado 1.4). Finalmente, se describen las hipótesis de investigación (apartado 1.5).

1.1 INTRODUCCIÓN Y ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

La presente investigación se centra en la construcción y comunicación de la noción de número irracional en Educación Secundaria. Se sitúa en el contexto de tercer año de escuelas secundarias de educación técnica.

En la concreción del currículo nacional en la Provincia de Mendoza (Argentina), la noción de número irracional se introduce en segundo año de Educación Secundaria, y se profundiza en el curso siguiente (DGEGM, 1998; DGEPM, 2001; MECT, 2006; DGEPM, 2014; DGEPM, 2015).

La construcción y comunicación de la noción de número irracional es compleja. Una breve antropología del saber evidencia su costosa evolución histórica, al punto que matemáticos de renombre negaron su existencia en tanto que números (Rey Pastor y Babini, 2000). ¿Por qué entonces un alumno de hoy debería aceptar su existencia y comprender su naturaleza? ¿Acaso no son suficientes los números racionales en las situaciones cotidianas? (Scaglia, 2000).

En este estudio, se intenta analizar la complejidad asociada a dicha noción y a sus propiedades, así como las restricciones cognitivas y de enseñanza en Educación Secundaria. También se pretende determinar posibles implicaciones para la formación de profesores.

En este capítulo, se analizan los antecedentes relativos a la enseñanza y aprendizaje de los números irracionales y sus dificultades asociadas. Posteriormente, se describe justifica y fundamenta el problema a investigar, los objetivos generales y específicos propuestos y, finalmente, se describen las hipótesis de investigación.

En el capítulo 2 se describen los aspectos teóricos que enmarcan la tesis. Se trata de los elementos primarios y secundarios del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS). Asimismo, también dentro del EOS, se explicitan las nociones de holosignificado, práctica matemática y de prácticas discursivas, operativas y regulativas. Posteriormente, se analizan las nociones de simbiosis didáctica curricular, de contrato didáctico, dimensión normativa, visualización y de memoria didáctica. Finalmente, se estudian las configuraciones y trayectorias epistémicas y didácticas y la "idoneidad didáctica" del proceso de estudio implementado.

En el capítulo 3 se describen las herramientas metodológicas a emplear en el estudio. Se trata de una investigación basada en el diseño, siendo la *ingeniería didáctica* el método privilegiado empleado. Se estudian también algunas herramientas gráficas para el análisis cuantitativo de la actividad matemática observada, tanto por los grupos control como experimental.

En el capítulo 4 se analiza la dimensión epistémica del número irracional como una antropología de dicho saber, su origen histórico, contextos de uso, los conflictos cognitivos y dificultades epistemológicas asociadas. Además se estudian algunas cuestiones en torno al currículo de matemática de secundaria. Finalmente, se analizan las configuraciones epistémicas de referencia con las cuáles se estudian algunos libros de texto de secundaria y seconstruye un holosignificado de la noción "número irracional".

En el capítulo 5 se analiza el significado institucional de referencia de la noción de fracción continua (FC).Se describe una antropología del saber FC, seguida de una breve génesis histórica de dicha noción y algunos puntos de encuentro con la noción de número irracional. A continuación, se estudian algunas cuestiones en torno a la periodicidad, cuasiperiodicidad y aperiodicidad de los números irracionales desarrollados en FC.

A partir de una experimentación con dos grupos, alumnos de secundaria y estudiantes para profesor, se valora su dimensión cognitiva. A continuación se estudia y construye la "configuración epistémica" asociadas a la noción de FC. Finalmente, se analiza y construye el holosignificado asociado a la noción de fracción continua y se estudia la posibilidad de realizar un "acoplamiento didáctico curricular" entre holosignificados.

En el capítulo 6 se estudia la dimensión didáctica del grupo de control 1.En él se describen y analizan cuatro sesiones correspondientes a dicho grupo de control. Se detallan y describen las configuraciones epistémicas y didácticas de cada una de las cuatro sesiones estudiadas.

En el capítulo 7 se realiza un análisis didáctico del grupo de control 2.En él se describen y analizan cuatro sesiones de dicho grupo, se describen tanto las configuraciones epistémicas como las didácticas en cada una de las sesiones analizadas.

En el capítulo 8 se discute los resultados obtenidos de las experimentaciones de los grupos de control. Se analizan tanto la trayectoria como las implicaciones didácticas de cada uno de los grupos estudiados.

En el capítulo 9 se describen y estudian algunos antecedentes de las primeras situaciones problema que forman parte del proyecto de enseñanza. Se muestran algunas situaciones similares a las seleccionadas empleadas por otros investigadores. A continuación se adaptan las situaciones-problema a un contexto escolar en un estudio piloto y se describen las tareas propuestas, su resolución experta, así como los comportamientos esperados. Finalmente, se analizan y discuten los resultados de este estudio destacando aspectos para el diseño de la secuencia de actividades.

En el capítulo 10 se estudia el diseño de secuencia de situaciones para experimentación y las respuestas esperadas de los alumnos.

En el capítulo 11 se describe la experimentación y se analizan sus resultados. Se estudian entonces los aspectos epistemológicos y didácticos de la secuencia de enseñanza puesta en aula a lo largo de dieciocho sesiones. Se analizan quince[1] de dichas sesiones a través de configuraciones epistémicas y didácticas, la interacción entre objetos matemáticos presentes en cada una de las sesiones y sus conflictos semióticos asociados. Se estudia además el acoplamiento entre el holosignificado de la noción de fracción continua y la de número irracional. Finalmente, se muestran los resultados obtenidos por los alumnos del grupo experimental, en una evaluación de proceso que sirve de comparación con los producidos por los discentes de los grupos de control.

En el capítulo 12 se discuten los resultados obtenidos en la experimentación del grupo experimental y se comparan con los hallados en los grupos de control. Por tanto, se analizan la trayectoria didáctica del grupo experimental, sus implicaciones y a continuación se compara dicha trayectoria con las trayectorias didácticas de los grupos de control. Posteriormente, se discuten los resultados obtenidos en las evaluaciones comunes a ambos grupos. Por último, se analiza la *idoneidad didáctica* del proceso de estudio efectivamente implementado por el grupo experimental.

Como se señala el presente estudio se centra en la construcción de un objeto matemático, el número irracional, en Educación Secundaria. Varios son los trabajos de investigación que anteceden a la misma.

A continuación se muestran algunos de estos estudios precedentes que dan motivan la investigación.

[1] Se analizan quince de las dieciocho sesiones dado que, las actividades realizadas por el docente, en esas tres sesiones, guardan estrechas similitudes con las ya analizadas y no se identifican nuevos conflictos o dificultades en la enseñanza o en el aprendizaje de la noción de número irracional.

1.2 ANTECEDENTES

Aún fundamentada y aceptada la existencia de los números irracionales por los matemáticos del siglo XIX, su entrada y desarrollo en la enseñanza no deja de ser compleja.

A continuación se analizan algunos antecedentes que muestran la complejidad didáctica de dicha noción además de algunas dificultades asociadas a su enseñanza y su relación con otros objetos matemáticos.

Arcavi (1985), en su tesis doctoral[2], estudia la historia de la matemática como un componente de base de los profesores. Presenta cuestionarios, basados en fuentes históricas originales, a los profesores en servicio que, en algunos casos, se centran en la noción de número irracional y de fracción continua. Se analizan algunas dificultades asociadas a su enseñanza.

Arcavi, Bruckheimer y Ben-Zvi (1987) describen una aproximación al uso de la historia de la matemática para futuros docentes y profesores en actividad, a partir de la noción de número irracional. Se trata de un curso basado en textos originales donde los docentes no sólo aprenden cuestiones históricas sino también matemáticas, epistemológicas y didácticas.

Arcavi y Bruckheimer (1991) analizan el método de Rafael Bombelli sobre la extracción de raíces cuadradas en un contexto algebraico, a partir de fuentes originales, relacionando dicho método con el de las fracciones continuas. Se propone así el uso, en un contexto histórico, del algoritmo como actividad a realizar por profesores de matemática de nivel secundario.

Fischbein, Jehiam y Cohen (1995) se centran en investigar el conocimiento que sobre los números irracionales manifiestan estudiantes de secundaria y futuros profesores.

> "Lo que está claro a partir de todos estos ejemplos, es que la mayoría de los sujetos, en todos los niveles de enseñanza (incluyendo a los estudiantes de *college*), tienen una idea totalmente confusa acerca de los conceptos de números racional e irracional y las relaciones entre ellos" (p.38).

[2] El autor agradece al Dr. Abraham Arcavi por la gentileza en el envío de su tesis doctoral.

> “El concepto de número irracional sobre todo es una total confusión en las mentes de muchos estudiantes. El término "irracional" se considera equivalente con los números "no-enteros", con números que tienen una infinidad de decimales, a veces con números negativos, etc. Muchos estudiantes no son conscientes de la distinción esencial entre periódicos (repetitivos) y decimales no periódicos. Tales confusiones se producen por la interpretación de la expresión "irracional" a la luz de su significado cotidiano” (p.43).

Romero (1997) estudia la introducción del número real en enseñanza secundaria a través de una experiencia de investigación – acción. Señala que el tratamiento didáctico que se hace del concepto de número real resulta inadecuado.

> “El problema de la irracionalidad es altamente complejo, y a esta complejidad se añaden las dificultades derivadas de las nociones de infinito implicadas” [...] La estrategia didáctica del curriculum de matemáticas convencional pretende solucionar problemas importantes de comprensión soslayándolos mediante un planteamiento formal que, al pasar de puntillas por las dificultades del Número Real, elude las cuestiones fundamentales que están en la raíz de la comprensión de este concepto” (p.351).

Romero y Rico (1999) analizan el papel que juegan los sistemas de representación y las actividades asociadas a los mismos en la comprensión de lanoción de número real enalumnos de secundaria.

> “Entre las dificultades [...] encontramos: la resistencia a considerar como equivalentes, representaciones de los números reales que presentaban facetas distintas y exclusivas de cada tipo de representación; las limitaciones de los estudiantes relacionadas con cuestiones demasiado sofisticadas para su nivel, y que requerían el manejo y comprensión de determinados procesos y conceptos matemáticos que quedaban fuera de su alcance (nos referimos al razonamiento para justificar que la expresión decimal de π es infinita no periódica). También algunos problemas se presentaron a la hora de discriminar entre números racionales e

irracionales a través de los distintos sistemas de representación. Y, por último, aparecieron dificultades para distinguir los subconjuntos numéricos incluidos en los reales, los sistemas de representación asociados a éstos y las relaciones de inclusión entre ellos. En general, creemos que, aunque sea mediante una pequeña muestra, pueden captarse las múltiples dificultades que se presentan a los alumnos al aventurarlos en el camino de los sistemas de representación de los reales y las relaciones entre ellos, para abordar el estudio de los conceptos de número irracional y de número real" (p.149).

Arrigo y D'Amore (1999) al introducirse en la problemática del infinito actual detectan dos fenómenos importantes: "aplastamiento" y "dependencia". Proponen superar dichas dificultades, provocadas por la cardinalidad de los conjuntos infinitos, a través de la noción de densidad.

Scaglia (2000) analiza dos conflictos al representar los números reales en la recta real: uno, relativo a la representación decimal infinita de un número, que es considerado como "generador" de un "obstáculo epistemológico" para la aceptación del número como objeto matemático; otro, sobre el que se conjetura que constituye un obstáculo epistemológico de la cultura occidental por su persistencia a través de los siglos.

Bergé y Sessa (2003) exploran, a través de un estudio histórico-epistemológico, la noción de completitud de los números reales, en él analizan la relación entre números y magnitudes, así como los diferentes estadios de las nociones de continuidad de la recta y completitud del sistema numérico real.

Zaskis y Sirotic (2004) destacan que las diferentes representaciones de los números irracionales influyen en las respuestas de los futuros profesores de matemáticas respecto a cuestiones sobre la irracionalidad, señalando que dichas representaciones "muestran" algunas características de los números, mientras que "ocultan" otras, denominando a estas como "opacas y transparentes" respectivamente.

Garbín (2005) trata la dualidad del infinito actual-potencial analizando la influencia de las representaciones y de los distintos lenguajes matemáticos sobre las percepciones del infinito.

Shinno (2007) analiza la relación no trasparente en la introducción de los números irracionales en enseñanza secundaria, tanto como resultado de una medición como de la resolución de una ecuación algebraica.

Sirotic y Zazkis (2007) centran su estudio en la problemática de la representación de números irracionales en la recta numérica real donde los resultados sugieren confusión para los alumnos del profesorado de matemáticas; a saber, entre los números irracionales y su aproximación decimal siendo marcada la dependencia de este último.

Reina (2009) estudia el aprendizaje matemático en un contexto histórico desde un entorno informático, en especial se analiza la vinculación entre los números irracionales y las espirales y sus posibles aportes didácticos.

Reina (2010) analiza algunos puntos de encuentro entre la fracción continua y el número irracional desarrollando posibles aportes didácticos.

Zaskis y Sirotic (2010) estudian la problemática de la "equivalencia" entre las dos definiciones de número irracional, analizando si son didácticamente equivalentes. Destacan posibles obstáculos para la comprensión de los futuros profesores.

Voskoglou y Kosyvas (2011) realizan un estudio sobre los números irracionales donde se analiza la hipótesis de que la principal dificultad intuitiva para los estudiantes hacia el entendimiento de los números irracionales tiene que ver con sus representaciones semióticas, "podemos afirmar que el principal obstáculo tiene realmente que ver con las representaciones semióticas de los irracionales, es decir, las formas en las que se describen y les escribimos" (p. 130).

Voskoglou y Kosyvas (2012) presentan un estudio realizado a estudiantes de instituto y de escuela técnica superior (ingenieros y economistas) sobre la comprensión de los números reales. El estudio se basa en las respuestas escritas a un cuestionario y a entrevistas realizadas a estudiantes de ingeniería. Los resultados muestran dificultades de los estudiantes para lidiar con procesos que conecten construcciones geométricas y magnitudes inconmensurables. Los estudios sugieren que el uso de ciertas representaciones de los números reales ayudan a los estudiantes a obtener una mejor comprensión de los mismos.

Reina, Wilhelmi y Lasa (2012) enfatizan que la evolución histórica del número irracional determina diferentes significados parciales de dicha noción. Estos significados pueden ser descritos mediante configuraciones epistémicas, constituidas por diferentes redes de objetos matemáticos. Estas configuraciones permiten el análisis de libros de texto de secundaria donde se introduce dicha noción y también posibilita el análisis de procesos de estudio a implementar o ya implementados.

Rezende (2013), en su tesis doctoral, estudia los conocimientos que sobre los números irracionales son movilizados por alumnos brasileños y franceses, al concluir tres niveles de enseñanza.

Reina, Wilhelmi, Lasa y Carranza (2013) analizan la relación entre lo ostensible y lo no ostensible y la noción de simbiosis didáctica curricular entre objetos matemáticos a partir del caso de los números irracionales, su representación y clasificación en enseñanza secundaria.

Reina, Wilhelmi, Carranza y Lasa (2014) analizan la problemáticas didácticas asociadas a las propiedades de densidad y cardinalidad de los números irracionales. Se estudian algunos conflictos semióticos asociados a su enseñanza en formación de profesores.

A lo largo de estos antecedentes, en la problemática que se pretende estudiar, queda puesta de manifiesto la complejidad didáctica de los números irracionales y sus dificultades asociadas.

A continuación se describe, justifica y fundamenta el problema de investigación y se analizan los objetivos propuestos.

1.3 DESCRIPCIÓN, JUSTIFICACIÓN Y FUNDAMENTACIÓN DEL PROBLEMA A INVESTIGAR.

Para estudiar la construcción y comunicación de los objetos matemáticos en Educación Secundaria, se debe considerar la historia y la epistemología de las nociones involucradas; asimismo, se deben tener en cuentalas dificultades que emergen en los procesos de estudio de la noción de número irracional en Educación Secundaria.

Para ello analizaremos, desde un enfoque ontosemiótico (EOS; Godino, Font, Wilhelmi, Lurduy, 2010), los procesos de estudio efectivamente implementados en sesiones de clase que involucran dicha noción. Para dicho análisis emplearemos la noción de *idoneidad didáctica* junto a la articulación de sus idoneidades parciales (epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica) (Godino et al., 2006).

Los seis tipos de idoneidades nombradas anteriormente permiten describir, en un proceso de estudio implementado, diferentes trayectorias didácticas. El análisis de dichas trayectorias permite la detección de diferentes hechos y fenómenos didácticos (Wilhelmi, Godino, Font, 2007) ligados a la construcción y comunicación de la noción de número irracional.

Así, el problema de investigación busca caracterizar, en procesos de estudio que involucran la noción de número irracional con estudiantes de secundaria o con profesores (en formación y en activo), la actividad matemática desarrollada y los potenciales conflictos y dificultades emergentes en dichos procesos. Se trata a su vez de analizar la complejidad asociada a dicha noción y a sus propiedades, así como las restricciones cognitivas y de enseñanza en Educación Secundaria. Finalmente, también se pretende determinar posibles implicaciones para la formación de profesores.

Estos objetivos se concretan en las siguientes cuestiones prácticas (CP) y teóricas (CT):

- CP1: ¿En qué medida el registro de representación de la noción de aproximación de un número irracional por el algoritmo de fracción continua afecta a la actividad del estudiante?

- CP2: ¿Cuál es el grado de incidencia del uso del medio material, en la situación de aproximación de un número irracional por el algoritmo de fracción continua?

- CT1: ¿Cuáles son las posibles relaciones entre las configuraciones epistémicas asociados a la noción de número irracional en libros de texto de Educación Secundaria?

- CT2: ¿Cuáles son los potenciales fenómenos didácticos asociados a las conexiones, desarrolladas por el profesor, entre objetos matemáticos presentes en el currículo?

- CT3: ¿Es la noción de holo-significado un medio teórico propicio para la organización, estructuración y secuenciación del currículo de matemática, en particular de la noción de número irracional?

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. OBJETIVOS GENERALES

El propósito de esta investigación se encamina a:

a. Estudiar la "actividad matemática" de procesos de estudio relativos a la noción de número irracional con estudiantes de secundaria o con profesores en formación y en activo y los potenciales conflictos y dificultades emergentes en dichos procesos. Esta actividad es valorada en términos de *idoneidad didáctica* (Godino, Bencomo, Font, Wilhelmi, 2006).

b. Describir los diferentes "sentidos" asociados al número irracional, que pueden ser asociados a prácticas matemáticas propias de ciertos momentos históricos y su reflejo en los textos escolares.

c. Analizar la complejidad asociada a la noción de número irracional en Educación Secundaria a partir de la relación entre lo ostensible y lo no ostensible de objetos matemáticos presentes en el currículo de secundaria.

d. Estudiar posibles relaciones entre las configuraciones epistémicas en libros de texto de Educación Secundaria asociados a potenciales fenómenos didácticos ligados a las conexiones, desarrolladas por el profesor, entre objetos matemáticos presentes en el currículo y asociados a la noción de número irracional.

e. Analizar la complejidad asociada a la enseñanza y el aprendizaje de propiedades de los números irracionales en formación de profesores.

f. Indagar si la noción de holo-significado es un medio teórico propicio para la organización, estructuración y secuenciación del currículo, en particular de la noción de número irracional.

Con los resultados extraídos se espera poder orientar procesos de estudio relativos a los números irracionales y, en su caso, la proposición de una ingeniería didáctica reproducible.

1.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Los objetivos específicos se discriminan de acuerdo a diferentes niveles educativos y contextos de uso de las nociones asociadas a la de número irracional.

1.4.2.1. Objetivos asociados al estudio de las "configuraciones epistémicas" asociadas al número irracional

Para analizar la complejidad asociada a la noción de número irracional en secundaria, estudiaremos las "configuraciones epistémicas" asociadas al número irracional. En concreto:

a. Analizar desde el marco teórico proporcionado por el EOS la evolución histórica y epistemológica del número irracional.

b. Determinar diferentes significados parciales y contextos de uso asociados a dicha noción.

c. Analizar diversos libros de texto de secundaria donde se introduce al número irracional.

1.4.2.2. Objetivos asociados al estudio de los comportamientos de estudiantes de educación secundaria (14-15 años).

a. Realizar un estudio sobre la presencia y funcionamiento de las nociones de aproximación de número irracional y de algoritmo, que forme parte del análisis *a priori* de las condiciones de enseñanza.

b. Plasmar a través de la experimentación una situación que involucre las nociones de aproximación de número irracional y de fracción continua.

c. Formalizar un estudio *a posteriori*, desde el EOS, donde se trate de analizar, sintetizar y extraer conclusiones de dicha puesta en funcionamiento.

1.4.2.3. Objetivos asociados al estudio de los comportamientos de estudiantes en formación de profesores

a. Estudiar la complejidad asociada a la enseñanza y el aprendizaje de propiedades de los números irracionales tal como la de densidad y cardinalidad del conjunto $R\setminus Q$.

b. Identificar posibles conflictos semióticos asociados a los números irracionales en la formación de profesores y describir su origen y naturaleza, con vistas a la mejora de la formación matemática y didáctica de dichos profesores.

c. Analizar los errores emergentes y la atribución de significado, de las nociones involucradas por parte de los estudiantes.

d. Estudiar algunas problemáticas didácticas en torno al reconocimiento de patrones y regularidades en la expansión decimal de los números irracionales y racionales.

e. Identificar posibles conflictos semióticos asociados al reconocimiento de patrones y regularidades en la búsqueda de la periodicidad o la aperiodicidad numérica.

f. Analizar los errores emergentes del proceso de reconocimiento de regularidades y patrones en la expansión decimal de los números reales.

1.4.2.4. Objetivos en relación a la noción de número irracional y al currículo de matemática de educación secundaria

a. Estudiar potenciales fenómenos didácticos asociados a las conexiones, desarrolladas por el profesor, asociadas a la representación de números irracionales y a su clasificación.

b. Analizar las posibles relaciones entre las nocionesde holo-significado de un número irracional y de holo-significado de la fracción continua.

1.5. HIPÓTESIS DE TRABAJO

Atendiendo a los objetivos enunciados en los apartados anteriores, se formulan las siguientes hipótesis de trabajo:

H1: Si en la introducción y desarrollo de la noción de número irracional se utilizan de manera sistemática aproximaciones mediante fracciones continuas, entonces los estudiantes son más eficaces en los procesos de construcción y comunicación relativos a la noción, y los aprendizajes son asimismo más estables que tras una enseñanza reglada convencional donde la fracción continua está ausente o su introducción es anecdótica.

H2: Si la noción de holo-significado posibilita la descripción sistémica de la noción de número irracional, entonces es un medio teórico propicio para la organización, estructuración y secuenciación del currículo de matemática, ya que determina un marco de referencia para la noción dentro del sistema didáctico, esto es, una perspectiva global de qué técnicas se quiere enseñar en un proyecto global de enseñanza.

H3: Si el proceso de transposición didáctica de la noción de número irracional revela conflictos semióticos potenciales, entonces es necesaria la construcción de una génesis artificial escolar que permita una “recontextualización” de la noción a enseñar.

Capítulo 2

Marco teórico

En este capítulo se describen los elementos primarios y secundarios del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (sección 2.1). Luego se estudia la noción de holosignificado como emergente de diferentes sistemas de prácticas en contextos de uso determinados (sección 2.1.1). Posteriormente, se analizan las nociones de práctica matemática y prácticas discursivas, operativas y regulativas (sección 2.1.2) y la noción de “tiempo didáctico” (sección 2.1.3). Seguidamente se analizan la simbiosis didáctica curricular entre objetos matemáticos (sección 2.1.4), la noción de contrato didáctico y la dimensión normativa (sección 2.1.5). Luego se estudian las nociones de “visualización” (sección 2.1.6) y de “memoria didáctica” (sección 2.1.7). Finalmente se analizan las configuraciones y trayectorias epistémicas y didácticas (sección 2.1.8) y la “idoneidad didáctica” (sección 2.1.9) de un proceso de estudio efectivamente implementado.

2.1 ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICOS (EOS)

El Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) es una perspectiva fundada en tres aspectos: 1) las matemáticas son una actividad humana (fundamento *antropológico*); 2) los objetos matemáticos se relacionan entre sí de una manera “vital y necesaria” (fundamento *ecológico*); y 3), el conocimiento matemático es una respuesta a una cuestión práctica o teórica, ya intramatemática ya extramatemática (fundamento *pragmático*). La noción central de esta perspectiva es la “práctica matemática”, de la cual emergen las nociones de “objeto matemático”, con su “realidades duales”, y de “significado de un objeto”.

En concreto, se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel se tiene aquellas entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.). En un segundo nivel se tiene una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc., sobre los objetos del nivel anterior; nos referimos a objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc. (Godino, Batanero y Font, 2009, 6).Esta actividad matemática es analizada por el EOS a partir de las seis entidades primarias siguientes (Godino *et al*., 2009, 7).

• *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos…) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual…).

• *Situaciones-problema* (aplicaciones, tareas, ejercicios, cuestiones, etc.).

• *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función…).

• *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos…).

• *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo…).

• *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo…).

Estas entidades primarias se interrelacionan formando configuraciones o redes de objetos, que son *cognitivas* (relativas a una persona) o *epistémicas* (si son compartidas en el seno de una institución por un grupo de personas). Estas redes no son únicas para una determinada noción o proceso matemáticos, sino que están vinculadas a los contextos de uso que determinan sus distintos sentidos.

Se puede entender que hay un uso ecológico del término contexto que permite situar el objeto matemático en diferentes "lugares", por ejemplo, diferentes instituciones (universidad, secundaria, etc.). Estos "lugares" no tienen que ser solo instituciones, pueden ser también, por ejemplo, diferentes programas de investigación o diferentes "juegos del lenguaje" (Ramos y Font, 2006, 539).

El estudio de estos diferentes "lugares" donde vive el objeto número irracional lleva a conocer distintos "nichos" donde se alojó y se aloja este objeto que se manifiesta complejo.

Ahora bien, puesto que cada problema se enmarca dentro de una configuración epistémica diferente se puede entender, de manera metafórica, que la situación-problema "sitúa" el objeto en un "lugar" o en "otro" es decir, lo relaciona con un determinado tipo de lenguaje, un determinado tipo de procedimientos y técnicas, un tipo de argumentaciones, una determinada definición del objeto y unas determinadas propiedades.

Desde esta perspectiva, cada situación-problema sitúa al objeto en un determinado "nicho". De esta manera, se tiene que la situación problema cumple dos funciones, una de referencia particular al activar la dualidad extensivo - intensivo y otra, de tipo "ecológico", al situar el objeto matemático en un "nicho" o bien en otro (Ramos y Font, 2006, 541).

2.1.1 EL HOLOSIGNIFICADO DE UNA NOCIÓN MATEMÁTICA

Se puede preguntar si "¿es posible estructurar en un complejo coherente distintas definiciones de una noción matemática emergentes de diferentes sistemas de prácticas en contextos de uso determinados?" (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007, 80). La noción de holosignificado introducida por estos autores permite responder a esta cuestión, es decir, determinar qué se expresa al afirmar que una persona comprende una determinada noción.

> "Un modelo de una noción matemática representa el complejo estructurado de un sistema de prácticas en un contexto de uso determinado y de los emergentes de dichos sistemas (incluidas las definiciones); el holo-significado de una noción matemática representa la expresión de los diversos modelos asociados a la dicha noción (entendidos como un sistema único)" (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2004,3).

La adquisición del holosignificado supone la capacidad de poner en funcionamiento un pensamiento matemático flexible (PMF; Wilhelmi, 2003), es decir, la capacidad de tránsito rutinario entre diferentes significados asociados a un objeto matemático, reconociendo las limitaciones propias de cada uno de ellos; asimismo, el PMF permite establecer nexos firmes entre dichos significados y uno o varios contextos matemáticos, que determinan un control eficaz de la actividad y capacitan al sujeto para responsabilizarse matemáticamente de los resultados que produce. El holosignificado incorpora las relaciones entre dichos significados y las tensiones, filiaciones y contradicciones que entre ellos se establecen (que el pensamiento matemático flexible permite identificar, describir y controlar).

En los apartados 4.8 (del capítulo 4) y en el 5.9 (del capítulo 5) se estudian y analizan los holosignificados de las nociones de número irracional y el de fracción continua respectivamente.

En la experimentación del grupo experimental se analiza el "acoplamiento didáctico" entre holosignificados (cap.11, apartado 11.3.1) señalados en el párrafo anterior.

2.1.2 LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS OPERATIVAS, DISCURSIVAS Y REGULATIVAS EN EL EOS

Una noción central en el EOS es la de "práctica matemática".

> "Consideramos práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

Godino (2014) distingue dos tipos de prácticas, a saber, "personales e institucionales".

> "Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona (prácticas personales) o compartidas en el seno de una institución (prácticas institucionales" (p.10).

Las prácticas regulativas refieren a diferentes “momentos” que emplea el docente para intentar estabilizar el conocimiento emergente.

> “Cuando el alumno realiza prácticas no pertinentes, el profesor debe guiarlo hacia las esperadas desde el punto de vista institucional. Por ello cada tipo de objeto (conceptos, lenguajes,…) o proceso (definición, expresión, generalización,…) requiere un foco de atención, un momento, en el proceso de estudio. En particular los momentos regulativos (institucionalización) son densos por doquier en la actividad matemática y en el proceso de estudio, como también los momentos de formulación/comunicación y justificación” (Godino, Batanero, Cañadas y Contreras, 2014, 7).

A su vez las entidades primarias de la actividad matemática, analizadas en el punto 2.1, presentan cinco “dualidades” asociadas.

> “Estas seis entidades primarias, entendidas como constituyentes de la práctica operatoria y discursiva matemática dentro de una institución, presentan cinco dualidades que determinan su naturaleza y su función: *personal-institucional* (según si el significado de un objeto viene determinado por una acción cognitiva personal o por un estado cultural de dicho objeto), *ejemplar-tipo* (interpretación de la distinción concreto-abstracto), *ostensivo-no ostensivo* (estado explícito o implícito de un objeto lingüístico dado en no importa cuál registro), *elemental-sistémico* (distinción entre el objeto matemático en sí mismo y como componente del sistema de objetos matemáticos, sistema que explicita la trama de relaciones que se establecen entre los objetos matemáticos), *expresión-contenido* (que determina el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática)” (Bencomo, Godino y Wilhelmi, 2004,72).

En la figura 1 se resumen estos objetos y dualidades.

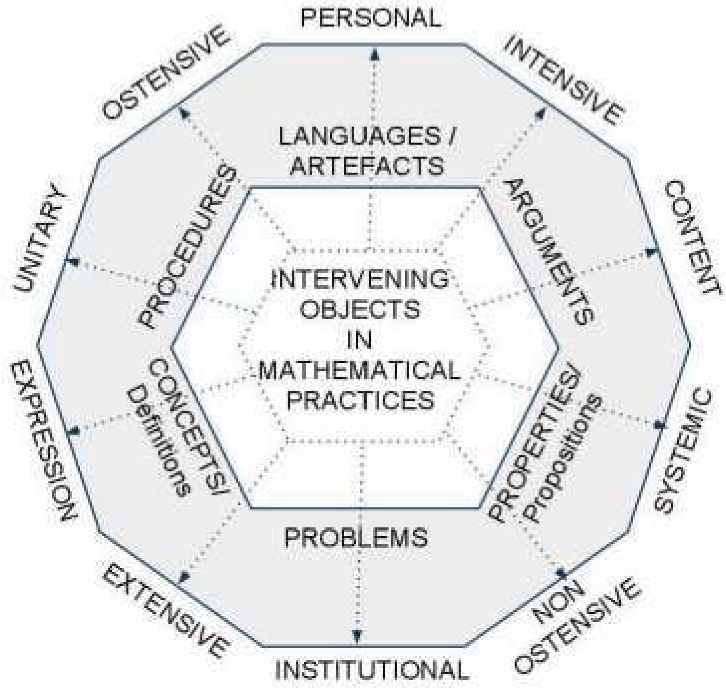


Fig.1. Objetos intervinientes en una práctica matemática (Font, Godino y Gallardo, 2013,24).

En todo proceso de estudio se observan la activación de algunas de dichas dualidades; así, por ejemplo, en la experimentación central de este trabajo se observa más adelante (apartados 12.1.1 y 12.1.2) la importancia radical de las dualidades ostensiva-no ostensiva y la unitaria-sistémica, a la vez que se presentan fenómenos didácticos asociados a dichas interacciones.

Por otro lado, un aspecto que influye de manera persistente en los procesos de estudio son los "tiempos didácticos", aspecto que se desarrolla a continuación.

2.1.3 LOS TIEMPOS DIDÁCTICOS

Un aspecto central, en todo proceso de estudio de la matemática, es el relativo a los tiempos didácticos.

> "El tiempo didáctico debemos concebirlo como un vector cuyas componentes son los valores de las duraciones temporales de las diversas actividades docentes y discentes que tienen lugar en un proceso de estudio. Tenemos que ser conscientes de que excepto la duración de las interacciones profesor-alumno que tienen lugar en la clase, las restantes

> duraciones son difícilmente accesibles a la observación externa, en particular el tiempo que cada alumno dedica al estudio personal del contenido pretendido. Este tiempo es, sin duda, un factor crucial para el aprendizaje" (Godino, Contreras y Font, 2006, 45).

Esa duración del tiempo didáctico se encuentra íntimamente relacionada con el saber.

> "Esa relación *saber/duración* es el elemento fundamental del *proceso didáctico*. La puesta en texto del saber, previamente realizada, permite que se establezca esa relación: es más, el 'texto' debe entablar una relación particular con la duración y el tiempo didácticos. El proceso didáctico existe como *interacción de un texto y una duración*" (Chevallard, 1991,75).

Los docentes de los grupos de control manifiestan explícita o implícitamente una "tensión" en relación a los tiempos didácticos, la planificación realizada y al currículo prescripto por el gobierno educativo.

Lo que intentan destacar los profesores son las "dificultades" asociadas a un "normal" desempeño de dicha duración (cap.8, apartado 8.1), se marca entonces una "diferencia" entre los tiempos de enseñanza y los de aprendizaje.

> "El tiempo de aprendizaje podemos definirlo como la duración que un alumno requiere para lograr los objetivos de aprendizaje relativos a un contenido dado. Esta duración temporal es obviamente diferente del tiempo de enseñanza, tendrá un desfase temporal respecto de la enseñanza y será específica de cada estudiante. La estimación de estas duraciones presenta dificultades importantes, no sólo por las dificultades de determinar el tiempo de estudio personal, sino también por su dependencia de los criterios de evaluación de los aprendizajes, cuando estos no se refieren meramente a aspectos algorítmicos" (Godino, Contreras y Font, 2006,45).

Se trata de un juego de relaciones donde profesor y alumno ocupan diferentes lugares en relación a los tiempos didácticos.

> "Enseñante y enseñado ocupan distintas posiciones en relación con la dinámica de la duración didáctica: difieren en sus relaciones respectivas con la *diacronía* del sistema didáctico, con lo que podemos denominar la *cronogénesis*. Pero también difieren según otras modalidades: según sus lugares respectivos en relación con el saber en construcción, en relación con lo que podemos llamar la *topogénesis* del saber, en la *sincronía* del sistema didáctico" (Chevallard, 1991,83).

Las interacciones didácticas pasan entonces a ocupar un rol determinante a partir de las decisiones didácticas que promueve el docente, tanto al momento de planificar su clase (en base al currículo oficial) como al momento de producir interacciones didácticas.

> "Nosotros vamos a interpretar la cronogénesis didáctica del saber como la generación en el tiempo del saber matemático escolar como consecuencia de la interacción didáctica. […] Interpretaremos la topogénesis del saber como la distribución de la responsabilidad principal del estudio de los distintos elementos del significado sistémico de los objetos matemáticos entre el profesor y el alumno. El profesor decide qué elementos del significado de los objetos matemáticos estarán bajo la responsabilidad total o parcial de los alumnos y cuáles toma a su cargo […] Las decisiones crono y topogenéticas que adopta el profesor fijan los significados implementados en la clase y lo que finalmente tienen oportunidad de aprender los estudiantes" (Godino, Contreras y Font, 2006,45).

Uno de los focos de estudio, en la presente memoria, se centra en las interacciones didácticas, promovidas por el profesor, entre objetos matemáticos a la hora de la enseñanza.

2.1.4 LA SIMBIOSIS DIDÁCTICA CURRICULAR ENTRE OBJETOS MATEMÁTICOS

Se ha señalado en el punto anterior las restricciones que generan los tiempos didácticos asociados a los *saberes matemáticos a enseñar* (Chevallar, 1991). Ahora se muestran otros tipos de restricciones presentes en un proceso de estudio de la matemática.

> “Los matemáticos aseguran la creación matemática según una génesis que depende esencial (pero no solamente) de los problemas a resolver. La escuela desarrolla una génesis artificial diferente, habida cuenta de las coacciones a las que está sometida: por ejemplo, la presión del tiempo, la complejidad del campo científico y los problemas con el origen de la noción descontextualizada elegida para ser enseñada y la recontextualización artificial a la que se la conduce antes del despojo recuperado. Las convenciones sociales, los textos oficiales —programas, instrucciones, comentarios— los libros escolares ejercen una presión determinante sobre esta transformación” (Douady, 1984, 73).

Reina, Wilhelmi, Lasa y Carranza (2013) definen simbiosis didáctica curricular (SDC) como:

> “Aquella que proviene de la necesidad, por parte del profesor, de establecer conexiones entre objetos matemáticos presentes en el currículo y asociados a la noción que se desea enseñar. Dicha necesidad proviene de la búsqueda de una “génesis artificial escolar”, por parte del docente, que permita una “recontextualización” de la noción a enseñar, no exenta de presiones” (p.12) (fig.2).

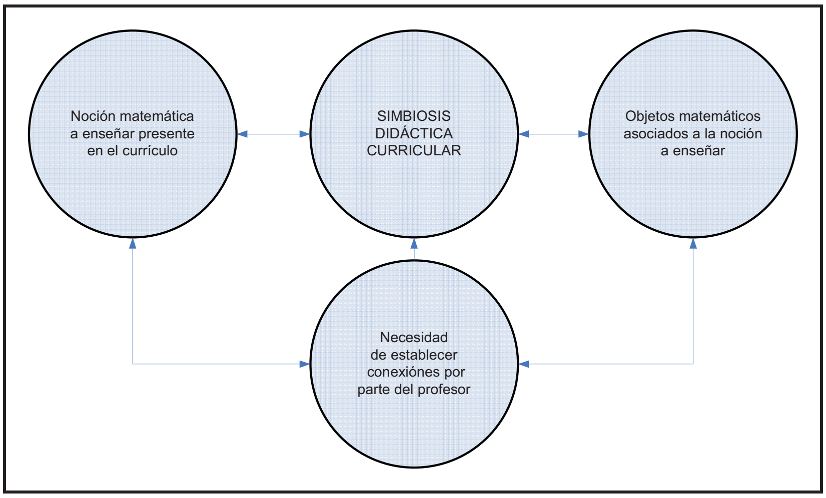


Fig.2. Simbiosis didáctica curricular entre una noción matemática y sus objetos asociados (Reina, Wilhelmi, Lasa y Carranza, 2013, 12).

Si no se percibe tal necesidad, por parte del profesor, entonces no habrá simbiosis didáctica curricular y el recorrido didáctico llevado adelante en su proyecto de enseñanza llegará a su final, quedando truncado el recorrido por otros objetosy representaciones asociados a la noción a enseñar.

> "Para el enseñante, la herramienta esencial desu práctica *es el texto del saber* (que deviene palabra a través de él), en las variaciones que él se permite imponerle. Las otras variables de gobierno de las que puede disponer -especialmente aquellas que no están específicamente ligadas a contenidos de saber- son variables subordinadas y le permiten sobre todo organizar la puesta en marcha de su primer arma, el texto del saber. Éste, el único capaz de hacer existir alenseñante en cuanto tal, es al mismo tiempo el principal instrumento terapéutico. Es a través de él e inmediatamente gracias a él, que el enseñante actuará para modificar los efectos de la enseñanza o para actuar sobre lo que siga siendo patológico, a pesar a la enseñanza dada" (Chevallard, 1991, 41-42).

Dichas interacciones entre diferentes objetos matemáticos (al menos dos), en el aula, se pueden manifestar de manera distinta al propuesto en la planificación o la programación realizada por el docente.

A lo largo del presente estudio se observan diferentes interacciones entre objetos matemáticos propuestos principalmente por el profesor, al momento de su enseñanza; aunque en algunos casos, dichas interacciones pueden ser propuestas por alumnos (cap.8, apartado 8.1).

Se debe resaltar que ciertas interacciones didácticas observadas se presentan de modo "dialéctico", es decir el docente propone una relación entre objetos matemáticos "opuestos". Para este tipo de interacción se propone el nombre de "interacción didáctica dialéctica" (IDD).

Como se observará, en varias de las sesiones de clase observadas las IDD's planteadas por el profesor se presentan en una dinámica de interacción de más de dos objetos dialécticos. Estas actúan, en su mayoría, "perturbando" la estabilidad del conocimiento emergente (apartado 8.1).

Allí el "conocimiento previo" de uno (o varios) de los objetos matemáticos presente en la interacción, el conocimiento "antiguo", ocupa un rol importante y, en ocasiones, incide perturbadoramente sobre el conocimiento “nuevo”, el conocimiento “emergente”.

Ya Chevallard (1991) señala la “contradicción antiguo-nuevo” en el proceso de enseñanza, para el caso de “un” objeto matemático.

> “Para que un objeto de saber pueda integrarse como objeto de enseñanza en ese proceso, es preciso que su introducción, en un momento determinado de la duración didáctica, lo haga aparecer como un objeto con dos caras, contradictorias entre sí. Por una parte (es el primer ‘momento’, la primera ‘cara’) debe aparecer como algo nuevo […] Pero por otro lado, en un segundo momento de la dialéctica de la enseñanza, debe aparecer como un objeto antiguo, es decir, que posibilita una identificación (por parte de los alumnos) que lo inscribe en la perspectiva del universo de los conocimientos anteriores” (p.77).

Se puede preguntar ¿qué ocurre en la enseñanza cuando se trata de dos o más objetos matemáticos en interacción didáctica, e inclusive en interacción didáctica dialéctica?

Puede ocurrir que, como se señala en párrafos anteriores, cuando el conocimiento previo se encuentra aún en un estado inestable, en el alumno, condicione la emergencia de conocimientos estables.

Además de lo señalado en el párrafo anterior puede presentarse intervenciones regulativas y resoluciones de conflictos, por parte del docente, y la reutilización de objetos en contextos equiparables (o no), por parte del alumno, esto da lugar a diferentes “niveles” de SDC.

Algunos de los indicadores que permiten determinar el nivel alcanzado por dichas SDC’s son los siguientes:

- *SDC-óptimo (Estable, Eficaz, Reutilizable) (EER).*Se reconoce este nivel de simbiosis a partir de un conocimiento previo *estable*, donde las intervenciones docentes para la resolución de conflictos semióticos es *eficaz* (ya por una regulación expresa del docente, ya por una devolución de la tarea a los estudiantes que permite a éstos su resolución). La resolución eficaz conlleva un aprendizaje estable, que permite la *reutilización* de los objetos en contextos equiparables y, en su caso, su extensión justificada a otros contextos de uso.

- *SDC-alto (Estable, Eficaz, Contextual) (EEC)*. Es posible reconocer este nivel de simbiosis a partir de un conocimiento previo *estable*, donde la resolución de conflictos aun siendo *eficaz*, ha estado muy centrada en el *contexto* propio original y no permite al estudiante la determinación de su campo de validez o eficacia. Esta falta de análisis del campo de validez limita la reutilización de los objetos emergentes, limitando su uso al contexto propio original y, por lo tanto, condicionando su estabilidad.
- *SDC-medio (Estable, No Regulativo, No estable) (ENN)*.Se puede reconocer este nivel de simbiosis a partir de un conocimiento previo *estable*, donde la resolución de conflictos ha conllevado intervenciones *regulativas no contrastadas* y las producciones de los estudiantes, aun siendo correctas, carecen de un sustento discursivo que garantice la estabilidad de los conocimientos emergentes, incluso en el contexto original en tareas propuestas fuera de la unidad de trabajo.
- *SDC-bajo*: Se tiende a este nivel de simbiosis si:

  - O bien la carencia (o la inestabilidad) del conocimiento previo restringe la eficacia de las intervenciones y condiciona la emergencia de conocimientos estables.
  - O bien la resolución de conflictos es ineficaz (parcial o totalmente), limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo, en todo caso, un significado atomizado, sin conexiones matemáticas que viabilicen su estabilidad y reutilización en tareas posteriores.

Se puede pensar, según lo señalado hasta el momento, a la SDC como un tipo particular de norma "epistémica" y "ecológica" (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009) que regula los contenidos matemáticos, que en el caso de la presente investigación se presenta entre los objetos número racional, número irracional y fracción continua (FC).

En el apartado siguiente se analizan la visión que desde la teoría de situaciones didácticas (TSD) y el enfoque ontosemiótico se presentan sobre la noción de contrato didáctico y las normas sociomatemáticas.

2.1.5 LA NOCIÓN DE CONTRATO DIDÁCTICO Y LA DIMENSIÓN NORMATIVA

La noción de contrato didáctico, propuesta por Brousseau, puede pensarse en relación a un juego de normas en la relación didáctica.

"Es en la relación que sostienen el docente y el (los) alumno(s) *a propósito de la situación adidáctica*, o más en general, *a raíz de cierto objeto matemático* – esta es la relación didáctica – que el docente va comunicando, a veces explícitamente, y muchas otras de manera implícita, a través de palabras y también de gestos, actitudes y silencios, aspectos vinculados al funcionamiento del asunto matemático que se está tratando en clase. Este juego sutil, muchas veces difícil de atrapar, en el que a raíz del trabajo con respecto a cierto objeto matemático se negocian significados, se trasmiten expectativas mutuas, se sugieren o se infieren modos de hacer, se comunican o se interpretan (explícita o implícitamente) normas matemáticas, este juego es el contrato didáctico" (Sadovsky, 2005, 38).

Se puede pensar a dicho contrato a partir de sus rupturas como fuente de evolución del conocimiento en clase de matemática.

> "En particular las cláusulas de ruptura y de realización del contrato no pueden ser descritas con anterioridad. El conocimiento será justamente lo que resolverá la crisis nacida de estas rupturas que no pueden estar predefinidas. Sin embargo en el momento de estas rupturas todo pasa como si un contrato implícito uniera al profesor y al alumno: sorpresa del alumno que no sabe resolver el problema y que se rebela porque el profesor no le ayuda a ser capaz de resolverlo, sorpresa del profesor que estima sus prestaciones razonablemente suficientes..., rebelión, negociación, búsqueda de un nuevo contrato que depende del "nuevo" estado de los saberes... adquiridos y apuntados" (Brousseau, 1986,46).

En varias de las sesiones descritas (por ejemplo, en el apartado 6.3.1) los profesores apelan a un contrato por "ostensión", es decir, los profesores "muestran" un objeto matemático e infieren un aprendizaje "instantáneo" a partir de dicha muestra.

> "El profesor muestra un objeto, o una propiedad, el alumno acepta 'verlo' como el representante de una clase de la cual deberá reconocer, en otras circunstancias, sus elementos. La comunicación del conocimiento, o más bien del reconocimiento, no pasa por su explicitación como saber. Está sobreentendido que este objeto es el elemento genérico de una clase que el alumno debe imaginar haciendo jugar determinadas variables que a menudo son implícitas. [...] Esta presentación ostensiva permite además una 'familiarización' con un objeto de estudio que se supone será retomado y redefinido más adelante. [...] La inducción radical exigida por el contrato de ostensión fracasa a menudo" (Brousseau, 2007, 101-102).

El contrato didáctico, en un proceso de estudio de la matemática, puede ser visto como un conjunto de normas sociomatemáticas.

> "En el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) la *dimensión normativa* está constituida por el sistema de normas que regulan el funcionamiento de losprocesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos en un contexto institucional determinado. Estas normas, explícitas o implícitas, pueden ser establecidas por agentes externos al ámbito escolar, o por el profesor, y afectan a las diversas dimensiones del proceso de estudio" (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009, 660).

Desde el EOS se presentan un conjunto de normas de acuerdo a diferentes dimensiones del proceso didáctico.

> "Proponemos considerar las normas según la faceta del proceso de estudio a que se refiere la norma: epistémica, cognitiva, interaccional,
>
> mediacional, afectiva y ecológica. Esto permite fijar la atención en las normas que regulan:

– Las matemáticas susceptibles de ser enseñadas ya prendidas en una institución.

– La manera en que los alumnos construyen y comunican las nociones, procesos y significados matemáticos.

– Las interacciones docente-discente y discente-discente.

– El uso de los recursos humanos, materiales y temporales.

– La afectividad de las personas que intervienen en elproceso de estudio.

– La relación con el entorno (sociocultural, político, laboral…) en el que se desarrolla el proceso de instrucción (Godino,Font, Wilhelmi y de Castro, 2009,64).

Esta tipología de normas sociomatemáticas regulan la actividad del alumno y las interacciones entre los actores presentes en clase de matemática.

La noción de SDC, como un tipo de norma sociomatemática, se emplea en este estudio a fin de analizar las interacciones de objeto matemáticos propuestos por los profesores.

Se observan diferentes dificultades producto de estas interacciones didácticas, algunas de ellas relativas a la "visualización" de un objeto matemático.

2.1.6 LA VISUALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La noción de "visualización" ocupa un lugar destacado en educación matemática.

> "Es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, la interpretación, el uso y la reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el fin de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas." (Arcavi, 2003, 217).

Desde el enfoque ontosemiótico sepresentan algunas dualidades asociadas a los objetos y procesos implicados en la visualización.

> "En el marco del EOS se consideran las siguientes dualidades aplicables a los objetos matemáticos:
>
> 1) Personal e institucional, individuales o idiosincrásicos de una persona, sociales o compartidas por un colectivo, o comunidad.
>
> 2) Ostensivo (perceptible), no ostensivo (inmaterial, mental o ideal). Aqui se tiene en cuenta las distinciones entre representaciones materiales (artefactos materiales o simbólicos) y las representaciones mentales (esquemas,...), o sociales (reglas o hábitos compartidos en una institución o comunidad de prácticas).
>
> 3) Unitario y sistémico. Las imágenes son vistas como un todo y se "opera" con ellas como un todo unitario, o bien son vistas como sistemas formados por partes, y se opera con las partes.
>
> 4) Extensivo - intensivo (ejemplar - tipo; particular - general). Una imagen puede ser usada como icono de una clase o tipo de objetos visuales.
>
> 5) Expresión - contenido (función semiótica; representación - significación). Ayuda a distinguir entre las representaciones visuales y los objetos no ostensivos representados (Godino *et al.*, 2012, 117-118).

De esta forma, la visualización puede situarse en medio de las dualidades asociadas a los objetos matemáticos y que representan su estatus contextual (figura 3).

Fig.3. Especificaciones contextuales de la visualización (Godino *et al.*, 2012, 117-118).

En una tarea matemática dos componentes son importantes en la comprensión de dicha actividad, el “visual” y el “analítico”.

> “La configuración de objetos y procesos asociados a una práctica matemática estará formada usualmente por dos componentes, uno visual y otro analítico, los cuales se apoyan sinérgicamente en la solución de la tarea correspondiente. El componente visual puede desempeñar un papel clave en la comprensión de la naturaleza de la tarea y en el momento de formulación de conjeturas, mientras que el componente analítico lo será en el momento de generalización y justificación de las soluciones” (Godino *et al.,* 2012, 126).

Los hechos y fenómenos (Wilhelmi, Font y Godino, 2005) observados en el proceso de visualización se analizan en los grupos de control y experimental, éstas se pueden asociar a las activaciones de las dualidades: ostensivo-no-ostensivo, unitario-sistémico y expresión - contenido (capítulo 12, apartado 12.3.1 y 12.3.2).

2.1.7 LA MEMORIA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Los docentes de los grupos de control invocan la “memoria“ del alumno al momento de intentar recuperar conocimientos “antiguos”.

> “El docente toma en cuenta la historia del sujeto y la suya propia, acepta tener una ‘memoria didáctica’. En este caso es necesario un contrato didáctico nuevo porque el alumno desarrolló su propia relación con el saber antiguo al que ya le atribuyó un sentido, un lugar en el establecimiento de otros saberes. Revisar un saber antiguo exige entonces un nuevo reparto de responsabilidades entre el profesor y el alumno” (Brousseau, 2007, 108).

Se trata de intentos de “gestionar” dicha memoria por parte del docente.

> “Entendemos gestión de la memoria didáctica, como la realización de gestos por parte del profesor con el fin de movilizar relaciones a los objetos de saber de los estudiantes indexados en el tiempo. Dado que esos gestos son relativos a la memoria, los llamamos gestos memoriales y los términos genéricos para describirlos pueden ser, por ejemplo: escribir, hablar, no hablar, señalar, dibujar, indicar, preguntar, etc.” (Araya Chacón, 2010, 272).

Algunos de los gestos memoriales se pueden clasificar como de tipo “cronológico” (apartado 7.1.1.1).

> “Se trata de realizar comentarios que incluyan el empleo de marcadores del tiempo natural escolar, vistos por la persona que ejecuta el gesto como posibles anticipaciones del recuerdo. Los marcadores indican el momento (en sentido amplio) en el cual los estudiantes frecuentaron lo que el docente espera reactivar. Así, a partir de la evocación de ese momento, los alumnos deben situarse en dicho instante para reconstruir los conocimientos que serán solicitados. Los ‘marcadores‘ son relativos a grandes estructuras temporales: por ejemplo los niveles escolares, los trimestres, los ciclos de estudio, etc.” (Araya Chacón, 2010, 275).

Otros gestos memoriales pueden se pueden tipificar de tipo “tecnológico”, como se muestra en el capítulo 7 (apartado 7.1.1.1).

> “Se trata de hacer comentarios o preguntas que evoquen un elemento tecnológico de una organización matemática (OM) conocida por los

> estudiantes. La reactivación de este elemento es vista como la reactivación de un punto de referencia que el alumno puede utilizar para anticipar el recuerdo que el profesor estima necesario movilizar. Observemos que un ‘elemento tecnológico’ de una OM es un constructo institucional. Por lo tanto, ‘cualquier’ objeto podría ser ‘tecnológico’, dado que el rol explicativo, justificativo o productor es interno y relativo a las prácticas realizadas en la institución (Araya Chacón, 2010, 276).

A lo largo de las sesiones de los grupos, tanto de control como experimental, a los profesores les resultó “necesario” el uso de la memoria didáctica de los alumnos. Esto último forma parte de las configuraciones y trayectorias epistémicas y didácticas analizadas.

2.1.8 LAS CONFIGURACIONES Y TRAYECTORIAS EPISTÉMICAS Y DIDÁCTICAS DE UN PROCESO DE ESTUDIO DE LA MATEMÁTICA

Para caracterizar el significado institucional efectivamente implementado y su complejidad ontosemiótica asociada, (Godino, Contreras y Font, 2006) señalan la importancia de las nociones de “configuración epistémica” y la de “trayectoria epistémica”.

> “El análisis de la trayectoria epistémica de un proceso instruccional permitirá caracterizar el significado institucional efectivamente implementado y su complejidad onto-semiótica. Para analizarla, su desarrollo o crónica será dividido en unidades de análisis de acuerdo a las distintas situaciones-problemas (o tareas) que se van proponiendo. Llamaremos configuración epistémica al sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos relativos a la resolución de una situación-problema. Se trata, por tanto, de un segmento de la trayectoria epistémica. El análisis epistémico será la caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. La atención se fija en la cronogénesis del saber matemático escolar, y en la caracterización de su complejidad onto-semiótica”(p.47).

Dicha caracterización se describe tanto para los grupos de control (cap.6 y 7) como para el grupo experimental (cap.11).También en esos estudios se muestran las configuraciones y trayectorias didácticas de los procesos de estudios efectivamente implementados (cap.6,7 y 11).

Desde el punto de vista del EOS, el análisis didáctico debe centrarse y progresar a partir de diferentes aspectos teóricos, a saber, la de "configuración didáctica y la de "trayectoria didáctica".

> "El centro de atención del análisis didáctico debiera progresar desde la situación – problema (o del concepto/ estructura conceptual) a la configuración epistémica/ cognitiva, y de ésta hacia la configuración didáctica –que incluye no sólo el saber y los sujetos sino también el papel del profesor, los recursos y las interacciones entre los diversos componentes. En la siguiente etapa la unidad de análisis didáctico debe contemplar la trayectoria o secuencia de configuraciones didácticas, esto es, el progresivo "crecimiento matemático" de los aprendizajes (figura 4). Con la expresión metafórica "crecimiento matemático" queremos expresar la intencionalidad del proceso educativo hacia la formación de ciudadanos o profesionales competentes y creativos en el área de las matemáticas" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006,228).

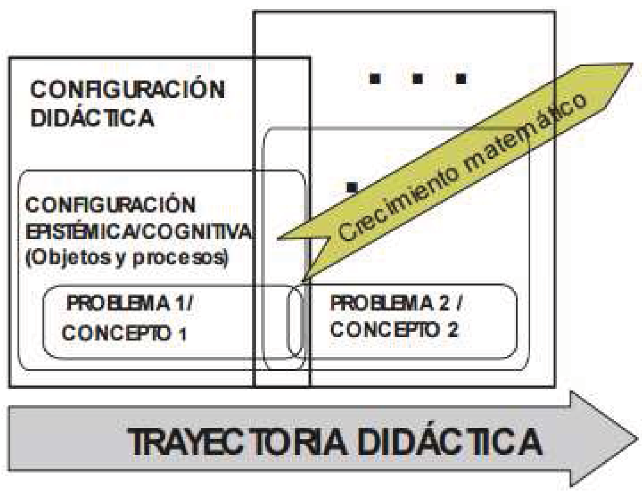


Fig.4. Evolución de la trayectoria didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006,228).

Finalmente, se intenta la construcción de la idoneidad didáctica del proceso de estudio efectivamente implementado.

2.1.9 LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE PROCESOS DE ESTUDIO DE LA MATEMÁTICA

En este apartado se introducen criterios a tener en cuenta para valorar la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático.

> "La valoración de la idoneidad de un proceso de instrucción matemática requiere disponer de información detallada de los hechos que ocurren y elementos de referencia que autoricen a emitir los juicios de adaptación, pertinencia o eficacia correspondientes a la dimensión valorada. Uno de los objetivos de la modelización mediante procesos estocásticos y sus correspondientes estados que elaboramos en este trabajo es ayudar a identificar conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales, que son origen de desajustes entre el diseño del proceso instruccional y su implementación. La identificación de estos conflictos y su descripción permite emitir un juicio de valor fundamentado sobre la idoneidad de un proceso de instrucción matemática y elaborar criterios para el diseño e implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje matemático"(Godino, Contreras y Font, 2006,42).

Godino, Contreras y Font (2006) introducen criterios a tener en cuenta para valorar la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático:

1. *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.
2. *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
3. *Idoneidad interaccional*, grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos

semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados.

4. *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.
5. *Idoneidad emocional*, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
6. *Idoneidad ecológica*, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc. Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la idoneidad didáctica como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos/ implementados"(Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006,225).

La valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio efectivamente implementado, en la presente memoria, se analiza en el capítulo 12 (apartado 12.4).

Capítulo 3

Marco metodológico

En este capítulo se analiza el marco metodológico a emplear en el estudio. Primeramente se realiza una descripción general del diseño de experimentos (sección 3.1). Posteriormente se analiza la investigación basada en el diseño como una metodología a emplear en la investigación (sección 3.2). Seguidamente se examina una herramienta gráfica para el análisis cuantitativo de patrones de interacción, la cual se emplea en el estudio (sección 3.3). Finalmente se estudia la ingeniería didáctica como método de investigación a emplear basada en el diseño (sección 3.4).

3.1 DISEÑO DE EXPERIMENTOS

En este apartado se realiza una descripción general de la secuencia de enseñanza. Se trata de un diseño experimental con grupos de control no equivalentes. Se realiza una selección no azarosa de tres grupos. En uno de ellos (el grupo experimental) se aplica una innovación al introducirse un objeto matemático, no previsto en el currículo de matemática de ES, se trata de la noción de fracción continua (FC) que intenta utilizarse como herramienta para el aprendizaje introductorio de la noción de número irracional en ES. Mientras que los otros dos grupos (grupos control) se continua con la programación habitual de los docentes involucrados en la investigación.

La secuencia de enseñanza que se describe, en forma general a continuación, se implementa con un grupo de alumnos de tercer año de una escuela secundaria técnica. Se organiza en veinte actividades, en cada una de las cuales interaccionan diferentes objetos matemáticos en distintos contextos de uso de las nociones a analizar (tabla 1).

Actividades de la secuencia	Interacciones entre objetos matemáticos	Contexto	Uso de materiales
Actividad 1	Número racional- FC (geométrica)	Geométrico-numérico	Regla y lápiz Calculadora
Actividad 2	Número racional- FC (geométrica)	Geométrico-numérico	Regla y lápiz Calculadora
Actividad 3	FC (algoritmo finito)- Número racional	Aritmético	Calculadora
Actividad 4	FC (algoritmo finito)-Número racional	Aritmético	Calculadora
Actividad 5	FC (geométrica)	Geométrico	Regla y lápiz
Actividad 6	FC (algoritmo infinito)- Número irracional	Aritmético	Calculadora
Actividad 7	FC – Número irracional	Aritmético	Calculadora
Actividad 8	FC – Número irracional	Aritmético	Calculadora
Actividad 9	FC-Desarrollo en cocientes parciales	Geométrico-Aritmético	Calculadora
Actividad 10	FC-Desarrollo en cocientes parciales	Aritmético	Computadora
Actividad 11	FC- Aproximación	Geométrico-Aritmético	Hoja de dimensión A4 Calculadora
Actividad 12	FC (desarrollo cocientes parciales) – Número irracional (aproximación) FC- aproximación por desarrollo en cocientes parciales	Aritmético	Calculadora
Actividad 13 a y b	Número irracional- Aproximación	Geométrico-numérico	Computadora
Actividad 14	Número irracional-aproximación FC- aproximación por desarrollo en cocientes parciales	Geométrico-Numérico	Computadora
Actividad 15	Número irracional-aproximación	Geométrico-Aritmético	Calculadora
Actividad 16	FC-aproximación	Geométrico-Aritmético	Hoja de papel tamaño "legal" Calculadora
Actividad 17	FC (desarrollo cocientes parciales) – Aproximación	Geométrico-Aritmético	Calculadora
Actividad 18	FC (desarrollo cocientes parciales) – Número irracional (aproximación)	Geométrico-Aritmético	Calculadora
Actividad 19	Número irracional- FC (aproximación)	Aritmético	Calculadora
Actividad 20	Trabajo práctico integrador	Aritmético	Calculadora

Tabla 1. Secuencia de actividades prevista, interacciones entre objetos matemáticos y contexto de uso.

El profesor del grupo experimental se constituye en docente-investigador ya que es quien realiza el estudio y, a su vez, es docente del grupo a estudiar. El grupo experimental consta de un total de treinta y dos alumnos.

La descripción del diseño de la secuencia de situaciones para experimentación y las respuestas esperadas de los alumnos se estudia en el capítulo 10.

3.1.1 CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA EXPERIMENTACIÓN DEL GRUPO EXPERIMENTAL

A continuación se describen algunas características generales de la experimentación correspondiente al grupo experimental, tales como: el número se sesión y las evaluaciones realizadas, la fecha de realización de la experiencia, las actividades de la secuencia realizadas, la organización de la clase que lleva adelante el docente y la recogida de datos (tabla 2).

Sesión	Fecha	Tiempo de grabación en video (aprox.)	Actividades de la secuencia realizadas	Organización de la clase	Recogida de datos
N°1	06-05-13	60'	N°1, N°2, N°3, N°4 y N°5.	Grupal	Grabación en vídeo y audio Hojas de trabajo de los alumnos
N°2	10-05-13	30'	N°6.	Grupal	Ídem anterior
N°3	13-05-13	65'	N°7.	Grupal	Ídem anterior
N°4	16-05-13	58'	N°8.	Grupal	Ídem anterior
N°5	23-05-13	37'	Tarea de revisión Propuesta por el docente N°9.	Grupal	Ídem anterior
N°6	24-05-13	30'	N°10.	Grupal	Ídem anterior
N°7	27-05-13	44'	N°10. Tarea propuesta por el docente	Grupal	Ídem anterior
N°8	31-05-13	51'	Tarea propuesta por el docente.	Grupal	Ídem anterior
N°9	03-06-13	56'	Tarea propuesta por el docente.	Grupal	Ídem anterior
Ev.N°1	07-06-13	No filmada	Evaluación común a los grupos de control y experimental	Individual	Fotocopias de las evaluaciones escritas de los alumnos
N°10	10-06-13	70'	N°11.	Grupal	Grabación en vídeo y audio Hojas de trabajo de los alumnos
N°11	17-06-13	54'	N°12.	Grupal	Ídem anterior
N°12	24-06-13	55'	N°13.	Grupal	Ídem anterior
N°13	27-06-13	40'	N°14, N°15, N°16.	Grupal	Ídem anterior
N°14	01-07-13	52'	N°17, N°18, N°19.	Grupal	Ídem anterior
N°15	01-08-13	66'	N°20: Trabajo práctico Integrador.	Individual Grupal	Grabación en video y audio
N°16	02-08-13	27'	N°20: Trabajo práctico Integrador.	Grupal	Ídem anterior
N°17	05-08-13	68'	N°20: Trabajo práctico Integrador.	Grupal	Ídem anterior
N°18	07-08-13	66'	Revisión trabajo Práctico integrador.	Grupal	Ídem anterior
Ev.N°2	15-08-13	No filmada	Evaluación de proceso	Individual	Fotocopias de las evaluaciones escritas de los alumnos
Ev.N°3	05-09-13	No filmada	Evaluación integradora (trimestral)	Individual	Fotocopias de las evaluaciones escritas de los alumnos

Tabla 2. Características generales de la experimentación (grupo experimental).

La descripción de la experimentación y los resultados obtenidos se analizan en el capítulo 11.

3.1.2 Características generales de las experimentaciones de los grupo de control

El grupo control 1, correspondiente al docente 1, consta de un total de cuarenta y dos alumnos y el del grupo 2 de veintiséis.

El análisis didáctico de los grupos de control se lleva adelante en la parte II de la memoria constituyendo dicha parte los capítulos 6 y 7.

Las trayectorias didácticas de los grupos de control y las implicaciones de dichas trayectorias observadas se analizan en el capítulo 8.

Se muestran a continuación las características generales de las experimentaciones tanto del grupo de control 1 como los del 2 (tablas 3 y 4).

Sesión	Fecha	Tiempo de grabación en video (aprox.)	Objetos matemáticos	Organización de la clase	Recogida de datos
N°1	16-04-13	101'	Conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ y sus propiedades Número irracional Identificación de números irracionales Representación en la recta real de un número irracional	Individual	Grabación en vídeo y audio Hojas de trabajo de los alumnos Notas del investigador
N°2	17-04-13	69'	Representación geométrica de algunos números irracionales Teorema de Pitágoras Inconmensurabilidad entre segmentos Aproximación de irracionales Radicales- Propiedades de la radicación	Grupal	Grabación en vídeo y audio Hojas de trabajo de los alumnos Notas del investigador
N°3	22-04-13	100'	Radicales. Potencias de exponente fraccionario. Raíces sucesivas de un número real Simplificación de radicales	Individual	Grabación en vídeo y audio Hojas de trabajo de los alumnos Notas del investigador
N°4	24-04-13	58'	Suma y resta de radicales. Perímetro y área de una figura convexa plana. Factorización del radicando.	Individual	Grabación en vídeo y audio Hojas de trabajo de los alumnos Notas del investigador
Ev.N°1	21-05-13	No filmada	Evaluación de proceso	Individual	Fotocopias de las evaluaciones escritas de los alumnos
Ev.N°2	28-05-13	No filmada	Evaluación integradora (trimestral)	Individual	Fotocopias de las evaluaciones escritas de los alumnos
Ev.N°3	04-06-13	No filmada	Evaluación común a los grupos control y experimental	Individual	Fotocopias de las evaluaciones escritas de los alumnos

Tabla 3. Características generales de la experimentación grupo de control 1.

Sesión	Fecha	Tiempo de grabación en video (aprox.)	Objetos matemáticos	Organización de la clase	Recogida de datos
N°1	07-05-13	60'	Números racionales Periodicidad Numérica Números irracionales Valor exacto y aproximado de un irracional	Grupal	Grabación en vídeo y audio Hojas de trabajo de los alumnos Notas del investigador
N°2	08-05-13	92'	Valor exacto y aproximado de un irracional. Propiedades de la radicación y la potenciación. El conjunto de los números irracionales. El conjunto de los números reales.	Individual	Grabación en vídeo y audio Hojas de trabajo de los alumnos Notas del investigador
N°3	22-05-13	74'	Representación de irracionales en la recta numérica real. Teorema de Pitágoras	Individual	Grabación en vídeo y audio Hojas de trabajo de los alumnos Notas del investigador
N°4	24-05-13	56'	Radicales. Operaciones. Factorización del Radicando. Área y superficie.	Individual	Grabación en vídeo y audio Hojas de trabajo de los alumnos Notas del investigador
Ev.N°1	25-06-13	No filmada	Evaluación común a los grupos control y experimental	Individual	Fotocopias de las evaluaciones escritas de los alumnos
Ev.N°2	30-07-13	No filmada	Evaluación de proceso	Individual	Fotocopias de las evaluaciones escritas de los alumnos
Ev.N°3	20-08-13	No filmada	Evaluación integradora (trimestral)	Individual	Fotocopias de las evaluaciones escritas de los alumnos

Tabla 4. Características generales de la experimentación grupo de control 2.

Para la elaboración, gestión y valoración de procesos de estudio se recurre una investigación basada en el diseño la cual se analiza en el siguiente apartado.

3.2 LA INVESTIGACIÓN BASADA EN EL DISEÑO

La presente investigación se basa en una metodología con "base en el diseño" con esto intenta superar las limitaciones de la metodología de investigación basada en el "diseño de experimentos" y la "metáfora agrícola".

> "El diseño de experimentos se basa en la metáfora 'agrícola'. La noción básica era que si dos campos de una cosecha particular fueron tratados de manera idéntica a excepto en una variable, entonces las diferencias en las cosechas producidas se podrían atribuir a la diferencia en esa variable. Si se quiere probar que un nuevo método de enseñanza del contenido X produce mejores resultados, se podría hacer un experimento en el que dos grupos de alumnos estudian X: un grupo recibe una enseñanza tradicional, mientras que el otro se le enseña con el nuevo método. Si los

estudiantes que recibieron la nueva enseñanza obtienen mejores puntuaciones, se tendría evidencia de la superioridad del nuevo método intruccional" (Font y Godino, 2011, 30).

Sin embargo este tipo de metodología de investigación presenta diferentes problemáticas que han sido señaladas, entre otros, por Schoenfeld (2000, citado por Font y Godino, 2011).

> "Imaginemos que se puede construir un test equitativo para comparar estas formas de instruir. Y supongamos que los estudiantes fueron asignados aleatoriamente a los grupos experimentales y de control, y que se aplicaron procedimientos de experimentación tradicionales. A pesar de todo esto, todavía podría haber problemas potencialmente graves. Si a los dos grupos de estudiantes les enseñan diferentes profesores, cualquier diferencia en los resultados podría atribuirse a las diferencias en la enseñanza. Pero incluso con el mismo profesor, podría haber innumerables diferencias. Puede haber una diferencia en la energía o compromiso: enseñar el «mismo viejo material» no es lo mismo que intentar nuevas ideas. O los estudiantes en uno de los grupos pueden saber que están probando algo nuevo y experimental. Sólo esto puede provocar diferencias significativas. (Hay una extensa bibliografía que muestra que si sienten que se están haciendo cambios por su propio interés, trabajarán más duro y mejor, sin importar, de hecho, cómo sean los cambios. Los efectos de estos cambios se desvanecen con el tiempo). O bien los estudiantes se pueden retraer si se sienten que se experimenta con ellos" (p.31).

En el presente estudio se intenta superar dichas dificultades

> "A pesar de las dificultades que plantea el diseño de experimentos en la educación, hay una fuerte tendencia a desarrollar una metodología de diseño de experimentos que supere las dificultades apuntadas. En el *Handbook of international research in mathematics education* (English y otros, 2002) se presenta el complejo panorama de las cuestiones investigadas en educación matemática.[…] En este libro se destaca que el desarrollo de una metodología de «experimentos de enseñanza» -

mediante los cuales se va más allá de la observación de entorno naturales de enseñanza, centrando la atención sobre desarrollos inducidos en entornos cuidadosamente controlados y matemáticamente enriquecidos, y que investigan las interacciones entre los estudiantes, profesores y restantes agentes (por ejemplo, padres, políticos)- es uno de los elementos que permitirá el desarrollo en educación" (Font y Godino, 2011, 31).

Los rasgos característicos que presenta este tipo de investigación, siguiendo a De la Orden (2007, citado por Font y Godino, 2011), son:

- "Combina el diseño de situaciones o ambientes de aprendizaje y enseñanza, y el desarrollo de teorías.
- La investigación y el desarrollo configuran un ciclo continuo de diseño de intervención – puesta en operación – análisis – rediseño.
- La investigación sobre el propio diseño debe conducir a teorías participables que ayuden a comunicar implicaciones relevantes a los profesionales de la enseñanza y a otros diseñadores educativos.
- La investigación debe dar cuenta de (explicar) cómo y por qué funcionan los diseños educativos en contextos reales. No debe limitarse a documentar su éxito o fracaso, propio de la evaluación del producto.
- El desarrollo de la investigación debe apoyarse en métodos que permitan constatar (y dar cuenta de) las conexiones de los procesos de puesta en operación con resultados de interés" (p.31).

La ingeniería didáctica puede ser vista, en forma general, como una investigación con base en el diseño.

"El interés reciente en la literatura anglosajona por las investigaciones basadas en el diseño y su reflejo en educación matemática se añade al ya tradicional sobre *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989; 2011), la cual, apoyada en la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998), viene desarrollando importantes contribuciones desde la década de los 80. En Godino, Batanero, Contreras, Estepa, Lacasta y Wilhelmi (2013) se estudian las concordancias y complementariedades de estas

> aproximaciones metodológicas y se propone una visión generalizada de la ingeniería didáctica que incluye a las investigaciones orientadas hacia el diseño instruccional" (Godino *et al.*, 2014, 2).

En las investigaciones basadas en el diseño se prevé: la actividad de estudiantes, interacciones entre ellos y las interacciones del docente. De esta forma, es conveniente poder cuantificar el funcionamiento del sistema didáctico para la determinación de patrones que permitan su descripción y análisis. Por ello, en la sección 3.3, para el análisis de procesos de estudio efectivos se emplea, para el análisis cuantitativo, una herramienta de visualización informática.

3.3. UNA HERRAMIENTA GRÁFICA PARA EL ANÁLISIS CUANTITATIVO DE PATRONES DE INTERACCIÓN: EL SOFTWARE "CIRCOS[1]"

Una herramienta gráfica que se utiliza en el presente estudio es el software "Circos"

> "Hemos creado una herramienta de visualización, llamada Circos, para facilitar la identificación y el análisis de similitudes y diferencias que surgen de la comparación de los genomas. [...] Circos utiliza un diseño de ideograma circular para facilitar la visualización de las relaciones entre pares de posiciones por el uso de cintas, que codifican la posición, tamaño y orientación de los elementos genómicos relacionados" (Krzywinski et al., 2009, 1639).

Pero no solamente se puede emplear este software en el dominio de la genómica.

> "La flexibilidad de diseño y formato de los elementos gráficos permite la creación de diversas visualizaciones en varios dominios de datos. Por ejemplo, Circos se puede utilizar eficazmente para representar gráficamente los datos tabulares" (Krzywinski et al., 2009, 1646).

[1] Página Web de Circos: http://circos.ca/

Inclusive se puede utilizar el programa en la búsqueda de patrones de interacción entre personas para el análisis de vías de transmisión de enfermedades (figura 5).

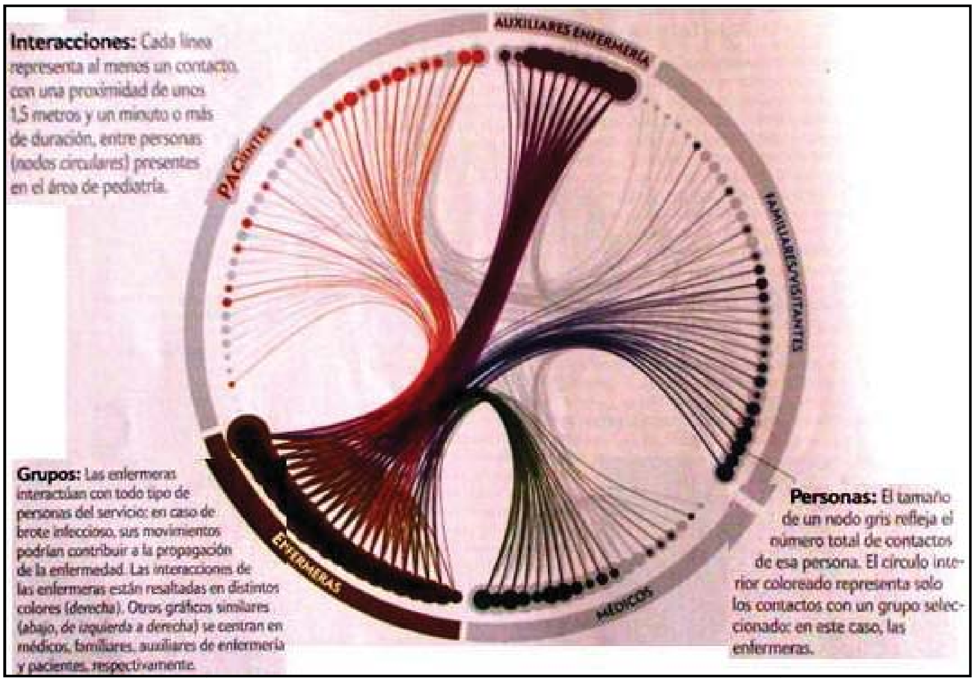


Fig. 5. Patrones de interacción entre personas para el análisis de vías de transmisión de enfermedades (Matson, 2013, 10).

Es posible acceder al tutorial[2] y a un empleo "online"[3] de Circos que es el utilizado en la investigación[4].

En el presente estudio se hace un empleo del software desde el dominio de la educación matemática para el análisis de las diferentes sesiones de clases tanto del grupo experimental como de los de control.

Se tratan de las interacciones que se realizan entre los alumnos y el docente en cada uno de los minutos de las diferentes sesiones.

[2]Tutorial de Circos: http://circos.ca/documentation/tutorials/

[3]Circos online: http://mkweb.bcgsc.ca/tableviewer/

[4]Para una introducción a Circos puede consultarse: Krzywinski (2011).

Como ejemplo se muestra la siguiente figura donde se visualizan las actividades realizadas por los diferentes actores entre los minutos 91 al 101 de la sesión 1 del grupo de control (figura 6).

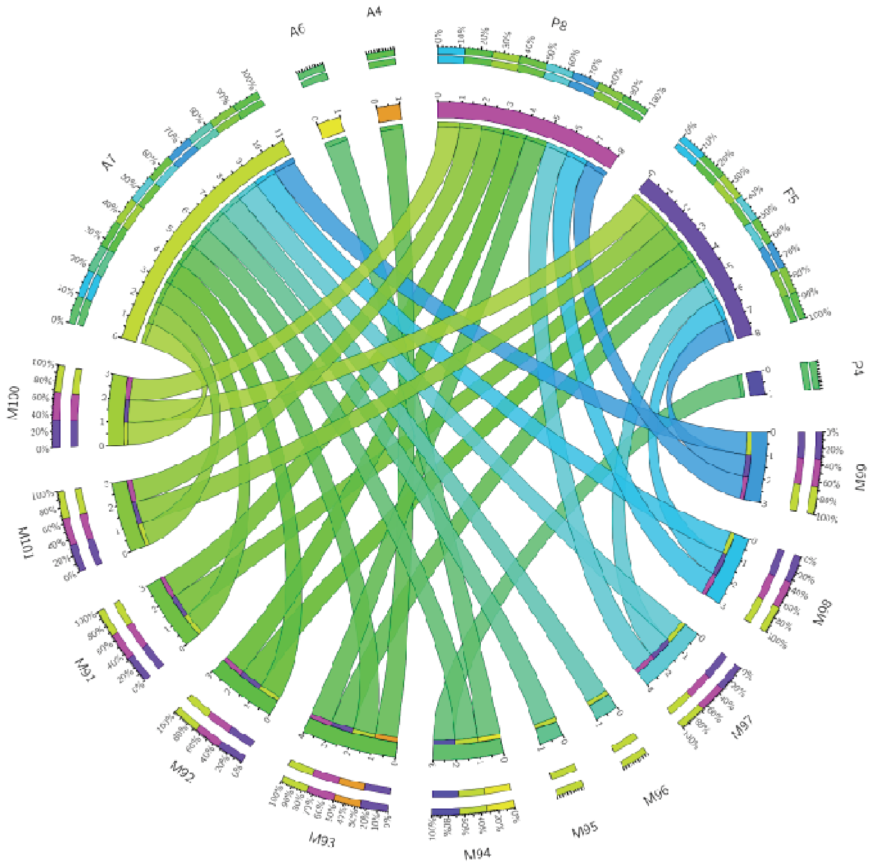


Fig. 6. Últimos diez minutos de clase del docente correspondientes al grupo de control 1.

Las categorías que se analizan son:

a. *En relación a las actividades realizadas por el profesor:*

P1: Explica conceptos o define nociones.

P2: Escribe en el pizarrón.

P3: Dicta definiciones de nociones matemáticas.

P4: Pregunta a los alumnos.

P5: Responde a los alumnos.

P6: No responde las preguntas de los alumnos.

P7: Puesta en común (momento regulativo).

P8: Circulación del profesor por el aula respondiendo inquietudes y dudas de los alumnos.

b. *En relación a las actividades realizadas por el alumno:*

A1: No realiza actividades.

A2: Copia lo escrito en el pizarrón.

A3: No escribe.

A4: Pregunta dudas al profesor.

A5: Responde inquietudes del profesor.

A6: No responde las preguntas del profesor.

A7: Realiza la tarea propuesta o aporta desde sus conocimientos previos.

Los valores correspondientes a cada una de las tablas responden a la siguiente valoración:

a. *En relación a las actividades realizadas por el profesor:*

1: Realiza la actividad con toda la clase.

0,5: Realiza la actividad con un grupo reducido de alumnos.

0,1: Realiza la actividad con un solo alumno.

0: No realiza actividad.

b. *En relación a las actividades realizadas por el alumno:*

1: Realizan la actividad todos los alumnos.

0,5: Realizan la actividad grupos reducidos de alumnos.

0,1: Realiza la actividad un solo alumno.

0: No realizan actividad.

A modo de ejemplo se muestran en la figura 7 las actividades realizadas tanto por el docente como por los alumnos y los tiempos empleados en cada una de ellas.

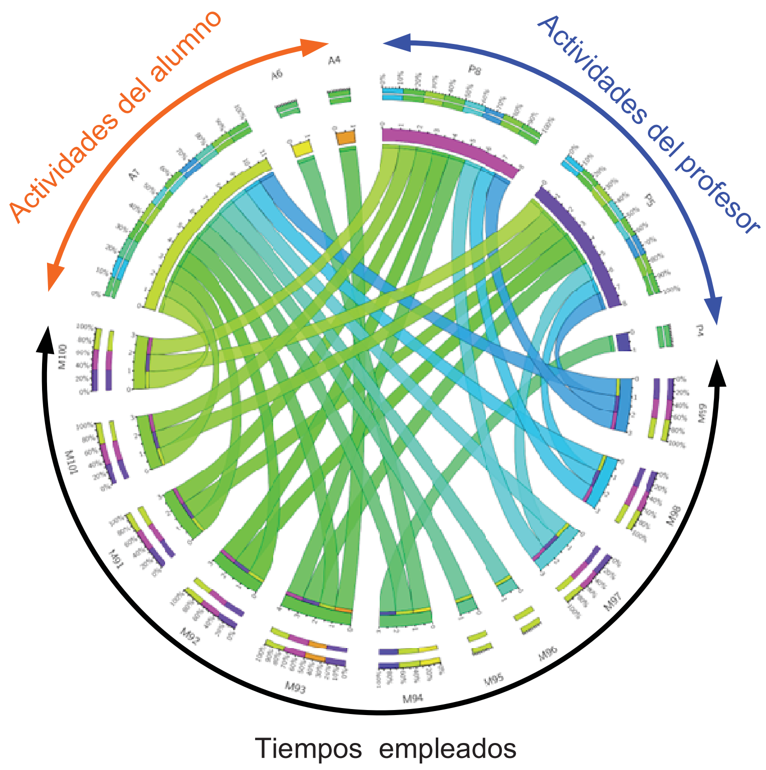


Fig. 7. Actividades realizadas por los actores en los últimos diez minutos de clase del docente 1.

Es de hacer notar que, por ejemplo, para el minuto noventa y tres (M93) los alumnos realizan las actividades (A7) y (A4), mientras que el docente desarrolla las actividades (P5) y (P8).O sea, se realizan cuatro actividades: los alumnos realizan la tarea y preguntas al profesor mientras este recorre el aula y va respondiendo preguntas de ellos. Los cuatro colores donde “llegan” las cintas, en el minuto 93, da cuenta de las diferentes actividades desarrolladas (figura 8).

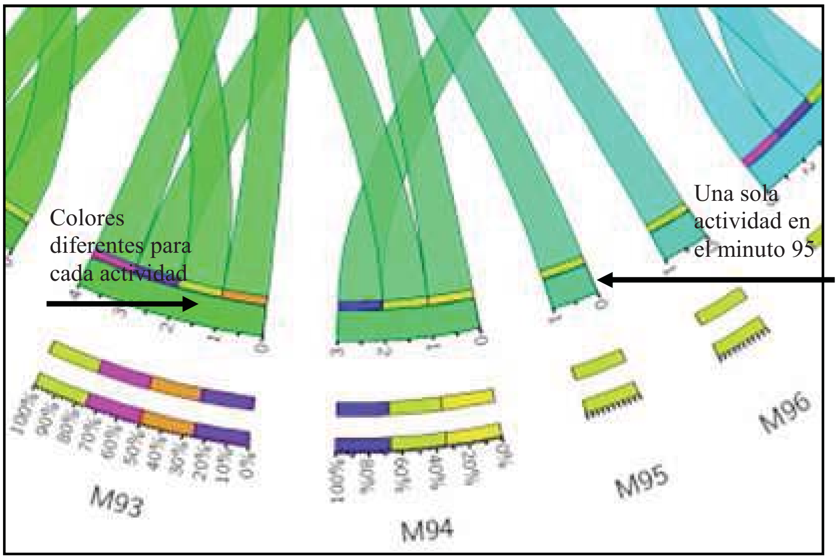


Fig. 8. Cuatro actividades realizadas en el minuto (M93) y cuatro colores diferentes para cada una de ellas.

Para los minutos M95 y M96 los alumnos realizan la tarea (A7) por ello sólo se muestra una actividad con una cinta cuyo extremo es de color amarillo indicando dicha actividad (A7) (figura 8).

En las siguientes tablas de datos se muestran las actividades realizadas en los minutos76 al 90 (tabla5) y 91 al 101 (tabla 6).

data	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	P8
M76	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
M77	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
M78	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0.5	0	0	0
M79	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0.5	0	0	0
M80	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0.1	0	0	0
M81	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
M82	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
M83	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
M84	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
M85	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
M86	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
M87	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
M88	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
M89	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
M90	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabla 5. Actividades realizadas del minuto 76 al 90.

data	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	P8
M91	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
M92	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
M93	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
M94	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
M95	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
M96	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
M97	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
M98	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
M99	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
M100	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
M101	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Tabla 6. Actividades realizadas del minuto 91 al 101.

> "Las columnas y las filas de la tabla están representados por los segmentos alrededor del círculo. Celdas individuales son mostradas como cintas, que conectan los segmentos de fila y columna correspondientes" (Krzywinski, 2015).

Las cintas son proporcionales en ancho según el valor de la celda, algunos valores como por ejemplo 0,1 tienen un espesor muy estrecho (figura 9).

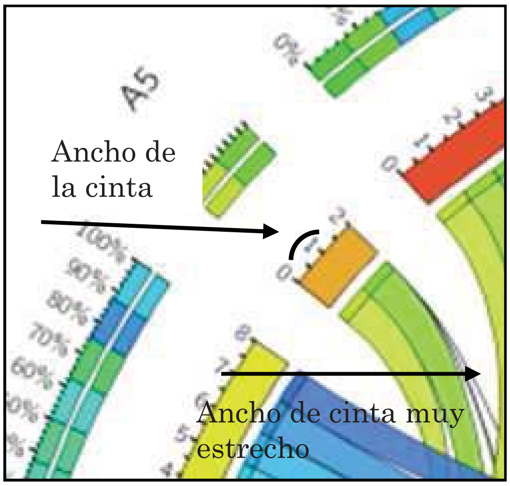


Fig. 9. Diferentes anchos de cintas según los valores de la tabla 1.

> “Al visualizar un gráfico circular, los nodos se muestran como segmentos en el círculo y el tamaño de las cintas es proporcional al valor de una propiedad de las relaciones. El tamaño proporcional de los segmentos y cintas con respecto al conjunto completo de datos le permite identificar fácilmente los puntos de datos clave dentro de la tabla [...] Cintas con espesor variable pueden representar la extensión o magnitud de la relación entre los elementos” (Krzywinski, 2015).

Para la elaboración, gestión y valoración de procesos de estudio, en el marco del EOS, se propone a la ingeniería didáctica.

3.4. LA INGENIERÍA DIDÁCTICA COMO METODOLOGÍA BASADA EN EL DISEÑO

Un ejemplo de esta metodología, expuesta en el punto anterior, es la de “ingeniería didáctica”

> “La metodología de investigación conocida con el nombre de *ingeniería didáctica* (Artigue, 1995) se podría considerar un ejemplo clásico en educación matemática de esta metodología de investigación basada en el diseño. La ingeniería didáctica puede entenderse como una metodología propia de la investigación en didáctica que utiliza como principal marco teórico la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997), basada en un esquema de experimentación de las realizaciones didácticas en clase, muy alejada de la metodología experimental. La ingeniería didáctica se diferencia de otras metodologías de investigación, fundamentalmente, por los *criterios de validación* que utiliza, bien alejados de las clásicas comparaciones de resultados entre grupos experimentales y testigo, estando, por el contrario, más próxima del estudio de casos, y fundamentando su validez de manera interna, a través de la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori” (Font y Godino, 2011, 32).

Para alcanzar los objetivos manifestados en el capítulo 2 se utiliza en la presente investigación el método de “ingeniería didáctica”. Esta “se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las ‘realizaciones didácticas’ en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (Artigue, 1995,36).

Asimismo, esta autora expresa que el proceso se resume en “cuatro fases: la fase 1 de estudio preliminar, la fase 2 de concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería, la fase 3 de experimentación y finalmente la fase 4 de análisis *a posteriori* y evaluación” (p.38).

El empleo de la ingeniería didáctica en este estudio “busca la estabilidad en el funcionamiento del medio, necesaria para la *reproducibilidad* de situaciones didácticas” (Wilhelmi y Lacasta, 2011, 61)

La contrastación de las hipótesis redunda en una posible evolución de la teoría (EOS).

> “La evolución de una teoría viene determinada por el contraste entre un análisis *a priori* y un análisis *a posteriori*. La teoría busca validar las hipótesis que formula (*a priori*). Los hechos observados permiten (*a posteriori*) validar o refutar, total o parcialmente, las hipótesis enunciadas. Este proceso de contraste es consustancial a la teoría subyacente; la teoría determina las entidades que podrán ser identificadas en el sistema (*elementos primarios*) y los instrumentos de observación y toma de datos. Cuando el observador analiza un sistema concreto, trata de identificar los elementos primarios como partes de dicho sistema (*observables*) y construye a partir de ellos una *red objetiva* que modeliza según la teoría el sistema observado. En la figura 10 se presenta este proceso de manera esquemática particularizado a la TFS” (Bencomo, Godino y Wilhelmi, 2004,2).

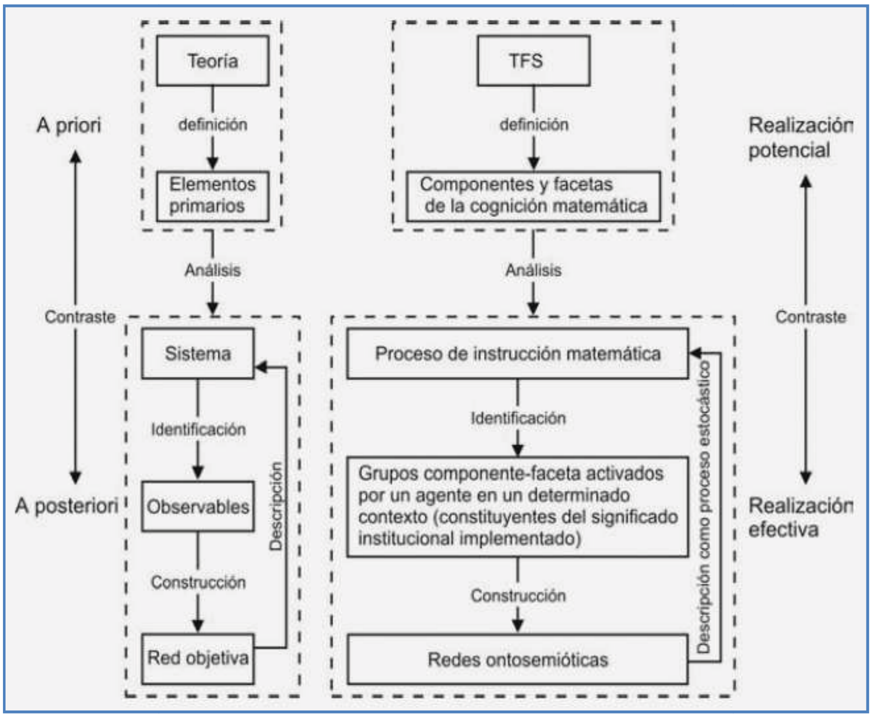


Fig. 10. Proceso de evolución esquemática de una teoría particularizado a la TFS (Bencomo, Godino y Wilhelmi, 2004,2).

3.4.1. LA INGENIERÍA DIDÁCTICA BASADA EN EL "EOS"

El método de ingeniería didáctica puede ser visto desde otros fundamentos teóricos

> "Desarrollamos una visión ampliada de la ingeniería didáctica, entendida como una clase específica de investigación basada en el diseño. Como método de investigación, la ingeniería didáctica busca crear conocimiento sobre cómo se construye y se comunica el conocimiento matemático. Este conocimiento didáctico se refiere necesariamente a un enfoque teórico, que sirve de base en las distintas fases del proceso metodológico. Se propone aquí un desarrollo de las fases de la ingeniería didáctica fundamentadas en el enfoque ontológico – semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. Estas fases (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación), analizadas según las dimensiones epistémica, cognitiva e instruccional" (Godino *et al.*, 2014, 1).

Desde el EOS se proponen diferentes herramientas teóricas que posibilitan el análisis de prácticas matemáticas y la construcción de un significado institucional de referencia (capítulos 4 y 5).

"Las nociones de *sistema de prácticas* y *configuración de objetos y procesos* (Godino, et al., 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013) permiten abordar los análisis epistemológicos y cognitivos en didáctica de las matemáticas según el marco del EOS. En particular, permiten formular el problema *epistémico* (caracterización de los conocimientos institucionales) y *cognitivo* (conocimientos personales) en los siguientes términos:

- ¿Cuáles son las prácticas matemáticas institucionales, y las configuraciones de objetos y procesos activadas en dichas prácticas, necesarias para resolver un tipo de tareas matemáticas? (*Significado institucional de referencia*).
- ¿Qué prácticas, objetos y procesos matemáticos pone en juego el estudiante para resolver un tipo de tareas matemáticas? (*Significado personal*).
- ¿Qué prácticas personales, objetos y procesos implicados en las mismas, realizadas por el estudiante son válidas desde la perspectiva institucional? (*Competencia, conocimiento, comprensión del objeto por parte del sujeto*)

Una vez que se dispone de herramientas para abordar las cuestiones epistémicas y cognitivas se puede intentar responder cuestiones de diseño instruccional, relativas al proceso pretendido y a las reglas que condicionan su desarrollo:

- ¿Qué tipos de interacciones didácticas (entre las personas y los recursos) se deberían implementar en los procesos instruccionales que sean idóneas para promover los aprendizajes matemáticos?

  ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales, cómo se establecen y pueden cambiarse para optimizar el aprendizaje matemático?" (Godino *et al.*, 2014, 3-4).

Del empleo de la ingeniería didáctica se intenta caracterizar el grado de "idoneidad didáctica" alcanzada por la experiencia en comparación con el grupo control, o sea, caracterizada por una enseñanza tradicional.

Para ello se analiza cada uno de los componentes de dicha noción.

> "En la figura 11 sintetizamos los componentes de la noción *idoneidad didáctica* de un proceso de estudio matemático. Representamos mediante un triángulo equilátero la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido o programado, donde a priori se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular interno correspondería a las idoneidades efectivamente logradas y a la coherencia de los procesos desarrollados con el proyecto de enseñanza" (Contreras, Ordoñez y Wilhelmi, 2010,369).

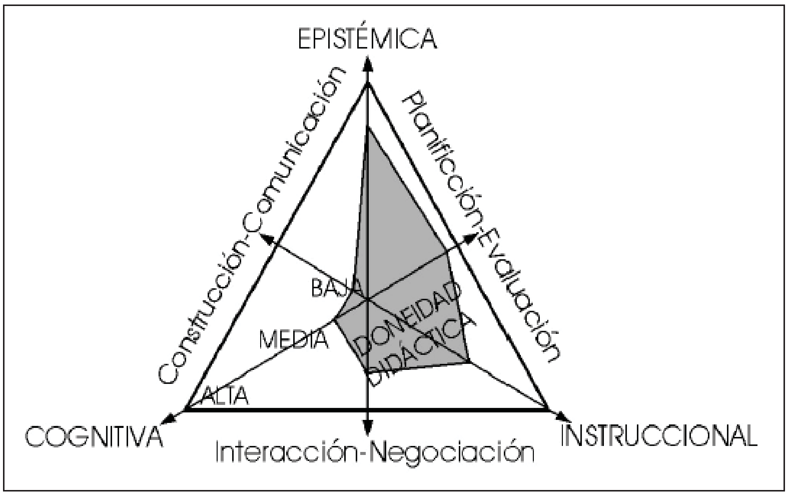


Fig.11. Componentes de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático (Contreras, Ordoñez y Wilhelmi, 2010,369).

Posteriormente se trata de arribar a conclusiones que den cuenta de cada una de las idoneidades estudiadas (apartado 12.4).

Al finalizar el estudio (apartado síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas), se realiza un análisis "retrospectivo" que responde a la pregunta:

> "¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación de un proceso de estudio matemático para mejorar el aprendizaje? Este análisis retrospectivo es común a toda ingeniería y, más en general, a todo proyecto educativo, que tienen un carácter cíclico: la mejora se basa tanto en la fundamentación teórica como en el contraste experimental" (Godino *et al.*, 2014, 4).

3.4.2. ALGUNOS MÉTODOS E INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN

En relación a los métodos e instrumentos de recogida de información a utilizar: estos "hacen referencia a la existencia o no de interacción entre el investigador y las fuentes de información cuando se implementan durante el proceso de investigación" (Godino et al., 2012,35).

Siguiendo a Godino et al. (2012) se emplea tanto "métodos interactivos" como "métodos no interactivos" (p.35).Se entiende por métodos interactivos "aquellos que implican alguna interacción entre investigadores y participantes, y, como resultado, producen reacciones en los participantes que pueden afectar a la información reunida" (Godino et al., 2012,35). Para el presente estudio se trata entonces de entrevistas y observaciones.

Por método no interactivo se consideran aquellos que "exigen una escasa o nula interacción entre investigadores y participantes" (Godino et al., 2012,35). En el caso de esta investigación se trata de cuestionarios.

Capítulo 4

Significado institucional de referencia del número irracional

En este capítulo, se muestra una antropología del saber "número irracional", su origen histórico y contextos de uso (sección 4.1).Se estudian la inconmensurabilidad y su relación con la proporcionalidad, la aproximación de irracionales, la irracionalidad propiamente dicha, el infinito matemático y los conflictos cognitivos y dificultades epistemológicas asociadas (sección 4.2). Asimismo, se analiza la incidencia de la cardinalidad, la densidad y la axiomática de Hilbert. También se analizan las definiciones de número irracional (sección 4.3) y el problema didáctico de las representaciones de los números irracionales (sección 4.4). Además se estudianalgunas cuestiones en torno al currículo de matemática de secundaria (sección 4.4.5) y a la periodicidad, pseudo-periodicidad y aperiodicidad en el desarrollo decimal de los números reales(sección 4.5).Estos análisis permiten determinar las configuraciones epistémicas de referencia(sección 4.6) con las cuáles se analizan algunos libros de texto de secundaria (sección 4.7).Finalmente, se realiza la construcción de un holo-significado de la noción "número irracional"(sección 4.8).

4.1 ANTROPOLOGÍA DEL SABER "NÚMERO IRRACIONAL"

4.1.1 ORIGEN HISTÓRICO Y CONTEXTOS DE USO DEL NÚMERO IRRACIONAL

Conmensurabilidad, proporcionalidad o aproximación de irracionales por racionales son términos que actualmente son reconocidos como "próximos". Sin embargo, un breve análisis histórico permite comprender la complejidad de estas conexiones matemáticas y el coste intelectual que la humanidad ha debido invertir para establecerlas. Asimismo, este análisis histórico aporta un marco para la determinación de configuraciones asociadas al número irracional, que sirve de referencia para el análisis de libros de texto (apartado 4.8).

4.1.1.1 Los inconmensurables

Dados dos longitudes a y b, se dice que son conmensurables si existen dos números n y m, enteros positivos (n, $m \in$ Z+), tal que: $a \cdot n = b \cdot m$

Esto es, la razón de a y b es el número racional n/m.

En caso contrario (no existencia de n y m en las condiciones antes dichas), las cantidades a y b se dicen inconmensurables. La existencia de cantidades "inconmensurables" se debe al desarrollo de la geometría por la escuela pitagórica griega (siglo V a.C.). Entonces se observa, en particular, que no es posible determinar una razón entre las longitudes de la diagonal de un cuadrado y su lado, esto es, tales longitudes son inconmensurables.

La noción de inconmensurabilidad se mantiene largamente "atada" a la geometría y a los problemas "clásicos" de la matemática griega (Rey Pastor y Babini, 2000a, 53), donde se intenta evitar el recurso al infinito matemático, aspecto clave en la comprensión de los inconmensurables.

> "Al desarrollar el estudio de la composición entre los entes geométricos, los griegos pusieron de manifiesto su gran intuición respecto a las nociones del continuo, del infinito matemático y del límite. Sin embargo, dichas nociones se quedaron solamente en un plano implícito y el énfasis se centró en la búsqueda de alternativas que tornaran « innecesarios» los procesos infinitos (que se remontan al período del descubrimiento de los inconmensurables) en la matemática" (Crisóstomo et al., 2005, 132).

4.1.1.2 Proporcionalidad e inconmensurabilidad

A pesar del origen de la noción de inconmensurabilidad en un contexto geométrico, ésta emerge asociada a la proporción. Eudoxo de Cnido (408?-355? a.C.), en su teoría de proporciones, introduce el proceso de comparación entre magnitudes inconmensurables preservando la "homogeneidad" de las mismas.

Así, Eudoxo, en un contexto exclusivamente geométrico, alcanza una verdadera evolución, “pues resolvió al mismo tiempo las dos máximas dificultades que entonces se oponían a ese progreso: los irracionales y las equivalencias” (Rey Pastor y Babini, 2000a, 63).

Esta evolución provocada por la teoría de las proporciones en el tratamiento de la inconmensurabilidad provoca no solo una nueva configuración epistémica sino una falla epistemológica con la anterior.

> “Las rupturas epistemológicas se producen a partir de la constatación de la existencia de magnitudes de carácter inconmensurables y para eludir el infinito se crean los métodos de exhausción y de las razones entre las magnitudes, con la doble reducción al absurdo” (Crisóstomo et al., 2005, 135).

4.1.1.3 La aproximación de irracionales

Ya en la producción matemática de los Babilonios se puede apreciar la aproximación sexagesimal de la raíz cuadrada de dos. El método general se desconoce, pero se propusieron diferentes alternativas (O'Connor y Robertson, 2001; Fowler y Robson, 1998) como el empleo de la media aritmética (Collette, 1985). Asimismo, estaban en conocimiento de las hoy denominadas “ternas pitagóricas”.

El método de aproximación de irracionales por «fracciones continuas» tiene origen en la matemática babilonia. Una fracción se denomina “continua simple” cuando es posible expresarla en la forma:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Siendo a_0 un número entero y a_i ($i \in N, i > 0$) números enteros positivos.

Si el número es racional es posible aproximarlo por una fracción continua simple finita (es decir, con un número finito de a_j, $j \in \mathrm{N} \cup \{0\}$). Si el número es irracional, puede ser aproximado por una fracción continua simple infinita (existen infinitos a_j, $j \in \mathrm{N} \cup \{0\}$).

Los babilonios trabajan en la resolución de problemas mediante fracciones continuas «ascendente» (Høyrup, 1990), cuya expresión actual es:

$$x = \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \iddots}{a_3}}{a_2}}{a_1}$$

Según Høyrup (1990) este método, utilizado también en Egipto, perdura hasta el Medievo.

Numerosos análisis históricos (Heath, 1897; 1921; Hardy y Wright, 1975; Courant y Robbins, 1962; Rey Pastor y Babini, 2000a) refieren el uso más o menos estable en las distintas escuelas matemáticas de la fracción continua como método da aproximación de medidas y distancias. Desde la matemática griega a los desarrollos de Rafael Bombelli a finales del siglo XVI, hasta Euler (1707–1783) o Lagrange (1736–1813), las fracciones continuas son utilizadas como método para indagar, describir o utilizar números irracionales con una aritmética racional.

En el capítulo 5 se analiza en detalle la dimensión epistémica de la fracción continua.

Le emergencia de la irracionalidad como tal emerge recién el siglo XIX de la mano de Dedekind, Cantor, y otros matemáticos que logran su fundamentación alejada de los aspectos geométricos.

4.1.1.4 La irracionalidad

Las cortaduras de Dedekind (1831–1916) suponen una ruptura epistemológica con la teoría de las proporciones de Eudoxo, a pesar de las concomitancias sugeridas por diversos historiadores (Corry, 1994). Dedekind considera el principio de continuidad de Eudoxo inconsistente, establece así la necesidad de un desarrollo de la aritmética.

> “En efecto, la forma en que los números irracionales usualmente se introducen se basa directamente en el concepto de las magnitudes extensivas —concepto que no se define cuidadosamente en ninguna parte— y explica el número como el resultado de medir una magnitud por otro número de la misma naturaleza. En lugar de este enfoque, exijo que la aritmética sea desarrollada a partir de sí misma.” (Dedekind, 1901, 9-10)

El trabajo de Dedekind, cambia el estatus epistemológico de los irracionales, que pasaron a ser “números”. Este hecho es crucial, puesto que matemáticos notables, como Kronecker (1823–1891), negaban su existencia.

> “¿A qué vienen sus hermosas investigaciones sobre el número π? —observaba a Lindemann—. ¿Por qué elige tales problemas si en verdad no existen números irracionales de ninguna clase?” (citado por Rey Pastor y Babini, 2000b, 169).

La definición matemática de número irracional, tal y como la conocemos actualmente, tuvo que afrontar por lo tanto cuestiones cruciales relativas al infinito matemático y al cardinal de conjuntos infinitos, la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ o la necesaria axiomatización debido a la imposibilidad de construir “efectivamente” ciertos números.

Todo ello permite enunciar, en el ámbito de la didáctica de las matemáticas, la hipótesis según la cual esta complejidad epistémica esencial de los números irracionales determina sobremanera los procesos de enseñanza y aprendizaje relativos a dicha noción.

4.1.1.5 Incidencia de la axiomática de Hilbert

Cuando Hilbert habla acerca del concepto de número propone como cuestión la de establecer si el método genético es el más indicado para estudiar la noción de número (Hilbert, 1993).

A su vez cuestiona lo que algunos matemáticos pretendían establecer, una fundamentación de las matemáticas que dejara de lado aquellos aspectos no convencionales para la época

> "Entre las cosas que Weyl y Brouwer pretenden proscribir de las matemáticas se encuentran los conceptos generales de número irracional, de función (lo mismo que el más particular de función numérica), los números cantorianos de clases superiores, etc." (Hilbert, 1993, 40).

En el "pensamiento axiomático", Hilbert plantea que el método más conveniente para esta fundamentación es el axiomático formal:

> "El método adecuado para la realización de estos fines es, por supuesto, el método axiomático" (Hilbert, 1993, 41).

Dedekind no utiliza la axiomática formal para fundamentar los conjuntos numéricos; de hecho, Dedekind define cuerpo utilizando una suerte de analogía con las ciencias naturales y la vida en sociedad (Hernández, 2002).

Queda así determinado un nuevo contexto de uso de la noción de número real (y por tanto irracional), el axiomático.

4.1.2 INCIDENCIA DIDÁCTICA DEL INFINITO MATEMÁTICO: CONFLICTOS COGNITIVOS Y DIFICULTADES EPISTEMOLÓGICAS

No se debe dejar de mencionar la notable influencia del infinito matemático asociado a los números irracionales, que desde sus orígenes hasta su constitución ha jugado un papel que merece un análisis particular.

Aristóteles (387-322 a.C.) se refiere en varios de sus trabajos a la inconmensurabilidad, ya en Física (Aristóteles, 1995, 161) ya en Metafísica (Aristóteles, 1994, 236). Aún más, presenta su idea de infinito potencial y la imposibilidad del infinito actual.

> "Y que lo infinito no puede existir en acto, es evidente. Pues, en tal caso, cualquier parte que se tomara de él seria infinita (ya que, si fuera una entidad y no se predicara de un sujeto, lo infinito y ser-infinito serian lo

> mismo) y, por consiguiente, sería, o bien indivisible, o bien divisible en partes infinitas, si tuviera partes. Pero es imposible que la misma cosa conste de muchos infinitos (pues así como la parte del aire es aire, así la parte del infinito sería infinita, si fuera entidad y principio). Luego es sin partes e indivisible" (Aristóteles, 1994,456).

Se puede decir que durante muchos siglos la noción de infinito matemático no es cuestionada, su evolución epistémica llega entonces de la mano de los matemáticos del siglo XIX.

En relación al infinito matemático se presentan fenómenos didácticos como el de aplastamiento que condiciona la construcción del sentido del infinito necesario para el reconocimiento de números irracionales (D'Amore et al., 2006).

D'Amore et al. (2006) establecen una categorización del infinito basada en datos empíricos con personas de distintas edades (desde adolescentes hasta adultos), formación (desde matemáticos expertos hasta personas de cultura no específica en matemática) en diversos países (Colombia, Italia y Suiza). Las categorías a las que se refiere establecen el infinito como:

– "Un número 'muy grande', pero en realidad finito". Se evita entonces el infinito actual.
– "Una cosa que va más allá de algo muy grande", aparece entonces la referencia al universo y a las magnitudes.
– "Un objeto que no puede ser sobrepasado": dos cantidades infinitas tendrán que ser iguales (fenómeno de aplastamiento).
– "Una noción paradójica" por cuanto un continente limitado y finito (una figura geométrica, por ejemplo) puede contener infinitos elementos.

En alumnos entre 16 y 17 años este sentido del infinito se encuentra en construcción, suponiendo el infinito actual como una noción "contraintuitiva" (Garbín, 2005).

¿Cómo proponen Arrigo y D'Amore (1999) superar los obstáculos provocados por la cardinalidad de los conjuntos infinitos? A través de la noción de densidad, clave en la construcción de los números reales y, por lo tanto, en la necesidad de los números irracionales.

Pero, como justifican Mamolo y Zazkis (2008), no solamente hace falta una "cultura matemática" de base que ayude a los alumnos a entender la noción de infinito matemático, sino que será necesaria una intervención sostenida, específicamente diseñada, que permita la conceptualización del infinito matemático.

Se considera entonces al infinito actual como parte ineludible de los números irracionales y por tanto con una incidencia didáctica importante a la hora de la enseñanza y el aprendizaje de dichos números.

Como se muestra a continuación, también las nociones de cardinalidad y densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ inciden fuertemente en el aprendizaje y en la enseñanza del objeto número irracional.

4.1.3 INCIDENCIA DIDÁCTICA DE LA CARDINALIDAD DE CONJUNTOS INFINITOS[1] Y DE LA DENSIDAD DE $\mathbb{Q}$ EN $\mathbb{R}$

El cuestionamiento del infinito actual como algo no transparente permite la evolución de la noción de cardinalidad, ahora a conjuntos infinitos.

> "¿Es posible correlacionar biunívocamente los números reales y los naturales?, o en otros términos ¿hay la misma cantidad de números en N y en R? La respuesta, establecida en 1873 sobre la base de la completitud de R, resultó ser no, y con ella adquirió sentido la noción de cardinalidad de un conjunto infinito, ya que se había probado que existen conjuntos infinitos de diferentes 'tamaños' " (Ferreirós,1998,389).

Luego de considerar a la propiedad de la densidad[2] de los racionales como fundamental a la ahora de fundamentar el cálculo: "En 1873 Cantor probó que el

[1] "Un conjunto es finito si y sólo si es vacio, o coordinable a un intervalo natural inicial. Aes finito $\Leftrightarrow A = \emptyset \vee \exists n \in \mathbb{N} \,/\, A \sim I_n$. Un conjunto es infinito si y sólo si no es finito. Los números cardinales asociados a los conjuntos finitos son el 0 o los números naturales. Los números cardinales correspondientes a los conjuntos infinitos se llaman transfinitos. El número cardinal de un conjunto especifica la 'numerosidad' de los elementos del conjunto, o lo que es lo mismo, su potencia. En el caso de los conjuntos infinitos existe una jerarquización relativa a sus números cardinales (Rojo, 1986, 165).

conjunto de los números racionales y el de los números irracionales algebraicos es numerable[3], lo que significa que "casi" todos los números irracionales son trascendentes" (López Pellicer, 2007,291). Este último resultado influye de modo notable en el pensamiento de los matemáticos de la época y en el de los que les sucederán.

La constitución de los números irracionales sobreviene entonces de la evolución y la emergencia de diferentes nociones matemáticas, tales como la densidad, cardinalidad, numerabilidad y, por supuesto, el infinito matemático.

El proceso de construcción de la noción de cardinalidad del conjunto de los números irracionales y la noción de densidad se presentan problemáticos para los estudiantes de profesorado (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004).Así, la noción de densidad se relaciona fuertemente con la de continuidad funcional, donde emergen nuevas dificultades para su apropiación (Merenluoto, 2004).

Es en la identificación, por parte del estudiante, de la cardinalidad de conjuntos infinitos, donde se han detectado diversos fenómenos didácticos, tales como los de "aplastamiento y dependencia" (Arrigo y D'Amore, 1999; 2002; 2004).

El objetivo aquí es la determinación de diferentes tipos de errores (Wilhelmi, 2009) y de "conflictos semióticos" producidos por los estudiantes de profesorado en los resultados de un cuestionario empleado en la experimentación.

> "Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo" (Godino et al., 2007, 221-252).

[2]El conjunto $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, pues entre dos reales distintos existe un racional, es decir $\alpha < \beta \Longrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} \,/\, \alpha < r < \beta$. (Rojo, 1986,326).

[3]Un conjunto es numerable si y sólo si es coordinable a $\mathbb{N}$. A es numerable $\Leftrightarrow A \sim \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists f\colon A \longrightarrow \mathbb{N} \,/\, f$ es biyectiva (Rojo, 1986,165).

Para abordar este objetivo se propone la resolución de un cuestionario a futuros profesores de matemática del sur de la Provincia de Mendoza, Argentina, y se discuten los resultados obtenidos (apartado 4.2.1).

Antes, en el apartado siguiente, se hace una breve aproximación histórica y epistemológica de las nociones matemáticas involucradas y de sus dificultades didácticas asociadas.

4.1.4 PROBLEMÁTICAS EPISTEMOLÓGICAS E HISTÓRICAS ASOCIADAS A CONJUNTOS INFINITOS

El cardinal de un conjunto es la característica que determina el número de elementos que éste tiene. Por ello, en Teoría de Conjuntos se define el número tres, por ejemplo, como la característica común de todos los conjuntos con tres elementos. De esta forma, al menos formalmente, para determinar si dos conjuntos con un número finito de elementos tienen el mismo cardinal es suficiente contar sus elementos. Sin embargo, si el conjunto es infinito, esta estrategia carece de sentido, puesto que no es posible "contar", en el sentido clásico y escolar del término, el número de elementos de un conjunto infinito.

> "Dos conjuntos A y B son coordinables, o equipotentes, y se escribe A~B si, y sólo si, existe una función uno a uno F cuyo dominio es el conjunto A y cuyo recorrido es el conjunto B" (Apostol, 1996, 46).

Esta noción de coordinabilidad permite observar, por ejemplo, que el conjunto **P** de los números enteros pares y el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros tienen el mismo cardinal. Esto resulta paradójico en el contexto de los conjuntos finitos, puesto que desde los *Elementos* de Euclides se sabe que: *El todo es mayor que la parte.*

> "La diferencia principal entre los conjuntos finitos e infinitos es que un conjunto infinito puede ser semejante a alguno de sus subconjuntos propios, mientras que un conjunto finito nunca podrá ser semejante a uno de sus subconjuntos propios" (Apostol, 1996, 47).

Además, desde Cantor se conoce que existen distintos "cardinales transfinitos". El cardinal de los conjuntos numerables (coordinables con $\mathbb{N}$) se denota mediante el símbolo: $\aleph_0$. Puede demostrarse que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable, pero que el conjunto de los números irracionales $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ no lo es.
Así:

$$\mathrm{Card}(\mathbb{Z}^+) = \mathrm{Card}(\mathbb{Z}) = \mathrm{Card}(\mathbf{P}) = \mathrm{Card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$$

Cantor se cuestiona si es posible establecer un biyección entre el conjunto $\mathbb{N}$de los números naturales y el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. La respuesta implica la noción de completitud de$\mathbb{R}$. Se demuestra quelos conjuntos $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ tienen el mismo cardinal. Se dice que el cardinal de $\mathbb{R}$ es la *potencia del continuo*, se denota c o $\aleph_1$. Así:

$$\mathrm{Card}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \mathrm{Card}(\mathbb{R}) = c = \aleph_1$$

Con otras palabras, $\mathbb{R}$ no es numerable debido a la existencia de los números irracionales. Aún más, se demuestra que cualquier intervalo (a, b) en $\mathbb{R}$, $a<b$, tiene por cardinal la potencia del continuo ($\mathrm{Card}((a, b)) = \aleph_1$). Esto se debe a que el conjunto de los números irracionales es *denso* en $\mathbb{R}$ (Iaffei, 2008).

4.2 RESTRICCIONES EPISTEMOLÓGICAS, COGNITIVAS Y DE ENSEÑANZA

En esta sección se concretan algunas de las nociones didácticas introducidas en la sección anterior a procesos de enseñanza y aprendizaje de los números irracionales. Así, los objetos primarios involucrados son:

- *Lenguaje*. Símbolos tipo-letra correspondientes a los conjuntos numéricos, inclusión, flechas indicando una aplicación biyectiva, diagramas de Venn.
- *Situaciones*. Comparación de infinitos.
- *Definiciones*. Conjunto; cardinal de un conjunto finito, infinito; número natural, entero, racional, irracional (trascendente o algebraico); densidad de la recta real; probabilidad.
- *Proposiciones*. Proposiciones relativas al cálculo de probabilidades en conjuntos continuos (la probabilidad de obtener un valor determinado de un conjunto continuo es cero, etc.).

- *Procedimientos*. Coordinación de conjuntos infinitos; cálculo de probabilidades en conjuntos continuos. Media aritmética entre dos números a y b con a<b.
- *Argumentos*. Justificar la igualdad de cardinal de los naturales, enteros, racionales e irracionales algebraicos; refutar la igualdad de cardinal de los irracionales algebraicos y trascendentes; justificar la igualdad de cardinal de los intervalos reales. Demostrar la densidad del conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Es normal que los estudiantes sientan contradicha su intuición. El aprendizaje del universo finito, con sus relaciones y funcionamiento, se ha logrado a lo largo de muchos años y no sin dificultad. Así, antes de la aparición del infinito matemático, los procedimientos aritméticos, algebraicos y geométricos han mostrado su utilidad y eficacia en la resolución de una amplia gama de problemas.

Lo que se ha tratado en este apartado refleja la complejidad asociada a la construcción de la noción de número irracional en donde el infinito matemático aparece como un objeto que incide fuertemente en otras nociones asociadas a dicho conjunto, a saber, numerabilidad, cardinalidad y densidad de$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ junto a las nociones de continuidad numérica, geométrica y funcional (figura 12).

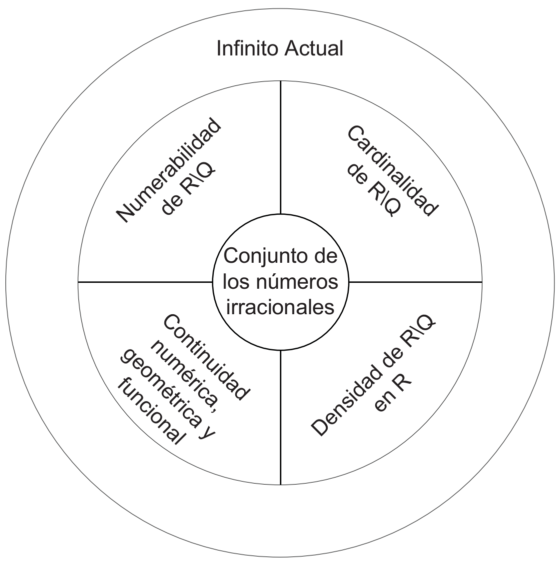


Fig. 12. Interrelación entre el infinito matemático y la noción de número irracional.

Los números irracionales se presentan entonces no sólo como un “paso obligado” para la apropiación de otras nociones como la de límite funcional sino como un objeto de gran complejidad para su enseñanza y aprendizaje aún en niveles superiores.

4.2.1 LA EXPERIMENTACIÓN

En la búsqueda de posibles conflictos epistémicos y cognitivos, se plantea a estudiantes de profesorado de matemática (tabla 7) un cuestionario individual de diez preguntas: comparación de conjuntos numéricos (naturales, pares, enteros, racionales e irracionales; 4 ítems), comparación de conjuntos numéricos e intervalos (intervalo [0,1], 3 ítems), y cuestiones teóricas referentes a definiciones (números algebraicos y trascendentes, densidad y definición de cardinal; 3 ítems).

Se realiza primero un estudio piloto con cuestiones de comparación de cardinales de conjuntos e intervalos (grupo A). A continuación, se complementa el cuestionario con las cuestiones teóricas sobre definiciones (grupos B-D)

Grupo	Curso	Estudiantes
A	2	16
B	2	9
C	3	6
D	4	6

Tabla 7. Descripción de la muestra.

4.2.1.1 Algunos resultados en la comparación de cardinales

El análisis de las respuestas incorrectas permite identificar algunos obstáculos identificados por Arrigo y D’Amore (2004), como la *dependencia* de los cardinales infinitos o el *aplastamiento*. En la figura 3 el estudiante utiliza una imagen visual en la argumentación, marcando una cuestión de tamaños (“los dobla en cantidad a los de los naturales”) (figura 13).

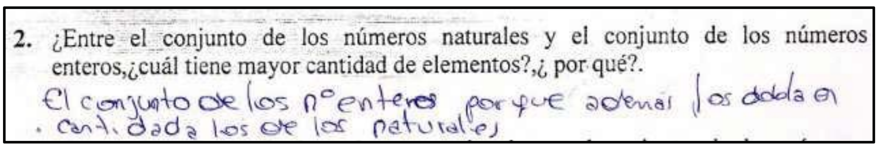
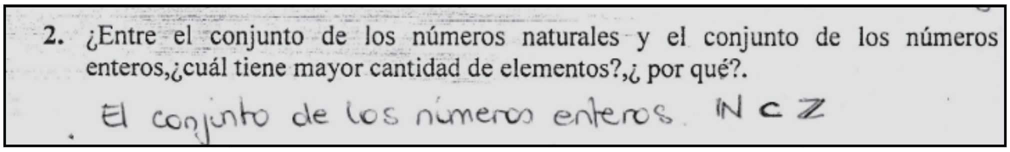

2. ¿Entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros,¿cuál tiene mayor cantidad de elementos?,¿ por qué?.
El conjunto de los n°enteros porque además los dobla en cantidad a los de los naturales

Fig. 13. Dependencia de los cardinales infinitos.

El mismo estudiante no distingue el infinito numerable del continuo (“$\mathbb{Q}$ y [0,1] tienen igual número de elementos”).

La “asimetría de cardinales infinitos por inclusión”, es decir, la noción conjuntista de inclusión utilizada para determinar si un conjunto tiene mayor cantidad de elementos que otro, se erige en “obstáculo” para la adquisición de la noción de numerabilidad de un conjunto o la de coordinabilidad con el conjunto $\mathbb{N}$ (figura 14).



2. ¿Entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros,¿cuál tiene mayor cantidad de elementos?,¿ por qué?.

El conjunto de los números enteros. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Fig. 14. Asimetría de cardinales infinitos por inclusión.

En la tabla 8 se presentan los fenómenos observados en el ítem 2 (ver figura 14) por grupos. En el grupo D, es visible el fenómeno de “asimetría de cardinales infinitos por inclusión”.

	Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D
Fenómeno de aplastamiento	4	0	5	1
Fenómeno de dependencia	2	2	0	0
Fenómeno de asimetría de cardinales por inclusión	8	7	0	5
Respuesta correcta	2	0	1	0

Tabla 8. Aparición de fenómenos en el ítem 2, por grupos.

En las respuestas 3-6, se manifiesta de forma variable la alternancia de los fenómenos descritos anteriormente. Al comparar el conjunto de los números irracionales con el intervalo [0,1], un estudiante afirma que “aunque en el intervalo haya infinitos (números) no supera al gran conjunto (en referencia al conjunto de los números irracionales)”. El ítem 10 muestra el grado de conocimiento de la definición de conjunto infinito entre los estudiantes de los grupos C y D. El conocimiento no es estable en el grupo (tabla 9).

	Grupo C			Grupo D		
Ítem 10	No	Si	NC	No	Si	NC
¿Conoce la definición de cardinal de un conjunto infinito?	2	1	3	2	2	2

Tabla 9. Conocimiento de la definición de conjunto infinito.

4.2.1.2 Algunos resultados de las cuestiones teóricas

Las respuestas sobre la densidad de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$en $\mathbb{R}$ son incorrectas en su práctica totalidad, a excepción de un único estudiante del grupo D (tabla 10).

No es denso porque:	**Grupo B**	**Grupo C**	**Grupo D**
Existen otros números en la recta real que no son irracionales	1	0	1
Porque es no acotado	1	0	0
Porque no es cerrado	0	1	0
Porque no es cerrado ni acotado	0	1	0
No es denso (no argumenta)	1	1	0
Sí es denso porque:			
Es un conjunto infinito	1	3	1
Porque no se pueden convertir nunca en fracción	1	0	0
No sabe / no contesta	4	0	2

Tabla 10. Respuestas al ítem 9, grupos B, C y D.

Estas respuestas muestran una conceptualización inestable de la noción de densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en$\mathbb{R}$, junto con serios conflictos epistémicos en los cuales una correcta intuición se argumenta a través de una noción improcedente (tabla 11).

9. ¿Es denso el conjunto de los números irracionales? ¿Por qué? ¿Podría dar un argumento matemático?
(Grupo B) "Sí, porque es infinito. Porque no existe intervalo natural inicial con el cual se pueda dar una función inyectiva, o sea, finito."
(Gr. B) "Sí, porque no se pueden convertir nunca en fracción".
(Gr. C) "No es denso, porque el conjunto de los números irracionales no es cerrado".
(Gr. D) "Entre un intervalo [1,2] hay infinitos."
(Gr. D) "No es denso, ya que existen números en la recta que no son irracionales."
(Gr. D) "No, porque para que un conjunto sea denso debe haber entre dos números infinitos números."

Tabla. 11. Respuestas al ítem 9 dadas por los alumnos.

Así, las respuestas son representativas del significado personal atribuido por los estudiantes a las distintas nociones involucradas. Para los estudiantes:

- *Densidad e infinito matemático*. La cardinalidad del conjunto infinito es equiparable a las nociones de densidad e infinito matemático: "conjunto infinito equivale a conjunto denso".
- *Densidad y definición de racional*. La densidad como una propiedad de los números no racionales ("es denso porque no se pueden convertir nunca en fracción").
- *Densidad y completitud*. La completitud de $\mathbb{R}$ y la manipulación del modelo gráfico lineal es problemática: "no es denso porque existen números en la recta que no son irracionales".
- *Densidad y conjunto cerrado*. Las nociones de conjunto acotado y conjunto cerrado interfieren en la noción de densidad: "no es denso porque no es cerrado", "hay infinitos en [1,2]".

Esto último trae aparejado algunas implicaciones que es necesario tener en cuenta para la enseñanza y el aprendizaje de las nociones matemáticas analizadas.

4.2.1.3 Algunas implicaciones para la enseñanza

Los futuros profesores necesitan conocer con profundidad las propiedades del número irracional para poder enseñar su construcción viable y eficaz. La emergencia de errores reproducibles y en muchos casos recurrentes, plantea la necesidad de un tratamiento a largo plazo. Los fenómenos de aplanamiento y dependencia se han puesto de manifiesto en este estudio, como así también el fenómeno didáctico de "asimetría de cardinales infinitos por inclusión", el cual parece emerger en algunos de los casos estudiados.

A modo de síntesis de lo explorado, podemos puntualizar, las siguientes conclusiones:

- Los significados personales de los estudiantes sobre el concepto de cardinalidad de un conjunto infinito se presenta inestable o no se presentan; en general tales significados se hallan ligados a la problemática del infinito actual.

- La noción de cardinalidad es la que mayores dificultades presenta. La manifestación de conflictos epistémicos y cognitivos, en las respuestas de los estudiantes, introduce una gama de errores que atraviesa las respuestas de los estudiantes.
- Los futuros profesores no logran un conocimiento que les permita zanjar el problema de la distinción entre las cardinalidades de los conjuntos infinitos, seña de esto último es la manifestación de fenómenos de tipo didáctico como los de dependencia, aplastamiento y asimetría de cardinales infinitos por inclusión.
- La noción de infinito potencial parece actuar en forma resistente ya que no permite emerger la noción de infinito actual presente en la cardinalidad del conjunto de los números irracionales.
- La noción de densidad se presenta también inestable o no es parte de la significación personal de los alumnos, siendo un problema para la construcción de la noción de número irracional" (Reina, Wilhelmi, Carranza y Lasa, 2014, 635-636).

4.3 SOBRE LAS DEFINICIONES DE NÚMERO IRRACIONAL

Diferentes definiciones de número irracional son las que lo "determinan". Pero, ¿qué se entiende por definir un objeto matemático?

> "Definir consiste en establecer un conjunto de condiciones necesarias y suficientes que permitan discriminar unívocamente un objeto dentro de un universo. En muchas circunstancias, dicha discriminación se lleva a cabo mediante una formalización; formalización que ha hecho que ciertos autores afirmen que *definir en matemáticas es dar un nombre* (Leikin & Winicki-Landman, 2000). Esta perspectiva supondría afirmar que la definición formal discrimina al objeto matemático, es su« medida ». Sin embargo, un mismo objeto matemático puede ser definido por medio de formas equivalentes. Dos definiciones son equivalentes si designan el mismo objeto; no es posible privilegiar *a priori* ninguna de ellas. La pertinencia en el uso de una definición se mide por el grado de adaptación al contexto de aplicación" (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007,87-88).

En algunos libros de texto universitarios las definiciones de número irracional se centran en la "negación de la racionalidad", o sea, se los llama irracionales a los números reales que no son racionales (Apostol, 1996; Larson, Hostetler & Edwards, 1999).

Otros textos universitarios se focalizan en la aperiodicidad o no periodicidad de las fracciones decimales infinitas (Piskunov, 1977; Potápov, Alexándrov y Pasichenko, 1980).

En su gran mayoría los docentes de matemática de nivel secundario apelan a definiciones de número irracional que se encuentran en los libros de texto de nivel secundario o alguna de las anteriormente explicitadas que se presentan en los primeros años de universidad.

Sin embargo, las definiciones anteriormente expuestas son aceptadas por la comunidad matemática hasta el siglo XIX.

> "'Entonces, los números racionales resultan las expresiones decimales periódicas, y los números irracionales, las expresiones decimales aperiódicas. Hasta mediados del siglo XIX, este era el concepto aceptado de número real. El período de revisión crítica de los fundamentos y principios de la Matemática y el desarrollo de la geometría analítica y el cálculo infinitesimal exigieron un análisis más preciso del concepto anterior, realizado por Méray y Weierstrass (1869), Dedekind (1872), Cantor (1872), etc." (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1969,99).

Esta adopción, por parte de los profesores, obedece a la imposibilidad en Educación Secundaria de incorporar nociones de mayor complejidad que sólo se presentan en el currículo de Cálculo de los primeros años de enseñanza universitaria.

A continuación se reúnen y describen diferentes métodos "equivalentes" de definición del número real.

4.3.1 DEFINICIÓN DE NÚMERO REAL DEBIDA A CANTOR POR "SUCESIONES FUNDAMENTALES"

"Una sucesión de números racionales $\{a_n\}$ se llama *regular o de Cauchy* (o *fundamental*, según la nomenclatura inicial de G. Cantor), si para todo número positivo ε corresponde un número ν_ε tal que $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$ para $n > \nu_\varepsilon$ y cualquier p" (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1969,280).

"Según Ch. Méray y G. Cantor, el sistema de los números reales se compone de todas las sucesiones regulares de números racionales, respecto de los cuáles se han definido la relación de equivalencia y las operaciones de adición y multiplicación" (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1969 ,281).

No parece sencilla la apropiación, por parte de los estudiantes de los primeros años de universidad, de los números reales vía las sucesiones de Cauchy: "La condición de Cauchy que define una sucesión regular es poco intuitiva para ser captada fácilmente por el principiante" (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1969 ,281).

Por lo que, en algunos casos, se suele definir a los números reales por sucesión de intervalos.

4.3.2 DEFINICIÓN DE NÚMERO REAL DEBIDA A CANTOR POR "SUCESIONES DE INTERVALOS ENCAJADOS"

En notación moderna, propone:

"Sea A el conjunto de todos los encajes de intervalos cerrados racionales. Cada elemento de A es una sucesión decreciente de intervalos encajados, que denotamos con $[a_i , a'_i]$.

En A se define la relación ~ mediante

$[a_i , a'_i] \sim [b_j, b'_j] \Leftrightarrow a_i \leq b'_j \wedge b_j \leq a'_i \forall i \forall j$ (1)(Rojo, 1986, 313).

Definición

"Número real es toda clase de equivalencia determinada por la relación (1) en el conjunto de todos los encajes de intervalos cerrados racionales.

Conjunto de los números reales es el cociente de A por la relación de equivalencia.

La notación$\alpha = K_{[a_i, a'_i]}$ denota al número real asociado a la clase de equivalenciadel encaje$[a_i, a'_i]$.

Un real se llama racional si y sólo si el encaje representativo de su clase tiene intersección no vacía. Si tal intersección es vacía, el real se llama irracional." (Rojo, 1986, 315).

Otra definición de número real que se suele emplear es la dada por "cortaduras".

4.3.3 DEFINICIÓN DE NÚMERO REAL POR "CORTADURAS" DEBIDA A DEDEKIND

Dedekind afirma:

"Ahora, cada vez que encontramos una cortadura (A_1, A_2) que no es producida por ningún número racional, *creamos* un nuevo número *irracional*α, que consideramos completamente definido mediante esa cortadura (A_1, A_2); diremos que el número α corresponde a esa cortadura, o que produce esa cortadura. Por tanto, a partir de ahora corresponde a cada cortadura un y sólo un número racional o irracional determinado, y consideramos que dos números son *diferentes* o *desiguales* siempre y sólo cuando corresponden a cortaduras esencialmente diferentes" (Dedekind, 1901,7).

En notación moderna, se puede expresar de la siguiente forma:

"En el conjunto de todas las cortaduras en $\mathbb{Q}$ se define la siguiente relación de equivalencia

$$A \sim B \Leftrightarrow A = B$$

Las clases de equivalencia se llaman números reales, y por ser unitarias se las identifica con la correspondiente cortadura, es decir

$$K_A = A$$

Suele utilizarse la notación $K_A = \alpha$.

En este sentido podemos decir que número real es toda cortadura en $\mathbb{Q}$. Si la cortadura tiene frontera racional queda definido un real racional, y en caso contrario el real se llama irracional. [...] Los conjuntos de los números reales racionales y de los reales irracionales son, respectivamente.

$$\mathbb{R}_{\mathbb{Q}} = \{A_i/A_i \text{es cortadura} \wedge A_i^c \text{tiene mínimo}\}$$[4]

$$\mathbb{R}_{\mathbb{I}} = \{A_i/A_i \text{es cortadura} \wedge A_i^c \text{carece de mínimo}\}$$ “

(Rojo, 1986, 323).

Se puede sintetizar lo expresado matemáticamente en el siguiente diagrama (figura 15).

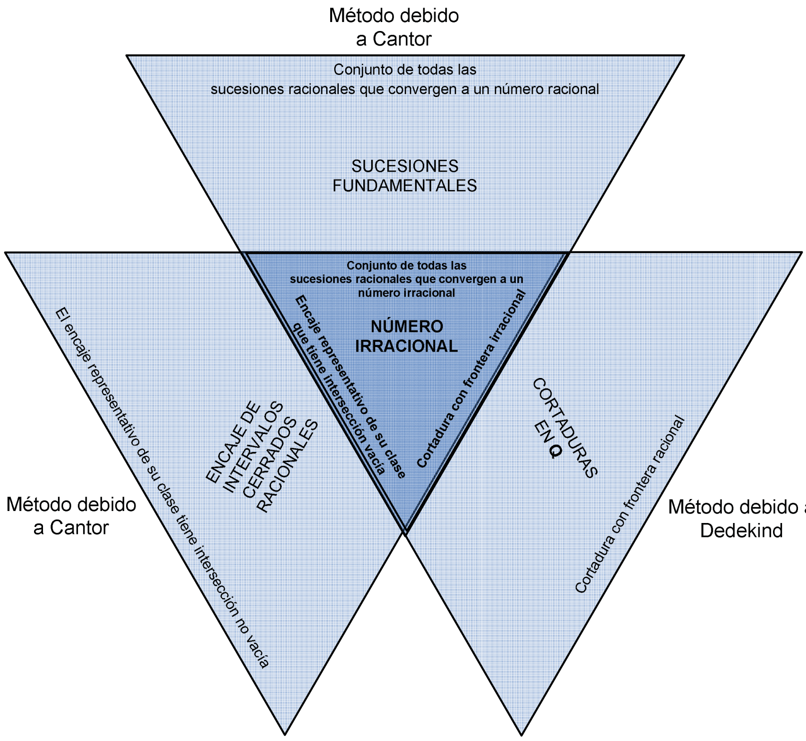


Fig. 15. Definiciones de número irracional debidas a Cantor y a Dedekind aceptadas actualmente por la comunidad matemática.

[4]“El subconjunto $A \subset \mathbb{Q}$ es una cortadura en $\mathbb{Q}$ si y sólo si verifica: i) $A \neq \emptyset \wedge A \neq \mathbb{Q}$. ii) $x \in A \wedge y < x \Longrightarrow y \in A$. iii) $x \in A \Longrightarrow \exists\, y \in A/y < x$ .La condición i) significa que una cortadura en $\mathbb{Q}$ es una parte propia y no vacía de$\mathbb{Q}$. En iii) queda especificado que A carece de máximo.
Es claro que toda cortadura en $\mathbb{Q}$ caracteriza una partición de $\mathbb{Q}$ que denotamos mediante $\{A, A^c\}$.
Los elementos de A^c son cotas superiores de A.

Puede probarse que las definiciones de número real (irracional) expuestas anteriormente son "matemáticamente equivalentes" lo que no asegura su "equivalencia didáctica" al momento de la enseñanza y el aprendizaje.

La complejidad didáctica de las definiciones está relacionada con diferentes nociones asociadas a cada una de ellas: sucesiones fundamentales, cortaduras en$\mathbb{Q}$, encaje de intervalos cerrados racionales, infinito actual, etc. Por lo que las distintas definiciones de la noción de número irracional condicionan el trabajo matemático.

La definición de "conjunto" de números irracionales también tiene su complejidad didáctica ya que involucra a nociones matemáticas como las de "cortadura" o "mínimo" las cuales no son pasibles de ser estudiadas en Educación Secundaria.

Se puede afirmar que en la práctica matemática juega un rol importante en la significación de una noción; de hecho, "la práctica matemática condiciona los significados atribuidos a dicha noción" (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007,94). Esto último se muestra en la evolución epistemológica de la noción de número irracional detallada en los apartados anteriores.

"Se ha formalizado dicho significado en definiciones que emergen de ciertos sistemas de prácticas matemáticas relativos a campos de problemas determinados" (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007,94), que en este caso se centralizan en la "crisis de los fundamentos" que emerge en el siglo XIX y que implica el trabajo de varios matemáticos como Cantor, Dedekind y otros.

"Una tarea fundamental consiste en reconstruir este proceso, esto es, en determinar las prácticas discursivas y operatorias que han hecho emerger las definiciones [...] en los diferentes contextos de uso" (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007,94), cuestión que se trata en apartado 4.7 de este capítulo.

4.4 EL PROBLEMA DIDÁCTICO DE LAS REPRESENTACIONES DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

La "conexión" números irracionales-puntos de la recta numérica se establece rigurosamente en 1872.

> "Cantor consideraba axiomático que cada punto de una recta continua le correspondía un número, llamado "real" para distinguirlo de los números "imaginarios", que eran los múltiplos de $\sqrt{-1}$. Recíprocamente, a cada número real le correspondía un punto, y exactamente un punto, de una recta continua. Por consiguiente, el problema de describir el continuo de puntos de una recta era equivalente al problema de definir e investigar las propiedades del sistema de números reales. Cantor propuso que todo número irracional podía representarse por una sucesión infinita de números racionales. [...]De esta forma, todos los números irracionales pueden ser imaginados como puntos geométricos situados sobre una "recta numérica", al igual que había podido hacerse con los números racionales" (Dauben, 1995, 94-105).

Si bien la intuición de una recta numérica continua se manifiesta en el trazo con una regla y un lápiz en un papel (en obras como la de Euclides es posible observar ya esta intuición) su evolución será un largo proceso que llevará varios siglos. Las implicancias didácticas de la nociones de continuidad de la recta y de la propiedad de completitud del conjunto de los números reales ya han sido largamente analizadas (Berge y Sessa, 2003).

Considerando la recta geométrica y numérica continua, se intenta a continuación introducir en el estudio de los números algebraicos para luego arribar a los números algebraicos irracionales.

Se analizan entonces, en el apartado siguiente, algunos aspectos de los números algebraicos, se diferencian entre números algebraicos irracionales de aquellos que no lo son y se estudia su representación por medio de la regla y compás ideales.

4.4.1. LOS NÚMEROS ALGEBRAICOS Y TRASCENDENTES

Para el abordaje de la problemática didáctica implicada por la representación en la recta real de los números irracionales y su clasificación, se hace necesario recordar qué se entiende por número algebraico.

Un número real o complejo se llama algebraico si es solución de una ecuación polinómica de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 (n \geq 1, a_n \neq 0), a_i \in \mathbb{Z}$$

También se debe recordar que:

- Todos los números racionales son algebraicos.
- Algunos números irracionales son algebraicos.
- Los números reales que no son algebraicos son trascendentes.

A modo de ilustración de lo anteriormente expresado se puede observa la figura 16.

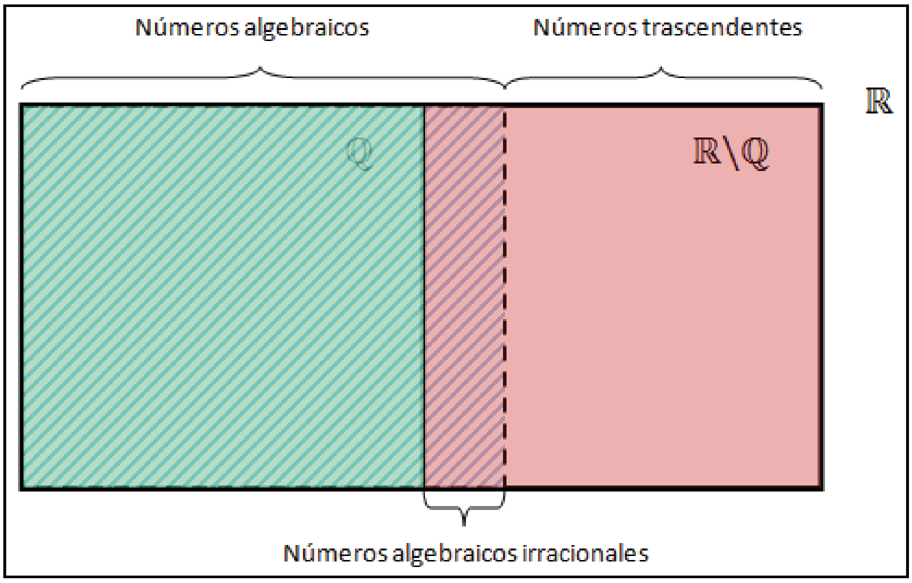


Fig. 16. Conjunto de los números algebraicos y algebraicos irracionales.

Algunos ejemplos de números algebraicos irracionales son:

$$\sqrt{2}\ ,\ \emptyset\ ,\ \sqrt[3]{2}\ ,\ \sqrt[4]{3}\ ,\ \sqrt[5]{4}\ ,\ 2+\sqrt{7},\ \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4}}}}\ \text{,etc.}$$

Pero se puede preguntar ¿porqué es importante para la enseñanza establecer una distinción entre números algebraicos de aquellos que no lo son?

La respuesta se puede esbozar a partir de lo que varios libros de texto y algunos diseños curriculares de nivel secundario enfatizan: la representación en la recta real de algunos irracionales por métodos geométricos.

4.4.2. LOS NÚMEROS CONSTRUIBLES

Un número x es "construible":"si podemos calcularlo por un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíces cuadradas, comenzando con 0 y 1". (Moise, 1968,302).

Se debe destacar que estos números son construibles con "regla y compás ideales" y que dado que todos son "algebraicos" se hace necesario su estudio, por lo menos en un nivel introductorio o elemental.

Un cuestionamiento que se puede hacer: ¿todos los números algebraicos reales son construibles con regla y compás ideal? Se da una respuesta en el siguiente apartado.

4.4.2.1. Los números algebraicos irracionales construibles con regla y compás

Si bien "todos los números construibles son algebraicos" (Courant y Robbins, 192, 145), no todos los números reales son construibles con regla y compás (ideales). Existen números algebraicos construibles con regla y compás como los racionales y algunos números irracionales, y otros que no lo son.

Se trata de un problema geométrico-algebraico:

> "Si llamamos *irracional cuadrático* a toda expresión que resulta de combinar las cuatro operaciones racionales con la raíz cuadrada un *número finito* de veces, y entendemos que utilizar la regla y el compás

significa efectuar un número finito de veces las siguientes construcciones geométricas: 1°) Trazar la recta que una dos puntos ya determinados o arbitrarios; 2°) Trazar circunferencias de centro y radio ya determinados o arbitrarios; 3°) Hallar la intersección de rectas y circunferencias ya trazadas; entonces puede afirmarse que:

La condición necesaria y suficiente para que un problema geométrico sea soluble con la regla y el compás, es que la incógnita pueda expresarse en función de los datos, por medio una expresión racional o irracional cuadrática" (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1969,268).

La figura 17 nos muestra al conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) y al de los números irracionales ($\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$) en ellos se ha diferenciado al conjunto de los números algebraicos de los números construibles

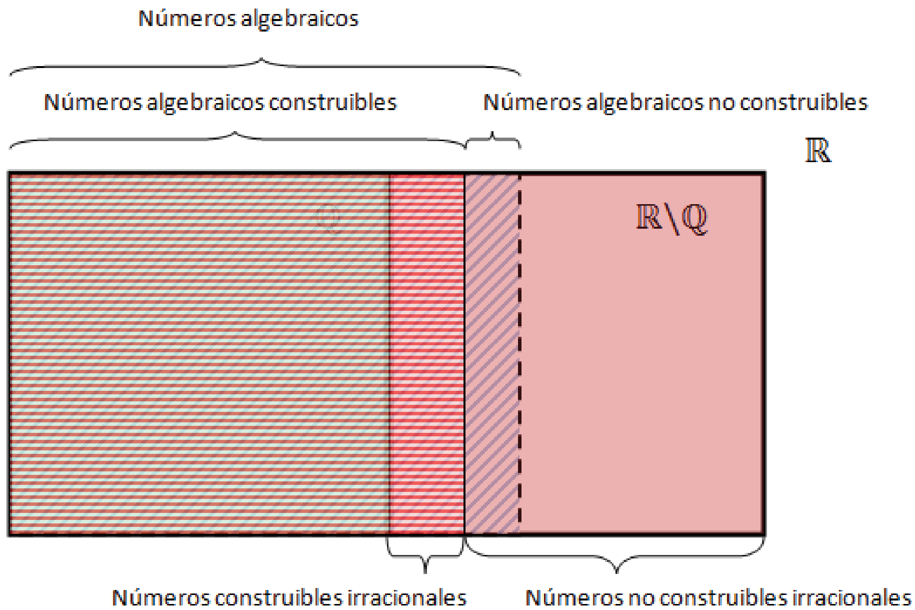


Fig.17. Conjunto de los números algebraicos construibles y construibles irracionales.

4.4.2.2. Los números algebraicos irracionales no construibles con regla y compás: el teorema de Wantzel

En 1837 el matemático francés Pierre L. Wantzel (1814 - 1848) demuestra que si x es un número construible, entonces x es una raíz de un polinomio con coeficientes racionales irreducible en Q [x] de grado 2^n, donde n es un entero positivo. (Wantzel, 1837).

Con esto demuestra la imposibilidad de la solución, por regla y compás, de unos de los problemas clásicos griegos que se resistía a ser demostrado: la duplicación del cubo. (Grozdanić y Vojvodić , 2010).

Se cree que Menecmo, empleando la hipérbola y la parábola o *dos parábolas de vértice común* (Rey Pastor y Babini, 2000, 66-67) halló una solución aproximada de la raíz cúbica de dos, solución del problema.

Si se toma $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{2}{x}$con $x \neq 0$ y hallando su intersección $x^2 = \frac{2}{x}$ (fig.18).

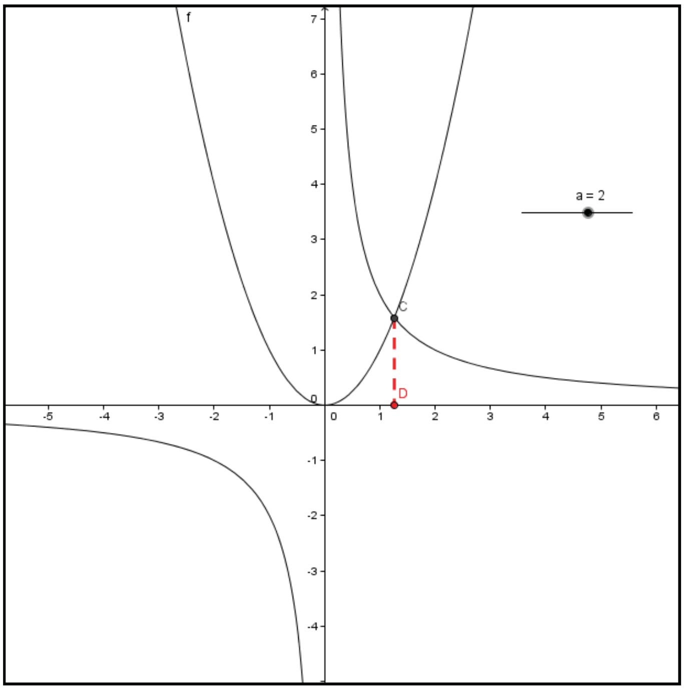


Fig.18. Representación aproximada de la raíz cúbica de dos.

4.4.3. MOTIVACIÓN INICIAL Y PROBLEMÁTICAS DIDÁCTICAS

Si se presenta una colección de números irracionales, por ejemplo:

$$\sqrt{2};\ \sqrt[3]{2}\ ;\sqrt[4]{2}\ ;\ \sqrt[5]{2};\ \sqrt[6]{2};\ \sqrt[7]{2};\ \sqrt[8]{2}\ ;\ \pi;\ e;\ 0{,}01001000100001000001\ldots$$

Y se pregunta:

- **a.** ¿Podemos representar exactamente en la recta numérica real a todos estos números?, ¿porqué?
- **b.** Si fuese posible representar alguno de ellos, con la ayuda de la regla y el compás, ¿a cuál/es elegiría y por qué?, describa el método geométrico que emplearía para representarlos.
- **c.** ¿En el caso de no ser posible representar a algunos de ellos con la restricción de la regla y el compás, ¿cuáles procedimientos conoce Ud. para ubicarlos en forma aproximada en la recta real?

Para esbozar una respuesta a cada pregunta planteada se incluyen los siguientes apartados en donde se destacan la diferenciación entre lo exacto y lo aproximado en la representación de irracionales en la recta real.

4.4.3.1. Representación exacta y aproximada de números irracionales en la recta real

Para dar respuesta a la primer pregunta (**a**) planteada en el punto anterior se debe aclarar cuándo se considera como exacta o aproximada la determinación de un punto sobre la recta.

> "Fijados los puntos correspondientes a 0 y 1, el siguiente paso en la representación de un número real cualquiera es determinar el correspondiente punto de la recta. Tratándose de un procedimiento de medición, la manipulación con instrumentos físicos (como la regla graduada, el micrómetro, la regla de un solo borde y el compás o el intégrafo) para determinar la posición de un número real sobre una recta produce siempre un resultado aproximado" (Coriat y Scaglia, 2000, 29).

Para la determinación exacta de un número sobre la recta real se puede recurrir a una noción ya introducida en este trabajo, la de número construible.

> "Todos los números constructibles con regla y compás admiten una representación idealmente exacta; los restantes números (sean

algebraicos o trascendentes) no admiten hoy día una representación idealmente exacta" (Coriat y Scaglia, 2000, 29).

De acuerdo a lo tratado es posible concluir que la noción de número construible puede contribuir a hacer revertirla creencia de que todo número irracional es construible con regla y compás.

> "Ponemos de manifiesto limitaciones de la propia asignación punto-número y la necesidad de ampliar la noción de número constructible si se quiere dar más seguridad a una creencia, básica en secundaria, según la cual la biyección punto-número se podría realizar efectivamente para todo número real"(Coriat y Scaglia, 2000, 26).

Entonces en base a lo anteriormente expuesto se puede dar respuesta a la pregunta realizada: no todo número irracional es representable exactamente y de la colección de números irracionales dada sólo son construibles, con ayuda de la regla y el compás ideal, los números siguientes: $\sqrt{2}$;$\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[8]{2}$.

¿Y por qué razón son sólo construibles estos números?, para dar respuesta a esta última pregunta y a la segunda cuestión planteada (pregunta **b**) se hace uso de resultados matemáticos obtenidos en el siglo XIX.

En base al resultado de Wantzel es que se puede dar respuesta a la segunda cuestión planteada, los números $\sqrt[3]{2}$,$\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[7]{2}$, π; e; 0,010010001000010000001…(si continua con esa misma ley de formación), no son raíces de polinomios con coeficientes racionales de grado 2^n,por lo que no son construibles con regla y compás ideales.

Si se continúa con la respuesta a la segunda pregunta ahora el camino se centra en la representación geométrica de aquellos números que sí son construibles.

4.4.3.1.1. Representación de números algebraicos irracionales construibles con regla y compás en la recta numérica real

De acuerdo a lo visto ya se conoce que los siguientes números $\sqrt{2}$,$\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[8]{2}$ sí son construibles ¿pero cómo ubicarlos en la recta real con la ayuda de sólo la regla y el compás?

Para el caso de la raíz cuadrada de dos existen varios procedimientos geométricos, uno de los más utilizados en los libros de texto de secundaria tiene que ver con el empleo de la proporcionalidad entre segmentos o por medio del teorema de Pitágoras, esto se extiende para cualquier raíz cuadrada de números no cuadrados perfectos. Para poder representar el caso de la raíz cuarta de dos, se puede utilizar la construcción propuesta por Kaplan y Kaplan (2003), donde se emplea una semicircunferencia de diámetro 1+$\sqrt{2}$ (fig.19).

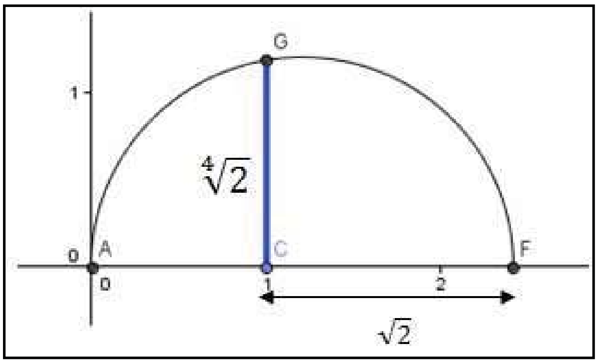


Fig. 19. Construcción geométrica de la raíz cuarta de dos con Geogebra (aproximada).

De manera similar es posible construir la raíz octava de dos, en el gráfico se puede observar la aproximación dada por GeoGebra (fig.20).

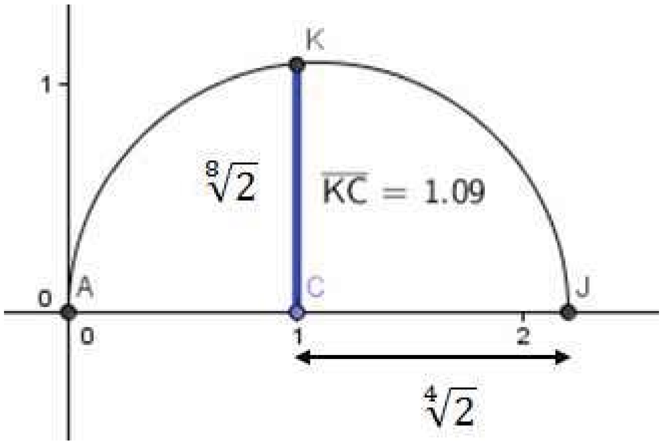


Fig.20. Construcción geométrica de la raíz octava de dos con Geogebra (aproximada).

Para responder a la pregunta(**c**) se intenta su acceso vía la historia de la matemática, cuestión que se trata en el apartado siguiente.

4.4.3.1.2. Representación de números algebraicos irracionales no construibles con regla y compás en la recta numérica real

Los números algebraicos irracionales no construibles con regla y compás pueden representarse, en forma aproximada, por intersección de cónicas con ayuda de software de geometría dinámica como GeoGebra (como se muestra en la figura 9), por intersección de una función afín o cuadrática con el eje de abscisas o por otros medios.

El procedimiento por intersección de cónicas fue descubierto por Menecmo (siglo iv a.C.) al intentar hallar una solución con regla y compás del problema de la duplicación del cubo. Se cree que empleando la hipérbola y la parábola o “dos parábolas de vértice común” (Rey Pastor y Babini, 2000, 66-67) halló una solución aproximada de la raíz cúbica de dos, solución del problema.

Este procedimiento puede ser conveniente para alumnos de 15-16 años (tercer año) que continúan el estudio de la función cuadrática el cual comienza en segundo año (14-15 años).

4.4.3.1.3. Representación de los números irracionales trascendentes

En el caso de los números irracionales trascendentes, por ejemplo π , e , etc.si bien no es posible representarlos en la recta real, solamente con la ayuda de la regla y el compás, es posible ubicarlos aproximadamente, por medio de las raíces de funciones de la forma $f(x) = x - b$ con b $\in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ o $f(x) = x^2 - bx$ con b $\epsilon\ \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Para el caso del número irracional trascendente 0,01001000100001000001… sólo disponemos de una representación por una aproximación racional.

En el apartado siguiente se da cuenta de la experimentación realizada con profesores de matemática de Educación Secundaria.

4.4.4. LA EXPERIMENTACIÓN

Se realiza una encuesta a dieciséis profesores de Educación Secundaria, en matemática, en el sur de la Provincia de Mendoza, Argentina, en la misma se realizan diferentes preguntas. La primera cuestión tiene que ver con las nociones matemáticas que emplean los docentes para introducir los números irracionales.
¿Qué nociones utiliza para introducir y desarrollar el número irracional con sus alumnos? Marque una o varias opciones (tabla 12).

a.	La medida y comparación de segmentos en un triángulo rectángulo	8
b.	Las ecuaciones no resolubles en $\mathbb{Q}$	11
c.	La aproximación racional de irracionales	2
d.	Otras	3

Tabla 12. Respuestas de profesores de Educación Secundaria indicando algunas nociones para introducir los números irracionales.

Las ecuaciones no resolubles en $\mathbb{Q}$ y la de medida (puntos b y a) son las nociones más empleadas por los docentes.
Luego se les interroga si consideran importante que los alumnos diferencien entre números racionales e irracionales. Se puede marcar una o varias opciones.
¿Es esencial para Ud. que en el desarrollo del tema números reales, el alumno diferencie entre un racional y otro irracional? En caso afirmativo ¿Qué tipo de actividades propone a sus alumnos? Marque una o varias opciones (tabla 13).

a.	Dibujar diagramas de Venn y que el alumno introduzca en cada conjunto los números racionales y los irracionales.	5
b.	Dar una colección de números reales y que diferencie aquellos que son irracionales	11
c.	Dar una tabla de doble entrada con números reales y los diferentes conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ y que el alumno marque con una cruz a qué conjunto pertenecen.	9
d.	Otras	6

Tabla 13. Respuestas de dieciséis profesores de Educación Secundaria indicando actividades para diferenciar a un número racional de un irracional.

Las actividades más empleadas por los profesores son la de presentar a los alumnos una colección de números reales para que estos logren su diferenciación, esta actividad no está exenta de dificultades que se analizan en el punto 8.1. Otra actividad, señalada por los docentes, es la de construir una tabla de doble entrada con números reales para que los alumnos indiquen conjunto de pertenencia, estas actividades didácticas son planteadas por profesores de los grupos de control (apartado 6.1.1.4) y son fuente de algunas dificultades para los alumnos que también se estudian en el apartado 8.1.. En menor medida son tenidas en cuenta, por los profesores, las actividades de los ítems "d y a".

Posteriormente se les pregunta si consideran importante que los alumnos ubiquen en la recta numérica real algunos números irracionales y, en caso afirmativo, indiquen cuáles son los números más utilizados para dicho fin. Se puede marcar una o varias opciones. Los resultados que se obtienen son los siguientes (tabla 14):

Las raíces cuadradas de números no cuadrados perfectos	16
El número de oro	4
El número π	4
El número e	1
Otros	2

Tabla 14. Respuestas de dieciséis profesores de enseñanza secundaria indicando los números irracionales más utilizados en sus clases para representarlos en la recta numérica real.

La mayoría de los docentes señala a las raíces cuadradas de números no cuadrados perfectos como los números más utilizados para representar en la recta numérica real.

También se les consulta cuáles son los métodos más empleados, en sus clases, para la representación de números irracionales en la recta real. Se pueden marcar una o varias opciones (tabla 15).

Teorema de Pitágoras	16
Proporcionalidad entre segmentos	2
Teorema del cateto o teorema de la altura	3
Otros.	0

Tabla 15. Métodos más empleados por profesores de enseñanza secundaria en sus clases para representar los números irracionales en la recta numérica real.

Se destaca, como método más usado por los profesores para representar números irracionales en la recta numérica real, es el teorema de Pitágoras.
Esto último se debe, probablemente, a cuestiones de currículo de matemática y, además, de relativa sencillez en la representación geométrica.
Otra cuestión que se indaga, relacionada con los cuestiones anteriores, es la de si les es posible, a los profesores, diferenciar los números irracionales de los racionales y, además, si pueden indicar cuáles de ellos se pueden representar en forma idealmente exacta, con regla y compás, en la recta numérica real (tabla 16).

Número	**¿Irracional?**			**¿Construible con regla y compás?**				
	Si	**No**	**Nc**	**Si**	**No**	**Nc**	**Justifica**	**No justifica**
0,010010001…	9	1	6	0	4	12	3	13
$\sqrt[3]{2}$	8	1	7	1	2	13	3	13
$\sqrt[4]{2}$	8	1	7	1	2	13	3	13
$\sqrt[5]{2}$	9	0	7	1	2	13	3	13
$\sqrt[6]{2}$	9	0	7	1	2	13	3	13
$\sqrt[8]{2}$	9	0	7	1	2	13	3	13
$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$	3	3	10	0	3	13	3	13
log(2)	6	0	10	0	4	12	3	13
e	7	0	9	0	4	12	3	13

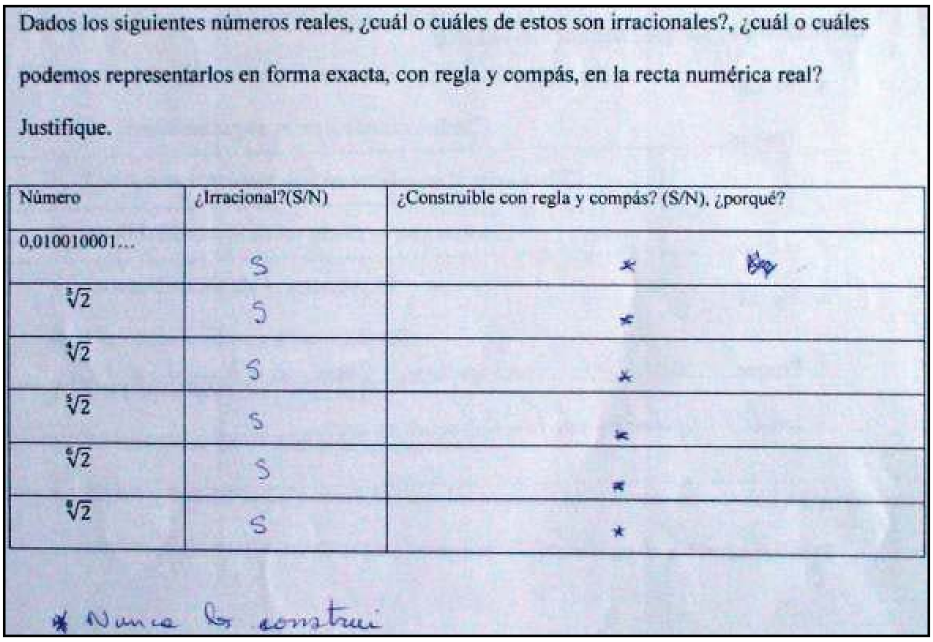
Tabla 16. Respuestas de dieciséis profesores de enseñanza secundaria a las preguntas sobre la irracionalidad y la posible construcción con regla y compás de una colección de números.

Las respuestas dadas por los docentes muestran dificultades a la hora de reconocer si un número es o no irracional y aún mayores conflictos al momento de decidir si un número es o no construible con regla y compás y, además, tener que justificar su decisión.

La gran cantidad de respuestas no contestadas por los docentes, ni justificadas, dan lugar a diferentes supuestos que a continuación describimos:

- Los docentes no desean arriesgarse a tomar una alternativa errónea y exponerse a futuras “críticas” por lo que no contestan el ítem.
- No disponen de una calculadora en esos momentos.
- No disponen de tiempo suficiente para terminar de completar la encuesta.
- No está disponible en ellos el conocimiento sobre la noción de número irracional.
- No está disponible en ellos el conocimiento sobre número construible con regla y compás por lo que no les es posible justificarlo.

Esto último lo podemos apreciar en algunas de las argumentaciones dadas por los docentes en relación con la noción de número construible (figura 21).


Dados los siguientes números reales, ¿cuál o cuáles de estos son irracionales?, ¿cuál o cuáles podemos representarlos en forma exacta, con regla y compás, en la recta numérica real? Justifique.

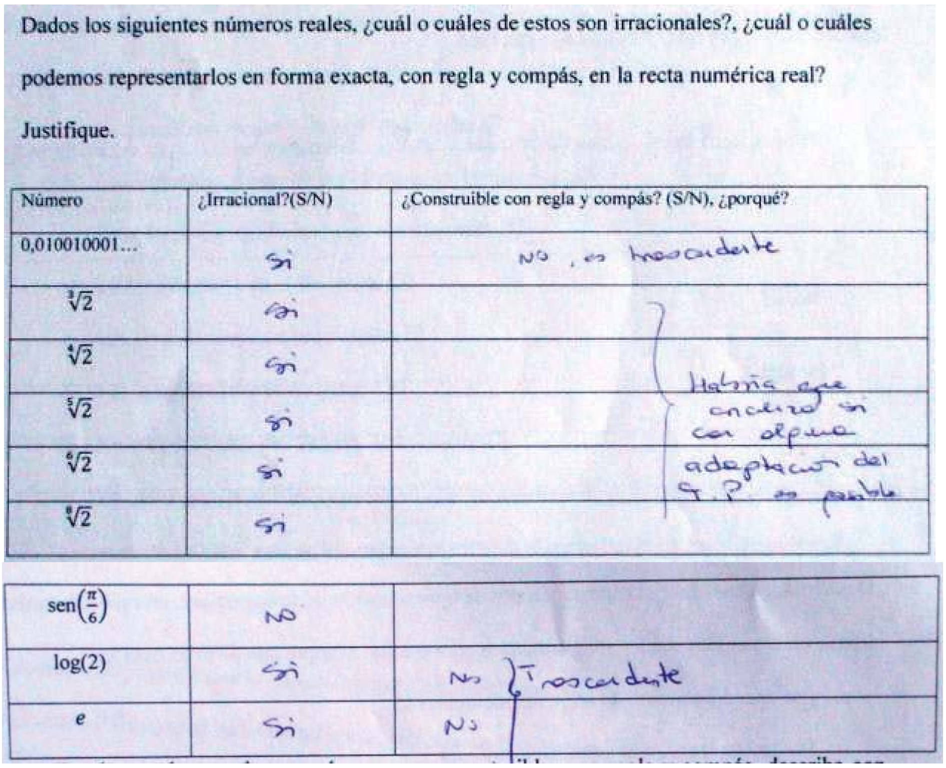
Número	¿Irracional?(S/N)	¿Construible con regla y compás? (S/N), ¿porqué?
0,010010001…	S	* [illegible]
$\sqrt[3]{2}$	S	*
$\sqrt[4]{2}$	S	*
$\sqrt[5]{2}$	S	*
$\sqrt[6]{2}$	S	*
$\sqrt[8]{2}$	S	*

* Nunca los construí

Fig. 21. Respuestas de un profesor de Educación Secundaria a las preguntas sobre algunos números irracionales y su construcción con regla y compás.

El docente expresa “nunca lo construi” (tabla 4) por lo que el conocimiento sobre la noción de número construible no se encuentra disponible y, además, el profesor no parece haber sido expuesto a este tipo de cuestiones en su tránsito por la formación docente.

Otro profesor se plantea la posibilidad de estudiar si estos números son o no construibles con regla y compás: “Habría que analizar si con alguna adaptación del teorema de Pitágoras es posible” (figura 22). Nuevamente, ahora para este otro docente, la noción de número construible no se encuentra en el repertorio de conocimientos disponibles, si bien sí es parte de sus conocimientos previos la noción de número trascendente.

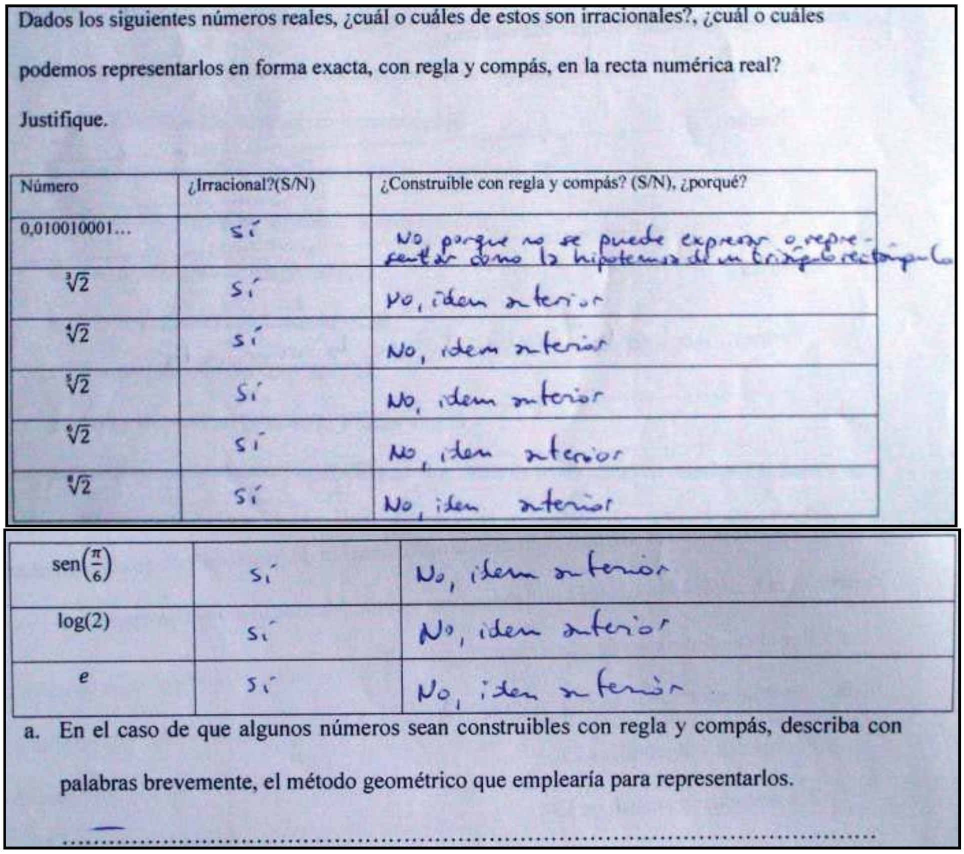


Dados los siguientes números reales, ¿cuál o cuáles de estos son irracionales?, ¿cuál o cuáles podemos representarlos en forma exacta, con regla y compás, en la recta numérica real? Justifique.

Número	¿Irracional?(S/N)	¿Construible con regla y compás? (S/N), ¿porqué?
0,010010001…	Si	No, es trascendente
$\sqrt[3]{2}$	Si	Habría que analizar si con alguna adaptación del T. P. es posible
$\sqrt[4]{2}$	Si	
$\sqrt[5]{2}$	Si	
$\sqrt[6]{2}$	Si	
$\sqrt[8]{2}$	Si	
$\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$	No	
log(2)	Si	No } Trascendente
e	Si	No

Fig. 22. Respuestas de otro docente de Educación Secundaria a las preguntas sobre las nociones de número irracional y número construible con regla y compás.

Para un tercer docente ninguno de los números es posible representarlo con regla y compás: “No porque no se puede expresar o representar como la hipotenusa de un triángulo rectángulo” (figura 23).



Dados los siguientes números reales, ¿cuál o cuáles de estos son irracionales?, ¿cuál o cuáles podemos representarlos en forma exacta, con regla y compás, en la recta numérica real? Justifique.

Número	¿Irracional?(S/N)	¿Construible con regla y compás? (S/N), ¿porqué?
0,010010001...	sí	No porque no se puede expresar o representar como la hipotenusa de un triángulo rectángulo
$\sqrt[3]{2}$	sí	No, idem anterior
$\sqrt[4]{2}$	sí	No, idem anterior
$\sqrt[5]{2}$	sí	No, idem anterior
$\sqrt[6]{2}$	sí	No, idem anterior
$\sqrt[8]{2}$	sí	No, idem anterior
$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$	sí	No, idem anterior
log(2)	sí	No, idem anterior
e	sí	No, idem anterior

a. En el caso de que algunos números sean construibles con regla y compás, describa con palabras brevemente, el método geométrico que emplearía para representarlos.

—

Fig. 23. Respuestas de un tercer docente de Educación Secundaria a las preguntas sobre la irracionalidad y la noción de número construible con regla y compás.

Esta respuesta da muestra de que, para algunos profesores, ante el desconocimiento de la noción de número construible, se aferran a sus conocimientos disponibles: las nociones de triángulo rectángulo y de teorema de Pitágoras. Es más, estas nociones son, para los profesores, parte de su trabajo cotidiano en clase de matemática, es lógico entonces que se recurran a ellas.

Posteriormente se les solicita a los docentes que, en el caso que algunos números de la tabla sean construibles con regla y compás, describan con palabras brevemente el "método geométrico" que emplean para representarlos. Solamente 2 profesores señalan el método empleado, nuevamente se trata del teorema de Pitágoras y 14 profesores no contestan el ítem.

Luego se les realiza una nueva pregunta ahora acerca de algunas propiedades del conjunto de los números irracionales:

¿Logra desarrollar en sus clases las propiedades de densidad y orden de los números irracionales? Justifique (tabla 17).

Siempre	2	Por la necesidad que los alumnos distingan dichas propiedades. Porque son de gran importancia.
A veces	8	Porque es necesario que los chicos vean conjuntos numéricos. Al inicio de las características de los conjuntos numéricos. Depende del grupo y de los conocimientos previos. A veces no es conveniente por complejidad. No hay demasiado tiempo.
Nunca	4	No está incluido en el currículo.
NC	2	___

Tabla 17. Respuestas y justificaciones de docentes de Educación Secundaria a las preguntas sobre las propiedades de densidad y orden del conjunto de los números irracionales.

Solamente para dos profesores resulta de importancia la inclusión de las propiedades de densidad y orden del conjunto, para ocho docentes resulta "a veces" necesario, por diversos motivos que van desde la necesidad para desarrollar los diferentes conjuntos, pasando por la dependencia al grupo de alumnos y a sus conocimientos previos como a su complejidad didáctica. Finalmente para otros profesores se trata de cuestión de tiempos didácticos disponibles.

Otra pregunta que se les realiza tiene que ver con la clasificación de números irracionales:

¿Ocupa un lugar en su programación la clasificación de números irracionales en algebraicos y trascendentes? ¿Por qué? (tabla 18).

Clasifica en su programación los números irracionales en algebraicos y trascendentes		Justifica	No justifica
Si	1	1	0
No	9	6	3
Nc	6	-	-

Tabla 18. Respuestas dada por profesores de enseñanza secundaria en matemática sobre la clasificación, en algebraicos y trascendentes, de números irracionales.

La mayoría de los docentes no realiza una clasificación de números irracionales en algebraicos y trascendentes. Las justificaciones que proveen los profesores se muestran en la tabla 19.

Sí	Para analizar el conjunto y diferenciarlo
No	Porque depende del grupo de alumnos. No es tema del año que imparto. Está "enganchado" con el próximo (2°→3°). No es un contenido significativo en el establecimiento que imparto. Los tiempos no me dan para realizar el desarrollo del programa. No se incluyen los contenidos en la planificación. No está incluido en el currículo.

Tabla 19. Justificaciones dada por los profesores a la pregunta planteada.

La no inclusión de la noción en el currículo de matemática de Educación Secundaria muestra un camino que sigue la mayoría de los docentes en sus respuestas.

Seguidamente se les consultó por las dificultades que se presentan a la hora de la construcción de la noción en Educación Secundaria (tabla 20).

En el estudio de los números irracionales, junto a sus alumnos, suelen presentarse algunas dificultades. Marque con una cruz aquellas que Ud. considera relevantes.

Dificultades en la enseñanza- aprendizaje de los números irracionales	**Cantidad de marcas realizadas por los profesores**
La identificación de números irracionales	5
La representación de irracionales en la recta real	9
La diferenciación de los números racionales	5
La clasificación de irracionales	1
Las operaciones con irracionales	12
Las propiedades del conjunto I	4
La aproximación de números irracionales	2
La débil manipulación y operación que los alumnos manifiestan en relación a la noción de número racional que incide negativamente en el aprendizaje de los irracionales.	8
NC	2

Tabla 20. Dificultades señaladas por los profesores en relación al estudio de los números irracionales en Educación Secundaria.

Según lo expuesto por los docentes, un primer lugar en las dificultades en el estudio de los números irracionales, lo ocupan las operaciones con irracionales las cuáles presentan doce adhesiones, algunas de estas dificultades se muestran en los apartados 6.3 y 6.4 correspondiente al grupo de control 1, y en el apartado 7.3 al grupo de control 2.

En segundo lugar (con nueve adhesiones) se señala las representaciones de los irracionales en la recta real, curiosamente (o no) los profesores también manifiestan dificultades a la hora de reconocer cuando un número irracional puede representarse exactamente con ayuda de la regla y el compás.

En tercera posición los profesores señalan la débil manipulación y operación que los alumnos manifiestan en relación a la noción de número racional, o sea a los conocimientos previos (antiguos) los cuáles no son los esperados por los docentes. Algunas de las dificultades se muestran en el apartado 6.1.1 y 7.1.1 correspondientes a los grupos de control 1 y 2, respectivamente.

En un cuarto lugar aparecen la diferenciación de los números racionales y la identificación de un número irracional, llamativamente (o no) los docentes también presentan dificultades a la hora de reconocer y diferenciar a un número irracional.

De acuerdo a lo manifestado por los profesores se puede, a través de la noción de simbiosis didáctica curricular (SDC), realizar un primer recorrido curricular con las interacciones entre objetos matemáticos (figura 24).

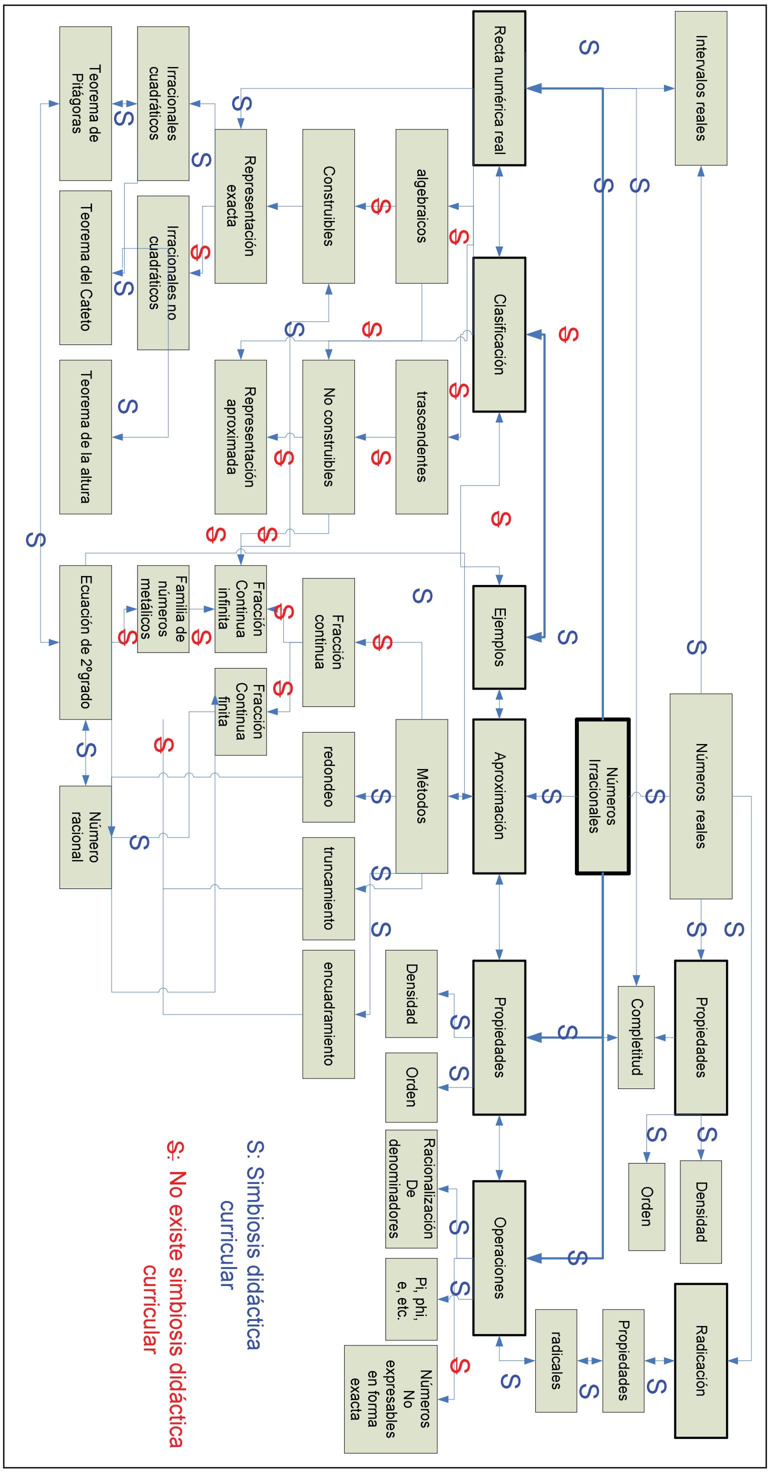


Fig. 24. Recorrido didáctico-curricular con posibles interacciones entre objetos matemáticos a través de la noción de simbiosis didáctica curricular (profesores).

Dadas algunas diferencias en las respuestas de los docentes a las cuestiones planteadas en el cuestionario, en el siguiente apartado se analiza el currículo de matemática para segundo y tercer año (correspondiente al año 2013).

4.4.5. El currículo de matemática de secundaria y los números irracionales

El diseño curricular de matemática correspondiente a 2º año (alumnos de 14 años) (DGEGM, 1998) en 2013, en la Provincia de Mendoza, Argentina, expresa en relación a los números y sus propiedades:

a. Contenidos conceptuales (Saber) en el eje Números, sus relaciones y funciones:

Números reales: Algunos números irracionales. Números reales. Los números reales racionales. Designaciones y formas de escritura de los números reales. Los distintos conjuntos numéricos y sus propiedades. La recta numérica real y la completitud. Completitud. Orden. Intervalos reales. Operaciones y cálculos.

b. Contenidos procedimentales (Saber-hacer) en el eje Números, sus relaciones y funciones:

- Reconocimiento e interpretación de algunos números irracionales especiales: π, $\sqrt{2}$ y razón áurea.
- Interpretación y uso de la noción de número real.
- Justificación de la ampliación de los números naturales a los reales.
- Reconocimiento y uso de las propiedades de los distintos conjuntos numéricos.
- Completamiento de la recta numérica real e interpretación de la completitud de los números reales.
- Aproximación, encuadramientos y truncaduras de números reales.

Los núcleos de aprendizaje prioritario (NAP), para nivel medio (1° y 2° año) elaborados por el Consejo Federal de Cultura y Educación de la Nación en relación con el número y las operaciones señalan:

- "El reconocimiento y uso de números racionales y de las operaciones y sus propiedades en situaciones problemáticas que requieran:

- Usar y analizar estrategias de cálculo con números racionales (Q), seleccionando el tipo de cálculo y la forma de expresar los números involucrados, evaluando la razonabilidad del resultado e incluyendo su encuadramiento.
- Analizar las operaciones en Q y sus propiedades como extensión de las elaboradas para los números enteros.
- Reconocer la insuficiencia de los números racionales para expresar la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro y entre los lados de un triángulo rectángulo.
- Explorar y enunciar las propiedades de los distintos conjuntos numéricos (discretitud, densidad y aproximación a la idea de completitud), estableciendo relaciones de inclusión entre ellos" (MECT, 2006, 23).

c. El diseño curricular de matemática correspondiente a tercer año de Educación Secundaria Técnica con modalidad "Producción de Bienes y Servicios" (alumnos de 15 años), en la Provincia de Mendoza (2013), Argentina, expresan en relación a los números reales:

1º Año: Matemática I: "Descriptores: *Números reales: operaciones. Aplicaciones a la medida. Errores"* (DGEPM, 2001, 43).Dicho currículo continua siendo reformado en la actualidad, año 2015. La reforma alcanza en este año al tercer año de Educación Secundaria (DGEPM, 2014; DGEPM, 2015a; DGEPM, 2015b)[5].

4.4.5.1. Análisis del recorrido curricular

Un recorrido por las nociones matemáticas que aparecen en el diseño curricular tanto de segundo año como de tercer año dan una idea de lo que se pretende el alumno construya y que además sirva de guía y orientación del profesor, dicho recorrido lo podemos caracterizar a través de la noción de SDC, en el siguiente diagrama (fig.25).

[5] En este trabajo se adopta el currículo oficial al momento del trabajo de campo correspondiente al año 2013.

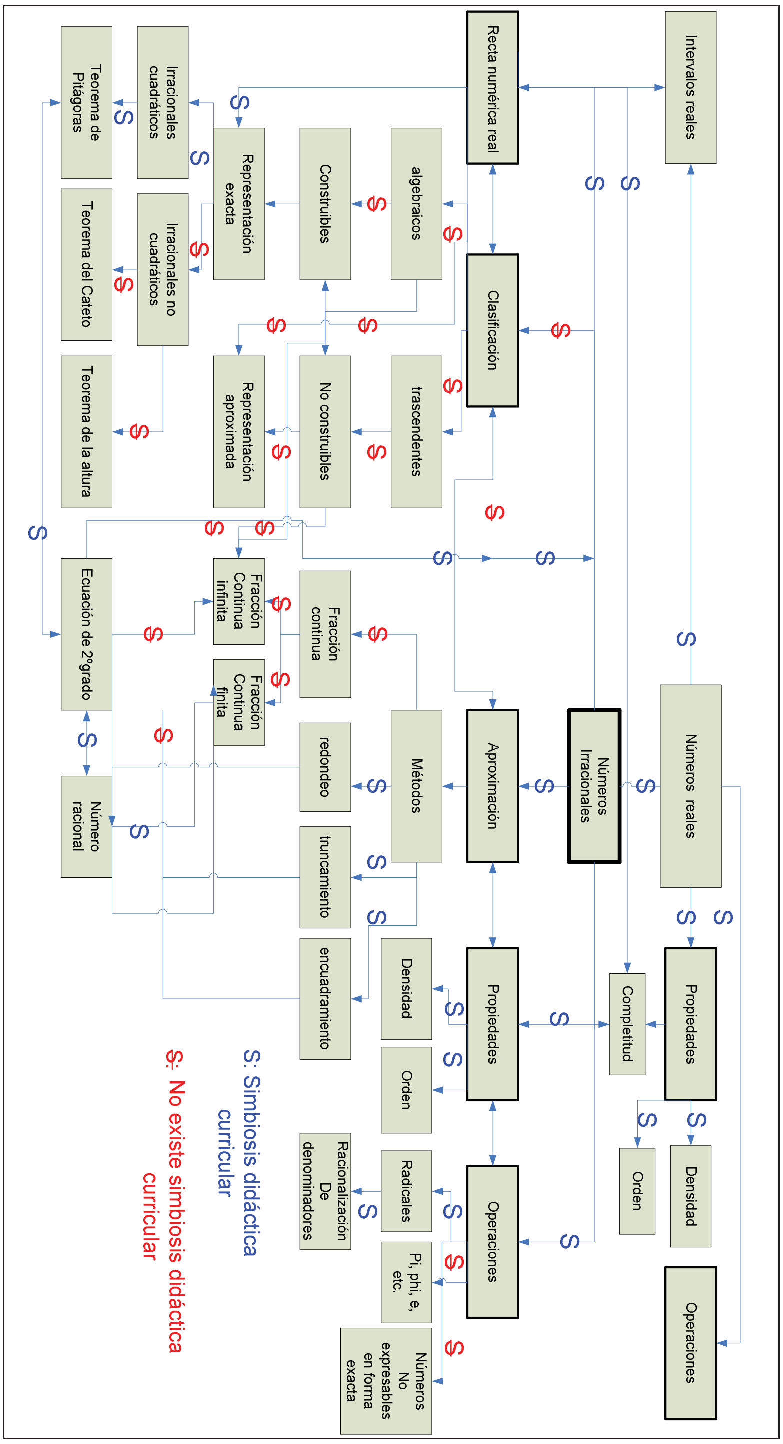


Fig.25. Recorrido didáctico-curricular con posibles interacciones entre objetos matemáticos a través de la noción de simbiosis didáctica curricular (diseño curricular de matemática correspondiente a 2º y 3º de secundaria de la Provincia de Mendoza, Argentina).

Se observa que ciertas nociones matemáticas, asociados a los números irracionales, quedan fuera del currículo oficial desarrollado por los especialistas.

Esto último trae aparejado ciertas consecuencias las cuales se analizan en el apartado 4.4.5.4.
Un tercer estudio resulta necesario para tener un panorama general del proceso de transposición didáctica de la noción de número irracional; se trata de estudiar algunos libros de texto de circulación en Argentina.

4.4.5.2. Análisis sobre los libros de texto de matemática correspondiente a 2º y 3º año

Un primer análisis estudia cómo se introduce al número irracional en los textos (por ecuaciones, por medida o por otras nociones) y si se diferencian entre números racionales e irracionales ya por sea por diagramas de Venn, por una colección de números, por una tabla de doble entrada, etc. (tabla 21).

Editoriales	**Introducción del número irracional**			**Diferenciación entre racionales e irracionales**			
	Por ecuaciones	**Por la medida**	**Otros**	**Por diagramas de Venn**	**Por una colección de números**	**Por tabla de doble entrada**	**ausencia**
Santillana 9 (2001)			x		x		
Puerto de Palos (2010)			x		x		
Tinta fresca (2006)		x					x
Cúspide(2004)			x				x
Santillana NAP 9º (2008)		x			x		
Stella (2010)		x			x		
SM (2009)	x				x		
Estrada (2005)		x		x			
Santillana III (2012)			x		x	x	

Tabla 21. Introducción al número irracional y diferenciación entre números racionales e irracionales en libros de texto en algunas editoriales de Argentina.

Se observa que la mayoría de las editoriales introduce al número irracional por cuestiones relativas a la medida o por un ejemplo numérico (número de oro, π, etc.) con breve aproximación histórica.
Asimismo se estudia cuáles números irracionales se utilizan para la representación en la recta numérica real y el método empleado para la misma (tabla 22).

Representación en la recta real						**Métodos de representación**		
editoriales	**raíces cuadradas**	**ϕ**	**π**	**e**	**Por aproximación**	**Por teorema de Pitágoras**	**Por aproximación**	**Por teorema del cateto o altura**
Santilla 9 (2001)	x					x		
Puerto de Palos (2010)	x					x		
Tinta fresca (2006)	x					x		
Cúspide (2004)	x					x		
Santillana NAP 9 (2008)	x					x	x	
Stella (2010)	x						x	
SM (2009)	x				x		x	
Estrada(2005)	x					x		
Santillana III (2012)	x	x			x	x		

Tabla 22. Tipos de números irracionales utilizados en la representación en la recta numérica real y métodos empleados en dicha representación en libros de texto de algunas editoriales de Argentina.

La mayoría de las editoriales se centra en la representación de raíces cuadradas en la recta numérica real y el método empleado en la mayoría de los casos es por medio del teorema de Pitágoras.

Otro aspecto que se indaga en los textos tiene que ver con los números irracionales utilizados y el método de aproximación empleado (tabla 23).

	Números irracionales utilizados en el texto							**Métodos de aproximación de irracionales**		
editoriales	Raíces cuadradas	Raíces cúbicas	Raíces de índice >3	ϕ	π	e	otros	Encuadramiento o redondeo	Truncamiento	otros
Santilla 9 (2001)	x			x		x		x	x	
Puerto de Palos (2010)	x	x			x			x	x	x
Tinta fresca (2006)	x				x			x	x	
Cúspide (2004)	x	x			x			x		
Santillana NAP 9 (2008)	x	x	x	x	x			x	x	
Stella (2010)	x				x			x		
SM (2009)	x	x	x	x	x			x	x	
Estrada (2005)	x			x	x			x	x	
Santillana III (2012)	x	x	x	x	x		x	x		

Tabla 23. Tipos de números irracionales utilizados en libros de texto de algunas editoriales de Argentina y métodos de aproximación de irracionales utilizados.

Nuevamente la mayoría de las editoriales emplean las raíces cuadradas, el número de oro y π como ejemplos más utilizados, siendo en menor medida las raíces cúbicas y de mayor índice.

Los métodos de aproximación más utilizados son por redondeo y truncamiento.

Las propiedades de densidad y orden en algunos casos están presentes explícitamente y en otros implícitamente.

La clasificación de los números irracionales en algebraicos y trascendentes, en los libros de texto analizados, está ausente en su totalidad (tabla 24).

Editoriales	**Propiedades de densidad y orden**			**Clasificación en algebraicos y trascendentes**	
	Presente		**Ausente**	**Presente**	**Ausente**
	explícitamente	**implícitamente**			
Santilla 9 (2001)	x				x
Puerto de Palos (2010)			x		x
Tinta fresca (2006)	x				x
Cúspide (2004)		x			x
Santillana NAP 9(2008)	x				x
Stella (2010)		x			x
SM (2009)		x			x
Estrada (2005)	x				x
Santillana III (2012)		x			x

Tabla 24. Presencia o ausencia de las propiedades de densidad y orden de los números irracionales y su clasificación en algebraicos y trascendentes.

En los diagramas siguientes se puede observar, sintéticamente, de acuerdo al estudio de los libros de texto (fig.26), el posible recorrido didáctico que se plantea en términos de la noción de simbiosis didáctica curricular.

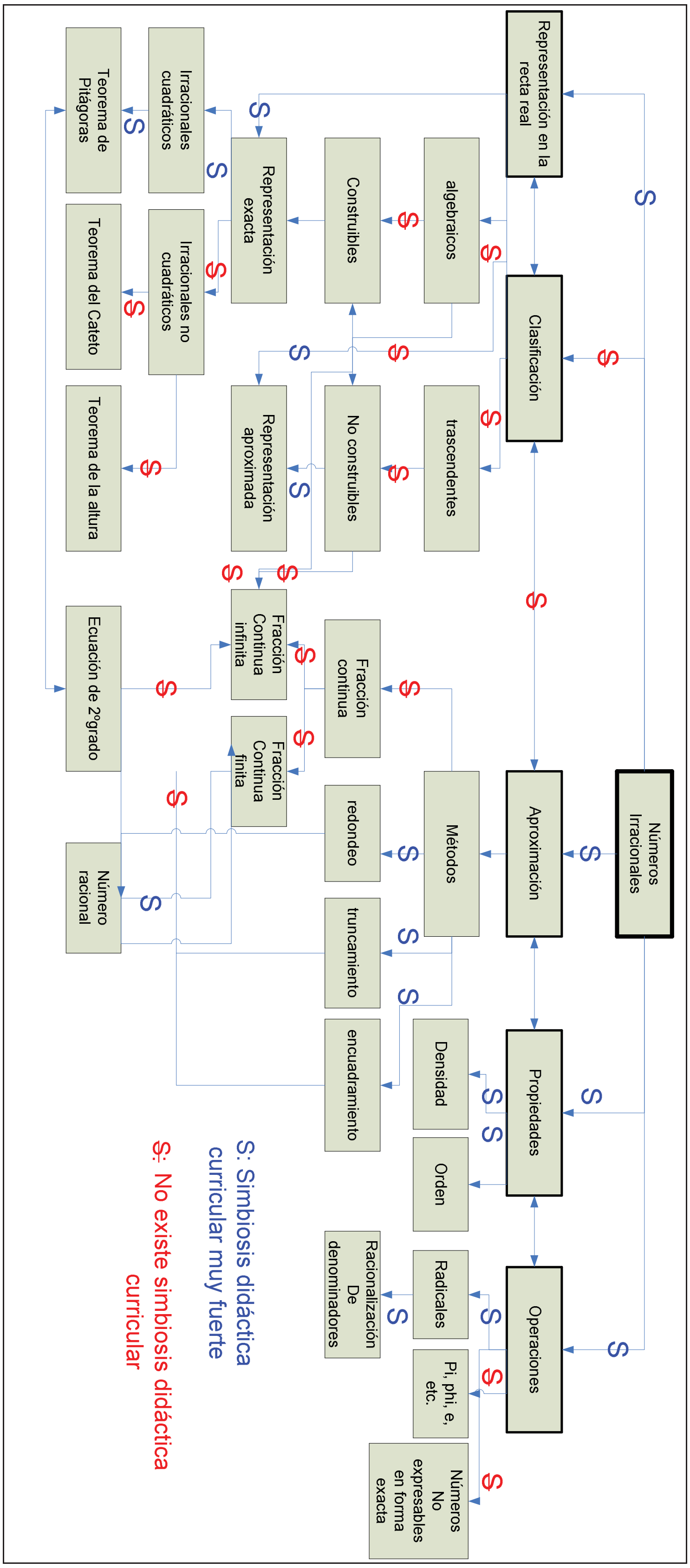


Fig. 26. Recorrido didáctico-curricular con interacciones entre objetos matemáticos a través de la noción de simbiosis didáctica curricular (libros de texto)

Si se observan los diagramas se puede encontrar una gran semejanza entre los recorridos planteados en el currículo de matemática, los libros de texto de nivel secundario y lo manifestado por los profesores en la encuesta. Esto último es previsible y esperable dado los currículos vigentes al momento del estudio.

De la experimentación y del análisis didáctico curricular se puede realizar una síntesis de lo tratado.

4.4.5.3. Síntesis relativas al currículo de matemática, los libros de texto de nivel secundario y a las respuestas a un cuestionario dadas por profesores en relación a la noción de número irracional

A modo de síntesis de lo expuesto se puede expresar que:

- La mayoría de los profesores señala que intenta introducir a los números irracionales, desde la geometría, a través de la noción de medida o, por medio del álgebra, en relación con la noción de ecuación y en concordancia con el currículo de matemática y los libros de texto. Más adelante en este trabajo los profesores del grupo control introdujeron al objeto matemático desde la noción de continuidad de la recta numérica (apartado 6.1.1.2) o desde el reconocimiento de las características distintivas, en las cifras decimales, de números racionales (apartado 7.7.1.1).
- Una importante cantidad de docentes señalan, en el cuestionario, la importancia de que los alumnos logren "diferenciar" un número racional de otro irracional en acuerdo con el currículo y los libros de texto. Esto último se observa en los apartados 6.1.1.2, del grupo de control 1, y en el 7.1.1.1 correspondiente al grupo de control 2 donde se manifiestan dificultades, por parte de los alumnos para dicha diferenciación. Asimismo se observaron dificultades e inconsistencias al momento del reconocimiento y diferenciación, por parte de los profesores, de números irracionales.
- En relación a la representación de números irracionales en la recta numérica real los docentes señalan a las raíces cuadradas como los números más empleados para ubicar en dicha recta y al teorema de

Pitágoras como método de representación a usar, también en concordancia con el currículo oficial y los libros de texto de mayor uso por ellos. A su vez, tanto en el grupo de control 1 (apartado 6.1.1.6) como en el 2 (apartado 7.1.3.5), se observan dificultades didácticas en los alumnos en relación a la representación de números irracionales en la recta numérica real. En la encuesta la mayoría de los docentes no pudieron responder cuando un número real se puede representar exactamente con regla y compás.

- Las propiedades de densidad y orden de los números irracionales si bien son parte del currículo de matemática y están presentes en los libros de texto del secundario, son “a veces” estudiadas en clase por los profesores. A modo de ejemplo se señala que uno de los profesores de los grupos de control intenta desarrollar la noción pero se observa la presencia de conflictos de tipo epistémicos e interaccionales (apartado 6.1.1.3).
- La clasificación de irracionales en algebraicos y trascendentes no es considerada por el currículo ni por los libros de textos. En concordancia con esto último, en el cuestionario, muy pocos docentes señalan que recurren a ella. Un docente del grupo de control realiza una peudo-clasificación de números irracionales en “notables” de aquellos que no lo son (apartado 6.1.1.3).

De la experimentación y del análisis didáctico curricular también es posible derivar algunas cuestiones para su enseñanza.

4.4.5.4. Algunas implicaciones para la enseñanza

Si bien el acceso a diferentes representaciones del número irracional están a cargo del profesor y según el grupo de alumnos, los cuales están construyendo la noción, suele ocurrir que el docente queda “atado” al currículo prescripto y a los tiempos didácticos disponibles, dejando de lado la exploración a nuevas representaciones. Esto último se puede observar, en algunas relaciones posibles, por medio de la noción de SDC en la interacción prevista por los docentes y por el currículo de matemática entre nociones asociadas a la de número irracional (figura 27).

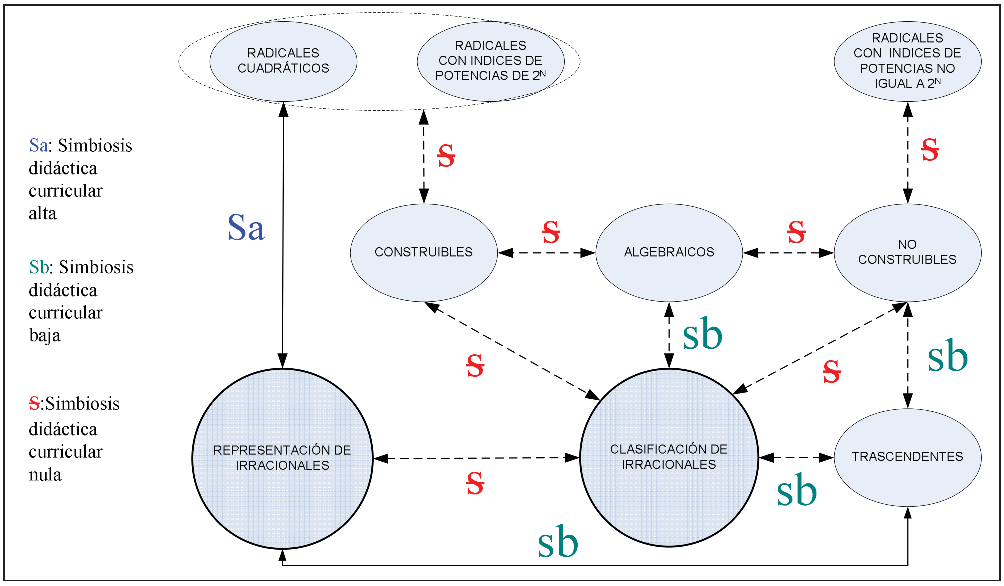


Fig.27. Recorrido didáctico en términos de la noción de simbiosis didáctica curricular entre una noción matemática y sus objetos asociados, a partir de la necesidad del profesor de realizar conexiones entre ellos.

Suele ocurrir también que la construcción de la noción queda en una forma muy parcializada y, en algunos casos, carente de sentido para el alumno.

La "supervivencia" de las nociones, en una simbiosis didáctica curricular, de acuerdo al estudio realizado, depende del profesor, del currículo prescripto, de las presiones que ejerce los tiempos didácticos escolares, de la influencia de los libros de textos y de las directivas educativas oficiales, entre otras.

Esta fuerte "alianza" entre docente – currículo- tiempos didácticos, hace que las trayectorias didácticas propuestas para los alumnos sean muy diferentes entre profesores de un mismo ciclo.

La trayectoria didáctica idónea (Godino et al., 2007) entonces se verá afectada por los cambios curriculares que desde la "noosfera" (Chevallard, 1991) sean propuestos.

Las consecuencias de una baja simbiosis didáctica curricular se pueden traducir en una pobre conceptualización, por parte del alumno, de la noción estudiada, esto último implica una trayectoria didáctica recortada y muy poco fundamentada.

Como se expresa en el apartado anterior si bien se realizan representaciones en la recta real de algunos irracionales por algunos métodos geométricos, tanto en libros de texto de secundaria como el currículo propuesto, estos quedan atados a la ubicación de raíces cuadradas.

No parecen ser importante el estudio y la representación en la recta real de otros números irracionales, ya sean algebraicos (por ej. raíces cúbicas, cuartas, etc.) o inclusive otros no algebraicos como los trascendentes. Los docentes parecen auto restringir su mirada sólo a lo propuesto en dichos libros y en el currículo, por lo que sólo tienen en cuenta algunos irracionales de tipo cuadrático.

> "Así los profesores tendrán que elegir las representaciones mejor adaptadas al proceso de construcción de los significados personales de los estudiantes. En particular, habrá que tener en cuenta que esta construcción puede exigir un alejamiento de una realidad concreta, que en el caso de los números irracionales será insoslayable". (Reina, Wilhelmi y Lasa, 2012,72).

El empleo de la herramienta informática a través de programas como GeoGebra puede contribuir a este estudio, ¿pero estas representaciones introducidas contribuyen o no a la construcción de la noción de número irracional?, ¿estarán los profesores dispuestos a llevar adelante tal innovación en sus clases?

Asimismo en apartados anteriores los profesores manifiestan que unos de sus principales desafíos son los "tiempos didácticos" disponibles para el estudio de los números, en particular de los irracionales.

> "Si pretendemos que el concepto de número real se asimile de forma significativa, hemos de contar con un proceso cognitivo necesariamente lento, ya que los alumnos han de integrar diferentes conjuntos numéricos –naturales, enteros, racionales e irracionales–, cada uno con sus especificidades en los dominios de la representación, las operaciones y las estructuras matemáticas y, además, alcanzar una comprensión en

> profundidad de los procesos infinitos y de paso al límite."(Romero y Rico, 1999, 259).

El tema de los tiempos didácticos es un aspecto recurrente a lo largo de este trabajo y que incide de forma constante en las decisiones didácticas que los docentes realizan (apartado 6.1.1.2) y que se estudian en el apartado 8.1.

Otro aspecto a considerar es la clasificación de irracionales en algebraicos y trascendentes y a su vez en construibles de aquellos que no lo son. Si bien no parece factible la introducción de estas nociones en Educación Secundaria, existen didactas de la matemática que sí plantean su introducción.

> "Sin embargo, la distinción formal entre números algebraicos y trascendentes deben ser presentados en las clases altas de la escuela secundaria (liceo), cuando los estudiantes tienen ya adquiridos una buena experiencia de los números reales, y antes de la introducción de los números complejos."(Voskoglou y Kosyvas, 2011, 138-139).

Esto último probablemente exija continuar investigando sobre las ventajas o desventajas didácticas de dicha introducción. Se señala que no se debe desconocer (como ocurre en la experimentación) a dicha noción, tanto por docentes en ejercicio como por aquellos estudiantes en formación para profesor.

En relación a la noción de número construible esta, tal vez, pueda contribuir a alcanzar una conceptualización más estable de la representación de dichos números en la recta real, en alumnos de tercero de Educación Secundaria (15-16 años). Se señala, nuevamente, la necesidad de que los profesores (y futuros docentes) hayan logrado, previamente, una conceptualización estable de dicha noción.

Posiblemente no sólo permita una construcción más fundamentada de la representación de un número irracional en la recta numérica real, sino también, permita la comunicación con otras nociones matemáticas como la de ecuación, función, aproximación numérica, raíz, parámetro, intersección de funciones, sistemas de ecuaciones, etc.

Puede resultar beneficioso un mayor “tiempo” de avance en el estudio de los números irracionales, por parte de los alumnos, en Educación Secundaria, ya que, si bien no se pretende una construcción “completa” de la noción en este nivel, su construcción parcial debe contribuir a un “pensamiento matemático flexible” (Wilhelmi, 2003) con otras nociones como la de límite en otros niveles educativos.

Según lo expuesto parece haber una fuerte simbiosis matemática entre las nociones de clasificación de números irracionales y su representación en la recta numérica real acompañados de un proceso de aproximación numérica que, en algunos casos, no se traduce en una fuerte simbiosis didáctica curricular, en detrimento de una evolución viable y eficaz de la noción implicada.

Se debe ser consciente del desafío que supone para el profesor de secundaria la introducción de nociones no contempladas expresamente en el currículo vigente pero parece ser un camino viable para que el estudio de los números irracionales continúe en forma aceptable en niveles superiores no universitarios y universitarios.

De hecho, las definiciones escolares usualmente utilizadas de número irracional parecen “competir” con las concepciones de los estudiantes (Zaskis y Sirotic, 2010); hecho que, evidentemente debe ser tenido en cuenta en su enseñanza.

> “Desde un punto de vista ontosemiótico, el problema no es si hay que introducir una sola representación de un objeto o más de una, ni qué traducciones o relaciones entre representaciones hay que tener en cuenta. El problema está realmente en determinar si las representaciones introducidas facilitan, o no, la realización de las prácticas que interesan que formen parte del significado global del alumno, en saber si aumentan o disminuyen la complejidad semiótica y también en saber si producen o no conflictos semióticos innecesarios” (Font, Godino y D’Amore, 2007, 15).

Así los profesores tendrán que elegir las representaciones mejor adaptadas al proceso de construcción de los significados personales de los estudiantes. En particular, habrá que tener en cuenta que esta construcción puede exigir un alejamiento de una realidad concreta (D'Amore, 2004), que en el caso de los números irracionales será insoslayable.

Algunas de las dificultades señaladas por los docentes involucran a la noción de "periodicidad numérica" las cuales se analizan en el apartado siguiente.

4.5 SOBRE LA PERIODICIDAD Y NO PERIODICIDAD DE LOS NÚMEROS REALES

Hardy y Wright (1975) prueban que si expresamos un número racional mediante una fracción irreducible cuyo denominador puede ser descompuesto en un producto de potencias de exclusivamente los factores primos 2 y 5, entonces resulta un "número racional exacto". Si el denominador se descompone en un producto de factores primos que contiene exclusivamente factores distintos de 2 o 5, con multiplicidad no nula, entonces resulta un "número racional periódico puro" y, si el denominador contiene otros factores primos además de 2 o 5, entonces resulta un número "racional periódico mixto".

La expansión decimal de un número racional es periódica cuando "una vez aparecido un cierto conjunto finito de cifras, dicho conjunto se repetirá infinitas veces" (Courant y Robbins, 1962, 75).

Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo (1969) diferencian entre expresiones decimales de un número real, "entonces, los números racionales resultan las expresiones decimales periódicas, y los números irracionales, las expresiones decimales aperiódicas" (p. 99).

4.5.1 LA NOCIÓN DE PATRÓN (*PATTERN*) EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Desde hace varias décadas los didactas de la matemática vienen tratando la importancia del reconocimiento de patrones por parte de alumnos y estudiantes de diferentes niveles educativos.

> "La idea básica en esta noción es que toda situación repetida con regularidad da lugar a un patrón" (Steen, 1988, 611; Stacey, 1989,147-149, citado por Castro, 1995,33).

> "Los patrones suelen formarse a partir de un núcleo generador; en algunos casos el núcleo se repite, en otros el núcleo crece de forma regular" (Steen, 1988, 216, citado por Castro, 1995,33).

Sin embargo para otros especialistas no es posible establecer una definición precisa de patrón.

> "Un patrón no es un reconocido y mucho menos bien definido, concepto de las matemáticas. [...] Un patrón no es un objeto matemático. Incluso los matemáticos que dicen que las matemáticas es la ciencia de patrones admitirían que están usando el término en un sentido extra-matemático, casi poético. No hay acuerdo entre los matemáticos de lo que los patrones son, ni acerca de sus propiedades y operaciones" (Carraher, Martinez y Schliemann, 2008,4).

El profesor solicita al alumno reconocer patrones, sin embargo ese reconocimiento no siempre ha sido objeto de estudio por parte del profesor junto a sus alumnos, si bien esta noción puede parecer "obvia" como señala Chevallard (1991), estas pueden acarrear dificultades.

4.5.2 Algunas cuestiones en torno a la periodicidad, pseudo-periodicidad y aperiodicidad en el desarrollo decimal de los números reales

Suele pensarse un número racional por la periodicidad en sus cifras decimales y ésta parece implicar una regularidad y la emergencia de un patrón a partir de una cierta cifra decimal (figura 28).

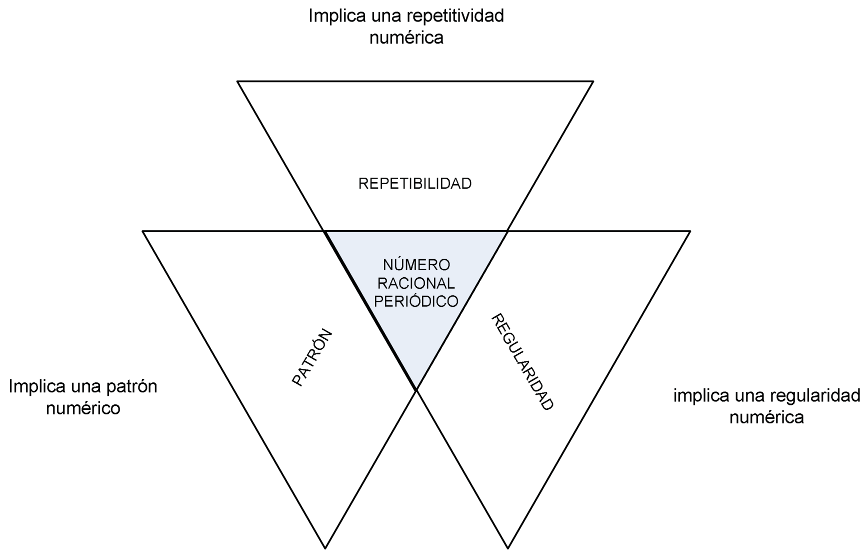


Fig. 28. Relaciones entre las nociones de patrón, regularidad y repetitividad en las cifras decimales de número racional periódico.

Sin embargo existen números como $\frac{1}{998}$ en el cual si bien el período comienza a manifestarse a partir del segundo decimal, este no es sencillo de determinar dado que dicho período cuenta con 498 cifras decimales (ver figura 29).

0,0010020040080160320641282565130260521042084168336673346693386773547094188376753507014028056112224448897795591182364729458917835671342685370741482965931863727454909819639278557114228456913827655310621242484969939879759519038076152304609218436873747494989979959919839679358717434869739478957915831663326653306613226452905811623246492985971943887775551102204408817635270541082164328657314629258517034068136272545090180360721442885771543086172344689378757515030060120240480961923847695390781563126252505010020040080160320641282565130260521042084168336673346693386773547094188376753507014028056112224448897795591182364729458917835671342685370741482965931863727454909819639278557114228456913827655310621242484969939879759519038076152304609218436873747494989979959919839679358717434869739478957915831663326653306613226452905811623246492985971943887775551102204408817635270541082164328657314629258517034068136272545090180360721442885771543086172344689378757515030060120240480961923847695390781563126252505010020...

Fig. 29. Desarrollo decimal de número racional periódico con una longitud considerable en el período.

Un número irracional, expresado en forma decimal, suele pensarse como aquel que presenta la no existencia de periodicidad, y algunas veces puede pensarse que debe implicar la no existencia de regularidades y de patrones en sus cifras decimales. Sin embargo existen números, como los denominados “números irracionales cebra" (Pickcover, 2007) en los cuáles sus primeras "mil" cifras decimales muestran la existencia de pseudo-regularidades y de pseudo-patrones en sus dígitos (figura 30).

2,727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272
72727269563636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636
36363636363634528727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727
27272727272727272725144232727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272
72727272727272727272727269640955636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363
63636363636363636363636363636358624184680727272727272727272727272727272727272727272727272727
27272727272727272727272727272727272718551535889919999999999999999999999999999999999999999999
99999999999999999999999999999999999999999984102513993625599999999999999999999999999999999999
99999999999999999999999999999999999999999999999970033238877984255999999999999999999999999999
99999999999999999999999999999999999999999999999999999942064261830769561599999999999999999999
999999999999999999999999999999999999999999999999999999999998857507243302775754752…[6]

Fig. 30. Desarrollo decimal de número irracional con presencia de bloques de cifras periódicas finitas.

La apariencia de periodicidad, bloques de cifras periódicas, enmascara una "pseudo-periodicidad" en sus cifras decimales, esto puede llevar a un cuestionamiento sobre la naturaleza del número si se desconoce su estructura de origen.

Se trata del número irracional cebra:

$$f(50) = \sqrt{\frac{9}{121}\cdot 100^{50} + \frac{(112-44\cdot 50)}{121}}$$ (Pickover, 2007, 348).

Si bien la "aperiodicidad" de un número irracional, cuya expansión sea decimal, implica la no repetición "infinita" de cifras, puede implicar la existencia de patrones y de regularidades. Uno de los ejemplos es el número irracional estudiado por el matemático D.G. Champernowne (1912-2000), construido en base 10, el cual demuestra que es "*normal*" (Champernowne, 1933, 254-255). En

[6] El número se ha dividido por $1 \cdot 10^{49}$ para que la coma decimal aparezca luego del primer dos y de esta manera le sea más "familiar" al estudiante una expresión con una parte entera con un dígito.

las cifras decimales de dicho número es posible observar un “patrón obvio” (Pickover, 2007, 354).

C_{10} = 0.12345678910111213141516...

Entonces aún un número irracional, desarrollado en expresión decimal, aperiódico, puede mostrar algunos patrones y regularidades (figura 31).

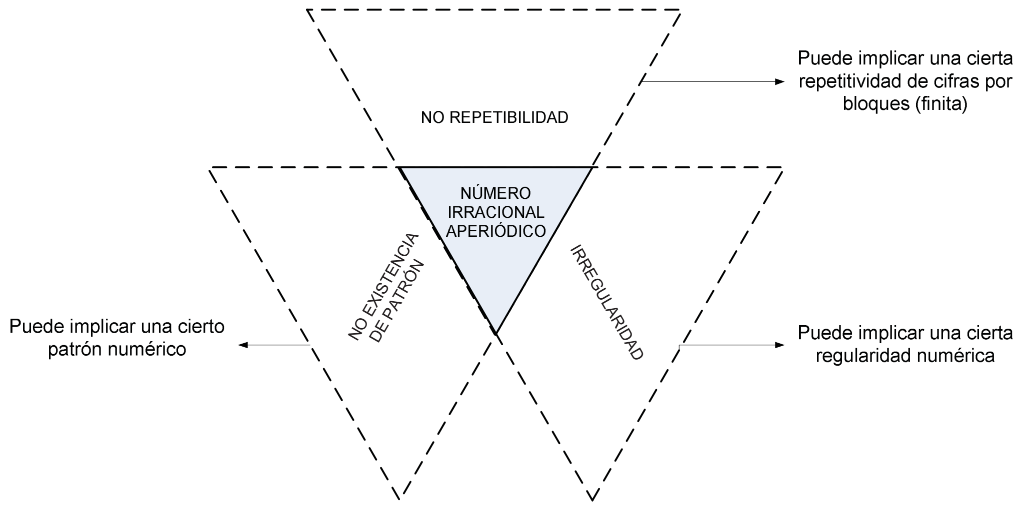


Fig. 31. Posible relaciones de implicancia entre nociones asociadas a la aperiodicidad de un número irracional desarrollado por decimales.

De la misma manera que un número irracional cebra muestra la no repetitividad infinita un número irracional cuyo desarrollo es decimal,otros números irracionales también manifiestan algún tipo de pseudo-repetitividad en sus cifras, por ejemplo, los denominados “números esquizofrénicos” (*schizophrenic numbers*), descubiertos por el matemático Kevin Brown (Pickover, 2001). Si tenemos la fórmula por recurrencia de un entero dado por

$$f(n) = 10 \cdot f(n-1) + n, n \in \mathbb{Z}^{+} \text{con valor inicial } f(0) = 0$$

“Las raíces cuadradas de los números $f(n)$ para los números enteros impares n dará un extraño patrón persistente” (Pickover, 2001,210).

$$\sqrt{f(n)} = \sqrt{10 \cdot f(n-1) + n}, n \in \mathbb{Z}^{+}$$

Para n= 49 se obtiene:

$\sqrt{f(49)}$ =1111111111111111111111111,1111111111111111111111108605555555555555555555555
5555555555555555555555527305416666666666666666666666666666666666666602962603472
22222222222222222222222222222222222222042656394092881944444444444444444444444444444
43877555125040117187499999999999999999999999999999808249687711486305338541666666666
66666666666666598718573862144063865559895833333333333333333333308434604076276082069
402770996093749999999999999999064222758755598306663943032158745659722222222218634920
16791180833081844... (Pickover, 2001,210).

Este tipo de números irracionales, en su desarrollo decimal, presentan pseudo-patrones y repetitividad de cifras en bloques finitos.

Pero también algunos números racionales, como el siguiente, 1/8999999999999999999999991, presenta repetitividad de dígitos en bloques finitos dentro del período. La expresión decimal del número muestra la regularidad, ésta indica que se pueden aumentar la cantidad de dígitos en cada bloque agregando nueves en el denominador del número (fig.32).

0,0000000000000000000000001111111111111111111111111222222222222222222222222233333
3333333333333333333334444444444444444444444444455555555555555555555555556666666666666
6666666666666677777777777777777777777778888888888888888888888888899000000000000000000
0000001111111111111111111111111222222222222222222222222233333333333333333333333334
4444444444444444444444445555555555555555555555555666666666666666666666666677777777
7777777777777777788888888888888888888888888900000000000000000000000001111111111111
1111111111222222222222222222222222233333333333333333333333333444444444444444444444
4445555555555555555555555555666666666666666666666666677777777777777777777777778888
8888888888888888888889000000000000000000000000001111111111111111111111111222222222222
2222222222222223333333333333333333333333344444444444444444444444445555555555555555
5555555666666666666666666666666667777777777777777777777777888888888888888888888889
0000000000000000000000000111111111111111111111111122222222222222222222222223333333
3333333333333333334444444444444444444444444...

Fig. 32. Los primeros mil decimales del número racional 1/8999999999999999999999991 presenta regularidad y periodicidad en bloques finitos de dígitos dentro del período (en color rojo).

Esto último muestra lo complejo que puede ser el reconocimiento de un número racional o irracional solamente por la búsqueda de regularidades, patrones y repetitividad en sus cifras decimales.

De hecho, no es posible un tal reconocimiento si no conocemos su estructura de origen, que puede quedar determinado por el contexto de uso o por los objetos matemáticos involucrados. Así, la comprensión de los números esquizofrénicos necesita analizar la regla de recurrencia y la composición de funciones; en especial, el papel que cumple la función raíz cuadrada.

Para continuar con el estudio, en la siguiente sección, se analizan las diferentes configuraciones epistémicas (Godino, 2002) asociadas a la noción de número irracional que actúan de referencia para los análisis posteriores.

4.6 CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DE REFERENCIA

Reina, Wilhelmi y Lasa (2012) describen los distintos sentidos del número irracional según las entidades primarias (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos), que nos permiten una comparación objetiva de las configuraciones asociadas. A continuación se realiza una descripción detallada de las configuraciones epistémicas detectadas.

4.6.1 CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA IMPLÍCITA DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Esta configuración, que puede ser relacionada con la comparación entre magnitudes en un contexto preponderantemente geométrico y cuya noción fundamental es la inconmensurabilidad entre segmentos por medida común, puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje

- *Verbal*: Predominantemente geométrico, ya que incluso el lenguaje aritmético es en cierto sentido “geométrico”, es decir, los parámetros representan magnitudes geométricas.
- *Gráfico*: Dibujos de segmentos y figuras geométricas, que nos han llegado a través de la obra *Elementos*, donde se muestran los procedimientos para considerar conmensurables o no segmentos entre sí y áreas de polígonos entre sí.

– *Simbólico*: Sistema notacional griego antiguo para los números enteros positivos.

Situaciones: Problema de división de un segmento en media y extrema razón.

Conceptos: Número entero positivo. Magnitud. Segmentos conmensurables por medida común. Sección áurea. Razón. Proporción. Segmentos inconmensurables por medida común. Noción de infinito potencial.

Procedimientos: Métodos geométricos, tales como: diagonal de un cuadrado en relación con su lado, diagonales de un pentágono regular en relación con sus lados, medición por medio de comparación de magnitudes geométricas, división de un segmento en extrema y media razón, *antifairesis*[7], método axiomático (material, informal) en contraposición con la axiomática formal de Hilbert (1993).

Propiedades: Proposiciones y definiciones presentes en los "Elementos".

Argumentos: Deductivos. Demostración por reducción al absurdo (Dantzing, 1954).

4.6.2 CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA EXPLÍCITA PARA LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Esta configuración, que puede ser relacionada con el problema de preservación de la "homogeneidad de las magnitudes" y cuya noción fundamental es la de proceso de comparación entre magnitudes inconmensurables, puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje

[7]*Antifairesis*: "*a* y *b* están en la misma razón que *c* y *d* cuando la antifairesis o sustracción recíproca entre *a* y *b* es la misma que entre *c* y *d*". Esta noción es utilizada por Euclides para definir la inconmensurabilidad:"Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la que queda nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables" (*proposición 2 del libro X de los Elementos*).

- *Verbal*: Predominantemente geométrico, aunque también se presenta un lenguaje aritmético-geometrizado.
- *Gráfico*: Dibujos de segmentos y figuras geométricas que nos han llegado a través de los *Elementos*, que muestran los procedimientos para considerar el tratamiento de magnitudes inconmensurables.
- *Simbólico*: Sistema notacional griego antiguo, para los números enteros positivos y fracciones.

Situaciones: Existencia del infinito potencial, imposibilidad del infinito actual. Problema de razones y proporciones entre magnitudes inconmensurables.

Conceptos: Número entero positivo. Magnitudes homogéneas. Número par e impar. Números primos entre sí. Razón. Proporción. Segmentos conmensurables por medida común. Segmentos inconmensurables por medida común. Razón entre magnitudes inconmensurables. Proporción. Continuidad de la recta (implícita).

Procedimientos: Medición por medio de comparación de magnitudes geométricas.

Propiedades: Definiciones y Proposiciones plasmadas en los *Elementos*.

Argumentos: Deductivos. Método de exhaución. Demostración por doble reducción al absurdo (Rey Pastor y Babini, 2000a).

4.6.3 CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA DE LA APROXIMACIÓN RACIONAL DE NÚMEROS IRRACIONALES

Esta configuración, que puede ser relacionada con el proceso de aproximación mediante racionales de números irracionales, empleando originariamente métodos geométricos y más adelante analíticos, puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje

- *Verbal*: Geométrico. Algebraico.
- *Gráfico*: Dibujos de figuras geométricas.

- *Simbólico*: Notación de fracciones en el sistema sexagesimal. Diferentes notaciones para la fracción continua a través de los tiempos.

Situaciones: Problema de aproximación racional de números irracionales por distintos métodos. Problema de aproximación de irracionales por fracciones continuas.

Conceptos: Fracciones sexagesimales. Procedimientos para la extracción de raíces cuadradas. Máximo común divisor entre números. Métodos de aproximación: fracción continua ascendente. Fracción continua. Familia de los números metálicos. Familia de los números mórficos (Redondo, 2008).

Procedimientos: Estudio de irracionales por aproximación. Algoritmo de Euclides.

Propiedades: Propiedades de las fracciones continuas. Propiedades de la familia de los números metálicos. Propiedades de la familia de los números mórficos (Redondo, 2008).

Argumentos: Deductivos.

4.6.4 CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Esta configuración, que puede ser relacionada con la crisis de los fundamentos del cálculo, cuestiona lo que hasta ese momento se consideraba como transparente; a saber, la definición de número irracional como resultado de la medición de una magnitud mediante otra homogénea. Puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje

- *Verbal*: Conjuntista. Algebraico.
- *Gráfico*: Construcciones gráficas realizadas por Cantor para emparejar biunívocamente a los números enteros con los racionales.
- *Simbólico*: Notación para las cortaduras de Dedekind. Diferentes notaciones para algunos conjuntos numéricos propuestos por Dedekind.

Situaciones. Problema de fundamentación aritmética de números irracionales por distintos métodos. Problema de fundamentación de la completitud de la recta geométrica. Problema de diferenciación entre conjuntos infinitos. Problema planteado por el infinito actual.

Conceptos. Relación de equivalencia. Números racionales. Números irracionales (fundamentación geométrica). Límite de sucesiones. Infinito potencial. Principio de continuidad de la recta. Cortaduras. Números irracionales (fundamentación aritmética). No numerabilidad del continuo. Infinito actual. Conjuntos infinitos completos. Principio de correspondencia entre conjuntos infinitos. Cardinal de un conjunto infinito. Densidad del conjunto de los irracionales. Números transfinitos.

Procedimientos. Cortaduras de Dedekind. Límite de sucesiones fundamentales. Encaje de intervalos cerrados racionales. Búsqueda de funciones biyectivas entre conjuntos infinitos para establecer la coordinabilidad entre ellos.

Propiedades. Propiedades de orden. Axioma del Supremo. Propiedades de la continuidad. Conjunto perfecto (Velazco, 2005). Conjunto conexo.

Argumentos. Deductivos formales.

4.6.5 CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA DE LA EXISTENCIA Y CLASIFICACIÓN DE NÚMEROS IRRACIONALES

Esta configuración asociada a un estado evolucionado de la noción de número irracional, donde la distinción entre números algebraicos y trascendentes es ya posible, puede ser descrita según los siguientes elementos de significado:

Lenguaje

- *Verbal:* Conjuntista. Algebraico.
- *Gráfico*: Construcciones geométricas de los números construibles.
- *Simbólico*: Conjuntista. Algebraico.

*Situaciones***.** Problema de diferenciación entre números irracionales. Problema de construcción de números irracionales. Problema de representación en la recta numérica de números irracionales.

*Conceptos***.** Relación de equivalencia. Números racionales. Números irracionales (fundamentación geométrica). Límite de sucesiones. Infinito potencial. Números algebraicos y trascendentes. No numerabilidad de los números trascendentes. Números construibles. Cuerpos.

*Procedimientos***.** Clasificación de irracionales y de irracionales cuadráticos (familia de los números metálicos) por fracción continua. Construcción geométrica de números irracionales (números construibles). Representación de irracionales en la recta numérica. Enumeración del conjunto de los números algebraicos. Método axiomático formal (segunda formulación).

*Propiedades***.** Propiedades de los números construibles.

Argumentos. Deductivos formales.

La determinación de las configuraciones epistémicas relacionadas con una noción matemática permite un análisis fino de la presencia y alcance de dicha noción en las clases observadas, tanto de control como de experimentación.

4.7 ANÁLISIS DE ALGUNOS LIBROS DE TEXTO DE SECUNDARIA

La muestra que se analiza es intencional, no habiendo un muestreo aleatorio. El criterio de selección es único: editoriales de mayor difusión en Argentina para 2° año (14 años) o 3º año (15 años), según la jurisdicción de la Educación Secundaria Básica[8]. Este criterio asegura una alta representatividad con relación al significado institucional de referencia, máxime cuando: por un lado, el Ministerio de Educación propuso unos "núcleos de aprendizaje prioritarios"(MECT, 2006) para el conjunto de las distintas jurisdicciones, hecho que ha homogeneizado las directrices generales de los libros de texto; por otro lado, el número de textos utilizados en toda la República con un número de

[8]El número irracional se ha encontrado inmerso en un proceso de *desincretización* (Chevallard, 1991) por lo que en el currículo de matemáticas de secundaria esta noción se hace presente en 2° (14 años) y en 3° (15 años) de Educación Secundaria (provincia de Mendoza)

colegios no marginal es aproximadamente de quince, considerándose tres textos los de más amplia difusión. Serán éstos más otros dos más lo que se utilizarán en el presente estudio.

Los libros seleccionados son:

- Alvarez C., Alvarez F., Garrido L., Martinez S., Ruiz A. (2004). *Matemáticas 9*. Buenos Aires: Cúspide (Vicens Vives).
- Chorny F., Salpeter C., Krimker G.(2009). *Matemática 2/3*.Buenos Aires: SM.
- Cortés G. (2010). *Matemática II*. Buenos Aires: Asociación Educacionista Argentina y Editorial Stella.
- Piñeiro G., Rigetti G., Serrano G., Pérez M.(2008). *Matemática III*. Buenos Aires: Santillana.
- Stinsin L., Ziger, D. (2010). *Matemática 9 Activa*. San Isidro: Puerto de Palos.

Para hacer más ágil la escritura, se codifican las configuraciones epistémicas de la siguiente manera:

- *CE-implícita:* Configuración epistémica implícita de los números irracionales
- *CE-explícita:* Configuración epistémica explícita para los números irracionales
- *CE-aprox:* Configuración epistémica de la aproximación racional de números irracionales
- *CE-aritmética:* Configuración epistémica aritmética de los números irracionales
- *CE-existencia:* Configuración epistémica de la existencia y clasificación de números irracionales

En las siguientes secciones se muestra un análisis exhaustivo, realizado por Reina, Wilhelmi y Lasa (2012), de cada uno de los libros de texto.

4.7.1 CÚSPIDE (ALVAREZ *ET AL.*, 2004)

- *Situaciones*. Se incluyen situaciones de aproximación propias de la *CE-aprox.* Asimismo se introduce un método geométrico para la representación de números irracionales en la recta numérica real (p.35) propio de la *CE-existencia*, pero este método no se aplica o se pone a prueba en la resolución de problemas.
- *Lenguaje*. Todos los tipos de lenguaje de las configuraciones son utilizados de alguna manera: geométrico, aritmético, simbólico, algebraico y conjuntista. A pesar de esta exhaustividad, el conjunto de los números irracionales no es denotado ni se establece de manera explícita la partición de $\mathbb{R}$ en números racionales e irracionales ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$).
- *Conceptos-regla*. La determinación de valores aproximados por tanteo (ensayo-error), así como cálculos aproximados, redondeo y encuadramiento implican la definición según la *CE-aprox.* La definición según la CE-*aritmética* no se aborda, pero la necesidad de "otros números distintos de los racionales", relacionada con la densidad y el continuo de la recta real son sugeridos según el tipo de expresión decimal de un número (figura 33).

5. ¿Existen otros números aparte de los racionales?

Existen números con infinitas cifras decimales no periódicos. Uno de ellos es el conocido número π:

$$\pi = 3,141592653\ldots$$

Estos números no pueden ponerse en forma de fracción, y se llaman *irracionales*. En el siguiente punto veremos que al extraer una raíz aparece casi siempre un irracional.

Fig.33. Definición de número irracional (Cúspide, p. 30).

La *CE-existencia* se concreta en la observación de que raíces cuadradas y cúbicas de la mayoría de números son números irracionales, como sugiere el texto de la figura 22 (*al extraer una raíz aparece casi siempre un irracional*).Además, se muestra cómo con la calculadora se puede obtener una aproximación decimal, sin matizarse que el valor así obtenido es una aproximación del número irracional (figura 34).

Fig. 34. Ejemplo de uso de la calculadora y la raíz cúbica (Cúspide, p. 32).

– *Propiedades*. No se consideran propiedades de todas las configuraciones epistémicas, salvo un análisis de la propiedad de densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.
– *Procedimientos*. En su mayoría se refieren a la *CE-aprox*, como una forma de garantizar la manipulación y el cálculo. Además se muestra un procedimiento de representación y construcción de raíces de números cuadrados y no cuadrados (según el procedimiento geométrico atribuido a Teodoro de Cirene) (figura 35).

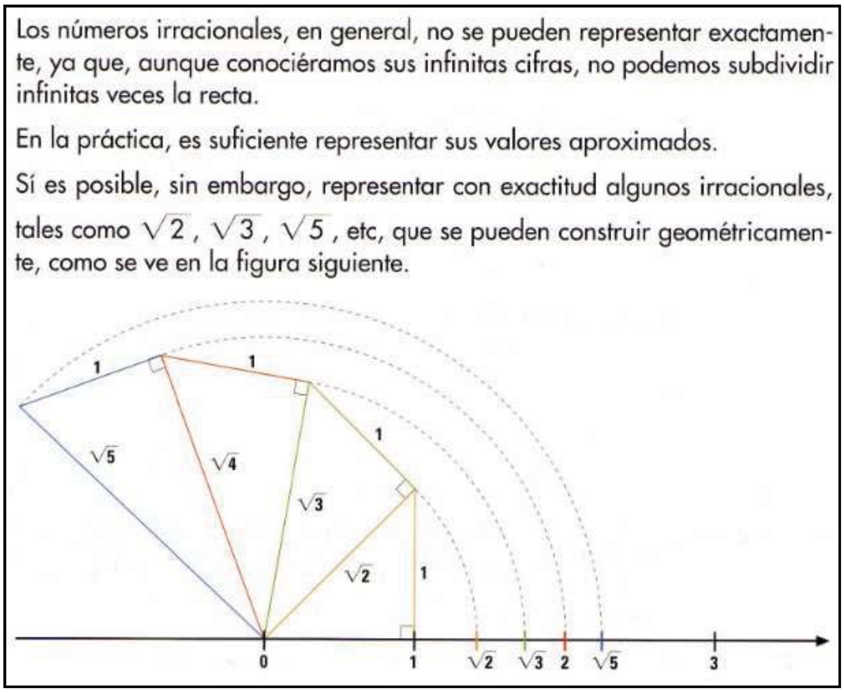


Fig. 35. Procedimiento de representación de raíces en la recta real (Cúspide, p. 35).

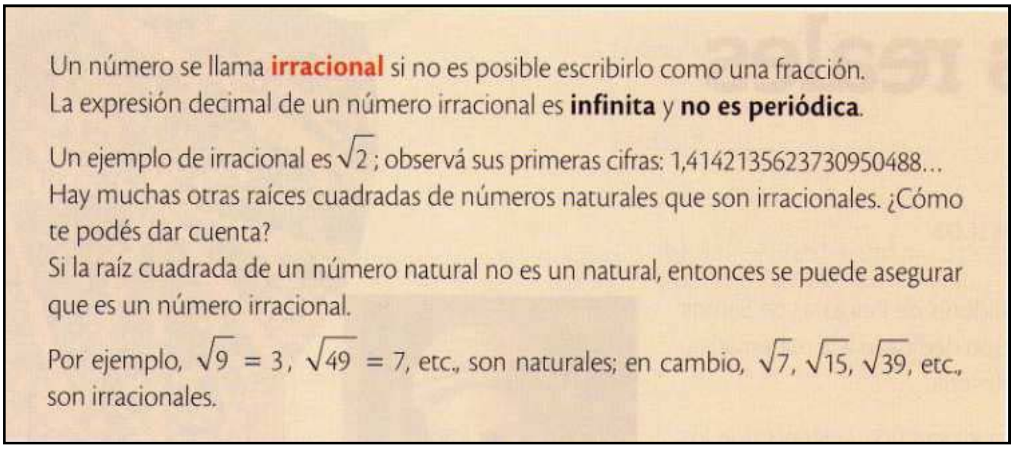
– *Argumentos*. La argumentación o justificación (no formal) se solicita únicamente en tres cuestiones (3b, p. 39; 1 y 3, p.163). El resto de ejercicios y problemas suponen una mera aplicación o uso de números irracionales sin el análisis de su naturaleza o su necesidad.

4.7.2 SANTILLANA (PIÑEIRO *ET AL.*, 2008)

– *Situaciones*. Se presentan situaciones de todas las CE, excepto de la *CE-existencia*. En particular, se solicita la construcción geométrica de irracionales y su representación en la recta real.
– *Lenguaje*. Se utilizan lenguajes de todas las CE.
– *Conceptos-regla*. Se identifica a la *CE-aprox* en el método de redondeo y truncamiento. La CE-*aritmética* se hace presente en las caracterizaciones de número irracional (figura 25), pero éstas no son confrontadas ni analizadas.

  Se intenta dar significado a la introducción de las definiciones a través de la *medida irracional* de la raíz cuadrada de dos, para inmediatamente introducir las definiciones y los ejemplos (figura 36).

– *Propiedades*. La CE-*aritmética* es movilizada para el análisis de la densidad de $\mathbb{Q}$ y $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$ en $\mathbb{R}$, así como para la observación de que los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son discretos (p.49).Asimismo, la *CE-existencia* es considerada por cuanto se menciona la continuidad de la recta numérica (p. 49) y se analiza con cierta formalidad la sucesión de Fibonacci y sus propiedades (p. 47) y el número áureo con ayuda de la calculadora (p. 52).



Un número se llama **irracional** si no es posible escribirlo como una fracción.
La expresión decimal de un número irracional es **infinita** y **no es periódica**.

Un ejemplo de irracional es $\sqrt{2}$; observá sus primeras cifras: 1,4142135623730950488…
Hay muchas otras raíces cuadradas de números naturales que son irracionales. ¿Cómo te podés dar cuenta?
Si la raíz cuadrada de un número natural no es un natural, entonces se puede asegurar que es un número irracional.

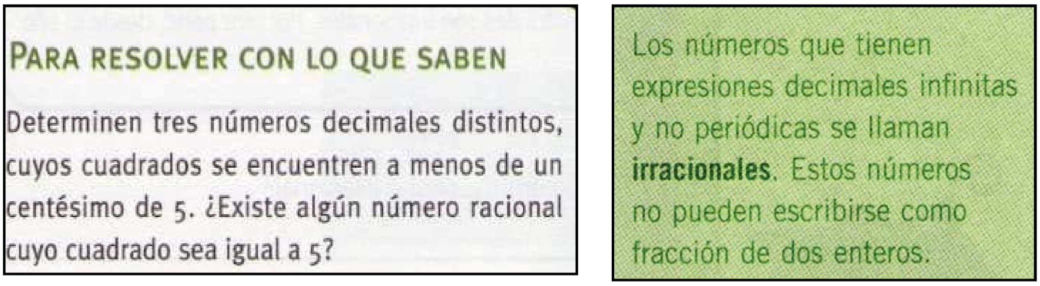
Por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{49} = 7$, etc., son naturales; en cambio, $\sqrt{7}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{39}$, etc., son irracionales.

Fig.36. Definición de número irracional y ejemplos (Santillana, p. 46).

- *Procedimientos*. Se explicitan los métodos propios de las CE-*explícita* y *CE-aprox*. Asimismo, la *CE-existencia* aporta métodos específicos para la representación y construcción de algunas raíces de números no cuadrados.
- *Argumentos*. Los procesos de argumentación y validación están prácticamente ausentes, puesto que sólo se solicita la argumentación de la actividad en dos ejercicios (11, p.48; 12e, p.49), en ambos formalmente según la CE- *aritmética*.

4.7.3 EDITORIAL SM (CHORNY *ET AL*., 2009)

- Situaciones. Se presentan situaciones de todas las *CE*. La *CE-existencia* tiene una presencia reducida; en particular, es notable la ausencia de situaciones de construcción y representación geométrica de irracionales.
- *Lenguaje*. Se utilizan lenguajes de todas las *CE*. Los números irracionales se introducen como una necesidad algebraica en la resolución de ecuaciones (¿Existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 5$), pero mediante una formulación próxima al lenguaje natural (figura 37).
- Conceptos-regla. La *CE-aprox* se concreta en los métodos de redondeo y encuadramiento. La *CE-aritmética* carece de las nociones de continuidad de la recta numérica, densidad y completitud. Se introducen la caracterización según la expresión decimal.



PARA RESOLVER CON LO QUE SABEN

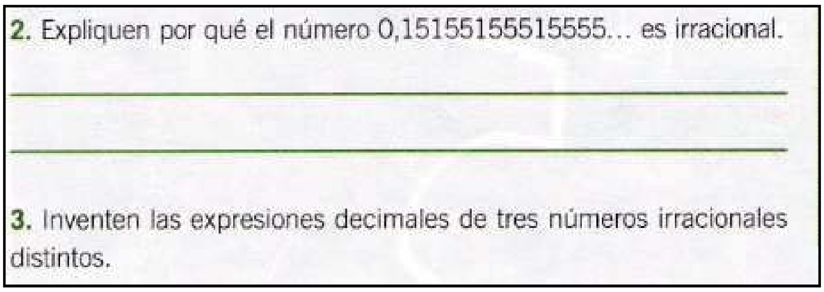
Determinen tres números decimales distintos, cuyos cuadrados se encuentren a menos de un centésimo de 5. ¿Existe algún número racional cuyo cuadrado sea igual a 5?

Los números que tienen expresiones decimales infinitas y no periódicas se llaman **irracionales**. Estos números no pueden escribirse como fracción de dos enteros.

Fig.37. Introducción y definición de número irracional (SM, pp. 21–22).

Se establece la correspondencia entre números reales y puntos de la recta, aclarando que “los irracionales no es siempre posible ubicarlos de manera exacta” (p. 25). Por otro lado, la *CE-existencia* se moviliza en la definición de raíz enésima de un número real y en la observación de que “en general las raíces cuadradas, cúbicas, etcétera, no enteras, de números naturales son irracionales” (p. 22).

- *Propiedades*. Se considera en forma implícita a la CE-*aritmética* cuando se trata el orden en $\mathbb{R}$ en algunos ejercicios (37 y 40, p.29), y la densidad del conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (situaciones 35 y 39, p. 29). No se introducen propiedades relativas a la CE-*existencia*.
- *Procedimientos*. Se introducen los métodos clásicos de la *CE-aprox*, encuadramiento y redondeo. Se comparan irracionales entre si, se establece la diferencia entre números racionales e irracionales y se representan en la recta real. Asimismo, se presenta al alumno cuestiones que posibiliten la emergencia de los procedimientos propios de la *CE-existencia* (figura 38).



2. Expliquen por qué el número 0,15155155515555... es irracional.

3. Inventen las expresiones decimales de tres números irracionales distintos.

Fig.38. Cuestión sobre la justificación de la irracionalidad de un número (SM, p. 22).

- Argumentos. Sólo se solicita la justificación intuitiva de una aproximación en un ejercicio (12, p.24), de tal manera que el uso general es no formal, no solicitándose análisis de necesidad o utilidad de los números irracionales.

4.7.4 EDITORIAL PUERTO DE PALOS(STINSIN Y ZIGER, 2010)

- *Situaciones*. Si bien se presentan situaciones de todas las *CE*, la *CE-existencia* se presenta de manera marginal únicamente en alguna situación que implica *reglas de formación* de conjuntos de números irracionales.
- *Lenguaje*. Se presentan todos los tipos de lenguaje de las distintas *CE*: geométrico, aritmético, simbólico, algebraico y conjuntista. Si bien se define el conjunto $\mathbb{R}$ como unión de los conjuntos de los números racionales e irracionales, al igual que en la editorial Cúspide, el conjunto de los números irracionales no es denotado ni se establece de manera explícita la partición de $\mathbb{R}$ en números racionales e irracionales ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$) .
- *Conceptos-regla*. La introducción de las definiciones no se basa en un principio de necesidad. No se define al conjunto de los números irracionales, pero si es simbolizado. La definición según la *CE-aprox* se identifica con los métodos de redondeo y truncamiento. Las caracterizaciones del número irracional se dan deuna manera “fusionada” (figura 39). La *CE-existencia* es utilizada en la definición de la raíz enésima de un número, pero no se extiende a raíces cúbicas u otras que también pueden ser números irracionales.

Teóricamente

Hasta ahora se trabajó con números racionales, que son aquellos que pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros. Existen expresiones decimales con infinitas cifras decimales no periódicas, que no pueden ser expresadas como el cociente entre dos enteros. A este tipo de números se los conoce como números **irracionales**.

Algunos ejemplos de números irracionales son:

$\pi = 3{,}141592654...$ $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ $\sqrt[3]{4} = 1{,}587401052..$

o bien todo número de infinitas cifras decimales con alguna regla de formación, por ejemplo:

1,1223334444... −2,0102030405..... −0,1133557799...

Fig.39. Definición de número irracional y ejemplos (Puerto de Palos, p. 25).

- *Propiedades*. La introducción de la CE-*aritmética* evita las propiedades de continuidad de la recta numérica y la de completitud del conjunto de los reales (por ampliación del campo numérico mediante $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$). Las propiedades de las CE-aprox y la CE-*existencia* son asimismo omitidas.
- *Procedimientos*. La *CE-aprox* se extraen los métodos de redondeo y truncamiento y la *CE-existenci*a la representación de números irracionales en la recta real (figura 29), pero este último método no es analizado según su campo de validez. Así, por ejemplo, no se explicita que existen números irracionales como π o $\sqrt[3]{4}$,usados como ejemplos (figura 40), para los cuales no es posible su construcción en la recta real mediante regla y compás.

Representación gráfica

Para representar números irracionales en la recta numérica se debe recurrir a los triángulos rectángulos.

a. Representación de $\sqrt{2}$.
En un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 1, el valor de la hipotenusa es $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

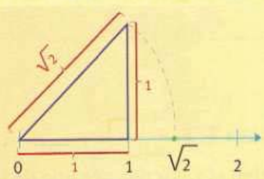


Fig.40. Procedimiento de representación de irracionales (Puerto de Palos, p. 25).

4.7.5 EDITORIAL STELLA (CORTÉS, 2010)

– *Situaciones*. Se presentan situaciones de todas las *CE*, excepto de la *CE-existencia* ya que si bien se muestra un procedimiento numérico de aproximación de irracionales en la recta numérica, no se introduce la construcción de irracionales por alguna regla de formación ni hay situaciones que precisen la construcción geométrica de irracionales.

– *Lenguaje*. Se presentan todos los tipos de lenguajes hallados en las configuraciones (geométrico, aritmético, simbólico, algebraico y conjuntista). Se introduce la notación conjuntista a través de la "ampliación del vocabulario específico" para explicitar que números racionales e irracionales forman una partición de los números reales (figura 41).

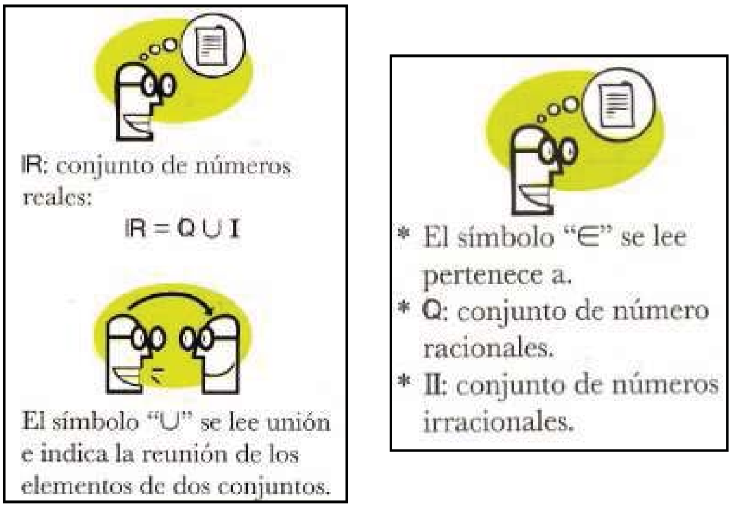


Fig.41. Notación conjuntista y partición de los números reales (Stella, pp. 44–45).

– *Conceptos-regla*. La distinción entre los números racionales e irracionales se sigue del siguiente convenio meramente notacional que permitirá la diferenciación en el texto de racionales e irracionales (figura 42).

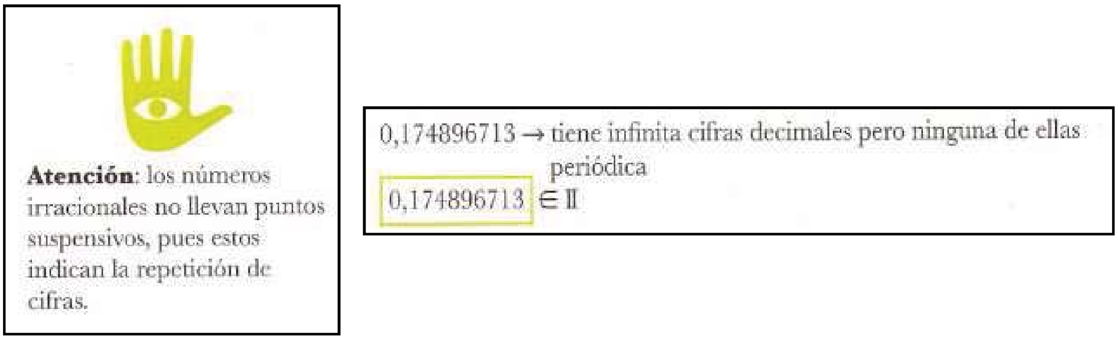


Fig.42. Convenio sobre puntos suspensivos en irracionales y ejemplo (Stella, p. 44).

La *CE-aprox* se presenta por medio del método de encuadramiento. La CE-*aritmética* se explicita estableciendo las características de continuidad y completitud de la recta numérica al incorporar los irracionales. Se introduce la caracterización de número irracional como aquel que no admite una *expresión decimal periódica* (figura 43), pero no se dice que para estos números no existe una fracción que los represente.

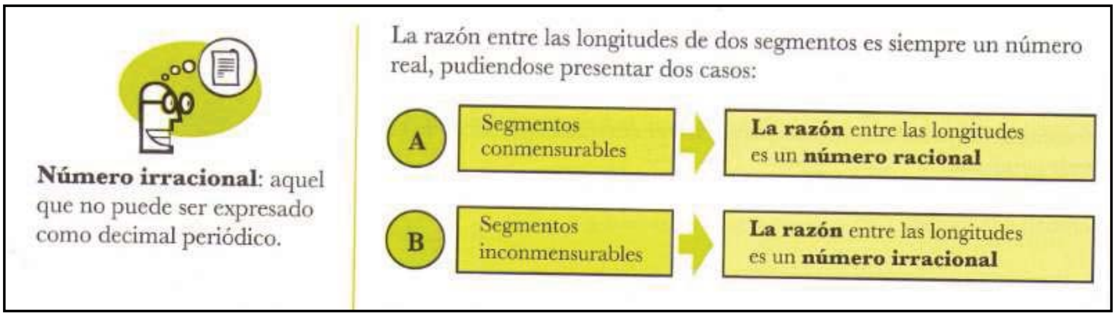


Fig.43. Introducción y definición de número irracional (Stella, p. 44).

La *CE-existencia* es utilizada cuando se justifica que los radicales son irracionales, y cuando se afirma de la existencia de otros irracionales que no son de la forma $\sqrt{n}$.

– *Propiedades*. Se reducen a aspectos manipulativas formales, además se establece la correspondencia entre números reales y puntos de la recta, propia de la *CE-explícita*. No se establecen propiedades del orden o densidad propias de la *CE-aritmética*. La *CE-aprox* se desarrolla a partir de aspectos de aproximación como el encuadramiento de números irracionales (figura 44).

Intentamos representar sobre la recta el número: $\sqrt{3}$ 1,73205080756

Si llamamos n al número dado, tenemos que: $1 < n < 2$

tomando en cuenta el siguiente dígito: $1,7 < n < 1,8$

y con el siguiente: $1,73 < n < 1,74$

y así sucesivamente:

$1,732 < n < 1,733$
$1,7320 < n < 1,7321$
$1,73205 < n < 1,73206 \ldots$

Este conjunto de desigualdades nos va permitiendo una mayor aproximación al punto buscado.

Fig.44. Encuadramiento de un número irracional (Stella, pp. 44–45).

- *Procedimientos*. Los más relevantes son aquellos relacionados con la *CE-aprox* (figura 44). Se introduce un procedimiento para representar números irracionales en la recta real (pp.44-45); no obstante, no se solicita su empleo en ninguna situación. Tampoco se muestra un procedimiento para distinguir si un número es racional o irracional, más allá del convenio indicado (figura 43).
- Argumentos. Sólo se solicita argumentación o justificación en una colección de actividades para trabajar en equipo, todas ellas relativas a la *CE-aprox.*

4.7.6 BREVE DESCRIPCIÓN GENERAL DE LOS LIBROS DE TEXTO

Los textos escolares muestran, evidentemente, concordancias y discrepancias en la forma en que los distintos objetos del significado asociados al número irracional son introducidos y desarrollados. Estos libros comparten algunos elementos de las entidades primarias.

- *Situaciones.* Todos los textos introducen situaciones de aproximación racional de irracionales. La mayoría presenta construcciones numéricas por alguna regla de formación. También son mayoritarias las situaciones de clasificación entre racionales e irracionales. Asimismo se presentan cuestiones o problemas relacionados con números "famosos" (π, número áureo) con un claro objetivo motivacional.
- *Lenguaje.* Todos los tipos de lenguaje de las configuraciones son utilizados por las editoriales, siendo los lenguajes aritmético y geométrico los más abundantes. Este uso permite, por un lado, ampliar el universo numérico y dotar de sentido a los números irracionales; por otro lado, restringe su uso en contextos algebraicos (como paso hacia la simbolización y la generalización) y en contextos analíticos (como procesos de paso al límite). Asimismo, el conjunto de los números irracionales en algunos libros de texto no es denotado, ni se establece de manera explícita la partición de $\mathbb{R}$ en números racionales e irracionales ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$).
- *Conceptos-regla.* Se introducen métodos para aproximar números irracionales. El número irracional es usualmente definido en un contexto geométrico (donde la medida es la noción clave) o como solución de ecuaciones polinómicas sin solución en $\mathbb{Q}$. Se definen raíz cuadrada, cúbica y enésima de un número entero positivo. Sin embargo, la continuidad de la recta numérica o la completitud de los reales no son en general abordadas y la definición de número irracional no se introduce como respuesta a un problema intramatemático, sino de manera ostensiva.
- *Propiedades***.** Las propiedades de densidad y orden de $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ en $\mathbb{R}$ son implícitamente consideradas como consecuencia de la aproximación por exceso y por defecto de racionales por irracionales. En general, dado que las prácticas operativas están en el centro de interés de los libros de texto, las propiedades de las distintas configuraciones epistémicas, más propias de las prácticas discursivas, quedan relegadas a un segundo plano.
- *Procedimientos***.** Es mayoritaria la introducción de procedimientos para representar geométrica y numéricamente los irracionales. Sin embargo,

no se discute el hecho de que existan números irracionales no construibles con regla y compás.

- *Argumentos***.** Los procesos de argumentación y validación están prácticamente ausentes.

Es posible asimismo resaltar algunos aspectos generales del desarrollo de las configuraciones en los libros de texto. Así, en la introducción de los números irracionales, se privilegian **situaciones** de aproximación mediante decimales. La práctica matemática que se propone está fundamentada básicamente en el desarrollo de la CE-aprox. Esta opción se justifica, no siempre de forma explícita, por el hecho de que en otras ciencias, como la Física, las aproximaciones racionales son "suficientes" (Scaglia, 2000) y por la irrupción de la calculadora en las aulas como un medio común. La aproximación además está vinculada al **concepto-regla** privilegiado; a saber: "número que no admite expresión decimal periódica".

Esta decisión, el paso a la aproximación, implica asimismo la renuncia implícita a la introducción de **propiedades** fundamentales de los números irracionales. Esto es así, por cuanto se presume que "las operaciones con decimales son de sobra conocidas" y, por lo tanto, operar con las aproximaciones de los irracionales los hace "transparentes". Este hecho no impide la presentación de **procedimientos** para representar y construir geométricamente algunos números irracionales, como una forma de desvincular dichos números de sus aproximaciones, pero sin llegar a justificaciones o **argumentaciones** formales basadas en situaciones que, forzosamente, tendrían que ser intramatemáticas.

El "abandono" de la aproximación como única vía para introducir los irracionales se realiza por medio de la discusión de la naturaleza de los "radicales" y de la forma en que se opera con éstos (figura 45).

Radicales

Cuando en una serie de cálculos aparece una raíz, es costumbre dejar ésta indicada hasta el final, para no tener que operar con muchos decimales. Estas raíces indicadas reciben el nombre de *radicales*, y se pueden hacer algunas operaciones con ellas:

$$\sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\sqrt{3}\ (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\ \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3$$

Fig. 45. Definición de radical y operaciones (Cúspide, p.33).

Por último, es importante señalar que todos los tipos de *lenguaje* de las configuraciones (geométrico, aritmético, simbólico, algebraico y conjuntista) están presentes en los libros de texto. Cierto que de forma no homogénea, siendo privilegiadas las representaciones "geométricas" (notablemente en la introducción), "algebraicas" (en la manipulación simbólica de expresiones y en la resolución de ecuaciones de segundo grado) y "aritméticas" (en situaciones de aproximación).

En el próximo apartado se realiza la construcción del significado global del objeto en estudio que permite la estructuración de los significados parciales como una posible herramienta teórica para el análisis de las trayectorias didácticas tanto del grupo experimental como los de control.

4.8 LA CONSTRUCCIÓN DEL HOLO-SIGNIFICADO DE LA NOCIÓN "NÚMERO IRRACIONAL"

4.8.1 ESTRUCTURACIÓN DE SIGNIFICADOS PARCIALES ASOCIADOS A LA NOCIÓN DE NÚMERO IRRACIONAL

Reina, Wilhelmi y Lasa (2012) determinan las configuraciones epistémicas asociadas a la noción de número irracional, que representan los significados parciales atribuidos a dicha noción. En la figura 46 se puede observar la estructuración de significados asociados a la noción de número irracional, su complejidad onto-semiótica asociada y su evolución.

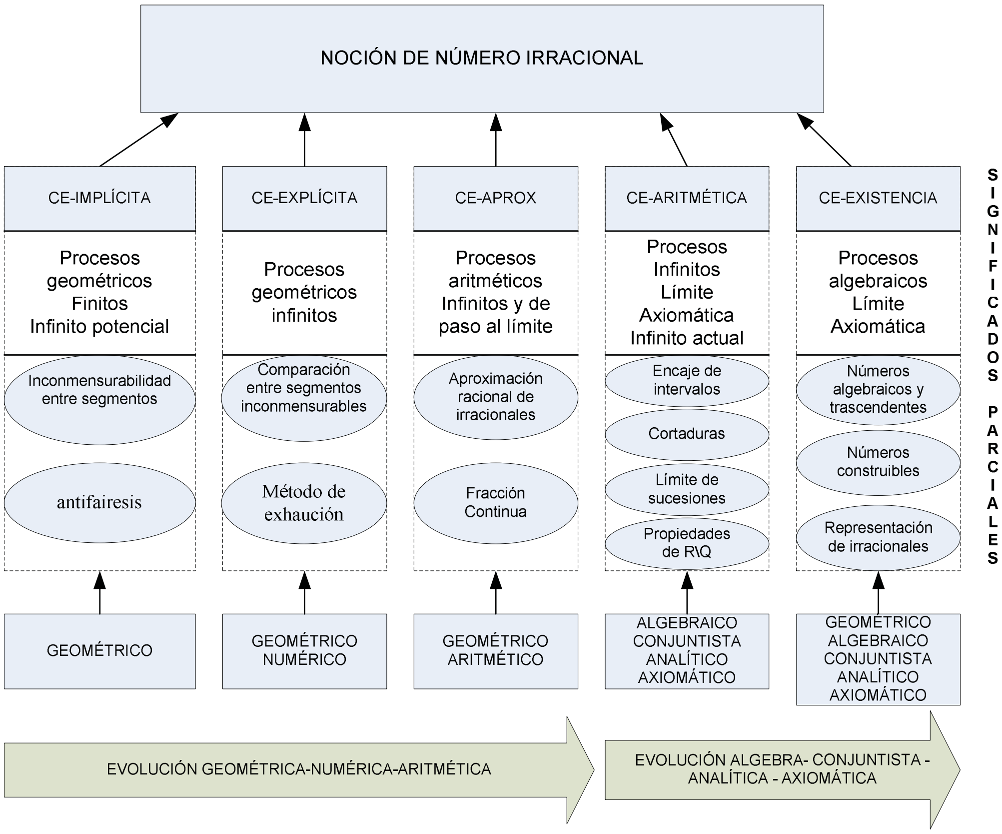


Fig.46. Estructuración de significados parciales asociados a la noción de número irracional.

A continuación describiremos las relaciones entre los diferentes significados y sus interacciones asociadas.

4.8.2 HOLO-SIGNIFICADO DE LA NOCIÓN DE NÚMERO IRRACIONAL

En un contexto geométrico la CE-i con sus procesos geométricos finitos se vincula con la noción de inconmensurabilidad a través de un proceso antifáiretico. Asociado a la CE-i, en un contexto geométrico-numérico la CE-e aparece con sus procesos geométricos infinitos, allí el método de exahución se relaciona con la inconmensurabilidad.

Un contexto geométrico-aritmético atraviesa y relaciona ambas configuraciones a través de la CE-ap, la aproximación acompaña a todos los procesos geométricos y a su vez sirve de “nexo” con las configuraciones CE-ex y CE-ar.

La noción de fracción continua articula ambas configuraciones, o sea el contexto geométrico- algebraico-conjuntista, con el aritmético y éste a su vez con un contexto algébrico- conjuntista-analítico relegando para niveles terciarios y universitarios el contexto axiomático.

La CE-ex a través de procesos algebraicos y la CE-ap por medio de procesos aritméticos se vinculan por medio de la noción de clasificación de los números irracionales, siendo la fracción continua el medio adecuado para tal fin.

La asociación entre la CE-ap y la CE-ar se manifiesta a través de la aproximación, siendo las propiedades de orden y densidad de los números irracionales las nociones que interaccionan con ella, esto último ocurre en un contexto algebraico-conjuntista quedando para una instancia posterior el analítico.

Los significados parciales asociados a la noción de número irracional y sus interacciones pueden esquematizarse como muestra la figura 47.

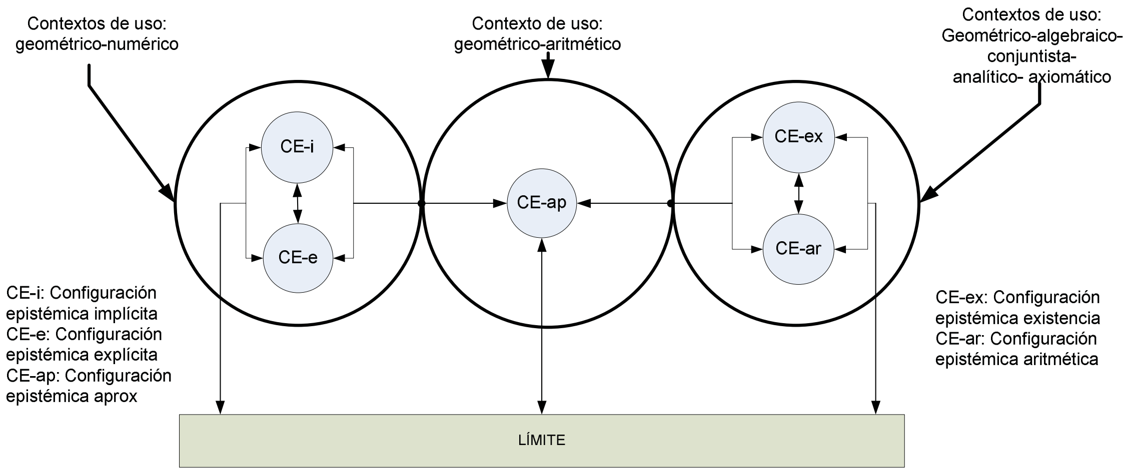


Fig.47. Representación del holosignificado de la noción de número irracional.

En este esquema se manifiesta la interacción entre configuraciones epistémicas y entre los contextos de uso geométrico-numérico con el aritmético y éste a su vez, con el algebraico-analítico-conjuntista–axiomático. La configuración epistémica "aprox" se revela en el diagrama como de gran importancia en la transición entre configuraciones.

La noción de límite está presente implícita o explícitamente en cada una de las configuraciones (y por lo tanto en cada contexto de uso) y da una idea de la importancia de la interacción de la noción de número irracional y la noción de límite.

Se trata de un tránsito flexible hacia una construcción de la noción que no debe obviar los significados parciales puestos en juego ni las interacciones manifestadas si se desea una construcción viable de una noción compleja como la de límite.

Capítulo 5

Significado institucional de referencia de la fracción continua

En este capítulo se muestra una antropología del saber “fracción continua” (sección 5.1), seguida de una breve génesis histórica de dicha noción y algunos puntos de encuentro con la noción de número irracional (sección 5.2).A continuación, se analizan algunas cuestiones en torno a la periodicidad, cuasiperiodicidad y aperiodicidad de los números irracionales desarrollados en fracción continua(sección 5.3) y se discute la búsqueda de regularidades, patrones y periodicidad numérica (sección 5.4).A partir de una experimentación con dos grupos, a saber, estudiantes para profesor de matemáticas y alumnos de secundaria se valora la dimensión cognitiva (sección 5.5). A continuación se estudia y construye la “configuración epistémica” asociadas a la noción de fracción continua (sección 5.6).Finalmente, se analiza el holosignificado asociado a la noción de fracción continua y se estudia la posibilidad de realizar un “acoplamiento didáctico curricular” entre holosignificados.

5.1 ANTROPOLOGÍA DEL SABER “FRACCIÓN CONTINUA”

5.1.1 DEFINICIÓN Y DIFERENTES CLASES DE FRACCIONES CONTINUAS

Desde la antigüedad el hombre ha resuelto problemas vía la aproximación de números. La fracción continua aparece como un método fecundo que es usado en diferentes culturas y en contextos determinados. Varios son los “puntos de encuentro” con la noción de número irracional, se muestra entonces que es a partir de la aproximación de estos números que este objeto encuentra el estatus de algoritmo infinito.

La resolución de ciertas ecuaciones o la demostración de la irracionalidad de algunos números son también contextos que ayudan a configurar este objeto matemático.

5.1.1.1 La fracción continua generalizada

Una fracción continua generalizada es una expresión de la forma,

$$x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}}$$

siendo los a_i y b_i $(i>0)$ números reales o complejos.

Adolf Hurwitz (1859-1919) y su hermano Julius (1857- ?) producen avances notables para la teoría de fracciones continuas (FC) complejas[1].

> "La teoría aritmética de las fracciones continuas para los números complejos comienza con la obra de Adolf Hurwitz" (Höngesberg, Oswald y Steuding, 2013,2).

$$z = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}} \in \mathrm{C}$$

> "La expansión en fracción continua de un número complejo se basa en cocientes parciales $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \ldots, n$ "(Oswald, 2014, 5).

Si se piensa exclusivamente en números reales entonces la fracción continua generalizada adquiere la forma

[1] Para un recorrido histórico de la FC compleja y de la biografía de los hermanos Adolf y Julius Hurwitz se sugiere al lector el análisis de la obra de Oswald y Steuding (2014).

$$x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}} = [a_0; b_1/a_1, b_2/a_2, \cdots, a_n/b_n, \ldots]$$

Siendo $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{Z}^+$ y $b_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1,2, \ldots$ (Hartono, 2002, 1).

El término "fracción continua" se utiliza también para denominar otros objetos matemáticos: FC semiregular, FC exceso, FC regular o simple, etc., que se describen a continuación.

5.1.1.2 La fracción continua semiregular

Una fracción continua semiregular, finita o infinita, tiene la forma:

$$x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}} = [a_0; b_1/a_1, b_2/a_2, \cdots, a_n/b_n, \ldots]$$

"Donde$b_i = \pm 1$; $a_0 \in \mathbb{Z}$; $a_n \in \mathbb{N}$, para $n \geq 1$; sujeto a la condición

$$b_{n+1} + a_n \geq 1 \text{ para } n \geq 1$$

y con la restricción que en el caso infinito

$$b_{n+1} + a_n \geq 2 \text{ , frecuentemente infinito.}$$

Además se exige que $b_n + a_n \geq 1$" (Dajani y Kraaikamp, 2000,109).

Un ejemplo de fracción continua semiregular surge de la solución positiva de la ecuación:

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

"de donde dividiendo por $x \neq 0$ obtenemos

$$x = 3 - \frac{1}{x}$$

Reemplazando iterativamente el valor de x, podemos obtener

$$x = 3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \ddots}} = \left[\overline{3-}\right]$$

Una expansión en fracción continua periódica pura para la cual adoptamos la notación" $\left[\overline{n-}\right]$ (Spinadel, 2001, 69).

Puede verificarse que este tipo de FC produce, con sus convergentes, solamente aproximaciones por "exceso"[2], por lo que se conoce como "fracción continua exceso".

5.1.1.3 La fracción continua regular o simple

En el caso que a_0 sea un número entero, los a_n enteros positivos y los b_n iguales a 1, diremos que la fracción se llama continua "simple" o "regular".

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

Se puede escribir la fracción continua simple de diferentes formas:

a. Por cocientes incompletos o parciales.

$$x = \lfloor a_0; a_1, a_2, a_{3,} ... \rfloor$$

b. La utilizada por Sir John Frederick William Herschel (1792-1871), que en 1820 expresa la FC de la forma

[2] El autor agradece a la Dra. Vera W. de Spinadel (Prof. Emérita, Universidad de Buenos Aires) por la entrevista concedida, donde se discutieron algunos avances y descubrimientos alcanzados por ella en teoría de fracciones continuas.

$$x = a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \frac{b_3}{a_3 +} \ldots$$

(p.148),

donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ y los $a_i \in \mathbb{Z}^+$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Si $b_i = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces podemos escribir x como

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \ldots$$

c. La empleada por Alfred Pringsheim (1850-1941), la cual proporciona otra escritura de la fracción continua

$$x = a_0 + \frac{1 |}{|a_1} \frac{1 |}{|a_2} \frac{1 |}{|a_3}$$

donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ y los $a_i \in \mathbb{Z}^+$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Por simplicidad se usa, en las secciones siguientes, la notación por cocientes parciales de la fracción continua (FC).

Toda FC simple finita que tiene como último cociente incompleto a dos, puede escribirse "exactamente de dos maneras, una con un número de términos impares, la otra con un número par de términos" (Cheng, 1998,17).

$$\frac{108}{55} = [1; 1,26,1,1] = [1; 1,26,2]$$

Cuando el número es negativo podemos escribir la FC de la siguiente forma[3]

$$-\frac{108}{55} = [-1; 1,26,2] = -[1; 1,26,2]$$

Cuando el número es racional es posible aproximarlo por una sucesión finita de cocientes incompletos y, si el número es irracional, por una sucesión infinita.

[3]"Para el desarrollo de un número negativo en fracción continua existen dos procedimientos. 1. Poner el signo «menos» delante de toda la fracción continua. 2. Admitir los valores negativos de a_0 (no obstante $a_1, a_2, \ldots, a_n$ siguen siendo positivos)" (Beskin, 1987, 22).

$$\sqrt{99} = [9; 1,18,1, \dots]$$

Puede probarse que a cada número irracional le corresponde una FC infinita (Cheng, 1998).

5.1.1.4 Convergentes o reducidas de la fracción continua

Es posible, a través de la FC, aproximar a un número racional o irracional por sus convergentes o reducidas.

$$C_0 = [a_0] = a_0$$

$$C_1 = [a_{0,}a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$C_2 = [a_{0,}a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$$

$$\vdots$$

$$C_n = [a_{0,}a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Los C_n son los denominados convergentesde la FC los cuáles permiten una aproximación racional del número real.

Puede probarse que estas aproximaciones, en el caso de una FC simple o regular serán, alternadamente, por exceso y por defecto.

5.1.1.5 El algoritmo de fracción continua

El algoritmo de FC puede describirse de la siguiente forma:

> "Escribimos $x = [x] + \{x\}$ donde $[x]$ es un número entero (la parte entera de x) y $\{x\}$ un número real en el intervalo [0,1) (la parte fraccionaria de x). Una tal descomposición es única: $[x]$ es el entero mayor tal que $[x] \leq x$. Si x es entero, entonces $x = [x]$ y $\{x\} = 0$. De lo contrario uno tiene $0 < \{x\} <$

1, y se escriben $x_1 = 1/\{x\}$. Comenzamos con x_1 lo que se ha hecho para x: se escribe$x_1 = [x_1] + \{x_1\}$. Lo único nuevo aquí es que podemos afirmar $[x_1] \geq 1$. De nuevo si x_1 es entero, se detendrá y escribimos $x = [x_1] + \frac{1}{[x_1]}$, mientras que si x_1 no es un entero se pone $x_2 = 1/\{x_1\}$. Consecutivamente se obtiene la escritura

$$x = [x] + \frac{1}{x_1} = [x] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{x_2}} = [x] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + \frac{1}{\ddots}}}$$

(Waldschmidt, 2005,1).

Así, se dispone de procedimientos estandarizados para la conversión entre una expresión decimal, su fracción generatriz y la fracción continua correspondiente. Por ejemplo:

$$1{,}96\widehat{36} \underset{(2)}{\overset{(1)}{\rightleftarrows}} \frac{108}{55} \underset{(4)}{\overset{(3)}{\rightleftarrows}} [1; 1{,}26{,}2]$$

(1) Algoritmo para la obtención de la fracción generatriz.

(2) Dividir.

(3) Algoritmo para la obtención de la fracción continua.

(4) Expresión fraccionaria irreducible y cálculos aritméticos.

En el capítulo siguiente, se observa la implementación en clase de matemáticas del algoritmo (3) descrito a modo de experiencia piloto.

En el apartado 7.2, se muestran algunos hitos importantes en la evolución de la FC como objeto matemático; esto sirve de referencia para la construcción de un “significado global” de la noción.

5.2 GÉNESIS HISTÓRICA DE LA FRACCIÓN CONTINUAY ALGUNOS PUNTOS DE ENCUENTRO CON LA NOCIÓN DE NÚMERO IRRACIONAL

No se intenta realizar un estudio exhaustivo del aspecto histórico del objeto fracción continua, sólo se muestra algunos puntos sobresalientes de la evolución de la noción.

5.2.1 LA FRACCIÓN CONTINUA ASCENDENTE

Høyrup (1990) muestra que, en tiempos de los babilonios y luego de los árabes, parece haberse empleado métodos de aproximación numérica como el de "fracción continua ascendente". Señala el algoritmo empleado por Leonardo de Pisa, en el año 1202, como proveniente de la tradición árabe.

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_1\cdot b_2}+\frac{a_3}{b_1\cdot b_2\cdot b_3}=\frac{a_1+\frac{a_2+\frac{a_3}{b_3}}{b_2}}{b_1}$$

siendo los a_i y los b_i enteros positivos.

> "La notación para las fracciones continuas ascendentes no fue inventado por Leonardo, pero aparentemente surge en la escuela matemática de Magreb, probablemente durante el siglo XII" (Høyrup, 1990, 294).

Una fracción de este tipo se puede expresar hoy mediante la llamada expansión de Engel (Friedrich Engel, 1861-1941), cuando los a_n son todos iguales a uno,

$$x=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_1\cdot b_2}+\frac{1}{b_1\cdot b_2\cdot b_3}$$

siendo x un número real positivo y los b_n números enteros positivos.

El desarrollo de Engel puede expresarse como una fracción continua que "asciende":

$$x = \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \ddots}{b_3}}{b_2}}{b_1}$$

T. A. Pierce (1929, 523), muestra que es posible obtener otro algoritmo a partir de la FC.

$$x_1 = q_1(1 - q_2(1 - q_3(\cdots)))$$

La expansión de ésta es

$$x_1 = q_1 - q_1 q_2 + q_1 q_2 q_3 - q_1 q_2 q_3 q_4 + \cdots$$

Paul Erdös (1913-1996) lo explica de la siguiente forma:

> "Cada número real x, $0 < x \leq 1$, tiene una única expresión de la forma,
>
> $$x = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} - \cdots$$
>
> donde los x_i forman una secuencia estrictamente creciente de enteros positivos.
>
> La expansión termina si y sólo si x es racional.
>
> De manera similar, cada número real positivo 'y', no necesariamente comprendido en el intervalo (0,1], tiene una única expresión en una serie de Engel.
>
> $$y = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_1 \cdot y_2} + \frac{1}{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3} + \cdots$$
>
> Donde los y_i forman una (no necesariamente estrictamente) creciente secuencia de enteros positivos" (Erdös y Sallit, 1991,43).

Se muestra algunos ejemplos del funcionamiento de cada algoritmo y su expansión:

$$
\begin{aligned}
&u_0 = 1{,}35 \quad , a_0 = \left[\frac{1}{1{,}35}\right] = 1 \\
&u_1 = u_0 a_0 - 1 = 0{,}35 \quad , a_1 = \left[\frac{1}{0{,}35}\right] = 3 \\
&u_2 = u_1 a_1 - 1 = 0{,}05 \quad , a_2 = \left[\frac{1}{0{,}05}\right] = 20 \\
&u_3 = u_2 a_2 - 1 = 0 \quad \text{finaliza el algoritmo} \\
&1{,}35 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 20} \quad \text{expansión de Engel} \\
&1{,}35 = \{1{,}3{,}20\}
\end{aligned}
$$

La expansión de Engel anterior puede expresarse en FC ascendente.

$$
1{,}35 = \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1}{20}}{3}}{1}
$$

Se puede demostrar que un número racional tiene una expansión de Engel finita y un número irracional tiene un desarrollo infinito.

Un ejemplo para el desarrollo de Pierce:

$$
\begin{aligned}
&u_0 = 0{,}42 \quad , a_0 = \left[\frac{1}{0{,}42}\right] = 2 \\
&u_1 = 1 - u_0 a_0 = 0{,}16 \quad , a_1 = \left[\frac{1}{0{,}16}\right] = 6 \\
&u_2 = 1 - u_1 a_1 = 0{,}04 \quad , a_2 = \left[\frac{1}{0{,}04}\right] = 25 \\
&u_3 = 1 - u_2 a_2 = 0 \quad \text{finaliza el algoritmo} \\
&0{,}42 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 25} \quad \text{expansión de Pierce} \\
&0{,}42 = \{2{,}6{,}25\}
\end{aligned}
$$

La expansión de Pierce anterior se puede expresaren FC ascendente.

$$0{,}42=\cfrac{1-\cfrac{1-\cfrac{1}{25}}{6}}{2}$$

Se puede demostrar que una expansión de Pierce x es finita si y solo si x es racional.

Es posible obtener el desarrollo de Pierce para números irracionales

$\frac{1}{e}=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,\ldots\}$ (Sloane, 2013).

En FC ascendente,

$$\frac{1}{e}=\cfrac{1-\cfrac{1-\cfrac{1-\cfrac{\ddots}{5}}{4}}{3}}{2}$$

5.2.2 Primeros desarrollos de la fracción continua

Diofanto (S.III a.C.) parece emplear un método que se puede asociar a las fracciones continuas para resolver ecuaciones (Heath, 1885).

Euclides (S.III a.C.) en "Elementos" muestra el denominado algoritmo de Euclides en el libro VII al hallar el máximo común divisor. Allí emerge la noción de fracción continua, aunque de manera implícita (Courant y Robbins, 1962). Así, para calcular el máximo común divisor de 720 y 168 se procede de la siguiente forma

$$\begin{aligned} 720 &= 4\cdot 168+48 \\ 168 &= 3\cdot 48+24 \\ 48 &= 2\cdot 24+0 \end{aligned}$$

Este algoritmo se puede expresar como una fracción continua simple finita,

$$\frac{720}{168}=4+\frac{48}{168}=4+\frac{1}{\frac{168}{48}}=4+\frac{1}{3+\frac{24}{48}}=4+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}$$

(Hardy y Wright, 1938, 134).

Baskhara (S.XII) aproxima $\sqrt{2}$ por las reducidas del desarrollo en fracción continua (Rey Pastor y Babini, 2000a, 173).

Leonardo de Pisa, Fibonacci (cerca de 1170-después de 1240), en su *LiberAbbaci* (1202), expresa el número como lo muestra $\frac{19}{24}$ la fig.48.

$$\frac{1\ 5\ 7}{2\ 6\ 10}$$

Fig.48. Expresión de un número por FC (Leonardo de Pisa, 1857, 24).

Es decir, de la forma $\frac{a_3 a_2 a_1}{b_3 b_2 b_1}$ (HØyrup, 1990,294).

En notación de FC ascendente se puede escribir

$$\frac{7}{10}+\frac{5}{6\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 6\cdot 2}=\frac{7+\frac{5+\frac{1}{2}}{6}}{10}$$

(Bagni, 1995, 90).

En 1572 Rafael Bombelli (1526-1573), en Bologna, publica *L´Algebra* utilizando FC para aproximar raíces cuadradas, obtiene una aproximación para la $\sqrt{13}$ (figura 49).

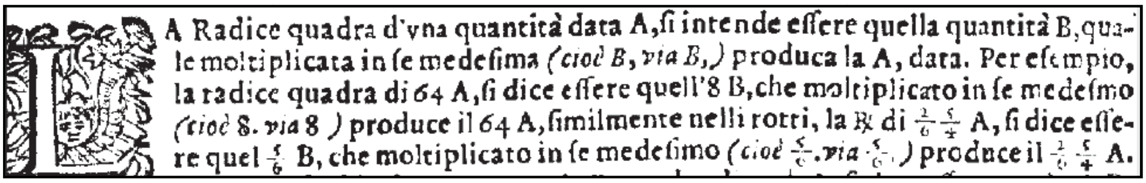
$$3\frac{720}{1189}$$

Fig.49. Aproximación de raíz cuadrada de trece (Bombelli, 1572,36).

En notación moderna el procedimiento desarrollado es el siguiente

$$\sqrt{13}=3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\ddots}}}}$$ (Bagni, 1995, 90).

Pietro Antonio Cataldi (1548-1626) en su *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadrata delli numeri*, define la raíz cuadrada como se muestra en la figura 50.

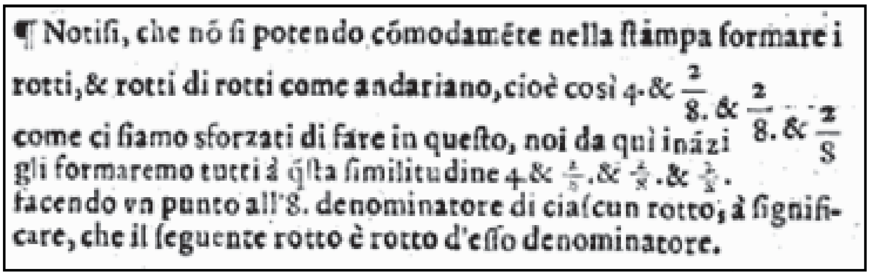


LA Radice quadra d'vna quantità data A,si intende essere quella quantità B,quale moltiplicata in se medesima *(cioè B, via B,)* produca la A, data. Per essempio, la radice quadra di 64 A,si dice essere quell'8 B,che moltiplicato in se medesmo *(cioè 8. via 8)* produce il 64 A,similmente nelli rotti, la ℞ di $\frac{25}{64}$ A, si dice essere quel $\frac{5}{6}$ B, che moltiplicato in se medesimo *(cioè $\frac{5}{6}$. via $\frac{5}{6}$.)* produce il $\frac{25}{64}$ A.

"La raíz cuadrada de una cantidad dada A, se entiende será esa cantidad B, la cual multiplicada en sí misma (es decir B, a través de B) produzca la A, dada. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 64 A, se dice será 8 B, que multiplicado en sí mismo (es decir 8, a través de 8) produce el 64 A. Similarmente el quebrado, la raíz cuadrada ℜ de $\frac{25}{64}$A, se dice será aquel $\frac{5}{6}$ B, que multiplicado en sí mismo (es decir $\frac{5}{6}$, a través de $\frac{5}{6}$) produce el $\frac{25}{64}$ A".

Fig.50. Definición de raíz cuadrada (Cataldi, 1613 ,1).

Luego muestra un método de calcular la raíz cuadrada, se trata de la FC de $\sqrt{18}$ la que escribe por razones tipográficas de la siguiente forma (figura 51).



¶ Notiſi, che nõ ſi potendo cõmodamẽte nella ſtampa formare i rotti, & rotti di rotti come andariano, cioè così 4. & $\frac{2}{8.\ \&\ \frac{2}{8.\ \&\ \frac{2}{8}}}$ come ci ſiamo sforzati di fare in queſto, noi da quì inãzi gli formaremo tutti ã q̃ſta ſimilitudine 4. & $\frac{2}{8.}$. & $\frac{2}{8.}$. & $\frac{2}{8}$. facendo vn punto all'8. denominatore di ciaſcun rotto, ã ſignificare, che il ſeguente rotto è rotto d'eſſo denominatore.

"Se informa, que no se puede en la prensa formar cómodamente el quebrado, y quebrado de quebrado como vemos que es así

$$4.\&\frac{2}{8.\&\frac{2}{8.\&\frac{2}{8}}}$$

Como lo hemos tratado de hacer aquí, en aquello formaremos todo similarmente. Haciendo un punto al 8. en el denominador

$$4.\&\frac{2}{8.}\&\frac{2}{8.}\&\frac{2}{8}$$

de cada quebrado, va a significar, que el siguiente quebrado se quiebra del denominador"

Fig.51. Notación de fracción continua (Cataldi, 1613 ,70).

Cataldi halla "una manera muy breve de encontrar la raíz cuadrada de los números" (Rey Pastor y Babini, 2000b, 14).

$$\sqrt{n}-a=\frac{N-a^2}{\sqrt{N}+a}=\frac{b}{2a+\sqrt{N}-a}$$

Siendo n el mayor número cuyo cuadrado es menor que N y $b=N-a^2$ y al reiterar el valor se $\sqrt{N}-a$ obtiene la fracción continua que por razones tipográficas, Cataldi escribe:

$$\sqrt{n} = a \,\&\, \frac{b}{2a.} \,\&\, \frac{b}{2a.} \,\&\, \frac{b}{2a.} \cdots$$

En la expresión el punto que sigue al denominador indica que es ahí donde debe agregarse el numerador de la fracción siguiente.

Por ejemplo, encuentra que

$$\sqrt{18} = 4 \,\&\, \frac{2}{8.} \,\&\, \frac{2}{8.} \,\&\, \cdots$$

(Rey Pastor y Babini, 2000b, 18).

En notación moderna se escribe

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{\ddots}}}}$$

Se trata de los comienzos del desarrollo de la fracción continua “generalizada”.

Según el desarrollo realizado el siglo XVI provoca un paso más en la evolución del algoritmo al transformarse en uno de tipo infinito

> “En lo que refiere al algoritmo de las fracciones continuas , que estaba implícito en el método de las divisiones sucesivas de Euclides para la obtención del máximo común divisor , el siglo XVI aporta la novedad de extender el algoritmo a números irracionales (raíces cuadradas) naciendo así unos de los primeros algoritmos infinitos” (Rey Pastor y Babini, 2000a, 14).

El siglo XVII trae grandes avances en la incipiente teoría de la FC. William Brouncker (1620-1684) aproxima, mediante una FC infinita, el número π.

John Wallis (1616-1703) publica en 1655 *Arithmetica Infinitorum*, obra en la cual donde da a conocer la FC de $\frac{\pi}{4}$ propuesta por Brouncker (figura 52).

caret; Nobiliſſimus Vir ille, re apud ſe perpenſa, methodo item Infinitorum ſibi peculiari quantitatem ad hanc formam commodiſſime deſignandam judicavit. Nempe ſi unitati adjungatur fractio, quæ denominatorem habeat continuè fractum; ea lege, ut particularium fractionum Numeratores ſint 1, 9, 25, &c. numeri quadratici imparium 1, 3, 5, &c. Denominator vero ubiq; 2 cum adjuncta fractione, & ſic in infinitum.

$$\square = 1\tfrac{1}{2}\,\tfrac{9}{2}\,\tfrac{25}{2}\,\tfrac{49}{2}\,\tfrac{81}{2}\ \&c.$$

"El gran señor, realmente consideró, el método de elementos infinitos, si esta cantidad especial designa cómodamente una forma determinada.

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{\ddots}}}}}$$

Es decir si la unidad se une a la fracción, que tiene denominador fracción continua; la ley, los numeradores de las fracciones particulares son 1, 9, 25,..., números impares cuadrados de 1,3,5,... Pero dondequiera el denominador 2; unido a la fracción, y así indefinidamente".

Fig.52. Fracción continua propuesta por Brouncker (Wallis, 1656,182).

En el siglo XVIII no sólo se producen importantes avances en la teoría de FC sino que aparecen nuevas formas de utilizar la FC, a saber, para la demostración y para la resolución de ecuaciones diofánticas.

Euler (1707-1783) en 1748 en su tratado *Introductio in analysin infinitorum,* Capítulo XVIII*: De fractionibus continuis,* estudia la FC infinita y las relaciona con las series numéricas (figura 53).

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c.,$$

ubi π denotat peripheriam circuli, cujus diameter = 1, in fractionem continuam.

Substitutis loco *A*, *B*, *C*, *D*, &c., numeris 1, 3, 5, 7, &c., oritur

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \&c.,}}}}}$$

hincque, invertendo fractionem, erit

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \&c.,}}}}$$

quæ est expressio, quam BROUNCKERUS primum pro quadratura circuli protulit.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

"Donde π denota la periferia del círculo, cuyo diámetro =1, en fracción continua.

Substituyendo el lugar A, B, C, D,…, por los números 1, 3, 5, 7,…,

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \ddots}}}}}$$

Abruptamente, invirtiendo la fracción, será

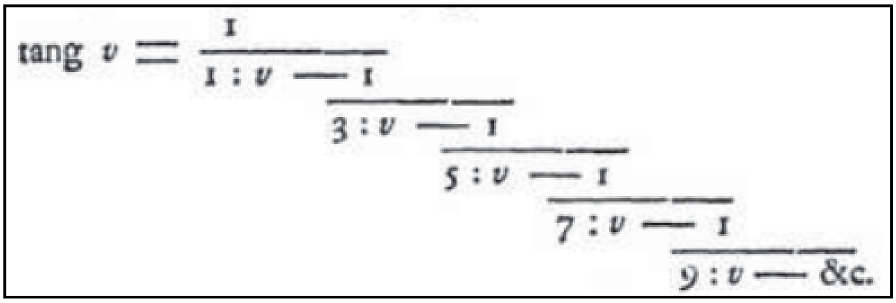
$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \ddots}}}}$$

Que es la expresión de Brouncker que obtiene y produce primero para la cuadratura del círculo".

Fig.53. Algunas fracciones continuas relativas al número π (Euler, 1748, 305).

Johann Lambert (1728-1777), "demostró la irracionalidad de π partiendo del desarrollo en fracción continua de tag *x*" (Rey Pastor y Babini, 2000b, 117).

La tangente expresada en FC por Lambert tiene la siguiente forma (figura 54).



$$\text{tang } v = \cfrac{1}{1:v - \cfrac{1}{3:v - \cfrac{1}{5:v - \cfrac{1}{7:v - \cfrac{1}{9:v - \&c.}}}}}$$

Fig.54. Fracción continua de tan x (Lambert, 1768, 269).

Un nuevo contexto de uso de esta noción emerge, esta vez ligado a la demostración.

En 1766 Joseph Louis Lagrange (1736-1813) publica *Solution d'un Probleme d'Arithmetique* donde emplea la FC para la solución de una ecuación diofántica (figura 55).

1. Soit a le nombre donné non carré, y^2 le carré cherché et x^2 un autre carré quelconque, la question se réduit à satisfaire à cette équation : $ay^2 + 1 = x^2$, en ne prenant pour x et y que des nombres entiers; ainsi il s'agit de trouver deux nombres entiers x et y tels que

$$x^2 - ay^2 = 1.$$

Qu'on tire la racine carrée de a par approximation, et l'on aura une fraction décimale qu'on pourra changer, par les méthodes connues, en une fraction continue, laquelle ira nécessairement à l'infini, à cause que $\sqrt{a}$ est une quantité irrationnelle par l'hypothèse.

Pour cela il n'y aura qu'à diviser d'abord le numérateur de la fraction trouvée par son dénominateur, ensuite le dénominateur par le reste, et ainsi de suite, en pratiquant la même opération, par laquelle on cherche la plus grande commune mesure de deux nombres, et nommant $q, q', q'', q''', \ldots$, les quotients qui résultent de ces différentes divisions, on aura

$$\sqrt{a} = q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{1}{q''' + \ddots}}}$$

"Sea a es el número dado no cuadrado, y^2 el cuadrado buscado y x^2 otro cuadrado cualquiera, la cuestión se reduce a satisfacer esta ecuación:
tomando exclusivamente para x e $y$números enteros; por lo tanto, se trata de encontrar dos números $ay^2 + 1 = x^2$ enteros x e y tales que

$$x^2 - ay^2 = 1$$

Que extrae la raíz cuadrada de a por aproximación, y se tendrá una fracción decimal que se podrá cambiar, por métodos conocidos, en una fracción continua, la cual irá necesariamente al infinito, ya que $\sqrt{a}$ es una cantidad irracional por hipótesis.

Por esto, no habrá más que dividir primero el numerador de la fracción encontrado por su denominador, a continuación el denominador por el resto, y así sucesivamente, con la misma operación, por la cual se busca la más grande medida común de dos números, y denotando q, q', q'', q''',..., los cocientes que resultan de estas diferentes divisiones, se tiene"

$$\sqrt{a} = q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \cfrac{1}{q''' + \ddots}}}$$

Fig.55. Solución de una ecuación diofántica (Lagrange, 1867, 672).

"Utilizó tanto en álgebra como en análisis el algoritmo de las fracciones continuas infinitas" (Rey Pastor y Babini, 2000b, 123).

Un nuevo contexto de uso de esta noción emerge, esta vez ligado a la resolución de ecuaciones vía la FC.

En el siglo XIX Cantor y Dedekind utilizan FC para demostrar un teorema que involucra los números irracionales.

Otro contexto de uso de la FC se desarrolla al tratar de probar la irracionalidad de algunos números (Hardy y Wright, 1938).

Es posible expresar la FC infinita como un límite de una FC a través de los "aproximantes racionales"(Spinadel,1995).

Diversas son las propiedades que poseen las FC (Hardy y Wright, 1938) algunas de ellas se manifiestan de utilidad a la hora de diferenciar números racionales de irracionales, otro de los contextos de uso de esta noción.

5.3 ALGUNAS CUESTIONES EN TORNO A LA PERIODICIDAD, CUASI-PERIODICIDAD Y APERIODICIDAD DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES DESARROLLADOS EN FRACCIÓN CONTINUA

Se puede pensara un número irracional en términos de sus cifras decimales infinitas aperiódicas pero también es posible hacerlo a partir de otra forma de escritura del número, a saber, por su expresión en fracción continua.

> "El desarrollo en fracción continua tiene, pues dos ventajas sobre el desarrollo decimal; la de ser único y la de indicar claramente la naturaleza del número. Si la fracción es finita, el número es racional; si es indefinida éste es irracional" (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1969,346).

Puede probarse que un número racional tiene una expresión en fracción continua "finita", mientras que un número irracional posee un desarrollo en fracción continua "infinita" (Spinadel, 1995; 2003).

Por ejemplo, el número racional 1/998, tiene una escritura finita en fracción continua por coeficientes

$$\frac{1}{998} = [0; 998]$$

Mientras que un número irracional tiene un desarrollo infinito en fracción continua, y éste puede ser periódico o no.

> "Al respecto, el matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813) probó que un número es irracional cuadrático si y solo si su descomposición en fracciones continuas es periódica (no necesariamente periódica pura)" (Spinadel, 1995, 20).

En el caso de un irracional cuadrático la periodicidad puede ser "pura" o "mixta". Se muestra a continuación dos ejemplos:

$$2 + \sqrt{5} = [\overline{4}] \text{ (FC periódica pura)}$$

$$\sqrt{5} = [2; \overline{4}] \text{ (FC periódica mixta)}$$

5.3.1 El número irracional como fracción continua periódica

> "Una fracción continua ordinaria indefinida se llama periódica si sus cocientes incompletos se reproducen periódicamente a partir de uno de ellos:
>
> $$x = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k,} \dots, a_{k+n}, a_{k,} \dots, a_{k+n}, \dots] =$$
>
> $$= [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, \overline{a_{k,} \dots, a_{k+n}}]$$
>
> La fracción continua es periódica pura, si el período comienza en a_0, es decir k = 0, y entonces;
>
> $$x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_0, \dots] =$$
>
> $= [\overline{a_{0,} a_1, a_2, \dots, a_n}]$,

lo que exige $a_0 > 0$."(Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1969, 348).

Por ejemplo, un número irracional cuya expansión es "periódica pura", en fracción continua, es el "número de plata" (Spinadel, 2003, 19).

$$\sigma_{Ag} = 1 + \sqrt{2} = [2; 2 ,2 , 2, \dots] = [\overline{2}]$$

El número raíz cuadrada de dos tiene una expansión "periódica mixta" en fracción continua

$$\sqrt{2} = [1; 2 ,2 , 2, \dots] = [1, \overline{2}]$$

Como se dijo anteriormente es posible establecer toda una familia de números irracionales, la de los "números metálicos" (Spinadel, 2003) a partir de su expresión en fracción continua, siendo el "número de oro" uno de sus más conocidos miembros.

5.3.1.1 El número irracional como fracción continua periódica palindrómica

Existen fracciones continuas periódicas llamadas palindrómicas, o sea aquellas que en su período cuentan con un bloque de cocientes incompletos palindrómicos (simétricos).

> "Supongamos ω satisface $\omega^2 - t\omega + n = 0$ y es un entero. Esto es su traza $t = \omega + \overline{\omega}$ y la norma $n = \omega\overline{\omega}$ ambos son números racionales enteros.Entonces es bien conocido que la expansión en fracción continua deω es periódica y es de la forma $\omega = \left[a_0; \overline{a_1 \dots , a_{r-1}, 2a_0 - (\omega + \overline{\omega})}\right]$ donde la palabra $a_1, \dots , a_{r-1}$ es un palíndromo.
>
> Por ejemplo $\sqrt{61} = \left[7; \overline{\underbrace{1,4,3,1,2,2,1,3,4,1}_{\text{Palíndromo}}, \underbrace{14}_{2a_0}}\right]$"
>
> (Van der Poorten, 2004, 69).

Se puede observar, de acuerdo al recorrido realizado, que a partir de ciertos términos los cocientes incompletos comienzan a ser periódicos, esto último implica relaciones de regularidad, repetición de cifras y patrones (figura 56).

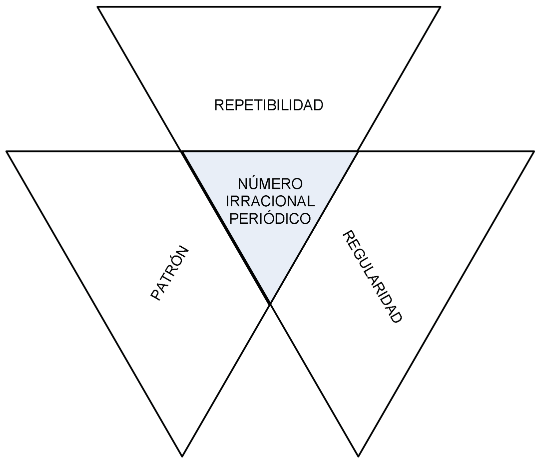


Fig.56. Posibles relaciones de implicancia entre nociones asociadas a un número irracional expresado en fracción continua periódica.

Entonces se consideran necesarios tres aspectos para que un número irracional, expresado en fracción continua infinita sea periódico, a saber,

- Que exista una regularidad en los cocientes incompletos de la FC.
- Que exista un patrón definido entre sus cocientes incompletos.
- Que sus cocientes incompletos se repitan en el mismo orden a partir de cierto término.

5.3.2 EL NÚMERO IRRACIONAL COMO FRACCIÓN CONTINUA SIMPLE CUASIPERIÓDICA

Existen números irracionales, desarrollados en fracción continua, cuya expresión no es periódica pero presenta ciertas regularidades, en sus cocientes incompletos, a partir de una cierta cifra y la emergencia de un patrón, por ejemplo el número de Euler.

Precisamente es Euler quien estudia al número e en fracción continua, sus regularidades y patrones (Thakur, 1996, 248).

Cuasi-períodos

$$e = [2\,;\overbrace{1\,,\mathbf{2}\,,1}\,,\overbrace{1\,,\mathbf{4}\,,1}\,,\overbrace{1\,,\mathbf{6}\,,1}\,,\overbrace{1\,,\mathbf{8}\,,1}\,,\overbrace{1\,,\mathbf{10}\,,1}\,,\dots,1\,,1\,,\underbrace{\mathbf{2n}}_{\text{patrón}}\,,1,\dots]\,,\mathrm{n} \in \mathbb{N}$$

regularidad

Sin embargo, no se trata de un desarrollo en fracción continua simple "periódico" sino "cuasi-periódico", en general

$$e = [2\,;\overline{1\,,2n\,,1}]_{n=1}^{\infty}\text{(Komatsu, 1999,334).}$$

Euler logra generalizar para el caso de raíces enésimas.

$$\sqrt[n]{e} = [1\,;n-1\,,1\,,1\,,3n-1\,,1\,,1\,,5n-1\,,1\,,1,\dots]\,,n \in \mathbb{N}{>}1 \text{ (Thakur, 1996, 251).}$$

Se puede reescribir:

$$\sqrt[n]{e} = \left[1\,;\overline{(2k-1)n-1\,,1\,,1}\,\right]_{k=1}^{\infty} \text{ (Komatsu, 1999,334).}$$

En general una fracción continua simple cuasiperiódica, fracción continua de Hurwitz,

> "tiene la forma
>
> $$\alpha = \left[a_0\,;a_1\,,\dots,a_n,\overline{Q_1(k),\dots,Q_p(k)}\right]_{k=1}^{\infty} =$$
>
> $$= \left[a_0\,;a_1\,,\dots,a_n,Q_1(1),\dots,Q_p(1),Q_1(2),\dots,Q_p(2),Q_1(3),\dots\right].$$
>
> Donde a_0 es un entero, $a_1\,,\dots,a_n$ son enteros positivos, $Q_1,\dots,Q_p$ son polinomios con coeficientes racionales que toma valores positivos enteros para $k = 0{,}1{,}2,\dots$ y al menos uno de los polinomios no es constante" (Komatsu, 2006,92).

Las fracciones continuas de "Tasoev" "también son cuasiperiódicas como las de Hurwitz, pero $Q_j(k)$ incluye exponentes en k en lugar de polinomios"

$$\left[0\,;\underbrace{\overline{a^k,\ldots,a^k}}_{m}\right]_{k=1}^{\infty} \quad \text{(Komatsu, 2005, 2088).}$$

Donde $a \geq 2$ y $m \geq 1$ son enteros.

"Para el caso especial de $m = 1$ y $m = 2$ se derivan las siguientes expresiones"

$$\left[0\,;\underbrace{\overline{a^k}}_{m=1}\right]_{k=1}^{\infty} = [0, a, a^2, a^3, a^4, \ldots]$$

$$\left[0\,;\underbrace{\overline{a^k,a^k}}_{m=2}\right]_{k=1}^{\infty} = [0, a, a, a^2, a^2, \ldots]$$

(Mc Laughlin y Wyshinsk, 2004,2).

Adamczweski (2010) prueba que para ciertas FC (de Maillet –Baker), cuasi-periódicas, la FC corresponde a un número irracional trascendente.

$$\zeta = \left[\underline{1}, 2,3, \underline{1,1}, 4,5,6,7, \underline{1,1,1}, 8,9,10,11,12,13,14,15, \underline{1,1,1,1,1,1}6,17, \ldots\right]$$

(pag. 52).

Para el caso de un número irracional desarrollado en fracción continua "cuasiperiódica", la emergencia de regularidades y patrones está garantizada, no así la repetitividad de "todos" sus cocientes incompletos, a partir de cierto término, si bien pueden repetirse infinitamente algunos de ellos dentro del cuasiperíodo (figura 57).

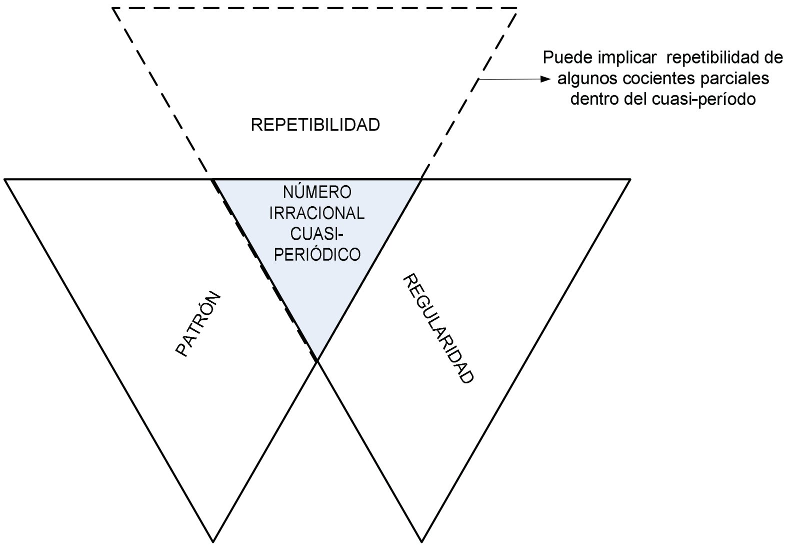


Fig.57. Posibles relaciones de implicancia entre nociones asociadas a la cuasi-periodicidad de un número irracional expresado en fracción continua.

Entonces se considera necesario dos aspectos para que un número irracional, expresado en fracción continua regular, sea cuasiperiódico, a saber:

- Que exista una regularidad en los cocientes parciales de la FC.
- Que exista un patrón definido entre sus cocientes parciales.

También:

- Es posible que algunos (no todos) de sus cocientes incompletos se repitan en el mismo orden a partir de cierto término.

5.3.3 El número irracional como fracción continua aperiódica

Otros números irracionales, por ejemplo π, no presenta regularidades o patrones expresado en fracción continua simple,

$$\pi = [3\,;7\,,15\,,1\,,292\,,\dots]$$

Pero sí presenta regularidades y patrones expresado en fracción continua generalizada, es el mismo Euler, en su *Introductio in analysin infinitorum,* Capítulo XVIII: *De fractionibus continuis*, (Reina, 2010) quien muestra la FC desarrollada por William Brouncker (fig. 58).

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\ddots}}}}}$$

Fig. 58. Fracción continua del número π desarrollada por William Brouncker.

Otra forma de escribir a π en fracción continua generalizada (fig.59).

$$\pi = 1 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{1}{5+\cfrac{4}{7+\cfrac{9}{9+\cfrac{16}{11+\ddots}}}}}$$

Fig. 59. Fracción continua generalizada del número π.

De la misma manera que se puede "construir" un número irracional trascendente en expresión decimal por una ley de formación, también se puede construir (y probar) que algunas fracciones continuas conducen a un número irracional trascendente como mostramos en el apartado anterior.

> "Tomando como cocientes parciales a_n diferentes secuencias de números conducen a números reales que a menudo resultan trascendentes. Por ejemplo la fracción continua s para los cuáles $a_n = n$:
>
> $$s = [0; 1,2,3,4, \dots] = 0,697774657964 \dots$$
>
> es trascendente"(Wolf, 2010, 1).

Aun un número irracional expresado como FC aperiódica, puede tener cierto tipo de repetitividad o de regularidades y patrones en sus convergentes (figura 60).

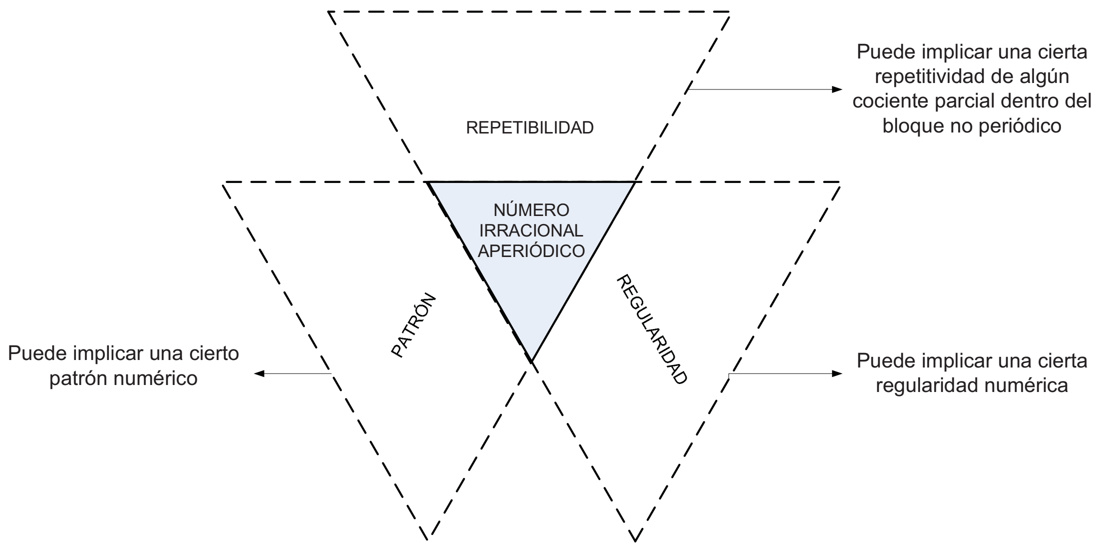


Fig.60. Posibles relaciones de implicancia en las nociones asociadas a la aperiodicidad de un número irracional expresado en fracción continua.

Si un número irracional, expresado en FC, es aperiódico puede ocurrir:

- Que no exista una regularidad en los cocientes parciales de la FC (aunque puede existir).
- Que no exista un patrón definido entre sus cocientes parciales (aunque puede existir).
- Que no exista periodicidad de todo un bloque de cocientes incompletos (aunque puede existir repetitividad de alguno de ellos).

Debe ocurrir:

- Que no sea un irracional cuadrático, o sea que no sea una fracción continua periódica.[4]

En síntesis los números irracionales los podemos caracterizar, de acuerdo a su escritura, como expresión decimal no periódica infinita o como fracción continua infinita y esto puede implicar el reconocimiento de relaciones opuestas, "dialécticas" (figura 61).

[4]"El desarrollo en fracción continua de un número real irracional α es finalmente periódico si y solamente si, α es un irracional cuadrático" (Adamczewski, 2010, 49).

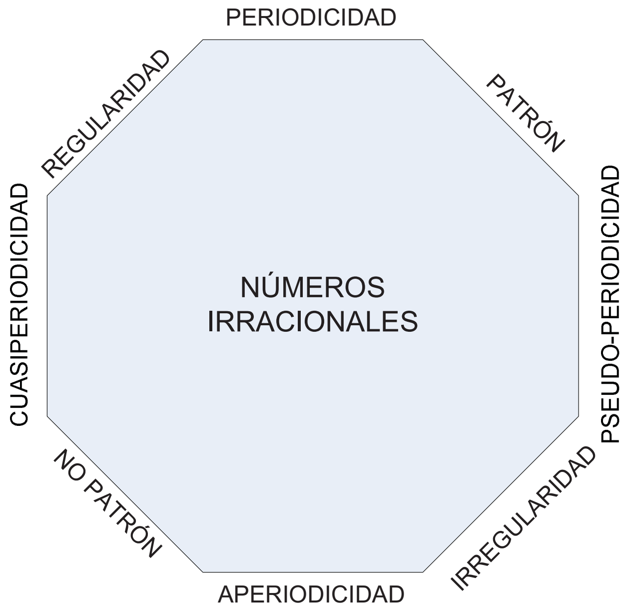


Fig. 61. Relaciones matemáticas asociadas a los números irracionales, expresados tanto en desarrollo decimal como en fracción continua.

5.4 DE LA BÚSQUEDA DE REGULARIDADES, PATRONES Y PERIODICIDAD

De acuerdo a lo transitado en el apartado 7.1 parece significativa para los matemáticos la búsqueda de regularidades, patrones, periodicidad y cuasi-periodicidad en los cocientes parciales de una FC.

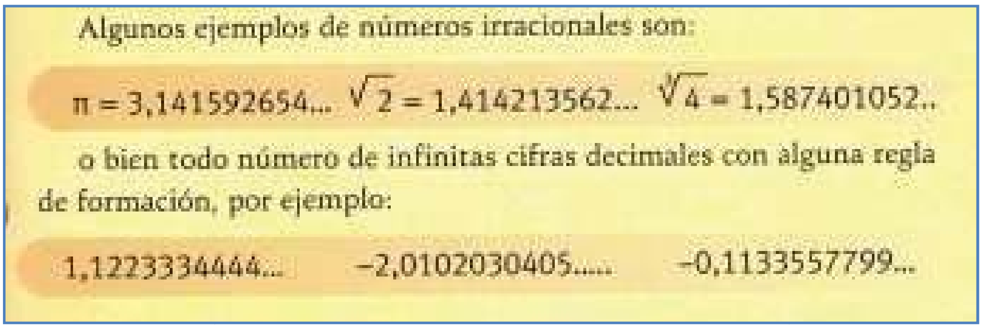
También parece importante, de acuerdo a lo tratado en el ítem 4.1.10 del capítulo cuatro, el estudio de la expresión decimal de un número irracional para el reconocimiento de regularidades, patrones, pseudoperiodicidad y aperiodicidad.

Si bien se sabe que es necesario conocer al número que da origen a la expresión decimal para poder determinar si se trata de un número racional periódico o irracional, creemos que es importante el estudio de la "percepción" de posibles regularidades e irregularidades en el proceso de “visualización” de la noción de número irracional.

Es conocido que algunos profesores de enseñanza secundaria emplean en sus clases ejemplos de números irracionales que permiten a sus alumnos “percibir” la aperiodicidad numérica en las cifras decimales de un irracional.

Es más, en algunos casos, el docente “muestra” a sus alumnos números irracionales que se construyen con una “ley de formación”, en sus cifras decimales, como el analizado en el apartado 6.2.1.2.

Los libros de texto, en consonancia, presentan ejemplos de irracionales expresando sus cifras decimales (figura 62).



Algunos ejemplos de números irracionales son:

$\pi = 3{,}141592654...$ $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ $\sqrt[3]{4} = 1{,}587401052..$

o bien todo número de infinitas cifras decimales con alguna regla de formación, por ejemplo:

$1{,}1223334444...$ $-2{,}0102030405.....$ $-0{,}1133557799...$

Fig.62. Ejemplos de números irracionales en expresión decimal (Stinsin y Ziger, 2010, 25).

Inclusive los textos plantean ejercitación en donde es necesario, para el alumno, el reconocimiento de regularidades y patrones en la búsqueda de la periodicidad y aperiodicidad numérica (figura 63).

1. Clasifiquen cada uno de los siguientes números en racionales (R) o irracionales (I).

a) 6 ☐

b) 1,78942168431712953 ☐

c) $0{,}12\overline{7}$ ☐

d) 4,75 ☐

e) 2,44444444... ☐

f) 0,123456789101112131415... ☐

Fig.63. Clasificación de números racionales e irracionales por su expresión decimal (Chorny, Salpeter y Krimker, 2009, 22).

La aparente "transparencia" en nociones como las de "patrón", "regularidad" y "periodicidad", y el intento de "reconocimiento", por parte del estudiante, de la periodicidad y no periodicidad, patrones y no patrones, regularidades e irregularidades en las cifras decimales, tanto de números racionales como de números irracionales, puede llevar a que surjan conflictos semióticos en la construcción de la noción de número irracional.

5.4.1 La transparencia de las nociones de regularidad, patrón y periodicidad

Si se pregunta: ¿qué implica conocer un patrón numérico, una regularidad numérica o una periodicidad numérica? No parecen estar claras las respuestas a dichas preguntas.

A continuación se intenta un acercamiento a estas cuestiones y se trata de relacionarlas con la noción matemática de "periodo".

5.4.1.1 Sobre las definiciones de regularidad, patrón y período

El diccionario de la Real Academia Española (RAE) define:

a) "Regular (del lat. *regulāris*).

1. adj. Ajustado y conforme a regla.

2. adj. Uniforme, sin cambios grandes o bruscos.

b) Patrón, na (del lat. *patrōnus*).9. m.

Modelo que sirve de muestra para sacar otra cosa igual.

c) Período o periodo (del lat. *periŏdus,* y este del gr. περίοδος).

7. m. *Mat.* Cifra o grupo de cifras que se repiten indefinidamente, después del cociente entero, en las divisiones inexactas" (RAE, 2014).

El Diccionario Manual de la Lengua Española Vox (2007) define:

a) Regularidad *s. f.*

Uniformidad en la manera de desarrollarse una cosa o una situación sin que se produzcan grandes cambios o alteraciones.

b) Patrón, -trona *s. m. y f.*

Conjunto de elementos que forman un unidad diferenciada y que se repiten a lo largo del tiempo, por lo que pueden tomarse como modelo o punto de referencia: un patrón de comportamiento; el compositor usa un patrón rítmico que va repitiendo durante la pieza, pero cambiando la melodía.

El diccionario de matemáticas nos dice:

a) Patrón
Característica observada en un elemento que puede ser replicada de manera similar o idéntica en otros elementos.
b) Regularidad
Designación de la propiedad de un elemento de un conjunto provisto de una operación de enlace, de ser regular.
c) Período

La repetición de determinadas magnitudes en una sucesión de valores numéricos.

Así, es posible relacionar cuestiones de regularidad, periodicidad, etc. En los siguientes diagramas representamos algunas relaciones que es preciso indagar y clarificar epistemológicamente antes de la elaboración de propuestas concretas de enseñanza (figs. 64, 65 y 66).

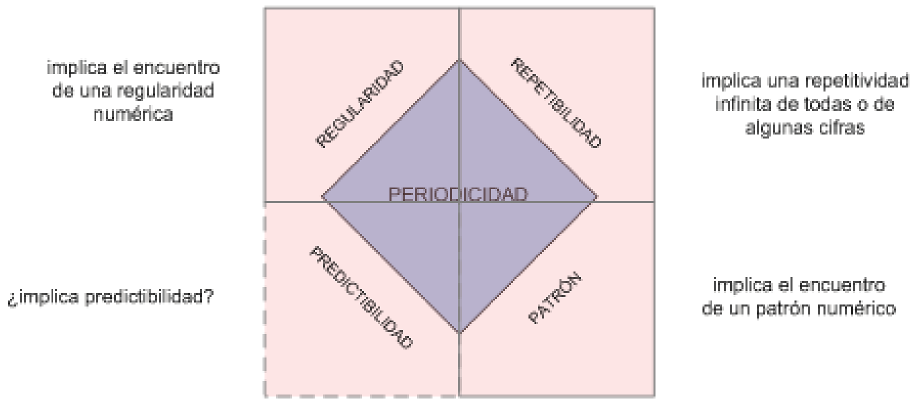


Fig. 64. Posibles implicaciones y cuestionamientos entre las nociones de periodicidad y las de patrón, regularidad y predictibilidad.

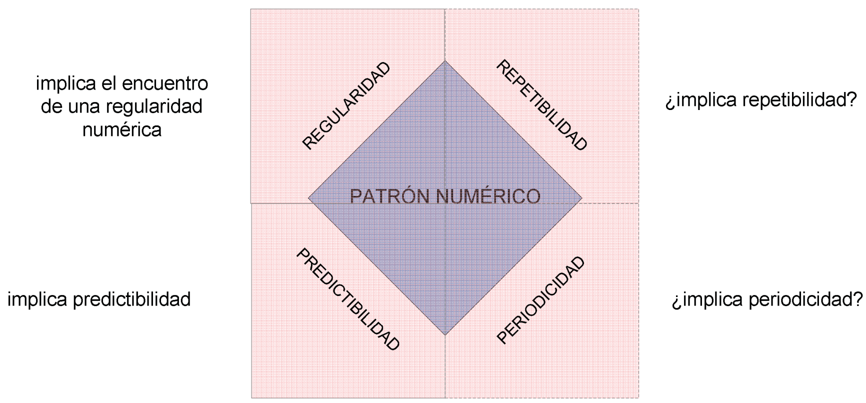


Fig. 65. Posibles implicaciones entre las nociones de patrón numérico y las de regularidad, repetibilidad, periodicidad y predictibilidad.

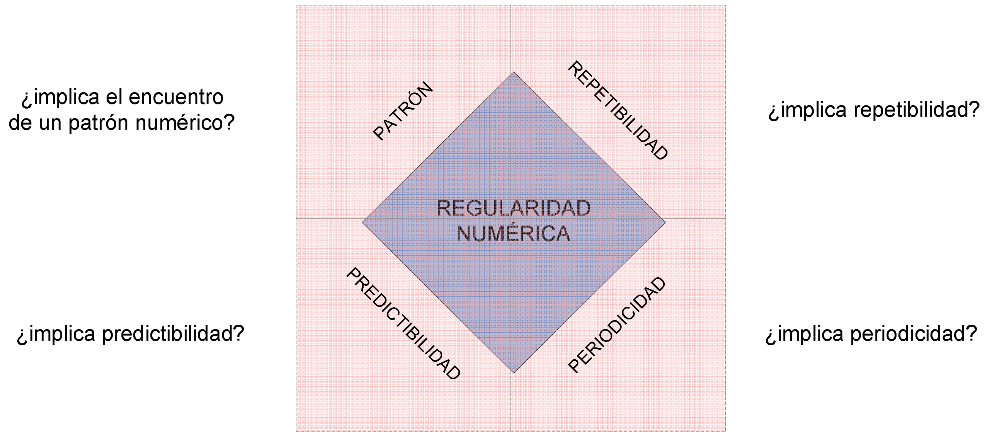


Fig.66. Posibles implicaciones entre las nociones de regularidad numérica y las de periodicidad, patrón y predictibilidad.

No parece sencillo el análisis de las implicaciones que sugieren estas nociones, a lo largo de los próximos apartados trataremos de dar algunos indicios a estas cuestiones y otras que pueden surgir.

5.4.1.2 Sobre la "predicción" o "conjetura" en la longitud del período de los números reales

Se conoce que uno de las fortalezas del trabajo matemático es la de "predecir" lo que va a ocurrir con algunos objetos matemáticos.

La predicción ocupa entonces un lugar destacado en la tarea del matemático.

En el caso de los números racionales periódicos ¿qué se puede predecir en relación a la longitud de su período? No mucho, para un número racional de la forma m/p siendo p un número primo la longitud del período como máximo va a ser p–1 o algún factor de p–1.

Esto último parece importante a la hora de predecir que longitud va a tener el período en números como los estudiados por Marsaglia (2010) quien indaga sobrela pseudoaleatoriedad de sus cifras decimales:

$$\frac{3624360069}{7000000001} \text{ y } \frac{123456789012}{1000000000061}$$

Estos números racionales "tienen una parte periódica en base 10 con una longitud 1.750.000.000 y 1.000.000.000.060, respectivamente" (Aragón Artacho, Bailey, Borwein y Borwein, 2013,303)

Pero, ¿se puede encontrar y reconocer todos los dígitos del período de estos números? No es una tarea fácil. Ciertamente se necesita la ayuda de las representaciones que suministran los artefactos informáticos y aún así es una tarea compleja.

Ambos números se han estudiado, hace poco tiempo, para "visualizar" la aleatoriedad o la pseudoaleatoriedad en el desarrollo de sus cifras tanto en base 10 como en otras bases y compararla con otros números de tipo irracional como el número π.

Se trata de visualizar "caminos pseudoaleatorios" (Aragón Artacho, Bailey, Borwein y Borwein, 2013) y analizar patrones y regularidades en ellos[5].

Para el caso del número π los investigadores visualizan los caminos pseudoaleatorios para los primeros 10 billones de dígitos en base 4.[6]

Algunas preguntas que estas investigaciones intentan dar respuestas: ¿qué tan aleatorio es el desarrollo decimal de los números irracionales?, ¿pueden ser pseudo-aleatorias las cifras decimales periódicas de un número racional?

---

[5]El autor agradece la gentileza del Dr. Francisco Aragón Artacho (University of Luxembourg) por acercarle una versión compilada del programa para poder experimentar la "visualización" de los caminos pseudoaleatorios que emergen de los dígitos en base 10 (y en otras bases) en los números reales.

[6]Para observar los caminos pseudoaleatorios del número π el lector puede ingresar en: http://gigapan.org/gigapans/99214/

Como se ha señalado anteriormente la visualización de las cifras pseudoaleatorias ocupa un lugar destacado en la investigación matemática actual. Se puede entonces, y de acuerdo a lo tratado hasta aquí, observar un punto de encuentro entre dos "mundos", lo racional y lo irracional, ambos expresados por sus dígitos decimales (o en otras bases), siendo la noción de pseudoaleatoriedad ese punto de encuentro (fig.67).

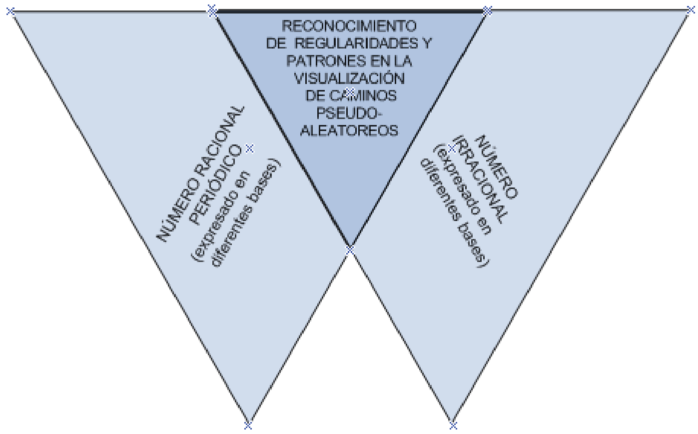


Fig. 67. Posible punto de encuentro entre la noción de pseudoaleatoriedad y las nociones de número racional e irracional expresado tanto en desarrollo decimal como en otras bases.

En el caso de los números irracionales al parecer no es posible "predecir" la cifra decimal que continúa a otra, sin embargo, se han presentado algunos números irracionales como los "cebra" o los "esquizofrénicos" que presentan regularidades y patrones en sus cifras decimales y que son fuente de investigación para la matemática contemporánea.

No se debe olvidar también los números irracionales construidos bajo una "ley de formación" como el de Champernowne o la constante desarrollada por los matemáticos Arthur H. Copeland (1898-1970) y Paul Erdös (1913-1996) en 1946, se trata del número: 0,12357111317192329313741 43... (Copeland y Erdös, 1946, 857), la cual se obtiene de la concatenación de números primos. En estos números irracionales es posible predecir cuál es el dígito que continua a uno determinado, si bien no son periódicos en sus cifras decimales.

Para los números irracionales cuyo desarrollo se da en FC es posible predecir, para algunos casos, la longitud de su período, especialmente cuando los irracionales son de tipo cuadrático (Balková & Hrusková, 2013).

Por ejemplo "la fracción continua para $\sqrt{N}$ tiene período de longitud 1 si y sólo si $N = n^2 + 1$, se sostiene luego $\sqrt{N} = [n, \overline{2n}]$" con n ∈ N\{0} (Balková & Hrusková, 2013, 5).

5.5 LA EXPERIMENTACIÓN

De acuerdo a lo señalado en el apartado anterior se considera de importancia el estudio del reconocimiento de patrones y regularidades en la búsqueda de la periodicidad y de aperiodicidad numérica en estudiantes de segundo año del Profesorado de Matemática y en alumnos de tercer año de secundaria (15-16 años). Este estudio se lleva adelante en Mendoza, Argentina.

Para ello se realiza un cuestionario en donde se expresa dos casos que ya se han estudiado en el apartado 4.1.10.2 del capítulo cuatro:

- El número $f(50) = \sqrt{\frac{9}{121} \cdot 100^{50} + \frac{(112-44\cdot 50)}{121}}$ en expansión decimal

  estudiado en el ítem 3.1.(tabla 1).

- El número 1/998 expresado en desarrollo decimal (fig. 6).

En ambos casos no se muestra la fracción ni la raíz cuadrada que daban origen a la expansión decimal de los números.

Esto último trae aparejado una consecuencia importante:

- No es posible reconocer si un número es racional o irracional solo por sus cifras decimales, debemos conocer su estructura de origen.

Por lo que las respuestas van a estar condicionadas por cuestiones de contrato didáctico (Brousseau, 2007) o de "dimensión normativa" (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2008).

Aun así, si se intenta que los alumnos “reconozcan” y “distingan” la “periodicidad” de la “aperiodicidad” numérica en las cifras decimales de un número real, como lo puede intentar implementar un profesor de enseñanza secundaria. Aparecen así dificultades que se analizan a continuación.

5.5.1 LA PUESTA EN ESCENA DEL CUESTIONARIO

Para el primer número, $f(50)$[7], los resultados indican que la mayoría de los estudiantes para profesor creen reconocer la no periodicidad “infinita” en la cifras decimales de los números, en sus conclusiones apelan a la no posibilidad de expresión en fracción de números enteros y al hecho de que reconocen que “es periódico por partes”.

Inclusive algunos estudiantes apelan al número π o e para explicar su reconocimiento a favor de la irracionalidad. Dos alumnos responden correctamente que no pueden determinarlo (tabla 25).

[7] Se divide por $1 \cdot 10^{49}$ para que la coma decimal aparezca luego del primer dos y de esta manera le resulte “familiar” al estudiante una expresión con una parte entera con un dígito.

<table>
<tr><td colspan="8">2,727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272695636363636363636
3636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636345287272727272727272727272727272
7272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272725144232727272727272727272727272727272727272
7272727272727272727272727272727272727272727272727269640955636363636363636363636363636363636363636363636363636
3636363636363636363636363636363636363635862418468072727272727272727272727272727272727272727272727272727272727
2727272727272727272727271855153588991999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999
99999998410251399362559999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999970033238
8779842559999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999942064261830769561599999
999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999998857507243302775754752…</td></tr>
<tr><td colspan="2">Irracional</td><td colspan="2">Racional</td><td>No puede determinarlo</td><td colspan="3">¿Existirá un número con esas características?</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">16</td><td colspan="2" rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td><td>Si</td><td>No</td><td>No sé</td></tr>
<tr><td>17</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cómo llegaste a esa conclusión?</td><td colspan="2">¿Cómo llegaste a esa conclusión?</td><td rowspan="7"></td><td rowspan="2"></td><td>No, porque su parte decimal no sigue ninguna “lógica”</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Porque no podemos expresarlo como fracción de enteros</td><td>6</td><td>Utilizando los 20 primeros dígitos en una calculadora, el resultado es una fracción(30/11)</td><td>1</td><td>No, porque no sé si la cantidad de números decimales es finita o no</td></tr>
<tr><td>Porque es periódico por partes</td><td>4</td><td>Porque es periódico</td><td>1</td><td colspan="3" rowspan="5">Estudiantes de 2º año del profesorado en Matemáticas</td></tr>
<tr><td>Porque no es periódico</td><td>2</td><td colspan="2" rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>Porque tiene infinitas cifras decimales</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Por su semejanza con números como π y e</td><td>1</td></tr>
<tr><td>NC</td><td>1</td></tr>
</table>

Tabla 25. Estudio del reconocimiento de la irracionalidad de un número irracional “cebra” expresado por cifras decimales en estudiantes de segundo año del Profesorado en Matemática.

En una segunda hoja que se les adjunta a los mismos estudiantes, se muestra las cifras decimales infinitas del número racional$\frac{1}{998}$(tabla 2) cuyo anteperíodo consta de una sola cifra y cuyo período consta de 498 cifras decimales.

Esta vez la mayoría de los estudiantes, catorce, piensan que se trata de un número de tipo irracional.

Un alumno responde correctamente que no puede determinarlo (tabla 26).

<table>
<tr><td colspan="8">0,0010020040080160320641282565130260521042084168336673346693386773547094188376753507014028056112224448897795591182364729458917835671342685370741482965931863727454909819639278557114228456913827655310621242484969939879759519038076152304609218436873747494989979959919839679358717434869739478957915831663326653306613226452905811623246492985971943887775551102204408817635270541082164328657314629258517034068136272545090180360721442885771543086172344689378757515030060120240480961923847695390781563126252505010020040080160320641282565130260521042084168336673346693386773547094188376753507014028056112224448897795591182364729458917835671342685370741482965931863727454909819639278557114228456913827655310621242484969939879759519038076152304609218436873747494989979959919839679358717434869739478957915831663326653306613226452905811623246492985971943887775551102204408817635270541082164328657314629258517034068136272545090180360721442885771543086172344689378757515030060120240480961923847695390781563126252505050100…</td></tr>
<tr><td colspan="2">Irracional</td><td colspan="2">Racional</td><td>No puede determinarlo</td><td colspan="3">¿Existirá un número con esas características?</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">14</td><td colspan="2" rowspan="2">5</td><td rowspan="2">1</td><td>Si</td><td>No</td><td>No sé</td></tr>
<tr><td>19</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cómo llegaste a esa conclusión?</td><td colspan="2">¿Cómo llegaste a esa conclusión?</td><td rowspan="6"></td><td></td><td>No, porque no sé si la cantidad de números decimales es finita o no</td><td></td></tr>
<tr><td>Porque no podemos expresarlo como fracción de enteros</td><td>3</td><td>Porque puede expresarse como fracción</td><td>2</td><td colspan="3" rowspan="5">Estudiantes de 2º año del profesorado en Matemáticas</td></tr>
<tr><td>Porque no es periódico</td><td>5</td><td>Porque es periódico</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Porque tiene infinitas cifras decimales</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Por su semejanza con números como π y e</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>NC</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 26. Estudio del reconocimiento de la racionalidad o irracionalidad en el número 1/998 expresado por cifras decimales en estudiantes de segundo año del Profesorado en Matemática (en rojo se muestra el período del número).

El estudio continua con alumnos de tercer año de educación secundaria (15-16 años) de tal manera de indagar sobre el reconocimiento de la racionalidad o irracionalidad de tres números, a saber, el número 1/87,y los números anteriormente estudiados con estudiantes de profesorado.

Los resultados son los siguientes: para el número 1/87cuatro alumnos piensan que se trata de un número irracional y veintisiete, piensan que se trata de un número racional. La mayoría de los alumnos apelan a las nociones de "periodicidad" y de "repetitividad" en las cifras decimales para explicar sus decisiones (tabla 27).

<table>
<tr><td colspan="8">0,01030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927
83505154639175257731958762886597938144329896907216494845360824742268041237113402061855670103092783505154 6
391752577319587628865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577
319587628865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628
865979381443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381
443298969072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381443298969
072164948453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948
453608247422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948453608247
422680412371134020618556701030927835051546391752577319587628865979381443298969072164948453608247422680412
371134020618556701030927835051546391752577319587628865979…</td></tr>
<tr><td colspan="2">Irracional</td><td colspan="2">Racional</td><td>No puede determinarlo</td><td colspan="3">¿Existirá un número con esas características?</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">4</td><td colspan="2" rowspan="2">27</td><td rowspan="2">0</td><td>Si</td><td>No</td><td>No sé</td></tr>
<tr><td>30</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cómo llegaste a esa conclusión?</td><td colspan="2">¿Cómo llegaste a esa conclusión?</td><td colspan="4" rowspan="5">Alumnos de tercer año de Secundaria (15-16 años)</td></tr>
<tr><td>Porque no tienen fin y no podemos expresarlo como fracción</td><td>2</td><td>Porque es periódico</td><td>13</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Porque no es periódico</td><td rowspan="3">2</td><td>Por repetitividad de cifras</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Porque es periódico y se puede expresarse como fracción</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Porque es racional</td><td>1</td></tr>
</table>

Tabla 27. Estudio del reconocimiento de la racionalidad o irracionalidad en el número1/87 expresado por cifras decimales en estudiantes de tercer año de secundaria.

Para el caso del número irracional cebra$\sqrt{f(50)}$ estudiado anteriormente todos los alumnos de secundaria participantes en el estudio (31) responden a favor de la irracionalidad del número; así, ninguno plantea la imposibilidad de determinación de la naturaleza del número a partir de un número finito de cifras decimales (tabla 28).

<table>
<tr><td colspan="7">2,72727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272769563636
36363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636345287272727272
72727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272725144232727272727272
72727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727269640955636363636363636363636
36363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363636358624184680727272727272727272727
27272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727271855153588991999999999999999999999999999999
99999999999999999999999999999999999999999999999999999841025139936255999999999999999999999999999999999999999
99999999999999999999999999999999999999999999999997003323887798425599999999999999999999999999999999999999999
99999999999999999999999999999999999999999942064261830769561599999999999999999999999999999999999999999999999
9999999999999999999999999999999998857507243302775754752…</td></tr>
<tr><td colspan="2">Irracional</td><td>Racional</td><td>No puede determinarlo</td><td colspan="3">¿Existirá un número con esas características?</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">31</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">0</td><td>Si</td><td>No</td><td>No sé</td></tr>
<tr><td>25</td><td>5</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cómo llegaste a esa conclusión?</td><td colspan="2" rowspan="8"></td><td rowspan="5"></td><td>Porque no se puede expresar como fracción</td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td>Porque no es periódico</td><td>14</td><td>Porque mezcla período con no período</td></tr>
<tr><td>Porque no existen cifras periódicas</td><td>5</td><td>Al “mezclarse” demuestra que no es periódico</td></tr>
<tr><td>Porque no se repite</td><td>5</td><td>Porque hay parte periódica y no periódica</td></tr>
<tr><td>No podemos expresarlo como fraccióny no tiene fin</td><td>2</td><td>No existe ningún número real (no argumenta)</td></tr>
<tr><td>Porque el número no termina (es infinito)</td><td>2</td><td colspan="3" rowspan="3">Alumnos de tercer año de Secundaria (15-16 años)</td></tr>
<tr><td>No posee “período estable” y no parece que vaya a terminar</td><td>2</td></tr>
<tr><td>No podemos expresarlo como fraccióny no tiene período</td><td>1</td></tr>
</table>

Tabla 28. Estudio del reconocimiento de la irracionalidad de un número irracional “cebra” expresado por cifras decimales en estudiantes de tercer año de Educación Secundaria.

El caso del número 1/998 es el que plantea mayores dificultades al grupo de alumnos. La mayoría (25 de 31) no logra encontrar una regularidad ni pueden reconocer la existencia de un patrón. Ningún alumno plantea la posibilidad de no poder determinar de qué número se trata (tabla 29).

<table>
<tr><td colspan="8">0,001002004008016032064128256513026052104208416833667334669338677354709418837675350701402805611222444889779559118236472945891783567134268537074148296593186372745490981963927855711422845691382765531062124248496993987975951903807615230460921843687374749498997995991983967935871743486973947895791583166332665330661322645290581162324649298597194388777555110220440881763527054108216432865731462925851703406813627254509018036072144288577154308617234468937875751503006012024048096192384769539078156312625250501002004008016032064128256513026052104208416833667334669338677354709418837675350701402805611222444889779559118236472945891783567134268537074148296593186372745490981963927855711422845691382765531062124248496993987975951903807615230460921843687374749498997995991983967935871743486973947895791583166332665330661322645290581162324649298597194388777555110220440881763527054108216432865731462925851703406813627254509018036072144288577154308617234468937875751503006012024048096192384769539078156312625250501 00…</td></tr>
<tr><td colspan="2">Irracional</td><td colspan="2">Racional</td><td>No puede determinarlo</td><td colspan="3">¿Existirá un número con esas características?</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">25</td><td colspan="2" rowspan="2">6</td><td rowspan="2">0</td><td>Si</td><td>No</td><td>NC</td></tr>
<tr><td>26</td><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cómo llegaste a esa conclusión?</td><td colspan="2">¿Cómo llegaste a esa conclusión?</td><td rowspan="7"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Porque no se puede expresar como fracción</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Porque no es periódico</td><td>12</td><td rowspan="2">Porque una parte en las cifras decimales es periódica</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>Porque no podemos expresarlo como fracción de enteros y no posee período</td><td>3</td><td colspan="3" rowspan="5">Alumnos de tercer año de Secundaria (15-16 años)</td></tr>
<tr><td>Porque tiene infinitas cifras decimales</td><td>2</td><td>Porque tiene un “periodo estable”</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Porque no se repite</td><td>4</td><td>Porque es periódico</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Porque no se puede expresar como fracción continua</td><td>2</td><td>Porque es periódico y se puede expresar como fracción</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Porque todos son periódicos (Sic)</td><td>2</td><td>Porque no se repite, es infinito (Sic)</td><td>1</td></tr>
</table>

Tabla 29. Estudio del reconocimiento de la periodicidad en el número 1/998 expresado por cifras decimales, en estudiantes de tercer año de secundaria.

5.5.1.1 Restricciones epistemológicas, cognitivas y de enseñanza

De acuerdo a lo tratado hasta aquí parecen emerger tres aspectos importantes a la hora de reconocer un patrón, una regularidad en la búsqueda de la periodicidad o a la aperiodicidad numérica.

Una de estas miradas es aquella concerniente a la percepción visual y su diferencia de la visualización.

Para Arcavi (2003) la visualización:

> "Es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, la interpretación, el uso y la reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el fin de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas" (p.217).

Siendo, para este didacta, tres las dificultades asociadas a la visualización,

> "Propongo clasificar a las dificultades en torno a la visualización en tres categorías principales: 'culturales', cognitivas y sociológicas" (Arcavi, 2003,235).

Se adopta entonces, para el presente estudio, la clasificación propuesta por Arcavi para la clasificación de dificultades en torno a la visualización y se adapta para el reconocimiento de regularidades y patrones en la búsqueda de periodicidad y aperiodicidad numérica.

Si se analiza las dificultades puede implicar que, en algunos casos, estas provengan de:

- Cuestiones epistemológicas, relativas al grado de conocimiento, por parte del alumno, de las nociones matemáticas asociadas.
- Cuestiones cognitivas como la "percepción visual" y el "proceso de visualización" al momento del reconocimiento de patrones y regularidades por parte del estudiante.
- Cuestiones sociológicas relativas a las expectativas mutuas entre profesores y alumnos en relación con el conocimiento (contrato didáctico o dimensión normativa) (fig.68).

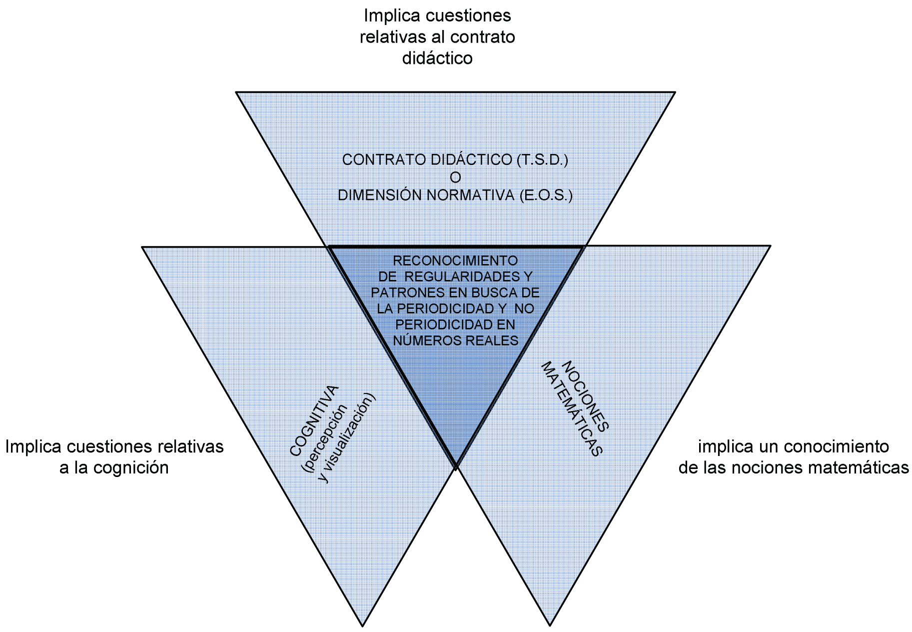


Fig.68. Cuestiones relativas al reconocimiento de patrones y regularidades numéricas en la búsqueda de una periodicidad.

Realizando un análisis más fino, desde el EOS, se manifiesta

> "Los procesos de visualización, y sus resultados, los 'objetos visuales', 'imágenes' o 'visualizaciones', intervienen asociados a determinadas tareas en las cuales se realizan ciertas prácticas apoyadas en otros objetos y procesos.[…] Los 'objetos visuales', y los procesos de visualización de donde provienen, forman *configuraciones* o sistemas semióticos constituidos por los objetos intervinientes y emergentes en un sistema de prácticas, junto con los procesos de significación que se establecen entre los mismos (esto es, incluyendo la trama de funciones semióticas que relaciona los objetos constituyentes de la configuración)" (Godino et al.,2012, 168).

Así, los objetos primarios involucrados son:

Lenguaje. Expresión decimal de números racionales e irracionales.

Situaciones. Identificación y diferenciación de un número racional y de un irracional por reconocimiento de cifras en la expansión decimal de un número.

Definiciones. Número racional, irracional; número periódico y no periódico.

Proposiciones. Proposiciones relativas a la periodicidad y no periodicidad de números reales.

Procedimientos. Reconocimiento de la periodicidad y no periodicidad de números reales. Identificación de regularidades, patrones y repetitividad finita e infinita de cifras decimales.

Argumentos. Justificación de la racionalidad e irracionalidad de números; refutación de la periodicidad, en la expresión decimal, de un número irracional; justificación de la no periodicidad, en su expansión decimal, de un número irracional.

5.5.1.2 A modo de síntesis del apartado y cuestiones abiertas

La noción matemática de período de un número ocupa un lugar importante en las producciones matemáticas contemporáneas y también en las no contemporáneas.

El estudio de las nociones matemáticas de "período" y de "cuasiperíodo" continúa aún hoy.

Desde la educación matemática la búsqueda de la "visualización" de un número racional periódico a través del uso de "micromundos basados en computadoras" como la "calculadora de colores"[8](Sinclair, Liljedahl & Zazkis, 2006) puede contribuir al logro de una favorable construcción de la noción en un contexto escolar.

Según lo estudiado se cree que:

---

[8]Para observar la calculadora de colores es posible acceder: http://tapor1.mcmaster.ca/~sgs/cgi-bin/Maths/maths.cgi?do=activity&activity=calc

- Identificar la periodicidad y aperiodicidad numérica, en el desarrollo decimal de un número, implica desarrollar habilidades de reconocimiento de patrones y regularidades, nociones que son de naturaleza cognitiva, y a su vez implica la búsqueda de repetitividad de elementos en el período. Aquí lo matemático y lo cognitivo se encuentran en estrecha relación.
- En algunos casos la tarea de "predecir" el comportamiento del objeto es sencilla, pero en otros se trata de una tarea, al menos, compleja.
- El reconocimiento de patrones numéricos implica el reconocimiento de regularidades y que también implica predecir la actuación del objeto matemático. A su vez pensamos que no siempre implica la repetición ni la periodicidad de elementos. No siempre resulta fácil el reconocimiento de patrones numéricos.
- El reconocimiento de una regularidad numérica no implica, necesariamente, la repetitividad, el hallazgo de un patrón numérico, la periodicidad y la predicción de elementos. No siempre es sencillo el reconocimiento de regularidades numéricas.
- Se trata de una tarea compleja reconocer si un número es racional o irracional, solamente por el estudio de sus cifras decimales, si se desconoce su estructura de origen, como se manifiesta en el estudio realizado.

En relación a la exposición realizada, la noción de contrato didáctico y al reconocimiento de patrones, se produjo una "dificultad protomatemática" ya que varios estudiantes no lograron reconocer la periodicidad en las cifras decimales de un número.

Pero, ¿los estudiantes fueron expuestos, en su trayectoria como alumnos, a situaciones de este tipo?, informalmente los alumnos señalaban que no. Entonces podría pensarse que el hacer explícita a la noción de patrón puede arrojar luz en la superación de las dificultades de los alumnos, pero como nos señala Chevallard (1991):

> "Pero hay que destacar especialmente que, en relación con el análisis didáctico, ese proceso de explicitación reduce el 'sentido' didáctico de los objetos que transforma y que, por tanto, si puede arrojar luz sobre su

significación, es principalmente mostrando que esta no se reduce, en el sistema didáctico, a lo que puede condensarse en el discurso didáctico o matemático" (p. 65-66).

Entonces de acuerdo a esto último parece afectar la dimensión normativa o de contrato didáctico al estudio realizado.

Es por esto último que se piensa que lo matemático, lo didáctico y lo cognitivo se encuentran en estrecha relación.

Por tanto no es posible el reconocimiento de regularidades y patrones en escenarios escolares, en la búsqueda de periodicidad y de aperiodicidad numérica, solamente por el análisis de sus cifras decimales desconociendo su estructura de origen.

Se trata de una tarea compleja que necesita de objetos cognitivos, como la percepción visual, que ayuden al proceso de visualización del objeto matemático.

Los estudios realizados sobre la "percepción" (Leeuwenberg, 2003) y los "patrones visuales" (Van Der Helm & Leeuwenberg, 1991) dan cuenta de lo complejo que se manifiesta el proceso de percepción visual.

Lograr la "visualización" del objeto matemático número irracional no parece una tarea sencilla dada su complejidad, en otros trabajos se ha señalado esto último (Reina, Wilhelmi y Lasa, 2012; Reina, Wilhelmi, Carranza y Lasa, 2014; Reina, Wilhelmi, Lasa y Carranza, 2013).

Aun así, puede considerase de importancia avanzar, en Educación Secundaria, en el estudio de estos números y elegir las representaciones mejor adaptadas al proceso de construcción de los significados personales de los estudiantes.

Al parecer se trata un proceso cognitivo necesariamente "lento" y que debe implicar un aumento en los tiempos didácticos empleados en el estudio de dichos números.

"Lo periódico" (Buendía Abalos, 2010,17) y lo "aperiódico", entonces, deben ser parte de ese proceso, al fin al cabo la periodicidad y la aperiodicidad numérica, la racionalidad y la irracionalidad son dos caras de una misma moneda.

5.6 LA FRACCIÓN CONTINUA, ALGUNOS CONTEXTOS DE USO INTRAMATEMÁTICOS

Si bien no se pretende una exposición exhaustiva de los tipos de problemas que resuelve la fracción continua (FC), a continuación se muestran algunos de ellos en diferentes contextos de uso.

5.6.1 LA FRACCIÓN CONTINUA Y LOS PROBLEMAS DE TIPO ARITMÉTICOS

5.6.1.1 Problemas de aproximación de números reales

Se puede emplear, como ya se ha señalado en el capítulo 7, la FC para la aproximación de números reales, de hecho este ha sido uno de las principales usos del algoritmo durante siglos (Miralles y Deulofeu, 2006).

Para ejemplificar este uso, se aproxima por diferentes procedimientos la raíz cuadrada de 20 ($\sqrt{20}$).

Método 1: Bombelli y Cataldi (s. XV-XVI)

Una forma de aproximación en FC se puede realizar a través del método obtenido por Bombelli y Cataldi. Se muestra a continuación un ejemplo del mismo.

$$\sqrt{20} = 4 + x \quad (1)$$

Aplicando propiedades

$$20 = (4 + x)^2$$

Desarrollando el cuadrado de un binomio

$$20 = 16 + 8x + x^2$$

$$4 = 8x + x^2$$

Factorizando se tiene

$$4 = x(8 + x)$$

$$x = \frac{4}{8+x} \quad (2)$$

Reemplazando sucesivamente el valor de (2) en (1) se obtiene:

$$\sqrt{20} = 4 + \cfrac{4}{8 + \cfrac{4}{8 + \cfrac{4}{8 + \ddots}}}$$

Se trata de una FC generalizada.

Para aproximar el número $\sqrt{20}$ se obtienen los sucesivos convergentes de la FC.

$$C_1 = [4] = \frac{4}{1} = 4$$

$$C_2 = [4; 4/8] = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

$$C_3 = [4; 4/8, 4/8] = \frac{76}{17} = 4,\overline{4705882352941176}$$

$$C_4 = [4; 4/8, 4/8, 4/8] = \frac{161}{36} = 4{,}47\overline{2}$$

$$C_5 = [4; 4/8, 4/8, 4/8, 4/8] = \frac{1364}{305} \cong 4{,}472131148$$

$$C_6 = [4; 4/8, 4/8, 4/8, 4/8, 4/8] = \frac{2889}{646} \cong 4{,}472136223$$

De donde se puede deducir que:

$$C_1 < C_3 < C_5 < \cdots < C_{2n-1} < \cdots \sqrt{20} \cdots < C_{2n} < \cdots < C_6 < C_4 < C_2$$

"Los convergentes de los lugares impares forman una sucesión creciente de aproximaciones racionales por defecto del número representado, mientras que los de los lugares pares son una sucesión decreciente de aproximaciones racionales por exceso" (Redondo y Haro, 2005, 58).

Método 2

Es posible emplear otro procedimiento para aproximar los números reales pero en este caso se obtiene una FC regular.

$$\sqrt{20} = 4 + \left(\sqrt{20} - 4\right)$$

$$\sqrt{20} - 4 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{20}-4}} = \frac{1}{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{5}-2}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{8+\left(2\sqrt{5}-4\right)}} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{20} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{8+\frac{1}{2+\frac{1}{8+\ddots}}}}$$

Se obtienen otra vez los mismos convergentes

$$C_1 = [4] = \frac{4}{1} = 4$$

$$C_2 = [4; 2] = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

$$C_3 = [4; 2{,}8] = \frac{76}{17} = 4{,}\overline{4705882352941176}$$

$$C_4 = [4; 2{,}8{,}2] = \frac{161}{36} = 4{,}47\overline{2}$$

$$C_5 = [4; 2{,}8{,}2{,}8] = \frac{1364}{305} \cong 4{,}472131148$$

$$C_6 = [4; 2{,}8{,}2{,}8{,}2] = \frac{2889}{646} \cong 4{,}472136223$$

De donde se deducen nuevamente las mismas desigualdades:

$$C_1 < C_3 < C_5 \cdots < C_{2n-1} < \cdots \sqrt{20} \cdots < C_{2n} < \cdots C_6 < C_4 < C_2$$

Método 3

Es posible aproximar el mismo número por FC generalizada de otra forma.

$$\sqrt{20} = 5 - x \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20 = (5-x)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 20 = 25 - 10x + x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ -5 = -10x + x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5 = 10x - x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5 = x(10-x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{5}{10-x} \Rightarrow$$
$$\sqrt{20} = 5 - \cfrac{5}{10 - \cfrac{5}{10 - \cfrac{5}{10 - \cfrac{5}{10 - \cfrac{5}{10 - \cfrac{5}{10 - \ddots}}}}}}$$
$$\sqrt{20} = \left[5; \overline{5/10 -}\right]$$

Se puede reescribir la fracción anterior como FC semiregular

$$\sqrt{20} = 5 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{10 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{10 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{10 - \ddots}}}}}}$$

$\sqrt{20} = [5; \overline{2{,}10 -}]$[9]

Se trata de una FC periódica mixta.

Si se obtienen algunos convergentes para la primera fracción se obtiene:

$$C_1 = [5] = \frac{5}{1} = 5$$
$$C_2 = [5; 5/10] = \frac{9}{2} = 4{,}5$$
$$C_3 = [4; 5/10{,}5/10] = \frac{85}{19} \cong 4{,}473684210526316$$

[9]Se adopta la notación, para la FC exceso, propuesta por Spinadel (2001).

$$C_4 = [4; 5/10,5/10,5/10] = \frac{161}{36} = 4,47\overline{2}$$

$$C_5 = [4; 5/10,5/10,5/10,5/10] = \frac{1525}{341} \cong 4.472140762463343$$

$$C_6 = [4; 5/10,5/10,5/10,5/10,5/10] = \frac{2889}{646} \cong 4,472136223$$

De donde se obtienen solo aproximaciones por exceso.

$$\sqrt{20} < C_6 < C_5 < C_4 < C_3 < C_2 < C_1$$

Además, si se obtienen algunas aproximaciones para la segunda fracción se obtiene los mismos resultados.

$$C_1 = [5] = \frac{5}{1} = 5$$

$$C_2 = [5; 2 -] = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$C_3 = [5; 2,10 -] = \frac{85}{19} \cong 4,473684210526316$$

$$C_4 = [5; 2,10,2 -] = \frac{161}{36} = 4,47\overline{2}$$

$$C_5 = [5; 2,10,2,10 -] = \frac{1525}{341} \cong 4.472140762463343$$

$$C_6 = [5; 2,10,2,10,2 -] = \frac{2889}{646} \cong 4,472136223$$

De donde se obtienen las mismas aproximaciones por exceso. Por inducción matemática se demuestra que:

$$\sqrt{20} < C_n, \forall\, n \in \mathbf{N}$$

De esta forma, los métodos 1, 2 y 3 para el cálculo de expresiones racionales aproximadas de $\sqrt{20}$ permiten afirmar que es posible obtener más de una representación por FC para un mismo número. Con otras palabras, "la representación de un número por una fracción continua reducida no es única" (Redondo y Haro, 2005, 59).

Si bien este uso de la FC, a saber, la obtención de una aproximación racional de un número irracional, es el principal, no es el único. Así, la FC es también utilizada para la obtención del máximo común divisor (mcd) entre dos números.

5.6.1.2 Problemas de obtención del m.c.d. entre dos números

Como se mencionó en el punto 7.2 uno de los problemas que puede resolver la FC es el de hallar el máximo común divisor entre dos números enteros.

Si se emplea el algoritmo de Euclides para hallar el m.c.d. entre los números p y q , el desarrollo es el siguiente (Olds, 1963, 15-17):

$$p = a_1 q + r_1 0 < r_1 < q \,,$$

$$q = a_2 r_1 + r_2 0 < r_2 < r_1 \,,$$

$$r_1 = a_3 r_2 + r_3 0 < r_3 < r_2 \,,$$

$$\dots\dots\dots\dots.\dots\dots\dots\dots \,,$$

$$r_{n-3} = a_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} 0 < r_{n-1} < r_{n-2}$$

$$r_{n-2} = a_n r_{n-1} + 0 = a_n r_{n-1} 0 = r_n$$

Dividiendo la primera ecuación por q y luego las siguientes por los sucesivos restos se obtiene el desarrollo en FC para el máximo común divisor

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q} 0 < r_1 < q \,,$$

$$\frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1} 0 < r_2 < r_1 \,,$$

$$\frac{r_1}{r_2} = a_3 + \frac{r_3}{r_1} 0 < r_3 < r_2 \,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \,,$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n + \frac{0}{r_{n-1}} = a_n + 0r_n = 0$$

Expresándolo como FC regular

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}}$$

Si se continúa con los sucesivos restos se obtiene

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Así, por ejemplo si se quiere obtener el máximo común divisor entre 2200 y 1974

$$mcd(2200; 1974)$$

Se expresan ambos números como una fracción y luego se halla el desarrollo en FC correspondiente

$$\frac{2200}{1974} = [1; 8,1,2,1,3,3,2]$$

Se toma una aproximación al "penúltimo" cociente parcial de la FC anterior

$$[1; 8,1,2,1,3,3] = \frac{477}{428}$$

Se reemplaza numerador y denominador de la fracción obtenida en

$$2200 \cdot 428 - 1974 \cdot 477 = 2$$

Esta última expresión se basa en el siguiente resultado matemático:

Se desarrolla la FC de los números expresados como fracción

$$\frac{a}{b} = [q_1; q_2, q_3, \dots, q_n, q_{n+1}]$$

Se halla la aproximación al penúltimo cociente parcial

$$[q_1; q_2, q_3, \dots, q_n] = \frac{u}{v}$$

Cuyos valores u y $v$se reemplazan en el siguiente resultado matemático:

$$a \cdot v - b \cdot u = \pm(a, b)$$

El m.c.d. resulta de tomar el valor adecuado del signo del resultado de la operación.

Por ejemplo para el caso de

$$mcd(1830; 750) = 30$$

$$\frac{1830}{750} = [2; 2,3,1,2]$$

Se aproxima al penúltimo cociente parcial y se halla la fracción correspondiente

$$[2; 2,3,1] = \frac{22}{9}$$

De donde se obtiene

$$1830 \cdot 9 - 750 \cdot 22 = -30$$

El m.c.d. resulta, en este caso, un valor positivo, $mcd(1830; 750) = 30$

5.6.1.3 Problemas de demostración de irracionalidad y trascendencia

Maillet[10] (1906) publica en el boletín de la Sociedad matemática Francesa *Sur les nombres transcendants dont le développement en fraction continue est quasi-périodique, et sur les nombres de Liouville*, en dicho trabajo estudia la irracionalidad y la trascendencia de algunas fracciones continuas cuasiperiódicas.

[10]Edmond Théodore Maillet (1865 -1938) matemático francés especialista en teoría de números.

Al respecto Baker[11] (1975) afirma "Maillet usa una extensión del teorema [...] concerniente a la aproximación por irracionales cuadráticos y establece la trascendencia de una clase remarcable de fracciones continuas cuasiperiódicas" (p.3).

En la actualidad Adamczewski y Bugeaud (2005; 2010) estudian criterios de irracionalidad y trascendencia para FC.

A partir de los trabajos de Maillet, Baker y otros, se profundiza en el análisis de FC palindrómicas (Adamczewski y Bugeaud, 2007).

Adamczewski y Allouche (2007) a través del análisis de los "palíndromos" estudian la trascendencia de ciertas FC.

Adamczewski y Jordan (2013) muestran algunas "facetas" de un número irracional particular y dan diferentes demostraciones de su irracionalidad entre las que se cuenta la FC.

> "Demostrar que un número real dado es trascendente es generalmente una tarea extremadamente difícil. Incluso para las constantes clásicas como e y π, las pruebas no son de ninguna manera fáciles, y la mayoría de los matemáticos serían felices con una única prueba de la trascendencia de $e+\pi$ o $\zeta(3)$. Por el contrario, este estudio se centrará en la serie simple
>
> $$k := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2^n}}$$
>
> que puede ser fácilmente probada su trascendencia. La primera prueba se debe a Kempner[12] en 1916 y, en honor a este resultado, nos referimos a k como el número de Kempner. Si la trascendencia de k no es un problema

[11]Alan Baker (1939 -) matemático inglés, especialista en teoría de números, en particular de números trascendentes y ecuaciones diofánticas. Obtuvo la medalla Field 1970.
[12]Aubrey J. Kempner (1880-1973) matemático estadounidense de origen inglés.

real, nuestro objetivo es dar lugar para mirar las muchas caras de k, que nos llevará a dar cinco pruebas diferentes de este hecho. Esto debe ser (al menos para el autor) algún tipo de récord, aunque no pretendemos esta lista de pruebas sea exhaustiva. En particular, no vamos a discutir la prueba original de Kempner. Más allá de la trascendencia de k, las diferentes pruebas que damos todas ofrecen la oportunidad para mencionar algunas ideas interesantes y los métodos que se utilizan para demostrar resultados más profundos" (pp.1-2).

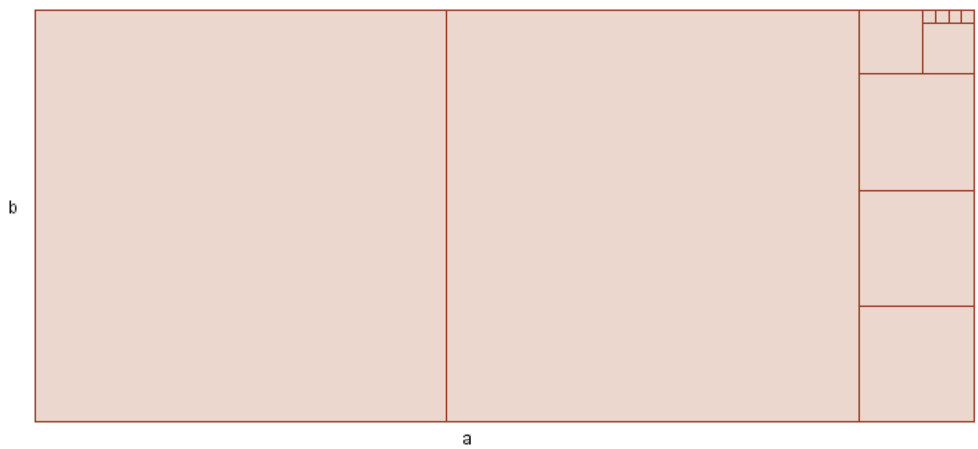
"Nuestro número k binario favorito tiene una previsible expansión en fracción continua que goza de propiedades notables incluyendo tanto patrones repetitivos como simétricos" (p.17).

5.6.2 PROBLEMAS DE TIPO GEOMÉTRICOS

5.6.2.1 EL ALGORITMO DE FC EN CONTEXTOS GEOMÉTRICOS

Desde el punto de vista geométrico el algoritmo de FC puede representarse de la siguiente forma

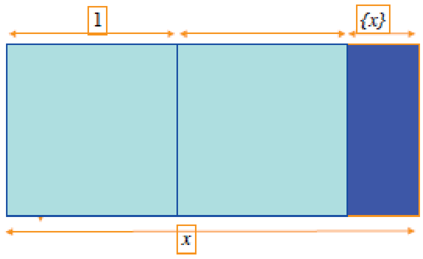
"Tomando un rectángulo de dimensiones a y b, inscribamos en él cuadrados de área mayor posible (como muestra la figura)



Siendo a y b números enteros [...] se deduce que este proceso corresponde al algoritmo de Euclides aplicado a los números a y b con la particularidad de que el número de cuadrados de igual dimensión coincide con los cocientes incompletos respectivos del desarrollo de $\frac{a}{b}$ en fracción continua” (Voroviov, 1974, 83).

Waldschmidt (2011) explica el proceso geométrico en la forma siguiente:

“Número de cuadrados $a_0 = \lfloor x \rfloor$ con $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$



Recordamos que $x_1 = \frac{1}{\{x\}}$ .Los lados del rectángulo pequeño tienen proporciones x_1 .El proceso se repite: descomponemos el pequeño rectángulo en $\lfloor x_1 \rfloor$ cuadrados y un tercer rectángulo aún más pequeño, por lo que los lados tienen proporción $x_2 = \frac{1}{\{x_1\}}$ .Esto obtiene la expansión en fracción continua de x.La sucesión$a_0, a_1, \ldots$ está dada por el número de cuadrados en cada etapa” (pp.42-43).

Esta descripción geométrica no es única. Existen numerosos ejemplos que muestran cómo diversas situaciones geométricas pueden ser modelizadas mediante FC.

5.6.2.2 EL PROBLEMA DEL BILLAR Y LA DESAPARICIÓN DE CUADRADOS

Así, Montesinos (1996) propone la siguiente situación:

“Tomamos una mesa rectangular de billar de altura 1 y de anchura

$b_1 = x,$ como la de la figura siguiente en que $x = 17/13$.

Se lanza una bola desde l esquina inferior izquierda con ángulo de 45°. Cada vez que la bola da en una banda, la mesa de billar pierde el cuadrado cuya diagonal ha sido recorrida por la bola. Vamos anotando el número de cuadrados de un determinado tamaño que van desapareciendo. Si el primer cuadrado quitado no es de tamaño 1 x 1 es que x <1, y añadiremos un cero al comienzo de nuestra lista de números. Se obtiene así el desarrollo en fracción continua de x, $[a_1; a_2, a_3, \ldots]$" (p.24).

5.6.2.3 El problema del crecimiento pseudonomónico

Si en vez de eliminar los cuadrados se parte de un cuadrado y se van agregando cuadrados el procedimiento es el siguiente:

"Dibuja un cuadrado de lado 1, y añádele a su derecha otro igual. A este rectángulo lo llamaremos R_1. Ahora añade a R_1un cuadrado en la parte inferior de lado igual a su base. A esta transformación la llamaremos "+1a". Al nuevo rectángulo lo llamamos R_2y añadimos a su derecha otro cuadrado de lado igual a su altura. Esta será la transformación "+1d". Al nuevo rectángulo lo llamamos R_3, y aplicamos de forma sucesiva las transformaciones "+1a" y "+1d" indefinidamente:

$$R_1 \xrightarrow{\text{"+1}a\text{"}} R_2 \xrightarrow{\text{"+1}d\text{"}} R_3 \xrightarrow{\text{"+1}a\text{"}} R_4 \xrightarrow{\text{"+1}d\text{"}} R_5 \rightarrow \cdots$$

Construye la sucesión de rectángulos. ¿Qué observas en ellos? ¿Y en sus dimensiones? Las razones r_1, r_2, r_3,... entre las dimensiones de los rectángulos son precisamente los convergentes de ϕ. Además, por la forma en que hemos construido los rectángulos, las fracciones obtenidas son los cocientes de términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci "(figura 69).

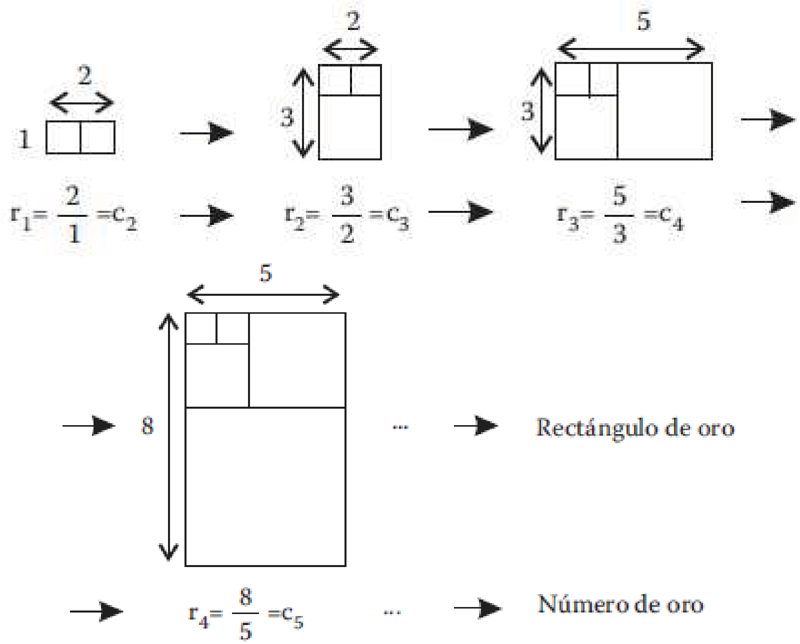


Fig. 69. Crecimiento pseudonomónico (Redondo y Haro, 2005, 61-62).

Se trata de un "crecimiento" de tipo "pseudognomónico"[13] de los convergentes de ϕ.

"Hemos generalizado describiendo un crecimiento de pseudognomones

---

[13]"Un gnomón es toda figura cuya yuxtaposición a una figura dada produce una figura resultante semejante a la figura inicial" (Redondo y Haro, 2005,63).

rectangulares formados por la unión de p cuadrados. La sucesión de rectángulos tiende al rectángulo R_p"[14](Redondo y Haro, 2005,63).

En esta construcción, los lados de los sucesivos rectángulos convergen al número ϕ (número de oro). Este número es un caso particular de número mórfico.

5.6.2.4 Números mórficos: de oro y de plástico

El número irracional de oro se puede relacionar con el número de plástico, también de interés para la geometría, el arte y la arquitectura: el número plástico ψ de Dom Hans van der Laan (1904-1991).

> "En 1960 D.H. van der Laan, arquitecto y miembro de la orden Benedictina, introduce lo que él llama "número plástico", como una proporción ideal para una escala geométrica de los objetos espaciales. Es la solución real de la ecuación cúbica$x^3 - x - 1 = 0$. Esta ecuación puede ser vista como ejemplo de una familia de trinomios $x^n - x - 1 = 0, n = 2\,, 3, \ldots$
>
> Considerando las raíces reales positivas de las ecuaciones definimos estas raíces como miembros de una " Familia de Números Plásticos " (FNP) que comprende el bien conocido número de oro ϕ = 1, 618..., el más prominente miembro de la familia de los números metálicos y al número de van der Laan ψ= 1,324..." (Spinadel y Redondo, 2009, 163).

Se puede realizar una nueva construcción que involucra a dicho número ahora en el espacio tridimensional.

> "Pero la *divina proporción*, puede extenderse al espacio de tres dimensiones, también de forma natural, en *número plástico* ψ[...], y este, junto con el *número de oro*, pertenece a la familia de los *números*

[14]"Los rectángulos cuyas dimensiones están en las proporciones definidas por el número φ_p forman la clase de los rectángulos métálicos R_p. Utilizando el lenguaje de Aristóteles, un rectángulo es metálico de clase R_p. si y solo si su gnomón es la unión de p cuadrados" (Redondo y Haro, 2005,61).

mórficos, que aparece al considerar la posibilidad de seguir extendiendo aún más las propiedades que comparten" (Buitrago, 2008, 55).

Spinadel y Buitrago (2009) muestra la construcción tridimensional de una caja "ψ *-box*" cuyo límite es precisamente una "caja plástica" cuyas razones son el número plástico ψ (figura 70).

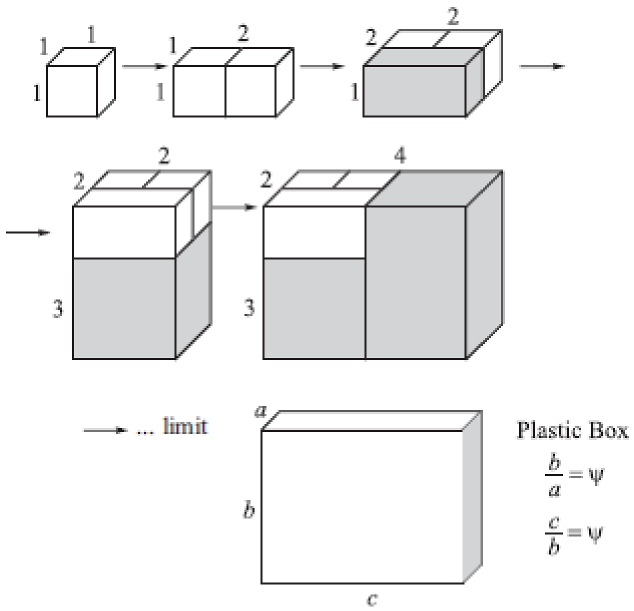


Fig.70. "Caja plástica" (Spinadel y Buitrago, 2009, 165).

De la misma manera que la construcción en el plano muestra una sucesión de cuadrados y rectángulos para el número de oro, la sucesión de Fibonacci, en la construcción anterior la sucesión de cubos y poliedros se denomina "sucesión de Padovan[15]".

---

[15]Richard Padovan (1935-) "es un arquitecto, matemático, autor, traductor y profesor del Reino Unido. Descubrió la sucesión de números que lleva su nombre" (Wikipedia, 2015).

"Observemos las analogías entre el *número plástico* y los *números metálicos*σ_m. Son evidentes. En efecto, todos ellos son números irracionales mayores que uno, soluciones de ecuaciones que son una generalización de la que satisface el número ϕ. Por supuesto, todos admiten expansión en fracción continua simple, pero aquí encontramos una diferencia esencial. Las fracciones continuas simples de los números$\sigma_m$son muy sencillas y sus coeficientes son verdaderamente fáciles de recordar pues son todos iguales al correspondiente m, es decir, son periódicas puras de periodo m. Sin embargo con la fracción continua simple del *número plástico* la cosa cambia, pues no es periódica y no parece que exista ninguna forma de predecir sus coeficientes" (Buitrago, 2008, 60).

Se puede probar que "existen solo dos números mórficos, a saber la divina proporción y el número plástico de Dom van der Laan" (Aarts, Fokkink y Kruijtzer, 2001, 58).

También se puede relacionar estos dos números irracionales y las espirales (Stewart, 1996) en un contexto informático para la enseñanza (Reina, 2009).

5.6.3 PROBLEMAS DE TIPO ALGEBRAICOS

Los problemas de tipo geométricos estudiados en el apartado anterior se relación estrechamente con los de tipo algebraicos, a saber, las ecuaciones polinómicas, en particular las de segundo grado y las diofánticas.

5.6.3.1 Resolución de algunas ecuaciones polinómicas de segundo grado por FC

La expresión decimal de los números irracionales obtenida como solución de ecuaciones polinómicas de segundo grado no parece producir grandes aportes.

"En honor de Richard Padovan, voy a llamar sucesión de Padovan a esta secuencia" (Stewart, 1996, 87).

En cambio si se expresan a dichos números en FC entonces comienzan a aparecer regularidades y patrones en el desarrollo por cocientes parciales de las fracciones obtenidas.

> "Resolviendo ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 - nx - 1 = 0$, con n natural, se obtienen como soluciones positivas miembros de la familia de números metálicos cuya descomposición en fracciones continuases periódica pura, de la forma $x = [\bar{n}]$. Si, en cambio, buscamos las soluciones positivas de ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 - x - n = 0$, con n natural, obtenemos números naturales o miembros de la familia de números metálicos cuya descomposición en fracciones continuas es periódica, de la forma $[m, \overline{n_1, n_2, \dots, n_n}]$" (Spinadel, 1995, 3).

Por ejemplo, para el primer caso señalado por la autora, $x^2 - nx - 1 = 0$, si $n = 3$ se tiene

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\sigma_{Br} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} = [\bar{3}]$$[16]

Para el segundo caso, $x^2 - x - n = 0$, para $n = 3$, se obtiene el "número de níquel" (Spinadel, 2003), otro miembro de la familia de los números metálicos.

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$\sigma_{Ni} = \frac{1 + \sqrt{13}}{3} = [2; \bar{3}]$$

No solo es posible resolver ecuaciones polinómicas de segundo grado, también se pueden hallar soluciones a ecuaciones de tipo diofánticas.

[16]Denominado "número de bronce, se trata de uno de los infinitos números que forman la "familia de los números metálicos" " (Spinadel, 2003,20).

5.6.3.2 Resolución de ecuaciones diofánticas por FC

Es posible resolver ecuaciones diofánticas por FC. A continuación se analizan algunos ejemplos.

5.6.3.2.1 Resolución de la ecuación diofántica lineal

"Una ecuación diofántica es una ecuación algebraica en una o más incógnitas (polinomios igualados a cero), con coeficientes enteros, de la que interesa solamente hallar las soluciones enteras" (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1968, 349).

$$ax + by = c$$

Es posible resolver una ecuación diofántica lineal por FC si se toma los convergentes de dicha fracción

$$C_0 = [a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$$

$$C_1 = [a_{0,} a_1] = \frac{p_1}{q_1}$$

$$C_2 = [a_{0,} a_1, a_2] = \frac{p_2}{q_2}$$

$$\vdots$$

$$C_n = [a_{0,} a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

Se puede probar que

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n (n > 1)$$

O escrita de otra forma

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}} (1)$$

Se trata de una propiedad de la diferencia entre dos convergentes consecutivos.

A continuación se presenta un ejemplo de resolución de una ecuación diofántica lineal

$$261x - 82y = 117$$

Tomando los coeficientes y expresándolos como una fracción y luego desarrollando el número en FC

$$\frac{261}{82} = [3; 5,2,7]$$

Penúltimo cociente parcial

Si se aproxima al penúltimo cociente parcial se obtiene:

$$[3; 5,2] = \frac{35}{11}$$

Se obtienen las soluciones particulares:

$$x_0 = 117 \cdot 11 = 1287$$

$$y_0 = 117 \cdot 35 = 4095$$

A partir de la solución particular se comienza a obtener la solución general

$$x = x_0 + b \cdot t = 1287 - 82 \cdot t$$

$$y = y_0 - a \cdot t = 4095 - 261 \cdot t$$

Si se hace$t = 15 - r$

$$x = 1287 - 1230 + 82 \cdot r$$

$$y = 4095 - 3915 + 261 \cdot r$$

De donde se obtiene la solución general:

$$x = 57 + 82 \cdot rr \geq 0$$

$$y = 180 + 261 \cdot rr \geq 0$$

(Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo, 1968, 350).

5.6.3.2.2 Resolución de ecuaciones diofánticas de Pell[17]- Fermat[18]

Es posible resolver ecuaciones de tipo diofánticas, como la de Pell-Fermat, por medio de la FC.

---

[17]John Pell (1610-1685) matemático inglés.
[18]Pierre de Fermat (1601-1665) jurista y matemático francés.

"La ecuación $x^2 - dy^2 = \pm 1$, donde las variables x e y son números enteros positivos mientras que d es un entero positivo fijo que no es cuadrado, fue bautizada con el nombre de Pell por error de Euler" (Waldschmidt, 2011,2).

Esta ecuación siempre posee la solución trivial $(x, y) = (1,0)$.

"Si se busca las soluciones no triviales:

- Si $d \leq -2$ no existe ninguna.
- Si $d = -1$ sólo existe $x = 0\,, y = 1$"(Waldschmidt, 2011,29).

Puede probarse que "si d es un entero positivo no cuadrado la fracción continua de $\sqrt{d}$ es periódica. Si k es el período más pequeño, esta fracción se escribe $\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_k}]$, con $a_k = 2a_0$ y $a_0 = \lfloor\sqrt{d}\rfloor$.

- Si k es par la solución fundamental de la ecuación $x^2 - dy^2 = 1$ está dada por la fracción $[a_0; a_1, a_2, \dots\ a_{k-1}] = \frac{x_1}{y_1}$

  En el caso de la ecuación $x^2 - dy^2 = -1$ no tiene solución.

- Si k es impar la solución fundamental (x_1, y_1) de la ecuación $x^2 - dy^2 = -1$está dada por la fracción $[a_0; a_1, a_2, \dots\ a_{k-1}] = \frac{x_1}{y_1}$

  Y la solución fundamental (x_2, y_2) de la ecuación $x^2 - dy^2 = 1$está dada por la fracción $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}] = \frac{x_2}{y_2}$ "

(Waldschmidt, 2011, 52-53).

A continuación se muestran algunos ejemplos de resolución de ecuaciones de este tipo por FC.

- Para la ecuación $x^2 - 2y^2 = -1(3)$, la solución se obtiene al hallar la FC de $\sqrt{2} = [1; 2,2,2, \dots] = [1; \overline{2}]$ cuyo período es $k = 1$ (impar).

  Entonces la solución $\frac{x_1}{y_1} = [1] = \frac{1}{1}$

Reemplazando la solución en (3) se obtiene:

$$1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$$

- Para la ecuación $x^2 - 2y^2 = 1$ (4), la solución se obtiene al hallar la FC de $\sqrt{2} = [1; 2,2,2, \dots] = [1; \overline{2}]$ cuyo período es $k = 1$ (impar).

  Entonces la solución $\frac{x_2}{y_2} = [1; 2] = \frac{3}{2}$

  Reemplazando la solución en (4) se obtiene:

$$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$$

- Para la ecuación $x^2 - 3y^2 = 1$ (5), la solución se obtiene al hallar la FC de $\sqrt{3} = [1; 1,2,1,2 \dots] = [1; \overline{1,2}]$ cuyo período es $k = 2$ (par).

  Entonces la solución $\frac{x_1}{y_1} = [1; 1] = \frac{2}{1}$

  Reemplazando la solución en (5) se obtiene:

$$2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1$$

- Para la ecuación $x^2 - 61y^2 = -1$ (6), la solución se obtiene al hallar la FC de $\sqrt{61} = \left[7; \overline{\underbrace{1,4,3,1,2,2,1,3,4,1}, \underbrace{14}}\right]$ cuyo período es $k = 11$ (impar).

Entonces la solución $\frac{x_1}{y_1} = [7; 1,4,3,1,2,2,1,3,4,1] = \frac{29718}{3805}$

Reemplazando la solución en (7) se obtiene:

$$29718^2 - 61 \cdot 3805^2 = -1$$

- Para la ecuación $x^2 - 61y^2 = 1$ (7), la solución se obtiene al hallar la FC de $\sqrt{61} = \left[7; \overline{\underbrace{1,4,3,1,2,2,1,3,4,1}, \underbrace{14}}\right]$ cuyo período es $k = 11$ (impar).

  Entonces la solución es:

$$\frac{x_2}{y_2} = [7; 1,4,3,1,2,2,1,3,4,1,14,1,4,3,1,2,2,1,3,4,1] = \frac{1766319049}{226153980}$$

Reemplazando la solución en (7) se obtiene:

$$1766319049^2 - 61 \cdot 226153980^2 = 1$$

Waldschmidt (2011) muestra la solución de ciertas ecuaciones de Pell-Fermat, para algunos valores de d (figura 71).

Petites valeurs de d

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1,\ \sqrt{2} = [1; \overline{2}],\ k = 1,\ (x_1, y_1) = (1, 1),$$
$$1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1.$$
$$x^2 - 3y^2 = \pm 1,\ \sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}],\ k = 2,\ (x_1, y_1) = (2, 1),$$
$$2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1.$$
$$x^2 - 5y^2 = \pm 1,\ \sqrt{5} = [2; \overline{4}],\ k = 1,\ (x_1, y_1) = (2, 1),$$
$$2^2 - 5 \cdot 1^2 = -1.$$
$$x^2 - 6y^2 = \pm 1,\ \sqrt{6} = [2; \overline{2, 4}],\ k = 2,\ (x_1, y_1) = (5, 4),$$
$$5^2 - 6 \cdot 2^2 = 1.$$
$$x^2 - 7y^2 = \pm 1,\ \sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}],\ k = 4,\ (x_1, y_1) = (8, 3),$$
$$8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1.$$
$$x^2 - 8y^2 = \pm 1,\ \sqrt{8} = [2; \overline{1, 4}],\ k = 2,\ (x_1, y_1) = (3, 1),$$
$$3^2 - 8 \cdot 1^2 = 1.$$

Fig.71. Solución de ecuaciones de Pell-Fermat, para algunos valores de d. (Waldschmidt, 2011, 60).

5.7 LA FRACCIÓN CONTINUA Y ALGUNOS CONTEXTOS DE USO EXTRAMATEMÁTICOS

5.7.1 UN PROBLEMA DE MECÁNICA

Es posible resolver problemas de mecánica, por ejemplo de número de dientes de engranajes, con ayuda de la FC.

Las ruedas dentadas sirven para la transmisión de potencia o movimientos entre dos o más ejes (figura 72).

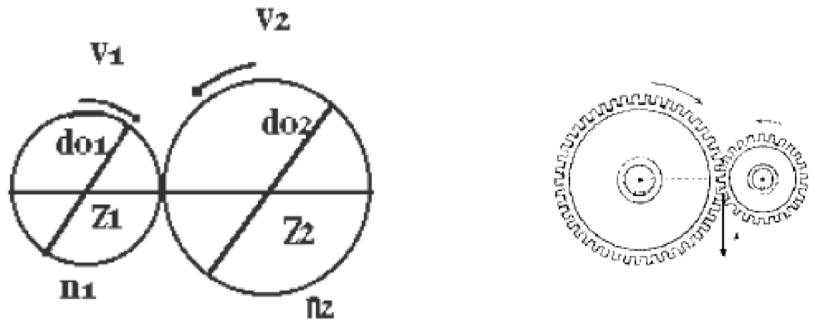


Fig. 72. Ruedas dentadas (Casas, 2006, 293).

"Si d_o y r_o se miden en metros. De aquí se deduce:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_{o2}}{d_{o1}} = \frac{r_{o2}}{r_{o1}}$$

Con $v_1 = r_{o1}w_1 = r_{o2}w_2$

La relación de transformación vale:

$$i = \frac{w_1}{w_2} = \frac{d_{o2}}{d_{o1}} = \frac{r_{o2}}{r_{o1}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

Para la elección de la relación de transformación hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones: Si se requiere un rápido rodaje o desfogue del engranaje, la relación de transformación deberá ser un número entero, porque así siempre engranan los mismos pares de dientes" (Casas, 2006, 293).

Problema: Calcular el número de dientes que deben tener dos ruedas dentadas si $i = 133/78$.

Empleando la propiedad (1) del punto 8.1.3.1

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}$$

Si se hace$c_{n-1} = \frac{y}{x}$, se tiene:

$$\frac{133}{78} - \frac{y}{x} = \frac{(-1)^n}{78 \cdot x}$$

Entonces

$$133 \cdot x - 78 \cdot y = (-1)^n (2)$$

Desarrollamos $\frac{133}{78}$ en FC:

$$\frac{133}{78} = [1; 1,2,2,1,1,4]$$

Entonces la ecuación (2) se transforma

$$133 \cdot x - 78 \cdot y + (-1)^6 = 0$$

Hallamos el convergente que ocupa el penúltimo lugar:

$$[1; 1,2,2,1,1] = \frac{29}{17}$$

Entonces$p_{n-1} = 29$ y $q_{n-1} = 17$, son las soluciones particulares:

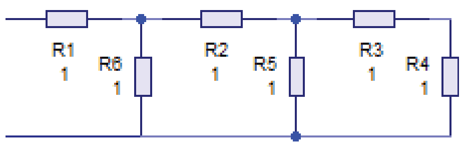
$$x_0 = 17 \cdot 1 = 17$$

$$y_0 = 29 \cdot 1 = 29$$

5.7.2 PROBLEMAS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Es posible hallar la “resistencia equivalente” de un circuito eléctrico en “escalera” formada por resistencias del mismo valor por medio de la FC.

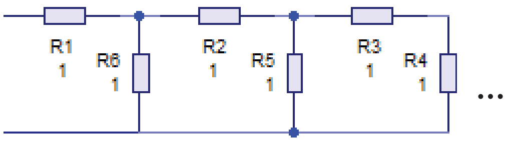
Todas las resistencias de los circuitos siguientes tienen el valor expresado en ohms [Ω].



$$Req = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{8}{5}\,\Omega$$

$$Req = [1; 1^{-1}, 1, 1^{-1}, 1 + 1] = \frac{8}{5}\,\Omega$$

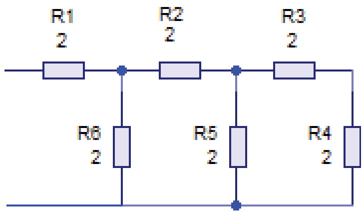
Para el caso de un circuito ideal infinito se obtiene el número de oro (Sanjinés, 2010; Balasubramanian, 2013).



$$Req = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}} = \phi\,\Omega$$

$$Req = [1; 1^{-1}, 1, 1^{-1}, 1, \ldots] = \phi\,\Omega$$

Si en vez de valores de resistencias iguales a 1Ω, se cambia por otro valor entero positivo, por ejemplo 2 Ω se tiene

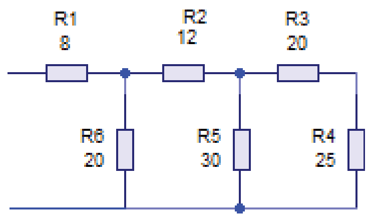


Cuya resistencia equivalente es

$$Req = 2 + \frac{1}{2^{-1} + \frac{1}{2+\frac{1}{2^{-1}+\frac{1}{4}}}} = \frac{13}{4}\,\Omega$$

$$Req = [2; 2^{-1}, 2, 2^{-1}, 2 + 2] = \frac{13}{4}\,\Omega$$

Para el caso de resistencias cuyos valores no sean todos iguales se tiene



$$Req = 8 + \cfrac{1}{20^{-1} + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{30^{-1} + \cfrac{1}{45}}}} = 20\ \Omega$$

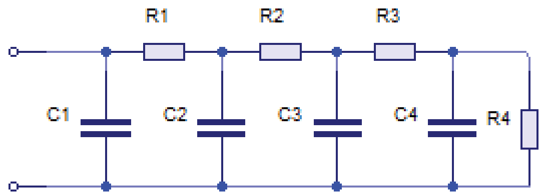
$$Req = [8; 20^{-1}, 12, 30^{-1}, 20 + 25] = 20\ \Omega$$

Para el caso de resistencias y capacitores conectados en serie y paralelo se tiene la función de admitancia[19].

$$Y(s) = C_1 s + \cfrac{1}{R_1 + \cfrac{1}{C_2 s + \cfrac{1}{R_2 + \cfrac{1}{C_3 s + \cfrac{1}{R_3 + \cfrac{1}{C_4 s + \cfrac{1}{R_4}}}}}}}$$

(Petrzela, Gotthans y Hrubos, 2012,174).

El circuito correspondiente a la FC anterior es el siguiente:



(Petrzela, Gotthans y Hrubos, 2012,175).

[19]En ingeniería eléctrica, la admitancia (Y) de un circuito es la facilidad que este ofrece al paso de la corriente. De acuerdo con su definición, la admitancia es la inversa de la impedancia, Z: $Y = Z^{-1} = \frac{1}{Z}$ (Wikipedia, 2014).

Wilhelm Cauer[20] (1900–1945) matemático y científico alemán, emplea diversos métodos para hallar la síntesis de circuitos y filtros eléctricos, utiliza para ello a las fracciones continuas.

5.8 CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS ASOCIADAS A LA NOCIÓN DE FRACCIÓN CONTINUA

Luego de recorrer la multiplicidad de sentidos y contextos de uso de la fracción continua se propone analizar las configuraciones epistémicas que se pueden asociar a dicha noción. Los diferentes sentidos y contextos de uso que inicialmente se ha podido establecer se manifiestan en las cuatro configuraciones epistémicas descritas en la tabla 30.

[20]Para conocer algunos aspectos sobre la vida y trabajo de Wilhelm Cauer puede consultarse la obra de Cauer, Mathis y Pauli (2000).

	Configuraciones			
Entidades	CE-implícita	CE-explícita	CE- algebraica	CE-argumentativa
Situaciones	Problema de hallar el máximo común divisor entre números.	Problema de extracción de raíces cuadradas de números. Estudio de irracionales por aproximación	Estudio de irracionales por aproximación Clasificación de irracionales y de irracionales cuadráticos. Funciones y F. C.	Demostración de teoremas mediante fracciones continuas. Relación entre las F.C. y los campos cuadráticos. Problema de convergencia Estudio de atractores F.C y análisis complejo Análisis de cuasicristales.
Lenguaje	Geométrico Numérico	Geométrico Numérico	Conjuntista Algebraico Analítico	Conjuntista Algebraico Topológico
Conceptos-regla	Máximo común divisor. Fracción continua finita ascendente (implícita)	Raíz cuadrada. Fracción continua infinita (explícita). Series numéricas Comienzos de la fracción continua generalizada	Familia de los números metálicos. Números algebraicos y trascendentes.	F.C. generalizada Convergencia uniforme Fracción Continua de alta dimensión (Arnold, 1998) Fractales, caos y cuasiperiodicidad
Propiedades	Propiedades de las proporciones	Propiedades del álgebra.	Propiedades de las F.C. Propiedades de la familia de los números metálicos Periodicidad	Propiedades de los números algebraicos y trascendentes. Periodicidad Propiedades de los atractores y fractales
Procedimientos	Algoritmo de Euclides.	Reducidas del desarrollo en fracción continua	Clasificación de números irracionales por fracción continua	Demostración de propiedades por medio de fracciones continuas
Argumentos	empíricos	Deductivo informal	Deductivo formal	Deductivo formal

Tabla 30. Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de fracción continua.

Reina (2010) muestra que la estructuración de la noción de fracción continua y su complejidad ontosemiótica asociada pueden esquematizarse como muestra la figura 73.

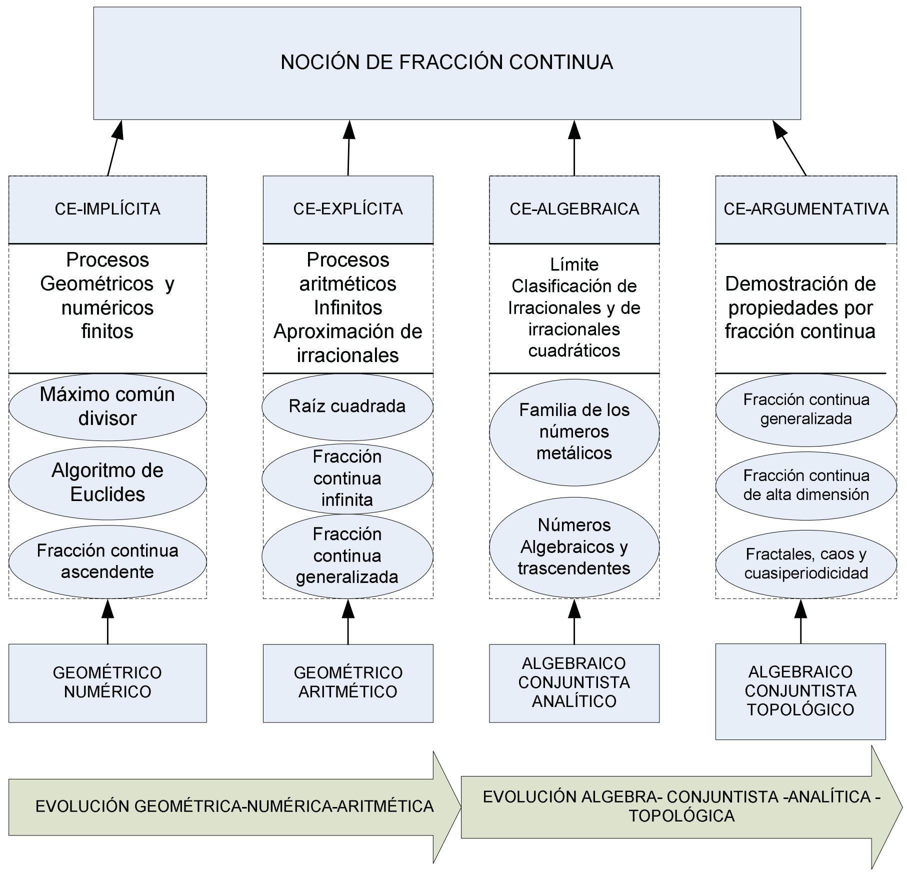


Fig.73. Estructuración de significados parciales asociados a la noción de fracción continua.

5.9 HOLOSIGNIFICADO DE LA NOCIÓN DE FRACCIÓN CONTINUA

Los significados parciales asociados a la noción de FC y sus interacciones pueden esquematizarse como muestra la figura 74.

En un contexto geométrico-numérico-aritmético la CE-imp y la CE-exp se relacionan por medio de procesos aproximativos finitos e infinitos, se transita entonces de una noción de fracción continua ascendente hacia una infinita y se comienza a vislumbrar una fracción continua generalizada.

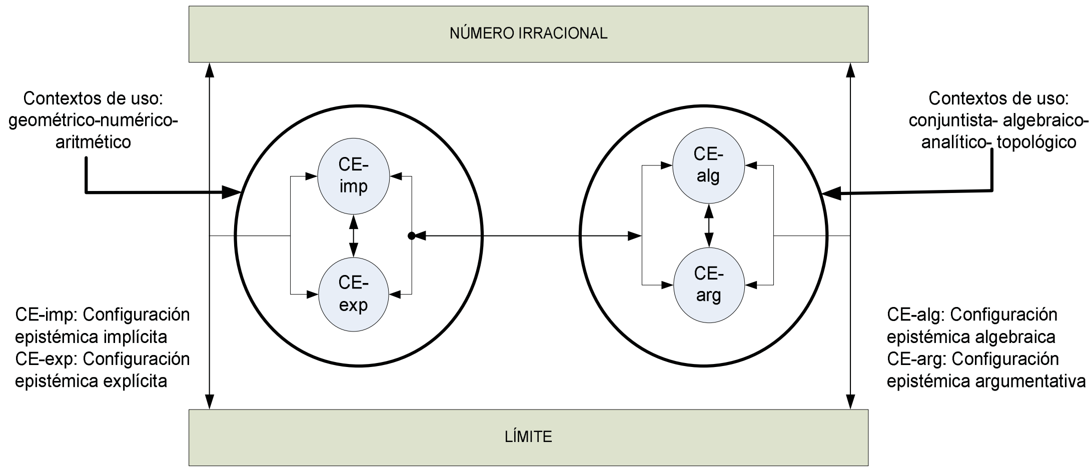


Fig.74. Representación del holosignificado de la noción de fracción continua.

Ya en un contexto algebraico-argumentativo se comienza a clasificar números irracionales y aparecen nuevas familias como la de los números metálicos (Spinadel, 1995; 2003). El álgebra es parte de este contexto.

La demostración de la existencia de números irracionales trascendentes, en algunos casos se realiza por medio de fracciones continuas (Ribenboim, 2000) constituyéndose en otro contexto de uso de la FC.

En el apartado siguiente se analiza si es posible interrelacionar holo-significados de manera viable para el currículo de manera tal que sea de provecho para la elaboración de procesos de estudio que involucren diferentes nociones.

5.9.1 ¿Es posible realizar un "acoplamiento didáctico curricular" entre los holosignificados de las nociones de número irracional y fracción continua?

Una cuestión que guía este apartado es la siguiente: ¿La noción de holosignificado (Wilhelmi, Godino, Lacasta, 2007a; 2007b; 2011) asociado a la noción de número irracional descrita en el apartado 4.8.2 puede acoplarse didácticamente, de manera viable y eficaz, a los significados parciales (holosignificado) asociados a la noción de FC desarrollados en el punto anterior?

Si esto último es posible, ¿a partir del acoplamiento entre holosignificados, y si el profesor produce una interacción "didáctica" entre las nociones estudiadas, ¿se produce entonces un fenómeno de "simbiosis didáctica curricular"?

Es conocido que, didácticamente hablando, es necesario un tránsito flexible de la aritmética al álgebra y del álgebra al análisis (Wilhelmi, Godino, Lacasta, 2007a).

Se puede pensar que la noción de FC asociada a la de número irracional permite un tránsito flexible y una evolución hacia una posible interacción con los significados parciales asociados a la noción de límite.

La simbiosis didáctica curricular, entre la noción de FC y número irracional, parece presentarse en dos momentos:

- Cuando se realiza la planificación o el programa, en este caso en particular, el docente debe prever la incorporación de un objeto matemático como el de FC asociado a la noción de número irracional.
- En situación de clase, al momento que el profesor necesite de la ayuda de algoritmos que permitan la aproximación de los números irracionales, siendo la FC uno de los más económicos y eficaces. Éste último no solo permite la aproximación de números racionales y de irracionales sino también su diferenciación. Allí en interacción con los alumnos se observan diferentes niveles de SDC (cap.12).

A su vez, la noción de FC necesita para "sobrevivir", desde un punto de vista de la "ecología de los saberes", de la noción de número irracional ya que la "fortaleza" de su método reside en el alto grado de aproximación que es posible lograr con ella.

Pero no solo se presenta un apoyo entre nociones sino que este acoplamiento parece "calzar bien", toda la red de significados asociados al holosignificado de la noción de número irracional se une perfectamente a la red de significados parciales del holosignificado de la noción de FC (fig. 75).

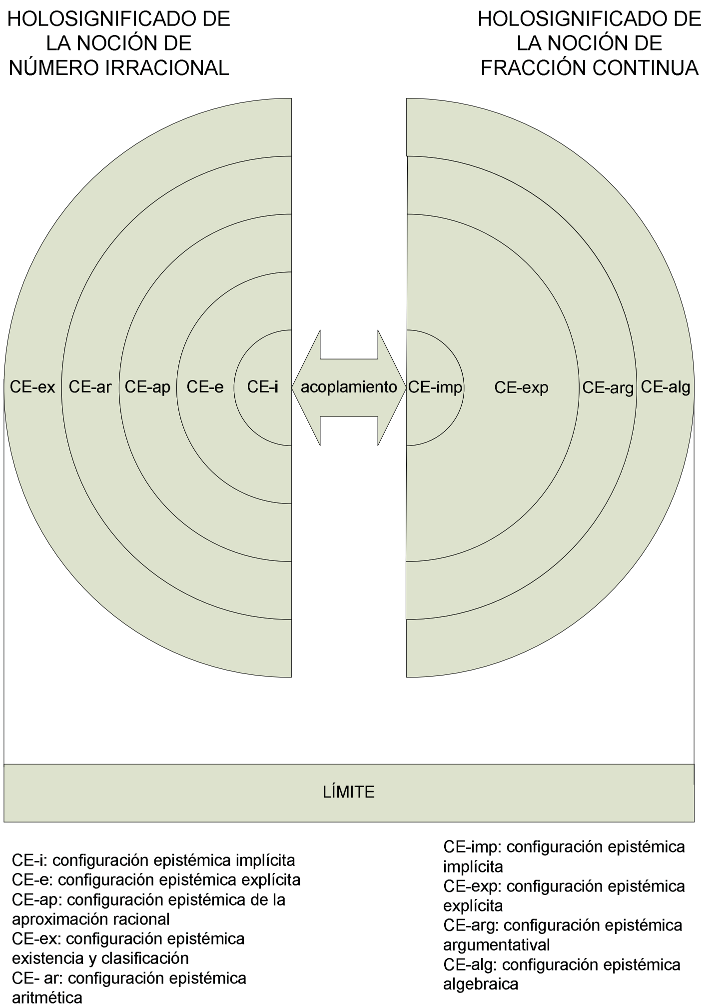


Fig.75. Acoplamiento entre holosignificados de las nociones de número irracional y fracción continua con proyección al límite.

Si bien no se pretende una construcción "lineal" del currículo que podría traducirse en fenómenos de "linealidad o reduccionismo" (Wilhelmi, Godino, Lacasta, 2007a) este acoplamiento particular entre holosignificados puede mostrar una manera viable de interacción para una posible "puesta en texto del saber" (Chevallard, 1991).

De lo anteriormente expuesto se puede observar en las secciones siguientes si es posible considerar a la noción de holosignificado como un medio teórico de organización, estructuración y secuenciación del currículo.

De esta forma, el holosignificado de un objeto matemático descrito, como interacción de modelos matemáticos asociados a dicho objeto, constituye una herramienta macro y micro didáctica.

> "La determinación de las técnicas que se desea enseñar permiten establecer orientaciones sobre la ecológica de los saberes y la elaboración de una transposición didáctica pertinente, que se concretará en la construcción de un currículo o en la determinación de pautas generales para la confección de un libro de texto dentro de una institución concreta (nivel macrodidáctico)" (Wilhelmi, Godino, Lacasta, 2007a,15).

En el caso particular de la noción de número irracional y dada su complejidad ontosemiótica resulta necesario, para el profesor, la introducción de nociones "paramatemáticas" (Chevallard, 1991), como la de fracción continua, que contribuyan a la evolución del proceso de estudio, pero este tránsito entre el estatus paramatemático y matemático se hace plenamente "visible" al analizar los significados parciales asociados a ambos holosignificados y a su acoplamiento didáctico.

Se trata de indagar si es viable un acoplamiento didáctico entre holosignificados y la posible emergencia de simbiosis didácticas curriculares entre objetos matemáticos, por parte del profesor.

Esto último puede contribuir a la elaboración de la planificación y programación de las nociones implicadas y para el análisis de su inserción en el currículo de enseñanza secundaria.

Ahora, si bien puede haber un buen acoplamiento teórico curricular entre holosignificados, el acoplamiento didáctico entre las nociones de FC y de número irracional en una clase de tercer año de secundaria (alumnos de 15-16 años), depende del medio creado y del grado de acoplamiento didáctico de dicho algoritmo al proyecto de enseñanza.

Si éste es muy abrupto, se transforma en un escalón difícil de escalar por el alumno y su introducción se materializa demasiado artificial resultando un fenómeno de algoritmización que, lejos de ayudar en la construcción de la noción de aproximación de un número irracional, lo banaliza aún más.

Una pregunta entonces que guía la próxima sección:

- Esta simbiosis didáctica curricular que puede realizar el profesor en su programación, antes de ingresar en el aula, ¿en qué medida, en clase de matemática, permite un tránsito didáctico flexible y viable entre ambas nociones, que proporcione una evolución didáctica de procesos finitos a infinitos y de paso al límite, dejando el camino abierto para una aproximación didáctica eficaz de la noción de límite?

Capítulo 6

Análisis didáctico del grupo de control 1

En este capítulo se describen y analizan cuatro sesiones correspondientes al grupo de control 1. En la sesión 1 (apartado 6.1) se detallan las configuraciones epistémicas de los conjuntos numéricos y sus propiedades, la clasificación de números reales, la completitud del conjunto de los números reales y la representación geométrica de números irracionales, para luego abordar una configuración didáctica global. En la sesión 2 (apartado 6.2) se aborda la representación geométrica de algunos números irracionales, las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo y la simbiosis didáctica curricular entre objetos matemáticos. En la sesión 3 (apartado 6.3) las configuraciones epistémicas se relacionan con las propiedades de la radicación, las raíces sucesivas de un número real y la simplificación de radicales. En la sesión 4 (apartado 6.4) las configuraciones epistémicas se relacionan con la adición y sustracción de radicales, el perímetro de un polígono cerrado simple, la factorización del radicando y el área de polígonos cerrados simples, para finalmente arribar a una configuración didáctica global de dicha sesión.

6.1 SESIÓN 1 EN EL GRUPO DE CONTROL (DOCENTE 1)

Se describen las sesiones observadas según las trayectorias epistémica, cognitiva e instruccional. Para facilitar el análisis se introduce un gráfico circular en donde se representan las actividades desarrolladas por los alumnos(A1 a A6), las actividades desarrolladas por el profesor (P1 a P7) y los tiempos empleados en cada actividad (M1 a M15) (figura 76).

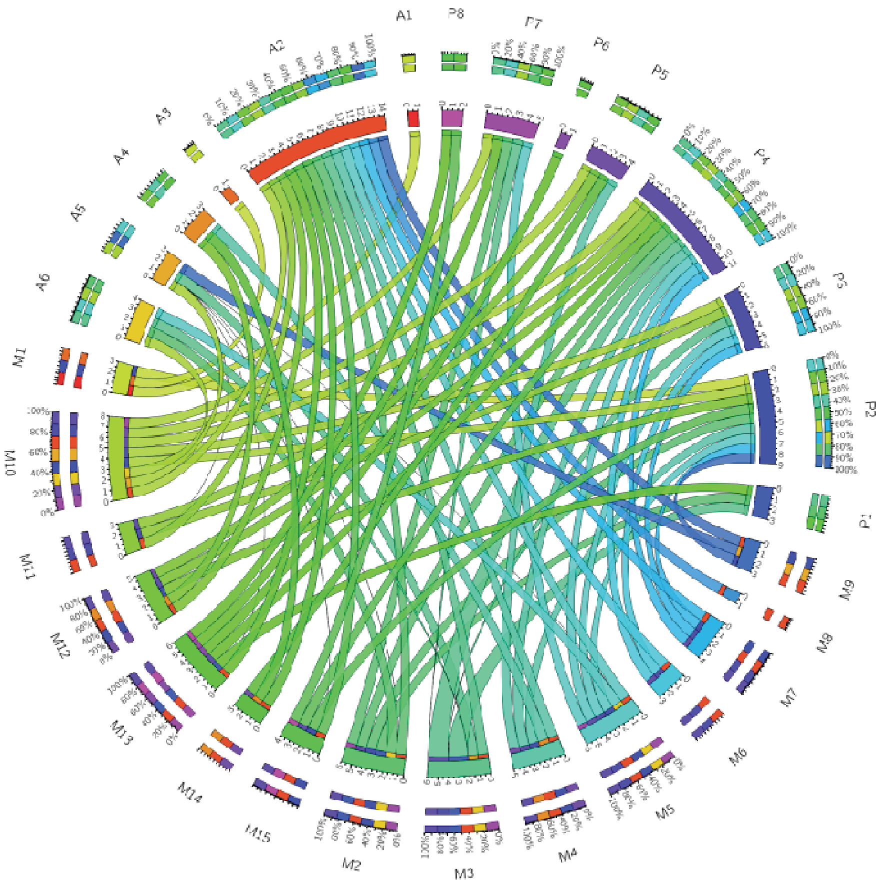


Fig.76. Actividades realizadas en los primeros quince minutos de clase por alumnos y profesor.

La siguiente tabla de datos (tabla 31) muestra las actividades realizadas en los primeros quince minutos de clase las cuáles se representan en la tabla 1.

data	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	P8
M1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
M2	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0.1	1	0	0
M3	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0.5	1	0	0
M4	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
M5	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0.1	1	0	0
M6	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
M7	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
M8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
M9	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
M10	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
M11	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0.1	0	0	0
M12	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
M13	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0.1	0	0	1
M14	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
M15	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0.1	0	0	1

Leyenda
0: No se realiza actividad.
0,1: Realiza la actividad un solo alumno.
0,5: Realiza la actividad grupos reducidos de alumnos.
1: Realiza la actividad todos los alumnos.

Tabla 31.Datos empleados para representar la figura 1.

6.1.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDÁCTICO DE LA SESIÓN 1

6.1.1.1 Configuración epistémica 1(a): los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ y sus propiedades

La mayoría de las actividades, en estos primeros quince minutos de clase, son realizadas por el profesor (observar de P1 a P8). El primer minuto (M1) comienza con el profesor intentando rescatar los conocimientos previos de los alumnos sobre la noción de "conjunto de los números naturales". Algunos alumnos no realizan ninguna actividad observable(A1)y otros copian (A2) en sus cuadernos mientras el profesor escribe en el pizarrón (P2).

Entre los minutos dos al siete (M2 a M7) el profesor realiza preguntas (P4) a los alumnos sobre las características del conjunto, en algunos casos es él mismo quién responde la pregunta (P7)no los alumnos, muy pocos alumnos recuerdan y responden (A7)las preguntas del profesor.

En el minuto cuatro (M4) un alumno realiza una pregunta "públicamente" al profesor: "¿es un conjunto ordenado?", el profesor responde afirmativamente (P5) pero no retoma o aprovecha la cuestión planteada para abordar o recordar con todos los demás alumnos esta noción. Esto último revela un conflicto semiótico potencial de tipo interaccional, ya que no se conoce si los alumnos tienen ya construida la noción de "orden de un conjunto infinito", o si por el contrario el significado atribuido por los alumnos a dicha noción matemática difiere con el propuesto por el profesor.

Luego de un brevísimo análisis sobre el conjunto ℕ el profesor les solicita a los alumnos que anoten su afirmación: "tienen principio pero no tienen fin". El profesor apela con esta afirmación al infinito "potencial", que el alumno ha ido construyendo a lo largo de su escolaridad primaria y en los dos primeros años de secundaria.

En el minuto cinco (M5) pregunta nuevamente por las características del conjunto ℕ, en este caso se trata de la noción de "discretitud" del conjunto de los números naturales. La mayoría de los alumnos no responden (A6) a la pregunta, el profesor trata de "inducir" la respuesta (A5) afirmativa de ellos: "podemos ubicar entre estos dos números naturales consecutivos otro número natural" (señala dos números consecutivos en la recta numérica natural). Varios de los alumnos copian (A2) lo escrito en el pizarrón por el profesor (P2), se trata de la característica observada por él que luego les "dicta"(P3) para que lo copien en sus cuadernos.

El docente da por sentado que el alumno "intuye", a través de la representación geométrica de la recta numérica natural, al orden en ℕ[1]. No se estudia la noción de número consecutivo de manera de diferenciar a este conjunto de otros (por ejemplo $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ y$\mathbb{R}$) en los cuáles no es posible hablar de números consecutivos, esto último tiene consecuencias más adelante en el proceso de estudio. Se trata de una SDC de nivel bajo ya que la carencia (o la inestabilidad) del conocimiento previo, en este caso entre el conjunto ℕ y sus propiedades, restringe la eficacia de las intervenciones y condiciona la emergencia de conocimientos estables.

A partir del minuto ocho (M8) y hasta el minuto quince (M15) el profesor intenta que los alumnos retomen los conocimientos previos sobre el "conjunto de los

[1]La definición de orden en ℕ nos dice : sean p y q naturales, decimos que:

$$p \leq q \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} \text{ tal que } p+x=q$$

números enteros". El profesor dibuja la recta numérica entera y los alumnos copian en sus cuadernos dicho dibujo.

El docente retoma las propiedades analizadas para el conjunto ℕ ahora para el conjunto ℤ, discretitud, conjunto infinito, no retoma con la noción de "orden enℕ", propuesta por un alumno en los primeros siete minutos, para arribar al "orden en ℤ" por lo que dicha noción queda diluida en el discurso del profesor, éste parece no otorgarle importancia y esto se traduce en el registro escrito de los alumnos que no incluyen a dicha propiedad (fig.2).

El profesor realiza preguntas sobre las propiedades del conjunto ℤ que son respondidas por un número pequeño de alumnos.

Nuevamente se observa una SDC de nivel bajo esta vez entre el conjunto ℤ y sus propiedades.

En el cuaderno de un alumno se puede observar lo realizado estos primeros quince minutos de clase de matemática (figura 77).

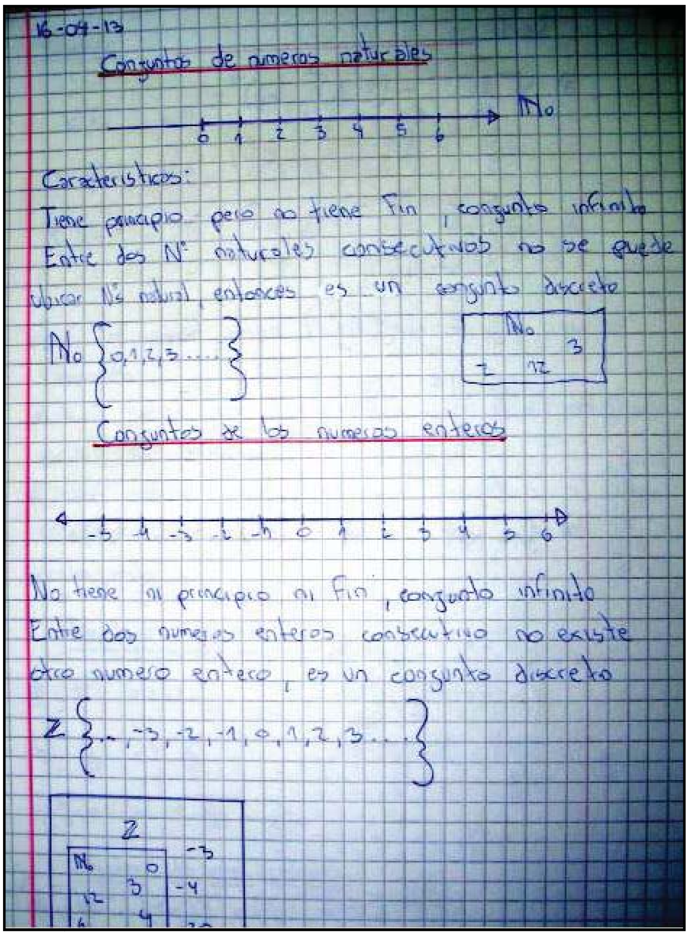


Fig. 77. Toma de apuntes de un alumno en los primeros 15 minutos de clases.

La sesión continua, ahora se trata de la conformación deuna configuración epistémica relativa a los conjuntos numéricos $\mathbb{D}$ y $\mathbb{Q}$ y sus propiedades.

6.1.1.2 Configuración epistémica 1(b): los conjuntos numéricos $\mathbb{D}$ y $\mathbb{Q}$y sus propiedades

A partir del minuto 16 y hasta el 23 nuevamente el profesor intenta retomar las propiedades de los conjuntos numéricos; en particular, del “conjunto de los números decimales”[2].

Comienza dibujando la recta numérica decimal (P2).En el minuto dieciséis (M16) el profesor les pregunta (P4) a los alumnos por las características de este

[2]Se recuerda que una definición de conjunto de los números decimales puede ser la siguiente: $\mathbb{D} = \left\{\frac{p}{10^q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$

conjunto, algunos alumnos responden (A5) “se escriben con coma”, otros afirman “es discreto” (A7) a lo que el profesor responde negativamente (P5), pero no realiza un tratamiento de esta afirmación. Sin embargo, los alumnos evidencian problemas en relación con la noción de discretitud y la de densidad de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{R}$. Aparece así un conflicto semiótico de tipo interaccional que no es resuelto por el docente.

El profesor, al responder negativamente a la afirmación de discretitud dada por algunos alumnos, deja planteado un conflicto semiótico interaccional “residual” (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006), en donde el significado personal atribuido por el docente difiere del significado personal atribuido por dichos alumnos a la noción de discretitud.

Nuevamente emerge una SDC de nivel bajo esta vez entre el conjunto $\mathbb{D}$ y sus propiedades.

En minuto diecisiete (M17) define número decimal (P1) como “aquellos números que tienen una cantidad de de cifras decimales finita”, da un ejemplo “0,1”. Luego les pregunta (P4) a los alumnos sobre la ubicación de ese número en la recta numérica decimal (en el pizarrón). Algunos alumnos responden (A5) sobre la ubicación, otros hacen sus aportes (A7) y luego copian lo expresado por el profesor (A2). Finalmente, es el propio docente quien ubica al número en la recta numérica decimal (P2)

En el minuto veinticuatro (A24) el profesor comienza escribiendo el título en el pizarrón (P2) “el conjunto de los números racionales”, los alumnos se limitan a copiar (A2) o inclusive algunos no trabajan (A1) (figura 78).

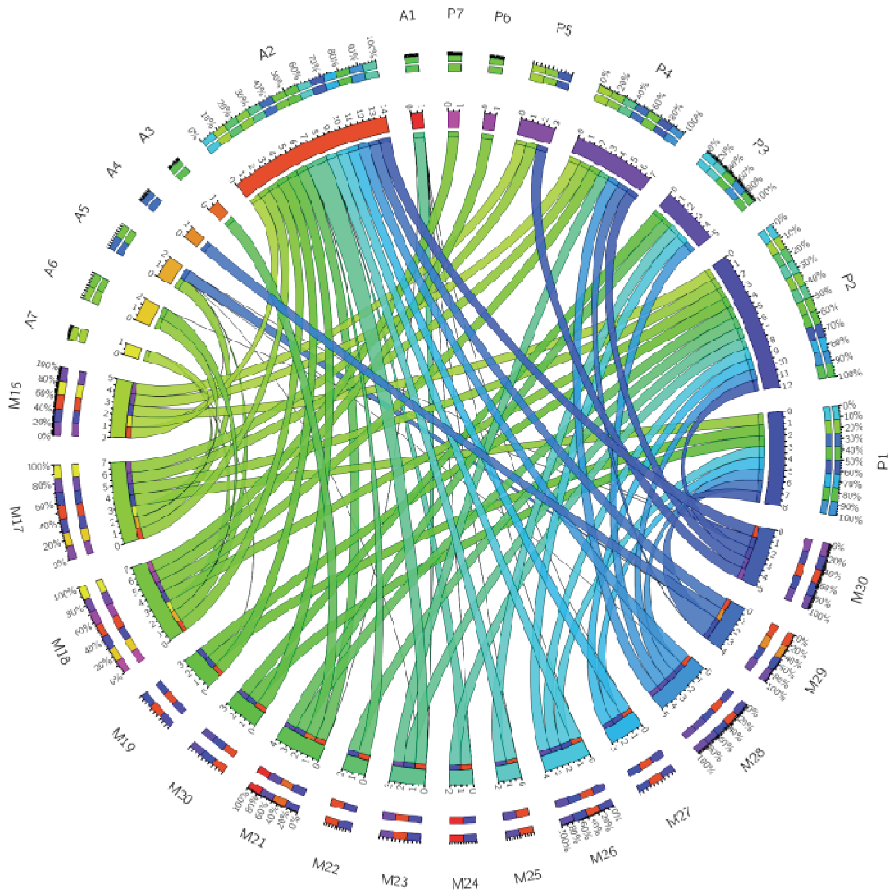


Fig.78. Actividades realizadas por alumnos y profesor desde los quince a los treinta minutos de clase.[3]

En el minuto veinticinco (A25) el docente 1 “dicta” (P3) la definición del conjunto $\mathbb{Q}$, la actividad de los alumnos se centra en copiar (A2) lo escrito por el profesor en el pizarrón (figura 79).

[3] De aquí en adelante las tablas de los gráficos se adjuntarán en el anexo de la memoria por cuestiones de espacio.

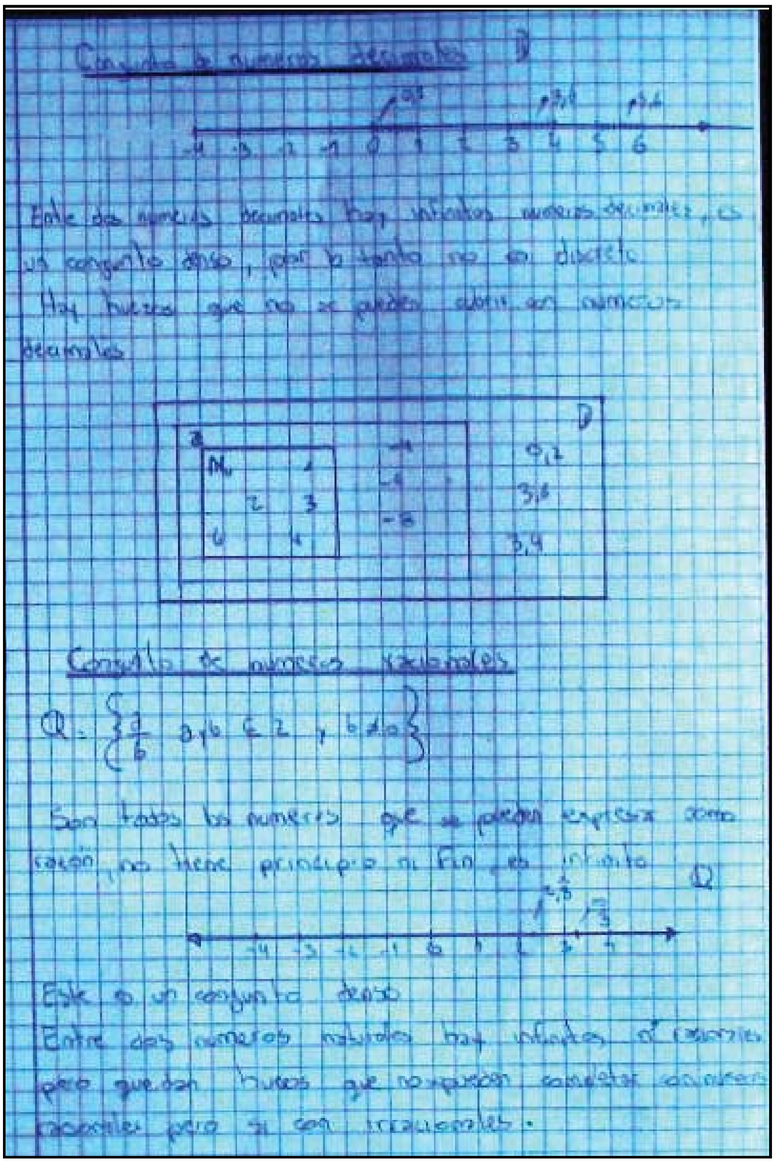


Fig. 79. Toma de apuntes de un alumno, en clase, entre el minuto 16 y el 30.

En el minuto veintiséis (M26) el profesor da ejemplos de números racionales y explica que el número 2,333333333… pertenece al conjunto (fig. 4) al igual que todos los números decimales.

En el minuto veintiocho (A28) realiza una pregunta a los alumnos sobre las características del conjunto de los números racionales que son respondidas por algunos alumnos. Afirma el profesor que el conjunto $\mathbb{Q}$ “es un conjunto que no tiene principio ni fin”, “es un conjunto infinito”, mientras los alumnos copian en sus cuadernos lo que el profesor va expresando inclusive algunos alumnos aprovechan para charlar entre ellos. Seguidamente pregunta "¿entre dos números racionales cuántos números racionales hay? Algunos alumnos responden "infinitos" afirmación que él ratifica" en voz alta".

Un alumno afirma públicamente "es denso" a lo que el profesor responde con una pregunta "haber… ¿entre dos números racionales cuántos números racionales hay?" pregunta respondida por varios alumnos al unísono: "infinitos" a lo que el profesor concluye "es infinito, entonces es un conjunto denso".

Un estudio con alumnos de nivel secundario muestra las dificultades que ellos manifiestan en la construcción de la noción de densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

> "La investigación en el área de la educación matemática ha proporcionado pruebas que la idea del carácter discreto de los números es una barrera para la comprensión de la estructura densa de los números racionales y reales establecidos para los estudiantes en los distintos niveles de enseñanza (Malara, 2001; Merenluoto y Lehtinen, 2002, 2004; Neumann, 1998), así como para los futuros profesores (Tirosh, Fischbein, Graeber, y Wilson, 1999)"(citado por Vamvakoussi y Vosniadou, 2007, 267)

Las nociones de densidad y de infinito matemático revelan por un lado, estar íntimamente ligadas, por el otro, esa fuerte dependencia genera para su aprendizaje potenciales conflictos.

> "La densidad nos coloca frente a una percepción del infinito a la que normalmente no estamos habituados. […]Entre dos puntos siempre puede encontrarse otro, de manera que el número de puntos contenidos en un segmento también es infinito" (Gracián, 2011,26).

Vamvakoussi y Vosniadou (2004) señalan la importancia del tratamiento de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ en la enseñanza secundaria y analizan las respuestas de los alumnos. En ellas es posible advertir que si bien los estudiantes pueden identificar la existencia de un número racional entre otros dos diferentes entre sí y que este proceso pueda continuarse, "no implica necesariamente que el estudiante ha alcanzado la comprensión de la densidad" (p. 457).

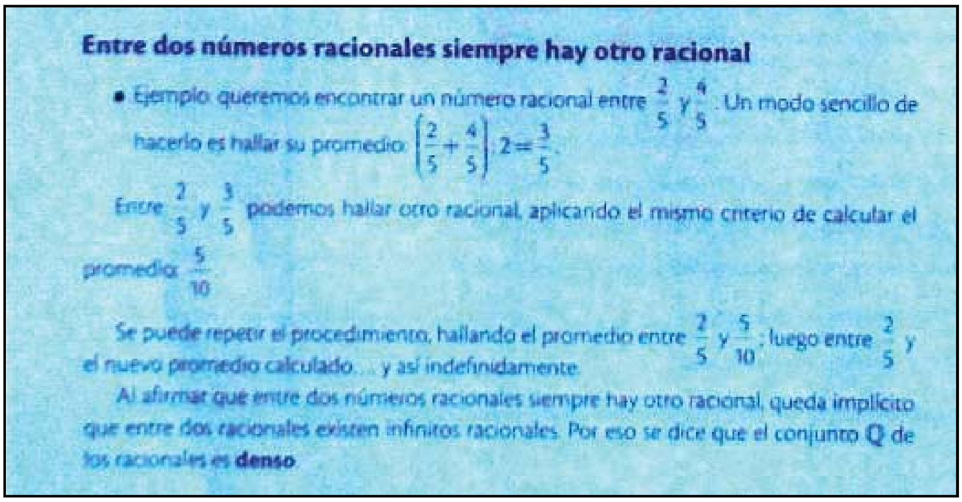
La necesaria relación entre la densidad y el infinito actual provoca una fuerte complejidad en su aprendizaje.

> "Por otra parte, el concepto de densidad está estrechamente relacionado con el concepto de infinito. El concepto de infinito tiene diversos aspectos, entre los cuáles el infinito actual es el más difícil de captar". (Vamvakoussi y Vosniadou, 2004, 456).

Asimismo la noción de densidad se relaciona fuertemente con la de continuidad funcional, allí emergen nuevamente dificultades para su apropiación (Merenluoto, 2004).

El profesor intenta "mitigar" dicha complejidad afirmando que el conjunto $\mathbb{Q}$ es denso, pero no se trabaja esta aseveración con los alumnos, por lo menos a un nivel elemental, presentando alguna situación que permita a dichos alumnos encontrar, dados dos números racionales (a y b, $a<b$), otros que estén entre ellos. Queda de esta manera un camino abierto a conflictos semióticos cuando el alumno, más adelante en su trayectoria escolar, deba aproximarse nuevamente a la noción de densidad en otros niveles educativos.

Esta última es una tarea, para muchos alumnos, dificultosa que pone en juego la inestabilidad de la conceptualización de las propiedades asociadas al conjunto de los números racionales y que resulta de interés continuar su tratamiento en clases siguientes. Un tipo de estudio como el señalado en el párrafo anterior sí se propone en el libro de texto que el profesor considera para preparación de su trabajo áulico (figura 80), sin embargo no ha sido usado, por el profesor, para esta clase.



Entre dos números racionales siempre hay otro racional

- Ejemplo: queremos encontrar un número racional entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{5}$. Un modo sencillo de hacerlo es hallar su promedio: $\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\right):2=\frac{3}{5}$.

Entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ podemos hallar otro racional, aplicando el mismo criterio de calcular el promedio: $\frac{5}{10}$.

Se puede repetir el procedimiento, hallando el promedio entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{5}{10}$; luego entre $\frac{2}{5}$ y el nuevo promedio calculado.... y así indefinidamente.

Al afirmar que entre dos números racionales siempre hay otro racional, queda implícito que entre dos racionales existen infinitos racionales. Por eso se dice que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales es **denso**.

Fig. 80. La forma de abordar la noción de densidad de $\mathbb{Q}$en $\mathbb{R}$ en el libro de texto usado por el profesor.

En el minuto veintiocho y veintinueve (M28) y (M29) el profesor continua preguntando ¿qué más me podrían decir? (se refiere a las propiedades de los números racionales) pregunta que no es respondida por los alumnos, nuevamente realiza la misma pregunta y ante la no muy numerosa respuesta de los alumnos afirma: “aunque entre dos números racionales hay infinitos números racionales quedan ‘huecos’ que no se pueden llenar con números racionales”. Nuevamente realiza la afirmación para que los alumnos la copien en sus cuadernos y luego pregunta ¿con qué se podrán completar?, un alumno responde “con números racionales”, ¿con números cómo? pregunta el profesor, algunos alumnos responden “racionales” y otros “irracionales” a lo que el profesor afirma “con números irracionales”.

En estas expresiones es posible detectar un conflicto semiótico de tipo interaccional que el docente intenta sortear indicando los números que permiten completar la recta numérica real, rechazando la afirmación de algunos alumnos. Se presenta entonces una SDC de nivel bajo ya que la resolución de conflictos es ineficaz, limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo un significado atomizado, sin conexiones matemáticas que viabilicen su estabilidad y reutilización en tareas posteriores entre el conjunto $\mathbb{Q}$ y sus propiedades.

Respecto de la noción de completitud del conjunto de los números reales Bergé y Sessa (2003) nos muestran la complejidad didáctica de esta noción que se manifiesta en las dificultades que presentan los alumnos de primer año de la Universidad.

> "Pensando en la noción de conjunto de números reales, nos parece que enfrentar al alumno con la problemática de la completitud –esto es, hacer vivir en la clase tanto la necesidad de la completitud del sistema numérico como el hecho de que esta propiedad no se deduce de otras conocidas- requiere que se haya instalado en el aula la necesidad de fundamentación, lo cual supone un recorrido anterior, una cierta "madurez matemática", haber salido del plano de lo evidente y un cambio en el tipo de racionalidad"(pp.193–194).

El docente intenta entonces reducir la complejidad epistémica solicitando algunos ejemplos a los alumnos, ellos proponen: "raíz de siete", "raíz de dos", respuestas que son aceptadas por el profesor. Deja así instalado un conflicto epistémico potencial, "latente" que, ante un eventual tratamiento más adelante en el tiempo en otros niveles educativos, emergerá dejando a la "vista" dificultades en su conceptualización.

6.1.1.3 Configuración epistémica 1(c): el conjunto de los números irracionales y sus propiedades

A partir del minuto treinta y uno (M31) (figura 81) el profesor comienza a introducir el "conjunto de los números irracionales", pregunta (P4) ¿quiénes son los números irracionales?, pocos alumnos responden (A5), inmediatamente el profesor define dichos números (P3) como "aquellos números que no pueden ser expresados mediante una razón" (M32-33) mientras los alumnos copian lo expresado por el profesor (A2).

Algunos alumnos dan ejemplos de estos números (A5), el profesor nuevamente pregunta (P4) ¿qué es el conjunto de los números irracionales? pregunta que no es respondida por los alumnos y que él mismo se encarga de responder, inmediatamente define (P3): "es el conjunto de números que no pueden expresarse mediante una razón", luego agrega: "tienen infinitas cifras decimales no periódicas" (P3). Los alumnos copian lo expresado por el profesor (A2).

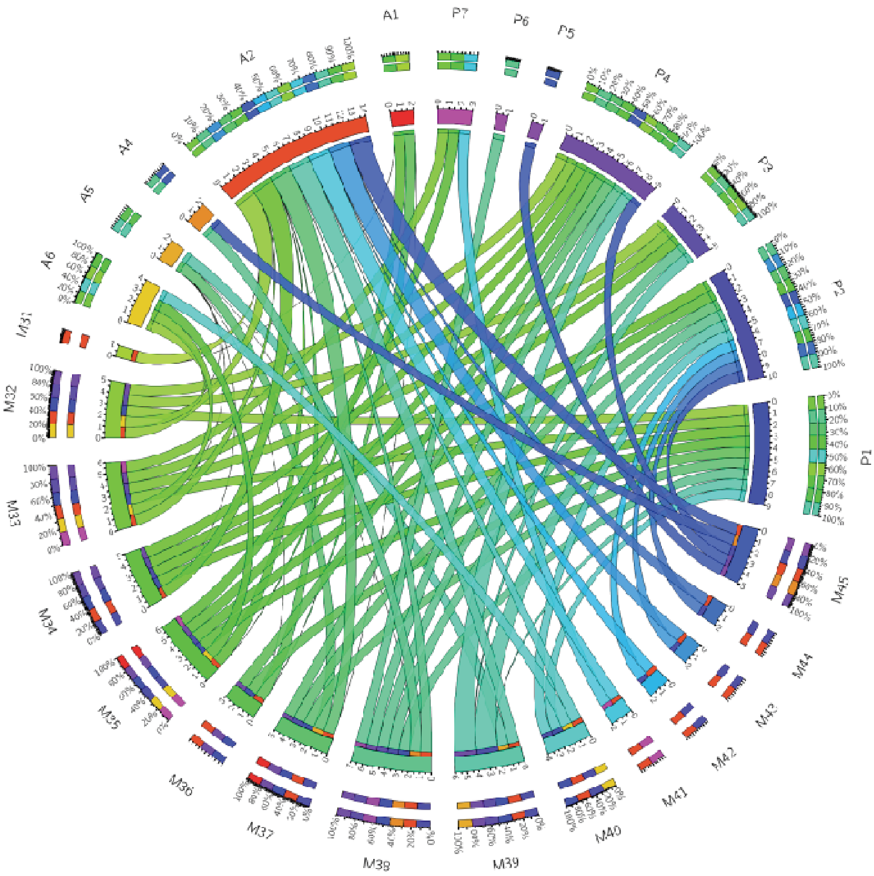


Fig. 81. Actividad realizada por alumnos y profesor desde los treinta y uno a los cuarenta y cinco minutos de clase.

El docente introduce dos definiciones de número irracional, ambas relacionadas con la definición de número racional, una como un número que no es posible expresarlo como razón de números enteros y otra como un número cuya expresión decimal sea infinita no periódica. El profesor no lleva adelante un proceso de estudio de ambas definiciones que creen un "sentido" para el alumno sino que, además, introduce la noción de "conjunto de los números irracionales".

El docente intenta comenzar a transitar la CE-aritmética utilizando un lenguaje conjuntista, no realiza una distinción clara entre número y conjunto, allí un conflicto semiótico epistémico de tipo potencial que puede presentarse. Se trata de una SDC de nivel bajo entre la noción de número irracional y el conjunto de los números irracionales ya que la inestabilidad del conocimiento previo restringe la eficacia de las intervenciones y condiciona la emergencia de conocimientos estables.

Nuevamente los alumnos dan algunos ejemplos (A5): raíz cuadrada de dos, raíz cuadrada de siete,π, el profesor señala (A1) a π como un número "notable" indicando que existen otros números notables no dando ejemplos de los mismos.

Esta distinción que plantea el docente "esos son números notables, hay otros más", deja entrever que los números irracionales pueden diferenciarse entre aquellos que son notables y otros que no los son, no dando una razón por la cual se denominan así y estableciendo un posible conflicto semiótico interaccional y epistémico.

Desde la matemática sí existe una clasificación entre números irracionales, se trata de números irracionales "algebraicos" y "trascendentes", si bien el profesor no prevé esta clasificación ni tampoco el currículo vigente.

Aquí se pone de manifiesto una SDC "truncada" entre la CE-aritmética y la CE-aprox que queda planteada para cuando el alumno transite nuevos niveles educativos.

Luego retoma la última definición que implica la no periodicidad en sus cifras decimales para compararla con los números racionales periódicos y resaltar su diferencia. Los alumnos copian lo expresado por el profesor (A2).

Para el minuto treinta y cinco (M35) el profesor anota en el pizarrón ejemplos de números irracionales (figura 81) los alumnos le dictan algunas las cifras decimales a partir de lo mostrado por una calculadora y el docente enfatiza escribir más cifras decimales dada la infinitud de los números. Resalta que se ha "acotado" las cifras decimales y que se ha cometido un "error" (tabla 32).

D1: Fíjense lo que he hecho yo ahí (refiriéndose a cuatro números irracionales aproximados a cuatro cifras decimales), he acotado a cuatro números pero tienen infinitas, o sea estoy cometiendo un error. D1: ¿Si?... D1: Cuando empiezo a tomar un número finito de cifras estoy cometiendo un error, estoy aproximando… ¿está?

Tabla 32. Expresiones del docente respecto de la aproximación.

El docente en este caso sí propone una interacción entre las configuraciones

CE-aritmética y la CE-aprox, pero no la aprovecha para estudiar la aproximación de los números irracionales, toma la decisión didáctica de dejar para otra clase el abordaje de esta noción.

Luego pregunta (P4) a los alumnos: "antes nombraron a raíz cuadrada de dos y raíz cuadrada de siete ¿cómo podríamos definir a esos números?..." al no recibir respuesta reformula la pregunta: ¿Haber… la raíz cuadrada de dos es la raíz de un número…? ¿Qué número?... "par" responde (A5) un alumno, parece que el profesor desestima el aporte del alumno y afirma (P1) "es un número natural cuyo resultado no es natural, entonces las raíces de números naturales cuyo resultado no sea natural", "raíz de dos, raíz de tres, raíz de siete"…tendríamos que ver el valor numérico de esas raíces…"

En el minuto treinta y siete (M37) el profesor pregunta (P4) a los alumnos ¿cómo se llamaban estos números? un alumno responde "irreales". El docente no responde a esta expresión dada por el alumno, parece no escucharlo.

En el minuto treinta y ocho (M38) pregunta a los alumnos (P4) ¿conocen algunos criterios para hallar números irracionales? pregunta que no es respondida por los alumnos, seguidamente el profesor afirma (P1) "podemos inventar algunos números con un cierto criterio…", seguidamente escribe en el pizarrón (P2) un ejemplo.

Un alumno pregunta (A4) ¿siguen siendo parte de los irracionales?, el profesor le responde “claro porque este número…” (escribe en el pizarrón otro ejemplo)(P2) “…lo acabo de inventar con un criterio personal”.

Nuevamente el docente produce una interacción entre las configuraciones

CE-aritmética y la CE-aprox y al hacerlo provoca un conflicto semiótico de tipo epistémico e interaccional con el alumno que pregunta ¿siguen siendo parte de los irracionales?, no sabe si el conflicto queda resuelto por el sólo hecho del profesor expresar “claro porque este número lo acabo de inventar con un criterio personal”, el alumno parece cuestionar algunas de las diferentes escrituras de un número irracional a saber, como irracionales cuadráticos, con letras o con cifras decimales infinitas.

En el minuto treinta y nueve el profesor pregunta (P4) ¿alguno que me puedan decir ustedes? (se refiere a algún número irracional con un “patrón” en sus cifras decimales) un alumno responde “0,5453…”, otro alumno expresa “0,2468…”

En el minuto treinta y nueve (M39) el docente pregunta “entonces el conjunto de los números irracionales ¿tiene principio y tiene fin?, pregunta que induce la respuesta negativa en el alumno por el tono de voz empleado por el profesor. “Nooo” (algunos alumnos). Seguidamente el profesor expresa (P1) “por lo tanto es un conjunto infinito”[4].

Los alumnos copian en el cuaderno (A2). Posteriormente pregunta (P4): ¿entre dos números irracionales hay más números irracionales?, algunos alumnos responde afirmativamente a lo que el profesor responde con una afirmación: “es un conjunto denso”.

[4] Una característica esencial de los conjuntos infinitos es la siguiente:“un conjunto infinito puede ser semejante a alguno de sus subconjuntos propios, mientras que un conjunto finito nunca podrá ser semejante a uno de sus subconjuntos propios” (Apostol, 1996, 47).

En el minuto cuarenta (M40) afirma "entre dos números irracionales hay infinitos números irracionales", "es un conjunto denso"[5].

Nuevamente el docente considera "transparente" a la noción de densidad, esta vez con números irracionales, no gestiona un estudio de esta noción con los alumnos, todo queda en un plano superficial por lo que queda latente un conflicto semiótico de tipo epistémico.

Reina, Wilhelmi, Carranza y Lasa (2014) estudian la problemática didáctica de la densidad del conjunto de los números irracionales en formación de profesores, ésta se manifiesta en las respuestas de los estudiantes para profesor donde surgen diferentes dificultades en la construcción de dicha noción que la vuelven "no transparente" para su apropiación.

El profesor posteriormente expresa "los números irracionales completan toda la tabla" (probablemente refiriéndose a la completitud de la recta numérica real) "hay completitud en la tabla", luego recuerda los huecos de la recta numérica que se trabajó con anterioridad y manifiesta: "hay completitud", los alumnos copian en sus cuadernos (A2). Allí nuevamente hace su aparición un conflicto semiótico interaccional que queda en estado residual.

Del minuto cuarenta y uno al cuarenta y cinco el profesor dibuja en el pizarrón los conjuntos numéricos (figura 82) y pregunta ¿el conjunto de los números irracionales abarca al de los racionales? Nuevamente una pregunta que induce la respuesta negativa en el alumno por el tono de voz empleado por el profesor. "Nooo" (algunos alumnos).

La SDC continúa en nivel bajo ya que la resolución de conflictos es ineficaz (parcial o totalmente), limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo, en todo caso, un significado atomizado, sin conexiones matemáticas que viabilicen su estabilidad y reutilización en tareas posteriores.

[5] "Se dice que un conjunto A de números reales es denso si todo intervalo abierto contiene un punto de A" (Spivak, 1992, 183).

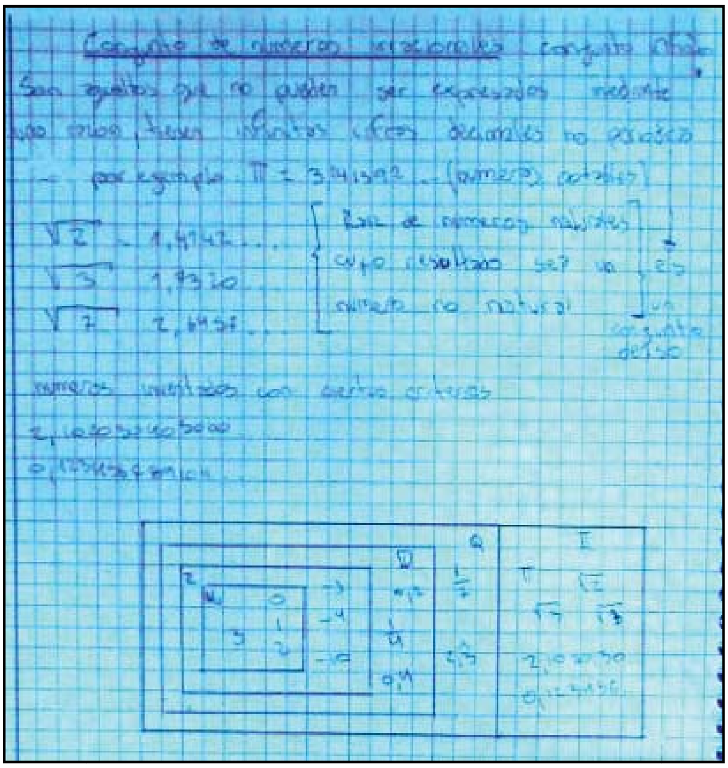


Fig. 82. Toma de apuntes de un alumno, en clase, entre el minuto 30 y el 45.

6.1.1.4 Configuración epistémica 2 : clasificación de números reales

El docente 1, a partir del minuto cuarenta y tres, propone una tarea para los alumnos, dibuja una tabla de doble entrada en donde los alumnos deben marcar con una cruz si los números allí expresados pertenecen al conjunto numérico que se muestra (figura 83).

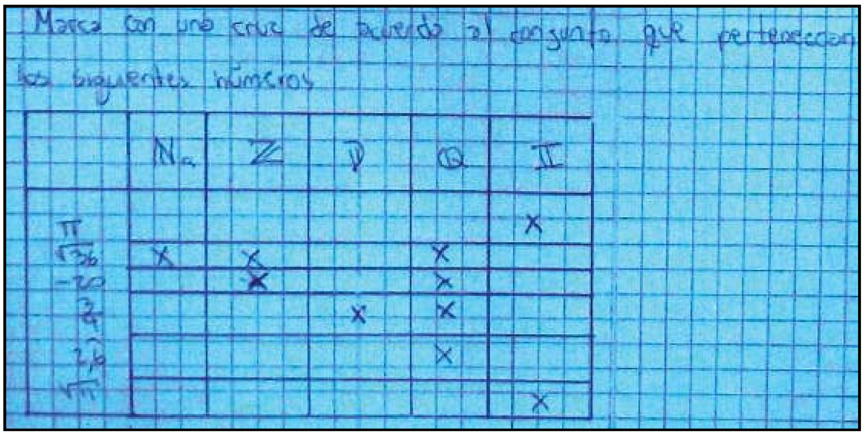


Fig. 83. Producción escrita de un alumno, en clase, entre el minuto 43 y el 51.

Los alumnos comienzan a realizar la tarea completando la tabla, el profesor recorre los bancos observando el trabajo y despejando dudas.

Observando la figura 84, en el minuto cuarenta y seis (M46) un alumno manifiesta dudas con respecto a la raíz cuadrada de treinta y seis preguntándole (A4) al profesor si es un número entero , éste último hace pública la respuesta (P3).

El profesor analiza públicamente el aporte de un alumno sobre la raíz cuadrada, les expresa: “las raíces de índice par y radicando par ¿admiten cuántos resultados?”, él mismo responde su pregunta “dos”, “más y menos”, “nosotros por defecto hemos tomado el positivo pero si tomamos el negativo tendríamos que marcar el negativo”.

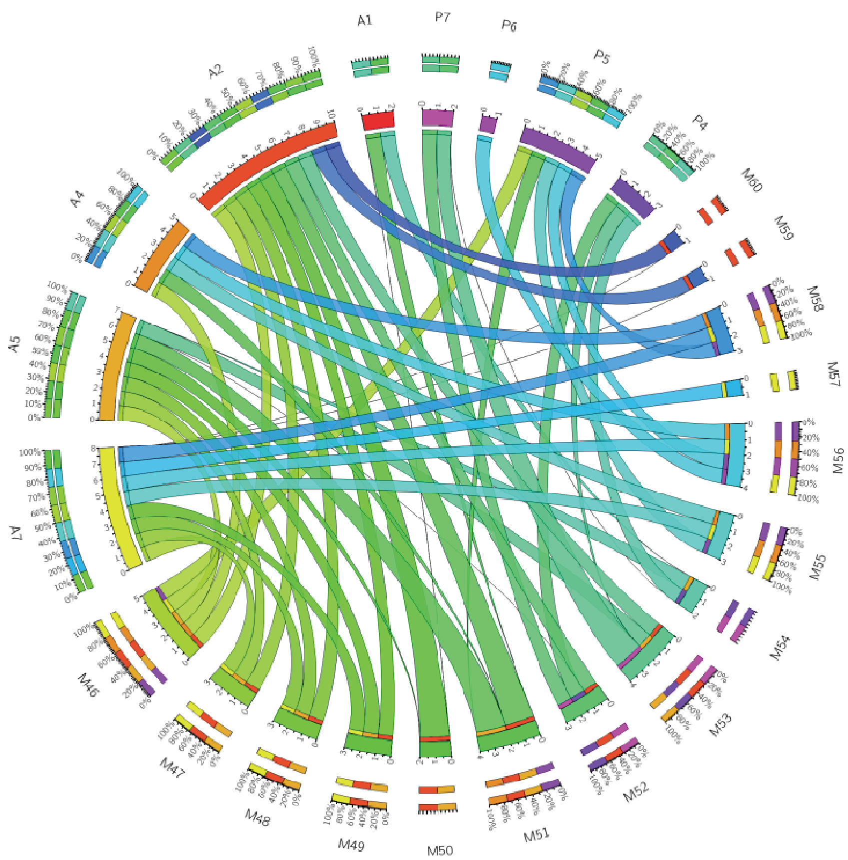


Fig. 84. Actividad realizada por alumnos y profesor desde los cuarenta y seis a los sesenta minutos de clase.

El profesor revela la forma de definir raíz enésima de un número real que se trabaja en días anteriores a la clase observada (figura 85).

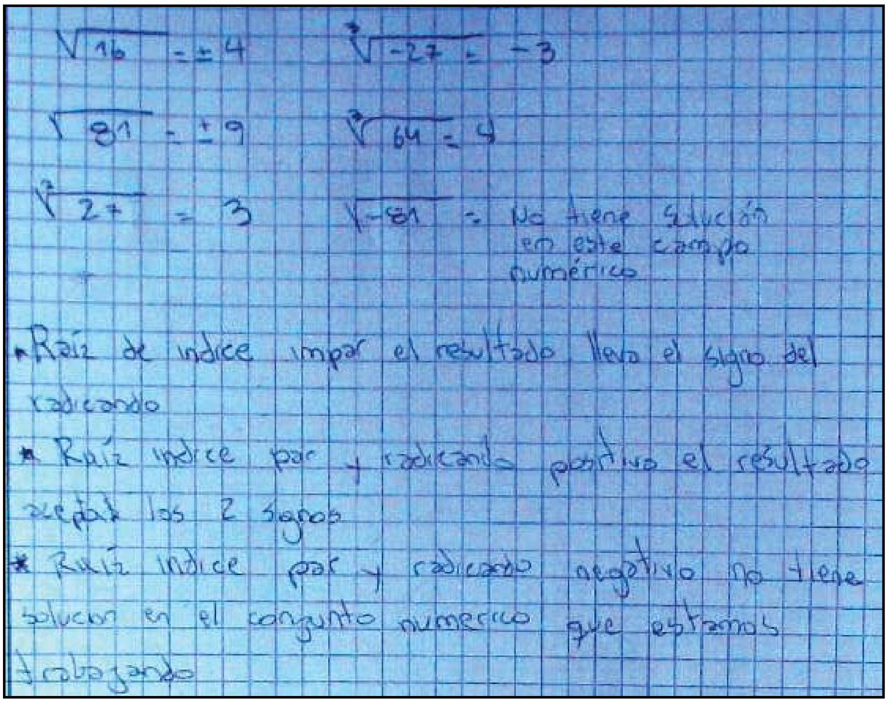
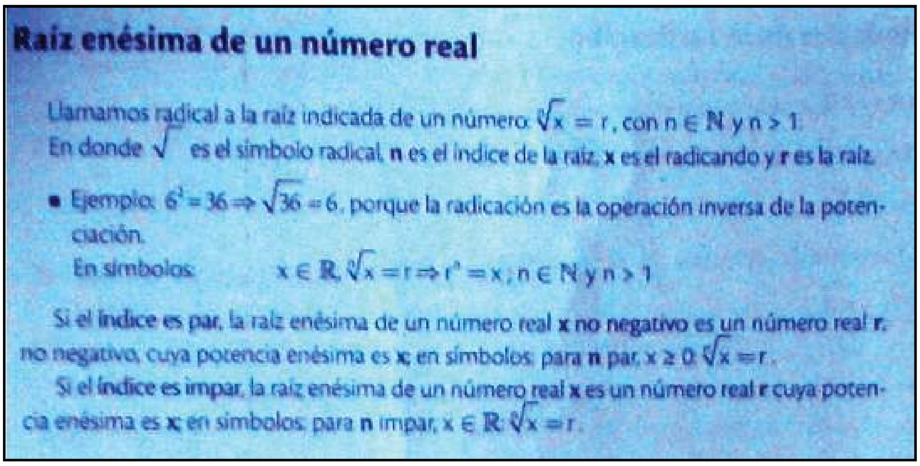


Fig. 85. Toma de apuntes de un alumno en clases anteriores a la observada.

Este último comentario plantea una distancia entre la noción matemática de raíz enésima de un número real el cual admite sólo una raíz positiva, esto último plantea un conflicto epistémico interaccional.

El libro de texto que el profesor manifiesta seguir muestra correctamente la definición (figura 86).



Raíz enésima de un número real

Llamamos radical a la raíz indicada de un número: $\sqrt[n]{x} = r$, con $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$.
En donde $\sqrt{\ }$ es el símbolo radical, **n** es el índice de la raíz, **x** es el radicando y **r** es la raíz.

- Ejemplo: $6^2 = 36 \Rightarrow \sqrt{36} = 6$, porque la radicación es la operación inversa de la potenciación.
  En símbolos: $x \in \mathbb{R}, \sqrt[n]{x} = r \Rightarrow r^n = x; n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$

Si el **índice es par**, la raíz enésima de un número real **x no negativo es un número real r** no negativo, cuya potencia enésima es **x**; en símbolos: para **n** par, $x \geq 0$: $\sqrt[n]{x} = r$.

Si el **índice es impar**, la raíz enésima de un número real **x** es un número real **r** cuya potencia enésima es **x**; en símbolos: para **n** impar, $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt[n]{x} = r$.

Fig. 86. Definición de raíz enésima de un número real dada por un libro de texto usado por el profesor.

En el minuto cincuenta y cuatro (54) el profesor pregunta ¿qué pasa con el seis, es un número decimal?...muy pocos alumnos responden…nuevamente el profesor va hacia el pizarrón y expresa: "haber yo voy a expresar este número … sesenta sobre diez…(figura 87) ¿es un número decimal?... algunos alumnos responden que no otros que sí lo es , varios alumnos aportan (A7) y debaten si es o no decimal , un alumno expresa "tienen que tener coma".

$$\frac{60}{10}$$

Fig. 87. Cuestionamiento del profesor a los alumnos si el número escrito en el pizarrón es o no decimal.

Otro alumno expresa "es racional", el profesor marca en la tabla dibujada en el pizarrón el casillero correspondiente al conjunto $\mathbb{Q}$ pero quedan vacios los casilleros del conjunto $\mathbb{D}$ en los números raíz cuadrada de treinta y seis y el número –20.Esta omisión quedó plasmada en el pizarrón y en los cuadernos de los alumnos por lo que es posible detectar la emergencia de un conflicto semiótico de tipo “interaccional” que el profesor refuerza, al no dejar en claro que dichos números sí son considerados números decimales, dada la inclusión en $\mathbb{D}$ de los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$[6].

Consultados por el profesor sobre el número π (M54) algunos alumnos responden que se trata de un número irracional

En el minuto cincuenta y seis (M56) un alumno pasa a completar la tabla éste manifiesta duda si el número –20 es o no decimal, lo borra luego de consultar a sus compañeros (figura 88) manifestándose un conflicto semiótico de tipo interaccional entre pares. Algunos alumnos copian (A2) en sus cuadernos la producción del alumno.

Marca con una cruz, de acuerdo al conjunto, según corresponda los siguientes números

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$
π					X
$\sqrt{36}$	X	X		X	
-20		X		X	
$\frac{3}{4}$			X	X	
$2,\hat{6}$				X	
$\sqrt{11}$					X

Fig. 88. Producción de un alumno en el pizarrón.

[6]En teoría de conjuntos es válida la siguiente inclusión entre conjuntos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

6.1.1.5 Configuración epistémica 3: completitud del conjunto de los números reales

En el minuto sesenta y uno (M61) los alumnos continúan trabajando (A7) en la tarea propuesta por el profesor (figura 89).

En el minuto sesenta y dos (M62), un alumno realiza una pregunta (A4) al profesor mientras los demás alumnos continúan su tarea (A7) (tabla 33).

A_1: “Profe, tres cuartos, ¿no sería decimal nada más?”
P: ¿Por qué?
A_1: “Ud. dijo que los racionales incluyen a los decimales…”
P: ¡Claro!
A_1: ¿Los racionales serían, por ejemplo, 1,22222…?
P: Esos son números que no son decimales pero son racionales…
P: ¿Tres cuartos sería un número racional o decimal?
A_1: Decimal.
P: Decimal. Si es decimal es racional.

Tabla 33. Diálogo entre un alumno y el profesor.

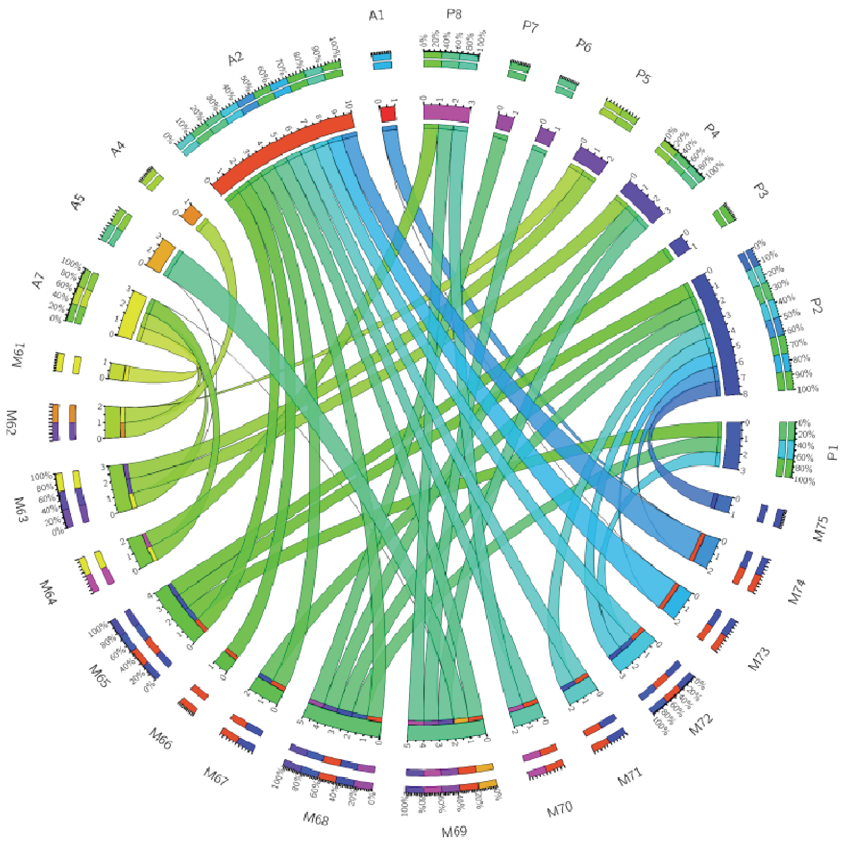


Fig. 89. Actividad realizada por alumnos y profesor desde el minuto sesenta y uno al setenta y cinco inclusive.

En este diálogo (tabla 33) es posible observar la inestabilidad del alumno en la construcción de la noción de número decimal y de número racional, la diferencia entre ambos conjuntos a pesar de que un incluye al otro. El alumno manifiesta una duda entre "expresión decimal de un número" y "número decimal"; a saber: es posible expresar a un número real en forma decimal, pero no toda expresión decimal es un número decimal. Konic (2012) estudia la problemática didáctica asociada a estos números.

En el minuto sesenta y tres (M63) el profesor les pregunta (P4) a todos los alumnos: ¿haber qué me pueden decir entre los números racionales e irracionales…? "recién habíamos comentado algo en cuanto a los huecos", algunos alumnos responden (A7) "los irracionales completan los huecos" (los alumnos se refieren a que completan con números los huecos en la recta numérica real), seguidamente el profesor responde (P5) y afirma: "entonces con eso completamos toda la tabla".

No sabemos exactamente a qué se refiere el profesor cuando expresa: "completamos la tabla", seguramente a la propiedad de completitud del conjunto de los números reales, nuevamente se plantea un conflicto epistémico interaccional.

Esta última es una propiedad que implica una complejidad didáctica importante, la conceptualización por parte del alumno de esta noción recién podrá completarse en niveles terciarios o universitarios (Bergé y Sessa, 2003) y Bergé (2010).

En el minuto sesenta y cinco (M65) el profesor define (P1) y escribe en el pizarrón (P2) el conjunto $\mathbb{R}$ como unión del conjunto $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ (figura 90) y les dicta (P3) dicha definición mientras los alumnos copian en sus cuadernos (A2).

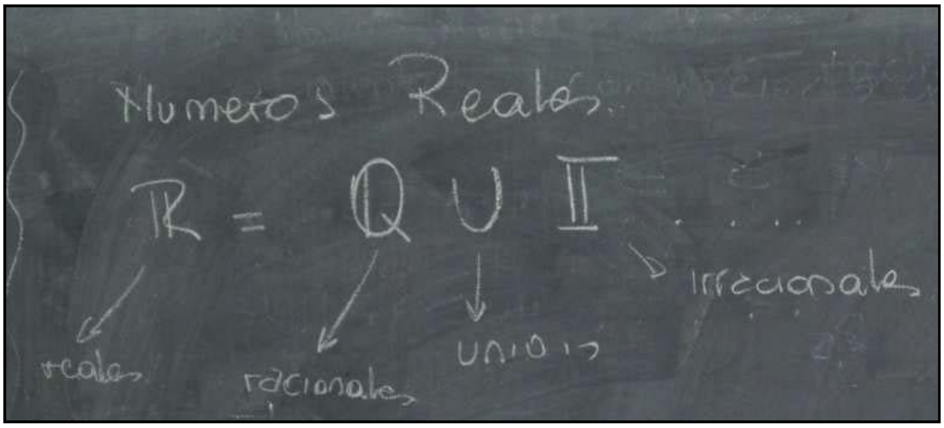


Fig. 90. El profesor define el conjunto de los números reales y luego escribe en el pizarrón.

En el minuto sesenta y ocho (M68) el profesor pregunta (P4) por las características de los números reales, algunos alumnos responden. También recorre los bancos donde se encuentran los alumnos (P8).

En el minuto sesenta y nueve (M69) un alumno responde (A5): "completan la tabla" el profesor responde: "¡muy bien, esa es una de las características de los números reales!", luego agrega: "completan toda la recta numérica", "llenan los huecos", "es denso", "es infinito" y nuevamente afirma: "completan toda la tabla", mientras los alumnos copian (A2) lo escrito en el pizarrón y lo expresado por el docente. Para algunos alumnos queda registrado que la propiedad de densidad se trata de "completar la tabla" (figura 91), mientras que para otros completan la recta. Se manifiesta así el conflicto epistémico interaccional que quedará instalado "residualmente".

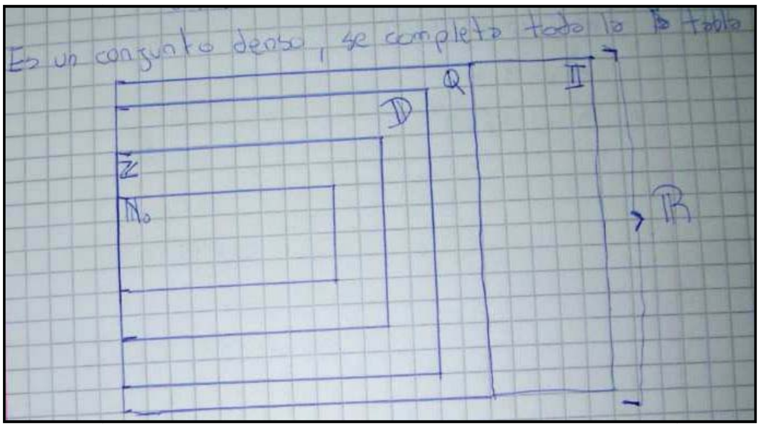


Fig. 91. Toma de apuntes de un alumno.

La SDC continúa en nivel bajo ya que la resolución de conflictos es ineficaz (parcial o totalmente), limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo un significado atomizado, sin conexiones matemáticas que viabilicen su estabilidad y reutilización en tareas posteriores.

6.1.1.6 Configuración epistémica 4: representación geométrica de números irracionales

Luego de un breve recreo de cinco minutos continua la clase de matemática.

En el minuto setenta y seis (M76) el profesor retoma lo trabajado con los números irracionales mientras escribe en el pizarrón (P2),toma como ejemplo el número raíz cuadrada de dos (M77) y realiza una introducción histórica de dicho número recordando las investigaciones de Pitágoras y el cuadrado de lado uno: “él hacía un triángulo rectángulo y decía que si hacemos un cuadrado de uno por unola diagonal era inconmensurable”, “o sea no la podían medir porque no era un número natural”, mientras los alumnos escuchan y escriben es sus cuadernos (A2) (figura 92).

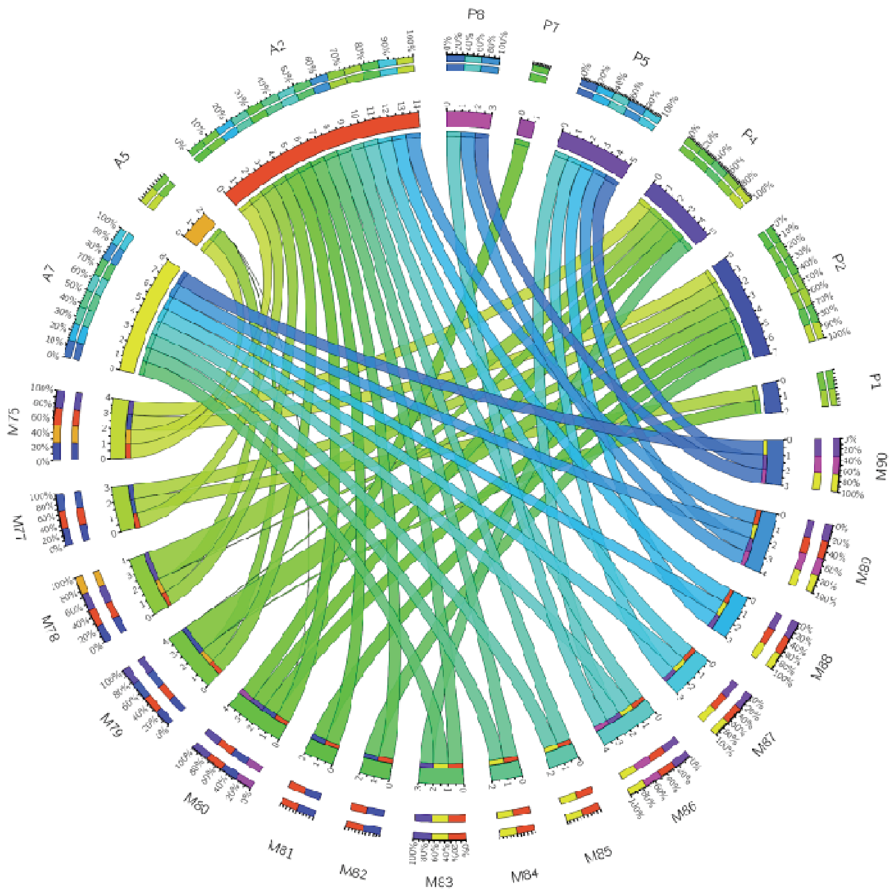


Fig. 92. Actividad realizada por alumnos y profesor desde el minuto setenta y seis al noventa inclusive.

El docente plantea así una interacción entre las configuraciones CE-aritmética y la CE-implícita y explícita, esta interacción la produce sólo a título “informativo” ya que no promueve un estudio de la noción de inconmensurabilidad entre segmentos, el alumno sólo cumple un rol pasivo, escucha y luego toma apuntes en su cuaderno.

Se presenta entonces una SDC de bajo nivel ya que la inestabilidad del conocimiento previo restringe la eficacia de las intervenciones y condiciona la emergencia de conocimientos estables entre la noción de inconmensurabilidad entre segmentos y la raíz cuadrada de dos.

En los minutos 77- 78 comienza el profesor a introducir la “representación geométrica” de la raíz cuadrada de dos a través de un triángulo rectángulo de lados iguales a uno (figura 93).

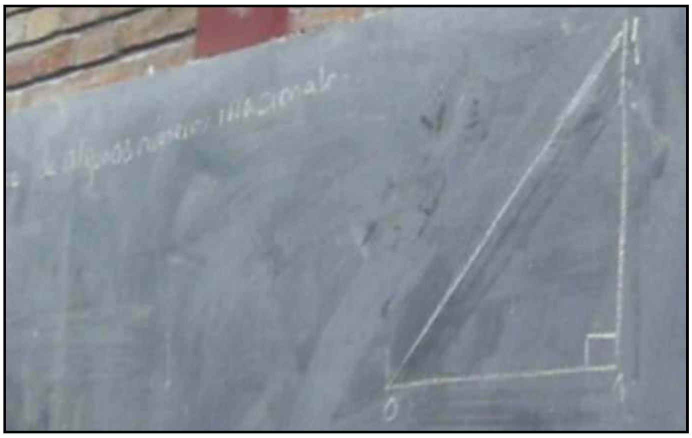


Fig. 93. El profesor estudia el surgimiento de la raíz cuadrada de dos de un triángulo rectángulo en el pizarrón.

El profesor pregunta por el teorema de Pitágoras, varios alumnos responden al unísono: “la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los catetos al cuadrado”.

El docente intenta (M78) que los alumnos apliquen el teorema a los lados del triángulo rectángulo pero es él mismo quien realiza la tarea (P2), los alumnos lo “siguen” mientras van copiando (A2) en sus carpetas (figura 94).

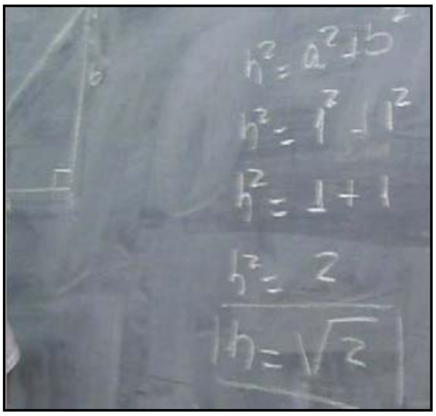


Fig.94. El docente aplica el Teorema de Pitágoras a los lados de un triángulo rectángulo en el pizarrón.

Luego comienza la introducción del procedimiento geométrico, con regla y compás, para poder representar la raíz cuadrada de dos en la recta numérica real, en base al triángulo rectángulo estudiado (figura 95).

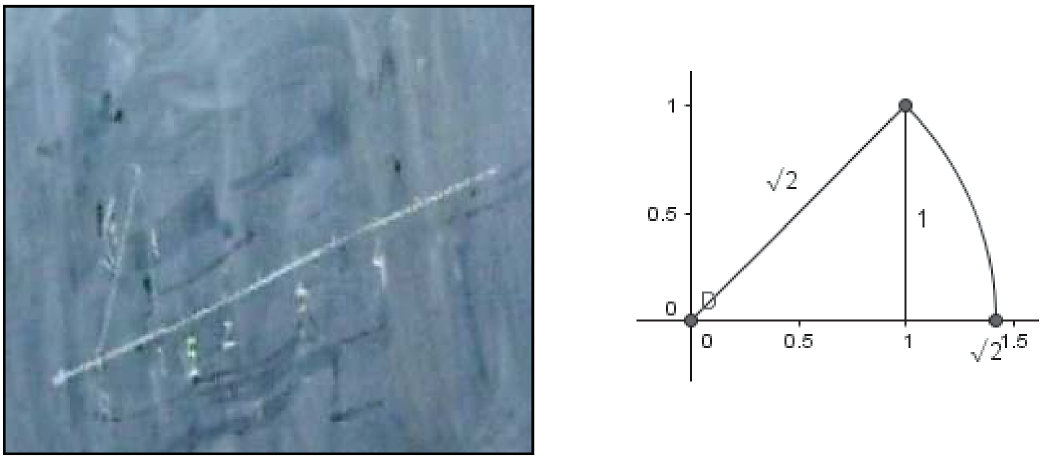


Fig. 95. Representación, por el profesor, de la raíz cuadrada de dos en la recta numérica real.

En el minuto setenta y nueve (M79) el profesor comienza la representación geométrica de la raíz cuadrada de tres basándose nuevamente en el teorema de Pitágoras: “nuestro cateto en vez de ser uno va a ser raíz cuadrada de dos”. El profesor no explica porqué toma esa decisión solo “muestra” que el método funciona al aplicar el teorema a lados raíz cuadrada de dos y uno, respectivamente. Probablemente si los alumnos “prueban” con diferentes medidas de lados sea un procedimiento más “costoso” en tiempo que “dar” la medida “por decreto”.

Posteriormente (M80) repite el procedimiento pero ahora para la raíz cuadrada de tres, basándose en la raíz cuadrada de dos obtenida anteriormente. La tarea de los alumnos se limita a “mirar” el procedimiento y a copiar (A2) lo realizado por el profesor en el pizarrón.

Esto último traerá aparejado consecuencias en los resultados de las evaluaciones de proceso y final (trimestral) que analizaremos posteriormente.

En el minuto ochenta y uno (M81) el profesor repite nuevamente, ahora para la raíz cuadrada de cuatro, el procedimiento aritmético con el teorema de Pitágoras y geométrico con el triángulo rectángulo, la tarea de los alumnos nuevamente se limita a "mirar" el procedimiento y a copiar (A2) lo realizado por el profesor en el pizarrón (figura 96).

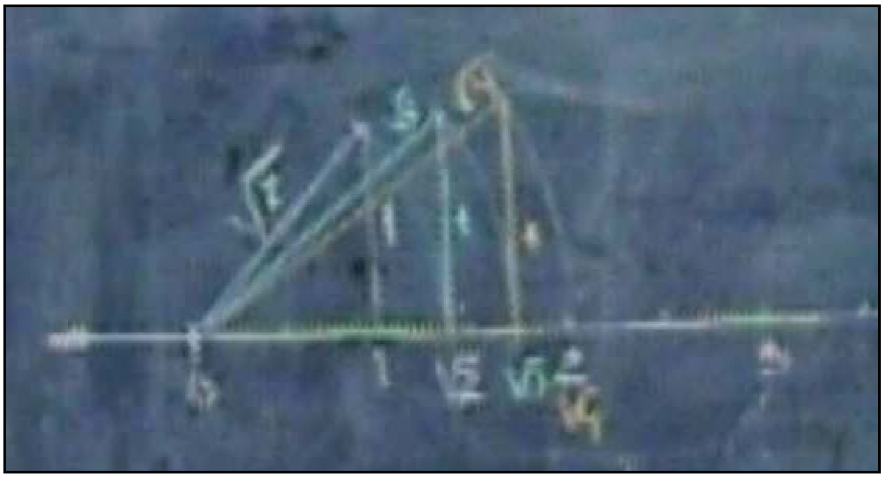


Fig. 96. El profesor ubica en el pizarrón los números raíz cuadrada de dos, tres y cuatro en la recta numérica real

En el minuto ochenta y tres (M83) el profesor les pregunta (P4) a los alumnos cómo ubicarían la raíz cuadrada de cinco, algunos alumnos hacen sus aportes y comienzan a realizar la tarea propuesta por el profesor (A7), actividad que realizarán los alumnos hasta el minuto noventa (M90), otros continúan copiando lo realizado en el pizarrón (A2).

El nivel de SDC continúa bajo ya que tanto el conocimiento previo como el emergente se mantienen inestables.

6.1.1.7 Configuración epistémica 5: representación de algunos números irracionales en la recta numérica real

Desde el minuto noventa y uno hasta el ciento uno los alumnos realizan la tarea (A7) propuesta por el profesor de ubicar en la recta numérica real algunos números irracionales como $\sqrt{5}$ y $\sqrt{10}$ (figura 97).

Al realizar dicha tarea (A7) comienzan a surgir preguntas, por parte de los alumnos, que son respondidas por el profesor (P5) mientras circula por el aula (P8).

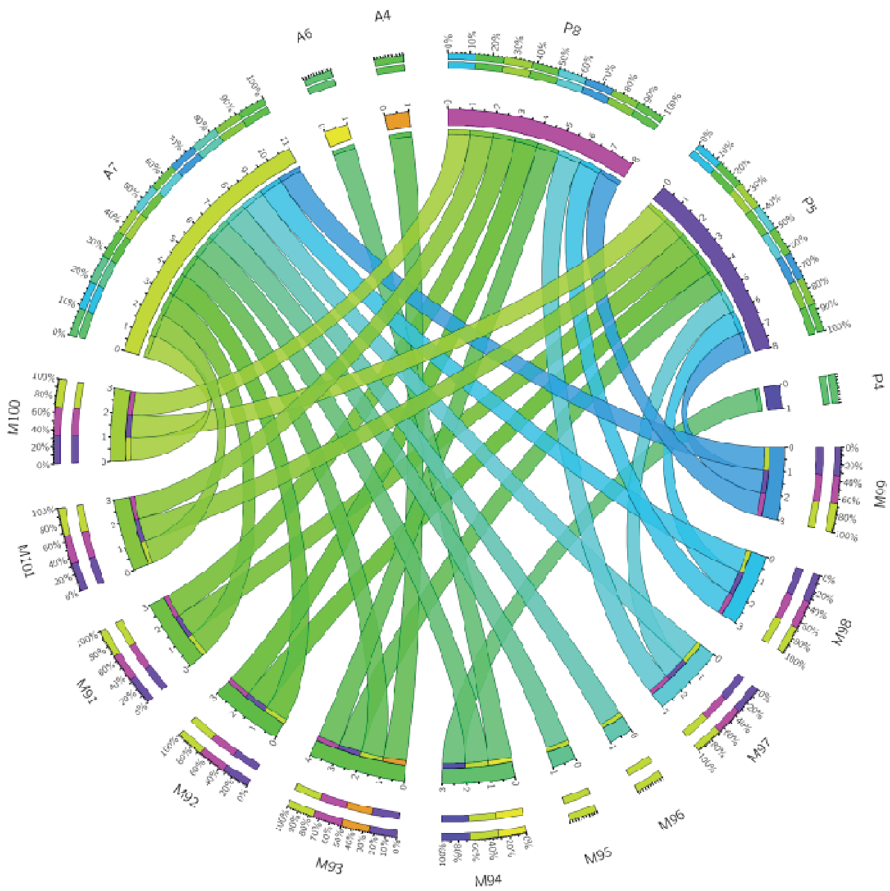


Fig. 97. Actividades realizadas por alumnos y profesor desde el minuto noventa y uno al ciento uno inclusive.

El nivel de SDC se mantiene bajo dada la inestabilidad del conocimiento previo el cual restringe la eficacia de las intervenciones y condiciona la emergencia de conocimientos estables

6.1.2 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA SESIÓN 1

6.1.2.1 Configuración didáctica 1(a): una entrada "formalista", basada en los conjuntos numéricos y sus propiedades

Se puede destacar que es el profesor quien emplea mayores tiempos en las actividades realizadas (M1 a M15), principalmente se centra en intentar rescatar los conocimientos previos de los alumnos que, sin embargo, no siempre recuerdan las nociones matemáticas o no es parte de su repertorio de nociones construidas.

El docente realiza varias preguntas (P4) a los alumnos que pocos alumnos responden y que inclusive, algunas veces, son respondidas por él mismo (P7).

Varias veces el profesor escribe en el pizarrón (P2) mientras va hablando al grupo clase, se trata de pequeñas pseudo-institucionalizaciones que va realizando el docente pero no el alumno y que el profesor luego resume en un "dictado" (P3)a los alumnos para que quede registrado en sus cuadernos.

La mayoría del trabajo de los alumnos se focaliza en "copiar" (A2) lo realizado por el profesor en el pizarrón o lo que el docente les dicta verbalmente para que quede registrado en sus cuadernos.

En la figura 76 se puede observar las escasas respuestas de los alumnos (A5) a las preguntas del profesor quien, a veces, no da tiempo suficiente para que los alumnos puedan responderlas (A6).

La participación de los alumnos, a través de preguntas al profesor, se ve reflejadas en (A4), preguntas que no siempre son respondidas y reutilizadas para poder enriquecer el tratamiento de las propiedades de los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. El profesor circula algunas veces por los bancos donde los alumnos trabajaban (P8).

En suma, si se observa la figura 76, se puede dar cuenta de que la mayor parte de la actividad la realizó el docente escribiendo en el pizarrón, dictando y preguntando, mientras que la mayor parte de la actividad realizada por el alumno se limita a la copia en sus cuadernos siendo muy escasa o nula la actividad matemática realizada.

De acuerdo a lo desarrollado hasta aquíse puede decir que este "intento" por parte del profesor de "institucionalizar"[7] al conjunto de los números naturales y al de los enteros vía una entrada "formalista", basada en los conjuntos numéricos y sus propiedades, sin una participación activa de los alumnos, sin un trabajo matemático, deja en claro que la configuración didáctica se acerca a una de tipo "magistral" "aunque las interrogaciones del profesor y la intervención del alumno hace que incluya algunos rasgos propios del tipo D (dialógico)" (Godino, Contreras y Font, 2006, 24).

6.1.2.2 Configuración didáctica 1(b): los tiempos didácticos

Si se observa, en la figura 78, los tiempos didácticos empleados (M15 a M30), las "cintas" de colores delatan nuevamente que es el profesor el que realiza la mayor parte de las actividades, los alumnos se limitan, nuevamente a copiar lo expresado por él en forma verbal o escrita.

Se debe tener en cuenta que cuando se habla de "tiempos didácticos" se lo hace entendiéndolo cómo:

> "La duración efectiva que el profesor dedica a las actividades de enseñanza y la duración que los alumnos dedican efectivamente a realizar las actividades propuestas por el profesor, y en particular, el tiempo que invierten en el estudio individual del contenido pretendido son factores determinantes del aprendizaje finalmente logrado. En consecuencia, el tiempo didáctico debemos concebirlo como un vector cuyas componentes son los valores de las duraciones temporales de las

[7]Siguiendo a Brousseau (1994):"La consideración "oficial" del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización" (p.68).

> diversas actividades docentes y discentes que tienen lugar en un proceso de estudio" (Godino, Contreras y Font, 2006,7).

Nuevamente la configuración didáctica en gran medida es de tipo "magistral" ya que es el profesor quien realiza la mayor parte de la actividad en clase, pseudo-institucionaliza nociones matemáticas complejas sin mediar un estudio donde el alumno participe activamente en este proceso. También aparecen algunos rasgos de la configuración didáctica de tipo dialógico pero sólo en pequeños lapsos de tiempo. Se trata entonces de una continuación de la configuración 1(a).

6.1.2.3 Configuración didáctica 1(c): pseudo-institucionalización de nociones matemáticas complejas

Si se observa, en la figura 78, los tiempos empleados (M30 a M45), las "cintas" de colores delatan nuevamente que es el profesor el que realiza la mayor parte de las actividades, los alumnos se limitan, nuevamente a copiar lo expresado por él en forma verbal o escrita o a encontrar algunos ejemplos de números irracionales.

Nuevamente el profesor pseudo-institucionaliza nociones matemáticas complejas, como la de densidad de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, sin mediar un estudio donde el alumno participe activamente en este proceso.

Otra vez la configuración didáctica en gran medida es de tipo "magistral" con algunos rasgos del tipo "dialógica".

Si se presta atención a las configuraciones didácticas 1(a), 1(b) y 1(c) se puede considerar como una sola configuración didáctica ya que no hay cambios en la tarea que realiza el alumno, siendo esta una condición para el inicio de una nueva configuración didáctica: "hay un momento en que el profesor 'cambia de tarea', iniciándose una nueva configuración didáctica" (Godino, Contreras y Font, 2006).

6.1.2.4 Configuración didáctica 2: participación activa de los alumnos

Si se advierte, en la figura 84, los tiempos empleados (M46 a M60), las "cintas" de colores muestran que es el alumno el que realiza la mayor parte de las actividades, a diferencia de los pasados cuarenta y cinco minutos.

Se plantean dudas por parte de los alumnos, el profesor recorre por los bancos en donde están sentados los alumnos tratando de disipar dichas dudas, hay momentos donde se exponen públicamente cuestiones relativas al conocimiento puesto en juego.

En suma los alumnos participan más activamente en este proceso de completar la tabla e identificar números y hacerlos corresponder a un conjunto numérico determinado.

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración didáctica descrita de tipo "personal" con rasgos de dialógica.

6.1.2.5 Configuración didáctica 3: la apariencia de una configuración didáctica dialógica

Si se presta atención, en la figura 89 ,a los tiempos empleados (M61 a M75), las "cintas" de colores muestran una actividad tanto de los estudiantes como del profesor "equilibrada" , con momentos en donde el trabajo es sólo del alumno, por ejemplo (M61), otros de actividad compartida, por ejemplo (M69) y alguno de actividad del profesor, por ejemplo (M75).

La institucionalización de la noción de número real, esta vez, implica mayores tiempos de trabajo y estudio compartidos entre profesor y alumno. Sin embargo bajo una apariencia de configuración didáctica dialógica se manifiesta nuevamente la de tipo "magistral".

6.1.2.6 Configuración didáctica 4: una introducción histórica anecdótica

De acuerdo al gráfico de la figura 92 es posible observar de forma global que la mayor cantidad de actividades que realizó el alumno se centra en copiar lo realizado por el profesor en la pizarra (A2) y luego en realizar la tarea propuesta por él (A7).

Por el lado del profesor se puede observar, en el gráfico, que las actividades se centraron principalmente en escribir en el pizarrón (P2), realizar algunas preguntas a los alumnos (P4) y responder algunas inquietudes de los alumnos (P5).

Es de hacer notar que si bien el profesor realiza una introducción histórica de la noción de “inconmensurabilidad”, en la hipotenusa de un triángulo rectángulo, esta no es estudiada junto a sus alumnos por lo que su introducción queda a modo de anécdota.

La introducción de un procedimiento para ubicar un número irracional, en forma geométrica, sobre la recta real es realizada por el docente en el pizarrón utilizando como argumento el teorema de Pitágoras. No se estudia el dominio de validez de dicho procedimiento, o sea si es posible emplearlo para cualquier número irracional, por ejemplo si es posible de utilizarlo en la raíz cúbica de dos. Esto último se analiza en el punto 4.1.10 donde la noción de “número construible” ocupa un lugar destacado.

Otra vez la configuración didáctica en gran medida es de tipo “magistral” con aportes del tipo “personal”.

6.1.2.7 Configuración didáctica 5: la problemática de la introducción de un procedimiento geométrico

Si observamos en la figura 97 los tiempos empleados (M91 a M101), las “cintas” de colores muestran mayor actividad realizada por los estudiantes al realizar la tarea (A7).

Centrándose la actividad del profesor en recorrer los bancos donde trabajan los alumnos (P8) y en responder las preguntas que los alumnos le realizan (P5).

La institucionalización del la noción de "representación de un número irracional en la recta real", esta vez, implica un poco más de tiempo de trabajo y estudio compartidos entre profesor y alumno. La configuración didáctica que queda determinada en gran medida es de tipo "personal" con aportes del tipo "dialógica".

Aun así surgen algunas cuestiones que no quedan claras para los alumnos como la medida de los lados del triángulo rectángulo que se emplea para ubicar a un número irracional cuadrático, algunas producciones de los alumnos, en la evaluación integradora, muestran esto último (figuras. 98 y 99).

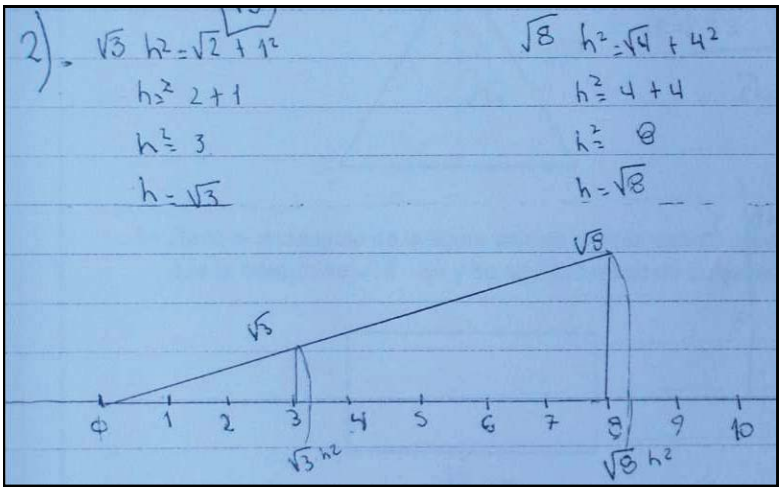


Fig. 98. Producción de un alumno en la evaluación integradora en la que intenta representar, en la recta real, la raíz cuadrada de tres y de ocho.

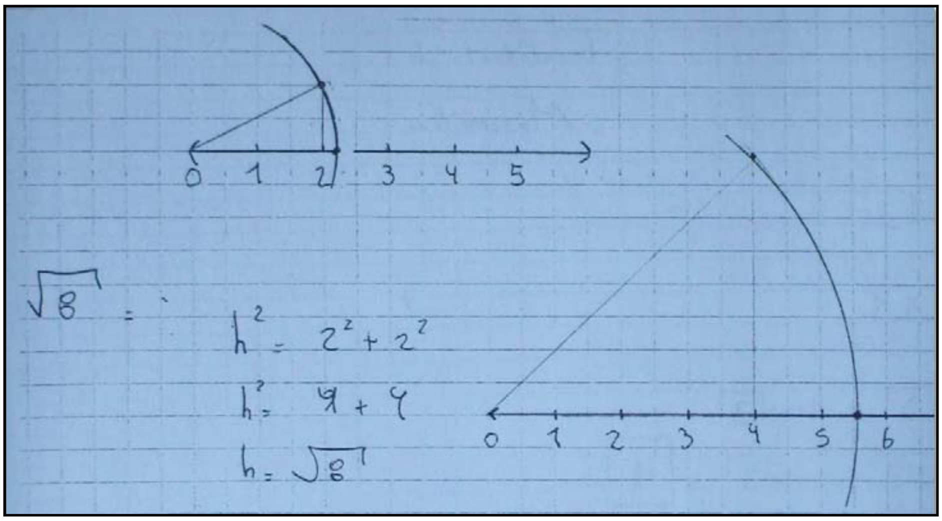


Fig. 99. Producción de otro alumno en la evaluación integradora en la cual intenta representar, en la recta real, la raíz cuadrada de tres y de ocho.

Los resultados obtenidos en las evaluaciones tanto de proceso(tabla 34) como integradora (trimestral) (tabla 35) dan cuenta que al procedimiento no se le concede el tiempo suficiente de estudió de tal manera que los alumnos se apropien de él.

Evaluación de proceso	**Representación de la $\sqrt{5}$**	**Argumentación por teorema de Pitágoras**	**No argumenta**
Correcta	12	23	
Incorrecta	13	2	1
No contestan	2		

Tabla 34. Resultados obtenidos, en evaluación de proceso, al representar un número irracional en la recta numérica real.

Evaluación integradora	Representación de la $\sqrt{3}$	Argumentación por teorema de Pitágoras	Representación de la $\sqrt{8}$	Argumentación por teorema de Pitágoras
Correcta	15	24	21	29
Incorrecta	22	13	16	8
No contestan	1			

Tabla35. Resultados obtenidos, en evaluación de integración, al representar dos números irracionales en la recta numérica real.

En el trabajo práctico, presentado por los alumnos el 07-05-13, no se les solicita representar algún número irracional en la recta numérica real, por lo que del primer contacto del alumno con el procedimiento de representación en la recta real de un número irracional, el 16-04-13, hasta la primera evaluación, el 21-05-13,a transcurrido más de un mes sin que el alumno retome con el procedimiento geométrico.

6.1.2.8 Configuración didáctica global de la sesión 1 de matemática del grupo control (docente 1)

Es posible observar la complejidad de la clase durante ciento unos minutos (figura 100).

De acuerdo análisis que se realiza, y ahora desde una visión holística, es posible determinar las actividades que realizan los actores de la clase, o sea, alumnos y profesor.

La actividad principal que realizan los alumnos en el tiempo transcurrido es (A2) copiar lo escrito u expresado por el profesor, siendo las demás actividades, como realizar preguntas (A4), dar respuestas (A5) realizar la tarea (A7), efectuadas en menor medida.

La actividad del profesor se centra principalmente en realizar preguntas (P4) a los alumnos, escribir en el pizarrón (P2) afirmar o definir un concepto (P1)y en menor medida dictar los conceptos a los alumnos (P3), responder preguntas de los alumnos (P5) o no responderlas (P6) e inclusive responderse a sí mismo las preguntas (P7).

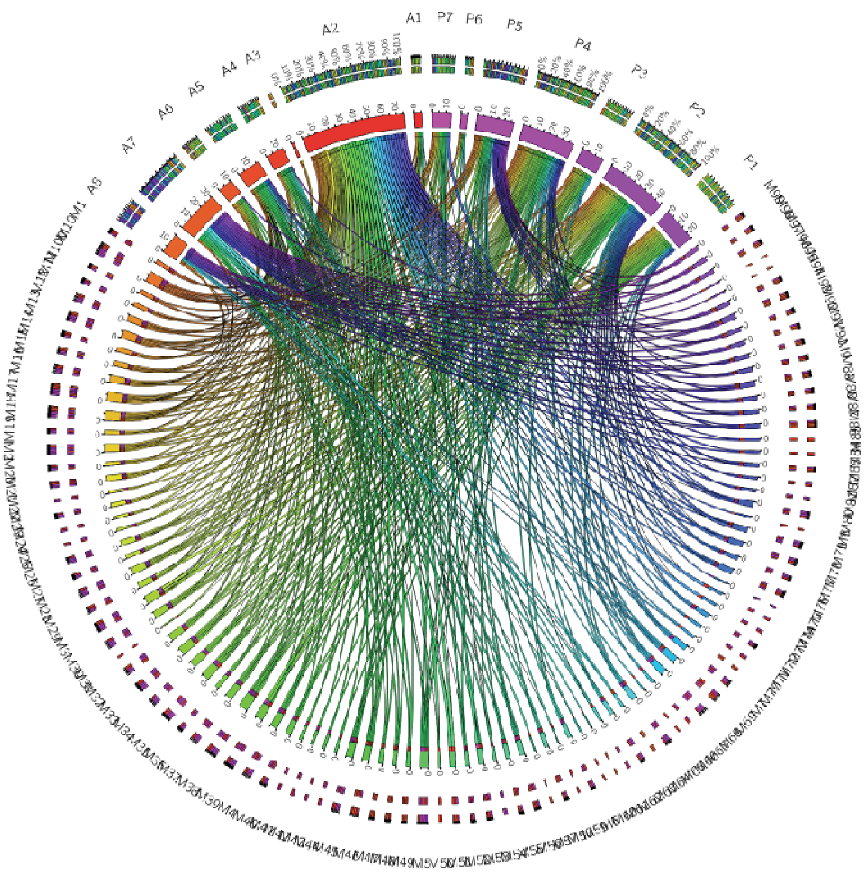


Fig. 100. Ciento un minutos de una clase de matemática según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

Es de hacer notar la “densidad” de nociones matemáticas puestas en juego en estos ciento un minutos de clases por el profesor y los tiempos empleados para estudiar cada una de estos objetos y para realizar las tareas por parte de los alumnos:

- Conjunto $\mathbb{N}$ y sus propiedades: discretitud y orden en $\mathbb{N}$, siete minutos.
- Conjunto $\mathbb{Z}$, y sus propiedades: discretitud en $\mathbb{Z}$, ocho minutos.
- Conjunto $\mathbb{D}$,y sus propiedades: densidad de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{R}$, ocho minutos.

- Conjunto $\mathbb{Q}$, y sus propiedades: densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, siete minutos.
- Conjunto $\mathbb{I}$,y sus propiedades: densidad de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$, once minutos.
- Tarea para el alumno: identificación de un número real según su conjunto de pertenencia, en tabla de doble entrada, diez minutos.
- Conjunto $\mathbb{R}$, y sus propiedades: densidad de $\mathbb{R}$,completitud de $\mathbb{R}$, seis minutos.
- Representación en la recta real de un número irracional, once minutos.
- Tarea para el alumno, se trata de ubicar un número irracional ($\sqrt{5}$) en la recta real, once minutos.
- Tarea para el alumno, debe ubicar un número irracional ($\sqrt{10}$) en la recta real, ocho minutos.
- Otras actividades realizadas: puesta en común, pasa un alumno al pizarrón a completar tabla, etc., trece minutos.

Se debe destacar que la intención del docente es "retomar" con nociones matemáticas que "en teoría" el alumno debe haber construido, o por lo menos debe haber tenido sus primeros contactos en segundo año. Esto último, se evidencia en el video de la clase, no ocurrió del modo que el docente prevé ya que los alumnos no recuerdan o no han tenido contacto con algunas de las nociones y propiedades estudiadas.

Por lo que la SDC se evidencia de nivel bajo entre los números, sus conjuntos, sus propiedades y representaciones.

Posteriormente, para el trabajo práctico que los alumnos deben realizar en sus casas y presentarlo el 07-05-13, solicitado por el profesor, éste no parece conceder importancia a las propiedades (o las considera aprendidas) de los conjuntos, a las definiciones de número irracional o real ya que estas no se solicitan en dicho trabajo ni tampoco en las evaluaciones posteriores tanto de proceso como de integración.

6.2 SESIÓN 2 EN EL GRUPO DE CONTROL 1

6.2.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDÁCTICO DE LA CLASE 2

Disposición física de los alumnos: se encuentran sentados en grupos de a cuatro según se trabaja en la clase de un profesor en la hora anterior. Continúan de esa manera para trabajar en clase de matemática de la sesión actual.

6.2.1.1 Configuración epistémica uno: representación geométrica de algunos números irracionales

Comienza la clase, el profesor realiza junto a los alumnos una "puesta en común" donde se retoma la tarea que quedó para realizar en la casa (M1-M2) (figura 101).

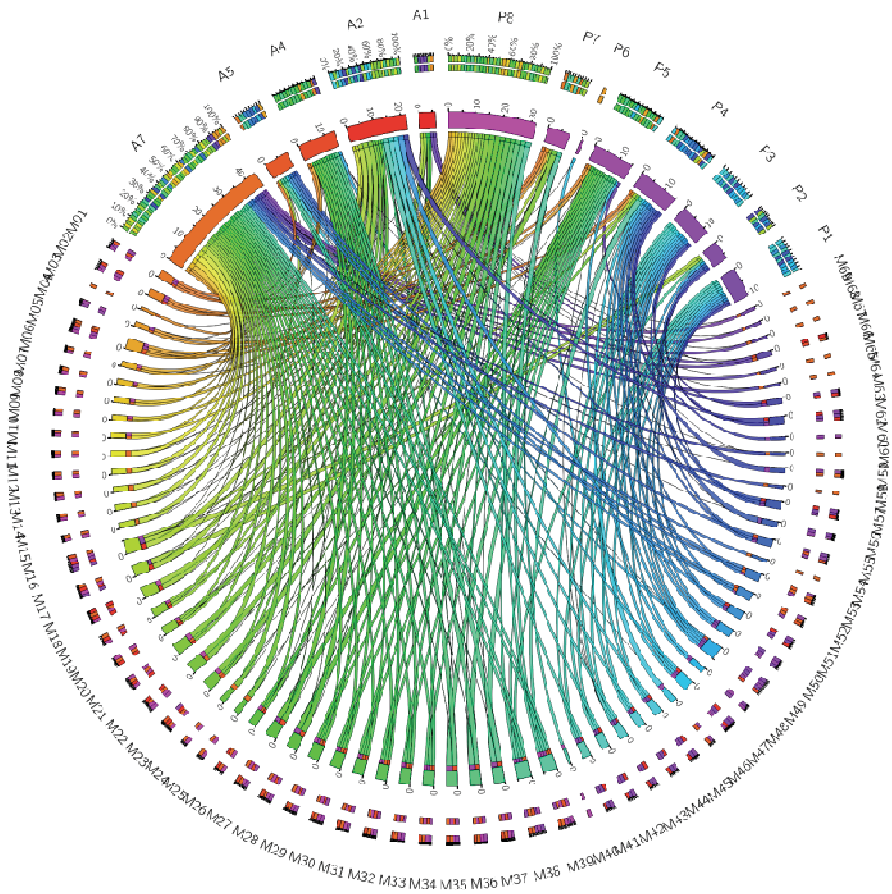


Fig. 101. Sesenta y nueve minutos de la clase dos de matemática del docente 1, actividades realizadas por los alumnos y por el profesor.

Se trata de la representación geométrica de algunos números irracionales. Algunos alumnos realizan preguntas (A4) al profesor que son respondidas por éste (P5).

El docente solicita a un alumno representar geométricamente algunos números irracionales para que aquellos que no realizan la tarea en casa la puedan completar en la clase de hoy.

Diferentes estrategias han empleado los alumnos para representar en la recta numérica real a los números solicitados. Algunos alumnos no han realizado la tarea propuesta y copian lo realizado por el compañero en el pizarrón (fig.102).

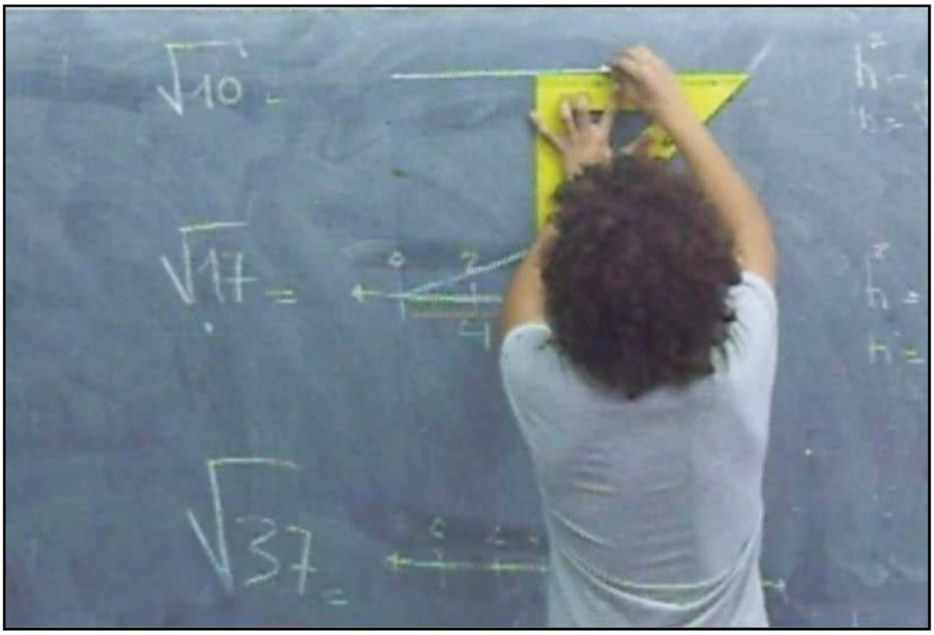


Fig. 102. Producción de un alumno en el pizarrón.

El profesor, con la tarea propuesta a los alumnos, intenta una aproximación a la CE-existencia a través de representación de algunos irracionales en la recta real. No todos los alumnos han realizado la tarea, algunos copian lo realizado por su compañero en el pizarrón, esto trae aparejado que la estrategia utilizada por éste alumno no es construida por otros.

Como expresamos en el ítem 4.2.7.1, nuevamente, el docente al no concederles a los alumnos los tiempos didácticos necesarios, aparecen dificultades que se traducen en errores en la construcción geométrica.

La SDC entre la representación de algunos irracionales en la recta real y la noción de número irracional se manifiesta de nivel bajo ya que resolución de conflictos es ineficaz, limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo, en todo caso, un significado atomizado, sin conexiones matemáticas que viabilicen su estabilidad y reutilización en tareas posteriores.

6.2.1.2 Configuración epistémica dos: las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo

En el minuto veinte (M20) el docente propone a los alumnos la siguiente actividad:

"Los siguientes números irracionales son las medidas de las diagonales expresadas en cm de cuatro rectángulos. Encontrarla medida de los lados expresados en cm. (son números naturales)".

Los alumnos copian (A2) en sus cuadernos y comienzan a realizar la tarea propuesta (A7). A partir del minuto veintiséis (M26) los alumnossolicitan cada vez más la presencia del profesor para poder avanzar en la tarea propuesta, por lo que varios alumnos le realizan preguntas (A4) al docente. Algunos de ellos no pueden responder a la tarea solicitada por el profesor.

El docente al plantear esta tarea provoca la interacción entra las CE-implícita y la CE-explícita. Para algunos alumnos esta interacción resulta problemática y se bloquean en su resolución. El docente intenta superar esto respondiendo las preguntas (P5) que surgen entre los minutos veintisiete y treinta y siete (M27-M37).

En la resolución de la tarea dada por un alumno (fig.103), es posible observar que es necesario, matemáticamente, "descartar" las soluciones irracionales y solamente considerar aquellas que son expresadas por números naturales, esto no es transparente para el alumno, esto último provoca una ruptura de contrato didáctico, los alumnos solicitan la intervención del profesor a través de sus preguntas al docente.

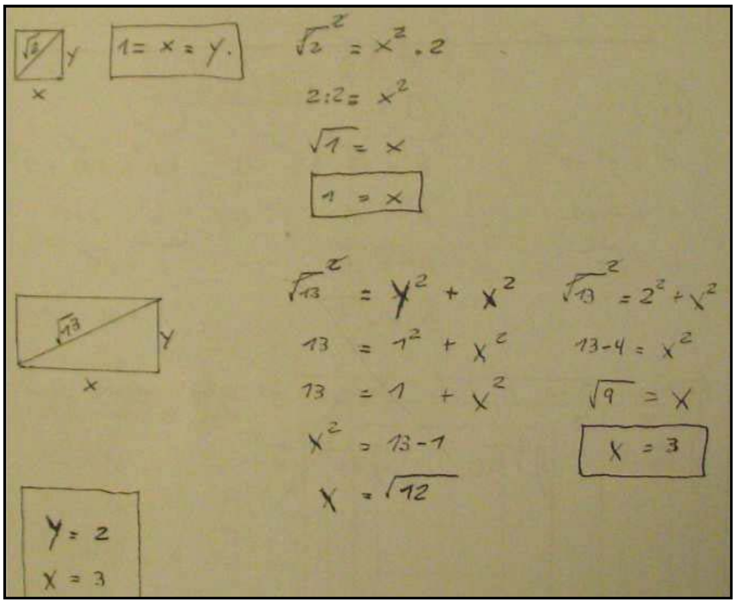


Fig.103. Producción escrita de un alumno en su cuaderno.

Si bien estas rupturas son necesarias para el avance en la construcción del conocimiento pueden generar, en algunos alumnos, un bloqueo en el avance en la construcción de la noción.

En el minuto treinta y uno (M31) el profesor solicita nuevamente que algunos alumnos escriban en el pizarrón sus soluciones a la tarea planteada. Otros, al no poder responder a las cuestiones planteadas, copian en sus cuadernos lo realizado por sus compañeros (A2). Luego les solicita que expliquen, en forma pública, cómo resolvieron la tarea. Se relata el diálogo a continuación (tabla 36).

D1: ¿Quién hizo el primero? As: Yo, yo. D1: Bueno, explícalo cómo lo hiciste. A_2: ¿El "a"? D1: El "a", ¿cómo lo hiciste? (el docente luego que plantea la pregunta sigue hablando) D1: No hemos planteado nada, sólo hemos buscado números naturales que respondan a esa condición… A_2: Porque uno al cuadrado es uno… El docente interrumpe la exposición al alumno A_2 y expresa: D1: Trabajando con un triángulo rectángulo que tiene dos catetos iguales a uno y ayer habíamos demostrado en la recta numérica que un triángulo rectángulo que sus dos catetos valen uno, ¿la diagonal cuánto vale? As: Raíz de dos. D1: Y también había dicho que Pitágoras, hace un montón de años antes del nacimiento de Cristo ya había trabajado con un triángulo en el cual los catetos valen uno y cuya diagonal no la podía medir, ¿era cómo?... ¿cómo les dije ayer?... As: […] (silencio) D1: Inconmensurable, que no la podía medir. Uhm ¡bien! (el docente da por "implícito" que el alumno interpreta la noción de inconmensurabilidad entre segmentos). D1: ¿Quién hizo el segundo? A_3: Yo. D1: A ver, ¿cómo lo hizo? A_3: Tres al cuadrado da nueve y dos al cuadrado da cuatro y nueve más cuatro da trece. (fig.26) D1: Fue probando con dos números distintos. (El profesor sintetiza la estrategia utilizada por el alumno). D1: Muy bien. D1: Bueno el otro, raíz de cinco… A_4: Dos al cuadrado da cuatro y uno al cuadrado da uno. D1: Trabajamos con dos números naturales. (Afirma lo realizado por el alumno). A_5: El último es tres al cuadrado más uno al cuadrado. (Para la raíz cuadrada de diez). D1: También, muy bien. Bien. D1: Sí me gustaron algunas producciones por ahí en cuanto a la raíz cuadrada de diecisiete y raíz cuadrada de treinta y siete, me gustaron porque estuvieron muy bien realizadas.

Tabla 36. Diálogo entre el docente y los alumnos.

El diálogo revela que no solo se trata de una ruptura de contrato sino que se observa un conflicto semiótico de tipo epistémico e interaccional.

El docente intenta "negociar" los significados destacando que los catetos de los triángulos son números naturales.

Este conflicto perdurará, quedará en estado residual, y se manifestará posteriormente en las evaluaciones tanto de proceso como integradora.

La SDC se observa de nivel bajo ya que la resolución de conflictos es ineficaz, limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo un significado atomizado, sin conexiones matemáticas que viabilicen su estabilidad y reutilización en tareas posteriores.

En la tabla 37se puede observar que la mayoría de los errores que se manifiestan en la evaluación de proceso tienen que ver con la medida de los lados del triángulo rectángulo.

Representación de la raíz cuadrada de cinco	
Medida correcta de los catetos del triángulo. (2;1)	11
Ubicación aproximada por decimales del número (sin procedimiento geométrico)	1
Medidas incorrectas de los catetos del triángulo. Por ej.: (4;1)	11
Procedimiento incorrecto(invierte la posición del triángulo rectángulo colocando en ceroel cateto de medida igual a uno)	2
No contesta	2
Total	27

Tabla37. Aciertos y errores cometidos por los alumnos en la evaluación de proceso.

Una mayor cantidad de alumnos cometen errores en la evaluación integradora (trimestral) (tabla 38) y en particular al intentar representar la raíz cuadrada de tres, ya que uno de los catetos tiene medida irracional no natural.

Así algunos alumnos piensan que deben encontrar medidas como la estudiada en clase de tipo natural aun cuando, para algunos, la resolución por teorema de Pitágoras es correcta y les indica otra cosa.

Representación de la raíz cuadrada de tres		Representación de la raíz cuadrada de ocho	
Medida correcta de los catetos del triángulo. ($\sqrt{2}$;1)	16	**Medida correcta de los catetos del triángulo. (2;2)**	26
Medidas incorrectas de los catetos del triángulo. Por ej.: (1;1)	20	**Medidas incorrectas de los catetos del triángulo. Por ej.: (4;4)**	9
No contesta	2		3
Total	38		38

Tabla38. Aciertos y errores cometidos por los alumnos en la evaluación integradora.

Por tratarse de un error que emerge en una evaluación y luego, transcurrido el tiempo, en la otra, se trata de un error de tipo “recurrente”.

> “Error reproducible cuyo uso o sentido tiene una presencia longitudinal en la actividad matemática de los sujetos, siendo insuficiente la mostración explícita del conocimiento matemático verdadero para su uso estable por los sujetos” (Wilhelmi, 2009,7).

Del diálogo y del proceso de estudio se deduce que el docente produce la interacción entre la CE-implícita, la CE- explícita y la CE-Existencia. En relación a la CE- Explícita, éste “nombra” la inconmensurabilidad y esta noción queda sólo en un plano anecdótico. Al comparar magnitudes sólo lo hace haciendo hincapié en las medidas expresados por números naturales y, al interaccionar con la CE-Existencia a través de la representación geométrica de los números en la recta real. No se estudia la cuestión de las medidas de tipo irracional que son las que causan la emergencia de errores en las producciones de los alumnos. Se produce así un conflicto semiótico interaccional.

Este diálogo continúa y aporta una nueva interacción, esta vez con la CE-Aproximación (tabla39).

D1: Bueno, se habrán dado cuenta que si yo trabajo con esos números irracionales, tiene infinitas cifras ¿sí?... por favor chicos… (a algunos alumnos parece no interesarles lo que el profesor les está explicando).
D1: Si yo trabajo con números irracionales tienen infinitas cifras decimales que no son periódicas, entonces si yo trabajo con el número raíz de dos ¿cuánto les daba?... ¿haber?
A_6: 1,4142…
D1: 1,4142 y no me acuerdo cuántas cifras más y yo tengo que trabajar con esos números, lo tengo que acotar, no puedo trabajar con mucho decimales, entonces cada vez que opero con esos números cometo errores significativos, porque los tengo que acotar, entonces el valor exacto de un número irracional que proviene de una raíz expresada de esta forma (señala a la raíz cuadrada de dos como radical en el pizarrón), éste es el valor exacto del número como raíz de dos ¿sí? (da algunos ejemplos), porque si lo trabajo con las infinitas cifras que tiene, por muchas cifras que ponga, igual tengo que acotarlo y al acotarlo voy a cometer algún error¿sí?... bien coloquen como título: valor…
A_7: ¡Profe espere, espere!
D1: ¡Ah bueno, espero, espero!

Tabla 39. Expresiones del docente respecto a la aproximación de números irracionales.

En esta continuación del diálogo el docente interacciona con la CE-Aprox apoyándose en las otras configuraciones, la CE-implícita, la CE- explícita y la CE-Existencia.

Nuevamente un conflicto semiótico interacional que queda en estado latente.

El "holosignificado" de la noción de número irracional nos da "pistas" de la interacción entre configuraciones propuestas por el profesor.

El docente propone, en principio, una interacción entre la CE-implíta y la CE-explícita para luego producir una interacción con las CE-existencia y CE-aritmética, para finalmente provocar una interacción con la CE-aproximación (figura 104).

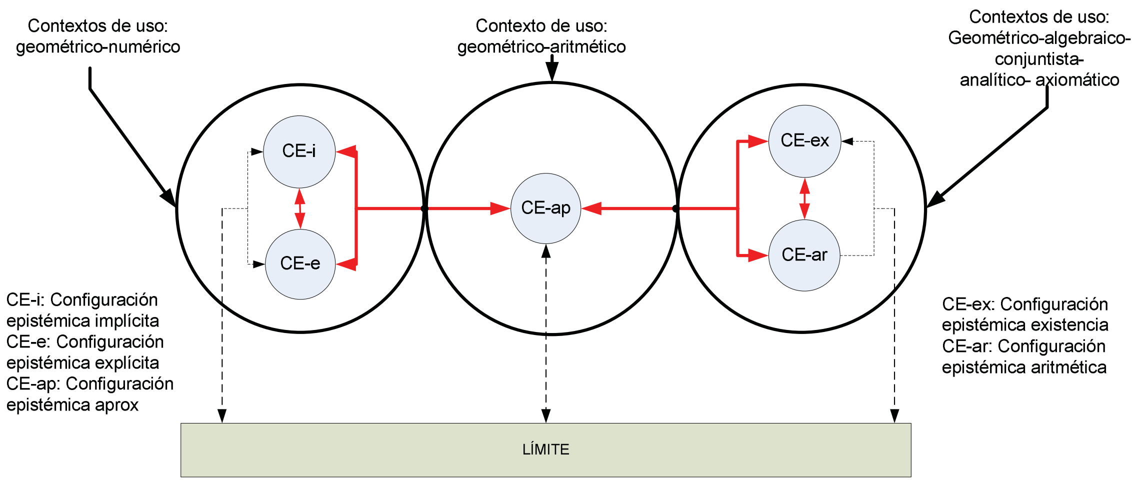


Fig. 104. Interacciones entre configuraciones epistémicas producidas por el docente 1.

El profesor emplea un contexto de uso geométrico-numérico, luego ingresa en uno de tipo geométrico-algebraico para luego arribar a un contexto de geométrico-aritmético.

Para los alumnos esta interacción, entre diferentes contextos de uso, parece no funcionar como el docente espera. Al objeto recta numérica real se lo estudia para ubicar algunos números irracionales pero el proceso de construcción geométrica, aproximada, por triángulos rectángulos cuyos catetos tienen diferentes medidas, crea un conflicto epistémico que no se logra resolver.

La noción de inconmensurabilidad entre segmentos no se estudia sólo se la nombra y queda en un plano informativo, se produce entonces una SDC truncada entre la inconmensurabilidad entre segmentos y la de número irracional.

A la noción de “aproximación” de números irracionales se la trabaja haciendo hincapié en la diferencia entre valor exacto y aproximado de un número irracional. Pero ésta queda por ahora en un plano discursivo por parte del docente quién define estas nociones y las dicta para que quede registrada en los cuadernos de los alumnos.

Por esto último la SDC se manifiesta de nivel bajo la inestabilidad del conocimiento previo restringe la eficacia de las intervenciones y condiciona la emergencia de conocimientos estables, en este caso, entre las nociones de valor exacto y aproximado de un número irracional.

Por último deja la CE-aproximación para ingresar nuevamente en la CE-Aritmética por medio de la aproximación al estudio de los radicales y de las propiedades de la radicación: "El 'abandono' de la aproximación como única vía para introducir los irracionales se realiza por medio de la discusión de la naturaleza de los 'radicales' y de la forma en que se opera con estos" (Reina, Wilhelmi y Lasa, 2012,89).

6.2.2 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA SESIÓN 2

6.2.2.1 Configuración didáctica dos: simbiosis didáctica curricular entre objetos matemáticos

El docente intenta una interacción entre objetos matemáticos desarrollados (o no) en el currículo de matemática, es allí que se produce una interacción didáctica entre ellos. En este caso se trata de la interacción didáctica entre los números irracionales, el teorema de Pitágoras y la representación geométrica de los números irracionales en la recta numérica real.

La configuración didáctica se puede caracterizar como una "mezcla" entre la de tipo personal, dialógica y magistral ya que durante algunos minutos (M3-M25) fueron los alumnos, no todos, quienes realizaron la resolución de los ejercicios. Hubo momentos de diálogo entre el docente y los alumnos (M26-M37) en relación con el conocimiento y también instantes donde el profesor define nociones a modo de pseudo-institucionalizaciones (M41-M51).

6.3 CLASE 3 EN EL GRUPO DE CONTROL (DOCENTE 1)

Disposición física de los alumnos: se encuentran sentados de a pares según la construcción física de los bancos.

6.3.1 Configuración epistémica uno: propiedades de la radicación

El profesor comienza la clase realizando una pequeña pseudo-institucionalización en el minuto uno y dos (M1-M2) recordando lo trabajado en la clase anterior, se trata de las propiedades de la radicación.

A continuación da una tarea (figura 105) para que trabajen en forma individual los alumnos y luego escoge a uno de ellos pasa que las resuelva en el pizarrón.

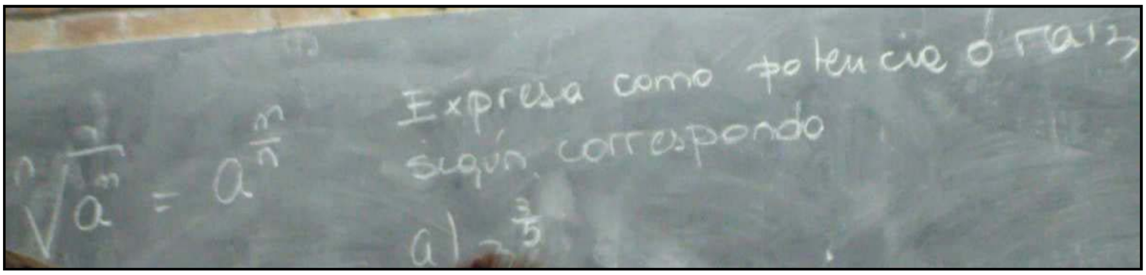


Fig. 105. Tarea propuesta por el profesor a los alumnos.

Posteriormente el docente inicia un diálogo con los alumnos (tabla 40).

D1: ¡Silencio por favor! (los alumnos no han tenido tiempo de realizar la actividad, muchos de ellos se limitan a copiar lo realizado por el compañero en el pizarrón) (A2) entre los minutos tres y diez (M3-M10) (fig. 31). D1: Hay que ver cómo hacíamos… este es tema del año pasado (el profesor más que intentar rescatar conocimientos, da por sentado que el alumno "conoce" dicha noción, lo afirma. D1: Una potencia de exponente negativo… (el profesor interrumpe su exposición al observar que el alumno que ha pasado al pizarrón tiene dificultad con uno de los ejercicios y le ayuda a solucionarlo) D1: […] se invertía la base entonces el exponente ¿quedaba?... As: […] (ningún alumno responde). D1: Quedaba positivo. As: La mayoría de los alumnos copian lo realizado en el pizarrón. D1: ¿Alguna duda con respecto a este tema? Un alumno levanta la mano. A_8: ¿Por qué en el "b" queda…? (se refiere al ejercicio b: $4^{\left(-\frac{2}{5}\right)}$ y a la solución hallada por su compañero en el pizarrón) D1: Acá, bien… (el profesor señala en el pizarrón). D1: Toda potencia elevada a un exponente negativo… (escribe en el pizarrón "a^{-b}") ¿Qué había que hacer?... A_9: Invertir el número entero. A_{10}: Invertir la base. D1: "$a^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^{b}$ "(el docente escribe en el pizarrón a modo de afirmación de lo expresado por los dos alumnos), ¿sí? (se dirige al alumno que plantea la dificultad).

Tabla 40. Diálogo del docente y los alumnos.

No se conoce si con esta expresión simbólica el alumno pueda superar su inquietud, probablemente falta un proceso de estudio de las condiciones para que esa igualdad se cumpla. Que el profesor "muestre" un objeto matemático no asegura que el alumno se apropie de él, se trata de un "contrato por ostensión" (Brousseau, 2007).

En este diálogo queda en claro que la propiedad que el profesor cree que los alumnos tienen construida se encuentra todavía en un estado inestable. Tampoco aclara los valores que puede tomar "a", por ejemplo que ocurre cuando$a$ = 0 y cuáles valores reales puede tomar "b".

El docente deja sentado entonces un potencial conflicto semiótico de tipo interaccional que, probablemente, se manifieste a través de errores al momento de poner en funcionamiento la noción.

La SDC entre las potencias de exponente fraccionario y los radicales, dada su inestabilidad, queda instalada en un nivel bajo donde la resolución de conflictos se observa ineficaz.

El aprendizaje de esta noción no sigue un tratamiento de evaluación tanto de proceso como de integración.

6.3.2 CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA DOS: RAÍCES SUCESIVAS DE UN NÚMERO REAL

Entre los minutos once al quince el docente vuelve a escribir en el pizarrón (P2) y realiza una nueva definición (P1) esta vez se trata de "raíces sucesivas" de un número real (figura 106).

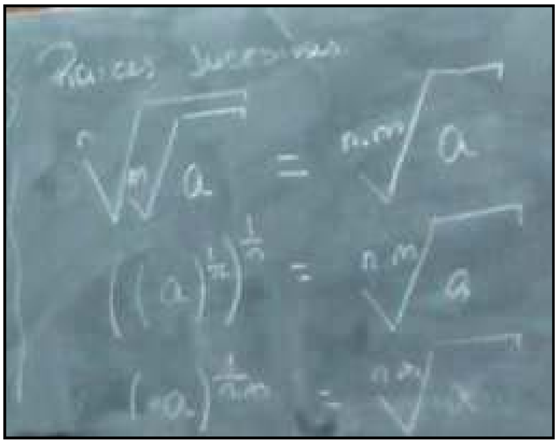


Fig.106. El docente define raíces sucesivas de un número real.

El docente no expresa qué valores puede tomar “a”, “n” y “m”, simplemente se da por supuesto que el alumno conoce estas propiedades.

Realiza algunas preguntas a los alumnos, ellos tienen una participación escasa ya que son pocos los alumnos responden (A5) (entre los minutos M10 a M14).

> “Los momentos de recuerdo e interpretación de reglas previamente establecidas, necesarias para la continuación de la actividad, desempeñan un papel clave en el proceso de estudio y marcan puntos de bifurcación e inflexión en dicho proceso. Si los alumnos no recuerdan una definición, una propiedad una técnica, la continuidad de la actividad exige la intervención del docente, lo que da lugar a nuevas configuraciones didácticas” (Godino, Contreras y Font, 2006, 64).

Se plantea entonces un conflicto semiótico epistémico e interaccional que queda en estado latente.

Nuevamente la SDC entre propiedades y las raíces sucesivas se observa de nivel bajo ya que tanto el conocimiento previo como el emergente se mantienen inestables.

El profesor luego propone un ejemplo y a continuación da “dos” ejercicios a modo de tarea para que los alumnos la realicen.

6.3.3 CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA TRES: SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Tres minutos después, en el minuto veintiuno (M21), nuevamente define una nueva propiedad, el docente va hacia el pizarrón y escribe “simplificación de radicales” (figura107).

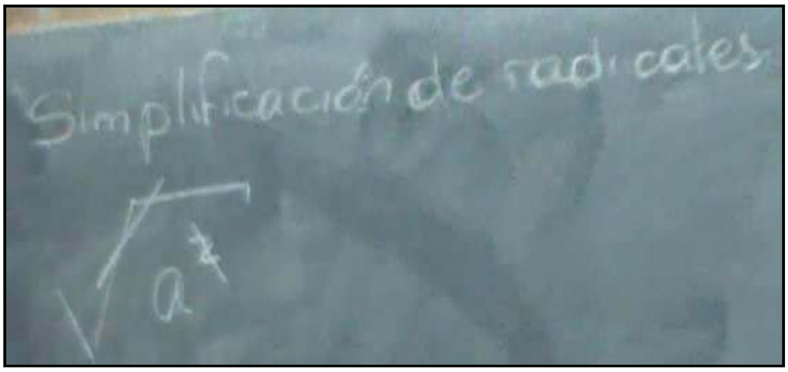


Fig.107. El profesor define simplificación de radicales.

El docente “tacha” el exponente (figura 108) y el signo radical mientras losalumnos aún están copiando (A2), luego mantiene un diálogo público con un alumno que no se logra escuchar claramente, tanto en audio como en video, y posteriormente expresa: “vamos a dividir índice por el exponente… ¿sí?”.

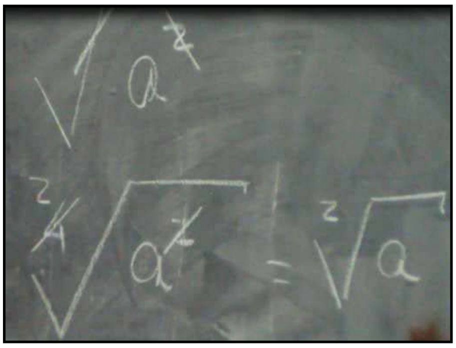


Fig.108. El profesor explica el proceso de simplificación de radicales.

Unos segundos después pregunta ¿listo?... luego agrega “una forma práctica será dividir el índice por el exponente del radicando… ¿sí? Se simplifican si son del mismo valor, sino se puede simplificar y hacer un radical reducido”.

Aquí queda planteado un conflicto semiótico de tipo interaccional potencial ya que para el profesor es transparente la simplificación entre exponente e índice del radical, pero es posible que el alumno no logre diferenciar entre "tachar" y "dividir" índice y exponente por un mismo número. Siendo más sencillo para él "tachar cosas" a modo de imitación de lo que realiza el docente.

A un alumno no le ha quedado claro esto último y pregunta al profesor, éste le responde pero estamos a cierta distancia para poder escuchar claramente el diálogo.

El profesor continua su discurso:"bueno esta operación se hace siempre que el radicando sea positivo", un alumno pregunta "¿copiamos eso?, el docente vuelve a dictar (P3) "se realiza siempre que el radicando sea positivo", los alumnos continúan copiando (A2). Luego él se dirige hacia el pizarrón y escribe (P2) tres ejercicios de aplicación (figura 109).

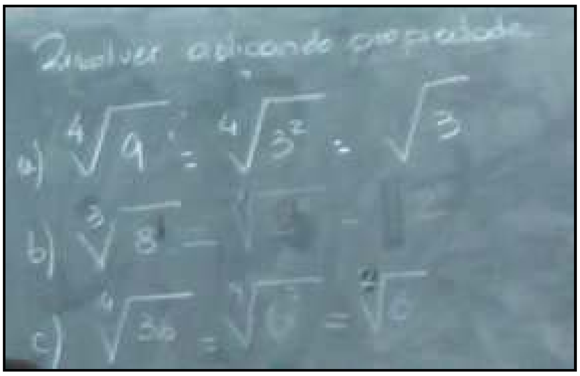


Fig.109. El profesor da ejercitación para simplificar radicales.

Ante una pregunta de un alumno es el propio docente quien realiza el primer ejercicio y al hacerlo pregunta: ¿cómo se puede expresar al nueve? (se refiere al ejercicio "a") (figura109), un alumno responde: "como tres al cuadrado", el profesor escribe los expresado por el alumno en el pizarrón y luego lo "mira" esperando la respuesta final, el alumno expresa:"la raíz cuadrada de tres" a lo que el docente agrega: "¡muy bien!, algunos alumnos expresan "bueeeena"! (en señal de aprobación).

Seguidamente el profesor hace pasar a dos alumnos al frente para que resuelvan los ejercicios, los demás alumnos no tienen tiempo de resolver la tarea propuesta, simplemente se dedican a copiar lo resuelto por sus compañeros. Es posible observar en este último párrafo que los "tiempos de enseñanza" y de "aprendizaje" son diferentes (Chevallard, 1991), el docente no da tiempo suficiente para que los alumnos puedan construir el conocimiento.

> "El tiempo de aprendizaje podemos definirlo como la duración que un alumno requiere para lograr los objetivos de aprendizaje relativos a un contenido dado. Esta duración temporal es obviamente diferente del tiempo de enseñanza, tendrá un desfase temporal respecto de la enseñanza y será específica de cada estudiante. La estimación de estas duraciones presenta dificultades importantes, no sólo por las dificultades de determinar el tiempo de estudio personal, sino también por su dependencia de los criterios de evaluación de los aprendizajes, cuando estos no se refieren meramente a aspectos algorítmicos" (Godino, Contreras y Font, 2006, 45)

Desde el minuto treinta y tres y hasta el cuarenta (M33-M40) el profesor escribe en el pizarrón (P2) una nueva tarea para realizar mientras los alumnos copian (A2) en sus cuadernos. Posteriormente les pide que, para resolver la tarea, se reúnan en grupo de cuatro alumnos.

Mientras los alumnos resuelven los ejercicios el profesor circula por el aula ayudándolos en sus dudas.

La SDC entre las propiedades de la radicación y la simplificación de radicales se observa todavía de nivel bajo ya que la resolución de conflictos es ineficaz, limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo un significado atomizado, sin conexiones matemáticas que viabilicen su estabilidad y reutilización en tareas posteriores.

6.3.4 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA SESIÓN 3

6.3.4.1 Configuración didáctica 1: una tarea ficticia

Si bien el docente plantea una tarea a los alumnos, se trata de una tarea "ficticia" ya que los alumnos no tienen tiempo de resolverla ya que el profesor solicita a un alumno escribir la respuesta en el pizarrón. Los demás alumnos se limitan a copiar lo escrito en el pizarrón.

La comparación entre esta configuración didáctica empírica con la configuración didáctica teórica nos indica que ésta se aproxima a una de tipo magistralcon aportes de tipo dialógica.

6.3.4.2 Configuración didáctica 2 y 3: la enseñanza como una comunicación de informaciones

El docente continúa con una lógica de enseñanza basada endefinir una noción matemática, ejemplificar y luego plantear ejercicios para que realicen los alumnos, dicha lógica es muy próxima a una configuración didáctica de tipo magistral.

> "Cuando se interpreta la enseñanza como una comunicación de informaciones, el docente se preocupa fuertemente por la calidad de su mensaje, y entonces los medios a los que recurre tenderán por ejemplo a cuidar particularmente el lenguaje, a brindar explicaciones claras, a presentar objetos matemáticos y sus aplicaciones con un orden bien definido. El alumno ocupa un lugar más bien pasivo, de receptor, cuyas interacciones con el docente y los medios son generales: escucha, copia, pregunta, colorea, aplica… el lugar del alumno es ocupado por un actor que sigue las indicaciones del profesor" (Fregona y Orús, 2011,17).

Si observamos la figura 110, podemos destacar que los primeros cuarenta y cinco minutos de la clase la actividad principal de los alumnos se trata de "copiar" lo realizado por el docente o por otros alumnos.

A partir del minuto cuarenta y seis hasta el noventa y tres (M46-M93), si bien los alumnos se ocupan en realizan la tarea (A7), esta no avanza de otra manera que por medio de las preguntas personales al profesor (A4) que son respondidas por éste (P5).

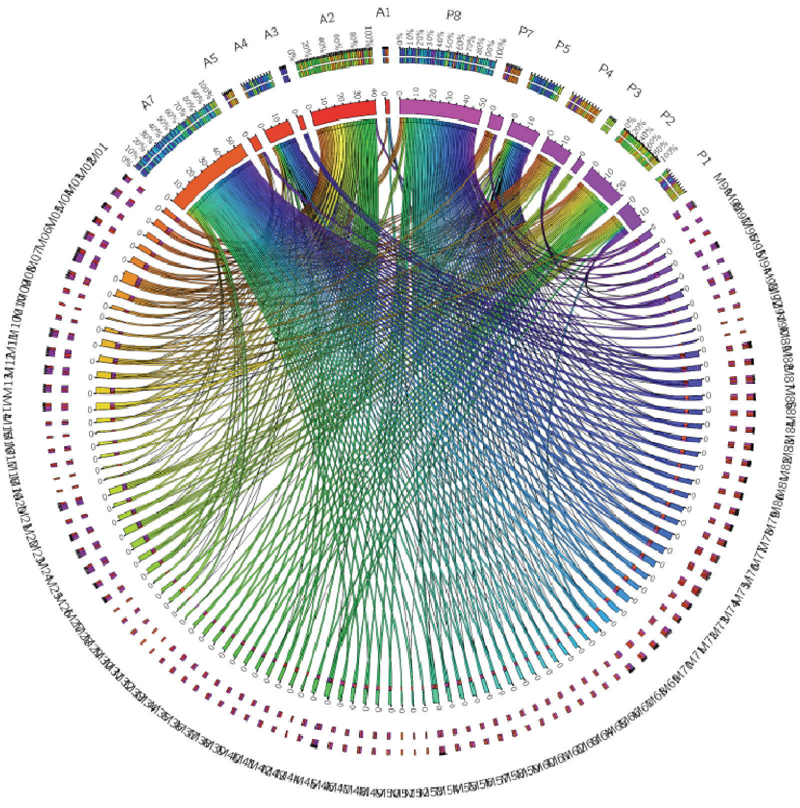


Fig. 110. Cien minutos de la sesión tres del docente 1 con las actividades realizadas por los alumnos y por el profesor.

La configuración didáctica empírica que podemos detectar se puede asociar con las configuraciones didácticas teóricas de tipo magistral con aportes de tipo dialógica.

6.4 SESIÓN 4 EN EL GRUPO DE CONTROL

Disposición física de los alumnos: se encuentran sentados de a pares según la construcción física de los bancos. El trabajo de los alumnos en el aula es planteado por el profesor en forma individual.

6.4.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDÁCTICO DE LA SESIÓN 4

6.4.1.1 Configuración epistémica uno: la adición y sustracción de radicales y el perímetro de un polígono cerrado simple

La clase comienza con el profesor escribiendo una tarea en el pizarrón (P2) entre los minutos dos a cuatro (M2-M4) (figura 111).

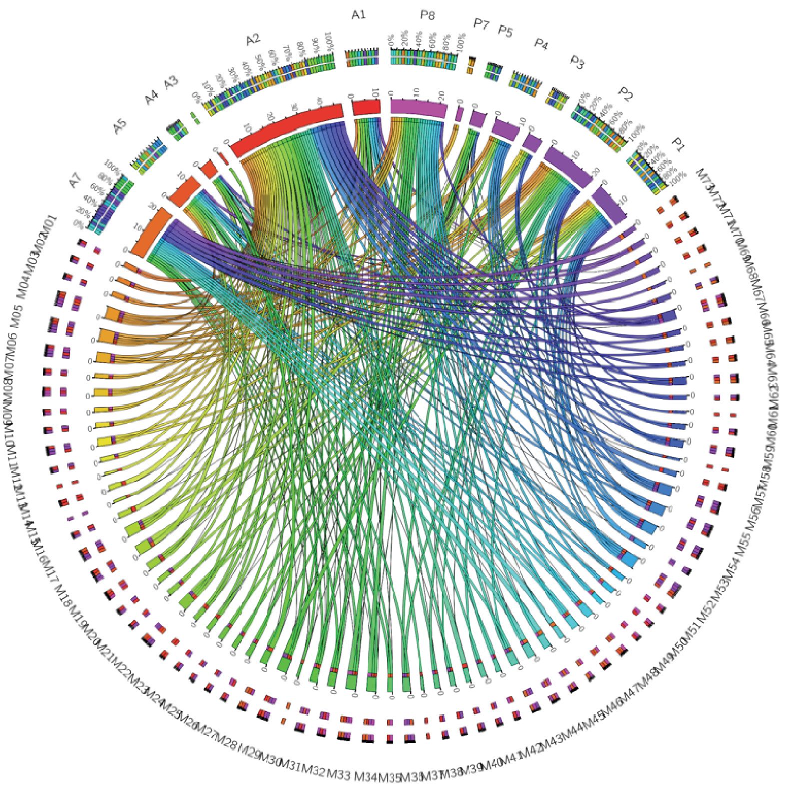


Fig. 111. Setenta y tres minutos de la clase cuatro del docente 1 con las actividades realizadas por los alumnos y por el profesor.

El profesor comienza un diálogo con una pregunta (tabla 41).

D1: ¿Haber cómo calculamos el perímetro de la figura? (se trata de un rectángulo cuyos lado mayor mide $3\sqrt{2}$y cuyo lado menor $\sqrt{2}$, no se expresan unidades.
A_1: Lado por lado.
A_3: Lado más lado.
As: Varios alumnos dan respuesta más o menos como las producidas por los alumnos uno y dos.
A_2: La sumatoria de todos sus lados.
D1: El profesor toma esta última respuesta para escribir en el pizarrón.
D1: Haber para calcular el perímetro ¿cómo tendríamos que sumar?
A_4: El producto… (un alumno comienza a responder pero el docente interrumpe su exposición, parece desestimar el aporte del alumno).
D1: Haber ¿cómo tendríamos que sumar los cuatro lados de éste rectángulo? (reitera la pregunta).
As: Varios alumnos dan su opinión al mismo tiempo.
D1: Haber lo que dicen ahí, raíz de dos más raíz de dos más tres raíz de dos más tres raíz de dos. ¿Y qué me da eso? El profesor pregunta pero no da tiempo a que los alumnos respondan.
D1: Haber (escribe en el pizarrón mientras habla en voz alta) (figura 112).
A_5: Si yo sumo todo me queda ocho raíz de dos. (Un alumno levanta la mano y le expresa al profesor su solución).
D1: Haber escuchen lo que dicen acá (señalando al alumno A_5). Por favor en voz alta.
A_5: Cada una de las raíces se puede sumar poniéndolas como dice allá (señala el pizarrón) sumamos todo, queda ocho raíz de dos.
D1: Bien… ¿entendieron?... él dice una raíz de dos más una raíz de dos más tres raíz de dos más tres raíz de dos, entonces el perímetro es ocho raíz de dos (escribe la solución en el pizarrón).
D1: Para sumar o restar radicales tenemos que sumar o restar radicales semejantes, ¿qué son esos radicales semejantes? Son radicales que tienen el mismo índice e igual o iguales radicandos sino no los puedo sumar ¿estamos?
As: Si (muy pocos alumnos asienten).
D1: Anoten… (el docente dicta la definición).

Tabla41. Expresiones del docente respecto a la aproximación.

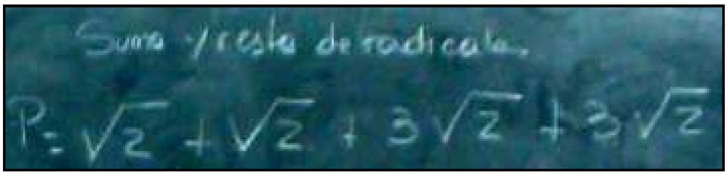


Fig. 112. El profesor escribe las operaciones en el pizarrón.

Luego el docente reitera el procedimiento junto a los alumnos y da dos ejercicios más (figura 113) los cuáles resuelve mientras lo "muestra" a los alumnos.

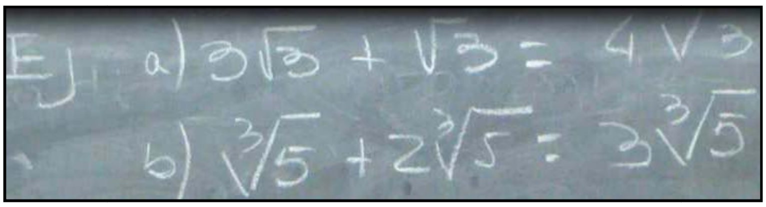


Fig. 113. El profesor resuelve los ejercicios en el pizarrón.

Los alumnos copian lo realizado por el docente.

Seguidamente el profesor da un problema donde se debeaplicar lo ya “aprendido” (figura 114).

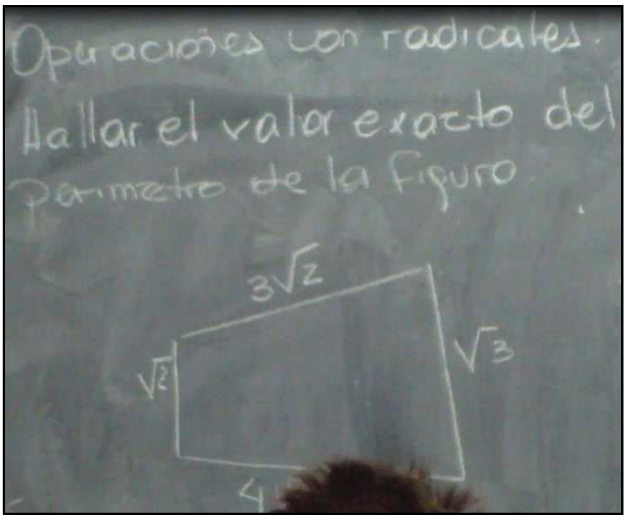


Fig. 114. El profesor da un problema en el pizarrón.

El docente intenta “despegarse” de los valores aproximados solicitando hallar un valor “exacto”. Esto refleja que él intenta salir de la CE-aprox e ingresar en la CE-aritmética, este tránsito entre lo aproximado y lo exacto requiere ir adentrándose cada vez más a un infinito de tipo actual al considerar, por ejemplo, la raíz cuadrada de dos como un “todo”. Esto último no es didácticamente sencillo de tratar como ya lo expresamos en el punto 6.1.1.3.

El profesor no expresa unidad de medida en los lados de la figura. Debemos destacar que en el mundo físico no existen tales medidas, no es posible medir exactamente una longitud irracional. Se produce una SDC de nivel bajo entre la noción de medida y la de número irracional.

El infinito actual actúa entonces como una noción matemática compleja, didácticamente hablando, estrechamente relacionada con los números irracionales.

> “Lo que hemos tratado en este apartado refleja la complejidad asociada a la construcción de la noción de número irracional en donde el infinito

matemático aparece como un objeto que incide fuertemente en otras nociones asociadas a dicho conjunto, a saber, numerabilidad, cardinalidad y densidad de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ junto a las nociones de continuidad numérica, geométrica y funcional. […] Los números irracionales se presentan entonces no sólo como un “paso obligado” para la apropiación de otras nociones como la de límite funcional sino como un objeto de gran complejidad para su enseñanza y aprendizaje aún en niveles superiores” (Reina, Wilhelmi, Carranza y Lasa, 2014, 632).

El docente al introducir en el problema otra noción matemática más, la de perímetro[8], introduce un grado mayor de complejidad.

Produce entonces una SDC de bajo nivel entre las nociones de perímetro y la de número irracional donde la la inestabilidad del conocimiento previo restringe la eficacia de las intervenciones y condiciona la emergencia de conocimientos estables.

Apenas el profesor escribe el problema solicita en forma pública que le comenten cómo lo hicieron, esto ocurre cuando varios alumnos aún no han terminado de copiar el problema (tabla 42).

D1: Levanten la mano, haber…ahí (señala a un alumno que es el que más aportes correctos realiza). A_2: Sería cuatro raíz cuadrada de dos… D1: Vamos a calcular el perímetro, (el docente escribe en el pizarrón mientras el alumno da su respuesta). A_2: Más cinco raíz cuadrada de tres. D1: ¿Eso de donde sale? As: De la suma de radicales de igual radicando… (algunos alumnos responden de otra forma). D1: Vamos a ver, hacemos un paso atrás y vamos a ver, para los chicos que se quedaron atrás, qué queremos decir con esto. (El profesor parece que detecta inconsistencias en las respuestas de los alumnos y toma la decisión didáctica de retomar lo dicho por el alumno). D1: Vamos a sumar todos los lados… (el docente toma la respuesta a la que deberían llegar los alumnos como punto de partida, para él parece transparente la noción de perímetro). As: Varios alumnos le van diciendo al profesor mientras éste escribe la respuesta correcta en el pizarrón, otros solamente copian lo que el profesor escribe. D1: Ahora entendí, ¿qué tengo que sumar? As: Algunos alumnos responden mientras otros se limitan a copiar la respuesta escrita en el pizarrón (figura 115). D1: Muy bien…cuando los radicales no son semejantes la suma se deja indicada ¿sí? Y ese es el valor exacto ¿estamos?

Tabla 42. Diálogo entre docente y alumnos respecto a la adición de radicales.

[8] “Perímetro: La longitud de la frontera de una figura geométrica cerrada plana; determinable analíticamente por rectificación de la curva frontera” (Diccionario Rioduero, 1977,158).

Fig. 115. Respuesta al problema escrita por el profesor.

En este diálogo es posible observar cómo el docente interacciona con la CE-Aritmética, recurre a la exactitud de los números irracionales escritos como radicales donde el infinito actual está presente con su complejidad didáctica.

Seguidamente el docente escribe en el pizarrón (P2) (entre los minutos M24 a M26) una serie de ejercicios de aplicación (figura 116).

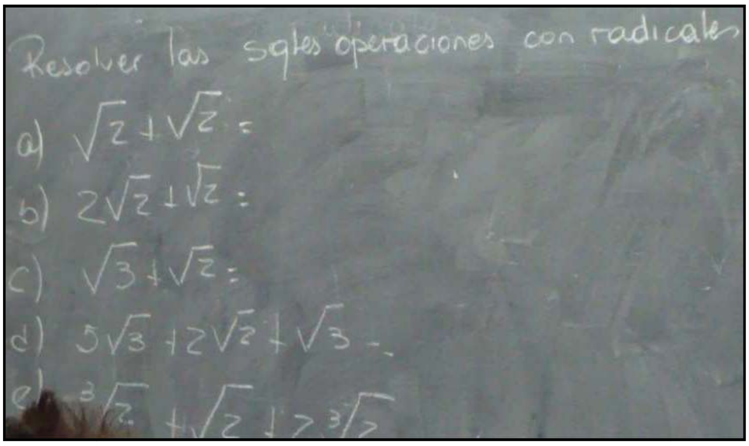


Fig. 116. Ejercicios propuestos por el profesor a los alumnos.

Posteriormente solicita a algunos alumnos que lo resuelvan en el pizarrón de acuerdo a los resultados obtenidos por ellos.

Desde el minuto treinta y ocho hasta el cuarenta y uno (M38-M41) el profesor nuevamente escribe en el pizarrón tarea (P2) para que resuelvan los alumnos, esta vez se trata de hallar los perímetros de cuatro polígonos.

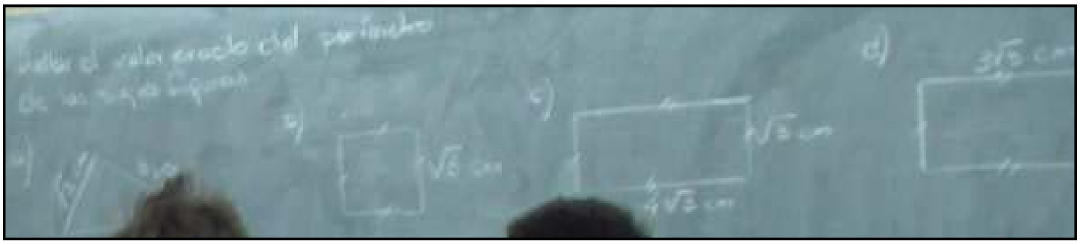


Fig. 117. Tarea dada por el profesor que incluye la noción de perímetro de una figura plana.

A diferencia del problema planteado en la fig.114, en estos ejercicios, el profesor da la medida irracional de los lados de las figuras en "cm" (figura 117), algo que, como ya lo dijimos anteriormente, no tiene existencia en el mundo físico que nos rodea por lo que se trata de ejercicios "ficticios" que no tienen su correlato en un mundo real. No sabemos por qué el docente emplea unidades de medida en unos ejercicios mientras que en otros no lo hace.

Se observa así un conflicto de tipo epistémico e interaccional que queda en estado residual ya que para el alumno subyace entonces la no importancia en la utilización de unidades de magnitudes. Esto último lo podemos observar en las respuestas de los alumnos a los ejercicios planteados, los alumnos no emplean unidades de medida en las soluciones dadas en el pizarrón (figuras 118 y 119).

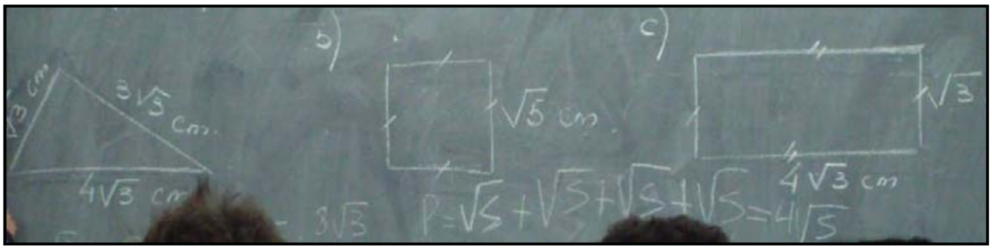


Fig. 118. Respuestas de los alumnos a la tarea dada por el profesor.

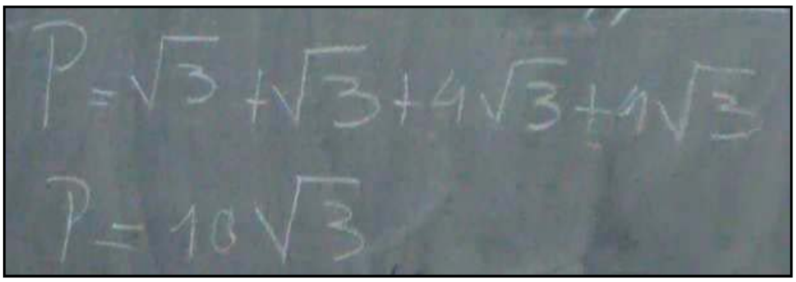


Fig. 119. Respuestas de un alumno a la tarea dada por el profesor.

Un solo alumno emplea unidades y lo hace ubicándola al interior del radicando (figura 120).

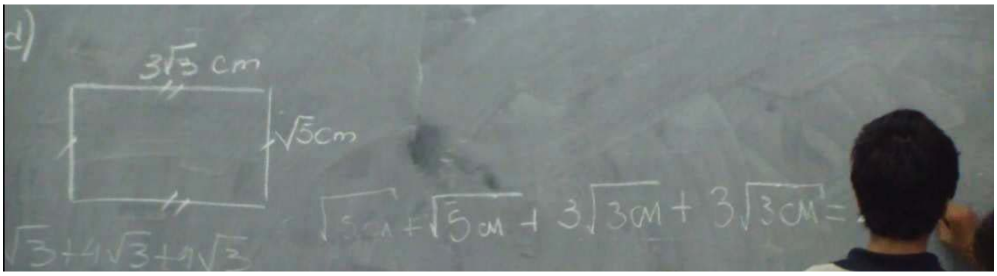


Fig. 120. Respuestas dada por otro alumno a la tarea propuesta por el profesor.

El profesor no parece percibir, en el pizarrón, la ausencia de unidades o el empleo incorrecto de ellas. Se trata de un conflicto semiótico epistémico que no es percibido por el docente ni por los alumnos.

En las evaluaciones tanto de proceso, realizada el 21-05-13, como integradora, realizada el 28-05-13, nuevamente llama la atención el hecho de que el docente no coloca unidades en el ejercicio nº3 y sí lo hace en el ejercicio nº4. Los alumnos contestan en consonancia con lo expresado en las evaluaciones, es mayoritario el no empleo de unidades tanto en el ejercicio tres como en el cuatro (tablas 43 y 44).

Ejercicios tres y cuatro	Presencia correcta de unidades	Presencia incorrecta de unidades	Ausencia de unidades	No contesta	Total
Ej. Nº3 Perímetro (cm)	1	0	25	2	28
Ej. Nº3 Área (cm^2)	2	0	23	3	28
Ej. Nº4 Área (cm^2)	5	0	12	11	28

Tabla 43. Presencia o ausencia de unidades en los ejercicios resueltos por los alumnos en la evaluación de proceso.

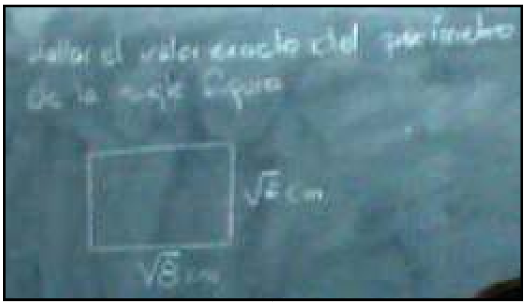
Ejercicios tres y cuatro	Presencia correcta de unidades	Presencia incorrecta de unidades	Ausencia de unidades	No contesta	Total
Ej. N°3 Perímetro (cm)	0	0	36	1	37
Ej. N°3 Área (cm^2)	1	0	35	1	37
Ej. N°4 Área (cm^2)	4	1	22	10	37

Tabla 44. Presencia o ausencia de unidades en los ejercicios resueltos por los alumnos en la evaluación de integradora.

El docente produce una SDC que se puede calificar como "media" entre la noción de perímetro y la de radical ya quela resolución de conflictos ha conllevado intervenciones regulativas no contrastadas y las producciones de los estudiantes carecen de un sustento discursivo que garantice la estabilidad de los conocimientos emergentes. De esta manera los alumnos realizan tareas donde interaccionan con los objetos matemáticos aunque aún persisten conflictos semióticos epistémicos o interaccionales.

6.4.1.2 Configuración epistémica dos: factorización del radicando y perímetros y áreas de polígonos cerrados simples

A partir del minuto cincuenta y dos y hasta el cincuenta y seis (M52-M56) el docente escribe en el pizarrón un problema similar a los ya estudiados (figura 121) y comienza a explicar, interactuando con los alumnos, la forma de resolverlo.



Halla el valor exacto del perímetro de la siguiente figura

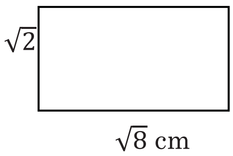


Fig. 121. Tarea dada por el profesor, en el pizarrón, para emplear la extracción de factores fuera del radicando.

El docente introduce la noción de “factorización del radicando” en algunos radicales a modo de estudio de la extracción de factores fuera del radical, así introduce una dificultad más a los ejercicios que se vienen trabajando (figura 122).

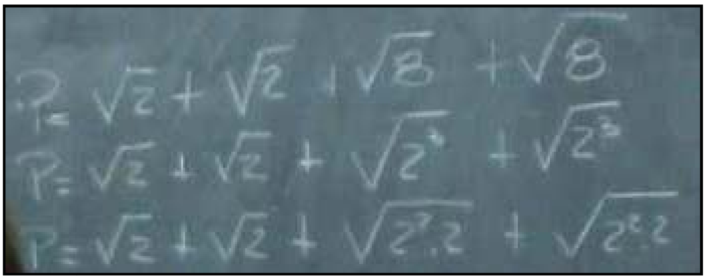


Fig. 122. El profesor desarrolla, en el pizarrón, la factorización del radicando de algunos radicales.

Luego los alumnos copian lo realizado por el docente(A2) entre los minutos cincuenta y siete y el sesenta y uno (M57-M61).

Posteriormente el docente les dicta la definición “Anoten… a veces el radical aparece como irreducible, pero si factorizamos el radicando, como producto de factores primos se puede simplificar”. Seguidamente, entre los minutos sesenta y dos y sesenta y tres (M62 - M63) el profesor escribe en el pizarrón (P2) ejercicios (figura 123) para que apliquen la noción de factorización.

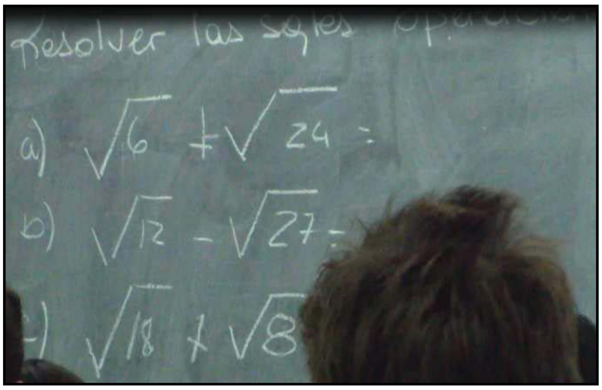


Fig. 123. El profesor escribe en el pizarrón algunos ejercicios de aplicación.

Los alumnos, y hasta terminar la clase, se dedican a realizar la tarea (M63-M73).

El profesor produce así una SDC de nivel bajo dada la inestabilidad del conocimiento previo entre las nociones de factorización y la de área que restringe la eficacia de las intervenciones y condiciona la emergencia de conocimientos estables los cuáles pueden ser fuente de futuros conflictos semióticos epistémicos.

Los resultados obtenidos en la evaluación de proceso, realizada el 21-05-13, muestran la emergencia de dificultades al hallar los valores de las áreas de polígonos (tabla45), se observan conflictos semióticos epistémicos.

Perímetro del triángulo isósceles de lados: $(\sqrt{27};\sqrt{27};2\sqrt{3})$			**Área del triángulo isósceles de lados: $(\sqrt{27};\sqrt{27};2\sqrt{3})$ y altura: $\sqrt{24}$**			**Área del rectángulo cuyoslados mayor y menor son$(\sqrt[3]{20}cm;\sqrt{2}cm)$, respectivamente.**		
Correcto	**Incorrecto**	**NC**	**Correcto**	**Incorrecto**	**NC**	**Correcto**	**Incorrecto**	**NC**
17	**9**	**2**	**11**	**11**	**6**	**5**	**11**	**12**

Tabla 45. Resultados obtenidos por los alumnos en la evaluación de proceso.

En la evaluación integradora, realizada el 28-05-13, el profesor nuevamente emplea, para un ejercicio, los mismos valores de los lados para hallar el área y el perímetro de un triángulo isósceles. Solamente varía los valores de las medidas de los lados del rectángulo (tabla 46).

Perímetro del triángulo isósceles de lados: $(\sqrt{27};\sqrt{27};2\sqrt{3})$			**Área del triángulo isósceles de lados: $(\sqrt{27};\sqrt{27};2\sqrt{3})$ y altura: $\sqrt{24}$**			**Área del rectángulo cuyoslados mayor y menor son$\left(\sqrt{18}\,cm;\frac{\sqrt{18}}{2}cm\right)$, respectivamente.**		
Correcto	**Incorrecto**	**NC**	**Correcto**	**Incorrecto**	**NC**	**Correcto**	**Incorrecto**	**NC**
34	**3**	**1**	**21**	**16**	**1**	**24**	**4**	**10**

Tabla46. Resultados obtenidos por los alumnos en la evaluación de integradora.

Esto último refleja el "aumento" en los resultados correctos obtenidos ya que, el profesor, repite un ejercicio y al otro solo lo modifica ligeramente.

> "El porcentaje de errores, e incluso de fracasos, no es una variable libre del sistema. Está fijado y regulado por el funcionamiento. El profesor

gestiona la incertidumbre de los alumnos. La cuestión es saber si esta gestión de la incertidumbre produce conocimientos en forma eficaz. Lo importante no es saber si el alumno escribe o no la solución del problema sino en qué condiciones la escribió" (Brousseau, 2007,73).

6.4.2 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA SESIÓN 4

6.4.2.1 Configuración didáctica uno : complejidad didáctica de las nociones de área y perímetro de una figura plana

En el trabajo práctico dado por el profesora los alumnos, en días posteriores a esta clase, éste propone una serie de ejercicios, de los cuáles se muestran dos, donde ellos deben calcular el perímetro pero también incluye el cálculo del área de las figuras (figura 124).

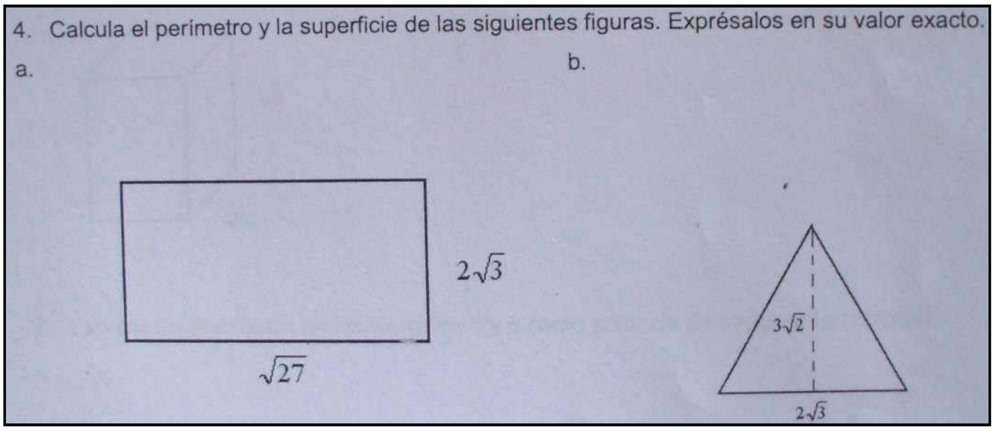


Fig. 124. Tarea dada por el profesor que incluye a las nociones de perímetro y de área de una figura plana.

En un estudio realizado por D'Amore y Fandiño (2007) a 57 docentes y 190 estudiantes de escuela primaria, secundaria y de universidad, sobre las relaciones entre área y perímetro, se evidencian cuestiones de obstáculos de tipo epistemológicos y didácticos.

"Visto el desarrollo de la investigación con los estudiantes, es del todo evidente que el obstáculo que se opone a la construcción de un conocimiento satisfactorio sobre las relaciones entre "perímetro y área" no es sólo de naturaleza epistemológica, como se afirma en muchos trabajos precedentes sobre este campo de investigación sino que es básicamente de naturaleza didáctica" (p.61).

Esto último muestra la complejidad didáctica que involucra a nociones como las de área y perímetro, el profesor considera dichas nociones aprendidas por lo que les resultan "transparentes" para su uso en estos ejercicios. Sumado a esto último el docente no solo espera que los alumnos hallen una solución exacta sino también que obtengan los factores primos del radicando para poder expresar al radical de una forma más conveniente de esta manera poder hallar su suma. El profesor parece no ser consciente de los errores y dificultades que pueden surgir en esta actividad.

La configuración didáctica empírica que se puede detectar, en apariencia, se puede asociar con una configuración didáctica teórica de tipo personal pero el docente no ha dado tiempo suficiente para que los alumnos puedan realizar los ejercicios y cometer errores que sería un buen indicador de lo que está sucediendo con el aprendizaje. Por lo que se acerca más a una configuración de tipo magistral con aportes de tipo personal y dialógica.

6.4.2.2 Configuración didáctica dos: la extracción de factores fuera del radicando

El profesor presenta un problema a los alumnos pero este sólo se muestra a modo de excusa ya que el fin es introducir otra noción matemática más, se trata de la noción de extracción de factores fuera del radicando.

A las nociones de adición y sustracción de radicales, la de área y perímetro de una figura plana cerrada se suma ahora la de extracción de radicales del radicando, estas parecen transparentes a la mirada del profesor pero no para los alumnos. Los resultados obtenidos en las evaluaciones dan cuenta de esto último, la lógica de enseñanza seguida por el docente: presento-explico-aplico-evalúo no parece dar los frutos esperados.

El docente intenta “disminuir” la tasa de errores en las respuestas de los alumnos en la última evaluación repitiendo dos ejercicios y modificando ligeramente otro (tabla 46).

La configuración didáctica empírica que se puede detectar, se asocia a una de tipo magistral con aportes de tipo personal y dialógica.

Capítulo 7

Análisis didáctico del grupo de control 2

En este capítulo se describen y analizan cuatro sesiones correspondientes al grupo de control 2. En la sesión 1 (apartado7.1) se describen las configuraciones epistémicas de los números racionales como fracción de enteros, la situación problema implementada y la configuración didáctica global de la sesión. En la sesión 2 (apartado 7.2) se estudia la introducción de un problema, y las configuraciones epistémicas asociadas: valor exacto de un número irracional, la racionalidad y la irracionalidad de un número real, la cardinalidad de los números racionales e irracionales y la completitud del conjunto de los números reales. Posteriormente se arriba al desarrollo del conjunto de los números reales y a la representación de algunos números irracionales en la recta numérica real. En la sesión 3 (apartado 7.3) se estudia la relación entre lo ostensible y lo no ostensible, se describen las configuraciones epistémicas sobre la representación geométrica de algunos números irracionales en la recta numérica real y la argumentación por teorema de Pitágoras. A continuación se analizan las dificultades en la introducción de un procedimiento geométrico y finalmente la implementación de los números irracionales como radicales. Para la sesión 4 la configuración epistémica se focaliza en la extracción de factores fuera del radical procedimiento algebraico que se manifiesta dificultoso para los alumnos (apartado 7.4).

7.1 DIMENSIÓN DIDÁCTICA GRUPO DE CONTROL DOCENTE 2

7.1.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDÁCTICO DE LA SESIÓN 1: ENTRE LO RACIONAL Y LO IRRACIONAL

Disposición física de los alumnos: se encuentran sentados de a pares según la construcción física de los bancos.

El trabajo de los alumnos en el aula es planteado por el profesor, en un primer momento, en forma individual, posteriormente ante la presentación de un problema, en forma grupal.

7.1.1.1 Configuración epistémica 1: los números racionales como fracción de enteros

En los primeros minutos de la primera clase de matemática del docente 2, éste intenta rescatar conocimientos construidos, por los alumnos, en años precedentes.

El profesor intenta "gestionar" dicha memoria realizando diferentes "gestos memoriales".

D2: Años anteriores desde que empezaron a trabajar en matemática… (el profesor interrumpe su exposición). D2: ¿Qué pasó? (le pregunta a un alumno). A_1: ¡Tiene mi cartuchera! (un alumno señala a otro). Luego de solucionado el incidente el docente continúa su exposición. D2: Desde que empezaron a trabajar en matemática ustedes ¿con qué han trabajado?...

Tabla 47. Gestos memoriales cronológicos del docente 2.

En este último párrafo el docente comienza realizando un gesto de tipo "cronológico" (tabla 47).

El diálogo continúa:

Als.: ¡Los números enteros! (diferentes respuestas de los alumnos se superponen). A_2: ¡El teorema de Pitágoras! D2: Y el teorema de Pitágoras ¿con qué trabajabas?

Tabla 48. Gesto memorial tecnológico del docente 2.

En esta última pregunta (tabla 48) el docente realiza lo que Araya Chacón (2010) denomina "gesto tecnológico". El docente espera que los alumnos respondan "con números" pero ellos producen las siguientes respuestas (tabla 49).

A_3: ¡Con calculadora! A_4: ¡Con triángulos rectángulos! D2: Con triángulos rectángulos, pero además de trabajar con triángulos rectángulos ustedes aplicaban el teorema de Pitágoras, pero en realidad ¿con qué era que trabajaban?

Tabla 49. Producción de un gesto tecnológico por parte del profesor.

El profesor nuevamente produce un gesto memorial tecnológico insistiendo en lo que "necesita" escuchar de sus alumnos (tabla 50). Nuevamente los alumnos no producen la respuesta esperada por el docente.

A_5: ¡Con ángulos! A_6: Con lados. D2: ¿Los lados en qué están medidos? A_7: En centímetros. D2: En centímetros, en metros…para tomar esas unidades ¿qué establecían? Otra vez el docente realiza gestos tecnológicos y esta vez un alumno produce la respuesta esperada por él. A_7: Una regla. A_8: Números. D2: ¡Números! A_7: ¡Aha! (este alumno manifiesta su perplejidad con esta expresión ya que no podía encontrar lo que el profesor solicitaba).

Tabla 50. Producción por parte del docente de un nuevo gesto tecnológico.

La clase se interrumpe, un alumno solicita levantarse del asiento para ir a buscar su cuaderno, los demás alumnos se ríen y se dispersan, están inquietos, el docente tiene que elevar su voz.

D2: Ustedes están acostumbrados a trabajar con números y con números vienen operando desde que comenzaron a trabajar con matemática, desde nivel inicial. Desde que pueden relacionarse con el contexto social, desde que los miden, desde que los pesan siempre se trabajan con números. Esos números según cómo se relacionan se agrupan de distinta manera. Ustedes han visto distintos conjuntos numéricos, esos conjuntos numéricos, de acuerdo a las características de cada uno, ¿qué conjuntos numéricos han visto?...

Tabla 51. Producción, por parte del docente, de gestos cronológicos y tecnológicos.

Se identifica dos tipos gestos producidos por el profesor en este párrafo, uno de tipo cronológico y otro de tipo tecnológico (tabla 51).

Los alumnos producen las siguientes respuestas (tabla 52).

A_8: ¡Naturales! A_9: ¡Enteros! A_{10}: ¡Decimales! A_{11}: ¡Reales! A_{12}: ¡Irracionales! D2: Irracionales y… (el docente va señalando a los alumnos que van respondiendo) A_{13}: ¡Reales! D2: Reales me dice… D2: Haber… ¿cuáles son los números racionales? A_{14}: Los números enteros A_{15}: Los de la Q. Als.: Risas… D2: En realidad sí se representan con la letra Q, pero ¿qué característica tienen los números racionales? A_{14}: Son positivos. D2: Son positivos, negativos… ¿qué más?... A_{16}: Periódicos. D2: Expresiones decimales periódicas…

Tabla 52. Producción verbal de respuestas de los alumnos y diálogo con el profesor.

El docente enfatiza, en la respuesta del alumno, que se trata de una expresión decimal periódica. Se recuerda cuándo un número es racional:

> "Aquellos números racionales p/q que no son fracciones decimales finitas pueden ser desarrollados en fracciones decimales indefinidas mediante el proceso de división decimal. En cada paso de ese proceso debe haber un resto distinto de cero […] Todos los restos distintos que aparecen en la división son enteros comprendidos entre 1 y q-1, de modo que hay solamente q-1 posibilidades para los valores de dichos restos. Esto significa que al cabo de q cifras decimales, a lo sumo, algún resto k deberá repetirse. Pero todos los restos siguientes se repetirán en el mismo orden en que aparecían después de este primer resto k. Esto prueba que la *expresión decimal de cualquier número racional es periódica*; una vez aparecido un cierto conjunto finito de cifras, dicho conjunto se repetirá infinitas veces […] (Cabe de considerar que los números racionales que pueden ser representados mediante fracciones decimales finitas tienen un desarrollo decimal periódico en el cual la cifra 0 se repite indefinidamente después de un número finito de cifras) (Courant y Robbins, 1962, 75).

El profesor intenta introducir a los números irracionales a través la CE-aritmética apelando a nociones conjuntistas, los alumnos tratan de responder a las preguntas del docente evocando diferentes conjuntos numéricos pero no logran percibir hacia donde quiere dirigirse el profesor.

Un alumno nombra la propiedad de "periodicidad" que manifiestan los números racionales en su expresión decimal. El profesor no resalta esta afirmación del alumno sólo "corrige" su expresión verbal al destacar que se trata de "expresiones decimales periódicas". Se pierde entonces una oportunidad de estudiar la periodicidad de los números racionales donde el alumno tenga una participación activa y donde podrían emerger cuestiones relativas a dicha propiedad que tal vez no estén tan claras como el docente cree. La decisión didáctica del profesor, tal vez apurado por los tiempos didácticos curriculares, es seguir adelante.

> "Por ejemplo, hemos mostrado que, con frecuencia, incluso cuando los maestros son muy calificados (Robert, 2003), las restricciones de tiempo, agravadas por las restricciones de horario actuales llevan a privilegiar en clase un trabajo sobre "lo nuevo", sobre lo que acaba de ser aprendido. Hay, sin embargo, poca exploración de ese conocimiento nuevo y hay aún menos trabajo explícito por parte de los alumnos para actualizar sus conocimientos antiguos, tampoco se hace un trabajo de reorganización de lo nuevo con lo viejo. De hecho, el maestro orienta la actividad de los alumnos hacia lo nuevo, las fórmulas, las definiciones, las reglas y los teoremas. Esto lo hace al asumir la dirección de las actividadesde manera precisa y rápida, incluso inmediata, por ejemplo, cuando toma la palabradesde que inicia la resolución en clase e indica, o hace que otros indiquen,a lo largo de la clase, lo que se 'debe' hacer"(Robert y Pouyanne,2005,41).

El docente continúa con sus intervenciones didácticas y se dirige hacia la expresión como fracción de un número racional (tabla 53).

A_{17}: Tienen coma.
D2: Si, pero ¿qué característica tienen en realidad los números racionales? Son todos aquellos que pueden hacer qué cosa…? (un nuevo gesto memorial tecnológico es producido por el docente)
A_{15}: Restar y sumar… (los alumnos no saben qué contestar)
A_{16}: ¡Eso todos lo hacen!
Als.: Risas…
D2: ¿Son todos aquellos que pueden expresarse cómo? (otro gesto tecnológico)
Als.: […] Silencio
A_7: Mediante un eje, mediante un gráfico…
D2 Fíjense… haber nosotros veíamos los números racionales de dos maneras…los expresamos de dos maneras…uno eran los “con coma” como me dijeron recién, o números decimales o expresiones decimales, ¿de qué otra manera podemos expresar los números racionales?...
Als.: […] silencio
A_{17}: Periódicos.
Nuevamente un alumno nombra la periodicidad y realmente se trata de una característica importante de los números racionales como lo expresan Courant y Robbins en la cita anterior, este aporte del alumno no es tomado en cuenta por el profesor que deja “transcurrir” los aportes de los alumnos.
A_7: ¿Gráficamente?
A_8: Fracciones.
D2: ¿Cómo? ¡Como fracciones! (resalta la respuesta “correcta” del alumno).
D2: Fíjense que si todos los números racionales que nosotros vimos los podíamos transformar ¿en qué?...
A_8: En fracciones.
D2: En fracciones, y a las fracciones las transformábamos a su vez en expresiones decimales. Bien de ahí podemos definir que todos los números racionales son aquellos que pueden ser escritos ¿de qué manera?...
Als.: […] silencio.

Tabla 53.Diálogo entre alumnos y docente donde éste intenta “arribar” a la definición de número racional.

Si bien el docente encuentra “la” respuesta correcta en el aporte del alumno, la definición de número racional corre por cuenta del profesor, los alumnos no participan activamente en ese proceso de definir un número, solamente se apela a la evocación en la memoria didáctica del alumno, esto se manifiesta en el silencio a la pregunta que el profesor plantea, hasta que algunos alumnos se dan cuenta que se trata de la noción de fracción, aunque no aclara a qué tipos de fracciones se refieren. Se trata de una SDC de nivel bajo entre la noción de número racional y la de fracción de números enteros Los alumnos dan sus respuestas (tabla 54):

A_8 Como fracciones
A_{10}: Fracciones.
D2: Como fracciones. Los números racionales son todos aquellos que pueden ser escritos como fracciones.
D2: Alguno de ustedes me nombraron a los irracionales.
A_{12}: Yo.
D2: ¿Cuáles son los números irracionales? (nuevamente un gesto memorial tecnológico es producido por el docente)
Als.: Varios alumnos producen diferentes respuestas al unísono.
D2: Haber escuchemos lo que dice A_{10}.
A_{10}: Todos los números se pueden escribir como fracción.
D2: ¿Todos los números se pueden escribir como fracción?
A_{10}: Obvio.
D2: ¿Sí?
A_{10}: ¡Si no me dejó terminar!
D2: ¿Todos los números se pueden escribir como fracciones?... ¿No?...
A_{11}: Si.
D2: ¿Qué números se pueden expresar cómo fracción?...
A_{12}: Los que son decimales.
A_{13}: Los irracionales.
A_{14}: Todos.
A_{15}: Los irregulares.
A_{16}: Los que son enteros y decimales.
D2: Chicos si no nos escuchamos cuando hablamos no vamos a poder entender lo que queremos decir…

Tabla 54. Diálogo entre alumnos y docente intentando diferenciar números reales.

Los alumnos no comprenden hacia donde desea el docente que vayan las respuestas. Lo que queda manifiesto es que la creencia del profesor sobre la apropiación, por parte de los alumnos, del significado de un número racional es infundada. Queda expuesto, a través de las respuestas de los alumnos, que la noción de número racional se encuentra todavía en un estado inestable e incompleto. Esto último debería trabajarse en situaciones que propicien la emergencia de errores hasta lograr una estabilización de la noción. Esto no ocurrió y el diálogo continua avanzando (tabla 55).

D2: Acá A_{10} dijo que todos los números se pueden expresar como fracción, ¿todos opinan igual?...
Als.: Algunos alumnos responden afirmativamente otros negativamente.
D2: ¿Cuáles son algunos números que no pueden escribirse como fracción?
A_7: Ninguno.
Als: Diferentes respuestas se producen al unísono.
A_{13}: Los irracionales.
D2: ¿Los?... Los irracionales.
D2: ¿Los irracionales son aquellos que no se pueden escribir como fracción?... (el docente intenta que los alumnos evoquen la definición de número irracional a través de un gesto tecnológico).
A_{17}: ¡Todos se pueden escribir como fracción!
A_{18}: ¡Cállate!
D2: A ver… ¿conocen algunos números irracionales? (otra vez es empleado por el docente un gesto memorial tecnológico para intentar evocar algunos ejemplos de números irracionales)
A_1: Sí
A_2: Sí
D2: ¿Sí? ¿Cuáles?
A_3: Pregúntele a él.
A_7: El número pi.
D2: ¿El número pi es un irracional?
A_{10}: Sí

Tabla 55. Diálogo entre alumnos y docente a propósito de la definición de número irracional.

Algunos alumnos se molestan entre ellos (se tiran papelitos) mientras el docente avanza con sus preguntas (tabla 56).

D2: ¿El número pi no puede ser expresado como una fracción?... la raíz me dice él ¿qué raíz?...
A_{11}: Cuadrada.
A_{11}: Cuadrada, cúbica…
D2: ¿Todas las raíces cuadradas no pueden escribirse como fracción?
Als.: […] silencio.
A_{10}: Depende.
D2: Por ejemplo la raíz cuadrada de nueve…
Als.: Tres, tres (varios alumnos responden “tres”).
D2: ¿Puede escribirse cómo fracción?
Als.: ¡Sí! (varios alumnos dan esta respuesta).
D2: La raíz cuadrada de veinticinco…
A_{12}: Cinco.
D2: ¿Puede escribirse como fracción?
A_{12}: ¡Sí!
D2: La raíz cuadrada de diez…
Als. […] Silencio
A_{11}: Casi cinco.
A_{12}: ¡No!
Als. Varios alumnos responden que no.
A_{13}: Uno coma cinco.
A_{14}: Tres coma tres.
A_{15}: Tres coma dieciséis.
A_{7}: Tres como dieciséis.
D2: Haber, algunos usaron la calculadora para sacar la raíz de diez, ¿cuánto les dio?
Als.: 3,16
D2: No, la quiero completita, la quiero escuchar entera (el docente se refiere a las cifras decimales del número).
A_{10}: 3,16227766
D2. ¿Y después?
A_{6}: Nada.
A_{10}: Se acabó.
A_{13}: 3,16227766
D2: ¿Y qué pasa, termina ahí?
Als.: Algunos alumnos dicen que sí (se superponen las respuestas)
A_{10}: No, pueden seguir…es periódica
A_{10}: No, periódica no, ¿cómo se dice?...
D2: ¿Y cuántos números más puede seguir?
A_{10}: Infinitos.
D2: ¿Infinitos?
Als.: Varios alumnos discuten entre sí.
D2: ¿Qué es infinito?
A_{9}: Que no termina.
A_{10}: ¡El mundo!

Tabla 56. Diálogo entre alumnos y docente en relación a las características de los números irracionales.

El profesor intenta ahondar en la noción de infinito matemático que aparece en la raíz cuadrada de diez, pero los alumnos no están seguros que ese número sea infinito. Las respuestas producidas por los alumnos recuerdan la visión “aristotélica” del infinito que vimos en el punto 4.1.2.

Se trata de una noción matemática didácticamente compleja que para el profesor parece trasparente pero que, para los alumnos, no resulta de esa manera.

Se produce un conflicto semiótico de tipo interaccional.

La SDC que intenta producir el docente entre las nociones de exactitud, aproximación e infinitud de un número irracional se manifiesta de bajo nivel y confusa para los alumnos ya que la inestabilidad del conocimiento previo restringe la eficacia de las intervenciones y condiciona la emergencia de conocimientos estables.

Luego, el diálogo entre el docente y los discentes, continúa (tabla 57).

D2: La raíz cuadrada de diez tiene infinitas cifras en la parte decimal… esas cifras ¿serán periódicas?... A_{13}: Sí. A_{14}: Sí. A_{15}: Sí. D2: ¿Sí? A_{16}: No.

Tabla 57. Intento de evocación, por parte del docente, de la noción de periodicidad.

Ahora el docente sí apela a la noción de periodicidad numérica, algo que algunos alumnos ya venían manifestando. Se trata de emplearla de un modo antagonista con la no periodicidad en las cifras decimales de un número irracional de modo de que el alumno logre diferenciar entre un número racional periódico y otro irracional. Sin embargo esto se realiza en un plano discursivo sin actividad de tipo matemático para el alumno.

D2: Estábamos hablando de la raíz cuadrada de diez, la raíz cuadrada de diez tiene infinitas cifras en la parte decimal… A_{10}: No, yo creo que no. (para algunos alumnos no es claro la infinitud de un número irracional, el docente no realiza actividad alguna que pueda poner en juego esta última cuestión) D2: No termina nunca, lo que yo les pregunto es si esas infinitas cifras son periódicas… (el alumno tiene que creer en las palabras del docente, algo muy difícil dada la complejidad del objeto matemático) Als.: […] Silencio (es una muestra de no aceptación de lo que el docente les está expresando). A_{10}: No. A_{12}: **Pueden tener una parte periódica, pero no toda.**

Tabla 58. Diálogo entre alumnos y docente en relación a la periodicidad de un número irracional.

El alumno A_{12} (tabla 58) hace un aporte en esta última afirmación (la cual la hemos resaltado en negritas) que merece una reflexión, ya que sí existen números irracionales que poseen un bloque finito de cifras decimales periódicas.

Estos números reciben el nombre de números irracionales “cebra” como lo señalamos en el apartado 4.1.10.2.

El diálogo continúa esta vez se centra en la expresión como fracción de un número racional periódico (tabla 59).

D2: Si fuese periódica o tuviese una parte periódica ¿podríamos transformar esa raíz de diez a fracción?
Als. : Si (varios alumnos).
D2: ¿Y la podemos transformar a fracción?
A_8: Sí.
A_9: Sí.
A_{11}: Sí.
A_{12}: ¡Qué sé yo!
A_{13}: No.
A_{15}: No.
D2: ¿Qué me dijeron recién?

Tabla 59. Diálogo entre alumnos y docente en relación a la periodicidad numérica.

Como dijimos anteriormente que un número tenga, en sus cifras decimales, una parte periódica finita (bloque finito) no es indicación de que el número se pueda expresar como fracción.

El docente cuando pregunta:”si fuese periódica o tuviese una parte periódica ¿podríamos transformar esa raíz de diez a fracción?” intenta cuestionar la afirmación del alumno (que manifiesta una gran intuición), probablemente por desconocimiento de la existencia de estos números por parte del profesor, siendo que sí existen números irracionales que pueden presentar esas características en sus cifras decimales.

Queda planteado así un conflicto semiótico de tipo interaccional donde el docente “fuerza” el aporte del alumno en la dirección que él desea.

Se desconoce si el número raíz cuadrada de diez pueda tener un bloque finito de cifras decimales periódicas.

Los alumnos manifiestan confusión, no es posible para ellos responder si es o no posible expresar dicho número como fracción de números enteros (el profesor no ha aclarado ni se ha estudiado en clase) que el denominador tiene que ser distinto de cero. Se debería haber propuesto entonces algunas situaciones que estudiaran esta problemática.

La SDC que propone el profesor entre la noción de número racional y la de número irracional a través de la noción de fracción es todavía de nivel bajo ya que la resolución de conflictos es ineficaz, limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo un significado atomizado, que viabilice su estabilidad y reutilización en tareas posteriores.

La clase se interrumpe por dispersión de varios alumnos, luego la sesión continúa (tabla 60).

D2: Estamos entonces diferenciando los conjuntos numéricos, el conjunto de los números racionales ustedes me dijeron que son los que pueden ser expresados como fracción y el conjunto de los números irracionales que todavía no podemos deliberar quiénes son ni qué características tienen porque están hablando… (se interrumpe la clase porque los alumnos se distraen, solicitan ir al baño, etc.). Luego el profesor continúa su exposición. D2: Para trabajar un poco con estos conjuntos numéricos, que ustedes no pueden diferenciar pero que sí los reconocen en algunas características, y mucho, y son más usados que lo que ustedes creen, les voy a dar una actividad para que ustedes realicen en grupo. Les voy a escribir un problema en el pizarrón y ustedes van a resolverlo en forma grupal (Fig.38). A_{10}: ¿De a cuatro? D2: De a cuatro o cinco.

Tabla 60. Diálogo entre alumnos y docente a propósito de la diferenciación de conjuntos numéricos.

El docente intenta la "creación de sentido" a través de afirmaciones, "son más usados de lo que ustedes creen" pero estas carecen de sentido para los alumnos. No es sino a través de actividades matemáticas que se puede ir construyendo el sentido de una noción matemática.

> "La principal motivación intrínseca hacia el estudio de lasmatemáticas parece estar en la elección de los tipos de situacionesproblema matemáticas, las tareas, actividadesconcretas que propone a los alumnos, las cuales debenreunir unas características específicas. Además, el «modeloinstruccional» que implementa en la clase –tipos deconfiguraciones y trayectorias didácticas que organiza ygestiona– condiciona las oportunidades de aprendizajeautónomo de los alumnos, y

por tanto su autoestima ycompromiso con el estudio" (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009,68).

La clase continúa, los alumnos se preparan para realizar la tarea.

7.1.1.2 Configuración epistémica 2: la situación problema

Un alumno busca calculadoras científicas y se les reparte a cada uno de sus compañeros mientras el profesor escribe las consignas de la situación problema en el pizarrón (figura 125).

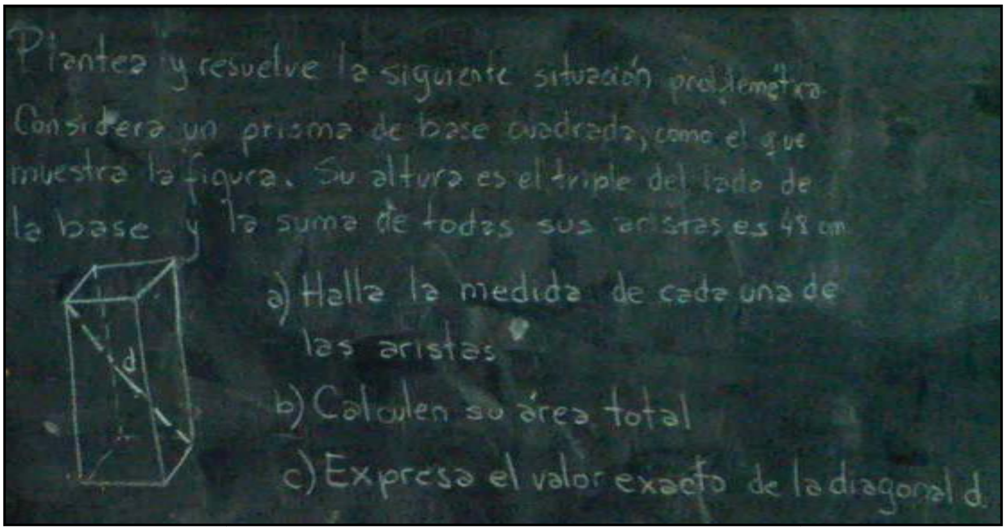


Fig. 125. El profesor escribe las consignas del problema en el pizarrón.

Los alumnos se reúnen en grupos como el docente propone, luego comienzan a trabajar, algunos de ellos no realizan la tarea (A1) otros sí trabajan en ella (A7).

En el minuto quince (M15) un alumno pregunta (A2): no lo entiendo, ¿me lo puede explicar?, el profesor responde (P5): "En grupo lo vuelven a leer nuevamente para saber que tienen que hacer" (mientras habla gira uno de sus dedos en forma circular), luego continúa circulando por los grupos (P8).

El profesor repasa, entre los minutos veintidós a veinticinco (M22-25), en forma pública, las consignas de la actividad resaltando algunas cuestiones y apelando a la memoria didáctica de los alumnos, por ejemplo preguntando ¿qué son las aristas en un cuerpo geométrico?

El profesor propone una interacción, en la situación problema, entre diferentes objetos matemáticos a saber, nociones de medida, arista, área, valor exacto de un número irracional, se trata de una SDC débil entra varios objetos matemáticos complejos.

Los alumnos continuan la tarea, algunos de ellos sin realizarla (A1), y otros tratando de resolverla (A7), esto ocurrió entre los minutos veintiséis y cincuenta y seis (M26-M56) mientras el profesor circula por los grupos (P8) (figura 126).

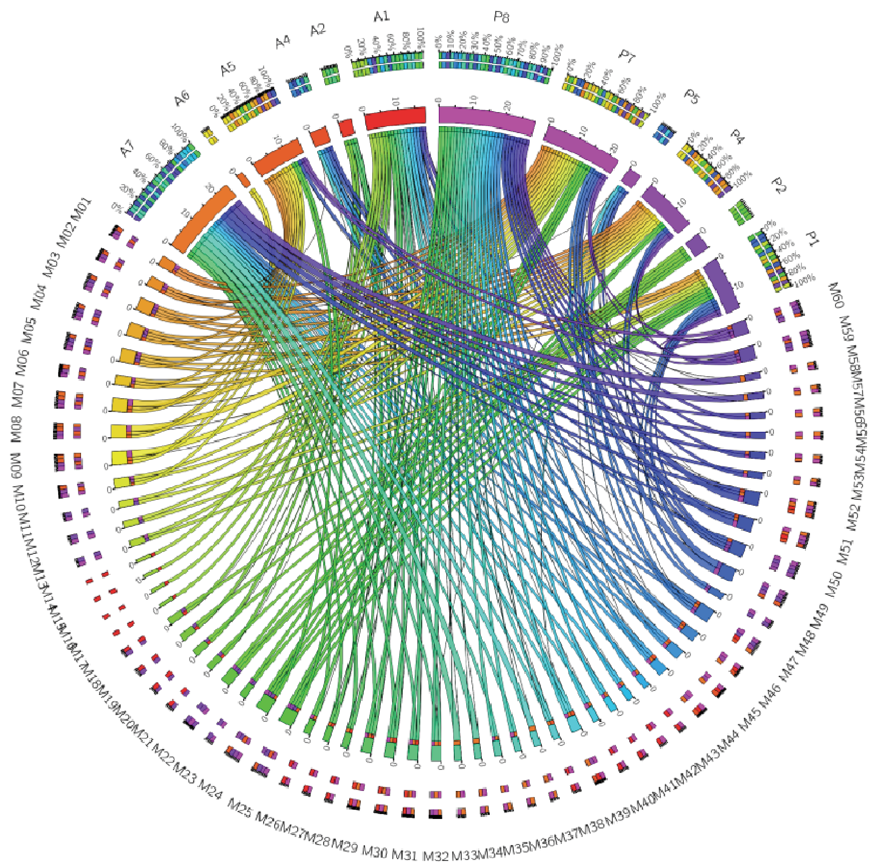


Fig. 126. Setenta y tres minutos de la clase cuatro del docente 2 con las actividades realizadas por los alumnos y por el profesor.

Entre los minutos (M38-M39) un alumno pregunta (A4) al docente (tabla 61):

A_2: Profe ¿base por altura o superficie por altura?
D2: ¿Para hacer qué cosa?
A_2: Para hacer el área total.
D2: Superficie de la base por altura.

Tabla 61. Diálogo entre alumnos y docente relativo a la fórmula del área de una figura.

Varios alumnos no trabajan, inclusive algunos se tiran papelitos entre ellos.

Dos alumnos al ver que sus compañeros de grupo no quieren realizar la tarea se retiran y forman un grupo de dos personas.

El docente al observar esto último separa a aquellos alumnos que no trabajan y los coloca en otros grupos.

Ante reiteradas consultas, el profesor, hace una puesta en común (M47-M50) (P7) donde explica (P1) la cuestión del "área total" que solicita el problema (tabla 62):

D2: El área total, tengan en cuenta que es la superficie (señala el dibujo en el pizarrón) de ese prisma, la superficie del prisma es todo su exterior, es como si fuera una caja, sería todo el cartón para poder hacer la caja. Fíjense (algunos alumnos no prestan atención a lo que el docente señala) si yo desarmo el prisma, lo que hago es aplanarlo, nosotros lo que obtendríamos sería esto (dibuja el desarrollo plano del prisma). Desarmado el prisma estaría ocupando esta superficie (pasa la mano por sobre la figura dibujada en el pizarrón).
¿Cómo hago yo para calcularla?
A_3: Tomando la medida.
D2: ¿Qué forma tiene esto?
A_4: Ninguna.
A_5: Tiene forma de una hormiga atómica (un alumno se burla del docente, éste hace un gesto de reproche al alumno).
D2: ¿Qué forman le ven a esto? (el docente señala nuevamente el dibujo).
D2: De un…
A_6: Rectángulo.
D2: Rectángulo.
Als.: ¡Bravo!
D2: De esa manera podemos calcular la superficie total (señala nuevamente la figura) tomándolo como la asociación de dos cuadrados y un rectángulo. ¿Está? Bueno entonces ¿haber cómo la calculan?

Tabla 62. Diálogo entre alumnos y docente en relación al área de una figura plana.

Se trata de un conflicto semiótico de tipo epistémico que se manifiesta al intentar resolver los alumnos la situación problema.

Los alumnos continúan su tarea (A7) entre los minutos (M51-58) y el profesor circula por los grupos (P8), en esos mismos minutos, despejando dudas.

En los minutos (M59-60) el docente intenta realizar una puesta en común mientras los alumnos están guardando sus útiles en sus mochilas, pocos alumnos le prestan atención. Finaliza la clase.

Se observa que la SDC continúa siendo de nivel bajo a pesar de los intentos del docente por estabilizar el conocimiento emergente. La resolución de conflictos se mantiene ineficaz.

7.1.2 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA CLASE 1

7.1.2.1 Configuración didáctica 1: una entrada a los números irracionales basada en el conjunto de los números racionales

Podemos destacar que es el profesor quien emplea mayores tiempos en las actividades realizadas (M1 a M13), principalmente se centra en intentar rescatar los conocimientos previos de los alumnos que, sin embargo, no siempre recuerdan las nociones matemáticas o se encuentran en un estado construcción inestable (figura 127).

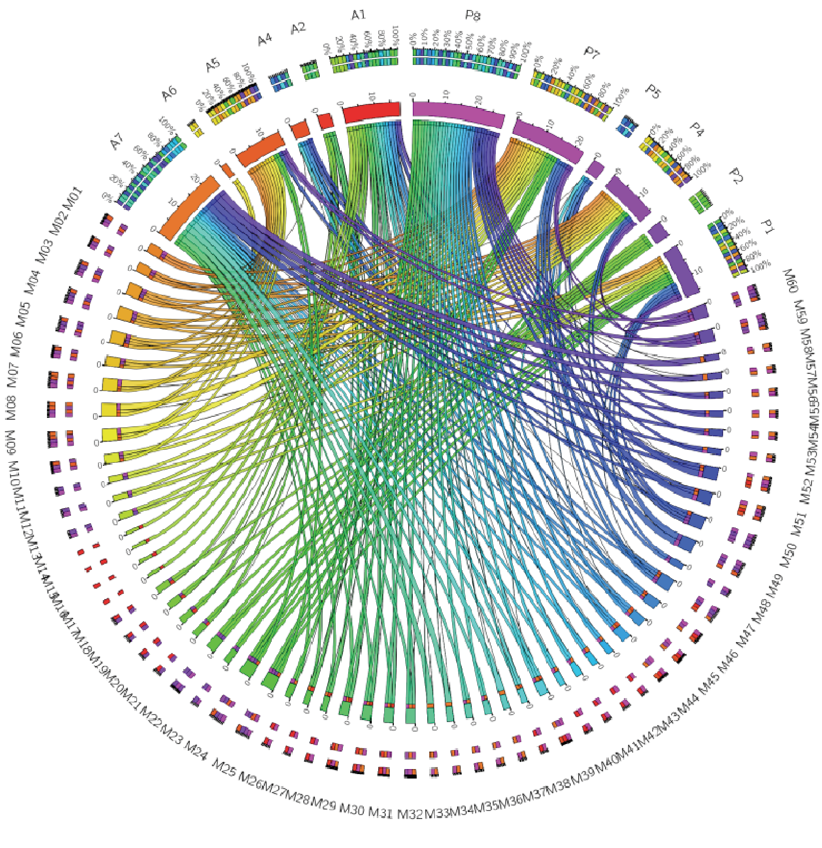


Fig.127. Actividades realizadas en la primera clase de matemática por alumnos y profesor.

Durante los primeros diez minutos de clase (M1-M10) el docente realiza varias preguntas (P4) a los alumnos, algunos de ellos responden (A5), aunque como dijimos antes, con evidente inestabilidad en la conceptualización de algunas nociones matemáticas. Esta inestabilidad no es utilizada por el docente para realizar un estudio de las nociones matemáticas involucradas en la "racionalidad", como la de "periodicidad numérica", donde el alumno participe activamente en este proceso.

Varias veces el profesor escribe en el pizarrón (P2) mientras va hablando al grupo clase, se trata de pequeñas pseudo-institucionalizaciones que va realizando el docente pero no el alumno.

La mayoría del trabajo de los alumnos se focalizan en "responder" (A5) las preguntas realizadas por el profesor.

Los alumnos no logran percibir hacia donde quiere dirigirse el profesor, la expresión de un alumno es elocuente: "profe me perdí, es un laberinto" deja entrever la "necesidad" de realizar actividad de tipo matemático. Esto no sucede y la clase continúa en la dirección didáctica que el docente establece.

En suma, observando la figura 128, se puede dar cuenta de que la mayor parte de la actividad, en estos trece primeros minutos de clase (M1-M13), la realiza el docente escribiendo en el pizarrón y preguntando. Mientras que la mayor parte de la actividad realizada por el alumno se limita a responder las preguntas del docente siendo muy escasa o nula la actividad matemática realizada.

De acuerdo a lo desarrollado hasta aquí podemos decir que este "intento" por parte del profesor de "institucionalizar" al número irracional vía una entrada basada en el conjunto de los números racionales y sus propiedades, sin una participación activa de los alumnos, sin un trabajo matemático, deja en claro que la configuración didáctica se acerca a una de tipo "magistral" con rasgos de tipo dialógica.

7.1.2.2 Configuración didáctica 2: los alumnos ante la presentación de un problema por el docente

Desde el minuto catorce al diecisiete (M14-M17) los alumnos se reúnen en grupos "de cuatro o cinco" según lo indicado por el docente. Un alumno reparte calculadoras a sus compañeros que el profesor envía a buscar a la biblioteca de la institución.

A partir del minuto dieciocho y hasta el veinticinco (M18-M25) el docente copia en el pizarrón la consigna del problema y luego la explica (fig.128) mientras los alumnos también copian (A2) la consigna en sus cuadernos.

El problema se revela complejo para los alumnos por las diferentes nociones matemáticas involucradas en él, el docente intenta disminuir su complejidad "explicando" como se debe comenzar a resolver llevando a la "baja" el problema.

> "Planteando preguntas cada vez más fáciles, intenta obtener la máxima significación para el máximode alumnos. Si los conocimientos en cuestión desaparecen por completo, estamos ante el 'efecto Topaze' " (Brousseau, 2007,76).

En los minutos (M26-M34) son varios alumnos los que no trabajan (A1), el problema parece estar por "encima" de sus posibilidades sumado a una pérdida de sentido.

> "Chevallard, Bosch y Gascón (1997) explican la «falta de motivación»en los siguientes términos: la enseñanza actual no legitimala actividad de los estudiantes y, por lo tanto, éstosno se sienten responsables de las respuestas que dan a losproblemas que el profesor les plantea. Las respuestas no«afectan» a los estudiantes, puesto que no son partícipesni de la construcción ni de la comunicación de los significados y, por lo tanto, en el mejor de los casos, una vezproducida una respuesta, se desvinculan de ella esperandoel mensaje de éxito o de fracaso del profesor" (citado por Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009,68).

Si observamos en la figura 128, los tiempos empleados (M26 a M56), las "cintas" de colores muestran que es hay una mayor participación de los alumnos en la actividad (A7) sin embargo varios alumnos no trabajan en ella (A1). El docente intenta introducir los números irracionales vía un problema, este no funciona como el profesor espera. Los alumnos que trabajan en la tarea lo hacen por una cuestión de contrato didáctico o como se propone desde el EOS, de "normas sociomatemáticas".

> "Las normas sociomatemáticas regulan los aspectos específicos de las discusiones matemáticas de los estudiantese influyen en las oportunidades de aprendizaje" (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009,62).

El profesor no puede producir una SDC entre los números irracionales y las otras nociones matemáticas presentes en el problema, la mayoría de los alumnos luego de intentar "encarar" el problema, después de un tiempo, lo abandona y se dedica a mantener interacción comunicativa con sus pares.

Si bien el profesor recorre por los bancos en donde están sentados los alumnos tratando de disipar dichas dudas hay momentos donde se exponen públicamente cuestiones relativas al conocimiento puesto en juego, se observa que la participación de los discentes fue "ficticia".

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración descrita de tipo "pseudo-personal" con rasgos de tipo magistral.

7.1.3 SESIÓN 2: LA EXPLICACIÓN DE UN PROBLEMA

Disposición física de los alumnos: se encuentran sentados de a pares según la construcción física de los bancos.

El trabajo de los alumnos en el aula se plantea en forma individual por el profesor.

7.1.3.1 Configuración epistémica 1: valor exacto de un número irracional

La clase comienza con el docente que retoma con el problema de la sesión anterior. Durante varios minutos (M7-M31) el profesor explica la resolución del problema a partir de lo observado en algunas respuestas de los alumnos y realiza preguntas a ellos que son respondidas por un número pequeño de alumnos.

Se rescata un episodio de la clase donde se define al número irracional. Específicamente se trata del momento cuando el profesor intenta que los alumnos respondan a la pregunta "d" del problema: expresa el valor exacto de la diagonal "d" (tabla 63).

El docente dibuja en el pizarrón, en forma plana, la situación planteada (figura 128) y luego pregunta:

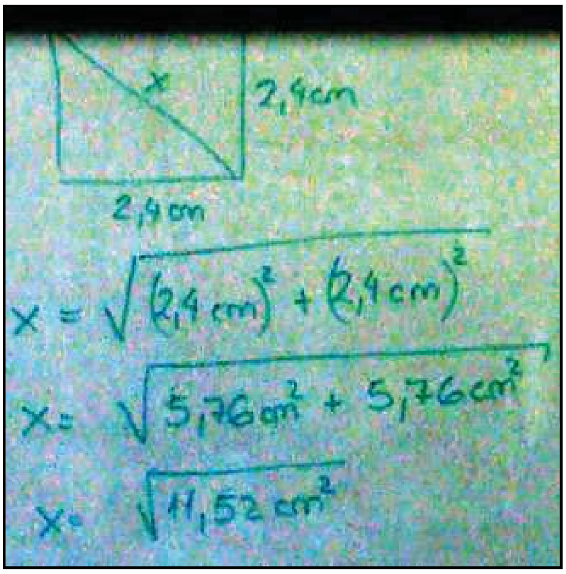


Fig. 128. El profesor escribe la resolución al punto "d" en el pizarrón.

D2: La raíz cuadrada de 11,52… (un alumno le está dictando los valores que observa en la calculadora). A_6: 3,39 D2: ¿Ahí termina? (el docente realiza un gesto con sus manos y brazos como cuando uno quiere indicar que algo finalizó). A_6: No. A_8: No. A_6: …411255 (el alumno termina de dictar las cifras decimales que indica la calculadora). El docente mientras el alumno le dicta las cifras va a buscar su calculadora entre sus efectos personales. D2: ¿Adonde termina? A_9: Sigue para allá. D2: Sigue para allá (el profesor gesticula una sonrisa mientras obtiene la aproximación en su calculadora). D2: ¿Podemos escribir el valor exacto acá? (señala en el pizarrón la raíz cuadrada de 11,52). Als. […] Silencio D2: ¿Sí o no? Als. […] Silencio A_9: Sí (un solo alumno contesta). D2: ¿Y cuál es el valor exacto? Als. […] Silencio. D2: El valor que encontramos en la calculadora ¿es el valor exacto? Als. […] Silencio. A_{10}: Es decimal (un solo alumno responde). D2: Es decimal, pero que sea decimal no quiere decir que no sea exacto. Als. […] Silencio. D2: ¿Cuándo estaríamos en presencia de una expresión exacta? Als. […] Silencio. A_{10}: Cuando no tiene parte decimal. D2: Cuando tiene parte decimal, se puede tener parte decimal, pero nosotros podemos observar toda su expresión o al menos podemos encontrar toda su expresión, porque muchas veces en la calculadora vemos una parte de esos números pero todo el resto no está en la pantalla de la calculadora sino está guardado en su interior. Entonces cuando tenemos esos números que son tan grandes, que tienen infinitas cifras en la parte decimal que no los podemos expresar en forma exacta, la forma exacta de representarlos es dejarlos expresados sin calcular su raíz…esa es la forma de expresarlos en forma exacta, porque si yo calculo esa expresión solamente voy a poder escribir una parte no voy a poder escribirlo completo, voy a escribir solo la parte que veo en la pantalla ya sea de la calculadora, de la computadora o del celular, con lo que estemos realizando el cálculo, pero no vamos a expresarlo completito vamos a expresar una parte. Entonces la mejor manera de expresar el cálculo entero, completito, sin que me falte nada en su desarrollo, lo que hacemos es dejarlo expresado a través de la raíz, sin calcular, sólo le voy a sacar los centímetros cuadrados (borra los cm^2 en el radicando del radical) porque al estar hablando de una longitud lineal no la vamos a medir en forma de cm^2 sino en forma de centímetros lineales (fig. 41).

Tabla 63. Diálogo entre alumnos y docente a propósito de las infinitas cifras de una raíz cuadrada.

En este diálogo nuevamente aparece la cuestión didáctica del infinito actual, emerge un conflicto semiótico de tipo interaccional que se mantiene en estado residual, para los alumnos las cifras del número son finitas y esto realmente sucede así ya que una calculadora o una computadora no pueden manejar infinitas cifras decimales. Para el docente la calculadora sólo muestra una parte del número, los alumnos deben "imaginar" que las cifras continúan. Este conflicto no queda resuelto, el profesor intenta sortear la complejidad del objeto matemático y manifiesta: "la mejor manera de expresar el cálculo entero, completito, sin que me falte nada en su desarrollo, lo que hacemos es dejarlo expresado a través de la raíz, sin calcular", pero queda en el plano discursivo por lo que el conflicto epistémico interaccional queda en estado "residual" hasta que aparezca nuevamente dicho conflicto ante nuevas situaciones.

Otra cuestión emerge al preguntar el docente a los alumnos sobre la "exactitud" de una expresión numérica infinita, la respuesta del alumno A_{10} es elocuente: "cuando no tiene parte decimal". Nuevamente un conflicto semiótico interaccional y epistémico se manifiesta, la SDC entre la expresión exacta o inexacta de un número infinito es propuesta por el docente en forma muy débil y con escaso tiempo de estudio, practicamente efímero. El logro de la conceptualización del número irracional en este nivel educativo es una tarea compleja que probablemente quede para otros niveles educativos. El diálogo continúa (tabla 64).

De esta manera acabamos de calcular la diagonal de la base, con esa medida tenemos que calcular la diagonal del prisma ¿sí? , para calcularla volvemos a utilizar el teorema de Pitágoras me dijeron ustedes y tengo que utilizar esto (señala el resultado obtenido en el pizarrón) como cateto del triángulo. Entonces…el triángulo que ustedes (va dibujando en el pizarrón) imaginan ahí en el prisma va a ser un triángulo que va a tener como cateto el que está vertical ¿qué medida? A_{10}: 7,2 A_{9}: 7,2 D2: Siete coma dos (lo escribe en el dibujo) ¿y el que está vertical? A_{10}: 11,52 D2: La raíz cuadrada de 11,52 (el docente enfatiza que se trata de la raíz cuadrada). Me queda por averiguar el valor de la diagonal que sería lo úuuultimo que tendría que hacer nosotros para resolver esta situación problema que nos habíamos planteado. Para eso volvemos a Pitágoras ¿y ahora cómo hago? A_{10}: Sería… A_{11}: Sería… D2: ¿Cómo hago ahí con Pitágoras? A_{10}: $7{,}2^2 + \left(\sqrt{11{,}52}\right)^2$ A_{11}: Y ahí sí tendríamos que sacarle la raíz. D2: ¿Y esto todo nuevamente? raíz cuadrada, acuérdense que Pitágoras ¿que decía? ¿Cómo relaciono los lados y el cateto? Als.: La suma de los cuadrados de los catetos (varios alumnos al unísono). D2: La suma de los cuadrados de los catetos ¿a qué es igual? D2: A la hipotenusa al cuadrado, entonces si yo quiero calcular la hipotenusa lo que voy a hacer es despejar ese cuadrado (señala en el pizarrón) transformando en raíz el otro miembro. Resolvemos esto entonces, ¿cuánto es $7{,}2^2$? A_{8}: 51,84 D2: ¿Enterito me lo dieron? (se refiere a la cifras decimales del número). Als.: […] Silencio. D2: ¿Sí o no? A_{10}: Sí D2: Si, bueno. Acá tengo$\left(\sqrt{11{,}52}\right)^2$¿qué tengo que hacer? (un nuevo gesto memorial tecnológico emerge al intentar, el docente, rescatar de la memoria didáctica de los alumnos, propiedades de la potenciación y la radicación). Als. […] Silencio. D2: ¿Cómo son la raíz y la potencia? Als. […] Silencio. A_{1}: Como el más y el menos. D2: ¿Cómo él más y el menos? A_{2}: Opuestas D2: ¿Son operaciones? A_{3}: Opuestas D2: Opuestas, operaciones inversas, o sea que si yo a un número le aplico primero la raíz después la potencia o al revés, va a dar exactamente el mismo número, no se va a modificar porque son operaciones inversas. Esto lo habíamos visto la clase anterior cuando estuvimos viendo las propiedadesde la radicación, se acuerdan que podíamos simplificar en algunos casos para poder reducir algunas expresiones. En este caso podemos simplificar la raíz con la potencia, lo que tenemos que tener cuidado porque esa potencia también está afectando a los cm^2 y entonces los centímetros me van a quedar elevados al cuadrado por más que podamos simplificar. Entonces en este caso vamos a poder simplificar la potencia y la raíz y esto (simplifica la expresión en el pizarrón) nos va a quedar 11,52 cm^2. A_{11}: ¡Yo sabía! (un alumno a modo de chiste, el docente no lo escucha u hace caso omiso del comentario del alumno y continúa su diálogo).

Tabla 64. Diálogo entre alumnos y docente a propósito del problema planteado por el docente.

El profesor al preguntar: “Acá tengo $\left(\sqrt{11{,}52}\right)^2$¿qué tengo que hacer?”, intenta evocar la memoria didáctica del alumno, esto último no es sencillo y se puede observar en las sucesivas preguntas realizadas por el docente y en las respuestas dadas por los alumnos (tabla 64).

> “La recuperación, por parte de un maestro, de conocimientos anteriores no institucionalizados es algomuy difícil. Para fabricar conocimientos nuevos puede utilizar algo de los conocimientos que él mismo haintentado introducir. No es fácil. Pero, cuando esos conocimientos no han sido introducidos por él y hanempezado a funcionar, los problemas se vuelven casi insuperables: la única manera de salir de eso espidiéndoles a los maestros de las clases inferiores que enseñen, de modo bastante formal, los saberes que elmaestro de las clases superiores puede identificar y que pueden servirle en un nivel explícito para construir lo que quiere enseñar él mismo (Brousseau, 1994,77).

El profesor intenta una interacción entre las propiedades de la potenciación y la noción de radicación, esta SDC se manifiesta muy débil.

El docente da un discurso sobre la potenciación y radicación como operaciones inversas, de esta manera pretende “evocar” ese conocimiento en los alumnos. Para el profesor se trata entonces de nociones matemáticas “trasparentes” que el alumno “ya debe conocer” pero sin embargo esto no ocurre de la manera esperada.

> “Se observa comúnmente que los alumnos sólo pueden recordar algunos conocimientos en presencia de alguien que haya compartido la historia de sus relacionescon esos conocimientos, o en presencia de los dispositivos particulares que han utilizado. Transformar los recuerdos en conocimientos movilizables es una operación didáctica y cognitiva, pero no solamente un actoindividual de memorización. La organización de la memoria didáctica forma parte de una gestión másgeneral del tiempo didáctico” (Brousseau, 1994,89).

El diálogo continúa en la dirección didáctica que el docente desea, esta vez produce la interacción entre la CE-aproximación y la CE- aritmética en un intento de tránsito entre lo aproximado y lo exacto (tabla 65).

D2: ¿Y esto cuánto nos va a dar? A_{10}: 63,36 D2: 63,36 cm^2 (el profesor lo escribe en el pizarrón). Y ahora si le calculamos la raíz cuadrada a los 63,36 cm^2 ¿obtendremos en el valor exacto? Als. […] Silencio. A_{10}: No A_8: 7,959899497 D2: Extenso ¿sí?, infinitas cifras decimales. Por lo tanto la única forma de expresar en forma exacta este valor… A_{10}: La raíz cuadrada a los 63,36 cm^2. A_8: No,centímetros ¿no? (un alumno le rectifica a otro) A_{10}: Bueno. D2: Son los centímetros que forman la diagonal (escribe en el pizarrón). A_{10}: La raíz de 63,36. D2: Sí, ese es el valor exacto de la diagonal.

Tabla 65. Diálogo entre alumnos y docente a propósito de lo exacto y lo aproximado.

Pero ese tránsito no es flexible, es el docente quién plantea la "exactitud" del valor de la diagonal, nuevamente se produce un conflicto semiótico interaccional.

Nuevamentela SDC propuesta por el profesor, esta vez entre las nociones de valor "exacto" y "aproximado" de un número irracional, se manifiesta de nivel bajo ya que la resolución de conflictos es ineficaz (parcial o totalmente), limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo, en todo caso, un significado atomizado, sin conexiones matemáticas que viabilicen su estabilidad y reutilización en tareas posteriores.

7.1.3.2 CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 2: LA RACIONALIDAD Y LA IRRACIONALIDAD DE UN NÚMERO REAL

El diálogo continúa esta vez el profesor lo direcciona hacia la "irracionalidad" (tabla 66).

D2: ¿Se acuerdan que ayer habíamos comenzado a hablar de los distintos conjuntos numéricos que habíamos usado durante todo el recorrido por la escuela primaria y la escuela secundaria y ustedes me nombraron un montón de conjuntos numéricos…este tipo de números, estas raíces que yo no terminé de calcular porque si las calculábamos no teníamos un valor exacto ¿dentro de qué conjunto numérico las podríamos incluir?

A_3: Irracionales.

D2: ¿De qué conjunto?

Als.: Irracionales.

D2: ¿Y porqué estarían dentro del conjunto de los números irracionales?

A_8: Porque tienen coma.

D2: Coma tenían un montón de los que nosotros habíamos estado viendo, pero sin embargo eran exactos y si no eran exactos, nosotros teníamos las expresiones decimales periódicas que tenían un período y ese período nosotros podíamos utilizarlo para transformar esa expresión como fracción, ¿estas expresiones ustedes consideran que podrán transformarse en fracción?

Als. […] Silencio (el docente no da tiempo a que los alumnos contesten).

D2: ¿Existe alguna regla que permita transformarla en fracciones?

A_4: Sí (en voz baja).

D2: ¿Sí?

D2: ¡Bueno cuál, díganmela!

A_7: No.

A_8: Dos mil.

D2: No se pueden expresar como fracción me dice A_3, <u>no</u> se pueden expresar como fracción…

A_4: Sí

D2: ¿Sí?, ¿cuál regla tendríamos que utilizar para transformarlas en fracción?

A_4: Esa que teníamos nueve abajo.

D2: Esas son las expresiones decimales periódicas, ¿esta (señala el pizarrón una raíz cuadrada) tiene algún período?

D2: ¿Te acordás que es lo que era el período?

A_8: Lo que se repite.

D2: Lo que se repetía, ¿acá se repite algo?

A_5: Era 0,56565656

A_6: Eran las que se ponían el cero y el uno.

D2: Esas eran las exactas…no son exactas, no son periódicas, por lo tanto dentro de ese grupo no las podemos ubicar, esas pertenecen al grupo de los números racionales y son todas aquellas que pueden ser transformadas en fracción, estas (señala con su mano en el aire tratando de diferenciar ambos conjuntos) no tienen período, no son exactas, no son enteros, por lo tanto no pueden ser transformados en fracción y esa es la condición que cumplen los números irracionales y se diferencias de los racionales precisamente por eso, son todos los números que no pueden ser expresados como fracciones, son números que tienen infinitas cifras en la parte decimal y dentro de esos números podemos encontrarnos varios tipos, unos son los que provienen de estas raíces que no tienen resultados enteros, el otro es el grupo de los números especiales, ustedes algunos los conocen, han escuchado hablar del número "pi", porque ayer me lo mencionaron, hay otro número que se llama "e"¿alguien lo ha escuchado?

Als.: No

D2: Hay otro número que se llama número de oro (afirma pero también a modo de pregunta)

Als.: No

D2: Tampoco, bueno esos números forman parte del conjunto de los números irracionales y se consideran números especiales porque aparecen en muchísimos cálculos que nosotros realizamos en distintas situaciones. Por ejemplo la razón aurea o el número de oro se encuentra distribuido especialmente en nuestra distribución del cuerpo humano, por eso cuando uno observa el cuerpo humano estéticamente se ve correcto. El número "e" aparece en reiteradas oportunidades en los cálculos de costo financiero, cuando se hacen los cálculos de interés compuesto para calcular intereses tiene préstamos en el banco, y esas cosas, aparece éste número en reiteradas oportunidades ¿y pi donde aparece?

Als. […] Silencio.

D2: ¿Adonde han escuchado hablar de pi o lo han escuchado nombrar a pi?

A_8: En la geometría.

D2 En la geometría, ¿en qué parte de la geometría?

A_{10}: En el círculo.

D2: Cuando calculan círculo, o sea longitud de la circunferencia, cuando calculan la superficie del círculo aparece el número pi. Esos números conjuntamente con otros que uno elabora siguiendo ciertas reglas, que en realidad uno puede llegar a crear o inventar, forman parte del conjunto de los números irracionales. Vamos a poner ahora como título los números irracionales y vamos a comenzar a acomodar un poquito esta situación, para ver cuáles son y que quede por escrito un poco más.

El docente escribe en el pizarrón la definición de número irracional y da algunos ejemplos de estos números mientras los alumnos copian (minuto treinta y dos hasta el cuarenta y ocho) (M32-M48) en sus cuadernos lo escrito por el profesor (Figuras 63y 64).

Tabla 66. Diálogo entre alumnos y docente sobre la irracionalidad.

El profesor intenta que los alumnos diferencien los números racionales de los irracionales a partir de la noción de “fracción” pero no aclara que esa fracción debe estar constituida por números “enteros” (con denominador diferente de cero). Se plantea entonces un conflicto semiótico interaccional que se mantiene en estado residual y que tiene consecuencias las cuales se estudian más adelante cuando se analice la experimentación llevada adelante por este grupo control (capítulo 12).

Los alumnos no pueden distinguir sin dificultades un número de otro, para ellos la expresión decimal con coma de algunos números “significa” algo, el docente insiste y provoca un conflicto semiótico interaccional, los alumnos no logran diferenciar cuáles números se pueden expresar como fracción y cuáles no. El profesor utiliza el ejemplo escrito en el pizarrón de la $\sqrt{2}$ para ver si los alumnos logran distinguir la diferencia recurriendo a la noción de periodicidad numérica en las cifras decimales, esto no ocurre así, los alumnos no logran diferenciar si es posible expresar dicha raíz como fracción.

El docente termina pseudoinstitucionalizando la noción de número irracional, no los alumnos (figura 129).

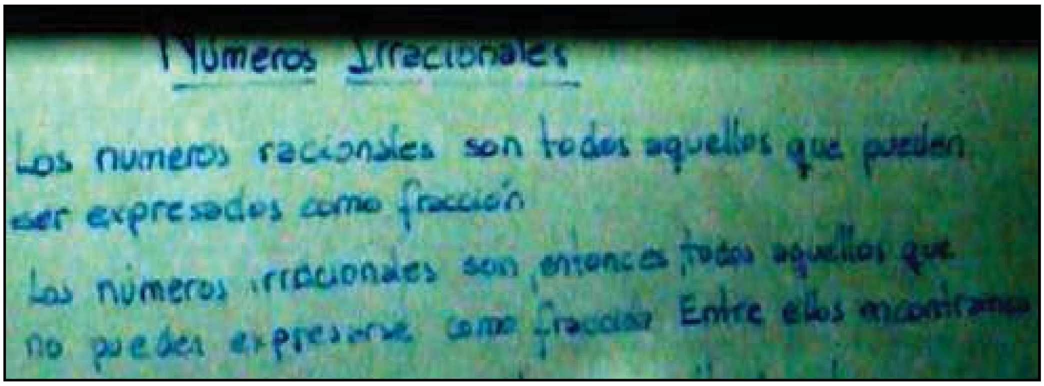


Fig. 129. El profesor escribe las definiciones en el pizarrón.

Él intenta que ellos diferencien el conjunto de los números racionales del conjunto de los números irracionales, esto lo hace “gesticulando” con sus manos en el aire. No se despliega un conjunto de situaciones que den “sentido” al concepto de número irracional.

> “Un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de las situaciones y de los problemas que se pretendenresolver es como un concepto adquiere sentido para el niño (Vergnaud, 1990,133).

Luego introduce al número “e” y al “número de oro” de modo anécdotico.

El profesor continúa su exposición e introduce una pseudo-clasificación entre irracionales: “[…] y dentro de esos números podemos encontrarnos varios tipos, unos son los que provienen de estas raíces que no tienen resultados enteros, el otro es el grupo de los números especiales, ustedes algunos los conocen, han escuchado hablar del número “pi”, porque ayer me lo mencionaron, hay otro número que se llama “e” ¿alguien lo ha escuchado?” (figura 130).

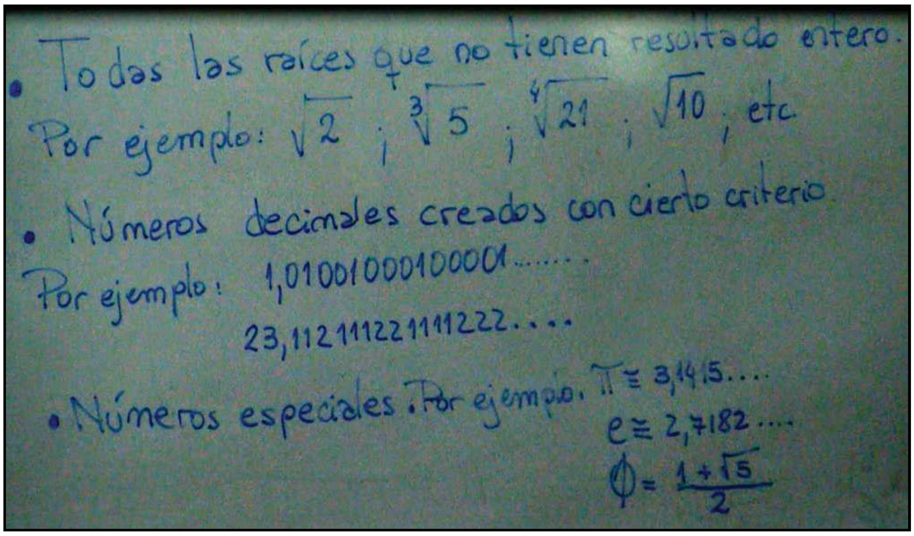
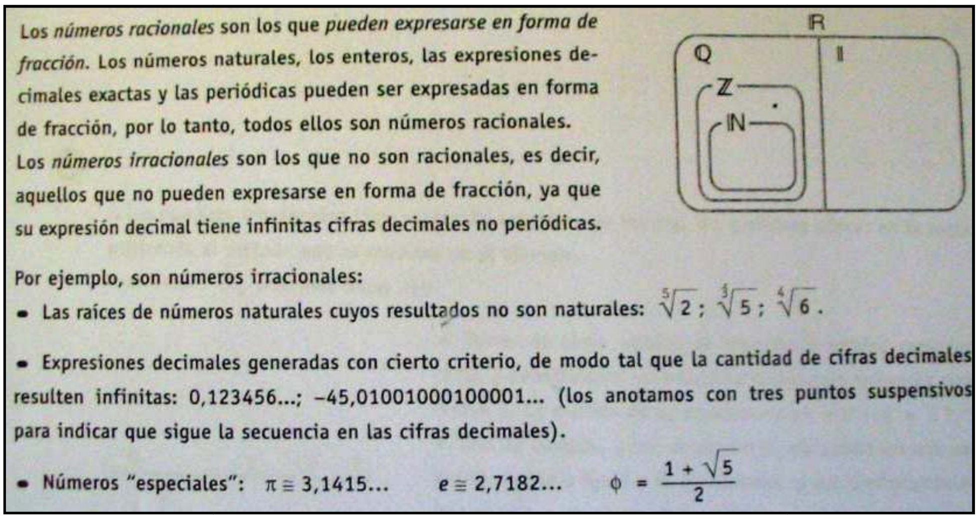


Fig. 130. El profesor escribe ejemplos de números irracionales en el pizarrón.

Esta pseudo-clasificación que proporciona el docente “proviene” de uno de los libros de texto que utiliza para sus clases (figura 131).



Los *números racionales* son los que *pueden expresarse en forma de fracción*. Los números naturales, los enteros, las expresiones decimales exactas y las periódicas pueden ser expresadas en forma de fracción, por lo tanto, todos ellos son números racionales.
Los *números irracionales* son los que no son racionales, es decir, aquellos que no pueden expresarse en forma de fracción, ya que su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

Por ejemplo, son números irracionales:

- Las raíces de números naturales cuyos resultados no son naturales: $\sqrt[5]{2}$; $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt[4]{6}$.
- Expresiones decimales generadas con cierto criterio, de modo tal que la cantidad de cifras decimales resulten infinitas: 0,123456...; −45,01001000100001... (los anotamos con tres puntos suspensivos para indicar que sigue la secuencia en las cifras decimales).
- Números "especiales": $\pi \cong 3{,}1415...$ $\quad e \cong 2{,}7182...$ $\quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Fig. 131. Página del libro de texto usado por el profesor.

El docente sigue lo que en el texto se propone: "los números irracionales son aquellos que no pueden expresarse como fracción", pero en él no se aclara (ni el docente tampoco) que debe tratarse de fracción de números "enteros" (con denominador diferente de cero).

Los ejemplos de números irracionales que se proponen parecen "clasificar" a los números irracionales en "raíces de números naturales", en "expresiones decimales generadas concierto criterio" y en "números especiales".

Esto último queda plasmado en el pizarrón y en los cuadernos de los alumnos.

Desde la matemática, la clasificación de los irracionales, se realiza solamente entre números irracionales algebraicos y trascendentes[1].

Para los alumnos no queda claro cuál es la diferencia entre los números racionales e irracionales, un conflicto semiótico interaccional queda latente. Más adelante, en la trayectoria didáctica, probablemente emerja y se manifieste a través de errores y dificultades.

La SDC se manifiesta de bajo nivel ya que la resolución de conflictos se observa ineficaz, limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo

[1]Un número real se llama algebraico si es solución de una ecuación polinómica de la forma:
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (n \geq 1, a_n \neq 0), a_i$$
Los números reales que no son algebraicos son trascendentes.

un significado atomizado, sin conexiones matemáticas que viabilicen su estabilidad y reutilización en tareas posteriores.

7.1.3.3 Configuración epistémica 3: la cardinalidad de los números racionales e irracionales y la completitud del conjunto de los números reales

Entre los minutos (M47-M48) el profesor nuevamente realiza una puesta en común, esta vez se trata de la noción de completitud de los números reales.

En esta primera parte del diálogo que produce el docente y los alumnos es posible evidenciar las dificultades que provoca el infinito actual, tanto para los alumnos como para el profesor. No se interpreta cuál es la finalidad didáctica que el docente persigue al introducir una pregunta que involucra la cardinalidad[2] de un conjunto infinito (tabla 67).

D2: Chicos, ustedes ¿cuántos piensan son los números racionales?
Als.: Infinitos.
D2: Infinitos, como todos, ¿pero más infinitos o menos infinitos que los otros?
A_2: Más.
A_3: Menos.
A_8: No se sabe.
A_4: Iguales.
D2: Son infinitos.
A_8: Infinidad igualitaria.

Tabla 67. Diálogo entre alumnos y docente por la cardinalidad del conjunto Q.

Cuando el profesor pregunta: ¿pero más infinitos o menos infinitos que los otros? (refiriéndose a otros conjuntos numéricos) no se trata de una pregunta sencilla de responder por el alumno y menos en este nivel educativo.

Reina, Wilhelmi, Carranza y Lasa (2014) estudian la problemática de la cardinalidad y la densidad de los números irracionales en formación de profesores.

> "El aprendizaje del universo finito, con sus relaciones y funcionamiento, se ha logrado a lo largo de muchos años y no sin dificultad.Así, antes de la

[2]El cardinal de los conjuntos numerables (coordinables con $\mathbb{N}$) se denota mediante el símbolo: $\aleph_0$. Puede demostrarse que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable, pero que el conjunto de los números irracionales $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ no lo es. Así: Card $(\mathbb{Z}^+)$ = Card$(\mathbb{Z})$ = Card$(\mathbf{P})$ = Card$(\mathbb{Q})$ = $\aleph_0$ (Reina, Wilhelmi, Carranza y Lasa, 2014, 631).

> aparición del infinito matemático, los procedimientos aritméticos, algebraicos ygeométricos han mostrado su utilidad y eficacia en la resolución de una amplia gama de problemas.Lo que hemos tratado en este apartado refleja la complejidad asociada a la construcción de lanoción de número irracional en donde el infinito matemático aparece como un objeto que incidefuertemente en otras nociones asociadas a dicho conjunto, a saber, numerabilidad, cardinalidad ydensidad de$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ junto a las nociones de continuidad numérica, geométrica y funcional" (p.632).

Los alumnos responden (de acuerdo al nivel educativo donde se encuentran y por desconocimiento de nociones matemáticas complejas como la de cardinalidad de un conjunto infinito) se produce entonces el fenómeno de "aplastamiento" de cardinales infinitos (Arrigo y D'Amore, 1999; 2002; 2004). Pero también el docente produce el mismo fenómeno al afirmar: "son infinitos" (tabla 40).

De esta manera queda instalado un nuevo conflicto semiótico interaccional que se mantiene en estado residual y que probablemente se manifieste en otros niveles educativos.

Probablemente esto último ocurra en aquellos alumnos que continúen sus estudios en carreras donde sea necesario el estudio de las propiedades de los números reales.

La SDC propuesta por el profesor con la noción de cardinalidad de un conjunto infinito queda truncada.

El diálogo continúa (tabla 68).

D2: Los infinitos de los números racionales ¿donde los representábamos nosotros?
Als. […] Silencio.
D2: ¿Dónde representábamos a los números racionales?
A_1: En la recta.
D2: En la recta numérica, y la recta cuando representábamos los números racionales ¿estaba llenita?
A_4: No.
La clase se interrumpe por unos instantes porque un alumno le pregunta algo al docente. Luego el profesor continúa con la clase.
D2: Vuelvo a preguntar lo mismo: ustedes creen que cuando representaban los números racionales en la recta, ¿la recta numérica quedaba completita?
Als. […] Silencio.
D2. ¿Sí o no?
A_5: No (un solo alumno responde).
D2: No, ¿seguían teniendo huecos?
El docente se desplaza y cierra la puerta del aula que da al pasillo.
D2: Bueno esos huecos que algunos de ustedes me contestaron que podía llegar a tener la recta se completan ahora con los números irracionales, los números irracionales son los que pasan a completar la recta numérica, todos esos huequitos que nos quedaban de los números racionales y ahora sí juntamente racionales con los irracionales completan el conjunto numérico que se llama… ¿alguien sabe cómo?
A_7: Irracionales.
D2: Los racionales junto con los irracionales.
D2: Forman un conjunto más grande, que se representa con la $\mathbb{R}$, y hoy no vino A_{12} que me decía que eran los de la $\mathbb{R}$, ¿ y cómo se llaman los de la $\mathbb{R}$?
Als.: Reales.
D2: ¡Reales!, entonces el conjunto de los números irracionales con el conjunto de los números racionales forman el conjunto de los números reales.

Tabla 68. Diálogo entre alumnos y docente a propósito de la recta numérica real.

El docente en este diálogo (tabla 68) intenta rescatar la noción de “completitud” del conjunto de los números reales pero, claramente, los alumnos no la recuerdan o no han sido expuestos a situaciones que involucren esta noción. La “imagen” de la recta numérica, como objeto didáctico para alcanzar la completitud, aparece como “trasparente” para el docente que la propone para sus alumnos.

Se trata de una noción didácticamente compleja de estudiar aún por estudiantes de los primeros años de universidad.

> “En un primer momento los alumnos toman contacto con los números reales por su uso en el cálculo elemental, los ven como resultados de integrales, derivadas, límites de sucesiones, ceros de polinomios, raíces cuadradas, etc. Una reconstrucción es necesaria cuando se desea profundizar en el campo del Análisis. Allí se ponen en juego las relaciones entre loselementos de este conjunto, sus propiedades, su definición. Toma relevancia la propiedad decompletitud, fundamental para el desarrollo de esta disciplina. Deja de servir la representación en larecta como referente

empírico: en el marco de la representación gráfica, la completitud es transparente, no es problemática. Justamente la completitud de $\mathbb{R}$ y su construcción fueron recortadas como objetospara la matemática en el seno de una problemática de fundamentación, que tomó como punto departida separarse de las representaciones geométricas” (Bergé, 2004,184).

Un conflicto semiótico interaccional queda establecido potencialmente, probablemente se vuelva a manifesar cuando los alumnos transiten por otros niveles educativos, en donde sea necesario el empleo de esta noción matemática, probablemente surgirá a través de errores y dificultades.

La SDC, propuesta por el profesor, entre las nociones de número irracional, completitud de la recta numérica y números reales, se manifiesta de nivel bajo, seña de esto es la inestabilidad del conocimiento previo que restringe la eficacia de las intervenciones y condiciona la emergencia de conocimientos estables.

La configuración siguiente se centra en el conjunto de los números reales.

7.1.3.4 Configuración epistémica 4: el conjunto de los números reales

El docente continúa el diálogo junto a sus alumnos ahora se trata de “revisar” qué subconjuntos están incluidos en el conjunto de los números racionales (tabla 69).

D2: ¿Y dentro los números racionales a qué conjuntos incluían?
A_7: Los números enteros.
D2: A los números enteros, que a su vez ¿a quiénes incluía los números enteros? ¿A los…?
A_8: A los decimales.
D2: Haber había un conjunto chiquito más chiquito, parecía chiquito pero es tan infinito como los otros.
A_7: Naturales.
D2: Eran los números naturales… ¿y con qué los represento? (el profesor dibuja en el pizarrón un diagrama de Euler-Venn con algunos números naturales en el interior).
La clase es interrumpida por el preceptor que toma asistencia de los alumnos.
D2. Bien, haber, si al conjunto de los números naturales le agregamos esos negativos que me están diciendo ustedes hace rato ¿qué conjunto formaban?
Als. […] Silencio.
A_6: Los…
A_7: Los números decimales.
El docente gesticula su cara en señal de desaprobación.
A_5: No profe, no sabe nada…(refiriéndose a otro alumno)
A_8: Los enteros ¿no era?
D2: ¡Los enteros!
A_8: ¡Ah que grande!!! (el alumno levanta la mano en señal que dio en el clavo a lo que se le preguntaba y luego ríe con un compañero de banco).
D2: ¿Y con qué letra los nombrábamos?
A_8: Laaaa…
A_5: La $\mathbb{Q}$.
A_7: La $\mathbb{Z}$.
A_8: ¡Ah con la $\mathbb{Z}$! (el alumno se ríe con su compañero en señal de felicidad).
D2: Era con la $\mathbb{Z}$.
D2: Entonces si ha esos le agregábamos los decimales exactos, periódicos, ¿formaban qué conjunto?
A_8: Racionales.
D2: Racionales, eran todos los que podrían transformarse en fracción.
A_5: Con la $\mathbb{Q}$.
D2: Con la $\mathbb{Q}$, bien entonces ahora esos que no pueden ser transformados en fracción, como dijimos recien, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, la $\sqrt[3]{7}$,con π ,con e , el número de oro, forman un nuevo conjunto que lo voy a poner aparte.
A_8: Con la letra…
D2: Los irracionales con la letra $\mathbb{I}$.
D2: ¡Chicos!! ¿Qué pasó A_3? (el profesor llama la atención de los alumnos porque están molestándose entre ellos, a varios, no les interesa lo que el docente propone. El docente hace un gesto en su cara de enojo y los mira fijamente).

Tabla 69. Diálogo entre alumnos y docente a propósito de los conjuntos numéricos.

El docente al expresar: "haber había un conjunto chiquito más chiquito, parecía chiquito pero es tan infinito como los otros" plantea una cuestión de "tamaño" de los conjuntos numéricos generando un conflicto epistémico interaccional que quea en estado residual.

La SDC que pretende generar el docente, por medio del infinito matemático, entre diferentes conjuntos numéricos no se transita por la vía de la experimentación donde sea el alumno sea quién decida sobre los diferentes números, por lo que la misma se puede considerar como de nivel bajo. La resolución de conflictos resulta ineficaz, limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo, producieno un significado atomizado, que viabilice su estabilidad y reutilización en tareas posteriores.

Posteriormente el docente termina de dibujar en el pizarrón la conformación del conjunto de los números reales (figura 132) y los conjuntos numéricos nombrados (figura 133).

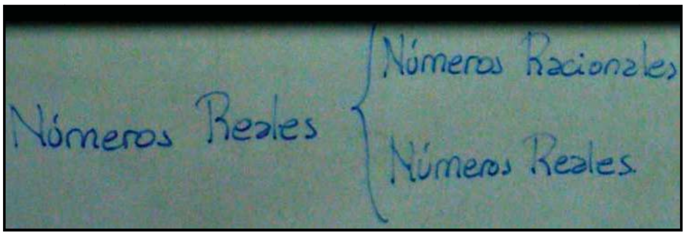


Fig. 132. El profesor escribe en el pizarrón cómo está formado el conjunto ℝ.

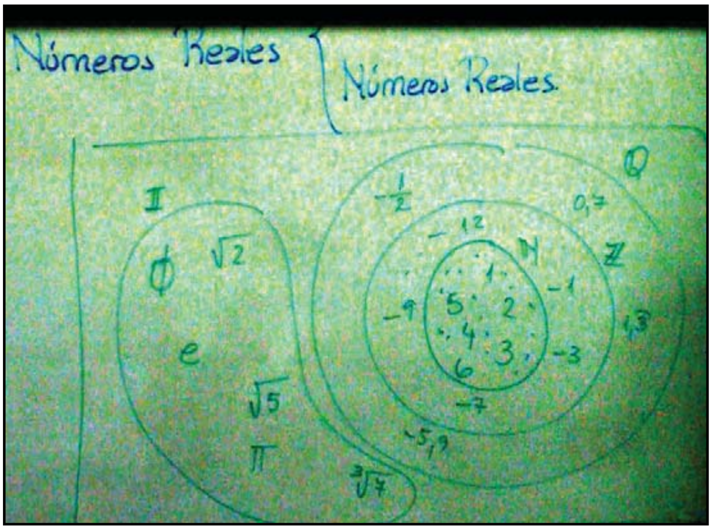


Fig. 133. El profesor dibuja en el pizarrón al conjunto ℝ y a sus subconjuntos asociados.

El docente indica a los alumnos copiar lo desarrollado en el pizarrón (tabla 70).

D2: Copiando (el docente señala a los alumnos lo escrito en el pizarrón). A_4: Tanto para eso. A_6: ¿Lo copiamos profe? D2: Sí.

Tabla 70. Diálogo entre alumnos y docente y expresión de un alumno.

La expresión del alumno A_4 da cuentas del proceso didáctico recorrido hasta arribar al conjunto de los números reales, éste se manifiesta para él como muy complejo: “tanto para eso” se trata de una noción que involucra una gran complejidad didáctica.

> “Consideramos que el concepto de número real no puede abordarse de forma efectiva mediante un tratamiento convencionalmente formal, basado en representaciones proposicionales, con referencias superficiales y pobremente conectadas en el terreno de las imágenes” (Romero, 1997,351).

Los alumnos se dedican a copiar (M54-M62) lo dibujado en el pizarrón, mientras el docente circula por alrededor de los bancos.

La SDC que intenta lograr el docente entre los diferentes conjuntos numéricos, queda en un plano discursivo, oral, sin una participación activa de los alumnos en situaciones o tareas donde sean ellos quiénes puedan diferenciarlos. Si bien el docente pretende rescatar conocimientos previos, estos no están afianzados como se puede deducir de los diálogos desarrollados, por el contrario, se encuentran en un estado muy inestable.

Por lo que la SDC se la puede considerar como de nivel bajo, con una resolución de conflictos ineficaz.

7.1.3.5 Configuración epistémica 5: la representación de algunos números irracionales en la recta numérica real

Entre los minutos 62 y 63, el docente, vuelve a escribir en el pizarrón, ahora se trata de la “representación de los números irracionales en la recta numérica” (tabla 71).

D2: Chicos me escuchan un segundo…me escuchan un segundo…
Los números racionales nosotros los representábamos en la recta numérica, se acuerdan que cuando representábamos en la recta, lo primero que hacíamos es definir una unidad, trazábamos la recta, definimos una unidad a partir de cero y con esa unidad ubicábamos a los números enteros y repetimos la misma unidad para separar exactamente los números enteros, a partir de ahí representábamos los números racionales ¿cómo era que hacíamos para representar los números racionales? (un nuevo gesto memorial tecnológico emerge).
Als. […] Silencio.
D2: A las fracciones por ejemplo.
A_2: Dividíamos.
D2: Dividíamos de acuerdo ¿a qué parte era?
A_8: A la… (no da tiempo a que conteste el alumno).
D2: Al denominador, siempre empezábamos a partir de cero, hacia la derecha…
A_8: Dividíamos la unidad por el denominador, y de ahí tomábamos la unidad y la dividíamos (el alumno hace un gesto con su mano como que corta o divide algo).
D2: Exacto, lo hacíamos hacia la derecha si estábamos hablando de los números positivos y hacia la izquierda si eran negativos. Y de esa manera representábamos lo más exacto posible a los números racionales. ¿Cómo vamos a hacer para representar los números irracionales?
Als. […] Silencio.
D2: Todo va a depender de qué tipo de números irracionales estemos hablando, si estamos hablando de los irracionales especiales o algunas raíces que no sean cuadradas o de los números estos que son generados por una cierta regla especial se van a representar en la recta numérica a través de valores aproximados los más próximos posibles, por ejemplo, yo quiero representar en la recta numérica al número π ¿sí? (un alumno juega con una linterna y apunta a la cámara del investigador) los que tienen calculadora, que son muchos..
A_7: Yo.
D2: …presionen el botón donde aparece π en la calculadora y díganme ¿qué valores aparecen…
A_{10}: 3,14 15 92… π
A_8: 3,14
D2: Cómo serán de especiales el número π y el número *e* que tienen un botón en la calculadora.
D2: ¿Cuánto?, ¿Cuánto A_7?
A_7: 3,14
D2: ¿Solamente?¿eso te aparece en la calculadora?
A_7: 3,141414
D2: Te quedaste corto.
A_7: ¡Ah en la calculadora!
Als.: 1592654 (los alumnos le expresan al docente las cifras restantes en el visor de la calculadora)
El alumno A_7 juega con un compañero de otro banco desafiándose mutuamente.
D2: 3,1415 […].
A_8: 92
D2: 92 […]
A_8: 654
D2: Haber chicos… (algunos alumnos se molestan entre ellos) para representar en la recta numérica volvemos hacer lo mismo que hacíamos cuando trabajábamos con los números racionales, representamos la recta numérica (algunos grupos de alumnos no prestan atención a las palabras del profesor, se dedican a jugar entre ellos) definimos adonde ubicamos el cero y cuál es la unidad que vamos a usar…(el docente dibuja la recta y la unidad correspondiente) (fig.46). Si yo tengo que representar al número π, entre qué y qué número entero…
A_8: Entre 3 y 4.
D2: Entre 3 y 4.
A_4: Hay infinitos números entre 3 y 4.
D2: Hay infinitos números entre 3 y 4 , A_8 tienes razón…vamos a intentar representar lo más aproximado posible, entonces entre el 3 y el 4 ¿en cuántas partes lo podemos dividir?
A_8: En infinitas.
D2: Infinitas partes…teniendo en cuenta que yo quiero representar el 3,141592…
A_6: 5383… (la cifras propuestas por el alumno son incorrectas, parece jugar con las cifras más que realizar un aporte al profesor).
D2: ¿En cuántas partes dividimos al intervalo entre 3 y 4, al trozo que está entre 3 y 4 (el docente gesticula con sus manos indicando el tamaño) para poder representar en un trozo de recta.
A_7: Dividirlo en dos partes.
D2: ¿En dos partes? (el docente marca en el dibujo del pizarrón lo señalado por el alumno) (Fig. 134).

Tabla 71. Diálogo entre alumnos y docente entre los minutos 62 y 63.

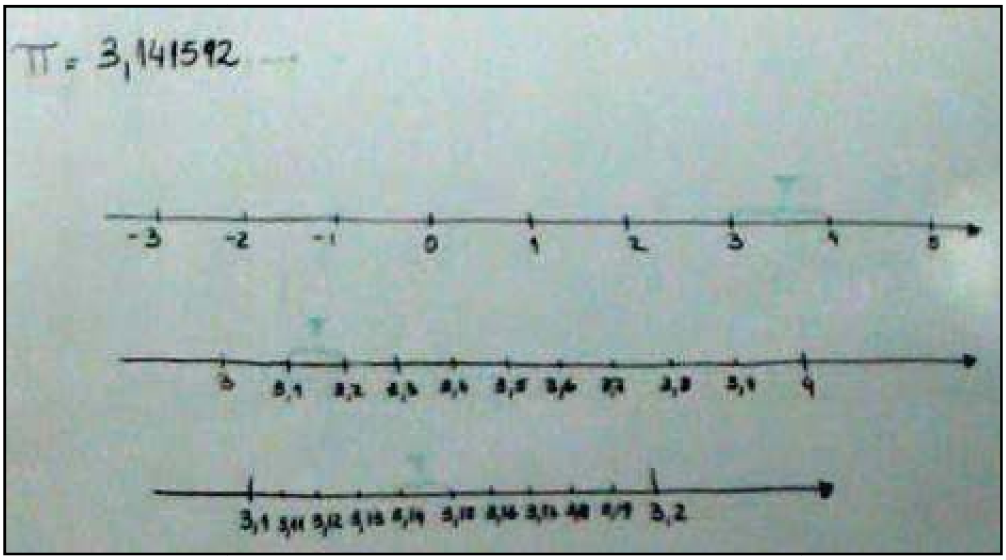


Fig. 134. El profesor dibuja en el pizarrón una recta numérica y luego dibuja una ampliación entre los valores 3 y 4 posteriormente otra entre los valores 3,1 y 3,2.

El docente intenta disminuir la complejidad didáctica y epistémica asociada al número π(Konic, 2006; Konic y Godino, 2005) a través de la noción de encuadramiento de un número real (figura 134).

Si bien es una dirección didáctica que toma el profesor no parece cobrar "sentido" para la mayoría de los alumnos los cuáles no muestran señales de interés en la interacción discursiva que propone el docente. No se realizan actividades donde prime un "principio de necesidad".

> "La introducción del número irracional no siempre se basa en un principio de necesidad, lo que podría redundar en una pérdida de sentido, por parte del alumno, en el aprendizaje de la noción de número irracional" (Reina, Wilhelmi y Lasa, 2012,90).

El empleo de aproximaciones al número π u a otros números irracionales, si bien es un camino didáctico viable debe tener en cuenta la pérdida de información que se produce al realizar dicha aproximación.

> "Serían asimismo necesarias actividades específicas que cuantificaran la pérdida de información que se tiene al aproximar un irracional por racionales. Por ejemplo, suponiendo que la tierra es una esfera cuyo radio

mide 6378 km, si se toman 3,14 o 3,1415926535 como aproximaciones de π, ¿es representativa la diferencia de la longitud del ecuador en cada caso?" (Reina, Wilhelmi y Lasa, 2012,92).

El diálogo del profesor con los alumnos continúa (tabla 72).

A_7: La primera, luego dividimos en dos partes. D2: Vamos a representarlo… A_8: En diez D2: En diez partes iguales (el profesor dibuja las divisiones tomando como unidad de medida el borrador) (fig. 135). D2: Y cada una de estas partes a quién va a corresponder…(el profesor eleva su voz ya que los alumnos hablan entre ellos) ¡La terminamos con esa linternita! Chicos…esta rayita que marqué acá ¿a qué número corresponde? A_6: Diez A_8: Y supuestamente… A_5: 3,1 D2: ¿Tres coma? A_2: 3,15 A_7: 3,2 A_7: Y si cada rayita la dividís por diez ahí pueden sacar el 3,14. D2: Haber… A_7: Entre 3,1 y 3,2 está el 3,15. D2: Ahora…¡chicos estoy hablando para todos! Él, gracias a Dios, me está haciendo un aporte espectacular… (refiriéndose al alumno A_7) pero ¿y el resto? D2: ¿Por acá? (el docente señala, entre dos números, la recta numérica dibujada por él en el pizarrón). A_7: Ahí hay que dividirla en diez de vuelta. Als.: Varios aportes de diferentes alumnos (no logramos diferenciar dichos aportes en el audio de la clase). D2: Volvemos a dividir en diez… Als.: Va, va,va…(varios alumnos "juegan" con la palabra "va"). D2: Entonces acá ¿qué hacíamos? A_1:4 A_2: 3,0 A_3: Tres coma… A_3: 3,11 A_4: ¿Por qué 3,11? A_3: Porque yo sé que es 3,11. A_4: ¡Pero si después sigue el 4! A_7. 3,1415 A_5: Nadie dice, nadie puso (chiste de un alumno). A_7: 3,14 y "apenitas". A_6: Entre 14 y 15. D2: ¿Entonces ahora donde estaría ubicado π? A_3: Entre 3,11 y… A_6: Entre 3,14 y 3,15. A_5: ¡Si es 1/5 tonto! A_4: Bueno ahora haga otra línea de tiempo. D2: De esa manera (fig.63). A_7: La flecha Profe, por favor (el alumno se refiere a la flecha del final de la recta numérica). D2: De esa manera podemos representar la recta numérica haciendo aproximaciones o encuadramientos, porque en realidad voy encuadrando números entre los dos extremos. Podemos representarlos de la manera más próxima que podemos a los números irracionales porque no conocemos sus cifras, de la misma manera que esta podemos trabajar con cualquier número irracional. Ahora hay algunos números irracionales que pueden ser representados de otra manera, esos números irracionales que pueden ser representados de otra manera son los que provienen de raíces cuadradas. Los que provienen de raíces cuadradas que obviamente no dan resultado entero pueden ser representados en la recta numérica utilizando el teorema de Pitágoras. Vieron que recién mientras ustedes calculaban la diagonal del prisma, obtuvieron como valor de la diagonal un número irracional utilizando el mismo procedimiento y tomando como diagonal o como hipotenusa del triángulo rectángulo a un número irracional que tuviera esa raíz cuadrada, podemos representar, en la recta numérica al triángulo del cual esa hipotenusa es parte.

Tabla 72. Diálogo entre alumnos y docente a propósito de la aproximación.

Los aportes de los alumnos, que discuten entre ellos la ubicación del número π, no son reutilizadas por el docente para tratar de estudiar la problemática de la aproximación. La complejidad que emerge de dicho número a través de la presencia del infinito actual se puede observar en la expresión del alumno A_7: "3,14 y apenitas" que se aferra a un infinito de tipo potencial.

El profesor intenta pseudoinstitucionalizar las nociones matemáticas de recta numérica, aproximación de número irracional y representación de un número irracional en la recta numérica real.

Produce así una interacción entre las configuraciones epistémicas: CE-implícita, CE-aproximación y la CE-Existencia (figura 135).

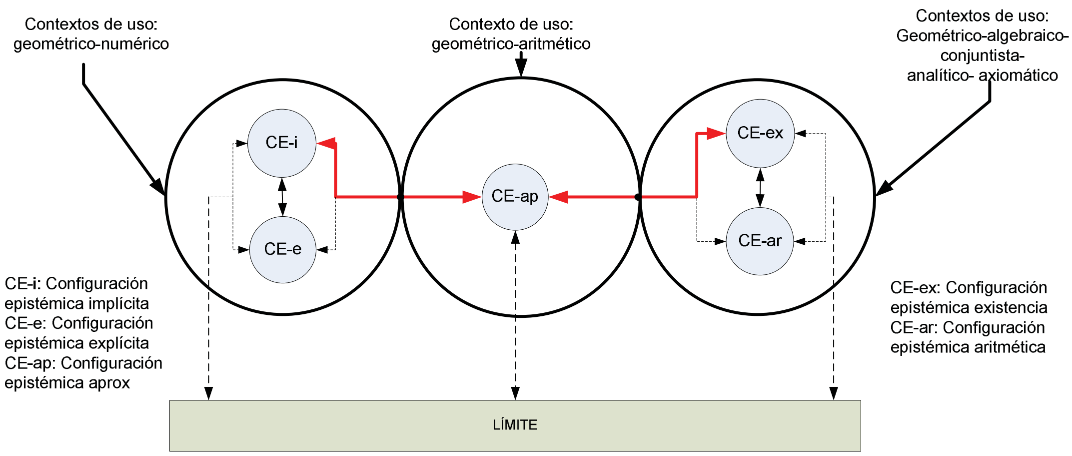


Fig. 135. Interacciones entre configuraciones epistémicas producidas por el docente 2.

Se trata de una SDC propuesta por el profesor que se manifiesta todavía de bajo nivel entre las nociones de aproximación de un número y la de número irracional. El profesor no considera las manifestaciones de los alumnos y continúa con el diálogo (tabla 73).

Fíjense si nosotros utilizamos por ejemplo la $\sqrt{2}$ …
Als. : … (los alumnos charlan entre ellos).
D2: Yo tengo, miren, me escuchan, tengo la $\sqrt{2}$ para representar, si yo tengo un triángulo rectángulo donde la hipotenusa es $\sqrt{2}$ ¿cuánto creen que van a medir cada uno de los lados del triángulo rectángulo?
A_1: 23
A_7: ¿Qué es lo que quería de cada uno?
D2: Yo quiero que me digan cuánto mide los lados del triángulo.
A_4: 1,41
D2: Esa es la medida de la $\sqrt{2}$ aproximadamente.
Als.: Diferentes aportes de los alumnos.
A_4: Si es 1 los demás valen 0,5.
A_7: No
A_7: ¿No es 1,5 cada cateto?
D2: Miren vamos a utilizar Pitágoras ¿sí? Miren yo no conozco estos dos lados (fig.65), los voy a llamar "a" y "b".

Tabla 73. Diálogo entre alumnos y docente a propósito de la raíz cuadrada de dos.

Luego el profesor dibuja la representación geométrica de la raíz cuadrada de dos. El diálogo del profesor con los alumnos continúa (tabla 74).

¿Qué dice el teorema de Pitágoras?
Als.: […]
D2: ¿Pitágoras qué decía?
Als.: […]
D2: ¡Chicos!
A_7: Que la suma de los cuadrados de los catetos.
D2: O sea ¿esto cómo sería?
A_7: Sería a^2…
D2: El profesor va escribiendo simultáneamente que los alumnos intentan responder. No da tiempo suficiente a que respondan, es él quien escribe la respuesta en el pizarrón.
D2: ¿Sí? (refiriéndose a lo escrito en el pizarrón) Fíjense, ¿la raíz cuadrada de dos al cuadrado la podemos simplificar?
A_7: Sí. Quedaría dos al cuadrado.
D2: […] El docente no habla mientras escribe la respuesta en el pizarrón, o sea simplifica exponente y signo radical.
Als.: Algunos alumnos molestan y se ríen.
D2: El docente los mira fijo en señal de desaprobación de las actitudes que los alumnos manifiestan.
D2: Tengo que buscar dos números naturales porque estoy hablando de medidas y las medidas acuérdense que no pueden ser negativas, nunca cuando mido una longitud o una superficie podemos hablar de números negativos, en este caso, como estamos hablando de medidas de longitud, quiero saber dos números naturales que sumados me dé como resultado dos (el docente no aclara que los números deben estar elevados al cuadrado).
Als.: Uno (varios alumnos).
D2: ¿Hay alguna otra posibilidad? ¿hay algún número que sumado me de dos?
Als.: No (algunos alumnos charlan entre ellos).
Als.: Diferentes respuestas de los alumnos.
D2: Ojo, tengan en cuenta que yo estoy hablando de números que han sido elevados al cuadrado (el docente se da cuenta de su error y lo rectifica públicamente) son números que provienen de cuadrados, llamados también cuadrados perfectos. ¿Cuál sería el valor de "a" que elevado al cuadrado me dé como resultado "b"?
Als.: Uno (varios alumnos).
D2: ¿No hay otra posibilidad?
A_7: No, porque uno por uno…
Un alumno le tira una goma elástica a otro.
D2: Si a^2 es igual a 1, "a" ¿cuánto vale?
A_7: Eh…
A_8: Uno.
A_9: Está mal eso profe.
A_7: Uno.
D2: Entonces tenemos la medida de los lados de ese triángulo.
A_7: Ahora hay que sacar la hipotenusa.
D2: La hipotenusa ya la tengo, si sé que es raíz de dos, de ahí partimos. Si yo utilizo este triángulo y lo llevo a la recta numérica (el docente dibuja una nueva recta numérica).
Als.: Algunos alumnos hablan y se ríen.
D2: Si ese triángulo ¡Chicos!(hace callar a los alumnos) que acabamos de calcularle el valor de los lados y que sí conocíamos la hipotenusa lo llevamos a la recta numérica, si la raíz es positiva lo vamos a hacer a partir del cero, hacia la derecha, y si la raíz es negativa hacia la izquierda…vamos a construir el triángulo que tiene como medidas: uno de base y uno de lado, o sea uno por uno, tomando como medida la unidad que nosotros hemos establecido, esa misma unidad la vamos a repetir en forma vertical (el profesor muestra con sus dedos en la construcción que realiza en el pizarrón) para trazar el otro lado (fig.136).

Tabla 74. Diálogo entre alumnos y docente a propósito del teorema de Pitágoras.

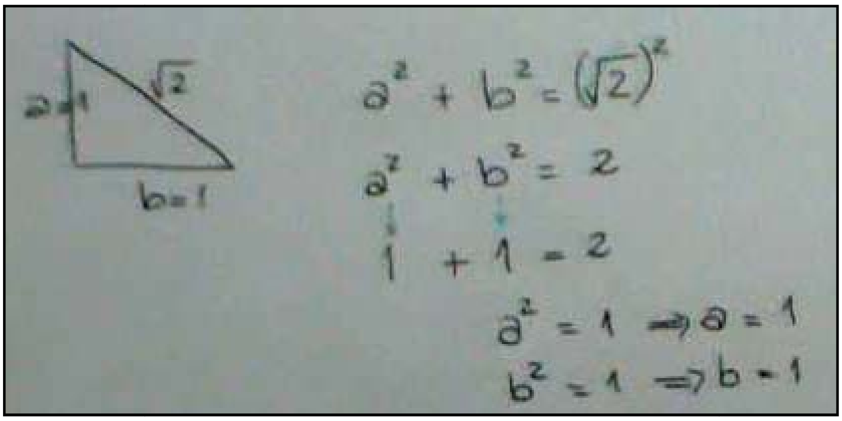


Fig. 136. El profesor halla los catetos desconocidos de un triángulo rectángulo dada la hipotenusa.

El relato del profesor continúa (tabla 75).

O sea tenemos una unidad aquí y una acá (marca con un marcador). Ese triángulo a nosotros nos garantiza que quede como hipotenusa la raíz cuadrada de dos (Fig.66), y entonces utilizando el compás, que es lo que a nosotros nos permite trasladar las medidas de la forma más precisa posible, inclusive más precisa que trasladarla a partir de la regla, pinchando con el compás en cero (varios alumnos hablan mientras el profesor muestra el procedimiento) y tomando como medida de la abertura la hipotenusa del triángulo, trazamos un arco de circunfencia que corte la recta numérica (varios alumnos continúan hablando entre ellos), y entonces donde hace intersección el arco de circunferencia con la recta numérica se encuentra ubicada la raíz cuadrada de dos de la manera más exacta posible…aproximadamente 1,41 (varios alumnos no escuchan lo que el docente esta relatando). Seguramente eso lo vieron el año pasado ¿alguien lo vio? (nuevamente produce el profesor un gesto memorial). Als.: No (varios alumnos). A_3: Yo. A_6: Si lo vimos, lo vimos. A_8: Levanta la mano en señal que él también ha visto el procedimiento. D2: Copian eso del pizarrón. (se refiere a lo escrito por él) (Fig.137).

Tabla 75. Diálogo entre alumnos y docente.

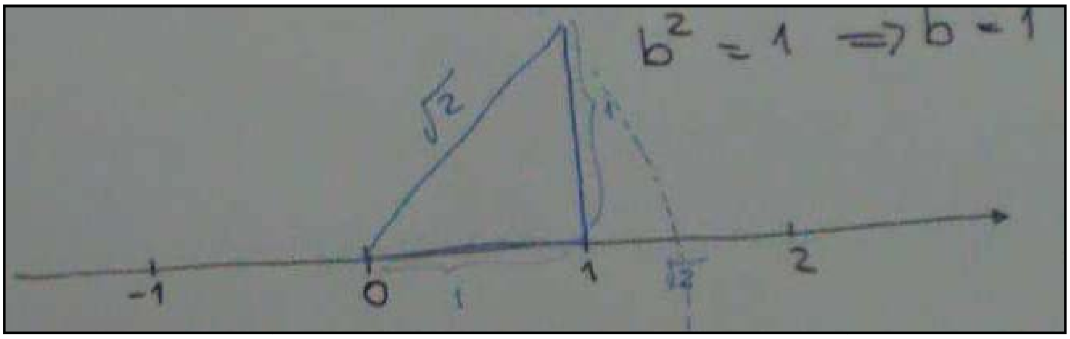


Fig. 137. El profesor representa la raíz cuadrada de dos en la recta numérica real.

El docente les da tarea a los alumnos para la próxima clase y también indicaciones sobre el proceso de representación de números en la recta real. Se trata de la reprentación de los números:$\sqrt{5}$ y $\sqrt{13}$. La clase se termina.

El profesor intenta una SDC entre la noción de número irracional y la representación geométrica en la recta numérica real. Ésta interacción se puede considerar como de "bajo" nivel ya que es el docente quien realiza la actividad. Los alumnos se limitan a observar y copiar el procedimiento realizado por el docente.

La tarea propuesta se centra en la "imitación" de lo realizado por el profesor en el pizarrón. La actividad matemática de los alumnos no es visible para el docente hasta la próxima sesión.

7.1.4 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA CLASE 2: LA PSEUDOINSTITUCIONALIZACIÓN DE NOCIONES MATEMÁTICAS COMPLEJAS

Si observamos, en la figura 138 los tiempos empleados (M07 a M31), las "cintas" de colores delatan que es el profesor el que realiza la mayor parte de las actividades al realizar una larga puesta en común (P7), donde expone varias preguntas (P4) a los alumnos que algunos de ellos se limitan a responder (A5) pasivamente. Al mismo tiempo el docente realiza explicaciones (P1).

El docente en estos primeros veintiséis minutos retoma con el problema de la clase anterior, él mismo realiza la resolución en el pizarrón con aportes verbales de algunos alumnos (muy pocos).

Luego el profesor define la noción de número irracional (M31) luego la escribe (P2) en el pizarrón junto a algunos ejemplos de estos números.

Los actividad que realizan los alumnos es copiar (A2) lo realizado por el docente en el pizarrón (M32-M48).

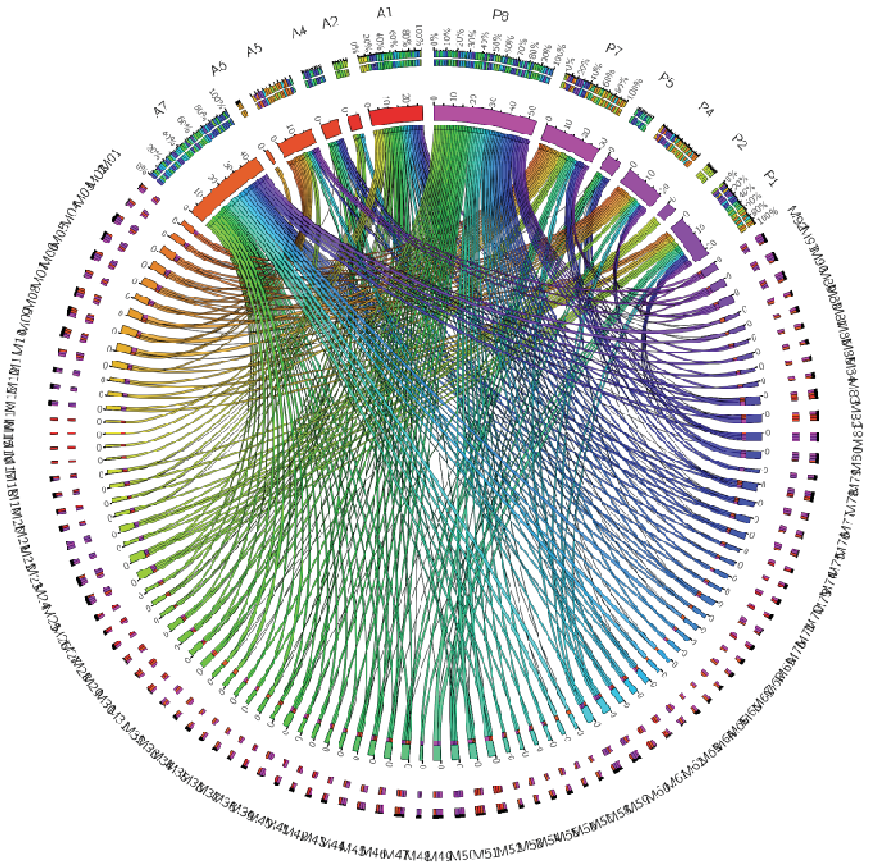


Fig.138. Actividades realizadas en la segunda clase de matemática por alumnos y profesor.

El profesor pseudoinstitucionaliza nociones matemáticas complejas, como la de completituden $\mathbb{R}$, sin mediar un estudio donde el alumno participe activamente en este proceso por lo que queda en un plano discursivo.

Inmediatamente define el conjunto $\mathbb{R}$: ("los racionales junto con los irracionales forman un conjunto "más grande" que se representa con la $\mathbb{R}$").

Posteriormente trata de que los alumnos evoquen a la representación de los números racionales a modo de introducción de la "representación de números irracionales". Introduce la noción de "encuadramiento" de números irracionales.

Luego introduce la representación de números irracionales que provienen de raíces cuadradas empleando el teorema de Pitágoras.

La mayor parte de la actividad la realiza el profesor, los alumnos se limitan a responder preguntas y a copiar (A2) por lo que la configuración didáctica se la puede considerar como magistral, con pequeños aportes de una de tipo dialógico (pseudodialógica).

7.1.5 SESIÓN 3: LO OSTENSIBLE VERSUS LO NO OSTENSIBLE

Disposición física de los alumnos: se encuentran sentados de a pares según la construcción física de los bancos.

El trabajo de los alumnos en el aula es planteado por el profesor en forma individual.

7.1.5.1 Configuración epistémica 1: la representación geométrica de algunos números irracionales en la recta numérica real y la argumentación por teorema de pitágoras

La clase comienza con el profesor intentando retomar con la tarea que había quedado pendiente la clase anterior, a saber, la representación geométrica de los números $\sqrt{5}$ y $\sqrt{13}$ en la recta numérica real.

Varios alumnos manifiestan no haber realizado la tarea propuesta y otros ni siquiera haberla copiado.

El docente intenta retomar la representación geométrica de algunos números irracionales pero hay un grupo de alumnos que no están interesados. Les recuerda (gesto memorial) la representación de la raíz cuadrada de dos que realizaron la clase anterior.

Un alumno arroja un “bollo” de papel a otro, el docente le reclama al alumno por su actitud y le hace buscar el papel y tirarlo en el papelero.

Luego el profesor retoma la clase, esta vez pregunta ¿cómo hacíamos para averiguar los catetos del triángulo?, los alumnos no responden y el docente vuelve a preguntar induciendo la respuesta: ¿utilizábamos él…? teorema de Pitágoras (varios alumnos).

Luego escribe en el pizarrón mientras explica la forma de hallar el valor de los catetos del triángulo rectángulo (figura 139).

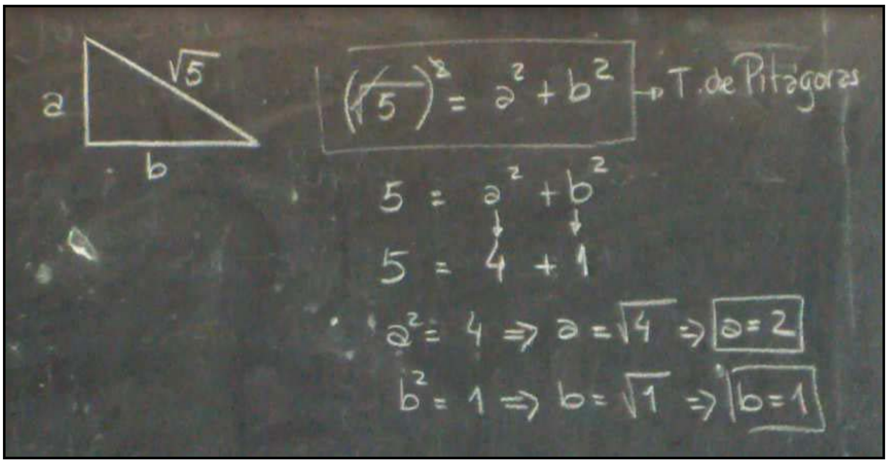


Fig. 139. El profesor halla los valores de los catetos del triángulo rectángulo.

El docente explica que “la condición que debemos cumplir para encontrar esos lados gráficamente es que la medida de los lados sean cuadrados perfectos, los cuadrados perfectos son los números que provienen de cuadrados, o sea: cuatro, nueve, dieciséis, veinticinco, ¿sí?, números que provienen de cuadrados perfectos”.

El profesor intenta una SDC entre el teorema de Pitágoras y la representación de un número irracional en la recta numérica real, esta se manifiesta de nivel “bajo” ya que surge de “mostrar” un solo ejemplo en pizarrón. La inestabilidad del conocimiento previo restringe la eficacia de las intervenciones y condiciona la emergencia de conocimientos estables.

Luego de explicar cómo hallar los valores de los catetos el docente indica: “vamos a llevar esto a la recta numérica, para ello sí tengo regla y compás de pizarrón” (figura 140).

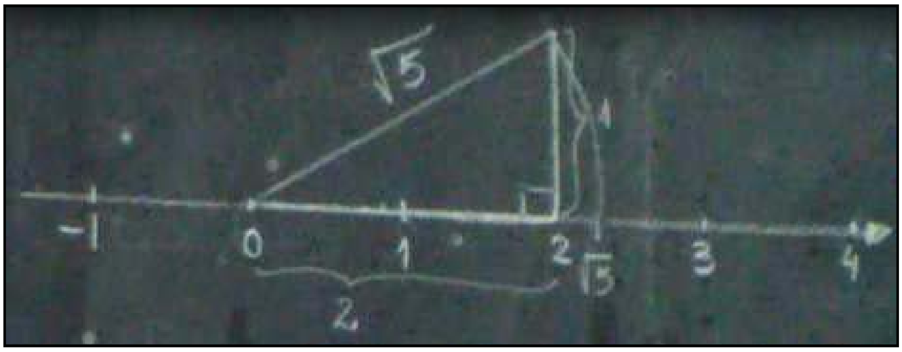


Fig. 140. El profesor representa la raíz cuadrada de cinco en la recta numérica real.

El docente relata el procedimiento geométrico para representar este tipo de números y luego les invita a los alumnos a realizar la $\sqrt{13}$ que es el otro número irracional que queda como tarea para la casa.

Con lo expuesto en el párrafo anterior se muestra que es el docente quien termina realizado la primera actividad propuesta para la casa, esto ocurre porque la mayoría de los alumnos, como dijimos anteriormente no realizan la tarea designada para su casa.

Los alumnos comienzan a realizar la representación de la $\sqrt{13}$ mientras el docente circula por el aula intentando despejar dudas.

Una vez que los alumnos han realizado la tarea el docente solicita que pase un alumno a realizar la tarea en el pizarrón. En realidad pasan dos alumnos, uno argumenta porqué los catetos miden dos y tres, respectivamente (fig.141), y el otro dibuja la representación geométrica de la raíz cuadrada de trece (fig.142).

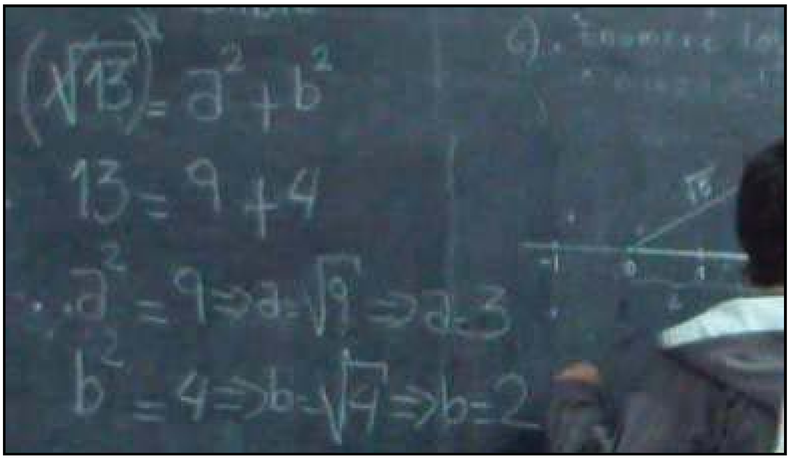


Fig. 141. Un alumno argumenta la medida de los lados del triángulo rectángulo.

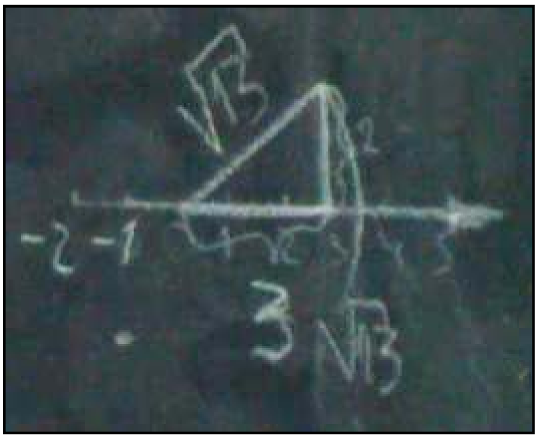


Fig. 142. Un alumno representa la raíz cuadrada de trece en la recta numérica real.

Luego el docente propone, a todos los alumnos, representar otros números irracionales, se trata de los números: $-\sqrt{10}$, $1+\sqrt{2}$ y $2\sqrt{5}$.

Ellos comienzan a trabajar, varios realizan su tarea, algunos no están interesados en ella y se molestan entre ellos con una cáscara de fruta.

Algunos alumnos tienen dificultades en la representación y el docente realiza una puesta en común: "en el caso de las raíces negativas como en la $-\sqrt{10}$ ¿está bien usarla como medida de la hipotenusa de un triángulo?" , los alumnos responden afirmativamente y negativamente, el profesor aclara: "porque en realidad nosotros, para utilizar el teorema de Pitágoras, no estamos utilizando la "menos" raíz cuadrada de diez, estamos utilizando la raíz cuadrada positiva de diez, lo que vamos hacer es representarla para el otro lado, pero la medida de la hipotenusa es positiva, tengan en cuenta que las medidas no se miden en números negativos, no hay ninguna longitud que se mida con un número negativo".

Un conflicto semiótico interaccional potencial queda instalado y se manifiesta ya que algunos alumnos se sorprenden porque habían representado incorrectamente de acuerdo a lo manifestado por el docente.

Nuevas dificultades aparecen al intentar los alumnos ubicar el número $1+\sqrt{2}$ en la recta numérica real.

Un alumno parece haber encontrado la solución, se las comunica públicamente a un grupo de compañeros: "sacamos la raíz de dos y le sumamos uno"

Ante la consulta de un alumno el profesor expresa: "es que la representación gráfica tiene que ser exacta no aproximada" un alumno responde: "Oh my God!". El docente produce un conflicto semiótico interaccional potencial al expresar la exactitud de la representación ya que toda medida es aproximada.

> "Fijados los puntos correspondientes a 0 y 1, el siguiente paso en la representación de unnúmero real cualquiera es determinar el correspondiente punto de la recta. Tratándose deun procedimiento de medición, la manipulación con instrumentos físicos (como la reglagraduada, el micrómetro, la regla de un solo borde y el compás o el intégrafo) paradeterminar la posición de un número real sobre una recta produce siempre un resultadoaproximado". (Coriat y Scaglia, 2000, 29)

Los alumnos no pueden obtener una medida exacta en sus cuadernos, sin embargo la representación "ideal" de un número construible[3] sí es exacta.

> "Todos los números constructibles con regla y compás admiten una representación idealmente exacta; los restantes números (sean

[3]Un número x es *construible* "si podemos calcularlo por un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracciones de raíces cuadradas, comenzando con 0 y 1". (Moise, 1968,302).

algebraicos o trascendentes) no admitenhoy día una representación idealmente exacta". (Coriat y Scaglia, 2000, 29).

El profesor no aclara cuándo es posible la representación exacta y aproximada de un número irracional, para ello debe hacer uso de la noción de número construible, algo que no es considerado por el profesor ni por el currículo propuesto en la provincia de Mendoza.

"Creemos que la noción de número construible puede contribuir a hacer revertir la creencia deque todo número irracional es construible con regla y compás." (Reina, Wilhelmi, Carranza y Lasa, 2013,4).

Llama la atención la cantidad de docentes que opta por no responder a los interrogantes propuestos, una de las posibles lecturas de esta actitud puede ser el no querer cometer errores y exponerse a futuras críticas. Otra de las posibles causas que se puede inferir es que ellos, tal vez, no disponen de elementos conceptuales que puedan ayudarles a discernir y a justificar sus respuestas. Una tercera se relaciona con el currículo ya que los profesores parecen manejarse dentro de los límites conceptuales propuestos por el currículo y no les resulta interesante emplear o disponer de otras nociones matemáticas para "interpretar" la representación de números irracionales.

La clase continúa, un alumno realiza la representación geométrica en la recta real del número: $1+\sqrt{2}$, el docente lo invita a que reproduzca la representación en el pizarrón para que los demás alumnos vean si el procedimiento es correcto o no y "si alguno había comenzado el procedimiento por otro lado".

El alumno comienza hallando, erróneamente, los valores de los catetos del triángulo rectángulo, según la argumentación propuesta por él, se trata de un triángulo rectángulo de hipotenusa igual a $\sqrt{2}$ y no $1+\sqrt{2}$ como él mismo muestra en el gráfico (figura 143).

Posteriormente representa en el pizarrón, con ayuda de la regla graduada y el compás, el número $1+\sqrt{2}$, nuevamente emerge el error en la hipotenusa del triángulo (figura 144).

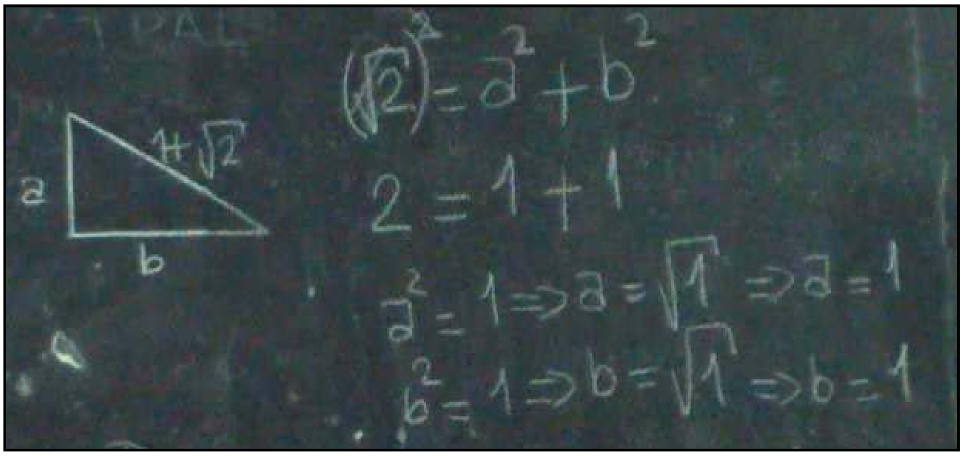


Fig. 143. Un alumno obtiene los valores de los catetos de un triángulo rectángulo.

Fig. 144. El mismo alumno representa el número $1 + \sqrt{2}$ en la recta numérica real.

Fig. 145. El profesor corrige el valor de la hipotenusa reemplazándolo por $\sqrt{2}$.

Mientras el alumno representa en el pizarrón al número propuesto los demás alumnos charlan entre ellos, muy pocos prestan atención al procedimiento que sigue su compañero en la pizarra.

Luego de terminada la construcción geométrica, por parte del alumno, el profesor le solicita realice una breve explicación, el alumno le explica a sus compañeros. El profesor se da cuenta del error en la representación geométrica y lo rectifica (fig.145), pero no se percata del error en el valor de la hipotenusa del triángulo en la argumentación propuesta por el alumno (fig.144), ésta quedará así en la pizarra y será copiada en sus cuadernos por los alumnos.

El docente felicita al alumno y les propone emplear el procedimiento descubierto por su compañero.

Los alumnos "parecen" haber "escuchado" este último discurso del docente y el procedimiento gráfico realizado por su compañero, pero las dificultades volverán a surgir más adelante.

La SDC se observa de tipo "medio" donde la resolución de conflictos ha conllevado intervenciones regulativas no contrastadas y las producciones de los estudiantes carecen de un sustento discursivo que garantice la estabilidad de los conocimientos emergentes.

Queda entonces planteado un conflicto epistémico de tipo interaccional que se manifiesta a través de los errores en las evaluaciones (tablas 76, 77 y 78).

Evaluación 30-07-13 Fila 1	**Representación geométrica de la $\sqrt{2}$**	**Argumentación por teorema de Pitágoras**	**Representación geométrica de la $\sqrt{10}$**	**Argumentación por teorema de Pitágoras**
Correcta	**0**	**0**	**0**	**0**
Aproximada (sin proceso geométrico)	1	0	1	0
Incorrecta	0	0	0	0
No contestan	**6**		**6**	

Tabla 76. Resultados obtenidos, en evaluación de proceso, al representar dos números irracionales en la recta numérica real.

Evaluación 30-07-13 Fila 2	Representación geométrica de la $\sqrt{5}$	Argumentación por teorema de Pitágoras	Representación geométrica de la $\sqrt{13}$	Argumentación por teorema de Pitágoras
Correcta	0	0	0	0
Aproximada (sin proceso geométrico)	1	0	1	0
Incorrecta	1	0	1	0
No contestan	4		4	

Tabla 77. Resultados obtenidos, en evaluación de proceso, al representar dos números irracionales en la recta numérica real.

En la evaluación realizada por los alumnos el 30-07-13, la mayoría de ellos no contesta el ítem correspondiente a la representación en la recta numérica de números irracionales.

Para la evaluación llevada adelante el 20-08-13, once alumnos no logran argumentar ni representar correctamente al número $\sqrt{17}$ en la recta numérica real y cuatro no responden, mientras que para el número $2+\sqrt{5}$ las dificultades se manifiestan aún más ya que trece alumnos no logran una representación correcta del número de los cuáles siete no logran argumentar empleando Pitágoras y seis no contestan el ítem (tabla 78).

Evaluación 20-08-13	Representación geométrica de la $\sqrt{17}$	Argumentación por teorema de Pitágoras	Representación geométrica de $2+\sqrt{5}$	Argumentación por teorema de Pitágoras
Correcta	9	8	5	7
Incorrecta	11	11	13	7
No contestan	4	4	6	7

Tabla 78. Resultados obtenidos en evaluación al representar dos números irracionales en la recta numérica real.

Por tratarse de un error que emerge en una evaluación y luego, transcurrido el tiempo, en la otra, se trata de un error de tipo "recurrente".

7.1.6 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA SESIÓN 3: LA PROBLEMÁTICA DE LA INTRODUCCIÓN DE UN PROCEDIMIENTO GEOMÉTRICO

Si observamos en la figura 146 del minuto cinco al veintisiete (M05 a M27), las “cintas” de colores muestran que la mayor actividad la realizó el docente(P7) haciendo que los alumnos recuerden lo trabajado en la clase anterior, realice algunas preguntas (P4), explique el procedimiento geométrico (P1) y escriba en el pizarrón (P2). Por su parte los alumnos se limitan durante este lapso de tiempo a responder algunas preguntas del profesor y, en algunos casos, a no realizar tarea alguna (A1).

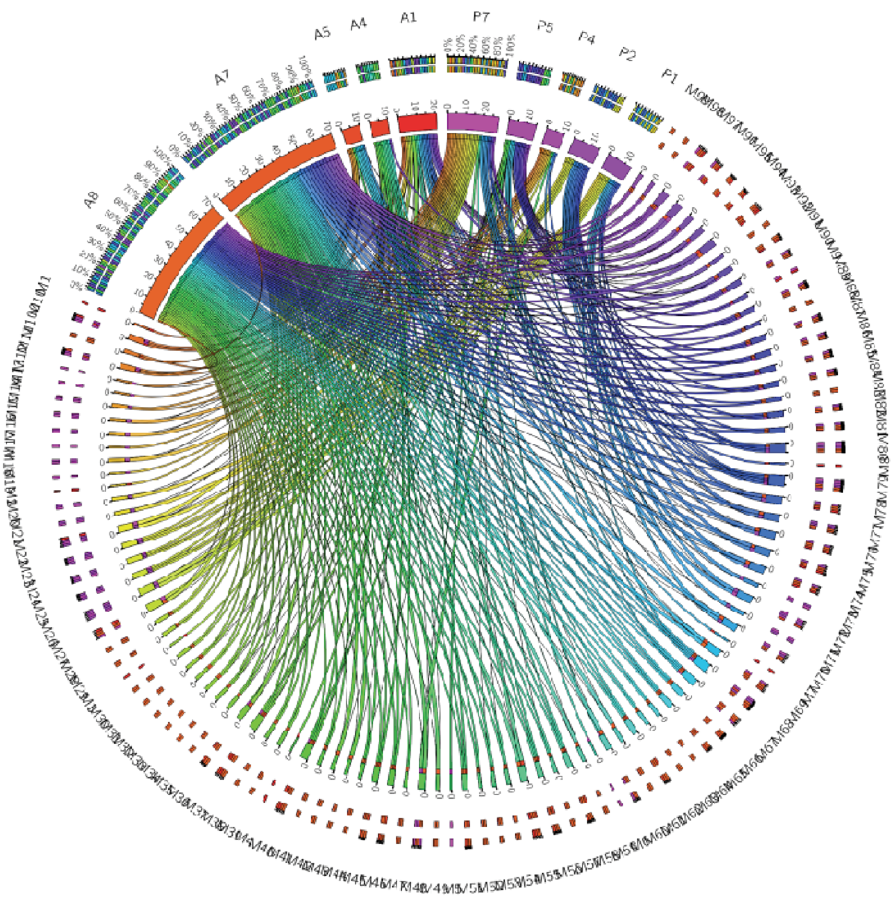


Fig.146. Actividades realizadas en la tercera clase de matemática por alumnos y profesor.

Del minuto veintiocho y hasta el sesenta y nueve (M28-M69) la actividad la realizan los alumnos intentando representar algunos números irracionales en la recta numérica real. Durante este intervalo de tiempo los alumnos hacen preguntas al profesor (A4) que son respondidas por el profesor (P5). Algunos grupos de alumnos no realizan tarea (A1).

La actividad del docente se centra la actividad del profesor en recorrer los bancos donde trabajan los alumnos (P8) y en responder las preguntas que los alumnos le realizan (P5).

Del minuto setenta al setenta y tres (M70-M73) el docente realiza una puesta en común (P7) explicando (P1) cuestiones relativas a la representación de números irracionales en la recta real.

Desde el minuto setenta y ocho y hasta el ciento nueve (M78-M109) nuevamente los alumnos continúan su tarea (A7) mientras el docente circula por el aula (P8).

El docente intenta una interacción entre objetos matemáticos desarrollados en el currículo de matemática, es allí que emerge un fenómeno didáctico que Reina, Wilhelmi, Lasa y Carranza (2013) han denominado "simbiosis didáctica curricular" (SDC).

El profesor produce una interacción entre los objetos matemáticos presentes en el currículo, en este caso se trata de los números irracionales, el teorema de Pitágoras y la representación geométrica de los números irracionales en la recta numérica real. Pero se trata de una SDC de nivel bajo que provoca conflictos semióticos que se manifiestan en las evaluaciones tanto de proceso como integradora.

El diseño curricular de Matemática correspondiente al primer año (2013) (actual tercer año) de la Educación Secundaria propone los siguientes descriptores para la Modalidad Producción de Bienes y Servicios:

> "Números reales: operaciones. Aplicaciones a la medida. Errores" (Diseño Curricular Provincia de Mendoza, ,43).

Tanto el docente 1 como el profesor 2 proponen en su planificación de tercer año.

> “Números reales. Propiedades. Operaciones. Números irracionales. Operaciones con irracionales representados como radicales. Radicales equivalentes por simplificación y extracción de factores. Suma, resta, multiplicación. Racionalización. Propiedades. Operaciones. Errores. Redondeo de números. Error absoluto. Error relativo y porcentual” (Planificación de Matemática, 2013, 5).

Se produce así una distancia entre el significado institucional de referencia, dado por el currículo propuesto por la Dirección General de Escuelas de la Provincia de Mendoza, y el significado institucional planificado.

El docente realiza entonces algunas SDC entre objetos matemáticos presentes en la planificación anual y descarta interacciones con otros objetos (fig.147).

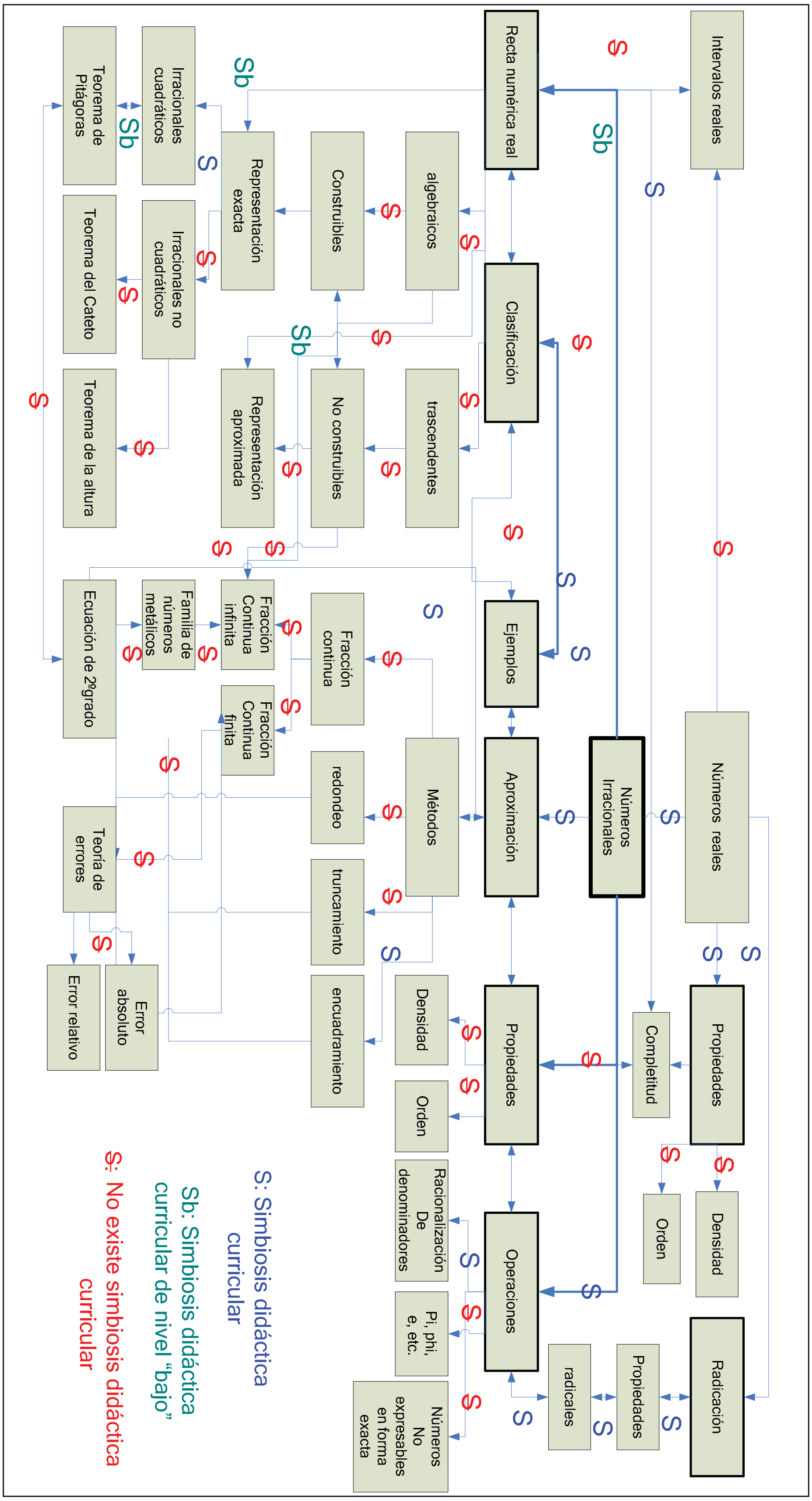


Fig. 147. Recorrido didáctico-curricular del Docente 2 con interacciones entre objetos matemáticos a través de la noción de simbiosis didáctica curricular.

El profesor nuevamente se produce una distancia ahora entre el significado institucional planificado y el efectivamente implementado por él en el aula.

Esto último se observa en la planificación del recorrido didáctico-curricular realizada por el docente quien contempla algunos objetos matemáticos, como la teoría de errores, que no son finalmente implementados y que no generan un efecto de simbiosis. La restricción de estos contenidos en la trayectoria didáctica no es explicitada por el docente, siendo la restricción temporal la explicación más plausible de la decisión didáctica.

La configuración didáctica se puede caracterizar como una "mezcla" entre la de tipo personal y dialógica ya que durante varios minutos son los alumnos, no todos, quienes realizan la resolución de la tarea propuesta.

Hay momentos de diálogo entre el docente y los alumnos en relación con el conocimiento. En la próxima sesión el docente introduce los números irracionales como radicales.

7.1.7 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDÁCTICO DE LA SESIÓN 4: LOS NÚMEROS IRRACIONALES COMO RADICALES

Disposición física de los alumnos: se encuentran sentados de a pares según la construcción física de los bancos.

El trabajo de los alumnos en el aula es planteado por el profesor en forma individual.

7.1.7.1 Configuración epistémica 1: extracción de factores fuera del radical

El profesor comienza la clase (tabla 79).

D2: La clases anteriores habíamos comenzado a trabajar con el conjunto de los números irracionales y habíamos…(le llama la atención a un alumno que está molestando) representado gráficamente algunos de esos números irracionales, es más, los que representábamos eran números que provenían de raíces cuadradas. Lo que vamos a hacer hoy es que con esos radicales, son números irracionales que provienen de raíces no necesariamente de raíces cuadradas,…y utilizando las propiedades de la potenciación que vimos en clases anteriores, vamos a intentar reducir esos radicales, achicarlos de forma tal de trabajar con el menor radicando posible para que las operaciones que realicemos sean más simples. Ese procedimiento se llama extracción de factores de adentro del radical y lo que hacemos nosotros es, por procedimientos que nosotros ya vamos a ver ahora y utilizando propiedades de la radicación, sacar de adentro de la raíz la mayor cantidad de números posibles. Para poder realizar ese procedimiento uno de los procedimiento, valga la redundancia, que aplicamos es la factorización, la misma factorización que ustedes utilizaban cuando hallaban común denominador ¿sí?, el mismo procedimiento para factorizar, eso lo hacemos cuando el radicando es un número compuesto, un número que se puede desarmar, si fuese un número primo ¿lo podríamos hacer?...no ¿por qué?... A_1: Porque es primo. A_2: Porque yo lo digo. D2: ¿Qué son los números primos? A_7: Los números que se dividen por el uno y por sí mismo. D2: Que son divisibles por sí mismos y por uno, entonces la descomposición que podemos realizar del número primo es el número multiplicado por uno y no tendría sentido hacer extracción de ningún número porque no podríamos sacarlos. Pero en el caso de los números compuestos, en algunas situaciones, nosotros podemos extraer factores fuera del radical, entonces eso es lo que vamos a ver hoy. Ponen de título extracción de factores del radical. El docente comienza a escribir en el pizarrón el procedimiento, los alumnos se distienden, comienzan a hablar entre ellos mientras el profesor copia la definición del libro de texto.

Tabla 79. Diálogo entre alumnos y docente.

El docente intenta gestionar la memoria didáctica del alumno y les recuerda lo trabajado la clase anterior, luego introduce la noción de radical y les indica que van a utilizar las propiedades de la potenciación.

Se trata de una SDC de nivel bajo entre las nociones de radical (como número irracional) y las propiedades de la potenciación que se plantean en un plano "discursivo", donde el alumno se mantiene en un estado "pasivo" de actividad matemática.

El profesor trata de que los alumnos recuerden y empleen nociones que Chevallard (1991) denomina "paramatemáticas":"Las nociones paramatemáticas son nociones-herramienta de la actividad matemática 'normalmente' no son objetos de estudio para el matemático"(p.58).

Luego el profesor expresa: vamos a intentar reducir esos radicales, achicarlos de forma tal de trabajar con el menor radicando posible para que las operaciones que realicemos sean más "simples". El docente intenta lograr que el alumno, de tercer año de secundaria, desarrolle implícitamente la noción "protomatemática" de "simplicidad". Para ello recurre a la noción paramatemática de "factorización".

"Existe un estrato más profundo de 'nociones', movilizadas implícitamente por el contratodidáctico. Para ellas, he propuesto el calificativo de "protomatemáticas" (Chevallard,1991,60).

Las nociones protomatemáticas, por ejemplo la noción de "pattern", se sitúan en un nivelimplícito más profundo (para el docente, para el alumno). Ese carácter implícito se expresa en el contrato didáctico por el hecho de que estas nociones son obvias -salvo, precisamente, cuando se produce dificultad protomatemática y ruptura del contrato. Nociones matemáticas, nociones paramatemáticas, nociones protomatemáticas constituyen estratos cada vez más profundos del funcionamiento didáctico del saber. Su consideración diferencial es necesaria para el análisis didáctico: por eso el análisis de la transposición didáctica de cualquier noción matemática (por ejemplo la identidad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$) supone la consideración de nociones paramatemáticas (por ejemplo, las nociones de factorización y de simplificación), las que a su vez deben ser consideradas a la luz de ciertas nociones protomatemáticas, la noción de 'patrón', de 'simplicidad', etc." (Chevallard, 1991, 65).

El docente intenta enseñar la noción de simplicidad en matemática vía nociones paramatemáticas, pero ello se lleva a cabo sin la búsqueda de un sentido ni de un principio de necesidad.

"La realización efectiva de un proceso de estudio puedeimplicar cambios en las interacciones respecto a lasmodalidades inicialmente previstas, las cuales a su vezdependen del «paradigma educativo» asumido. Así, enun modelo constructivista social el profesor tiene comopapel clave la búsqueda de buenas situaciones y crear unmedio en el que el alumno construya el conocimientotrabajando cooperativamente con sus compañeros. En unmodelo de enseñanza expositivo, el profesor asume elpapel de presentar los contenidos, y los estudiantes, de retenerlos" (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009,67).

Luego de una breve explicación el profesor define extracción de factores fuera del radical y lo escribe en el pizarrón para que los alumnos lo copien (figura 148).

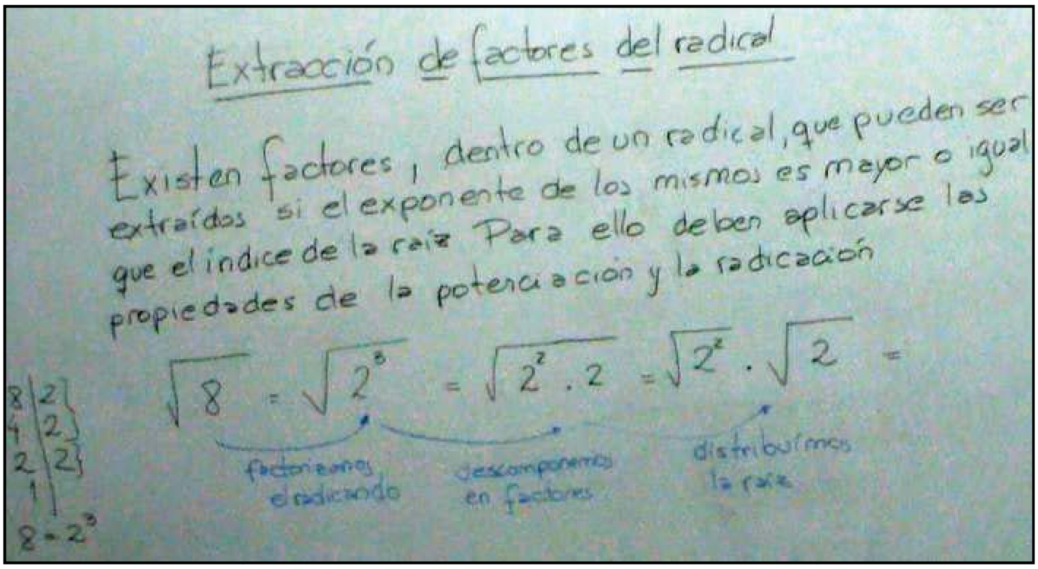


Fig. 148. El profesor define extracción de factores del radical.

El docente luego de definir comienza a explicar el procedimiento por medio de un ejemplo. Inmediatamente da ejercicios de aplicación para que los alumnos resuelvan Les indica que tienen que comenzar factorizando el radicando. Luego el profesor realiza el procedimiento, con la ayuda de los alumnos, en los primeroscuatro ejercicios (figura 149).

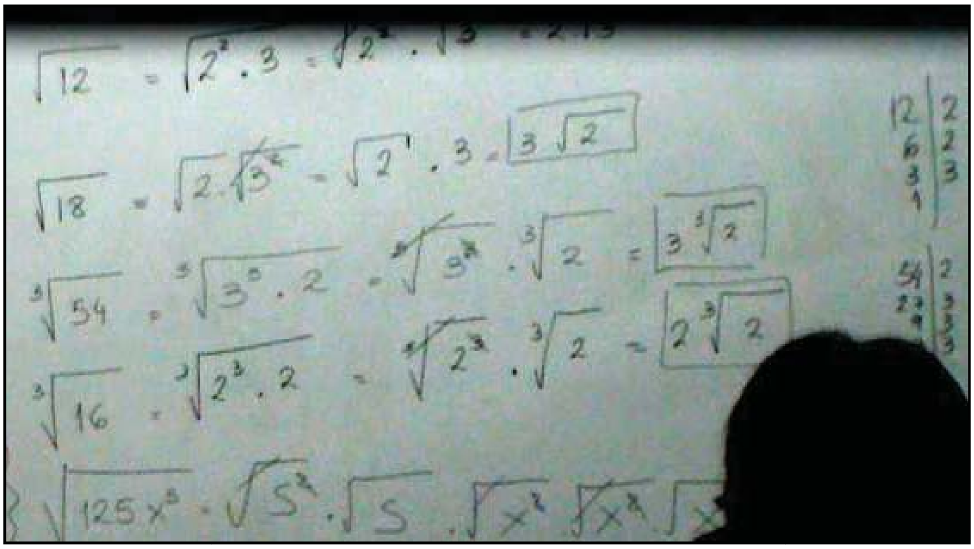


Fig. 149. El profesor completa los primero cuatro ejercicios haciendo partícipes a los alumnos.

En el ejercicio dos el docente realiza una aclaración que se puede interpretar como una "norma sociomatemática" (tabla 80).

D2: Ojo acá (señala el ejercicio tres en la fig.82), esto está bien (refiriéndose a la expresión $\sqrt{2} \cdot 3$) A_8: ¿Pero porqué? D2: Es exactamente lo mismo porque hay multiplicación y la multiplicación es conmutativa, ¿cuál es la desventaja de expresarlo de esa manera? Als.: [...] (no da tiempo a que los alumnos respondan, responde él). D2: Que habitualmente no sabemos dónde termina la raíz y entonces nos confundimos, no sabemos si el tres está adentro de la raíz o afuera de la raíz, por eso siempre es preferible que el número que está fuera de la raíz quede escrito adelante, pero solamente por una cuestión de comodidad a la hora de leer ¿sí? (el profesor escribe: $3 \cdot \sqrt{2}$) no es que esté mal expresado de esta manera ¿sí?, es exactamente lo mismo.

Tabla 80. Explicación del docente sobre la escritura de un número irracional.

> "Existen aspectos normativos de la discusión matemática que son específicos de la actividad matemática de losestudiantes. Por ejemplo, la comprensión de lo que en elaula se puede considerar «matemáticamente diferente», «sofisticado», «eficiente» o «elegante», así como lo que sepuede considerar como una explicación matemáticamente aceptable" (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009,62).

Luego el docente introduce una complejidad más, el uso de expresiones literales en el radicando (tabla 81).

D2: ¿Se entendió? ¿sí o no? Als.: ¡Si! (varios alumnos). D2: ¿Y si le agregamos un par de letras? Als.: ¡Nooooo! (varios alumnos). D2: El profesor hace caso omiso de las expresiones de los alumnos y escribe en el pizarrón el siguiente ejercicio: $\sqrt{125 \cdot x^3}$

Tabla 81. Introducción de una nueva complejidad matemática a los ejercicios propuestos.

El docente no concede un tiempo de apropiación del procedimiento, parece creer que, por las respuestas afirmativas de los alumnos a su pregunta (¿se entendió?), el proceso ya se ha aprendido. Esto último, como se observa más adelante, no sucede del modo esperado por el docente.

> "La realización efectiva de un proceso de estudio puedeimplicar cambios en las interacciones respecto a lasmodalidades inicialmente previstas, las

cuales a su vezdependen del «paradigma educativo» asumido. Así, en un modelo constructivista social el profesor tiene como papel clave la búsqueda de buenas situaciones y crear un medio en el que el alumno construya el conocimientotrabajando cooperativamente con sus compañeros. En un modelo de enseñanza expositivo, el profesor asume elpapel de presentar los contenidos, y los estudiantes, de retenerlos"(Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009,67).

La SDC que plantea el docente entre la factorización del radicando y las expresiones literales se muestra de nievl "bajo" ya que se basa en el ejemplo propuesto por él y no en un principio de necesidad del empleo de las nociones propuestas. Esto último puede ser seña de posibles futuras manifestaciones de conflictos semióticos tanto interaccionales como epistémicos y hasta cognitivos.

Luego de un tiempo para la resolución, el profesor solicita a un alumno que pase a realizar el ejercicio cinco en el pizarrón. Luego el docente explica el procedimiento realizado por el alumno.

Posteriormente el docente escribe en el pizarrón un nuevo ejercicio, esta vez con "letras" en el radicando.

El profesor pregunta ¿y si le agregamos un par de letras? Plantea una cuestión de normas "afectivas", las respuestas, por parte de los alumnos, no se hacen esperar, un rotundo ¡nooooo! , que el profesor no toma en cuenta.

> "Un pequeño cambio, una mera palabra (¡«tonto»!, ¡«ánimo»!, etc.), pronunciada por el profesor, los compañeros de clase, los padres, en ciertos momentos críticos puede ocasionar un gran efecto en la motivación, afectividad o el sentimiento de un alumno hacia el estudio de las matemáticas" (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009,69).

Luego de un corto tiempo el docente solicita a un alumno resuelva en el pizarrón el ejercicio (figura 150).

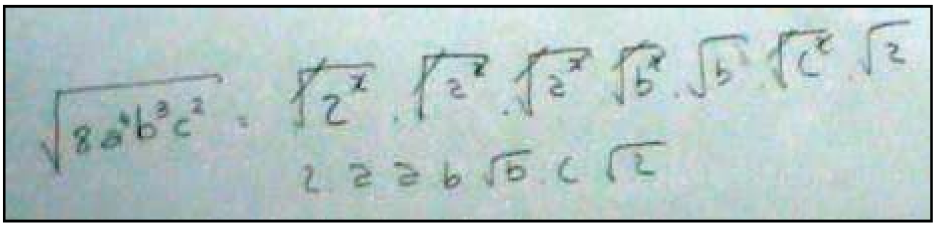


Fig. 150. Un alumno extrae los factores formado por expresiones literales.

Los resultados obtenidos en las evaluaciones de proceso, realizadas el 30-07-13, muestran la emergencia de dificultades al hallar los valores exactos de las operaciones con radicales.

Los resultados de la "fila 1" se muestran en las tablas 82 y 83, respectivamente.

Ejercicio 2"a" Resuelve correctamente las siguientes sumas y restas de radicales: $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$				Ejercicio 2"b" Resuelve correctamente las siguientes sumas y restas de radicales: $\sqrt{3} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[4]{9} + \sqrt[8]{6}$			Ejercicio 2 "c" Resuelve correctamente las siguientes sumas y restas de radicales: $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$			
Correc-to	Incorrec-to	NC	Aprox.	Correcto	Incorrecto	NC	Correc to	Incorrec to	NC	Aprox.
0	4	2	1	1	4	2	0	3	3	1

Tabla 82. Resultados obtenidos en evaluación de proceso.

Ejercicio 3 Hallar la "superficie" de la siguiente figura: $\sqrt{3}$ y $1+\sqrt{27}$			
Correcto	Incorrecto	NC	Aprox.
0	1	5	1

Tabla 83. Resultados obtenidos en evaluación de proceso

Los resultados de la "fila 2" se muestran en las tablas 84 y 85, respectivamente.

Ejercicio 2“a” Resuelve correctamente las siguientes sumas y restas de radicales: $\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{27}$				Ejercicio 2“b” Resuelve correctamente las siguientes sumas y restas de radicales: $\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+3\sqrt{5}$				Ejercicio 2 “c” Resuelve correctamente las siguientes sumas y restas de radicales: Resolver $\sqrt{2}-\sqrt{200}+\sqrt{72}$			
Correc-to	Incorrec-to	NC	Aprox.	Correc to	Incorrec to	NC	Aprox.	Correc to	Incorrec to	NC	Aprox.
1	2	1	2	1	2	2	1	1	1	3	1

Tabla 84. Resultados obtenidos en evaluación de proceso.

Ejercicio 3 Halla la “superficie” de la siguiente figura: $2\sqrt{3}$ y altura $3\sqrt{2}$			
Correcto	Incorrecto	NC	Aprox.
0	1	4	1

Tabla 85. Resultados obtenidos en evaluación de proceso.

La mayoría de los alumnos responde incorrectamente o no contesta, esto da muestras que a la construcción del proceso no se le concedió los tiempos necesarios de trabajo autónomo donde emergerían dificultades que podrían haberse tratado.

> “El tiempo es un bien escaso; su gestión es básicamente responsabilidad del profesor, aunque una parte deltiempo de estudio está bajo la responsabilidad de los estudiantes.
>
> La duración de las clases está regulada casi de manera rígida por normas oficiales, como también el tiempo asignado al desarrollo total del programa de estudio en cada curso” (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009,68).

Los resultados de una nueva evaluación, realizada el 20-08-13, se muestran en las tablas 86 y 87, respectivamente.

Ejercicio 2"a" Resuelve correctamente las siguientes sumas y restas de radicales: $3\sqrt{7}+\frac{1}{4}\sqrt{7}-4\sqrt{7}$			Ejercicio 2"b" Resuelve correctamente las siguientes sumas y restas de radicales: $\sqrt{45}-\sqrt{27}-\sqrt{20}$				Ejercicio 2 "c" Resuelve correctamente las siguientes sumas y restas de radicales: $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{16}$			
Correcto	Incorrec to	N C	Correc to	Incorrec to	N C	Aprox.	Correc to	Incorrec to	N C	Aprox.
10	10	5	6	13	5	1	3	13	7	2

Tabla 86. Resultados obtenidos por los alumnos en la evaluación.

Nuevamente muchos son los alumnos que responden incorrectamente o no responden los ítemes propuestos.

Área del cuadrado de lados: $3\sqrt{5}$			Área del triángulo isósceles de base:$3\sqrt{5}$y altura: $2\sqrt{3}$			Área de la figura total (cuadrado más triángulo)		
Correcto	Incorrec to	NC	Correcto	Incorrec to	NC	Correcto	Incorrec to	NC
17	9	2	11	11	6	5	11	12

Tabla 87. Resultados obtenidos por los alumnos en la evaluación de proceso.

También nuevamente varios alumnos responden incorrectamente o no contestan. Sin duda el ítem donde se solicitaba "hallar la superficie de la figura" (tabla 42) fue el que mayores dificultades trajo a los alumnos.

La SDC entre las nociones de área, superficie, radical, factorización del radical y operaciones con radicales presentes en los ejercicios realizados, continúa siendo de nivel bajo. Los conflictos semióticos epistémicos (y tal vez cognitivos) son evidentes, la interacción entre los objetos matemáticos no funciona como el docente espera.

La evolución en la conceptualización de las diferentes nociones no se logra.

En el próximo punto se analiza la configuración didáctica global de la sesión 4, en él se hace hincapié en la complejidad del procedimiento algebraico utilizado.

7.1.7.2 Configuración didáctica global de la clase 4: un procedimiento algebraico complejo

Del minuto seis al veinticinco (M06-M25) la mayor parte de las actividades de los alumnos se centran en copiar (A2) del pizarrón, varios de ellos no trabajan (A1).

Por su lado el docente explica el procedimiento (P1), escribe en la pizarra (P2) y realiza algunas preguntas a los alumnos (P4).

Durante los minutos (M25-M27) los alumnos realizan una tarea propuesta.

A partir del minuto veintiocho y hasta el treinta y cuatro (M28-M34) nuevamente el docente explica (P1) el procedimiento y escribe (P2) en la pizarra.

Entre los minutos (M37-M56) los alumnos realizan la tarea (A7) mientras el profesor circula por los bancos (P8), en otros, el profesor explica y escribe en el pizarrón (figura 151).

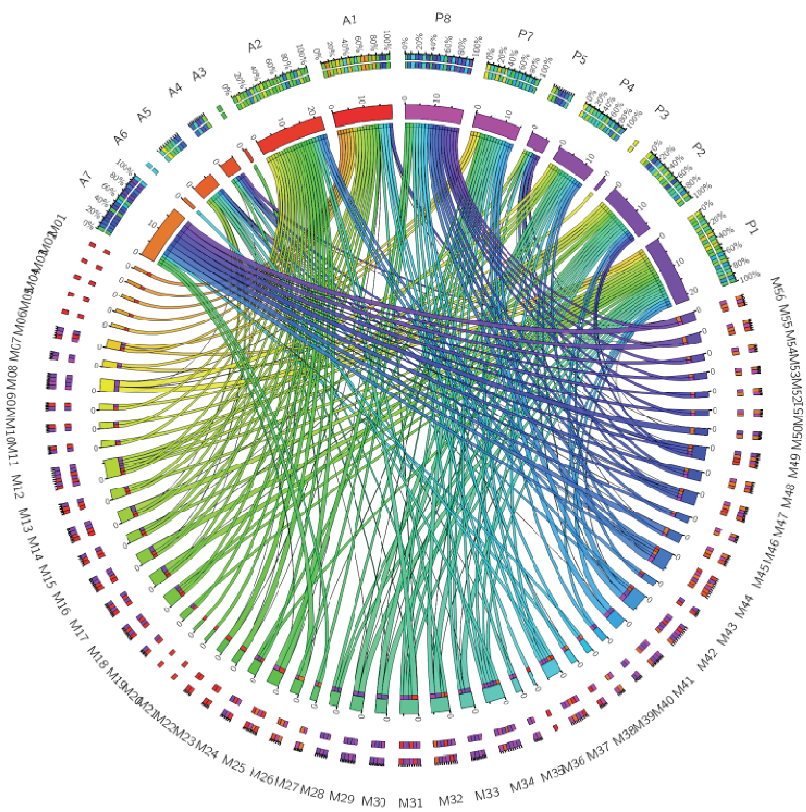


Fig.151. Actividades realizadas en la cuarta clase de matemática por alumnos y profesor.

La configuración didáctica se puede caracterizar como una “mezcla” entre la de tipo magistral, dialógica y personal ya que durante algunos minutos son los alumnos, no todos, quienes realizan la resolución de la tarea propuesta. Hay momentos de diálogo entre el docente y los alumnos en relación con el conocimiento, pero es el docente quién realiza la mayor parte de las actividades en los primeros minutos de clase (M02-M26).

Capítulo 8

Discusión de resultados de los grupos de control

En este capítulo, se analizan la trayectoria didáctica del grupo de control 1 (sección 8.1) y las implicaciones de dicha trayectoria didáctica observada (sección 8.1.1). De la misma forma en la (sección 8.2) se estudian la trayectoria didáctica del grupo de control correspondiente al docente 2 y sus implicaciones didácticas (sección 8.2.1).

8.1 TRAYECTORIA DIDÁCTICA DEL GRUPO CONTROL (doc. 1)

En las cuatro sesiones analizadas del docente 1 del grupo control puede observarse el nivel "bajo" en las diferentes SDC propuestas por el profesor a lo largo de las cuatro sesiones.

Dicho nivel se mantiene estable alcanzándose un SDC media sólo para parte de la sesión cuatro.
En ellas se destacan la "densidad" de nociones matemáticas planteadas por el docente para realizar interacciones (figura 152).

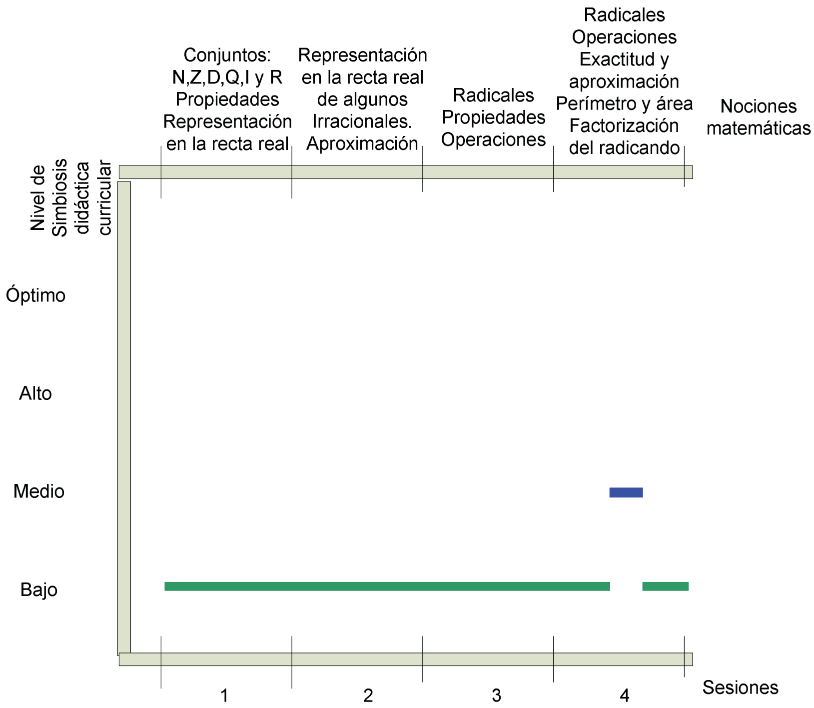


Fig.152. Simbiosis didáctica curricular para cada sesión e interacciones entre objetos matemáticos.

La interacción entre objetos matemáticos, en cada una de las sesiones, evidencia la emergencia de conflictos semióticos interaccionales y epistémicos (figura 153).

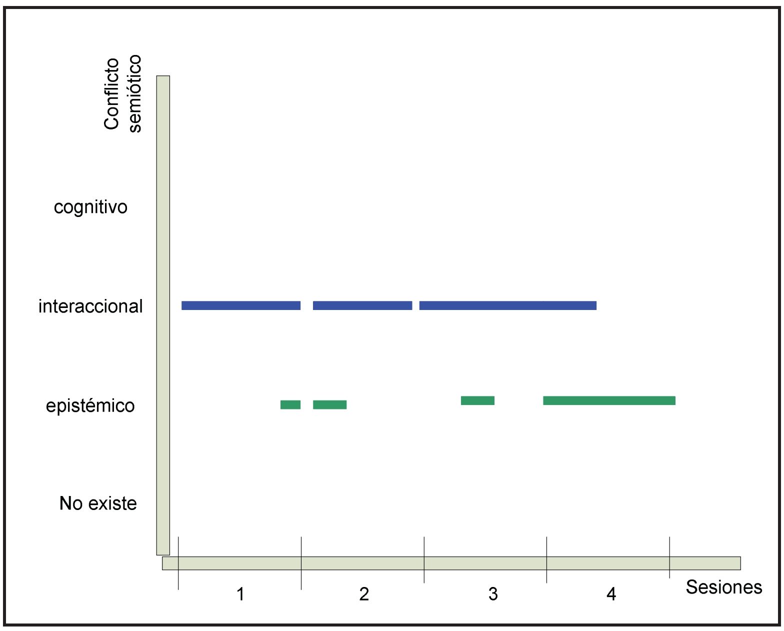


Fig. 153. Conflictos semióticos presentes a lo largo de cuatro sesiones del grupo control.

En la sesión 1 el docente propone una sucesión de interacciones muy débiles y en un lapso de tiempo muy corto, entre conjuntos numéricos y sus propiedades. Se observan así algunos conflictos semióticos de tipo interaccional.

Estos conflictos no son percibidos por el docente que en cada caso da por supuesto la estabilidad del conocimiento emergente: "estos conjuntos numéricos ya lo habían estado estudiando", afirmación que sólo algunos alumnos responde afirmativamente.

El escaso tiempo de cada una de las interacciones da muestras de que el profesor considera aprendidas a dichas nociones y que siente la "presión" de los reducidos tiempos didácticos disponibles y de las condiciones de funcionamiento del sistema didáctico[1].

La toma de decisiones que realiza el profesor de continuar con la introducción prevista, a modo de repaso, reafirma dichas decisiones.

Se produce así una "sucesión" de conflictos interaccionales, que no son visualizados por el profesor, que a su vez provocan una "sucesión" de perturbaciones a la estabilidad de la interacción entre la noción de conjunto de los números racionales y la de los números irracionales.

Se tratan de IDD de nociones matemáticas como discretitud y densidad, conjunto ordenado y no ordenado, conjunto finito e infinito.

Inclusive en un caso un alumno introduce una IDD, esta se evidencia en el capítulo 5 (apartado 5.1.1.1) donde él discente realiza una pregunta "pública" al profesor: "¿es un conjunto ordenado?", (se refiriere al conjunto de los números naturales), el profesor responde afirmativamente pero no retoma o aprovecha la intervención del alumno para abordar o recordar con todos los demás alumnos esta noción.

Estas interacciones producen una sucesión de tomas de decisiones, por parte del profesor, en donde la "sucesión de bifurcaciones"[2], genera en cada uno de los casos la misma respuesta: la "suposición" de la estabilidad del conocimiento emergente (figura 154).

[1] Más adelante, en este mismo apartado, se analizan algunas perturbaciones que el docente percibe del contexto.
[2] "Bifurcaciones en cascada" (Prigogine, 1997a).

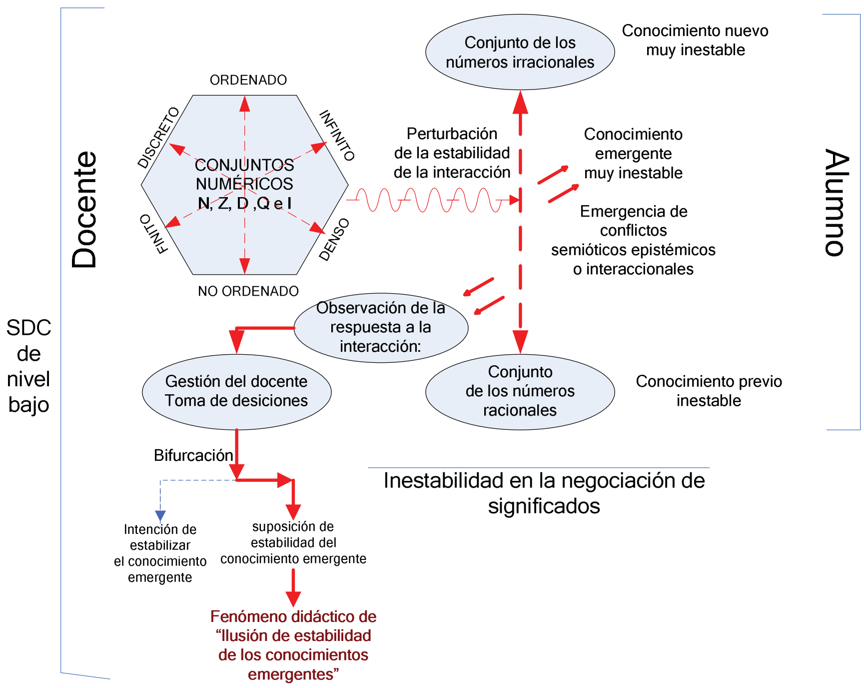


Fig. 154. Interacciones entre objetos matemáticos y conflictos semióticos asociados.

Se observa de esta manera el fenómeno didáctico de "ilusión de estabilidad de los conocimientos emergentes".

Posteriormente el profesor da dos definiciones de número irracional apelando en un caso a la noción de periodicidad numérica, y en otro, a la de fracción de enteros. Se trata de una SDC de nivel bajo y acotada en el tiempo que produce nuevos conflictos semióticos interaccionales.

Estos conflictos se observan al introducir el docente, en forma de IDD, las nociones de periodicidad y aperiodicidad numérica y la de fracción de enteros como posibilidad de expresión de un número racional en oposición con la imposibilidad de expresar de esta manera a los números irracionales (figura 155).

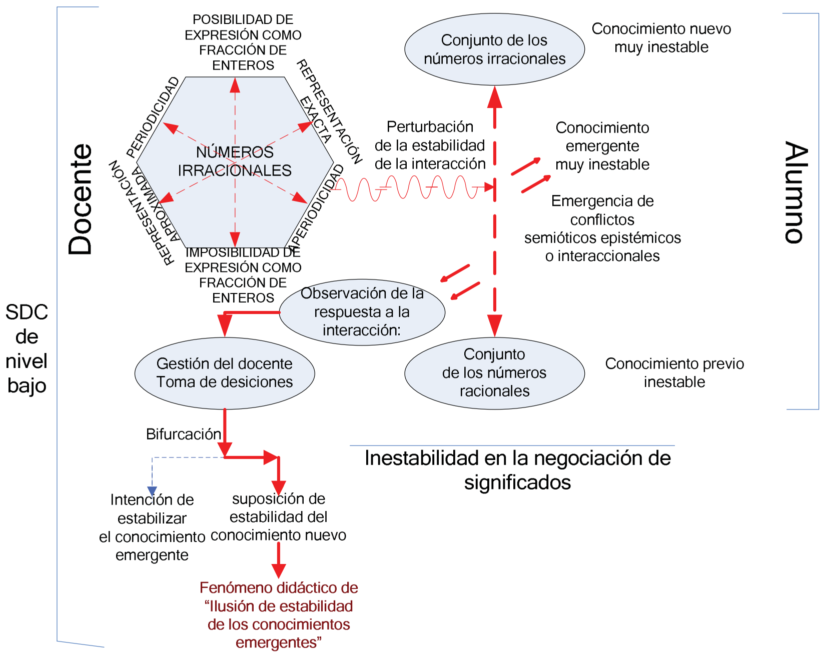


Fig. 155. Interacciones entre objetos matemáticos y conflictos semióticos asociados.

Estas dificultades de los alumnos se producen porque no se proponen actividades donde los alumnos tengan que diferenciar entre dos escrituras en fracción.

Por ejemplo el número $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ se asemeja por su “forma ostensiva” a una fracción de enteros, a un número racional. De la misma manera el número $\sqrt{\frac{9}{4}}$ se asemeja, por ostensión, a un número irracional.

Estos conflictos semióticos, no se estudian o remedian y dan lugar en el alumno al fenómeno de “mimetismo por ostensión” tratado en este capítulo en el apartado 8.2.

Esto último se observa ocurre en las evaluaciones comunes a los grupos de control y experimental y que se estudia en el ítem 12.3.

La representación exacta de un número irracional en la recta numérica también es fuente de dificultades. El profesor no indaga si los conocimientos se mantienen estables en los alumnos, solo muestra en la pizarra algunos ejemplos de representaciones, los cuales él los ubica en la recta numérica, ellos se limitan a mirar y copiar lo escrito en el pizarrón.

Si bien el profesor presenta dos ejercicios de representación de irracionales en la recta numérica real para la casa, no todos los alumnos traen la tarea resuelta.

Esto último trae aparejado conflictos semióticos de tipo interaccionales y epistémicos que se manifiestan tanto en las evaluaciones de proceso como integradora (apartado 6.1.2.7 del capítulo 5).

Las dificultades se observan cuando los alumnos intentan hallar los lados de los triángulos rectángulos. Para algunos alumnos representar el número $\sqrt{3}$ es señal que uno de sus lados debe medir 3, o sea el valor del radicando (figura 99 del capítulo 6). Para otros la medida de los lados debe coincidir con la "suma" del valor del radicando, por ejemplo para representar el número $\sqrt{3}$ en la recta numérica, un alumno obtiene como medida de los catetos 2 y 1 y para el número $\sqrt{8}$, la medida de los catetos es de 4 y 4 (figura 100 del capítulo 6).

A continuación se muestra los resultados obtenidos por los alumnos en la evaluación de proceso (tabla 88).

Resultados de la representación de $\sqrt{5}$ en evaluación de proceso					
El valor del radicando como suma de los valores de los catetos (4,1)	Obtención de valores irracionales de los catetos. $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ Representación incorrecta	Obtención de otros valores de los catetos, por ejemplo: (2,2)	NC	Representación aproximada sin argumentar por teorema de Pitágoras	Resultado Correcto
7	2	3	2	1	12

Tabla 88. Resultados obtenidos de la representación de $\sqrt{5}$ en evaluación de proceso.

Sobre un total de 27 alumnos 15 no logran representar eficazmente la $\sqrt{5}$ en la recta numérica real. Siete alumnos consideran que, para representar al número $\sqrt{5}$ en la recta numérica real, los catetos del triángulo deben medir 4 y 1 cuya suma presenta el valor del radicando.

En la evaluación integradora se observan nuevamente dificultades en las respuestas de los alumnos (tabla 89).

Resultados de la representación de $\sqrt{3}$ y $\sqrt{8}$ en evaluación integradora											
El valor del radicando como suma de los valores de los catetos		El valor del radicando coincide con el valor de un cateto		Obtención de otros valores de los catetos Representación incorrecta		Obtención de valores irracionales para algunos de los catetos. Representación incorrecta		NC		Resultado Correcto	
Para $\sqrt{3}$ (2,1)	Para $\sqrt{8}$ (4,4)	Para $\sqrt{3}$ (3,1)	Para $\sqrt{8}$ (8,1)	Para $\sqrt{3}$ (1,1)	Para $\sqrt{8}$ (2,2)	Para $\sqrt{3}$ $(\sqrt{2},1)$	Para $\sqrt{8}$ $(\sqrt{7},1)$	Para $\sqrt{3}$	Para $\sqrt{8}$	Para $\sqrt{3}$	Para $\sqrt{8}$
9	5	3	3	9	2	2	3	1	1	14	24

Tabla 89. Resultados obtenidos de la representación de raíces cuadradas en evaluación integradora.

Veinticuatro alumnos, sobre un total de treinta y ocho, no logran representar eficazmente al número $\sqrt{3}$ en la recta numérica real y 14 alumnos no logran representar correctamente el número $\sqrt{8}$.

Los errores recurrentes que se observan se producen por:

- La "equiparación" suma de las medidas de los lados del triángulo igual al valor numérico del radicando.
- El valor numérico del radicando que coincide con el valor numérico de un cateto.
- La obtención de valores irracionales para algunos de los catetos pero sobreviene la imposibilidad para los alumnos su representación geométrica.
- La obtención de otros valores de los catetos, por ejemplo (1,1) cuya hipotenusa representa $\sqrt{2}$, la cual los alumnos en algunos casos, "fuerzan" a que "llegue" a la posición del punto $\sqrt{3}$, en la recta real.

Todas estas dificultades que manifiestan los alumnos provienen de la SDC entre dos nociones matemáticas: la representación geométrica de un número irracional y el teorema de Pitágoras.

Inmediatamente el docente produce una nueva SDC de nivel bajo, se trata de una interacción entre la noción de número irracional y la de "conjunto" de números irracionales, nuevamente en un lapso de tiempo muy corto, sin actividad matemática por parte de los alumnos que se limitan a copiar lo expresado por el profesor.

Posteriormente emerge un conflicto interaccional al intentar el docente provocar una interacción entre las diferentes escrituras de un número irracional. El nivel bajo de la SDC continúa y se observa en las respuestas de los alumnos.

Cabe aclarar que las nociones matemáticas que se han estado tratando en la sesión no son parte de los conocimientos a evaluar por el profesor tanto en las evaluaciones de proceso como integradora. El docente sólo solicita en ambas evaluaciones “ubicar resultados en los diagramas siguientes”. Se trata de que los alumnos ubiquen algunos números en los diagramas de Euler - Venn incluidos en el conjunto ℝ.

Se debe señalar que el sistema didáctico se encuentra perturbado a lo largo de las sesiones por la presencia del investigador, esto se observa de una forma más evidente cuando el profesor, en el minuto trece, se acerca al investigador y le consulta sobre la investigación. Se puede considerar como una muestra de la perturbación que percibe el docente que no permite un “normal” desenvolvimiento de la clase.

Los alumnos también perciben la perturbación de la clase y de vez en cuando dirigen la mirada hacia la videocámara (figura 156).

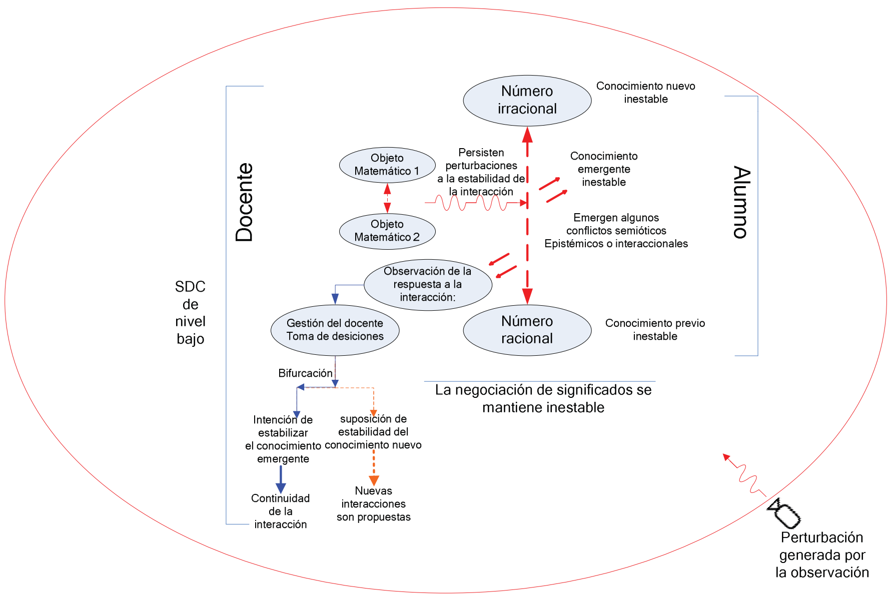


Fig. 156. Perturbación generada por la observación del investigador.

Las condiciones en que se realiza la clase también perturban al normal funcionamiento del sistema didáctico, alta temperatura de ese día, el ventilador instalado en el aula que no se puede utilizar y la numerosa cantidad de alumnos, con un total de cuarenta y dos.

En la entrevista llevada adelante luego de la sesión 2, entre el investigador (I) y el profesor (P), se manifiestan algunas de estas cuestiones (tabla 90).

I: Las limitaciones que te encuentras este año, me decías ¿Es por la cantidad de alumnos? D: Muchos, muchos alumnos, cuarenta y dos alumnos es muchísimo…son chicos no de mala conducta pero bulliciosos entonces a semejante número de alumnos se torna un poquito complicado mantener por lo menos el silencio para que escuchen… I: Y la disciplina… D: No tanto de la disciplina, más que nada el mantenerlos callados, porque no son chicos agresivos, pero bueno, se complica en cuanto al timbre de voz, imagínate tengo que elevar la voz muchísimo para hablar con ellos. I: Claro.

Tabla. 90. Diálogo entre docente y el investigador a propósito de la clase realizada.

Los tiempos didácticos disponibles también perturban al sistema didáctico, en especial el profesor el cual siente una presión en su gestión por la extensión del programa que se ha planificado para el año (tabla 91).

I: ¿Cómo juegan los tiempos didácticos? D: No, no, los tiempos… I: ¿Es mucho el programa? D: Es mucho el programa, yo creo que hoy y ayer hemos ido más o menos bien, pero cuando empecé con las razones trigonométricas tuve que volver a retomar varias veces y estoy pensando que me va a volver a pasar con las operaciones con radicales. I: O sea que en eso hay una fuerte influencia del tiempo? D: Sí, si influye mucho.

Tabla. 91. Diálogo entre docente y el investigador en relación a los tiempos didácticos.

Para la sesión 2 nuevamente se observan conflictos semióticos de tipo interaccional y epistémicos relacionados con la representación de algunos números irracionales en la recta real.

Las dificultades en la representación geométrica en la recta numérica real, de algunos números irracionales, se evidencian en las tablas 34 y 35 del capítulo 6.

El docente “nombra” la noción de “inconmensurabilidad” pero no la estudia ni la problematiza. Luego realiza una actividad donde propone “medidas” irracionales de las diagonal de rectángulos y los alumnos deben hallar medidas expresadas con números naturales de los lados de los rectángulos, allí se evidencia la (IDD) entre lo inconmensurable y lo conmensurable.

Se observan así dificultades que emergen y provocan la inestabilidad de la interacción (ítem 6.2.1.2). Para los alumnos se trata de una mimetización de lo inconmensurable en lo conmensurable y viceversa.

El docente produce otra IDD entre el valor exacto (expresado como radical) y aproximado de un número irracional. Se observa que estas IDD perturban la estabilidad de la SDC entre la noción de número irracional y sus representaciones. Esto último se puede observar en los resultados de las evaluaciones de proceso e integradora (tablas 37 y 38 del cap.6).

Nuevamente para los alumnos "se percibe" una mimetización entre nociones matemáticas, esta vez entre lo exacto y lo aproximado. Lo ostensivo se impone a lo no ostensivo, la percepción visual prima por sobre el objeto matemático.

Se advierte así que los conflictos semióticos vistos hasta ahora se manifiestan cuando las nociones-herramienta (Chevallard, 1997) se mantienen inestables para los alumnos y producen perturbación a la interacción propuesta por el docente (figura 157).

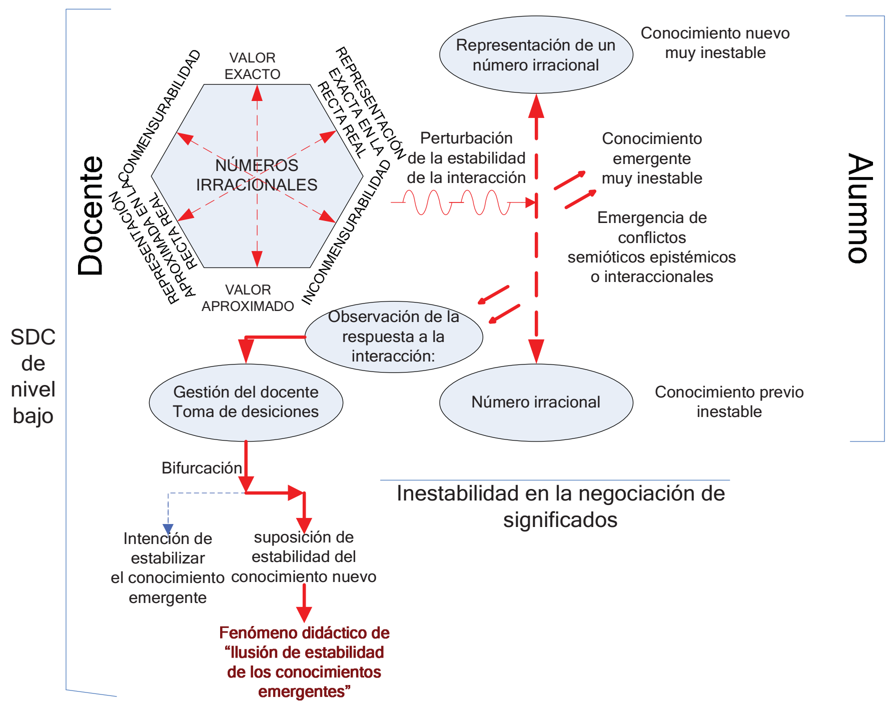


Fig. 157. Interacciones entre objetos matemáticos y conflictos semióticos asociados.

Estas nociones previas se consideran construidas por parte del profesor quien decide continuar con nuevas interacciones de nuevos objetos matemáticos para la próxima sesión.

Se observa así nuevamente el fenómeno didáctico de ilusión de estabilidad de los conocimientos emergentes.

Para la sesión 3 se observan nuevos conflictos semióticos, esta vez asociados a la interacción entre la noción de radical y sus propiedades.

Se repara que las perturbaciones son provocadas por la IDD entre el valor exacto - valor aproximado. El siguiente episodio da muestras de ello (tabla 92).

D: ¿Esto es un valor exacto? (señala el número $\frac{2,45}{2}$ en el pizarrón)
Als.: Sí. No (algunos alumnos contestan afirmativamente otros negativamente).
D: ¡No! Porque acá $\frac{\sqrt{6}}{2}$ es un número irracional, ¿qué tiene cuántas cifras decimales?
A_3: Infinitas.
D: ¿Y ustedes la han acotado a cuántos decimales?
Als.: A dos.
D: Y el valor exacto es esto (señala el número en el pizarrón el número $\frac{\sqrt{6}}{2}$).

Tabla. 92. Diálogo entre docente y alumnos a propósito del valor exacto de un número real.

Si bien se observa en el diálogo que el docente "sentencia" que el valor exacto es el número expresado como radical, para los alumnos no queda claro cuándo un número tiene una expresión exacta y cuándo aproximada.

Seguido a este diálogo nuevamente se visualiza esta dificultad en otro alumno. Para éste el sólo hecho de un número escribirse "con coma" se percibe como una aproximación, el diálogo entre el profesor y un alumno, en forma pública, da cuentas de ello (tabla 93).

D: ¿Esto es un número exacto del radical? (señala el número $\frac{2,45}{2}$ en el pizarrón)
A_1: No.
D: ¿Por qué?
A_1: Y porque está con coma.
D: Porque es un decimal y tiene infinitas cifras (se refiere al número $\frac{\sqrt{6}}{2}$). (El alumno se queda pensando dónde está el error).
D: El 2,45 que está como decimal, expresado como $\sqrt{6}$ (aclaración del profesor).
A_1: ¡Es que usted me dijo que resuelva la $\sqrt{6}$ sobre la $\sqrt{4}$!
D: La $\sqrt{4}$ tiene solución, el 2,45 que sería 2,45 y un montón más de decimales, expresado como $\sqrt{6}$.
El alumno termina cediendo a la autoridad del profesor y arregla en el pizarrón su "error".

Tabla. 93. Diálogo entre docente y alumnos a propósito del valor exacto de un número real.

Allí se observa un conflicto epistémico e interaccional producto de la IDD entre el valor exacto - valor aproximado de un número irracional. Para el alumno "resolver" una raíz cuadrada se trata de hallar su expresión con coma, con ayuda de la calculadora, que éste limita a dos decimales. Por su parte para el profesor es "necesario" que el alumno exprese el valor exacto del número. La negociación de significado entre este y el alumno se mantiene inestable, el conocimiento emergente también se manifiesta de esta forma. No queda claro para los alumnos la diferencia exacto- aproximado en un número irracional. Para los alumnos dichas nociones se "mimetizan" lo exacto en lo aproximado y lo aproximado en lo exacto. Se trata del fenómeno de mimetismo por ostensión.

Para la sesión 4 se observan conflictos semióticos en las SDC que el docente propone, se trata de interacciones entre las nociones de radical y sus operaciones, su factorización y las de área y perímetro, estas se mantienen débiles para esta sesión.

Así transcurridas varias sesiones los conocimientos emergentes se mantienen inestables, muestra de ello son los resultados obtenidos en las evaluaciones tanto de proceso como integradora (tablas 45 y 46 del cap.6).

El profesor prevé la interacción, en estas cuatro sesiones, de numerosos objetos matemáticos siendo esto fuente de conflictos semióticos de tipo interaccional y epistémicos.

La configuración didáctica global se mantiene estable, a lo largo de las cuatro sesiones, siendo esta de tipo magistral con rasgos de tipo dialógica, solamente se observa personal en parte de la sesión 1, en la sesión 2 y en menor medida en la sesión 4 (figura 158).

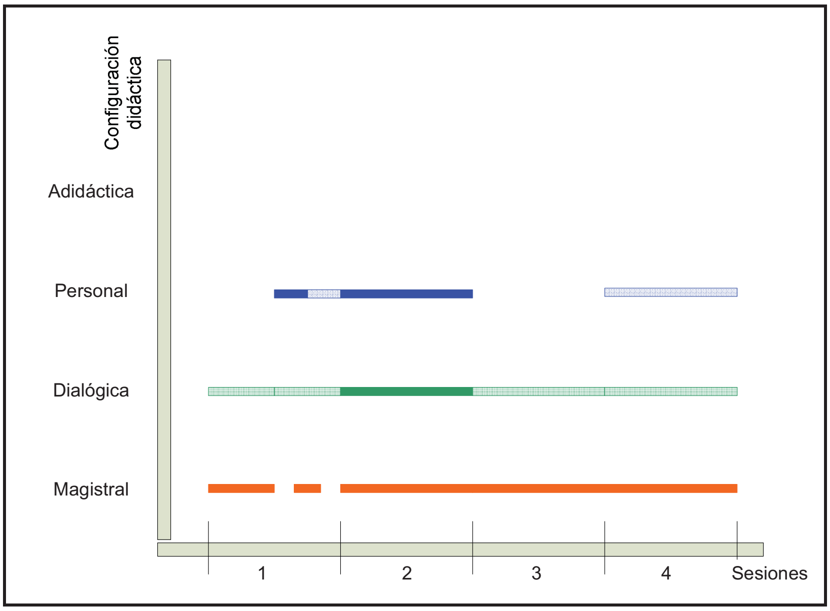


Fig. 158. Configuraciones didácticas en las cuatro sesiones realizadas por el grupo control (docente 1).

La mayoría de las actividades no implican una participación activa de los alumnos en las diferentes sesiones y esto da cuenta de las dificultades observadas en las evaluaciones tanto de proceso como integradora que se analizan en el capítulo 6.

Las SDC se mantienen muy inestables y por ende los conocimientos emergentes de las interacciones entre los objetos matemáticos también se observan inestables.

8.1.1 IMPLICACIONES DE LA TRAYECTORIA DIDÁCTICA DEL GRUPO DE CONTROL OBSERVADA (DOCENTE 1)

A lo largo de varias sesiones el docente intenta introducir varias nociones matemáticas nuevas en el proceso de enseñanza.

Las SDC son interacciones que propone el profesor entre objetos matemáticos que, en algunos casos, se producen por una dialéctica entre nociones que inciden en la interacción entre lo previo y lo emergente.

El profesor produce así, en algunos casos, una interacción didáctica entre objetos matemáticos "dialécticos", opuestos, al intentar introducir nuevos saberes. Se trata de interacciones entre objetos asociados a las propiedades de los conjuntos numéricos (figura 159).

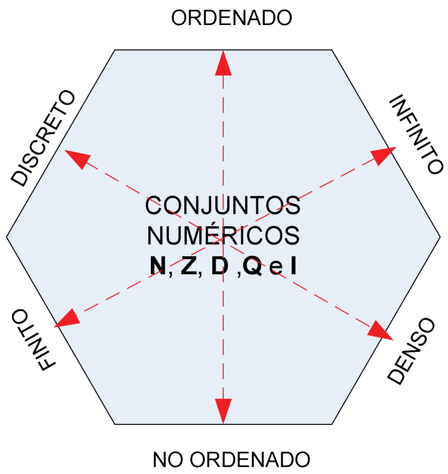


Fig. 159. Interacciones didácticas dialécticas entre nociones asociadas a los conjuntos numéricos.

Estas interacciones dialécticas entre objetos inciden y perturban la estabilidad de conocimientos emergentes.

El docente "presenta" las propiedades de discretitud y de densidad a partir de la representación en la recta numérica de algunos números, pero no estudia ni institucionaliza dichas nociones.

Inclusive el docente "equipara" la noción de densidad con la noción de infinito, siendo que no todo conjunto infinito es denso. Se produce así nuevamente un fenómeno de "mimetismo por ostensión", lo infinito en lo denso y lo denso en lo infinito, tanto para el profesor como para los alumnos. La recta numérica que el docente dibuja también "mimetiza" ambas nociones para los alumnos.

Un alumno propone la interacción conjunto ordenado- no ordenado (para el conjunto $\mathbb{N}$), pero el profesor toma la decisión didáctica de no estudiar ni nombrar a dicha propiedad para los demás conjuntos numéricos.

Las implicaciones didácticas que podemos deducir a partir de estas IDD nos muestran que es necesario que el docente estudie y analice el estado actual de nociones previas que pueden considerarse aprendidas y que pueden ser "punto de partida" para otras nociones.

Si bien los alumnos pueden "ver" la representación en la recta numérica real de algunos números reales no implica necesariamente la construcción de las propiedades de los conjuntos numéricos.

El proceso de visualización (Godino et al., 2012) de una noción matemática implica mucho más que la sola percepción de algunos puntos sobre una línea.

Se deben considerar como no "transparentes" las SDC que se proponen entre objetos matemáticos en el aula. Toda interacción posible entre nociones matemáticas debe ser fuente de estudio y de análisis, inclusive una noción matemática con sus representaciones.

Nociones como periodicidad y aperiodicidad numérica y de fracción de enteros (con denominador diferente de cero), asociadas a la definición "escolar" de número irracional, también son fuente de conflictos semióticos, interaccionales y epistémicos producidos por la perturbación a la interacción. Lo periódico los alumnos lo perciben "mimetizado" con lo aperiódico y, a su vez, lo aperiódico mimetizado en lo periódico.

El docente destaca, al definir número irracional, que se trata de un número que no es posible expresarlo como fracción de números enteros pero, no estudia diferentes casos (por ejemplo $\frac{\sqrt{2}}{2}$), que pongan en juego esto último en el alumno. Por lo que éste no tiene posibilidades de poner a prueba sus conocimientos, esto último se analiza en el apartado (tabla 8).

Para los alumnos se "mimetizan", lo fraccionario formado por números enteros con aquellas fracciones formada por otros números (como la del ejemplo), por su forma, por ostensión. Así lo ostensivo tiene mayor "jerarquía" para los alumnos que lo no ostensivo.

Este fenómeno didáctico de "mimetización ostensiva" es producto de las débiles IDD que perturban las SDC que el docente propone.

La representación "exacta" de un número irracional en la recta numérica real también plantea dificultades. Los conflictos se observan en la construcción geométrica, las dificultades provienen de la medida de los lados que deben tener los triángulos rectángulos al momento de realizar la construcción. Para algunos alumnos no queda claro esto último y emplean diferentes medidas incluso a las obtenidas por ellos mismos por medio del teorema de Pitágoras (apartado 6.1.2.7).

Nuevamente para los alumnos se "mimetizan" nociones matemáticas, la representación exacta se mimetiza en la aproximada y viceversa.

8.2 TRAYECTORIA DIDÁCTICA DEL GRUPO CONTROL (doc. 2)

El docente intenta introducir los números irracionales a través de una entrada formalista basada en los conjuntos numéricos.

En diálogo con los alumnos el profesor espera que los alumnos "recuerden" nociones matemáticas supuestamente aprendidas y estables.

Esto no ocurre como espera el profesor, a pesar del intento de los alumnos por apelar a sus conocimientos previos.

La (SDC) entre dichas nociones se manifiesta débil por lo que el conocimiento emergente se mantiene muy inestable

Los conflictos semióticos se observan al intentar diferenciar unos de otros a través de las IDD entre las nociones de periodicidad y aperiodicidad numérica, posibilidad e imposibilidad de expresión como fracción de enteros y las de finitud e infinitud de un número (figura 160).

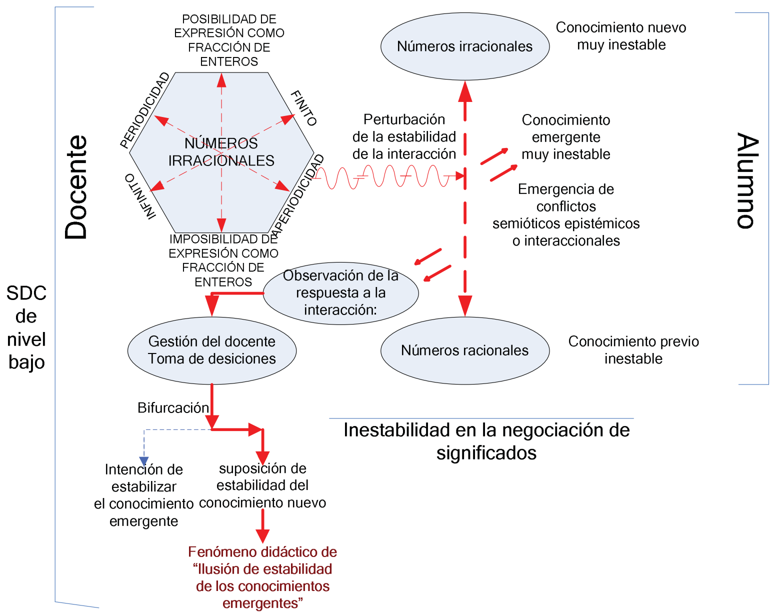


Fig. 160. Interacciones entre objetos matemáticos y conflictos semióticos asociados.

Inclusive un alumno aporta a la diferenciación entre un número racional periódico y los números irracionales, éste manifiesta: “pueden tener una parte periódica, pero no toda”. Como se analiza en el capítulo 7 existen números irracionales que muestran ese comportamiento en un bloque finito de cifras decimales, los denominados “números irracionales cebra”.

Existen también números racionales en los cuáles el desarrollo de cifras decimales dentro del período se asemejan a un número irracional, se trata de números periódicos con un período “grande” y cifras decimales que no dejan “percibir” la repetición del período.

La interacción con este tipo de números induce a error a los alumnos, se trata de un fenómeno didáctico de “mimetismo por ostensión”, una noción matemática se mimetiza en otra por su apariencia, por su forma. La irracionalidad se mimetiza en la racionalidad y la racionalidad se mimetiza en la irracionalidad. Se produce entonces IDD entre lo periódico, lo aperiódico y lo pseudo-periódico (figura 161). Esto último se analiza en el apartado 12.3.2.

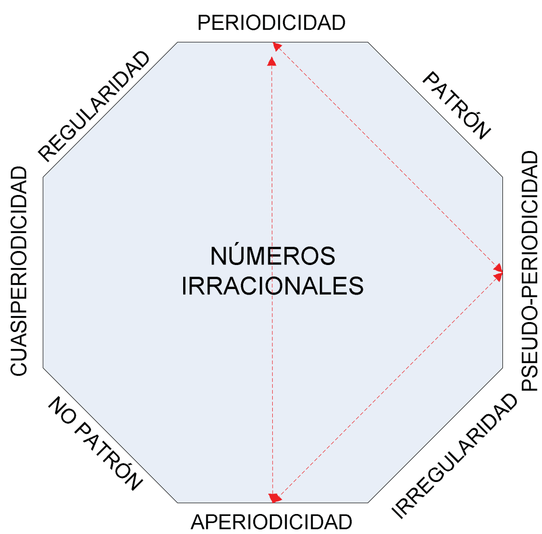


Fig. 161. Interacciones didácticas dialécticas entre nociones asociadas a los conjuntos numéricos.

El docente considera como erróneo el aporte público del alumno y toma la decisión didáctica de continuar suponiendo la estabilidad del conocimiento nuevo.

Se observa entonces un fenómeno de "suposición de estabilidad de los conocimientos emergentes".

La (IDD) fracción de enteros - no fracción de enteros también provoca conflictos semióticos interaccionales y epistémicos, esto último se observa en la evaluación común a los grupos control (apartado 10.5.2).

Para la sesión 2 se producen nuevas IDD ahora entre valor exacto – valor aproximado de un número irracional y entre las nociones de finitud e infinitud de un número (figura 162).

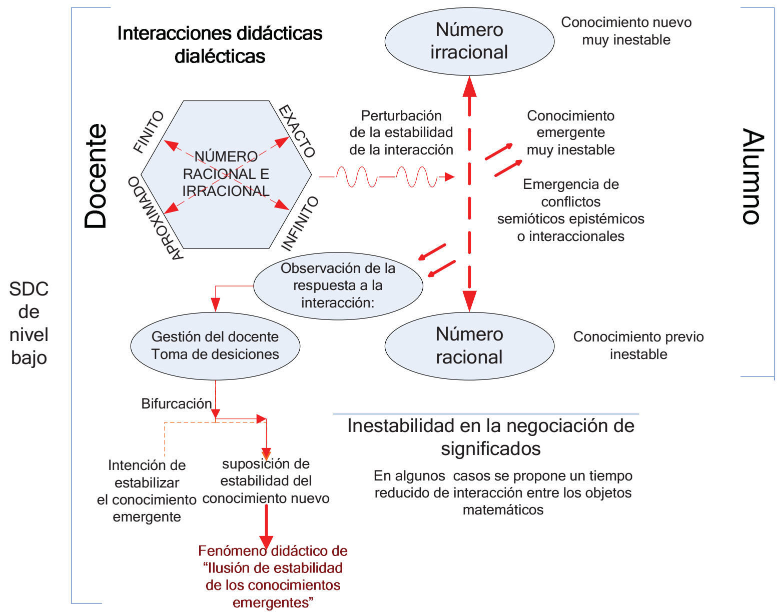


Fig. 162. Interacciones entre objetos matemáticos y conflictos semióticos asociados.

El docente pregunta: "¿cuándo estaríamos en presencia de una expresión exacta?", un alumno responde:"cuando no tiene parte decimal" (tabla 63, capítulo 7). La identificación valor exacto de un número real con números que poseen sólo parte entera da indicios del conflicto interaccional observado. Si bien el profesor intenta que los alumnos superen el conflicto a través del discurso, esto no se logra. La perturbación a la interacción número racional - número irracional se mantiene, la negociación de significados fracasa pero esto no es percibido por el docente.

El profesor entonces toma la decisión didáctica de continuar suponiendo la estabilidad del conocimiento emergente, nuevamente el fenómeno de "suposición de estabilidad de los conocimientos emergentes".

Para la sesión 2 los conflictos semióticos se sitúan entre los de tipo interaccional y epistémicos involucrando nuevamente a las nociones de finitud e infinitud, exactitud y aproximación. Se suman ahora las nociones de potenciación y radicación asociadas todas a las nociones de número racional e irracional (figura 163).

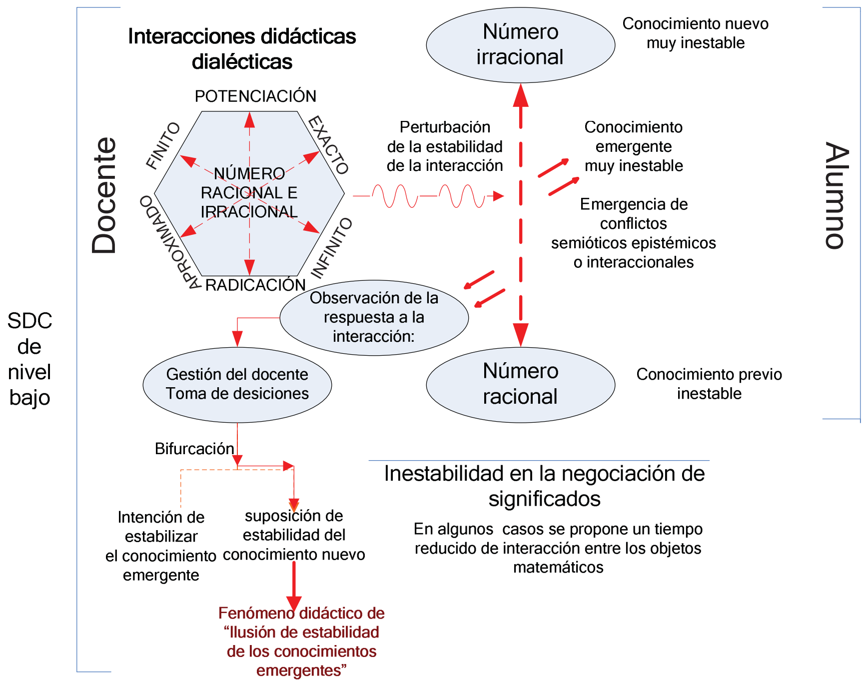


Fig. 163. Interacciones entre objetos matemáticos y conflictos semióticos asociados.

La (IDD) exacto – aproximado perturba a la SDC entre los números racionales – irracionales. ¿Cuándo un número racional es exacto? Para varios alumnos se identifica lo exacto con lo entero y lo aproximado con la expresión decimal. Por lo que para ellos, por ejemplo, el número 3 es sinónimo de exactitud y el número 3,1 es señal de aproximación.

Se deberían tener en cuenta preguntas como: ¿es 0,333333333 ... un número exacto? ¿Lo es también $0,\hat{3}$? El número que se muestra al dividir numerador y denominador de $\frac{1}{3}$ en la calculadora ¿es exacto?

Para los números irracionales ocurre otro tanto, ¿es 1,41421356 ... un número exacto? ¿Lo es $\sqrt{2}$? El número que se muestra al introducir $\sqrt{2}$ y luego apretar la tecla "igual" en el visor de la calculadora, ¿se trata de un número exacto? ¿Es exacto el número 0,12345678910111213 ...? (si continúa con la misma ley de formación).

Esto último no se estudia en la sesión por el docente junto a los alumnos, éste toma la decisión de continuar con las interacciones previstas.

Nuevas IDD promueve el profesor, esta vez se trata de la posibilidad de expresar como fracción de enteros a un número racional en dialéctica con la no posibilidad de dicha expresión por parte de los números irracionales.

El docente no aclara que la fracción debe conformarse con números enteros lo que provoca perturbaciones a la SDC entre los números racionales y los irracionales. Estas perturbaciones se traducen en conflictos semióticos de tipo interaccional y epistémicos (apartado 10.6.2), (figura 164).

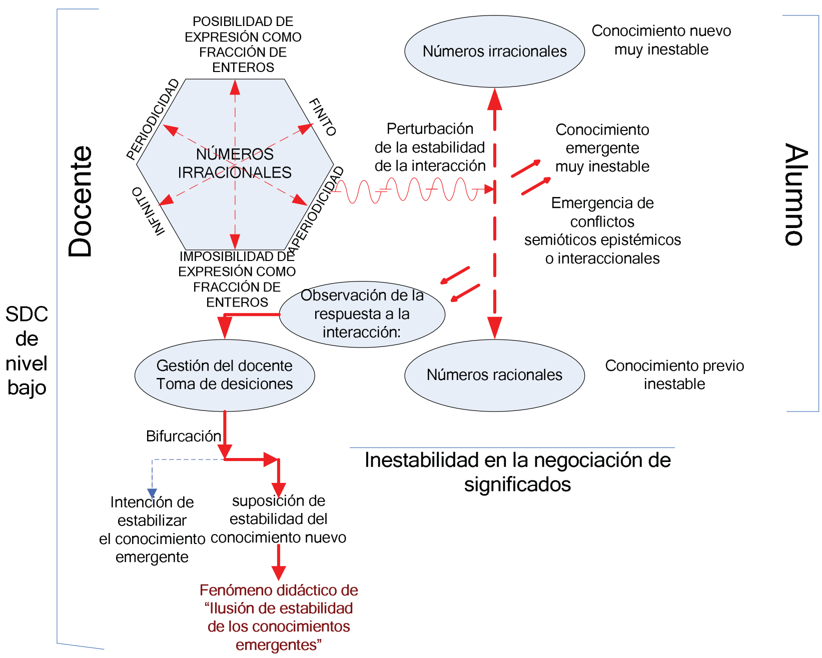


Fig. 164. Interacciones entre objetos matemáticos y conflictos semióticos asociados.

Se produce una breve interacción propuesta por el profesor entre la noción de periodicidad numérica y la aperiodicidad. Se trata de una débil interacción dialéctica que también perturba la SDC propuesta.

Los alumnos no pueden diferenciar cuándo un número se puede expresar como fracción. Si bien el profesor recurre a la periodicidad de los números racionales y su posibilidad de expresión como fracción de enteros, no queda claro el reconocimiento. La periodicidad se "mimetiza ostensivamente" en la aperiodicidad y la aperiodicidad en la periodicidad.

Los resultados obtenidos en las evaluaciones comunes a los grupos de control dan muestra de las dificultades señaladas (apartado 12.3).

En un breve diálogo del docente (tabla 67, apartado 7.1.3.3) con los alumnos éste propone una interacción muy débil entre las nociones de conjunto de los números racionales y la de cardinalidad de un conjunto infinito. Ambos actores producen la misma respuesta, se observa el fenómeno de "aplastamiento de cardinales infinitos" señalado por Arrigo y D'Amore (1999; 2002; 2004).

Si bien la breve interacción perturba la SDC entre los números racionales e irracionales, el conflicto no es percibido por el profesor, éste queda en estado residual, el docente decide continuar con las interacciones previstas (figura 165).

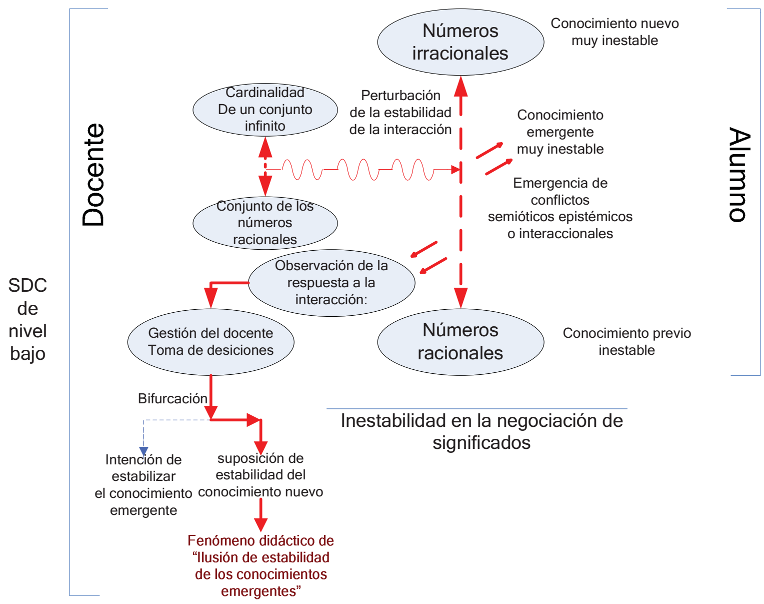


Fig. 165. Interacciones entre objetos matemáticos y conflictos semióticos asociados.

Nuevamente se produce el fenómeno de "ilusión de estabilidad de los conocimientos emergentes".

Inclusive se produce un conflicto semiótico interaccional al proponer el docente una interacción entre las nociones de continuidad de la recta numérica y la de completitud del conjunto de los números reales.
Se debe considerar que el sistema didáctico se encuentra “perturbado” por el observador (figura 166).

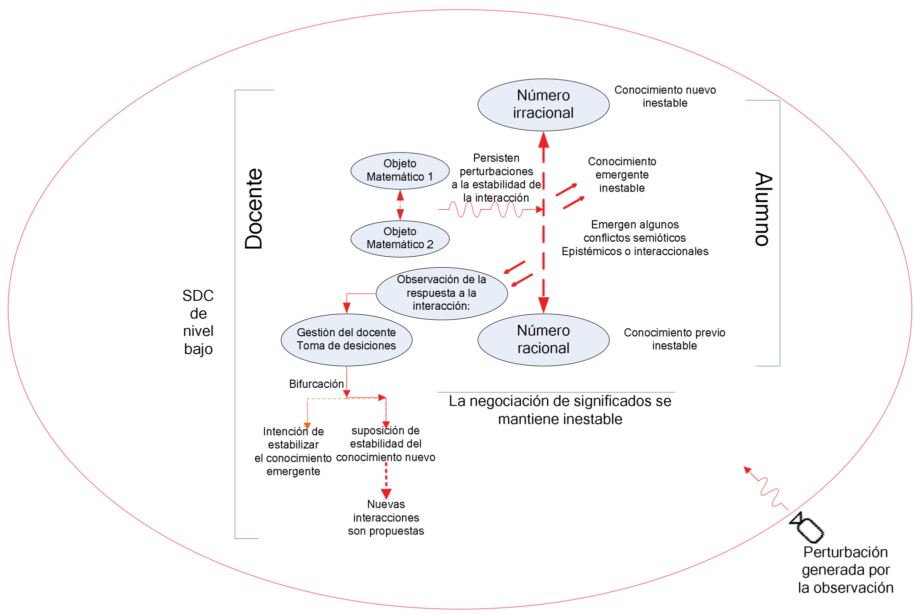


Fig. 166. Perturbación generada por la observación del investigador.

La toma de decisiones del profesor se realiza “condicionada” por el medio perturbado, por lo que no se conoce si en otras circunstancias, sin perturbación de observación alguna, el docente actuaría del mismo modo y tampoco se sabe si la toma de decisiones hubiese sido la misma.
Los alumnos también perciben la perturbación ya que, de vez en cuando, se dan vuelta a mirar a la videocámara. En circunstancias “normales”, sin perturbación, probablemente los alumnos actúen de otra manera.
Posteriormente el docente comienza la SDC entre la representación exacta de un número racional para luego intentar la representación exacta y aproximada de un número irracional.
La representación en la recta numérica real el número $\sqrt{2}$ queda a cargo del profesor, no hay un proceso exploratorio por parte de los alumnos.

La SDC queda en un estado inestable, débil, el docente propone que realicen como tarea, para la próxima clase, la representación en la recta de dos números irracionales (figura 167).

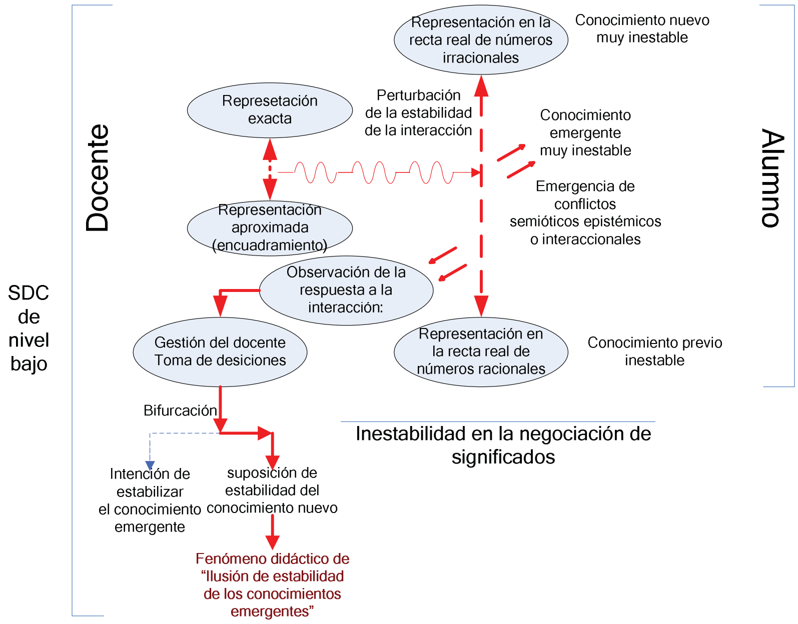


Fig. 167. Conflictos semióticos presentes en la sesión 2 del grupo control (docente 2).

El profesor decide continuar con las SDC previstas para la próxima sesión, otra vez se produce el fenómeno de "ilusión de estabilidad de los conocimientos emergentes".

Para la sesión 3 la SDC entre las nociones de número irracional y la de representación exacta de un número irracional en la recta numérica real continúa. Ésta se plantea de nivel "bajo", los conflictos semióticos se observan asociados a las interacciones entre la representación exacta de un número irracional (positivo o negativo) y el teorema de Pitágoras.

Reina, Wilhelmi, Carranza y Lasa (2013) analizan la relación ostensible - no ostensible entre un número irracional y su representación en la recta numérica real. Algunos números irracionales admiten una representación "idealmente" exacta con regla y compás, otros números irracionales no (p.5).

Toda representación geométrica de un número irracional física, en la recta numérica real, ya sea en una hoja de papel con regla y compás reales, o en la hoja de trabajo de un software en una computadora, son sólo aproximaciones. La representación exacta sólo corresponde a objetos matemáticos "ideales".

Se considera que un número es construible por regla y compás cuando estos son ideales, no ostensivos. Inclusive algunos números irracionales no son construibles por regla y compás "ideales", por ejemplo algunos números algebraicos y todos los trascendentes (Reina, Wilhelmi, Carranza y Lasa, 2013).
La dificultad se presenta cuando lo no ostensivo se "mimetiza" con lo ostensivo, el profesor expresa ante la pregunta de un alumno: "es que la representación gráfica tiene que ser exacta no aproximada" (apartado 7.1.5.1). El docente tiene expectativas de una representación geométrica, por parte de los alumnos, exacta, algo que no es posible con regla y compás físicos.
Para los alumnos la representación geométrica de un número irracional en la recta numérica real pasa por una cuestión de "normatividad", el docente "impone" un procedimiento para ubicar los números en la recta.
El profesor espera que el alumno "aplique" el procedimiento y lo relacione con el teorema de Pitágoras al hallar los lados de los triángulos rectángulos que posibilitan la construcción. Esto último no ocurre como se espera ya que se observan dificultades que se traducen en errores recurrentes.
Dichos errores se observan tanto en la evaluación de proceso como en la integradora (tablas 49,50 y 51, apartado 6.3.1).
Las dificultades provienen de un "divorcio", que producen los alumnos, entre los resultados obtenidos para los catetos del triángulo y las medidas empleadas en la construcción.
Los alumnos no logran, en la interacción de nociones propuesta por el profesor, relacionar ambas nociones. El caso que mayores dificultades presenta es la representación del número $2 + \sqrt{5}$ en la recta numérica real. La mayoría de los alumnos hallan las medidas de los catetos de un triángulo con hipotenusa $\sqrt{5}$ y no el que el profesor solicita. Esto último ocurre porque el docente "negocia" que, ante el caso de este tipo de números irracionales formados por una "suma", los alumnos "no tomen en cuenta al 2" para aplicar el teorema de Pitágoras pero si se tenga en cuenta este número en la representación geométrica. Esto último no ocurre y se observan así las dificultades señaladas.
Para la sesión 4 los conflictos semióticos epistémicos e interaccionales se observan a partir de las interacciones propuestas por el docente entre las nociones de número irracional (como radical) y las propiedades de la potenciación (para la factorización del radicando) (figura 168).

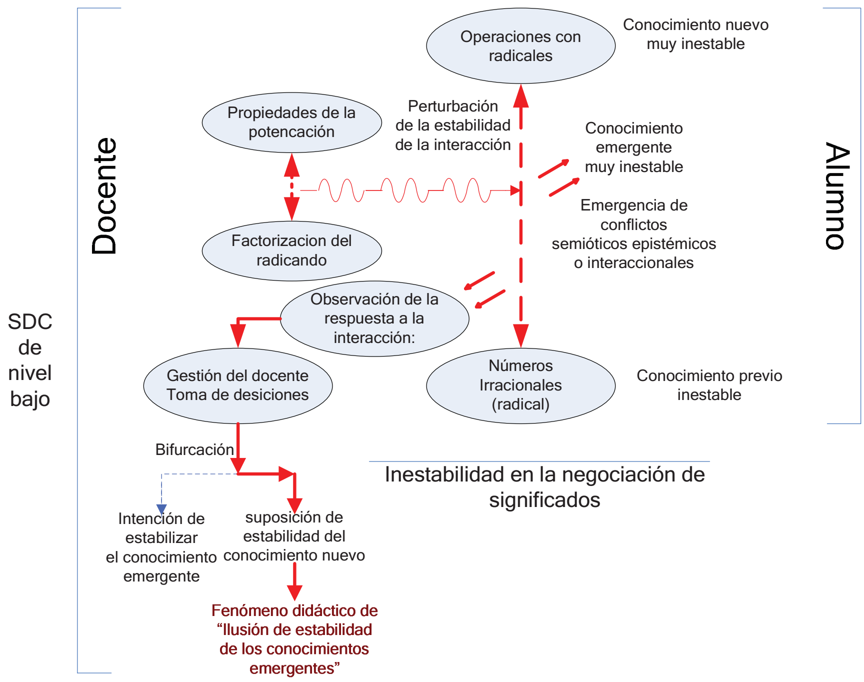


Fig. 168. Conflictos semióticos presentes en la sesión 2 del grupo control (docente 2).

Se observan dificultades provenientes de la interacción entre la factorización del radicando y las propiedades de la potenciación, estas perturban la SDC entre las nociones de radical y de operaciones con radicales. Se suma a esto la noción de área cuya interacción también ocasiona perturbaciones a la SDC. Las evaluaciones tanto de proceso como integradora dan muestra de esto último (tablas 52 a 55, apartado 6.4.1).

Las actividades propuestas en las diferentes interacciones de objetos matemáticos no permiten una evolución eficaz de las nociones.

La simbiosis didáctica global se evidencia estable en una de tipo “débil” en las cuatro sesiones. El docente decide continuar la SDC provocando el fenómeno de ilusión de estabilidad de los conocimientos emergentes.

Si se observa en la figura 169 la gran cantidad de nociones matemáticas propuestas por el docente para las cuatro sesiones analizadas.

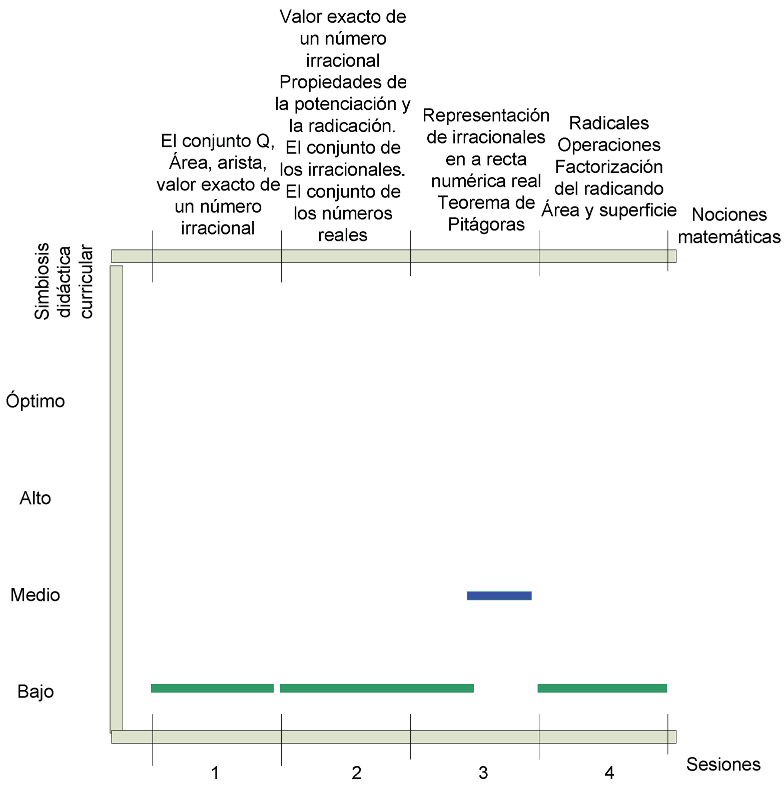


Fig.169. Simbiosis didáctica curricular para las cuatro sesiones del grupo control.

Los tipos conflictos semióticos que se manifiestan a lo largo de las cuatro sesiones se focalizan entre interaccional y epistémicos, con aportes de tipo cognitivos para la sesión cuatro (figura 170).

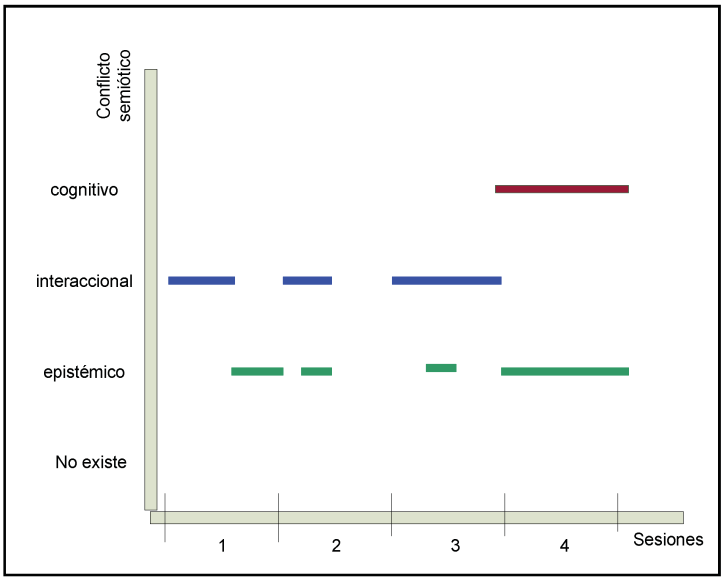


Fig. 170. Conflictos semióticos presentes a lo largo de cuatro sesiones del grupo control (docente 2).

La configuración didáctica global que se observa a partir de las configuraciones didácticas que se manifiestan en las cuatro sesiones muestra que en dos de las sesiones prevalece la de tipo magistral con algunos rasgos de tipo dialógica y en menor medida de tipo personal.
Para las sesiones tres y cuatro las configuraciones se centraron en las de tipo dialógico y personal (figura 171).

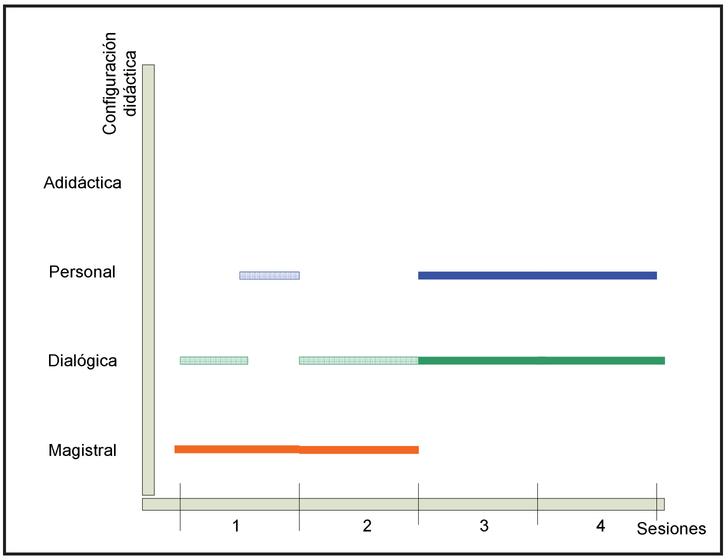


Fig. 171. Configuraciones didácticas en las cuatro sesiones realizadas por el grupo control (docente 2).

8.2.1 IMPLICACIONES DE LA TRAYECTORIA DIDÁCTICA DEL GRUPO DE CONTROL OBSERVADA (DOCENTE 2)

Durante varios años de educación primaria los alumnos construyen nociones como exactitud y finitud, se utilizan "números exactos y finitos". En pocos años, los primeros de educación secundaria, los alumnos deben apropiarse de lo aproximado y lo infinito. Números que antes se consideraban exactos ahora deben pasar a considerarse aproximados. El número π en primaria se asocia al número 3,14 ahora en secundaria ese número corresponde sólo a una aproximación. En primaria los números son "finitos" (por más "grandes" que sean), ahora en secundaria todo número racional puede considerarse "infinito", por ejemplo el número 0 puede escribirse 0,000000000 ... , el número 1,2 puede escribirse como 1,2000000000 ... Todo número racional o irracional "es" infinito.

Si se considera que el "tránsito" entre lo "racional" y lo "irracional" implica nociones como la de infinito actual, el alumno no puede "atraparla" en el nivel secundario, por su complejidad.

Se observa entonces que en estas sesiones las nociones de exactitud y de aproximación, las de finitud e infinitud de un número, son nociones trasparentes para el profesor.

Para los alumnos los objetos funcionan de otra manera, se "mimetizan por ostensión", lo racional se mimetiza con lo irracional y lo irracional con lo racional, lo exacto con lo aproximado y lo aproximado con lo exacto, lo finito con lo infinito.

Se torna difícil para los alumnos diferenciar números racionales de los irracionales, varios alumnos recurren "a su forma", lo ostensivo entonces predomina por sobre lo no ostensivo.

También para ellos lo periódico se "mimetiza" con lo aperiódico y lo aperiódico con lo periódico. Los números que son posibles de expresar como fracción se mimetizan con aquellos donde no es posible expresarlos de esa forma. Inclusive, para los alumnos, la representación exacta de un número irracional, en la recta numérica real, se mimetiza con la representación aproximada en dicha recta.

Las IDD propuestas por el profesor, a partir de las nociones señaladas, perturban la SDC entre los números racionales y los irracionales y son generadoras de conflictos semióticos interaccionales y epistémicos señalados.

El teorema de Pitágoras el docente lo usa como "argumento" para decidir si los lados del triángulo rectángulo se corresponden con la hipotenusa del mismo. La interacción propuesta por el profesor entre el teorema y la representación geométrica no funciona de la forma esperada ya que perturba la SDC entre la noción de número irracional y la de su representación geométrica en la recta numérica real.

Se observan dificultades que se traducen en errores recurrentes, no es posible para los alumnos superar los conflictos semióticos, el conocimiento emergente se mantiene inestable.

Capítulo 9

Antecedentes y estudio piloto

En este capítulo se estudian algunos antecedentes de las primeras situaciones problema que forman parte del proyecto de enseñanza. En la sección 9.1 se muestran ciertas situaciones similares a las seleccionadas empleadas por otros investigadores. A continuación se adaptan las situaciones-problema a un contexto escolar en un estudio piloto, allí se describen las tareas propuestas, su resolución experta y los comportamientos esperados (sección 9.2). Posteriormente se analizan los resultados de este estudio piloto (sección 9.3), es decir, los comportamientos observados. En la sección 9.4, se discuten los resultados del estudio piloto, destacando aspectos para el diseño de la secuencia de actividades.

9.1 ALGUNOS ANTECEDENTES DE LA SITUACIÓN PROBLEMA SELECCIONADA

Arcavi (1985), en su tesis doctoral, "Historia de las matemáticas como un componente de fondo de los profesores de matemáticas", plantea la importancia de la historia de la matemática como componente a tener en cuenta para los estudiantes para profesor y para los profesores de matemática en servicio.

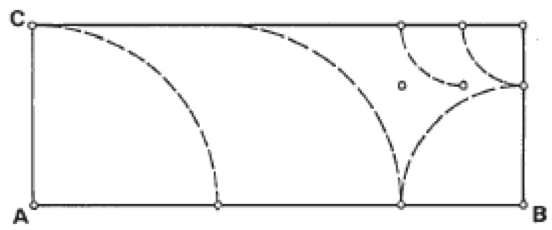
El estudio se realiza con cuatro grupos de docentes: el grupo "A" formado por 60 futuros profesores, el grupo "B" con 84 profesores de matemáticas en servicio. El grupo "C" con treinta y seis docentes que responden sobre la historia de los números negativos y el grupo "D" con cincuenta y seis profesores los cuáles responden a cuestiones matemáticas donde juega un papel importante la historia de los números irracionales.

En una encuesta al grupo "D" se emplea el procedimiento geométrico para hallar la "conmensurabilidad" o la "inconmensurabilidad" entre segmentos. Se trata de hallar el máximo común divisor entre los lados de un rectángulo, método que ya se ha descrito en el apartado 7.6.2.1.

Implícitamente se trata de emplear el algoritmo de fracción continua (FC) a los lados AB y AC del rectángulo dado.

“Pregunta:

Si dibujamos los dos segmentos como lados de un rectángulo, hay otra forma interesante de ilustrar el proceso de encontrar la máxima medida común. (Las curvas discontinuas están dibujadas con un compás.)

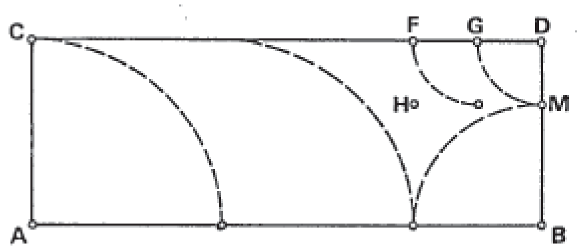


Denota la máxima medida común por a, y márquela apropiadamente sobre la figura. Luego complete los siguientes espacios en blanco.

AB=……a, AC=…….a (p.6).

La respuesta que espera el autor es la siguiente:

“Medida común



El segmento FG (o FH) es la medida común. Dado que FD es igual a MB tenemos

$$AC = 3a \quad \text{y} \quad AB = 8a$$

Por lo tanto la proporción entre el segmento AC y el segmento AB es como 3 a 8" (p.6).

Esta actividad se centra en la noción de conmensurabilidad entre segmentos como paso previo a la inconmensurabilidad la cual se organiza en otras actividades donde juega un papel importante el teorema de Pitágoras.

Redondo y Haro (2005) presentan una propuesta metodológica para 4° de ESO (España, 15-16 años) empleando la FC para su desarrollo.

> "Que recoge una secuencia de actividades que permite trabajar indistintamente diversos conceptos y procedimientos de distintos bloques de contenidos del currículo de 4º de ESO, en concreto de álgebra, análisis y geometría, de forma unificada" [...] La resolución de un sencillo problema de embaldosado conduce a una fracción continua finita y sugiere un modelo geométrico para su representación, convirtiendo automáticamente a las fracciones continuas en un sorprendente recurso didáctico para trabajar y entrelazar contenidos de todo tipo: divisibilidad, número irracional, aproximaciones, desigualdades, radicales, progresiones, sucesiones, ecuaciones de 2ºgrado, semejanza, número de oro, números metálicos..." (p.54).

Estos antecedentes sugieren que la adquisición de las nociones teóricas de conmensurabilidad e inconmensurabilidad no pueden apropiarse debidamente por los estudiantes por medio de una enseñanza magistral. Por ello, los autores proponen situaciones-problema que permitan a los estudiantes, en interacción con la situación, concluir aspectos clave de las nociones involucradas. Así la labor del docente es, por un lado, la determinación de situaciones apropiadas que permitan la emergencia de las nociones implicadas; por otro lado, sintetizar los conocimientos, por medio de su institucionalización.

9.2 LA SITUACIÓN PROBLEMA EN CONTEXTO ESCOLAR

A continuación se adapta la propuesta de Redondo y Haro vista en el apartado anterior para llevar adelante un estudio piloto que provea información a tener en cuenta para la experimentación que se describe en el próximo capítulo.

9.2.1 TAREAS PROPUESTAS, SU RESOLUCIÓN EXPERTA Y DESCRIPCIÓN DE LOS COMPORTAMIENTOS ESPERADOS

Se propone, siguiendo el esquema clásico de la Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas (TSDM) (Brousseau, 1998), una secuencia de problemas cuyo fin es hacer evolucionar la actividad de los estudiantes de una *situación de acción* (que busca garantizar que los estudiantes comprenden la consiga) a una *situación de formulación-validación* (que hará emerger los conocimientos sobre la conmensurabilidad pretendidos).

Problema 1

Una fábrica de alfombras elabora solamente alfombras cuadradas de diferentes dimensiones. Queremos alfombrar totalmente el piso de una habitación rectangular de 3m x 5m, utilizando el menor número de dichas alfombras sin cortarlas ni superponerlas (Nota: no es necesario utilizar todas las alfombras del mismo tamaño).

Determina:

- **a.** *¿Cuántas alfombras son necesarias para cubrir totalmente el piso? y ¿qué longitudes tienen sus lados?*
- **b.** *¿Qué valor se obtiene al sumar las áreas de todos los cuadrados?*

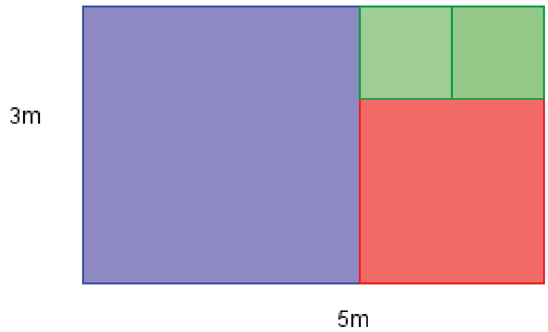


Fig.172. Representación gráfica en GeoGebra del problema uno.

Posibles respuestas de los alumnos:

a. Hallamos 1 alfombra de 3 m de lado, 1 alfombra de 2m de lado y 2 alfombras de 1m de lado (fig.172).
b. El área total es de 15 m^2.

Problema 2

Si ahora tenemos otra habitación de lados 3m x 8m.

a. ¿Cuántas alfombras son necesarias y qué longitudes tienen sus lados?
b. ¿Qué valor se obtiene al sumar las áreas de todos los cuadrados?

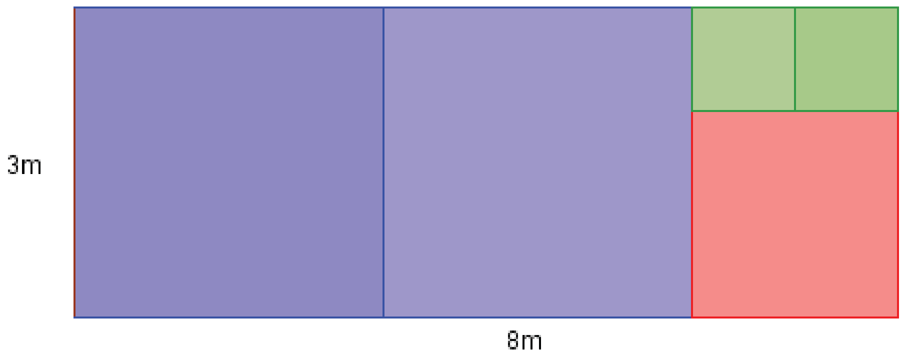


Fig.173. Representación gráfica en GeoGebra del problema dos.

Posibles respuestas de los alumnos:

a. Hallamos 2 alfombras de 3 m de lado, 1 alfombra de 2m de lado y 2 alfombras de 1m de lado (figura 173).
b. El área total es de 24 m².

Problema 3

Repetimos el procedimiento ahora para un patio de 4m x 7m.

a. ¿Cuántas alfombras hallaste y qué longitudes tienen sus lados?
b. ¿Qué valor se obtiene al sumar las áreas de todos los cuadrados?

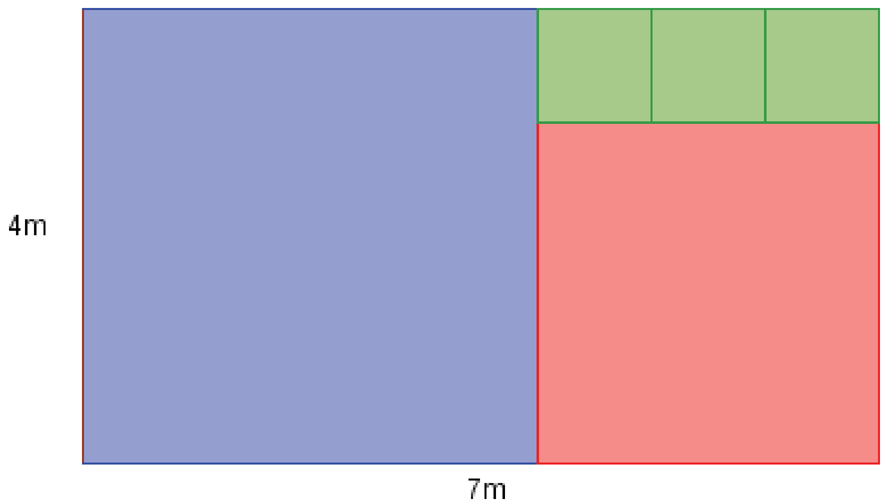


Fig.174. Representación gráfica en Geogebra del problema tres.

Posibles respuestas de los alumnos:

a. Hallamos 1 alfombra de 4 m de lado, 1 alfombra de 3m de lado y 3 alfombras de 1m de lado (fig.174).
b. El área total es de 28 m².

Problema 4

Repetimos el procedimiento ahora para un patio de 55 m x 89 m.

a. *¿Cuántas alfombras hallaste y qué longitudes tienen sus lados?*
b. *¿Qué valor se obtiene al sumar las áreas de todos los cuadrados?*

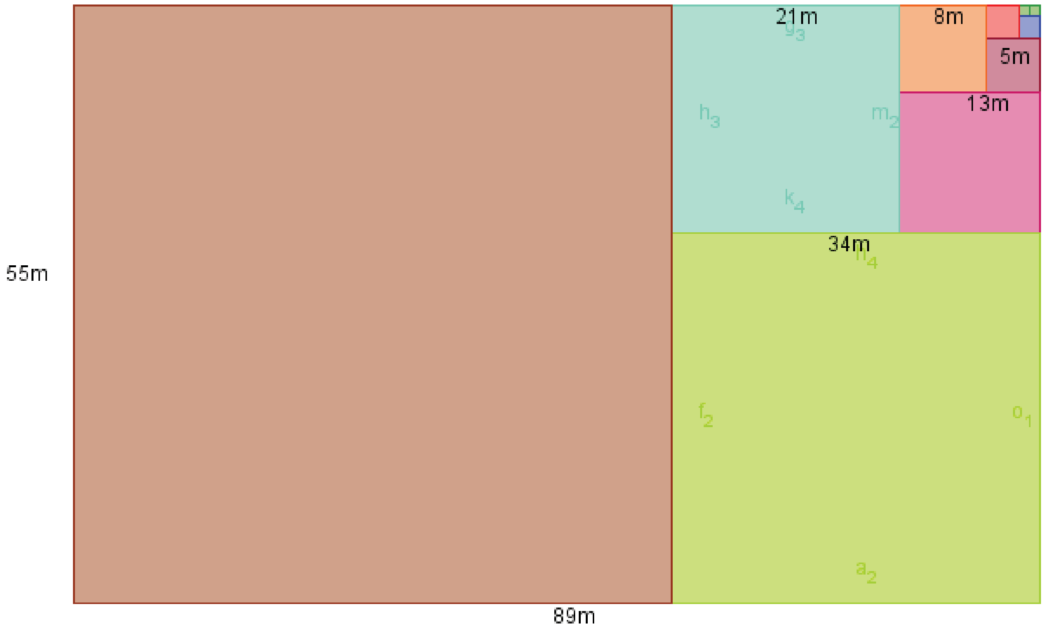


Fig.175. Representación gráfica en GeoGebra del problema cuatro.

Posibles respuestas de los alumnos:

a. Hallamos 1 alfombra de 55 m de lado, 1 alfombra de 34 m de lado, 1 alfombra de 21m de lado, 1 alfombra de 13 m de lado, 1 alfombra de 8 m de lado, 1 alfombra de 5 m de lado, 1 alfombra de 3 m de lado, 1 alfombra de 2 m de lado y 2 alfombras de 1 m de lado (figura 175).
b. El área total es de 4895 m².

Claramente es bastante difícil para un alumno la construcción geométrica de este problema sin dificultad y sin errores, se espera que los grupos obtengan diferentes soluciones (algunas erróneas), se contrasten dichas soluciones con ayuda del profesor y de esta manera surja la necesidad de un nuevo conocimiento.

En este caso el algoritmo de fracción continua puede ayudar a "desvelar" la verdadera cantidad de alfombras necesarias para cubrir toda la superficie y la longitud que deben tener los lados de dichas alfombras. En los comportamientos esperados por los estudiantes no se contempla su uso explícito, pero sí manipulaciones inteligibles por medio de la esta noción. Así, es tarea del docente, generalmente en la fase de institucionalización o, en ocasiones, en momentos regulativos del proceso de estudio, la intervención explícita para su introducción. Esta decisión didáctica de introducir explícitamente la fracción continua, no se concibe por su utilidad en la resolución de la tarea, sino por la concreción de una técnica general reutilizable en otros contextos y para la resolución de otras tareas.

La noción de fracción continua como instrumento de respuesta para el problema 4

En la resolución de esta tarea es posible utilizar calculadora. Se obtienen sucesivamente los siguientes valores:

$\left[\frac{89}{55}\right] = [1]$ parte entera 1 alfombra de 55 m de lado

$\left[\frac{1}{\frac{89}{55}-1}\right] = \left[\frac{55}{34}\right] = [1]$ parte entera 1 alfombra de 34 m de lado

$\left[\frac{1}{\frac{55}{34}-1}\right] = \left[\frac{34}{21}\right] = [1]$ parte entera 1 alfombra de 21m de lado

$\left[\frac{1}{\frac{34}{21}-1}\right] = \left[\frac{21}{13}\right] = [1]$ parte entera 1 alfombra de 13 m de lado

$\left[\frac{1}{\frac{21}{13}-1}\right] = \left[\frac{13}{8}\right] = [1]$ parte entera 1 alfombra de 8 m de lado

$\left[\frac{1}{\frac{13}{8}-1}\right] = \left[\frac{8}{5}\right] = [1]$ parte entera 1 alfombra de 5 m de lado

$\left[\frac{1}{\frac{8}{5}-1}\right] = \left[\frac{5}{3}\right] = [1]$ parte entera 1 alfombra de 3 m de lado

$\left[\frac{1}{\frac{5}{3}-1}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] =$ [1]parte entera 1alfombra de 2 m de lado

$\left[\frac{1}{\frac{3}{2}-1}\right] = \left[\frac{2}{1}\right] =$ [2] parte entera 2 alfombras de 1 m de lado

Con las partes enteras obtenidas formamos la fracción continua simple finita (figura 176).

$$\frac{89}{55} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}}} = [1;1,1,1,1,1,1,1,2] = 1{,}6\widehat{18}$$

Número de alfombras (cocientes parciales)

Fig.176. Representación numérica en FC del problema cuatro.

Con Geogebra:

- Una forma de “verificar” las respuestas obtenidas puede ser con el comando “fracción continua” ingresando 89/55 en la ventana “CAS” del programa (figura 177).

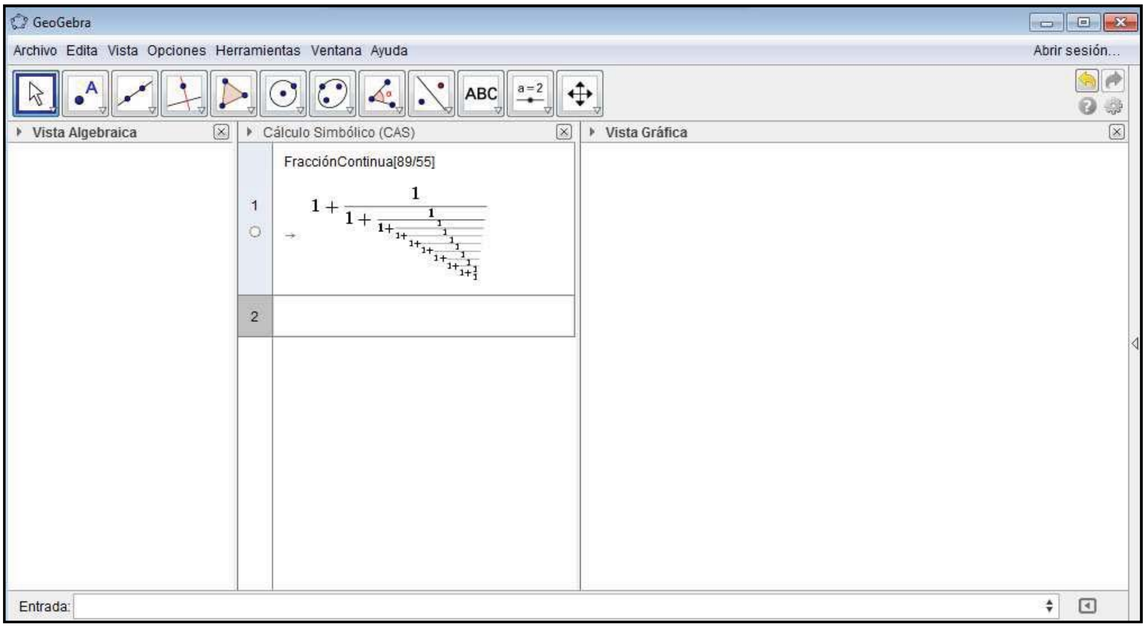


Fig.177. Representación en Geogebra del número 89/55 en FC.

Se puede obtener la expresión por cocientes parciales ingresando 89/55 y luego una coma y la palabra "true" como se muestra en la figura 178, que en el caso del problema cuatro representa la cantidad de alfombras necesarias para cubrir el patio según las condiciones solicitadas.

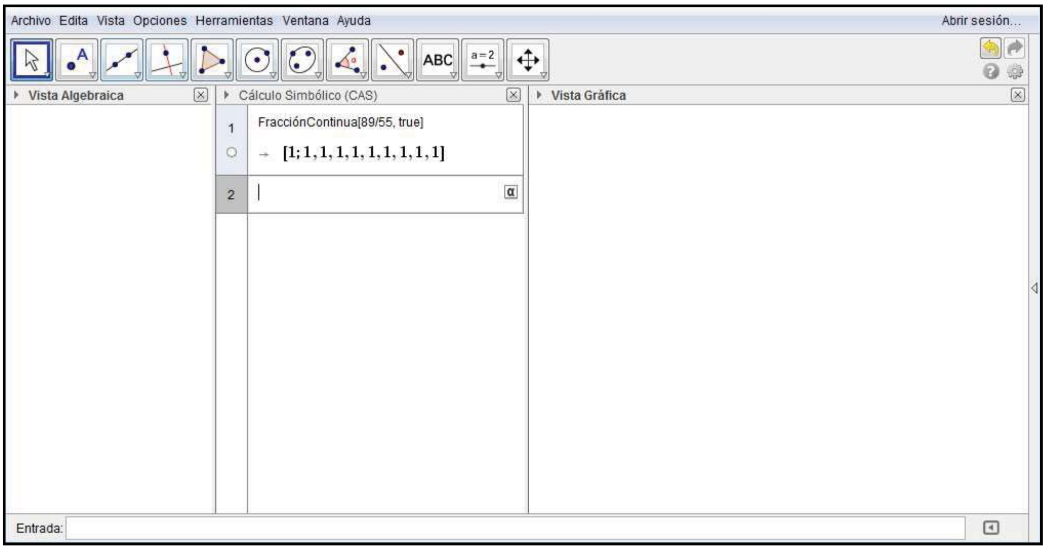


Fig.178. Representación por sus cocientes parciales, en Geogebra, del número 89/55.

- Otra forma de trabajo con Geogebra es ingresar “a mano” los cocientes parciales ya que la calculadora científica común presenta limitaciones (si la cantidad de cocientes es grande da mensaje de error). Este procedimiento es laborioso (figura 179), por lo que se descarta su uso didáctico generalizado, aunque podría tener utilidad en momentos formativos que incluyan la manipulación simbólica como aspecto central de aprendizaje. En estos casos, la necesidad de abrir y cerrar paréntesis “por parejas”, puede servir para centrar la atención en la estructura de la función continua.

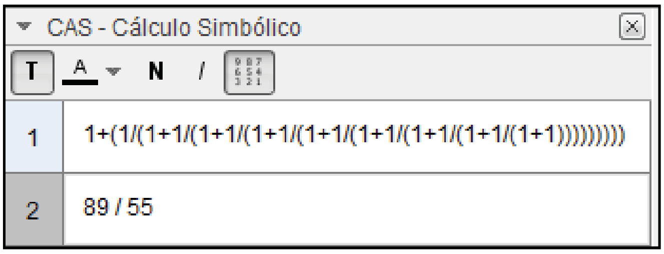


Fig.179. Representación del número 89/55 en forma “lineal” (con paréntesis).

Se espera que los alumnos puedan resolver los problemas con los siguientes conocimientos previos:

- Unidades de longitud y superficie.
- Operaciones con números racionales.
- Noción de área de una figura plana (rectángulo).

Se espera también que los alumnos puedan resolver los problemas de dos maneras, a saber,

- Para el punto “a”, utilizando la geometría o por cálculo aritmético.
- Para el punto “b”, sumando las áreas de los cuadrados o empleando la fórmula del área de un rectángulo.

9.2.2 EXPERIMENTACIÓN PILOTO CON ALUMNOS DE 2ºAÑO (14-15AÑOS)

Respuestas al problema 1

En su gran mayoría, los alumnos utilizan el registro geométrico empleando medios materiales como la hoja de uso común en Argentina, cuadriculada y la regla graduada. Sólo un grupo logra realizar este problema sin ayuda del registro geométrico.

Algunos alumnos señalan la escala 1m =1cm, otros 1m = 0,5 cm; algunos, simplemente, asociaran la longitud 1m a la longitud del lado de los cuadrados de la cuadrícula de su hoja de trabajo.

Cuatro grupos logran resolver correctamente el problema, dos grupos no presentan dificultades a la hora de expresar las unidades de medida.

En la figura 180, se observa que la notación del área se hace con relación al lado del cuadrado.

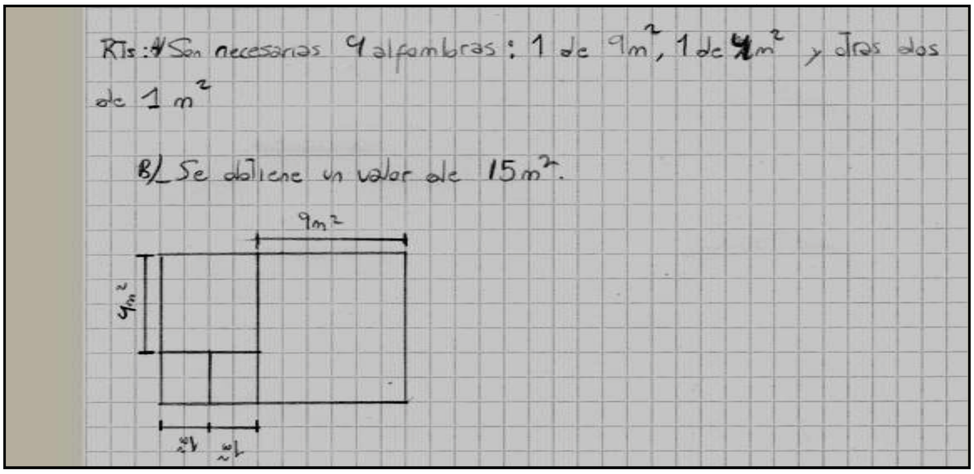


Fig.180. Respuesta de un grupo de alumnos al problema 1.

Este hecho no es necesariamente la muestra de una confusión radical entre longitud y superficie. De hecho, dado que para el cálculo del área (*A*) de un cuadrado es suficiente conocer el lado (*l*), la notación puede significar el reconocimiento implícito de la función cuadrática: $A=l^2$.

Otros dos grupos, que resuelven correctamente el problema, presentan inconvenientes a la hora de expresar las unidades de medida ya del área, ya de la longitud de las alfombras (figuras 181 y182).

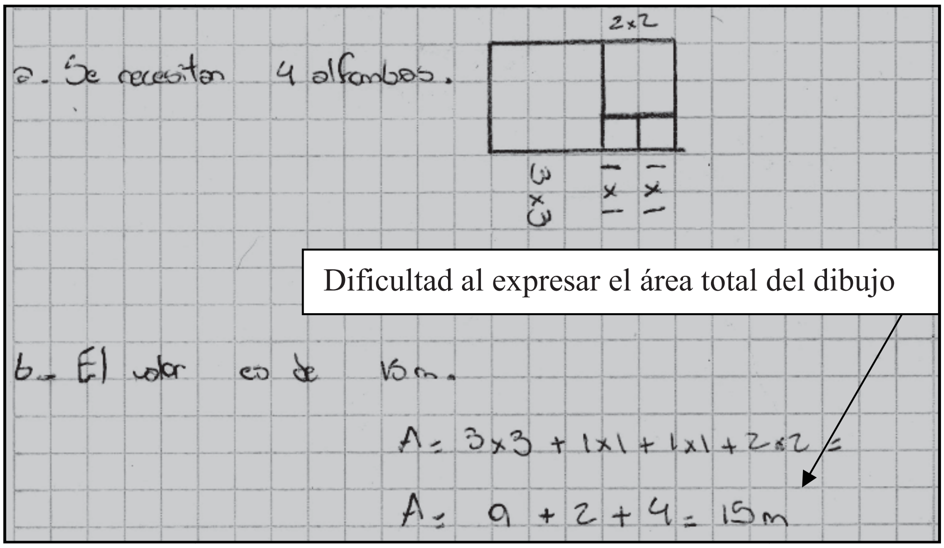


Fig. 181. Respuesta de un grupo con dificultades de expresión del área

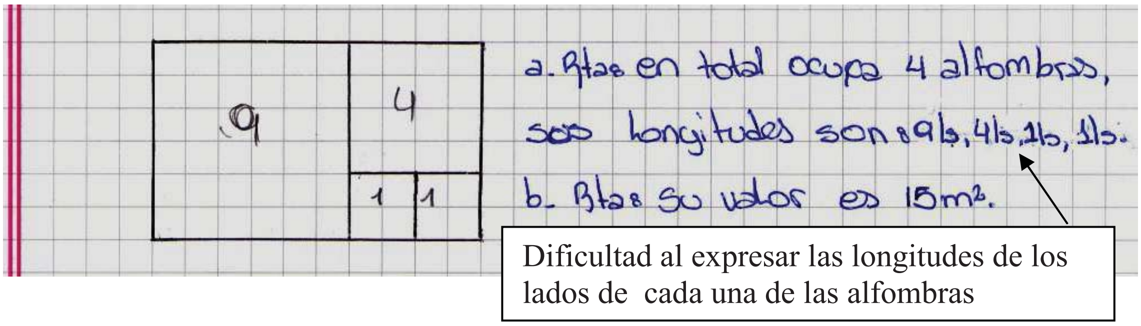


Fig. 182. Respuesta de un grupo con dificultades al expresar las longitudes de los lados.

Tres grupos no logran hallar la solución del problema:

En la figura 183 se observa la respuesta dada por un grupo de alumnos, en ella se visualiza que si bien ellos dibujan un cuadrado de 3m de lado luego no les es posible dibujar un cuadrado de 2m de lado, toman un cuadrado de lado menor por lo que aumenta el número de alfombras no siendo este "mínimo" como indica la consigna del problema.

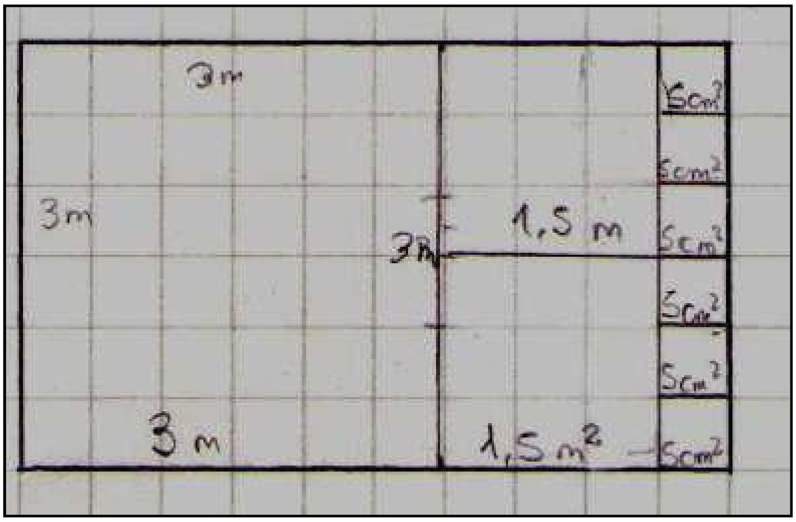


Fig. 183. Respuesta errónea al problema 1 hallada por un grupo de alumnos.

Se manifiesta un conflicto de unidades, entre una medida en 2D con una medida lineal. Otros dos grupos realizan construcciones erróneas similares.

Respuestas al problema 2

Cinco de los ocho grupos de alumnos responden correctamente a la cuestión planteada aunque se sigue manteniendo las dificultades en el uso de las unidades de medida de longitud y superficie (figuras 184 y 185).

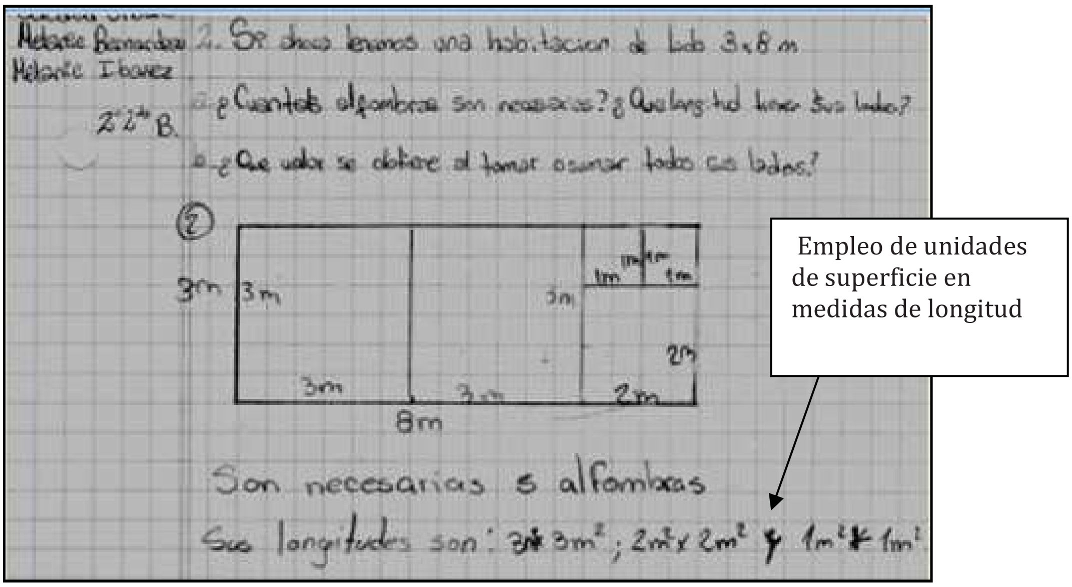


Fig.184. Manifestación de dificultades en las unidades en la solución de un grupo de alumnos.

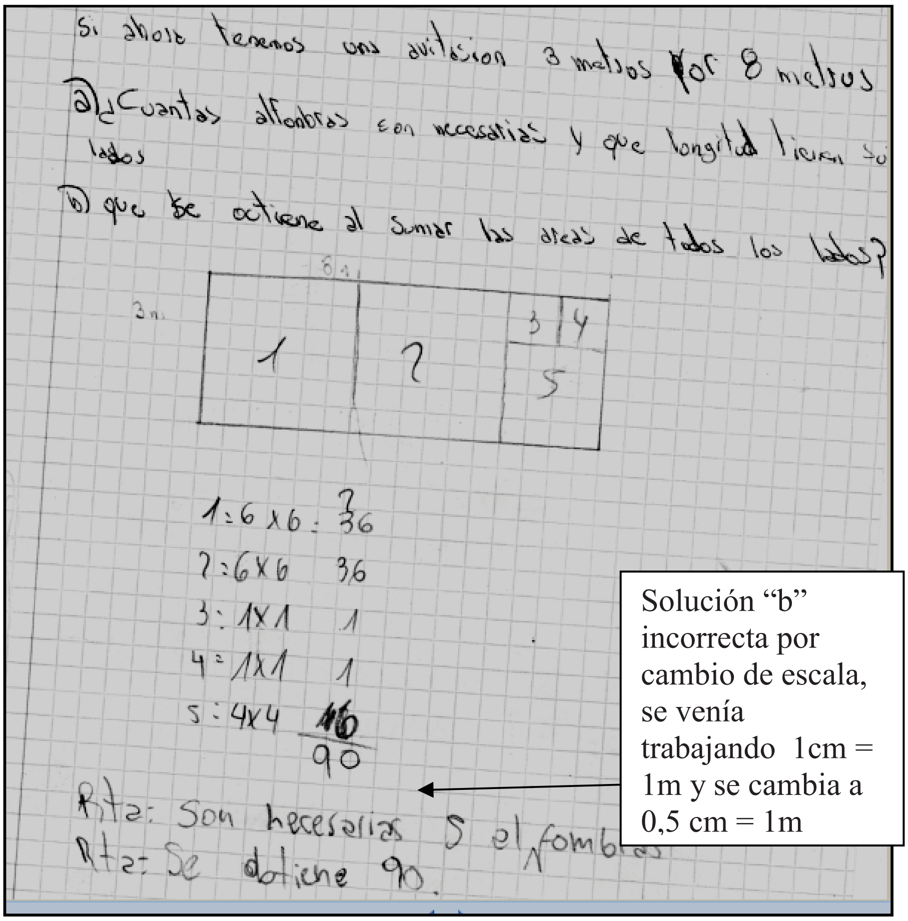


Fig. 185. Respuesta errónea, de un alumno, por cambio de escala.

Respuestas al problema 3:

Cinco grupos responden incorrectamente, solamente dos grupos logran arribar al resultado esperado.

La dificultad principal por la cual los grupos no resuelven correctamente la tarea aparece al no minimizar el número de alfombras para cubrir la superficie. O sea producen mayor cantidad de alfombras que las mínimas requeridas.

Para el problema 4:

Ningún grupo logra obtener la solución correcta, las limitaciones del medio material (hoja cuadriculada y regla graduada) actúan restringiendo las posibilidades de hallar una (figura 186).

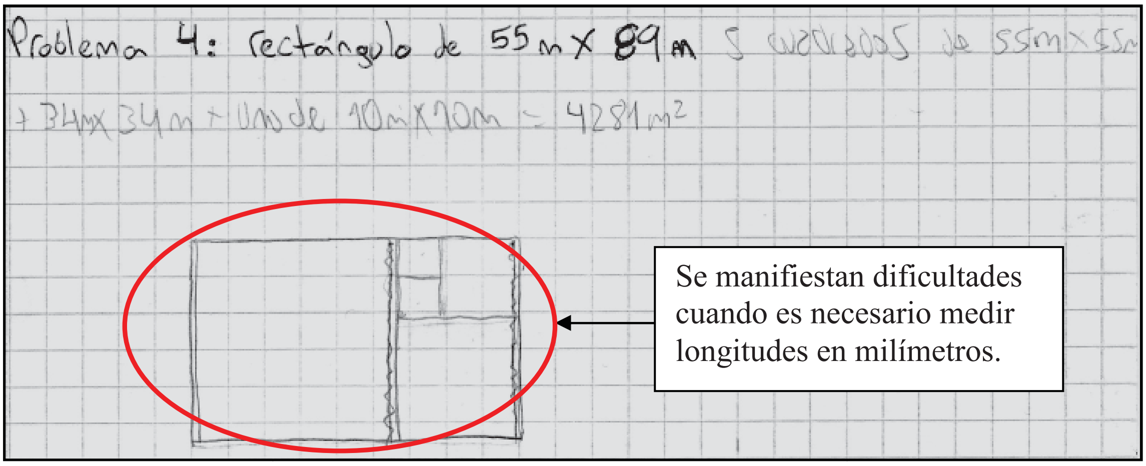


Fig. 186. Respuesta errónea de un grupo de alumnos al problema 4.

El análisis sistemático de estos comportamientos se desarrolla en el siguiente apartado.

9.2.3 ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO DE LOS ALUMNOS

Para el primer problema los alumnos exploran el medio, utilizan los materiales disponibles habitualmente en clase de matemáticas, recurren al marco geométrico en su afán de hallar una solución.

Tres grupos de alumnos resuelven correctamente el problema, dos de estos lo hacen con ayuda de la representación geométrica en hoja cuadriculada de sus cuadernos.

Cinco grupos no alcanzan una solución correcta al no lograr cubrir la superficie con el "mínimo" de alfombras, esto puede deberse a que pasan por alto la condición señalada o por dificultades en la construcción del dibujo del rectángulo. Además, se observa, como ya se ha señalado, una dificultad en la distinción entre las unidades de medida de longitud y superficie.

En la tabla 94 se puede ver el resumen de los comportamientos observados.

	Cantidad de alfombras				Valor del área total			
	Correcto	Incorrecto			Correcto	Incorrecto		Nc
		Por la unidad empleada	Por mayor cant. de cuadrados	NC		Por el valor obtenido	Por la unidad empleada	
Problema1	**3**	**1**	**4**	**0**	**2**	**0**	**3**	**3**
Problema2	**5**	**0**	**1**	**2**	**2**	**1**	**2**	**3**
Problema3	**2**	**0**	**4**	**2**	**3**	**1**	**1**	**3**
Problema4	**0**	**0**	**5**	**3**	**0**	**2**	**0**	**6**

Tabla 94. Resultados obtenidos en los problemas por los diferentes grupos de alumnos.

A pesar de que este primer problema es a priori más sencillo que el segundo en este se observa una leve mejoría en las respuestas de los alumnos. Este hecho confirma la función explicativa que cumple la primera situación. En las situaciones de acción, uno de los objetivos fundamentales para el docente es garantizar que la consigna ha sido comprendida por los estudiantes. Por ello, pueden observarse comportamientos no adecuados que más tarde serán corregidos.

En la situación 2, las estrategias de resolución parecen haberse estabilizado pero los errores en las unidades descartan la posibilidad de error de tipo anecdótico, se trataría entonces de un error de tipo, al menos, reproducible (Wilhelmi, 2009) y de no tratarse convenientemente, aparecería la posibilidad de un error de tipo recurrente, por lo menos para algunos alumnos.

En el tercer problema se repiten las dificultades que se plantearon en el problema 1 ya que la mayoría de los grupos no logra alcanzar una solución correcta al no poder recubrir la superficie con el mínimo de alfombras por lo que las estrategias empleadas en el problema anterior se han desestabilizado.

Nuevamente aparece el cuestionamiento si esto viene condicionado por la pregunta y por la actividad que normalmente se realiza en clase, donde los problemas se resuelven mediante procedimientos "uniformes", una cuestión de contrato didáctico.

En el cuarto problema se manifiesta claramente las limitaciones del medio material y con él aparecen dificultades en relación con la noción de medida.

Estas limitaciones se pueden hacer públicas a todos los grupos, con ayuda del profesor, a través de una puesta en común, puede surgir así la necesidad de emplear nuevas herramientas matemáticas que permitan una evolución del conocimiento.

El algoritmo de fracción continua puede, en este caso, ayudar a resolver más eficazmente el problema descontextualizándolo del marco geométrico realizando un tránsito hacia el marco numérico. Pero es evidente que se trata de un "salto" cualitativo bastante grande para los alumnos ya que se obtuvieron diferentes respuestas a la actividad por parte de los distintos grupos de alumnos y estas quedan "atadas" a la noción de medida. Se debe tener en cuenta este aspecto a la hora de elaborar la propuesta de experimentación.

Si bien, en esta actividad, se puede rutinizar la técnica institucionalizada verificando las respuestas de los problemas ya resueltos, esta podría significar solo una introducción de un algoritmo en forma "abrupta" sin que surja un contexto apropiado del método.

9.3 ANÁLISIS DEL ESTUDIO PILOTO Y ASPECTOS A DESTACAR PARA EL DISEÑO DE SECUENCIA DE ACTIVIDADES

En relación a los resultados de la puesta en funcionamiento de la situación planteada a los alumnos en el estudio previo, se resaltan los siguientes hechos:

- La hoja cuadriculada, del cuaderno común de los alumnos, empleada por los diferentes grupos de alumnos, no parece entorpecer el desarrollo de las actividades. Aunque existe una fuerte focalización en los aspectos geométricos, de medida, en las respuestas obtenidas.

- El soporte papel tiene un límite de percepción, la percepción visual de los alumnos que hacen de las figuras. Los límites del soporte impiden que se pueda percibir otras posibilidades, ya que no es posible hacer un "zoom".

- Los alumnos asocian la noción de área a la forma y no a la cantidad. Parece que el concepto está asociado a un tipo de registro (ellos no se pueden despegar de los cuadraditos) por lo que no tiene integración un nuevo registro, el numérico. Se debe considerar la posibilidad de eliminar de las situaciones problemáticas a la noción de área para que no entorpezca el tránsito de la noción de número racional hacia lo irracional.
- El contrato didáctico (o la dimensión normativa) con el cual los alumnos de este grupo están "familiarizados", en donde los problemas se resuelven mediante procedimientos uniformes, no contribuye a la evolución de la actividad ya que crea dependencia del profesor.
- El empleo de la herramienta informática contribuye a un mayor acercamiento a la noción de FC.

El estudio previo aporta datos experimentales de la dimensión cognitiva (referido a los estudiantes), instruccional (referido a la enseñanza,) y epistemológica (estudio de las nociones, procesos o significados matemáticos involucrados) que condicionan la puesta en marcha de la experimentación.

A partir de dichos datos se toman las siguientes decisiones didácticas para la puesta en aula de la experiencia:

- En las actividades 1 y 2, los alumnos tienen la posibilidad (opcional) de emplear la hoja cuadriculada, ya que el estudio piloto sugiere que este medio material no afecta al normal desarrollo de la práctica matemática implementada para la resolución de las situaciones-problema.

- No se pone en juego otra noción matemática más, a saber, la de área, por las dificultades halladas en el estudio previo. Por lo que se eliminan de las situaciones problemáticas la solicitud de hallar las áreas de las figuras encontradas.
- Se intenta introducir lo más "suavemente" posible el algoritmo de fracción continua como un medio apto para la verificación y la resolución de las situaciones propuestas. Por lo que se cambia el problema cuatro por otra actividad que permita un menor salto cualitativo.
- Se incluye una actividad (act.5) donde los alumnos deben comparar los resultados hallados en forma numérica con los obtenidos en forma gráfica como una forma de volver a un formato familiar para los ellos.
- Se intenta realizar un tránsito flexible entre lo racional y lo irracional aplicando el algoritmo de fracción continua a diferentes tipos de números reales y analizando cuando este proceso continua y cuando se detiene.
- Se determina, con ayuda del algoritmo, la naturaleza racional o irracional de números conociendo su estructura de origen, sin apelar exclusivamente a su expresión decimal, con esto último se evita la problemática de la búsqueda de regularidades, patrones y de aperiodicidad estudiados en el capítulo siete.
- Se introducen actividades de "aproximación" de números racionales e irracionales a partir del algoritmo empleado. Éstas implican tareas de "encuadramiento" de números irracionales y de aproximación en la recta numérica real con ayuda de la herramienta informática.
- Se propone la resolución de algunas situaciones problemáticas que impliquen la aproximación de números racionales e irracionales.
- Se prevé una actividad donde se estudie el algoritmo en funcionamiento con ayuda de el software Geogebra, de este modo los alumnos puedan "probar" libremente con diferentes números reales y observar en cuales de dichos números el algoritmo finaliza y en cuáles no.

- Finalmente se prevé que al alumno obtenga sus propias conclusiones en torno a la diferenciación entre un número racional y otro irracional. De esta manera pueda obtener una "definición" de ambos tipos de números.

Capítulo 10

Secuencia de enseñanza

En este capítulo se estudia el diseño de secuencia de situaciones para experimentación y las respuestas esperadas de los alumnos de acuerdo a la experiencia piloto. Se trata de una secuencia de actividades en un contexto geométrico-numérico aritmético que emplea a la noción de fracción continua como herramienta para introducir, identificar y diferenciar números irracionales.

10.1 DISEÑO DE SECUENCIA DE SITUACIONES PARA EXPERIMENTACIÓN. RESPUESTAS ESPERADAS DE LOS ALUMNOS

Se presenta a continuación una serie de actividades y las respuestas esperadas a desarrollar por los alumnos. En vez de "problema" se utiliza la palabra "actividad" por posibles cuestiones de "afectividad". Para algunos alumnos los "problemas matemáticos" son seña de dificultad en su resolución lo que podría afectar negativamente al comienzo de las actividades.

10.1.1 ACTIVIDADES A REALIZAR POR LOS ALUMNOS

Actividad 1

Una fábrica de alfombras elabora solamente alfombras cuadradas de diferentes dimensiones. Queremos alfombrar totalmente el piso de una habitación rectangular de 5 m x 3 m, utilizando el menor número de dichas alfombras sin cortarlas ni superponerlas (Nota: no es necesario utilizar todas las alfombras del mismo tamaño).
Podrías determinar:

a. *¿Cuántas alfombras son necesarias para cubrir totalmente el piso?*

Se espera que los alumnos respondan que son necesarias cuatro alfombras para cubrir totalmente el piso.

¿Cuáles son las medidas, de un lado, de cada alfombra?

Se espera que los alumnos hallen las medidas de un lado de cada alfombra, ellas son: **3m, 2m y 1m.**

Si lo deseas puedes dibujar el rectángulo en el cuadriculado siguiente (figura 187).

Se espera que algunos (o todos) alumnos dibujen la situación propuesta.

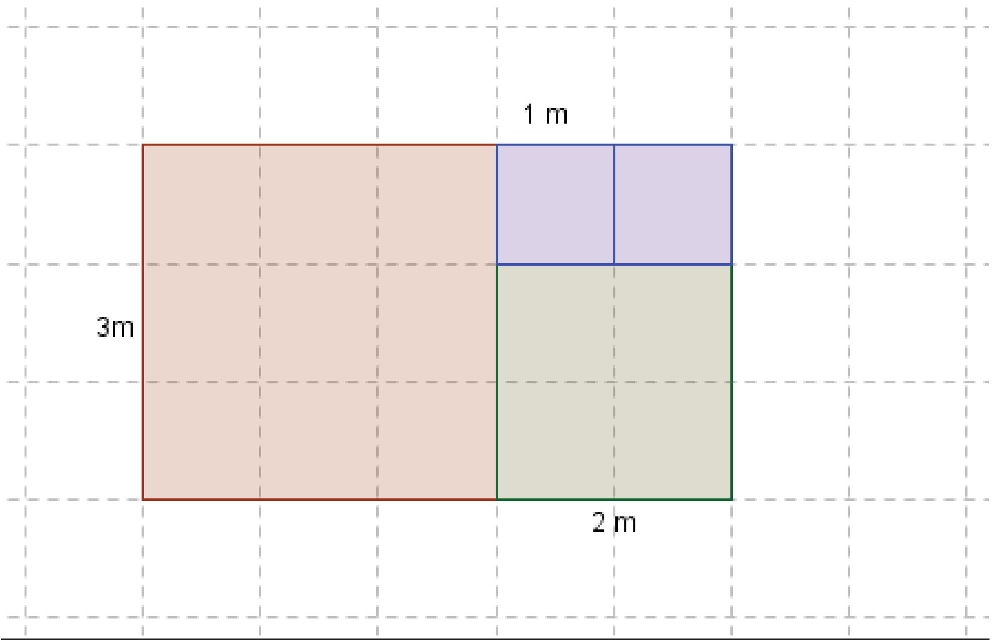


Fig.187. Representación geométrica de la actividad 1.

<u>Actividad 2</u>

Si ahora queremos alfombrar totalmente el piso de una habitación rectangular de 8 m x 5m, utilizando el <u>menor</u> número de dichas alfombras sin cortarlas ni *superponerlas (Nota: no es necesario utilizar todas las alfombras del mismo tamaño).*

Podrías determinar:

a. *¿Cuántas alfombras son necesarias para cubrir totalmente el piso?*

Se espera que algunos alumnos (o todos) dibujen la situación propuesta y respondan que son necesarias 5 alfombras (figura 188).

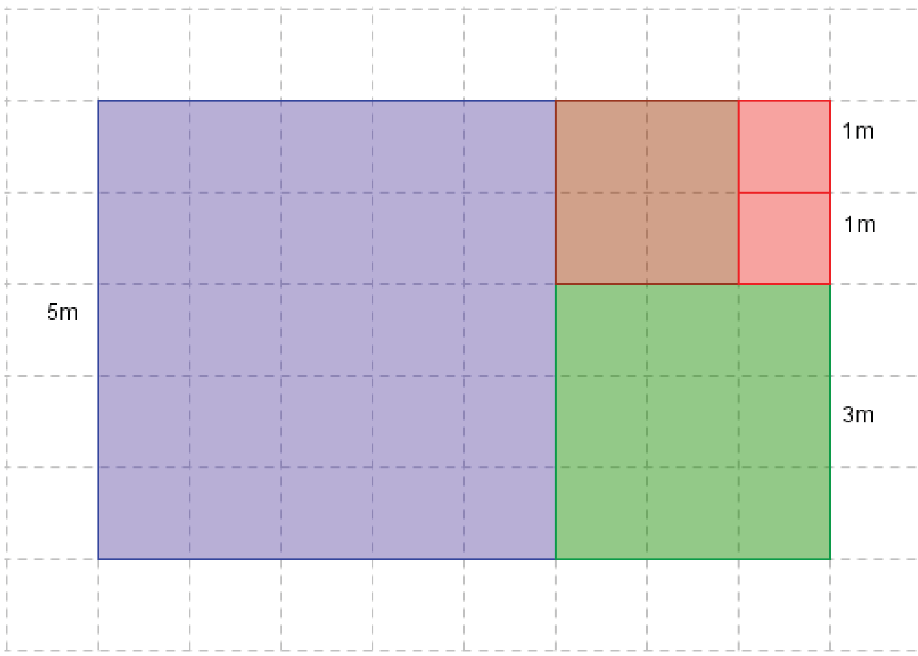


Fig.188. Representación geométrica de la actividad 2.

b. *Luego asígnale un nombre a cada alfombra A1, A2, etc. y completa en los puntos con la longitud de cada lado de dichas alfombras:*

Se espera que algunos alumnos completen los rectángulos dibujados con las medidas de los lados de cada una de las alfombras.

<u>*Actividad 3*</u>

Si ahora queremos averiguar la cantidad de alfombras y la medida de sus lados en <u>cualquier</u> rectángulo:

a. *Con la calculadora realiza la <u>división</u> entre los valores sucesivos de las medidas de los lados de la "sucesión" que hallaste en la actividad 2 :*

Se espera que los grupos de alumnos obtengan la expresión decimal de las divisiones solicitadas:

$\frac{8}{5} = \mathbf{1,6}$, $\frac{5}{3} = \mathbf{1,\widehat{6}}$, $\frac{3}{2} = \mathbf{1,5}$, $\frac{2}{1} = \mathbf{2}$[1]

b. *Escribe la "parte entera"(no tomamos en cuenta la parte decimal) de cada número obtenido en la actividad "a"*

Se espera que los alumnos hallen la parte entera de los cálculos obtenidos en el ítem anterior:

$\frac{8}{5} \to \mathbf{1}$, $\frac{5}{3} \to \mathbf{1}$, $\frac{3}{2} \to \mathbf{1}$, $\frac{2}{1} \to \mathbf{2}$

c. *Ahora aplicamos un "procedimiento", restamos la parte entera a cada fracción obtenida en el punto "a" y elevamos a la potencia -1, y luego hallamos el resultado de cada operación:*

Se espera que los alumnos comiencen, con ayuda del docente, a ver la posibilidad de emplear un procedimiento aritmético que permite obtener la cantidad de alfombras y la medida de ellas.

[1]De aquí en adelante se expresan las respuestas numéricas esperadas, de los alumnos, en color marrón.

$$\left(\frac{8}{5}-\mathbf{1}\right)^{-1}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}=\mathbf{1,\widehat{6}}\ ,\ \left(\frac{5}{3}-\mathbf{1}\right)^{-1}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}=\mathbf{\mathit{1,5}}\ ,\left(\frac{3}{2}-\mathbf{1}\right)^{-1}=\mathbf{\mathit{2}}\ ,\ \left(\frac{2}{1}-\mathbf{2}\right)^{-1}=\ \mathbf{\mathit{error}}$$

d. *¿Qué ocurrió?.........................*

Se espera que los diferentes grupos tomen un primer contacto con el funcionamiento del algoritmo, observen su detención y expresen porque ocurre esto último al obtener el valor "cero".

e. *¿Existe alguna relación entre cada uno de los resultados y el término que le sigue.*

Se espera que los alumnos infieran alguna relación entre los resultados obtenidos al realizar las diferentes divisiones y el término que continúa.

Actividad 4

Tenemos ahora otra habitación de lados 13 m x 8 m.
Halla, con el procedimiento que realizamos en el punto "c", cuántas alfombras cuadradas son necesarias y qué longitudes tienen sus lados, sin necesidad de realizar el dibujo.

Se espera que los alumnos sean capaces de emplear el algoritmo sin necesidad de emplear el registro geométrico. Se intenta con esta actividad que los alumnos comiencen a "despegarse" lentamente de lo geométrico y comiencen a transitar lo aritmético observando la "ventaja" que esto acarrea.

$$\left(\frac{13}{8}-1\right)^{-1}=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}=1,6\ \ ,\ \left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}-1\right)^{-1}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}=\mathbf{1,\widehat{6}}\ ,\ \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}-1\right)^{-1}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\ ,\ \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}-1\right)^{-1}=2$$

a. *Cantidad de alfombras cuadradas necesarias para cubrir la habitación:*

Se espera que el alumno infiera, a partir de la observación de los cálculos realizados, la cantidad de alfombras, que en este caso son seis.

b. *Medida de un lado de cada una de las alfombras:*

Se espera que los alumnos, a partir de lo realizado, hallen la medida del lado de cada una de las alfombras, sin recurrir al dibujo.

Las medidas son: **8m ,5m, 3m, 2m, 1m y 1m**.

Actividad 5

Verifica los resultados obtenidos en la actividad cuatro realizando el dibujo del rectángulo y luego hallando la cantidad de alfombras que lo recubren.

Se espera que los alumnos realicen la representación gráfica del problema planteado y verifiquen sus respuestas a partir de lo dibujado (figura 189). Se trata de una manera de corroborar el empleo correcto del algoritmo en su faz de aprendizaje.

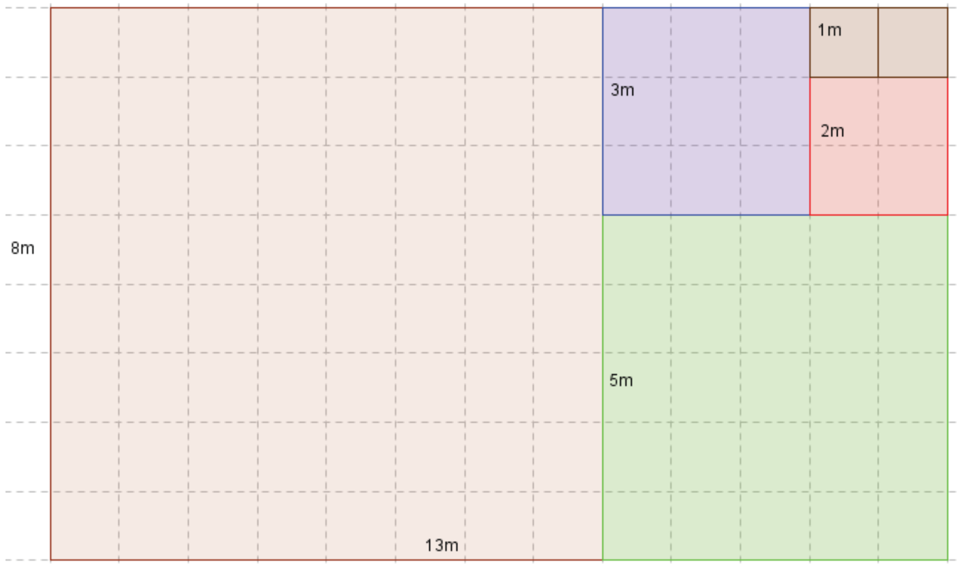


Fig.189. Representación geométrica de la actividad 5.

a. *¿Coinciden los resultados obtenidos en forma gráfica con los obtenidos en forma numérica?*

   Se espera que los grupos de alumnos respondan de acuerdo a sus producciones. Para algunos grupos sí habrá coincidencia mientras que para otros no.

b. *Si los resultados no coinciden revisa la actividad cuatro o el dibujo realizado en esta actividad.*

Se espera que para aquellos grupos de alumnos que no obtuvieron coincidencia revisen lo realizado.

Actividad 6

Si ahora tenemos el número $\sqrt{2}$ y si empleamos el procedimiento numérico que hemos estado trabajando con la calculadora en la actividad cuatro.
Aplicamos el "procedimiento", restamos la parte entera de la raíz cuadrada de dos y elevamos a la potencia -1 y luego con los resultados obtenidos reiteramos el procedimiento:

Respuesta esperada:

$$\left(\sqrt{2}-\mathbf{1}\right)^{-1} = \mathbf{2{,}414213562}\ldots$$
$$(\mathbf{2{,}414213562} - \mathbf{2})^{-1} = \mathbf{2{,}414213562}\ldots$$
$$\vdots \qquad = \qquad \vdots$$

Podrías responder:

a. *¿Hallaste un resultado exacto?, ¿por qué?*

Se esperan diferentes respuestas de acuerdo lo observado por el alumno en la calculadora:

- *No, porque se trata de un número infinito (si logran percibir esto último)*
- *Sí, porque se trata de un número finito (si el alumno se aferra estrictamente a la aproximación decimal que realiza la calculadora).*

b. *¿Es posible continuar con el proceso?, ¿por qué?*

Respuesta esperada: Sí, es posible continuar con el proceso porque devuelve el mismo número.

c. *¿La raíz cuadrada de dos tiene cifras decimales finitas o periódicas?, ¿se trata entonces de un número racional? ¿Por qué?*

Respuesta esperada: La raíz cuadrada de dos tiene cifras decimales infinitas. No se trata de un número racional porque es infinito cuyas cifras decimales no son periódicas.

<u>*Actividad 7*</u>

Vamos a emplear el procedimiento numérico que hemos estado trabajando con la calculadora, en los siguientes números:

a. El número raíz cuadrada de tres
Se espera que los alumnos apliquen el algoritmo y completen aquellos espacios dejados en blanco.

$$(\sqrt{3}-1)^{-1}=1{,}366025404\ldots,$$

$$(1{,}366025404\ldots-1)^{-1}=2{,}732050808\ldots,$$

$$(2{,}732050808\ldots-2)^{-1}=1{,}366025404\ldots,$$

$$(\vdots\ -\ \vdots)^{-1}=\ \vdots$$

Luego responde:
¿Es posible continuar con el proceso?, ¿por qué?

Se espera que los alumnos respondan, para este caso, que el proceso puede continuar.

b. El número $\frac{17}{7}$

$$\left(\frac{17}{7}-2\right)^{-1}=2{,}\widehat{3}$$

$$(2{,}\widehat{3}-2)^{-1}=3\ ,$$

$$(3-3)^{-1}=error$$

¿Es posible continuar con el proceso?, ¿por qué?

Se espera que los alumnos expresen, para este caso, que el proceso no puede continuarse.

Probamos con otros números:

c. El número $\sqrt{2}+1$

$$\left(\left(\sqrt{2}+1\right)-2\right)^{-1}=2{,}4142135652\ldots\ ,$$

$$(2{,}4142135652\ldots\ -2)^{-1}=2{,}4142135652\ldots\ ,$$

$$(\vdots\ -\ \vdots)^{-1}=\ \vdots$$

d. El número $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$$\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)-1\right)^{-1}=1{,}179580427\ldots\ ,$$

$$(1{,}179580427\ldots\ -\mathbf{1})^{-1}=5{,}568535592\ldots\ ,$$

$$(5{,}568535592\ldots\ -\mathbf{5})^{-1}=\mathbf{1},\ 758904831\ldots$$

$$(\ \vdots\ -\ \vdots\ )^{-1}=\ \vdots$$

e. El número $\frac{18}{13}$

$$\left(\frac{18}{13}-1\right)^{-1}=2{,}6$$

$$(2{,}6-2)^{-1}=1{,}\widehat{6}\ ,$$

$$\left(1{,}\widehat{\mathbf{6}}-1\right)^{-1}=\mathbf{1},\mathbf{5}\ ,$$

$$(\mathbf{1},\mathbf{5}-1)^{-1}=2\ ,$$

$$(2-\mathbf{2})^{-1}=error$$

f. El número $\frac{123}{111}$

$$\left(\frac{123}{111}-1\right)^{-1}=1{,}\widehat{108}\ ,$$

$$\left(1{,}\widehat{\mathbf{108}}-1\right)^{-1}=9{,}25\ ,$$

$$(9{,}25-9)^{-1}=4\ ,$$

$$(4-\mathbf{4})^{-1}=error$$

g. El número π

$$(\pi - 3)^{-1} = 7{,}062513306\ldots \;,$$
$$(7{,}062513306\ldots - 7)^{-1} = 15{,}99659441\ldots \;,$$
$$(15{,}99659441\ldots - 15)^{-1} = 1{,}003417231\ldots \;,$$
$$(1{,}003417231\ldots - 1)^{-1} = 292{,}6345986\ldots ,$$
$$(\mathbf{292{,}6345986}\ldots - 292)^{-1} = \mathbf{1{,}575799166}\ldots \;,$$
$$(\mathbf{1{,}575799166}\ldots - 1)^{-1} = 1{,}736716653\ldots \;,$$
$$(\vdots \quad - \quad \vdots)^{-1} = \quad \vdots$$

h. El número e

$$(e - 2)^{-1} = 1{,}392211191\ldots ,$$
$$(1{,}392211191\ldots - 1)^{-1} = 2{,}549646778\ldots \;,$$
$$(2{,}549646778\ldots - 2)^{-1} = 1{,}819350244\ldots \;,$$
$$(1{,}819350244\ldots - 1)^{-1} = 1{,}220479286\ldots ,$$
$$(1{,}220479286\ldots - \mathbf{1})^{-1} = 4{,}535573476\ldots \;,$$
$$(\vdots \quad - \quad \vdots)^{-1} = \quad \vdots$$

En todos los casos que hemos estudiado, ¿en cuáles es posible continuar con el proceso?

Se espera que los alumnos respondan de acuerdo a sus propios resultados luego de aplicar el proceso de FC, que es posible continuar en los ítems 7.c, 7.d, 7.g, 7.h.

¿A qué conclusiones podemos arribar luego de realizar este procedimiento en todos estos números?

Se espera que los alumnos arriben a algunas conclusiones luego de aplicar el algoritmo y analizar los resultados con sus compañeros de grupo.
Las mismas pueden dirigirse hacia:

- La continuación o la detención del algoritmo de acuerdo al número estudiado.
- La relación entre las fracciones y la detención del procedimiento.
- La relación, entre algunas raíces cuadradas de números y los números como π o *e*, y la continuidad del algoritmo.

Actividad 8

Determina si los siguientes números son racionales o irracionales. Escribe cómo te diste cuenta. Si empleaste un procedimiento también anótalo.

a. $\sqrt{\mathbf{2} \times \sqrt{\mathbf{2}} \times \sqrt{\mathbf{2}}}$

Respuesta esperada: racional.

Me di cuenta porque:

- *El procedimiento se detiene.*
- *El número es finito.*

b. $\mathbf{0{,}\widehat{8}}$

Respuesta esperada: racional.

- *El procedimiento se detiene.*
- *El número es infinito y periódico.*

c. $\sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt{\mathbf{3}}$

Respuesta esperada: irracional

- *El procedimiento no se detiene.*
- *El número es infinito y no periódico.*

d. $\sqrt[3]{\mathbf{2}}$

Respuesta esperada: irracional

- *El procedimiento no se detiene.*
- *El número es infinito y no periódico.*

e. $\frac{\mathbf{53}}{\mathbf{83}}$

Respuesta esperada: racional

- *El procedimiento se detiene.*
- *El número es infinito y periódico.*

f. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\mathbf{256}}}}$

Respuesta esperada: racional.

- *El procedimiento se detiene.*
- *El número es finito.*

g. *– 1,3*

Respuesta esperada: racional.

- *El procedimiento se detiene.*
- *El número es finito.*

De acuerdo a los resultados obtenidos en los puntos anteriores: ¿Cuál o cuáles de los números <u>no</u> se pueden expresar como fracción?

Respuesta esperada: no se pueden expresar como fracción los números de los ítems "c" y "d".

<u>Actividad 9</u>

Se prevé que en esta instancia el docente junto a sus alumnos acuda a la memoria didáctica de lo estudiado.

<u>Recordamos lo que ya hemos estado trabajando</u>

a. Recordamos la actividad 1

*Hallaste **4** alfombras.*

Una alfombra de 3m de lado, una alfombra de 2m de lado, dos alfombras de 1m de lado.

Comenzamos por $\frac{5}{3} = [\mathbf{1;1,\ 2}]$ *Esta forma de expresar al número se llama "**fracción continua**"*

lados *cantidad de alfombras*

b. Recordamos la actividad 2:

*Hallaste **5** alfombras.*

Comenzamos por $\frac{8}{5}$ *= [* ***1; 1, 1,2****] Esta es la* ***"fracción continua"***

lados $\qquad \underbrace{}_{\text{cantidad de alfombras}}$ *correspondiente*

c. *Recordamos la actividad 4*

Hallaste ***6*** *alfombras.*

Comenzamos por $\frac{13}{8}$ *= [****1 ; 1 , 1, 1, 2****] Esta es la* ***"fracción continua"***

lados $\qquad \underbrace{}_{\text{cantidad de alfombras correspondiente}}$

d. *Recordamos la actividad 6*

Empleamos el número $\sqrt{2}$ *= [1;2, 2, 2 ,2, 2,* ***…****]*

¿Es necesario agregar los tres puntos suspensivos a la fracción continua? ¿Por qué?

Respuesta esperada: Sí es necesario agregar los puntos suspensivos porque se trata de una FC infinita.

<u>Actividad 10: A realizar con GeoGebra</u>

a. *Ingresa a GeoGebra.*

b. *En la "barra de entrada" (abajo en la pantalla) ingresa el comando llamado: "FracciónContinua"*

Aparece en la barra de entrada lo siguiente:

FracciónContinua[<Número, Nivel>]

c. *Podemos hallar la fracción continua de cualquier número real de la siguiente manera:*

FracciónContinua[5/3, true]

Ingresamos el número *Ingresamos "true" (verdadero en inglés)*

Geogebra nos devuelve: [1; 1, 2]

d. *Si ahora ingresamos el número:*$\sqrt{3}$ *(en Geogebra las raíces se ingresan como potencia de exponente fraccionario) Ej: 3^(1/2)*

FracciónContinua[3^(1/2), true]

Geogebra nos devuelve: [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, . . .]

e. *<u>Prueba con diferentes números</u>, por ejemplo fracciones, raíces, el número pi, el número e, etc.*

Anota los resultados obtenidos al lado de cada número que elegiste.

Ejemplo:5/3= [1; 1, 2]

……….=[……………………………………………………..]

……….=[……………………………………………………..]

……….=[……………………………………………………..]

……….=[……………………………………………………..]

……….=[……………………………………………………..]

……….=[……………………………………………………..]

Se espera que los alumnos muestren diferentes números y obtengan, con ayuda de Geogebra, su expresión en fracción continua.

f. *¿En algunos números el proceso termina? ¿en cuáles? Escríbelos:*

Se espera que los alumnos escriban los números en los cuáles el proceso termina.

g. *¿En algunos números el proceso continúa? ¿en cuáles? Escríbelos:*

Se espera que los alumnos escriban los números en los cuáles el proceso no termina.

h. *¿Qué nombre reciben aquellos números donde el proceso se detiene?*

Se espera que los alumnos determinen que nombre reciben aquellos números donde el algoritmo se detiene. Recordemos que los alumnos cursan el tercer año de la escuela secundaria técnica y, de acuerdo al currículo vigente para el año 2013, deben haber tenido (en teoría) una aproximación en segundo año a los números racionales e inclusive pueden haber tenido contacto con algunos números irracionales.

i. *¿Qué nombre reciben aquellos números donde el proceso continúa?*

Se espera que los alumnos, de acuerdo a lo transitado hasta aquí puedan expresar que se trata de los números irracionales. Probablemente emerjan dificultades. Se trata de una primera aproximación a la noción.

j. *¿Cuáles números del punto "e" se pueden expresar como <u>fracción</u> de enteros, cuyo denominador es diferente de cero?*

Se espera que los alumnos puedan relacionar la noción de fracción con la de número racional y puedan manifestarlo por escrito expresando los números racionales que encuentran en su propia producción.

k. *¿Cuáles números del punto "e" <u>no</u> se pueden expresar como <u>fracción</u> de enteros, cuyo denominador es diferente de cero?*

Se espera que los alumnos puedan diferenciar a la noción de fracción con la de número irracional y puedan manifestar por escrito algunos números que cumplan con esta condición.

Conclusiones establecidas por los estudiantes:

Un número es racional cuando…

Se espera que los alumnos traten de dar una definición de número racional, provisional, basándose en lo ya transitado en las actividades hasta aquí realizadas.

Un número es irracional cuando…

Se espera que los alumnos traten de dar una definición de número irracional, provisional, basándose en lo ya transitado en las actividades hasta aquí realizadas.

<u>*Actividad 11: Aproximación*</u>

Retomamos las actividades pasadas, en ellas estuvimos realizando un procedimiento para conocer si un número es racional o irracional, se trata de la "fracción continua".

Ahora queremos cubrir con cuadrados totalmente una hoja A4 cuyas medidas son 297 mm x 210 mm, utilizando el <u>menor</u> número de dichos cuadrados (Nota: no es necesario utilizar todos los cuadrados del mismo tamaño).

Dada la siguiente hoja A4, podrías determinar:

a. *¿Cuántos cuadrados son necesarios para cubrir totalmente la hoja?*

Se espera que los alumnos puedan dibujar la menor cantidad de cuadrados posibles en la hoja de tamaño A4 (figura 190).

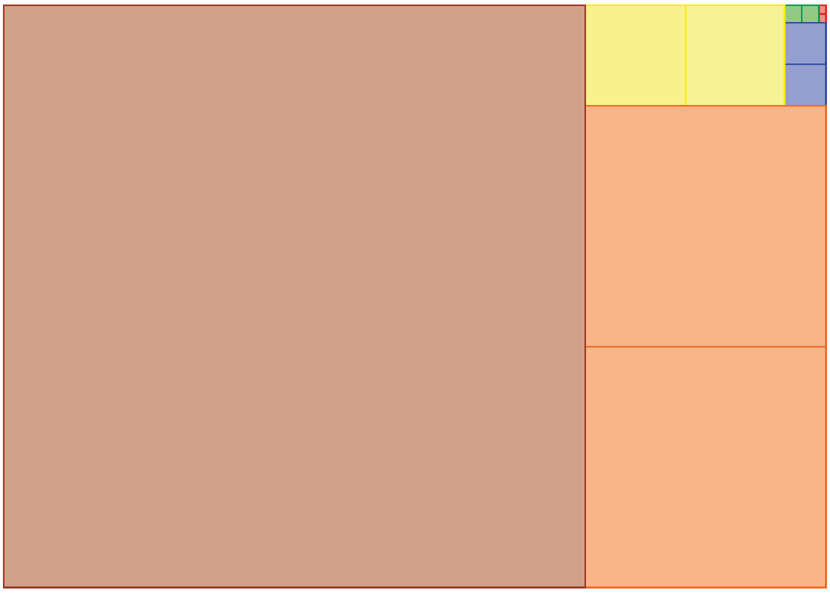


Fig.190. Representación geométrica de la situación "11.a".

Si bien se conoce de antemano que va a ser una tarea que va a producir diferentes respuestas, por parte de los discentes, al estar implicada la noción de aproximación. Se trata de interaccionar lo aproximado y lo exacto entre la medida y la ventaja que ofrece un algoritmo como el de FC. Las medidas implican aproximación que va a depender de los instrumentos empleados, del observador, del corte de la hoja, etc.

b. *Expresa la cantidad de cuadrados como una fracción continua comenzando desde el más "grande", si hay dos cuadrados iguales coloca dos.*

[1 ; 2 , 2 , 2 , 2 , 2]

Se espera que los alumnos reconozcan la diferencia entre "medir" obteniendo un resultado aproximado y lograr un resultado "exacto" por medio de un procedimiento matemático.

c. *Si aplicamos el procedimiento de fracción continua, que ya conocemos, a la medida de los lados de la hoja A4, coinciden los resultados? ¿Por qué?*

Se espera que los alumnos obtengan el desarrollo en FC siguiente:

$$\frac{297}{210} = [\mathbf{1}; \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}]$$

Y luego expresen la coincidencia (en los casos que la aproximación haya sido muy precisa) o en su defecto, si los resultados tienen diferentes grados de aproximación (es lo más probable que ocurra), que no existe tal coincidencia.

d. *Si ahora realizamos el proceso "inverso", dado una expresión en fracción continua ¿hallaremos el número original?, ¿Cómo lo harías?*

Se espera que los alumnos obtengan, con ayuda del docente, la fracción irreducible de origen con las medidas de la hoja.

$$[\mathbf{1}; \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}] = \frac{297}{210} = \frac{99}{70}$$ [2]

Esta última es una tarea que implica un trabajo dificultoso con la calculadora, en sus primeros momentos, hasta alcanzar su rutinización.

e. *Compartimos las soluciones obtenidas con tus compañeros y el profesor. Un representante de cada grupo comunicará lo trabajado en el grupo.*

Se espera que los alumnos comuniquen los resultados obtenidos por cada grupo a modo de socializar lo estudiado.

<u>*Actividad 12:*</u>

a. Aplica el procedimiento obtenido en la actividad 1 al número $\sqrt{2}$ comenzando en el "2" ubicado en el <u>primer lugar</u> después de la parte entera en la fracción continua.

$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots]$

Primer lugar después de la parte entera

Lo expresamos: $\sqrt{\mathbf{2}} \cong [\mathbf{1}; \mathbf{2}]$

¿Por qué aparece este símbolo? Se espera que los alumnos expresen que se trata de una aproximación del número raíz de dos.

$$\sqrt{\mathbf{2}} \cong \mathbf{2}^{-1} + \mathbf{1} = \frac{3}{2} = \mathbf{1,5}$$

---

[2] Se debe tener en cuenta que el resultado que se obtiene luego de usar la calculadora, al aplicar el "proceso inverso", es una fracción de tipo irreducible.

b. Ahora comenzamos con el "2" ubicado en el <u>segundo lugar</u> en la fracción continua.

$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots]$

↑

Segundo lugar después de la parte entera

Lo expresamos: $\sqrt{\mathbf{2}} \cong [\mathbf{1}; \mathbf{2}, \mathbf{2}]$

Se espera que los alumnos apliquen el algoritmo "inverso" y obtengan:

$$\sqrt{2} \cong [1; 2, 2] = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}} = \mathbf{1,4}$$

b.1 Ahora comenzamos con el "2" ubicado en el tercer lugar en la fracción continua.

$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots]$

↑

Tercer lugar después de la parte entera

Lo expresamos: $\sqrt{\mathbf{2}} \cong [\mathbf{1}; \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}]$

Se espera que los alumnos apliquen el algoritmo "inverso" y obtengan una aproximación del número:

$$\sqrt{2} \cong [1; 2, 2,2] = \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{12}} = \mathbf{1,41\widehat{6}}$$

b.2 Continuamos con el "2" ubicado en el cuarto lugar en la fracción continua.

$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots]$

↑

Cuarto lugar después de la parte entera

Lo expresamos: $\sqrt{\mathbf{2}} \cong [\mathbf{1}; \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}]$

Se espera que los alumnos apliquen el algoritmo "inverso" y obtengan:

$$\sqrt{2} \cong [1; 2, 2,2,2] = \frac{\mathbf{41}}{\mathbf{29}} \cong \mathbf{1,413793}$$

b.3 Continuamos con el "2" ubicado en el quinto lugar en la fracción continua.

$\sqrt{2} =$ $[1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots]$

Quinto lugar después de la parte entera

Lo expresamos: $\sqrt{\mathbf{2}} \cong [\mathbf{1}; \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}]$

Se espera que los alumnos apliquen el algoritmo "inverso" y obtengan:

$$\sqrt{2} \cong [1; 2, 2,2,2,2] = \frac{\mathbf{99}}{\mathbf{70}} \cong \mathbf{1,414285}$$

b.4 Continuamos con el "2" ubicado en el sexto lugar en la fracción continua.

$\sqrt{2} =$ $[1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots]$

Sexto lugar

Lo expresamos: $\sqrt{\mathbf{2}} \cong [\mathbf{1}; \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}]$

Se espera que los alumnos apliquen el algoritmo "inverso" y obtengan:

$$\sqrt{2} \cong [1; 2, 2,2,2,2,2] = \frac{\mathbf{239}}{\mathbf{169}} \cong \mathbf{1,4142011}$$

c. Los resultados del punto "b" los podemos "ordenar" en forma creciente y decreciente, completa ordenándolos en esa forma.

Se espera que los alumnos ordenen las aproximaciones obtenidas de menor a mayor y puedan observar que algunos números crecen mientras que otros van decreciendo.

$$1{,}4 \;,\; \mathbf{1,413793} \;,\; \mathbf{1,41420111,414285} \;,\; \mathbf{1,41\hat{6}} \;,\; 1{,}5$$

$\longrightarrow$ $\longleftarrow$

Los números "crecen" *Los números "decrecen"*

c.1 Los números que crecen lo hacen por "defecto" ¿Por qué?

Se espera que los alumnos observen el crecimiento de los números y que determinen que éstos no exceden a los números ubicados a la derecha.

c.2 Los números que decrecen los hacen por "exceso" ¿Por qué?

Se espera que los alumnos observen el decrecimiento de los números y que determinen que éstos exceden a los números ubicados a la izquierda.

c.3 ¿La expresiones decimales se van "aproximando" a un número?

Para esta pregunta se espera que los alumnos tengan diferentes respuestas:

- No se aproxima a ningún número.
- Se aproxima a un número finito.
- Se aproxima a un número infinito.

c.4 De ser así, ¿entre qué números lo encontraríamos?

Se espera que los alumnos observen que podrían encontrar al número entre **1,4** y **1,5**, respectivamente.

c.5 ¿Cuáles serían los valores de las <u>dos primeras cifras decimales exactas</u>?

Se espera que los alumnos muestren las dos primeras cifras decimales: **1,41**

c.6 ¿Cómo te diste cuenta que eran esas cifras?

Los alumnos deberán poder expresar que se trata de las dos primeras cifras decimales de los números que han aproximado por defecto y por exceso.

c.7 ¿Cuáles serían los valores de las <u>cuatro primeras cifras decimales exactas</u>?

Se espera que los alumnos hallen las cuatro primeras cifras decimales observando las aproximaciones realizadas: **1, 4142**

f. *¿Podrías continuar con el procedimiento del punto "a" y hallar la <u>quinta cifra decimal exacta</u> del número?*

Se espera que los alumnos hallen las cinco primeras cifras decimales observando las aproximaciones realizadas: **1, 41421**

g. *¿Podrías continuar con el procedimiento del punto "a" y hallar la <u>sexta cifra decimal exacta</u> del número?*

Se espera que los alumnos hallen las seis primeras cifras decimales observando las aproximaciones realizadas: **1, 414213**

h. *¿Se trata de un número con cifras decimales periódicas?*

Se intenta con esta cuestión que los alumnos puedan preguntarse sobre la periodicidad o aperiodicidad del número que se viene estudiando, observando sus cifras decimales. Si bien como ya se ha señalado en el capítulo 8 esta es una tarea compleja, puede ser de utilidad en estas primeras instancias en la diferenciación entre números reales.

i. *¿Se trata de un número irracional o racional?*

Es posible que los alumnos no puedan percibir la aperiodicidad del número por lo que las respuestas pueden polarizarse hacia alguna de las dos alternativas o hacia ambas.

j. *¿Cómo te diste cuenta?*

Se trata de una pregunta que permite obtener una visión de lo que los alumnos piensan o perciben en relación a la racionalidad o irracionalidad.

<u>Actividad 13a: A realizar con Geogebra</u>

Vamos a representar en la recta numérica real cada uno de los números obtenidos por el proceso de fracción continua.

a. *Ingresa a GeoGebra.*

b. *En la "barra de entrada" (abajo en la pantalla) ingresa cada número de la <u>actividad 1</u>, de la siguiente forma:*

A= (1.5, 0), luego aprieta "enter"

B= (1.4 ,0), luego aprieta "enter"

Si no puedes verlos bien realiza un "zoom" con el ratón.

Si se te desplaza la "vista gráfica" y no puedes observar los puntos, en el último ícono de la barra de herramientas haz clic y luego puedes desplazar la vista gráfica para ubicarlos.

Los números represéntalos en la siguiente recta numérica real (márcalos con color) (figura 191).

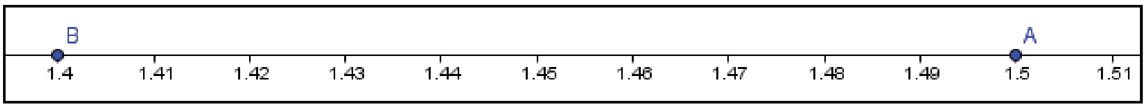


Fig.191. Representación, en Geogebra, de la actividad 13b .

c. *Representa los siguientes dos números. En esta actividad se trata de ver cómo los diferentes puntos, van aproximándose, para ello realizamos nuevamente "zoom" (fig.192).*

C= $(\mathbf{1.41\widehat{6}},\ 0)$

D= $(\mathbf{1.413793}, 0)$

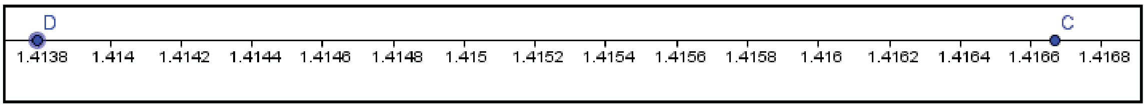


Fig.192. Representación, en Geogebra, de la actividad 13c.

d. *Ahora representa los siguientes dos números y luego realiza "zoom" hasta poder verlos más claramente:*

Se espera que los alumnos completen los pares ordenados y luego los representen con ayuda de Geogebra en la recta numérica (figura 193).

E= $(\mathbf{1.4142011},\ 0)$

F= $(\mathbf{1.414285},\ 0)$

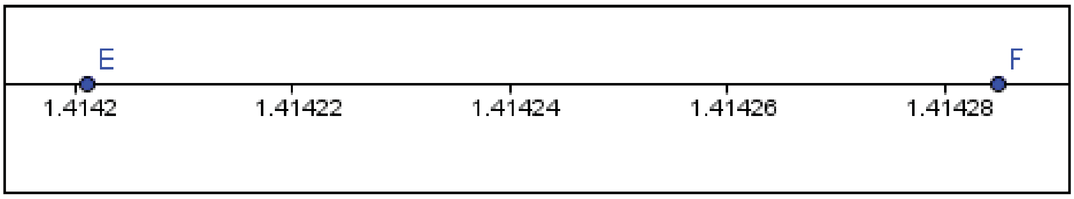


Fig.193. Representación, en Geogebra, de la actividad 13d.

e. *Si ahora representamos* $\sqrt{2}$*, punto "G", ¿Geogebra lo representa más cerca de qué número?*

Se espera que los alumnos observen la representación aproximada del número que se muestra en Geogebra. Es posible obtener diferentes grados de aproximación realizando zoom como se muestra en las figuras siguientes, por lo que se van a obtener diferentes respuestas por parte de los grupos de alumnos (figuras.194, 195, 196 y197).

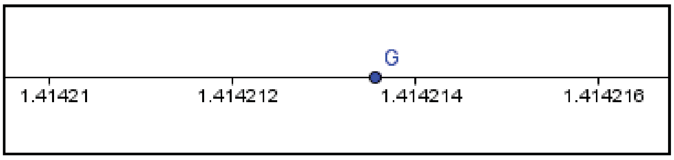


Fig.194. Representación de una aproximación del número $\sqrt{2}$ en la recta numérica.

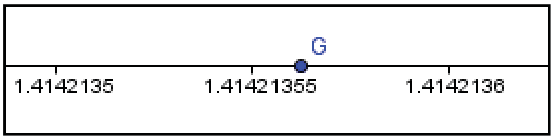


Fig.195. Representación de otra aproximación del número $\sqrt{2}$ en la recta numérica.

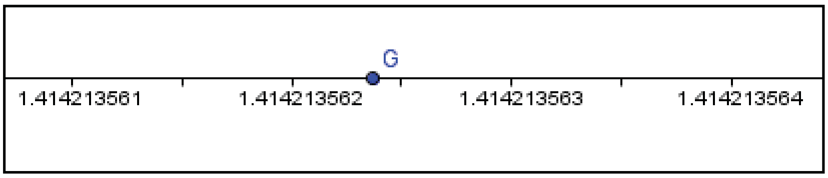


Fig.196. Representación de una "mejor" aproximación del número $\sqrt{2}$ en la recta numérica.

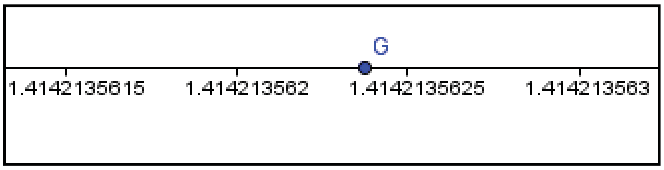


Fig.197. Representación de una aproximación del número $\sqrt{2}$ en la recta numérica según Geogebra.

f. ¿Podríamos continuar con el proceso? ¿Por qué?

Se espera que los alumnos infieran que es posible continuar con el proceso de aproximación del número$\sqrt{2}$ realizando sucesivas aplicaciones de la función zoom del programa.

Actividad 13b:

a. *Aproxima el siguiente número expresado en fracción continua:*

……………………..…………………….= [3; 7, 15, 1, 292, 1,…]

b. *¿De qué número se trata?*

Se trata de una aproximación del númeroπ, los alumnos pueden obtener el número **3,141592654** si aproximan a cinco cocientes parciales. Algunos alumnos pueden asociar esta aproximación al número π, otros no, allí es necesario que el profesor "negocie" el significado de dicho número.

Comprueba con Geogebra, represéntalo (figura 198).

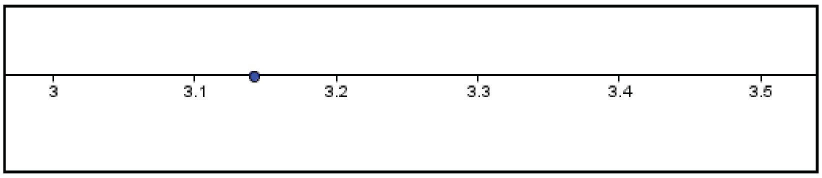


Fig.198. Aproximación del número π en la recta numérica según Geogebra.

c. *El número se encuentra más cerca de 3,1 o de 3,2?*

Se encuentra más cerca de **3,1**.

d. *Si hacemos un zoom el número se encuentra más cerca de 3,1 o de 3,15?*

*Se encuentra más cerca de **3,15** (figura 199).*

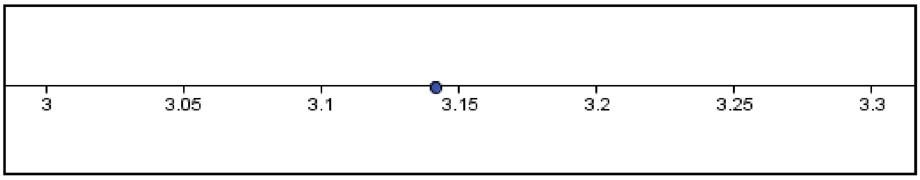


Fig.199. Aproximación, por zoom del número π en la recta numérica según Geogebra.

e. *Si hacemos un nuevo zoom el número se encuentra más cerca de 3,14 o de 3,15? Se encuentra más cerca de **3,14** (figura 200).*

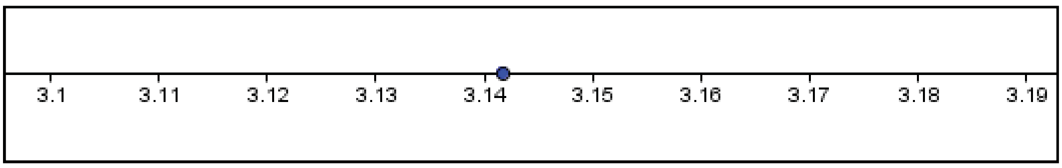


Fig.200. Aproximación, con mayor zoom, del número π en la recta numérica según Geogebra.

f. *Si hacemos un nuevo zoom el número se encuentra más cerca de 3,141 o de 3,142? Se encuentra más cerca de* ***3,142*** *(figura 201).*

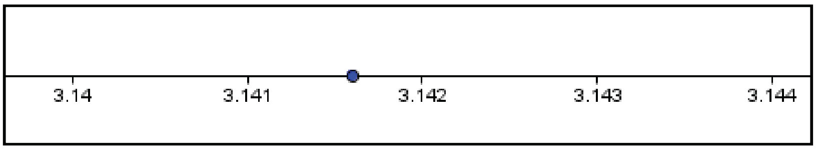


Fig.201. Aproximación, a tres decimales, del número π en la recta numérica según Geogebra.

g. *Si hacemos un nuevo zoom el número se encuentra más cerca de 3,1415 o de 3,1416? Se encuentra más cerca de* ***3,1416*** *(figura 202).*

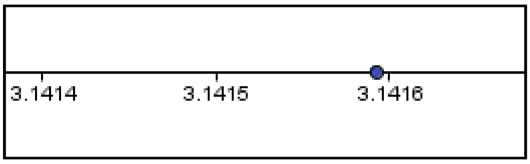


Fig.202. Aproximación, a cuatro decimales, del número π en la recta numérica según Geogebra.

h. *Si hacemos un nuevo zoom el número se encuentra más cerca de 3,14159 o de 3,1416? Se encuentra más cerca de* ***3,14159*** *(figura 203).*

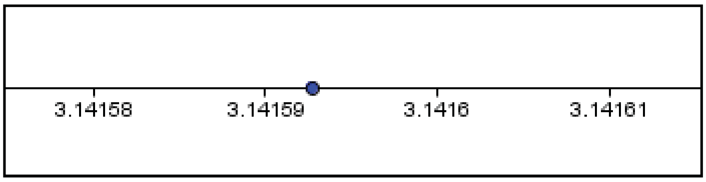


Fig.203. Aproximación, a cinco decimales, del número π en la recta numérica según Geogebra.

i. *Si hacemos un nuevo zoom el número se encuentra más cerca de 3,14159 o de 3,141595? Se encuentra más cerca de* ***3,141595*** *(figura 204).*

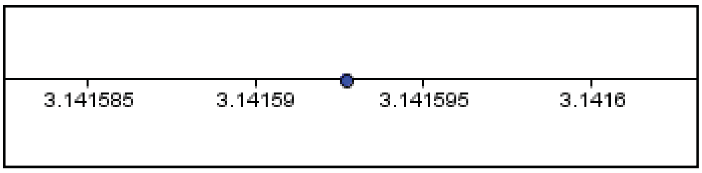


Fig.204. Aproximación, por zoom a cinco decimales, del número π en la recta numérica según Geogebra

j. *Si hacemos un nuevo zoom el número se encuentra más cerca de 3,141592 o de 3,141594? Se encuentra más cerca de* ***3,141592*** *(figura 205).*

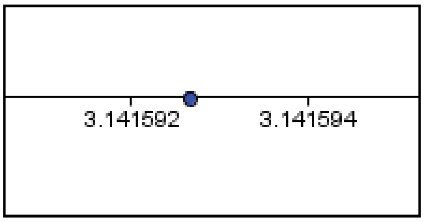


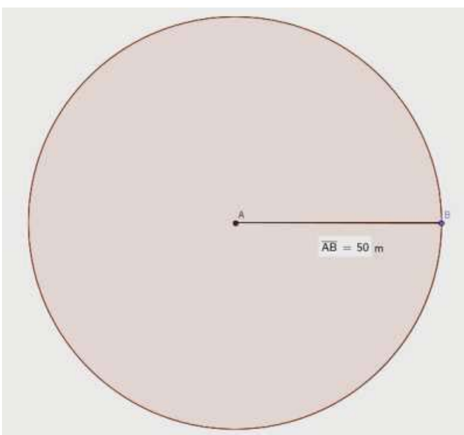
Fig.205. Aproximación, a seis decimales, del número π en la recta numérica según Geogebra.

¿Podríamos continuar aproximándonos? ¿Por qué?....................

Se espera que los alumnos observen y extraigan conclusiones que es posible continuar el proceso de aproximación, aunque para algunos alumnos este proceso puede detenerse. Son las limitaciones del software las que inciden en las posibles respuestas de los alumnos, allí el docente deberá negociar el significado haciendo observar a ellos las limitaciones de la herramienta.

Actividad 14:*"En busca del área perfecta"*

Queremos sembrar césped en una plaza circular de 50 m de radio ¿cuál será el área a cubrir? Recordamos la fórmula del área de un círculo: $a = \pi \cdot r^2$



a. *Dibuja una circunferencia de 50 m de radio.*

b. *Con el puntero sobre los ejes cartesianos y con el botón derecho del ratón, elimina dichos ejes.*

c. *En la barra de herramientas haz clic en "vista"y luego en "CAS". Aparecerá la ventana de cálculo.*

d. *En dicha ventana realizaremos los cálculos del área de la plaza circular:*

d.1 Utilizamos la parte entera obtenida en la actividad 14. ¿Cuánto vale dicha área si utilizamos $\pi \cong 3$?

a =...........

Se espera que los grupos realicen los cálculos y luego respondan **7500 m^2**.

d.2. ¿Cuánto vale dicha área si utilizamos la primera cifra decimal(décimos) $\pi \cong 3,1$?

a =............

Se espera que los grupos realicen los cálculos y luego respondan **7750 m^2**.

d.3. ¿Cuánto vale dicha área si utilizamos la segunda cifra decimal (centésimos) $\pi \cong 3,14$?

a =...........

Se espera que los grupos respondan **7850 m^2**.

d.4 ¿Cuánto vale dicha área si utilizamos la tercera cifra decimal (milésimos) $\pi \cong 3,141$?

a =...........

Se espera que los grupos respondan **7852,5 m^2**.

e. *¿Cuánto vale dicha área si utilizamos la cuarta cifra decimal(diez milésimos) $\pi \cong 3,1415$?*

a =.................

Se espera que los grupos respondan **7853,75 m^2.**

f. *¿Cuánto vale dicha área si utilizamos π según todas las cifras que nos brinda la calculadora?*

a =.................

Se espera que los grupos respondan **7853,981634 m^2**.

g. *Comparamos nuestros resultados con el que nos brinda Geogebra, halla el área utilizando el comando "área"*

Haz "clic" sobre el círculo.

h. *¿Cuál es el valor de área utilizada por el programa?*

a = ……

Se espera que los alumnos respondan **7853,98 m²** (figura 206).

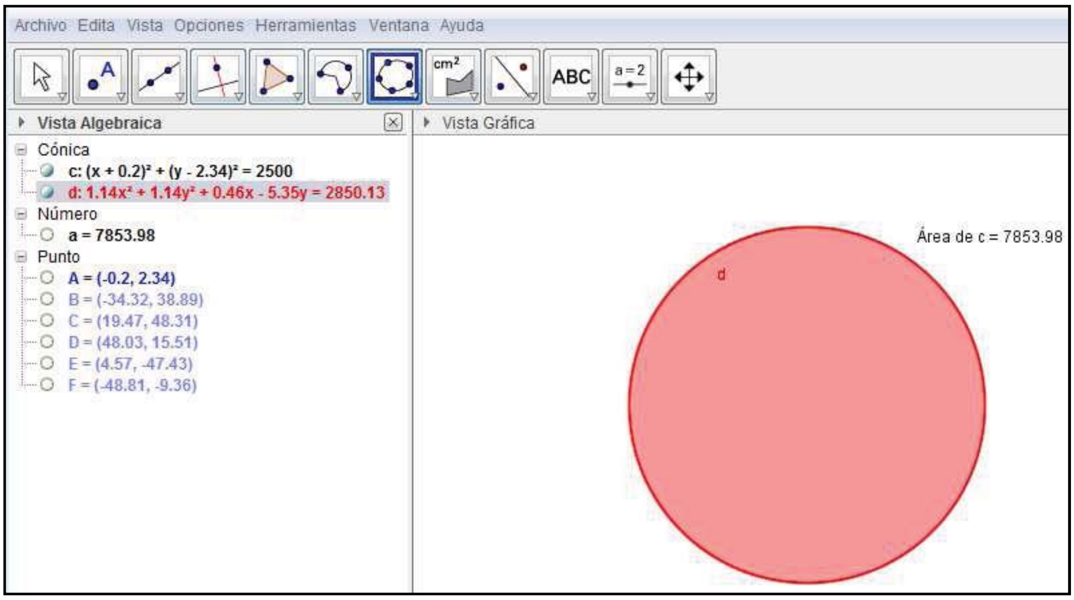


Fig.206. Aproximación del área del círculo de la actividad 15 según Geogebra.

i. *¿Cuál es el valor de π utilizado por Geogebra?*

π =…………

Se espera que los alumnos respondan que el valor de π utilizado por Geogebra es **3,14159.**

j. *¿Cuánto vale el área si utilizamos π según todas las cifras que nos brinda una calculadora?*

a = ………

Se espera que los grupos respondan **7853,981634 m²**

k. *¿Qué diferencias encuentras con las anteriores respuestas?*

Se espera que los grupos de alumnos comparen este último resultado con los anteriormente hallados y obtengan algunas conclusiones.

l. *¿Cuál es la "mejor" área obtenida? ¿Por qué?*

Se espera que los grupos de alumnos determinen cuál es el valor que mejor aproxima la situación planteada.

m. *¿Cuál de todas las aproximaciones utilizarías para comprar el césped?, ¿Por qué?*

Se espera que los grupos de alumnos determinen cuál de todas las aproximaciones emplearía para comprar el césped y que luego expliquen porque.

Actividad 15

a. Dos vendedores de resmas de papel, formato "legal", quieren vender sus productos a una librería. El vendedor "A" dice que, a la salida de fábrica, las hojas tienen las siguientes medidas: 356 mm x 216 mm. Dicho vendedor afirma que la menor cantidad de cuadrados (pueden tener diferentes medidas) que se pueden dibujar en la hoja son 12.El vendedor "B" dice que, a la salida de fábrica, las hojas tienen las siguientes medidas: 355,6 mm x 215,9 mm. Dicho vendedor afirma que la menor cantidad de cuadrados (pueden tener diferentes medidas) que se pueden dibujar en la hoja son 9.
¿Quién/quiénes dicen la verdad? Justifica tu respuesta.

i.	*El vendedor "A" solamente.*	*(.....)*
ii.	*El vendedor "B" solamente.*	*(.....)*
iii.	*Ambos vendedores.*	*(X)*
iv.	*Ninguno de los vendedores*	*(.....)*

Se espera que los alumnos obtengan el desarrollo en fracción continua para ambos números:

$$\frac{\mathbf{356}}{\mathbf{216}} = [\mathbf{1}; \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{5}, \mathbf{3}] \;\; ; \;\; \frac{\mathbf{355{,}6}}{\mathbf{215{,}9}} = [\mathbf{1}; \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{5}]$$

Por lo que se obtienen **12** cuadrados para el vendedor “A” y **9** cuadrados para el vendedor “B”. Ambos dicen la verdad.

Si fueses el dueño de la librería ¿a quién le comprarías las resmas de papel? ¿Por qué?

Se espera que los grupos de alumnos discutan y luego determinen, basándose en los resultados obtenidos, a quién le compraría las resmas de papel.
Se prevé diversidad en las respuestas a este punto.

Comprueba tus respuestas solicitándole al profesor una hoja de papel “legal” y dibujando la menor cantidad de cuadrados posibles. ¿A quién se “aproxima” más la respuesta, a la del vendedor “A” o a la del “B”? ¿Por qué?

Se espera que los grupos de alumnos empleen una hoja de papel legal y dibujen en ella la menor cantidad de cuadrados posibles. Luego observen que se trata solamente de una aproximación a los valores exactos obtenidos por medio de la FC. Diferentes respuestas pueden obtener los alumnos de acuerdo a los dibujos realizados y a las conclusiones halladas.

Actividad 16:

Un procesador de texto muestra la ventana de “diseño de página” como muestra la figura:

Un arquitecto necesita dibujar en alguna de esas hojas 13 cuadrados (pueden tener diferentes medidas) y cubrir con ellos toda la superficie, los cuadrados están dispuestos de la siguiente manera (en fracción continua):

H= [1; 2 ,2 ,3 ,1 ,4]

a. *¿En cuál o cuáles de esos formatos de hoja podría dibujarlos sin que falte o sobre ningún cuadrado? ¿Cómo te diste cuenta?, ¿empleaste algún procedimiento para cada hoja?*

Se espera que los alumnos determinen que son las medidas de la hoja A6 la que cumple con las condiciones solicitadas.

También se espera que los grupos de alumnos obtengan el número racional que determina la FC correspondiente:

$$\boldsymbol{H} = [\mathbf{1}; \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{4}] = \frac{\mathbf{148}}{\mathbf{105}}$$

b. *¿Podrías haber llegado a la misma conclusión de otra manera?, ¿cuál?*
   Se espera que los alumnos discutan en grupos si es posible o no obtener la misma conclusión de otra forma.

c. *A través de una puesta en común comparte con tus compañeros la o las soluciones halladas.*
   Se espera que los grupos de alumnos compartan sus resultados y discutan sobre los mismos.

Actividad 17

Marcos necesita conocer las medidas de una hoja formato A7, recibe información que el cociente entre el largo de la hoja y el ancho es aproximadamente $[1; 2{,}2{,}1{,}1{,}2{,}2]$ *(expresado en fracción continua) ¿Qué medidas, en milímetros, tienen el largo y el ancho de la hoja?*
Se espera que los grupos de alumnos obtengan el número racional que determina la FC correspondiente:

$$[\mathbf{1}; \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}] = \frac{\mathbf{105}}{\mathbf{74}}$$

Las medidas del ancho y del largo, en milímetros, de la hoja son: 105 mm y 74 mm, respectivamente.

Actividad 18

a. *Halla las siguientes aproximaciones del número* $\sqrt[3]{15}$ *y luego indica si dichas aproximaciones son por "defecto" o por "exceso".*

$\sqrt[3]{15} \cong [2] = 2$ *(Defecto)*

$\sqrt[3]{15} \cong [2; 2] = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2{,}5}$ *(Exceso)*

$\sqrt[3]{15} \cong [2; 2{,}6] = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{13}} = \mathbf{2{,}\overline{461538}}$ *(Defecto)*

$\sqrt[3]{15} \cong [2; 2{,}6{,}1] = \frac{\mathbf{37}}{\mathbf{15}} = \mathbf{2{,}4\widehat{6}}$ *(Exceso)*

$\sqrt[3]{15} \cong [2; 2{,}6{,}1{,}8] = \frac{\mathbf{318}}{\mathbf{133}} \cong \mathbf{2{,}46616}$*(Defecto)*

$\sqrt[3]{15} \cong [2; 2{,}6{,}1{,}8{,}1] = \frac{\mathbf{365}}{\mathbf{148}} = \mathbf{2{,}46\overline{621}}$ *(Exceso)*

$\sqrt[3]{15} \cong [2; 2{,}6{,}1{,}8{,}1{,}10] = \frac{\mathbf{3978}}{\mathbf{1613}} \cong \mathbf{2{,}4662120}$ *(Defecto)*

$\sqrt[3]{15} \cong [2; 2{,}6{,}1{,}8{,}1{,}10{,}1] = \frac{\mathbf{4343}}{\mathbf{1761}} \cong \mathbf{2{,}4662123}$ *(Exceso)*

b. *Ordena las respuestas del ítem anterior, por "defecto" y por "exceso":*

$$\mathbf{2} < \sqrt[3]{15} < \mathbf{2{,}5}$$

$$\mathbf{2{,}\overline{461538}} < \sqrt[3]{15} < \mathbf{2{,}4\widehat{6}}$$

$$\mathbf{2,46616} < \sqrt[3]{15} < 2{,}46\overline{\mathbf{621}}$$

$$\mathbf{2,4662120} < \sqrt[3]{15} < \mathbf{2,4662123}$$

Actividad19:

Aproxima, con una calculadora o con geogebra, por defecto y por exceso, los siguientes números irracionales:

a. *El número* $\sqrt{5}$

$2<\sqrt{5}<3$ *(al entero)*

$2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3$ *(a los décimos)*

$2{,}23<\sqrt{5}<2{,}24$ *(a los centésimos)*

$2{,}236<\sqrt{5}<2{,}237$ *(a los milésimos)*

$2{,}2360<\sqrt{5}<2{,}2361$ *(a los diez milésimos)*

b. *El número "e"*

2,7$<e<$**2,8** (al entero)

2,71$<e<$**2,72** (a los décimos)

2,718$<e<$**2,719** (a los centésimos)

2,7182$<e<$**2,7183** (a los milésimos)

2,71828$<e<$**2,71829** (a los diez milésimos)

c. *El número* "$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ "

1,6$<\phi<$**1,7** (Al entero)

1,61$<\phi<$**1,62** (A los décimos)

1,618$<\phi<$**1,619** (A los centésimos)

1,6180$<\phi<$**1,6181** (A los milésimos)

1,61803$<\phi<$**1,61804** (A los diez milésimos)

Tras la realización de todas estas actividades el docente propone a los estudiantes un trabajo práctico de integración de los conocimientos adquiridos.

10.1.2 TRABAJO PRÁCTICO INTEGRADOR: "DE LOS RACIONALES A LOS IRRACIONALES"

1. *Un terreno rectangular de 188m x 123m se quiere dividir en lotes cuadrados (pueden tener diferentes medidas), la menor cantidad posible., para plantar diferentes especies de flores.*

   a. *¿En cuántos lotes es posible dividir el terreno?*

   b. *¿Qué medida tiene el lado de cada uno de los terrenos.*

2. *Un carpintero quiere cortar una plancha de madera de 257 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible (pueden tener diferentes medidas).*

   a) ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado?

   b) ¿Cuántos cuadrados se pueden obtener de la plancha de madera?

3.

   a. *Aproxima el número* $\sqrt{8}$ *<u>por fracción continua</u>, ordena los resultados por defecto y por exceso:*

   ………………$<\sqrt{8}<$ ……………..

   ………………$<\sqrt{8}<$ ……………..

   ………………$<\sqrt{8}<$ ……………..

   b. *Aproxima el número* $\sqrt{8}$ *<u>por números decimales</u>, por defecto y por exceso:*

   ………………$<\sqrt{8}<$ …………….. *(Al entero)*

   ………………$<\sqrt{8}<$ …………….. *(A los décimos)*

   ………………$<\sqrt{8}<$ …………….. *(A los centésimos)*

   ………………$<\sqrt{8}<$ …………….. *(A los milésimos)*

   ………………$<\sqrt{8}<$ …………….. *(A los diez milésimos)*

   c. *¿Cuál procedimiento te parece logra una mejor aproximación? Justifica.*

   ……………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………

4. *Se te encarga aproximar las medidas de un terreno rectangular, dicho terreno <u>se aproxima</u> a una longitud en largo de* $170 \cdot \sqrt{117}m$ *y en ancho de* $100 \cdot \sqrt{113}m$*:*

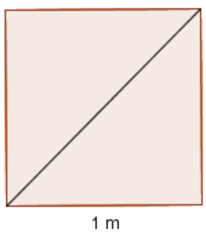
a. *Si aproximas dichas medidas <u>al entero,</u> indica qué medidas tiene el terreno.*
b. *¿Cuál es la menor cantidad de parcelas cuadradas (pueden tener diferentes medidas) que se pueden delimitar en dicho terreno?*
c. *¿Qué medidas tienen los lados de cada parcela?*
d. *Ahora aproxima las longitudes del terreno <u>a los décimos</u> e indica que medidas posee.*
e. *¿Cuál es la menor cantidad de parcelas cuadradas (pueden tener diferentes medidas) que se pueden delimitar en dicho terreno?*
f. *¿Qué medidas tienen los lados de cada parcela?*
g. *¿Qué aproximación es más conveniente tomar, la "a" o la "b"? ¿por qué?*

5. *Suponiendo que la tierra es una esfera cuyo radio mide 6378 km, si se toman 3,14 o 3,1415926535 como aproximaciones de* π:

Volumen de la esfera$=\frac{4}{3}\pi.r^3$

a. *¿Cuáles son los volúmenes en cada caso?*
b. *¿Es lo mismo tomar una u otra aproximación? ¿por qué?*
c. *¿Por qué ocurre esto cuando se presenta un número como* π *en una fórmula?*

6. *En el taller de la escuela un maestro te solicita averiguar la medida de la diagonal de una plancha metálica cuadrada de 1m de lado.*



a. *¿Es posible obtener una medida "exacta" de la diagonal? ¿por qué?*
b. *¿De qué número se trata?*
c. *Aproxima dicha medida a los décimos y a los centésimos.*

Capítulo 11

Descripción de la experimentación y resultados

En este capítulo se estudian los aspectos epistemológicos y didácticos de la secuencia de enseñanza puesta en aula a lo largo de dieciocho sesiones. Se analizan quince de dichas sesiones a través de configuraciones epistémicas y didácticas, la interacción entre objetos matemáticos presentes en cada una de las sesiones y sus conflictos semióticos asociados. Se estudia además el acoplamiento entre el holosignificado de la noción de fracción continua y la de número irracional (secciones 9.1 a 9.14). Por último se muestran los resultados obtenidos, por los alumnos del grupo experimental, en una evaluación de proceso que sirve de comparación con los producidos por los discentes de los grupos de control.

11.1 SESIÓN 1: EL COMIENZO DE UNA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

11.1.1 CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA 1: LA INTRODUCCIÓN DE UN ALGORITMO

El profesor comienza la clase expresando verbalmente las consignas de trabajo en grupo de los alumnos.

Se conforman diecisiete grupos de dos alumnos cada uno, uno de tres y dos de un alumno con un total de treinta y dos discentes.

El docente señala que se puede trabajar con calculadora las diferentes situaciones.

Los alumnos comienzan a trabajar leyendo la primera consigna de la situación problemática.

A medida que transcurre el tiempo son varios alumnos los que solicitan la presencia del profesor por dificultades en la interpretación de la consigna. Finalmente el profesor, públicamente, expone las consignas intentando aclarar dudas pero induciendo el registro gráfico al dibujar en el pizarrón un rectángulo e "indicar" como puede dibujarse alfombras cuadradas de mayor lado posible dentro del rectángulo (figura 207).

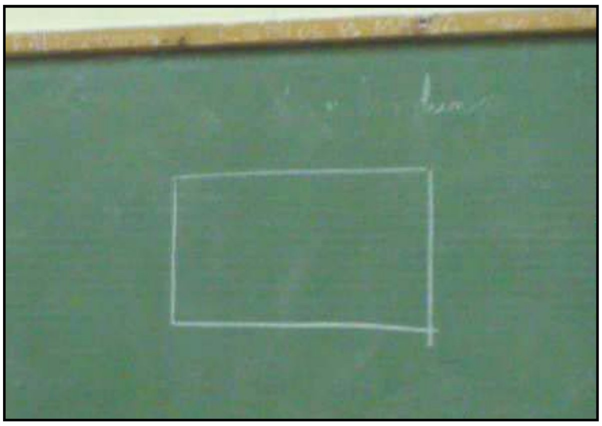


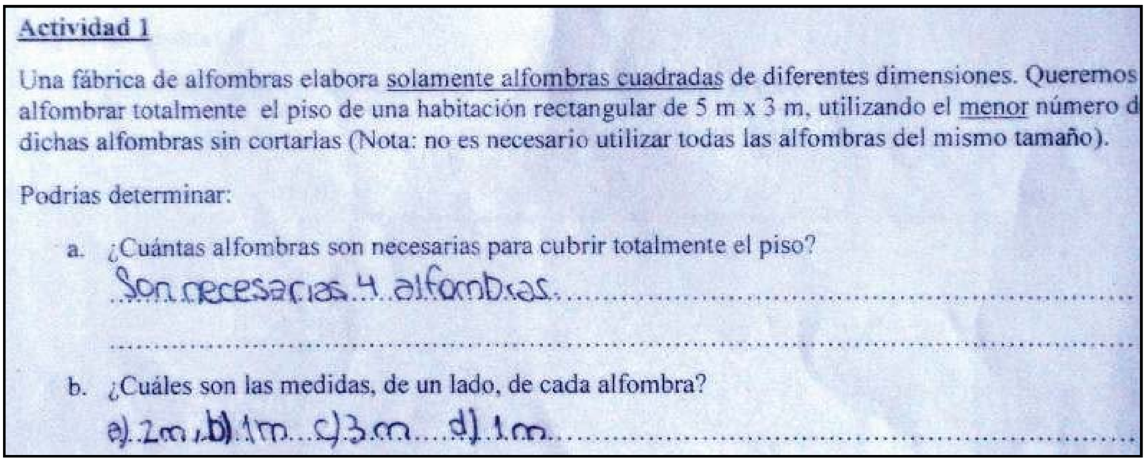
Fig. 207. El profesor explica, en el pizarrón, cómo es posible representar alfombras cuadradas dentro de un rectángulo.

En los grupos surge la problemática del "menor número de alfombras" algo que ya se había previsto que podría ocurrir de acuerdo a la experiencia piloto (Cap. 8).

También en algunos grupos aparece la problemática de dibujar las alfombras comenzando por la de mayores dimensiones posibles pero siempre cuadrada.

El profesor en el minuto quince (M15) aclara dudas de un grupo al indicar que la consigna expresa que "no es necesario utilizar alfombras del mismo tamaño".

La mayoría de los grupos responden sin inconvenientes la actividad 1 (figura 208).



Actividad 1

Una fábrica de alfombras elabora solamente alfombras cuadradas de diferentes dimensiones. Queremos alfombrar totalmente el piso de una habitación rectangular de 5 m x 3 m, utilizando el menor número d dichas alfombras sin cortarlas (Nota: no es necesario utilizar todas las alfombras del mismo tamaño).

Podrías determinar:

a. ¿Cuántas alfombras son necesarias para cubrir totalmente el piso?
Son necesarias 4 alfombras.

b. ¿Cuáles son las medidas, de un lado, de cada alfombra?
a) 2m, b) 1m, c) 3m, d) 1m

Fig. 208. Respuestas de un grupo de alumnos a la primera actividad.

Todos los grupos emplearon el cuadriculado sugerido por el docente en la actividad propuesta (figura 209).

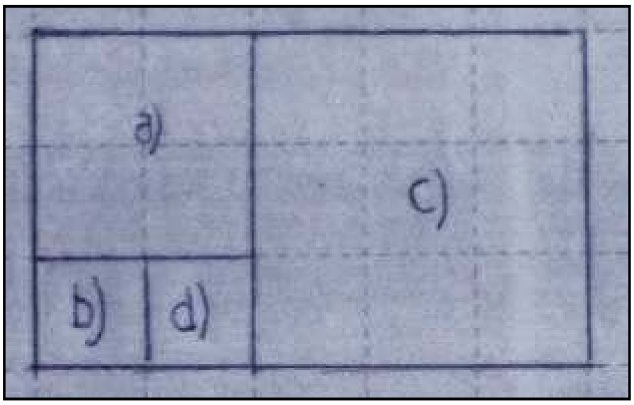


Fig. 209. Empleo de cuadriculado, por un grupo, para responder a las consignas realizadas.

Solo dos grupos no logran una representación geométrica de acuerdo a las consignas propuestas y al análisis a priori realizado en el capítulo ocho (figura 210).

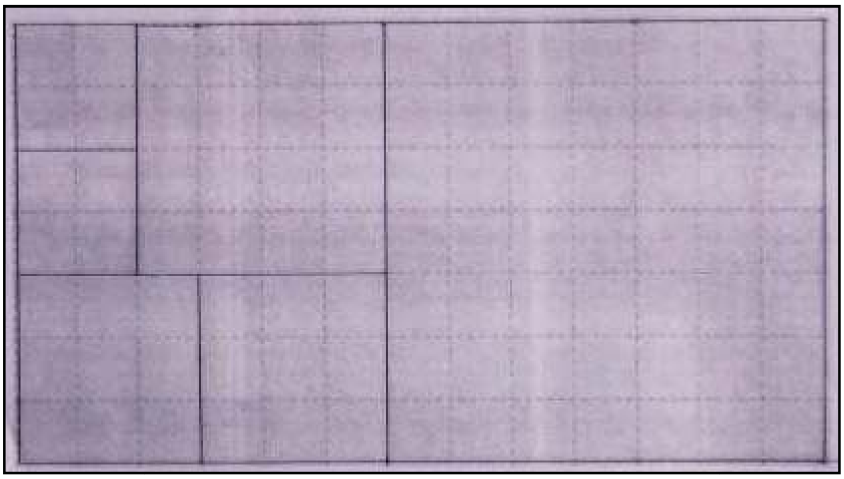


Fig. 210. Respuesta geométrica errónea de un grupo de alumnos a la primera actividad.

El docente continúa observando e interactuando con los distintos grupos. Algunos de ellos comienzan a realizar la actividad dos la cual es respondida correctamente por siete grupos (figuras 211 y 212).

De los dos grupos que no logran una representación geométrica satisfactoria, un grupo responde incorrectamente empleando mayor cantidad de cuadrados, luego modifica su respuesta por interacción con otros alumnos y el otro grupo no responde la consigna.

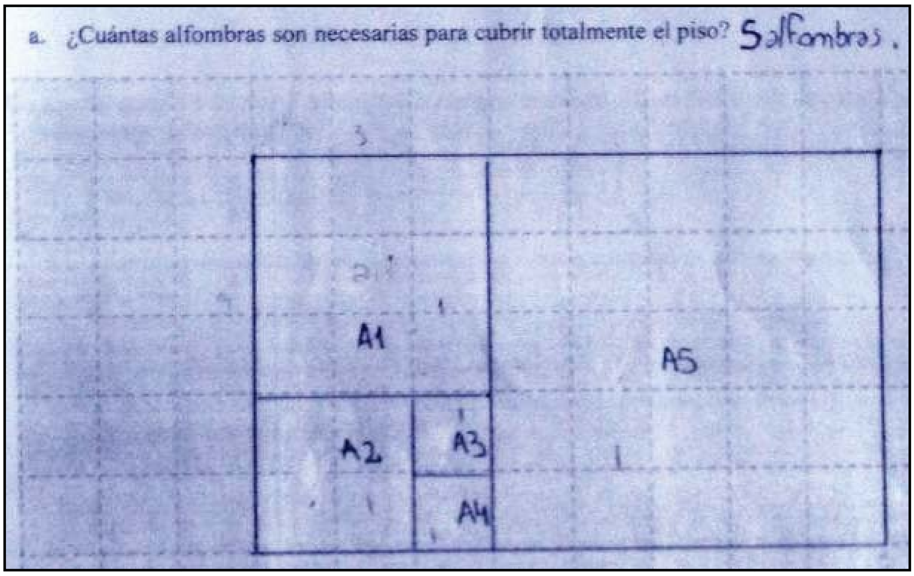
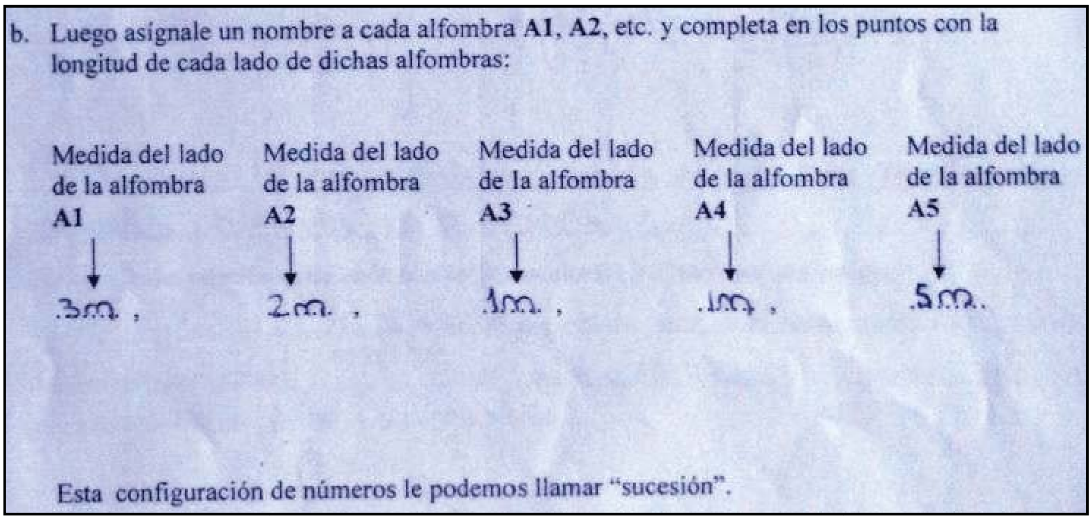


Fig. 211. Respuestas de un grupo de alumnos a la actividad dos.


b. Luego asígnale un nombre a cada alfombra **A1**, **A2**, etc. y completa en los puntos con la longitud de cada lado de dichas alfombras:

Medida del lado de la alfombra **A1**	Medida del lado de la alfombra **A2**	Medida del lado de la alfombra **A3**	Medida del lado de la alfombra **A4**	Medida del lado de la alfombra **A5**
↓	↓	↓	↓	↓
.3m. ,	2m. ,	.1m. ,	.1m ,	.5m.

Esta configuración de números le podemos llamar "sucesión".

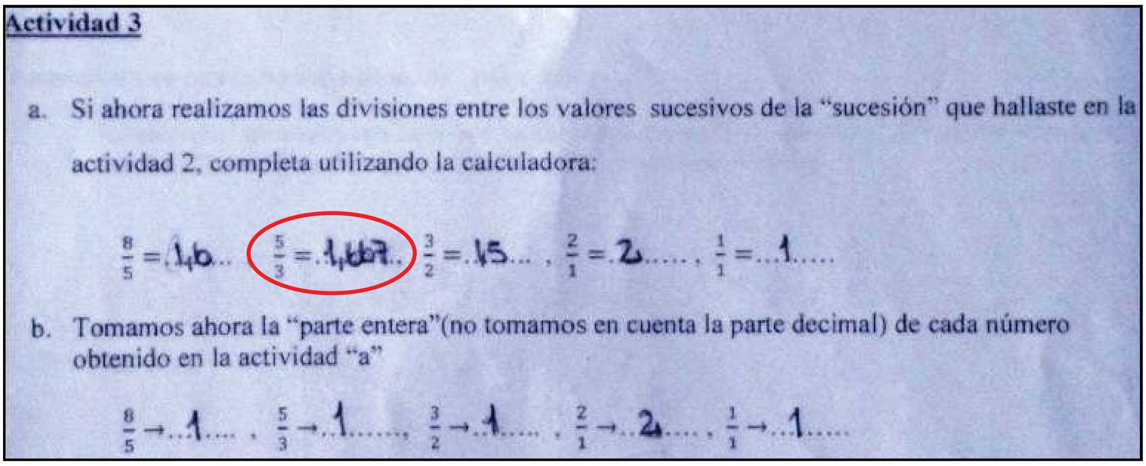
Fig. 212. Respuestas de un grupo de alumnos a la segunda actividad.

En el minuto treinta y cuatro (M34) un grupo de alumnos que se encuentra resolviendo la actividad 3 no comprende la consigna de trabajo, el profesor intenta que recuerden la actividad 2 así de esta manera puedan resolver dicha actividad. Allí el docente produce un gesto memorial.

La actividad tres parece responder a una necesidad didáctica del profesor, no de los alumnos en relación a la misma.

Si bien, como se señala en el capítulo ocho, no se trata de realizar una secuencia de situaciones adidácticas a la manera de Brousseau (2007), se promueve una secuencia de situaciones que permitan la introducción más o menos "suave" del algoritmo de fracción continua (FC).

La mayoría de las respuestas, de los grupos de alumnos, a las actividades 3a y 3b son correctas (figura 213).



Actividad 3

a. Si ahora realizamos las divisiones entre los valores sucesivos de la "sucesión" que hallaste en la actividad 2, completa utilizando la calculadora:

$\frac{8}{5}$ = 1,6... $\frac{5}{3}$ = 1,667.. $\frac{3}{2}$ = 1,5... , $\frac{2}{1}$ = 2..... , $\frac{1}{1}$ = 1.....

b. Tomamos ahora la "parte entera"(no tomamos en cuenta la parte decimal) de cada número obtenido en la actividad "a"

$\frac{8}{5}$ → 1.... , $\frac{5}{3}$ → 1......, $\frac{3}{2}$ → 1..... , $\frac{2}{1}$ → 2.... , $\frac{1}{1}$ → 1.....

Fig. 213. Respuestas de un grupo de alumnos a la actividad tres.

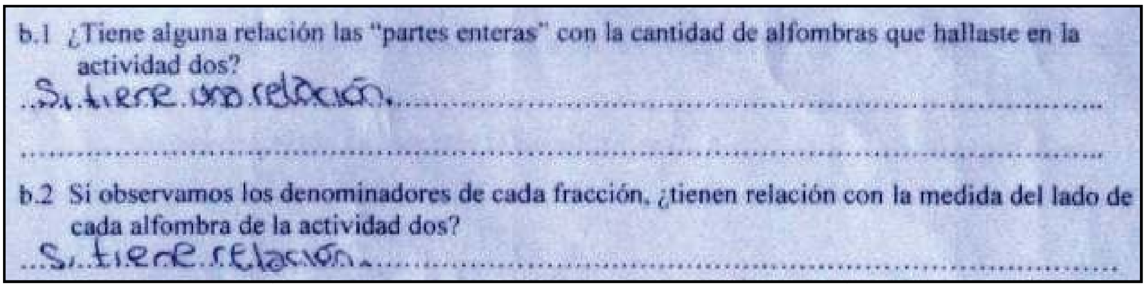
Los alumnos, en algunos casos, aproximan por truncamiento al número $\frac{5}{3}$, inclusive producen una aproximación por redondeo "extraña" dado el poco espacio disponible para responder (círculo rojo en fig.214). Esto último se puede deber al empleo de la calculadora como un medio de obtener respuestas a los cálculos ya que "copian" las cifras decimales obtenidas por redondeo, en otros casos ellos las truncan.

Cinco grupos responden correctamente que se trata de un número racional periódico y escriben el periodo en la primera cifra decimal. Esto último deja entrever que no hay una conceptualización estable de la noción de período de un número racional. Se señala que este aspecto no se percibe ni analiza públicamente por el profesor.

Luego se les solicita a los alumnos que indiquen si existe alguna relación entre los resultados obtenidos con la actividad dos. Los diferentes grupos producen las siguientes respuestas:

- Algunos grupos indican que sí tiene relación pero la consigna no indica que exprese de qué relación se trata por lo que se limitan a responder lo solicitado.
- Otros grupos señalan que sí tiene relación las partes enteras ya que son la misma cantidad de alfombras y que los denominadores de las

fracciones tienen las mismas medidas que los lados de cada alfombra (figuras 214 y 215).

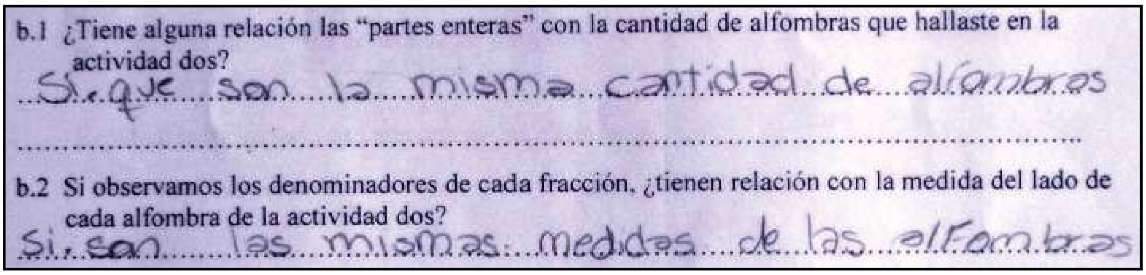

b.1 ¿Tiene alguna relación las "partes enteras" con la cantidad de alfombras que hallaste en la actividad dos?

Si tiene una relación.

b.2 Si observamos los denominadores de cada fracción, ¿tienen relación con la medida del lado de cada alfombra de la actividad dos?

Si tiene relación.

Fig.214. Respuestas de un grupo de alumnos a la tercera actividad.


b.1 ¿Tiene alguna relación las "partes enteras" con la cantidad de alfombras que hallaste en la actividad dos?

Si que son la misma cantidad de alfombras

b.2 Si observamos los denominadores de cada fracción, ¿tienen relación con la medida del lado de cada alfombra de la actividad dos?

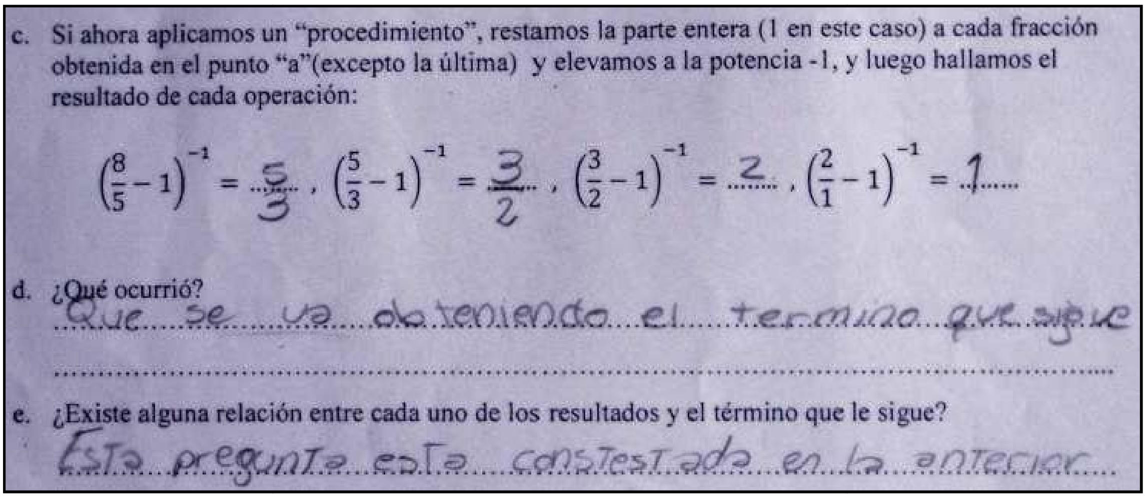
Si son las mismas medidas de las alfombras

Fig. 215. Respuestas de otro grupo de alumnos a la primera actividad.

Posteriormente, en las actividades "3c, 3d y 3e", el profesor intenta introducir el algoritmo de "fracción continua".

Las respuestas producidas por los grupos de alumnos indican diferentes miradas a las preguntas "3d" y "3e", para algunos grupos se obtiene el término que sigue (figura 216), para otros se trata del número de alfombras (figura 217), inclusive para dos grupos existe una relación de números "consecutivos" entre los resultados obtenidos, respuesta que manifiesta dificultades con la noción de consecutivo de un número entero que no es posible aplicarla para números racionales.

Las diferentes respuestas obtenidas dan cuenta que los alumnos tienen diferentes percepciones sobre las preguntas realizadas, esto plantea un conflicto semiótico epistémico.



c. Si ahora aplicamos un "procedimiento", restamos la parte entera (1 en este caso) a cada fracción obtenida en el punto "a"(excepto la última) y elevamos a la potencia -1, y luego hallamos el resultado de cada operación:

$$\left(\frac{8}{5}-1\right)^{-1} = \frac{5}{3} \ , \ \left(\frac{5}{3}-1\right)^{-1} = \frac{3}{2} \ , \ \left(\frac{3}{2}-1\right)^{-1} = 2 \ , \ \left(\frac{2}{1}-1\right)^{-1} = 1$$

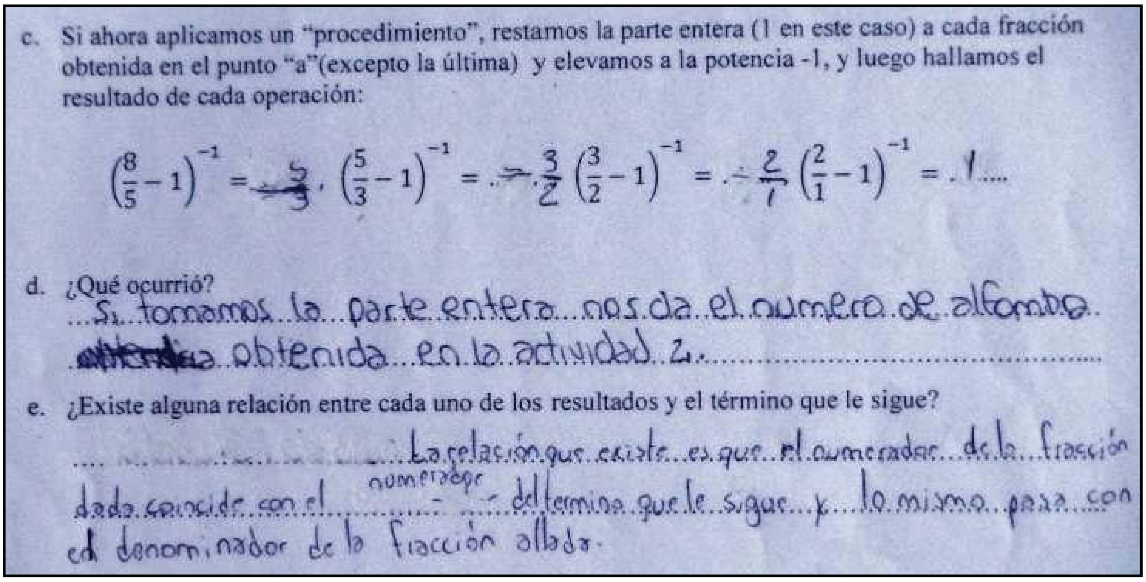
d. ¿Qué ocurrió?

Que se va obteniendo el termino que sigue

e. ¿Existe alguna relación entre cada uno de los resultados y el término que le sigue?

Esta pregunta esta constestada en la anterior

Fig.216. Respuestas de un grupo de alumnos a la actividad 3c, 3d y 3e.



c. Si ahora aplicamos un "procedimiento", restamos la parte entera (1 en este caso) a cada fracción obtenida en el punto "a"(excepto la última) y elevamos a la potencia -1, y luego hallamos el resultado de cada operación:

$$\left(\frac{8}{5}-1\right)^{-1} = \frac{5}{3} \ , \ \left(\frac{5}{3}-1\right)^{-1} = \frac{3}{2} \ \left(\frac{3}{2}-1\right)^{-1} = \frac{2}{1} \ \left(\frac{2}{1}-1\right)^{-1} = 1$$

d. ¿Qué ocurrió?

Si tomamos la parte entera nos da el numero de alfombra ~~obtenida~~ obtenida en la actividad 2.

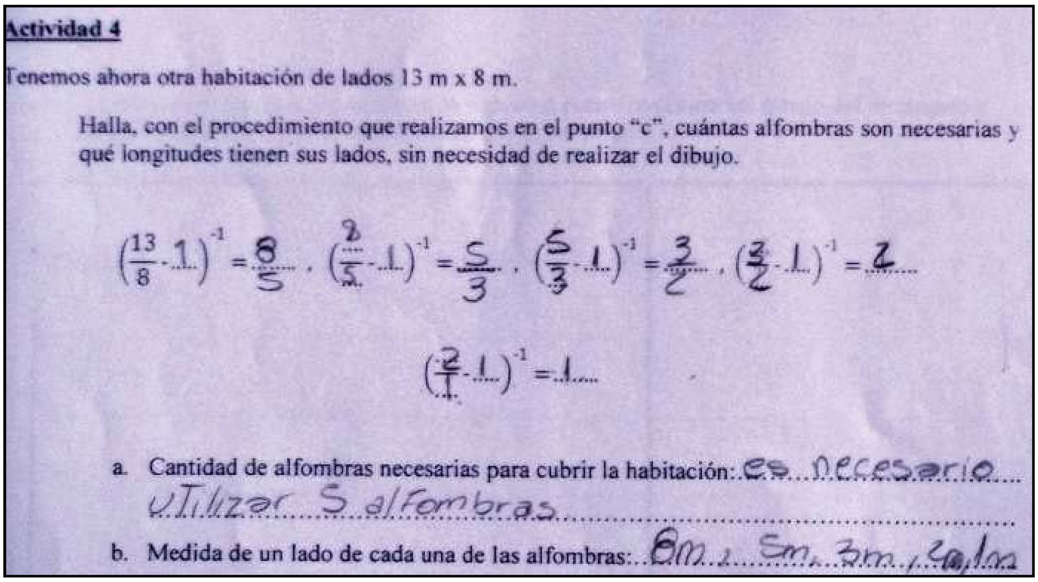
e. ¿Existe alguna relación entre cada uno de los resultados y el término que le sigue?

La relación que existe es que el numerador de la fracción dada coincide con el numerador del termino que le sigue y lo mismo pasa con el denominador de la fracción dada.

Fig.217. Respuestas de otro grupo de alumnos a la actividad 3c, 3d y 3e.

Existe una pérdida de sentido de la actividad por parte de los alumnos que la resuelven por una cuestión de contrato didáctico o de "normatividad".

Para la actividad cuatro el docente intenta que los diferentes grupos resuelvan una nueva actividad esta vez empleando el algoritmo desarrollado en el ítem anterior (figura 218).



Actividad 4

Tenemos ahora otra habitación de lados 13 m x 8 m.

Halla, con el procedimiento que realizamos en el punto "c", cuántas alfombras son necesarias y qué longitudes tienen sus lados, sin necesidad de realizar el dibujo.

$$\left(\frac{13}{8}-1\right)^{-1}=\frac{8}{5}\ ,\ \left(\frac{8}{5}-1\right)^{-1}=\frac{5}{3}\ ,\ \left(\frac{5}{3}-1\right)^{-1}=\frac{3}{2}\ ,\ \left(\frac{3}{2}-1\right)^{-1}=2$$

$$\left(\frac{2}{1}-1\right)^{-1}=1$$

a. Cantidad de alfombras necesarias para cubrir la habitación: es necesario utilizar 5 alfombras

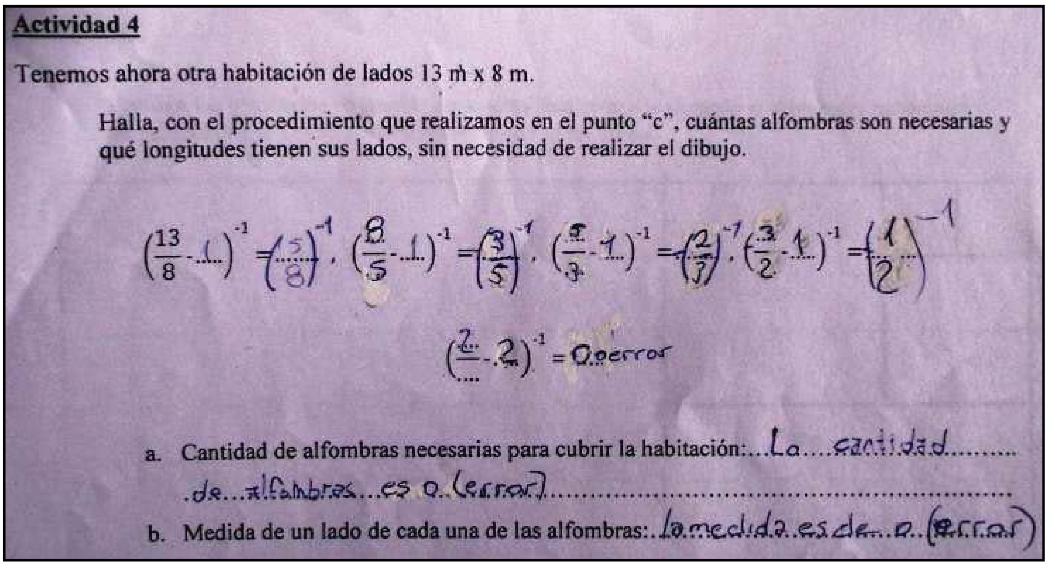
b. Medida de un lado de cada una de las alfombras: 8m, 5m, 3m, 2m, 1m

Fig.218. Respuestas de un grupo de alumnos a la cuarta actividad.

Diez grupos indican correctamente que se trata de seis alfombras, mientras que para seis grupos, erróneamente, se trata de cinco alfombras (fig.218). Un grupo señala también erróneamente que la cantidad es tres.

Esto último puede deberse a que para los alumnos las actividades no han sido esclarecedoras, más bien "enturbian" la relación entre el algoritmo y la cantidad de alfombras. Aquí se manifiestan las dificultades del conflicto que queda en estado latente en la actividad anterior.

Un grupo señala que la cantidad de alfombras es "cero" porque el algoritmo termina en "error" (figura 219), siendo esta una expresión de que el algoritmo aún no se percibe, por parte de algunos alumnos, como una herramienta que permite resolver algo.



Actividad 4

Tenemos ahora otra habitación de lados 13 m x 8 m.

Halla, con el procedimiento que realizamos en el punto "c", cuántas alfombras son necesarias y qué longitudes tienen sus lados, sin necesidad de realizar el dibujo.

$$\left(\frac{13}{8}-1\right)^{-1}=\left(\frac{5}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{8}{5}-1\right)^{-1}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{5}{3}-1\right)^{-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{2}{\ldots}-2\right)^{-1}=0\ \text{error}$$

a. Cantidad de alfombras necesarias para cubrir la habitación: La cantidad de alfombras es 0 (error)

b. Medida de un lado de cada una de las alfombras: la medida es de 0 (error)

Fig.219. Respuestas de otro grupo de alumnos a la cuarta actividad.

El docente intenta con esta actividad que los alumnos comiencen a hacer rutinario al algoritmo, por lo que espera respuestas erróneas por parte de algunos grupos.

Para que esto último no quede en un plano de desconcierto, el profesor, en el minuto cuarenta y cinco (M45) hace una puesta en común repasando cómo se emplea el algoritmo de fracción continua con la calculadora y nuevamente repasa el algoritmo en el minuto cincuenta y uno (M51) pero esta vez recalcando que debe utilizarse la parte entera del número (figura 220).

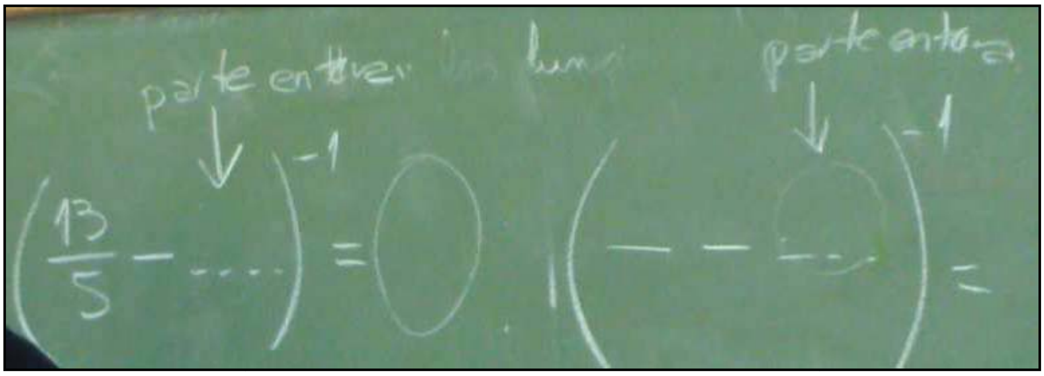


Fig.220. El profesor explica, en el pizarrón, el algoritmo de fracción continua empleando la calculadora.

Para la actividad cinco el docente prevé que los alumnos puedan "constatar" geométricamente si las respuestas dadas en la actividad anterior coinciden o no con las respuestas obtenidas en el ítem 5, inclusive tengan oportunidad de revisar dichas respuestas (figura 221).

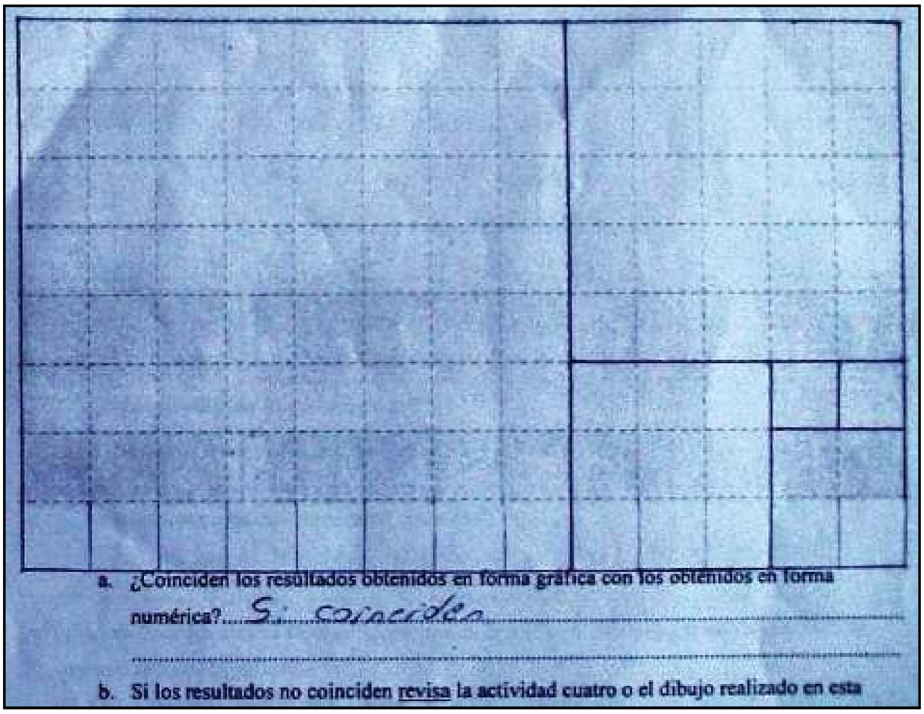


Fig.221. Respuestas de un grupo de alumnos a la quinta actividad.

Por supuesto que para los diez grupos que obtienen seis alfombras, los resultados coinciden.

De cinco grupos que obtuvieron una respuesta errónea (cinco alfombras) en la actividad 4, cuatro responden que "coinciden" con las respuestas geométricas de la actividad 5 (todos los grupos produjeron construcciones geométricas correctas).

Esto último se puede deber a:

- No se considera las respuestas dadas por ellos mismos a la actividad anterior.

- No se realiza un "conteo" eficaz, de la cantidad de alfombras obtenidas geométricamente.
- Se copian las respuestas de otros grupos y se las da como propias.

El "holo-significado" de la noción de fracción continua nos da un panorama de la interacción entre configuraciones epistémicas propuestas por el profesor (figura 222).

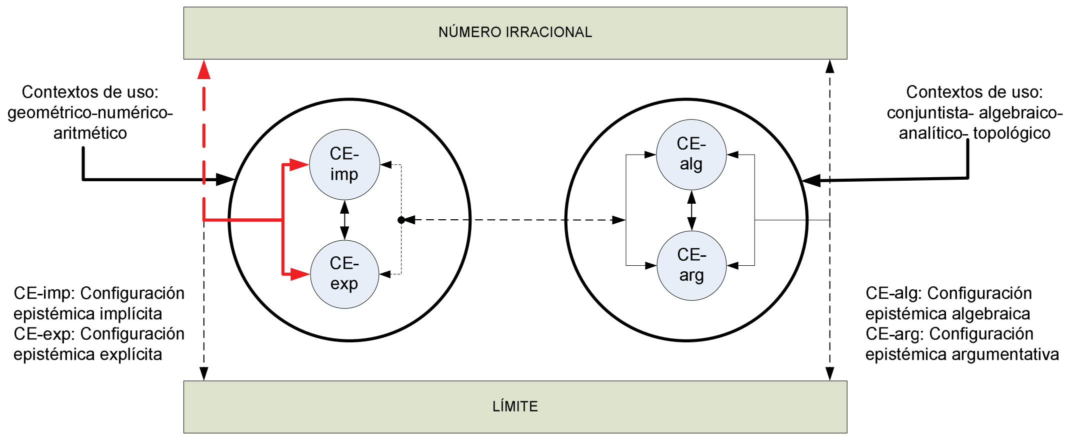


Figura 222. Representación del holosignificado de la noción de fracción continua.

En un contexto geométrico-numérico-aritmético la CE-imp y la CE-exp se relacionan por medio de procesos aproximativos finitos.

El docente intenta entonces un tránsito entre la noción de fracción continua finita hacia una infinita que representa a un número irracional. Se trata de un primer acoplamiento entre holosignificados.

11.1.2 Configuración didáctica global de la sesión 1 del grupo experimental: una entrada "geométrica-numérica-aritmética" al algoritmo de fracción continua y a la noción de número irracional

Es posible observar la complejidad de la clase durante sesenta minutos (figura 223).

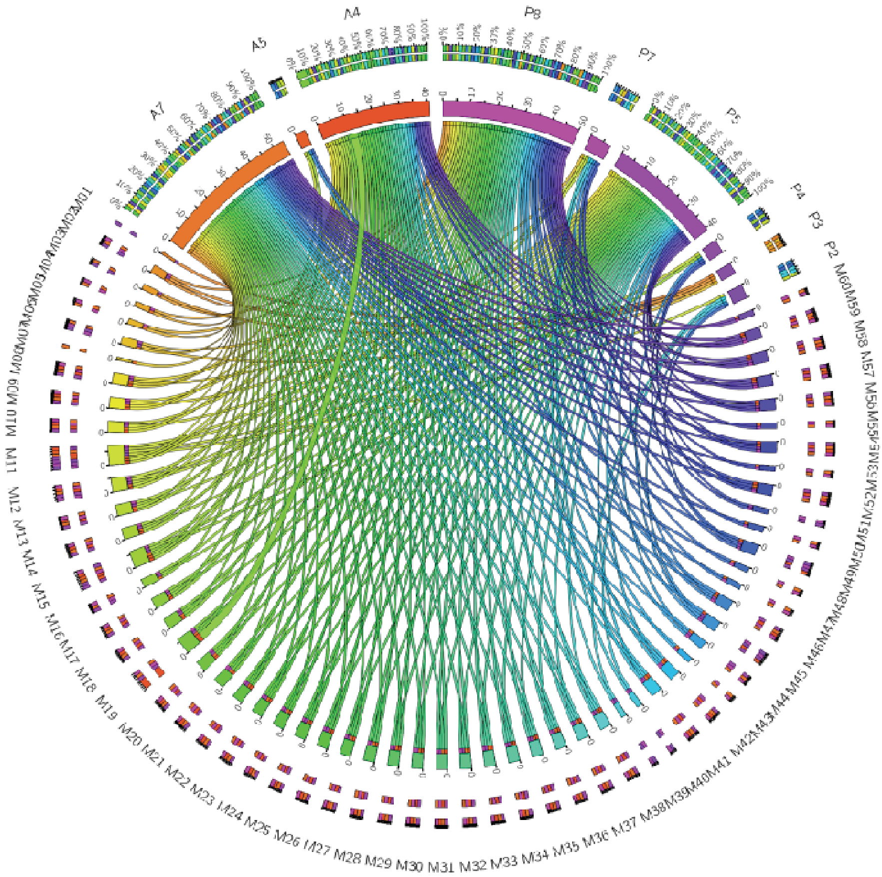


Fig.223. Setenta minutos de la primera clase de matemática según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

De acuerdo análisis realizado y ahora desde una visión holística es posible determinar las actividades que realizaron los actores de la clase, o sea, alumnos y profesor.

Las principales acciones que efectúan los alumnos en el tiempo transcurrido es efectuar la tarea propuesta por el docente (A7) y realizar preguntas al profesor

(A4) siendo en menor medida responder las preguntas realizadas por el profesor (A5).

La labor del profesor se centra principalmente en circular por los bancos donde los alumnos trabajaban en grupos (P8), responder preguntas de los alumnos (P5) y realizar algunas puestas en común cuando las dudas eran generalizadas (P7). En menor medida hacer preguntas a los alumnos (P4), escribir en el pizarrón (P2) y hacer explícitas algunas consignas que no estaban escritas en papel (P3).

Si observamos en la figura 2 los tiempos empleados (M01 a M60), las "cintas" de colores muestran una actividad "compartida" entre alumnos y docente.

Para la evolución de la actividad los alumnos necesitan del acompañamiento del profesor para avanzar en las diferentes actividades propuestas, a través de una gran cantidad de preguntas que los discentes (A4) realizan al docente (M08-M38) en varias ocasiones y hasta terminar la clase.

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración didáctica como de tipo personal con aportes dialógica.

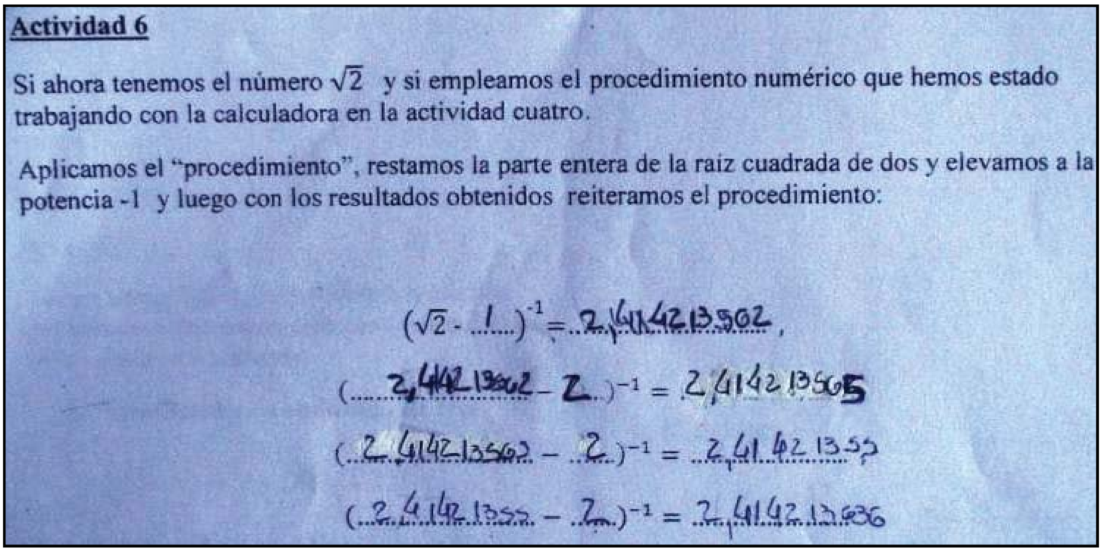
En relación a la noción matemática estudiada en estos primeros sesenta minutos ésta se centra en la introducción de la fracción continua como una herramienta que permite hallar una solución al problema de las alfombras. En la sesión dos el profesor comienza a interaccionar las dos nociones matemáticas, a saber, la de número irracional y la de fracción continua.

11.2 SESIÓN 2: LA INTRODUCCIÓN DE UN ALGORITMO

11.2.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDACTICO DE LA SESIÓN 2

Los alumnos continúan, en grupo, con las actividades resolviendo las situaciones problemáticas. Si bien los primeros minutos, algunos alumnos, no realizan tarea (A1), luego desde el minuto seis (M6) en adelante comienzan a realizar la tarea todos los grupos de alumnos mientras el profesor circula por los bancos (P8) despejando dudas y respondiendo (P5) preguntas de los alumnos (A4).

En la figura 224 se puede observar las respuestas de un grupo de alumnos a la actividad seis.



Actividad 6

Si ahora tenemos el número $\sqrt{2}$ y si empleamos el procedimiento numérico que hemos estado trabajando con la calculadora en la actividad cuatro.

Aplicamos el "procedimiento", restamos la parte entera de la raiz cuadrada de dos y elevamos a la potencia -1 y luego con los resultados obtenidos reiteramos el procedimiento:

$(\sqrt{2} - 1)^{-1} = 2,414213562$,

$(2,414213562 - 2)^{-1} = 2,414213565$

$(2,414213562 - 2)^{-1} = 2,41421355$

$(2,41421355 - 2)^{-1} = 2,414213636$

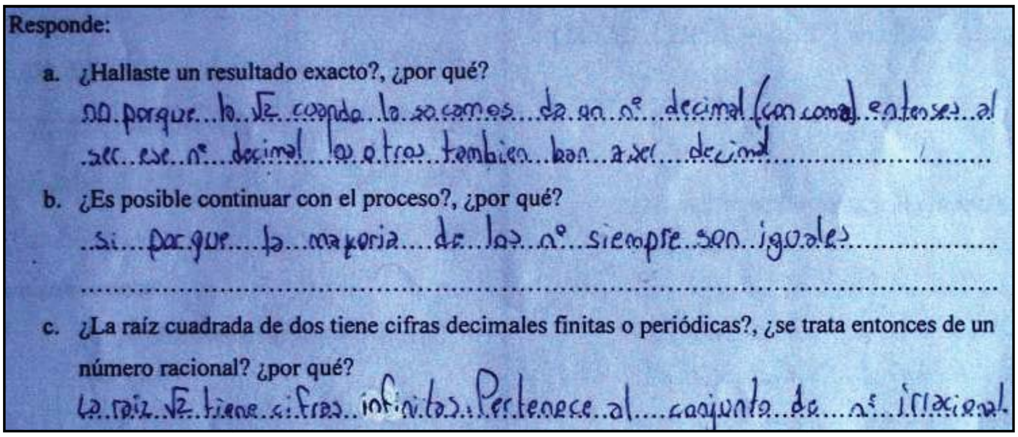
Fig.224. Respuestas de un grupo de alumnos a la actividad seis.

Las respuestas obtenidas por los diferentes grupos de alumnos a la actividad "6.a" son las siguientes (tabla 95).

Respuestas de los grupos de alumnos a la actividad "6.a"							
Resultado exacto			¿Por qué?				
Si	No	NC	Por tener coma	Por el Proceso realizado	Por tener parte decimal infinita	Por no ser periódico, es finito	NC
4	0	0	0	3	0	1	
0	13	0	3	0	5	0	5

Tabla 95. Respuestas de los grupos de alumnos al ítem "6.a".

Trece grupos señalan que los resultados obtenidos no son exactos, apelan a la infinitud decimal o a que el número se expresa con "coma" (figura 225).


Responde:

a. ¿Hallaste un resultado exacto?, ¿por qué?

no porque la $\sqrt{2}$ cuando la sacamos da un nº decimal (con coma) entonses al ser ese nº decimal los otros tambien van a ser decimal

b. ¿Es posible continuar con el proceso?, ¿por qué?

si porque la mayoria de los nº siempre son iguales

c. ¿La raíz cuadrada de dos tiene cifras decimales finitas o periódicas?, ¿se trata entonces de un número racional? ¿por qué?

La raiz $\sqrt{2}$ tiene cifras infinitas. Pertenece al conjunto de nº irracional

Fig.225. Respuestas de un grupo de alumnos a la actividad seis.

Cuatro grupos indican que sí se trata de resultados exactos, ellos señalan que esto último ocurre por el proceso realizado o porque se trata de un número “finito”. Aquí se desarrolla un conflicto semiótico epistémico ya que no está estable, para los alumnos, la diferencia entre un número finito y otro infinito cuando estos deben discernirlos a partir de la expresión decimal aproximada que muestra una calculadora. Entonces los resultados obtenidos, luego de realizar las operaciones indicadas, van a ser necesariamente aproximados y finitos.

El docente produce, al realizar las preguntas “6a”, “6b” y “6c” una simbiosis didáctica curricular (SDC) de nivel “bajo” entre las nociones de finitud, de infinitud y la noción de aproximación de un número real que provoca el conflicto antes mencionado.

Para el ítem “b” las respuestas de catorce grupos de alumnos expresan que es posible continuar con el proceso (tabla 96).

Respuestas de los grupos de alumnos a la actividad “6b ”							
¿Es posible continuar con el proceso?		¿Por qué?					
Si	No	Porque el resultado no es exacto	Porque se puede continuar el proceso	Porque se obtiene resultados iguales	No responde	Porque es un número irracional, el resultado va a ser el mismo en el procedimiento	Porque no se puede continuar el proceso al no restarle nada
14		5	3	5	1	0	0
	3	0	0	0	0	2	1

Tabla 96. Respuestas de los grupos de alumnos al ítem “b”.

Mientras que para tres grupos esto no es posible, dichos alumnos no parecen percibir, a pesar de haber obtenidos resultados “iguales”, que es posible continuar con el procedimiento.

Las respuestas al ítem “c”, dadas por los diferentes grupos de alumnos, dan cuenta que la raíz cuadrada de dos, para algunos grupos se trata de un número irracional, mientras que para otros de un número racional.

Esta inestabilidad en las respuestas de los alumnos es esperable ya que recién ahora comienza a producirse la SDC entre dos objetos matemáticos complejos como lo son la FC y el número irracional, manteniéndose esta en un nivel bajo ya que si bien los alumnos interaccionan con los objetos lo hacen de una forma dependiente del profesor, con pérdida de autonomía.

Un grupo apela a la noción de fracción para poder explicar que no se trata de un número que pueda expresarse de esa forma, mientras que otro grupo señala que no se trata de un número racional porque no es periódico (tabla 97).

Respuestas de los grupos de alumnos a la actividad “6c”								
¿La $\sqrt{2}$ tiene cifras decimales finitas o periódicas?				¿Se trata de un número racional? ¿Por qué?				
Finitas	Periódicas	Infinitas	Nc	Sí, es racional	No, porque es irracional	No, porque no se puede expresar como fracción	No, porque no se repiten las cifras decimales	NC
12	2	2	1	11	3	1	1	1

Tabla 97. Respuestas de los grupos de alumnos al ítem “c”.

Las producciones de los alumnos muestran nivel “bajo” de la SDC. Si bien los resultados eran previsibles para un primer encuentro de los alumnos entre el algoritmo de FC y la noción de número irracional.

Ya en un contexto numérico-aritmético la CE imp y la CE exp de la FC comienzan a interaccionar con el objeto número irracional siendo la raíz cuadrada de dos el número elegido para tal interacción (figura 226).

Lentamente comienza a producirse la SDC entre estos dos objetos matemáticos previstos en la planificación del docente.

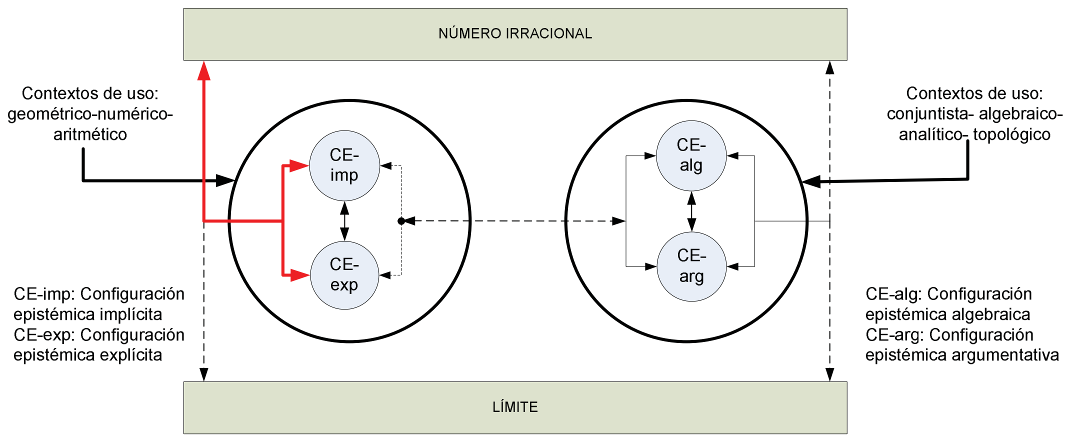


Figura 226. Representación del holosignificado de la noción de fracción continua y comienzos de la interacción con la noción de número irracional.

Puede observarse en la figura 226 que a través de la interacción entre objetos matemáticos de los dos holosignificados presentes, el de FC y el de número irracional, el docente plantea en el aula, una SDC que comienza a hacerse más "fuerte" pero que los alumnos aún no perciben como tal.

11.2.2 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA SESIÓN 2 DEL GRUPO EXPERIMENTAL

11.2.2.1 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA 2: UNA ENTRADA "ALGORÍTMICA" A LA NOCIÓN DE NÚMERO IRRACIONAL

Si observamos, en la figura 227, los tiempos empleados (M01 a M30), las "cintas" de colores muestran que es el alumno el que realiza la mayor parte de las actividades. Se plantearon dudas por parte de los alumnos (A4) que, si bien en menor número que la clase anterior, son respondidas por el docente (P5). El profesor recorrió por los bancos en donde están sentados los alumnos tratando de disipar dichas dudas (P8), hubo momento donde se expusieron públicamente cuestiones relativas al conocimiento puesto en juego.

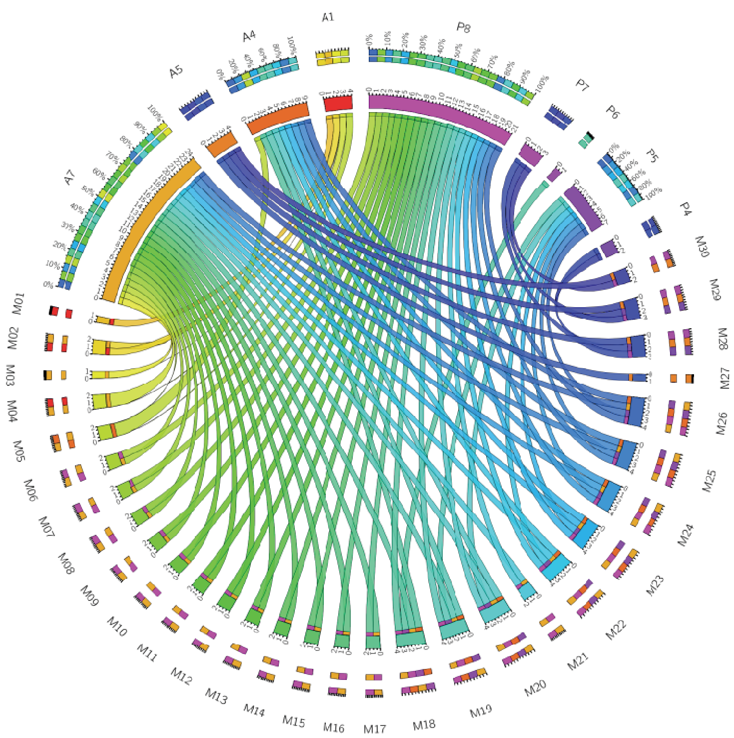


Fig. 227. Treinta minutos de la segunda clase de matemática según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

En suma los alumnos tienen una participación activa en este proceso de identificar números y hacerlos corresponder a un conjunto numérico determinado. Pero esta participación está "atada" a la interacción con el profesor. Continúa una dependencia de trabajo con las respuestas que el profesor pueda proveer a sus inquietudes.

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración descrita de tipo "personal" pero con dependencia de los aportes "dialógicos" con el docente.

11.3 SESIÓN 3: SIMBIOSIS DIDÁCTICA CURRICULAR ENTRE LA NOCIÓN DE NÚMERO IRRACIONAL Y LA DE FRACCIÓN CONTINUA

11.3.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDACTICO DE LA SESIÓN 3

En los primeros siete minutos el profesor reparte las consignas de trabajo a los grupos de alumnos (P3), los alumnos desde el minuto seis y hasta el treinta y cinco se dedican a realizar las situaciones(A7), mientras el profesor circula por los bancos(P8) respondiendo preguntas (P5) formuladas por los diferentes grupos de alumnos (A4).

Entre el minuto treinta y seis y el cuarenta (M36 a M40) el profesor realiza una puesta "pública" sobre cómo realizar el procedimiento, de fracción continua, a la raíz cuadrada de dos (figura 228).

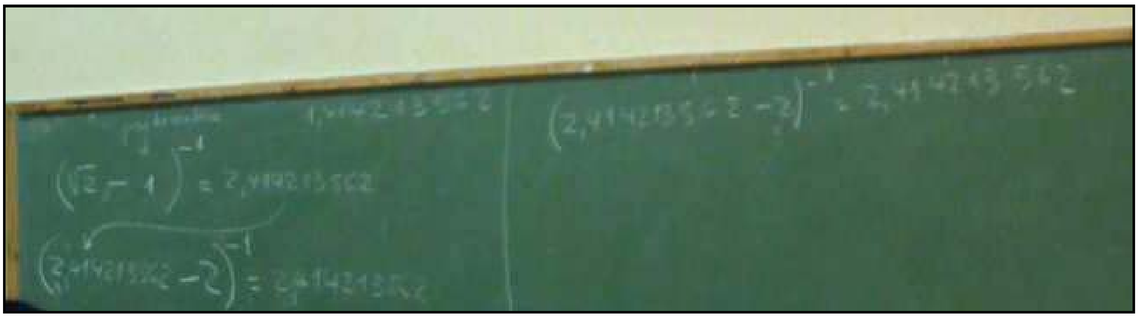


Fig.228. Puesta en común realizada por el profesor con escritura en el pizarrón.

La interacción entre el docente y el alumno A_2 (tabla 98) muestran distintas miradas ya que para el alumno se trata de números diferentes (y realmente lo son) solamente que corresponden a diferentes aproximaciones del número $1 + \sqrt{2}$. Esto último el docente intenta minimizarlo indicando "la diferencia es en la última cifra" pero no haciendo alusión a la noción de aproximación.

D3: El procedimiento es muy sencillo, ustedes tienen la raíz cuadrada de dos . ¿El procedimiento qué dice que hay que hacer? A_1: Restar. D3:¿Restar que parte? Als.: La parte entera (varios alumnos). D3: Ustedes sacan la raíz cuadrada de dos en la calculadora. Saquen la raíz cuadrada de dos… ¿Qué les da? Als.:1,414213162 (el profesor escribe en el pizarrón mientras los alumnos le dictan) D3: La calculadora no puede poner todas las cifras, tiene una cantidad de cifras limitada entonces la última cifra la aproxima. El procedimiento ¿cómo es? A ese número le tenemos que restar "la parte entera", la parte entera es la que está antes de la coma (señala en el número escrito en el pizarrón). ¿Qué parte entera tiene ese número? (se refiere a la raíz cuadrada de dos) Als.: Uno (varios alumnos). D3: Y al resultado lo tenemos que elevar a la menos uno. Ahí sacamos un resultado. ¿Cuánto les dio? Me dicen todo el numerito que les da… 2,414213162, les da esto, ¿puede ser? Als.: Algunos alumnos responden afirmativamente, otros no están atentos y el docente les llama la atención. D3: El número obtenido lo ocupo nuevamente (escribe nuevamente en el pizarrón el número) (fig.21). D3: ¿Qué le voy a restar a ese número? A_2: Dos. D3: ¿Por qué? Als.: Porque es la parte entera (varios alumnos). D3: Si sacan la cuenta… A_2: 2,414213165 D3: 2,414213162 A_2: Cinco (el alumno enfatiza que el número "termina" en cinco). D3: La diferencia es en la última cifra.

Tabla 98. Diálogo entre docente y alumnos en una puesta en común a propósito de la raíz cuadrada de dos.

Se plantea entonces un conflicto semiótico de tipo interaccional que se manifiesta nuevamente más adelante en el diálogo del docente con los alumnos (tabla 99).

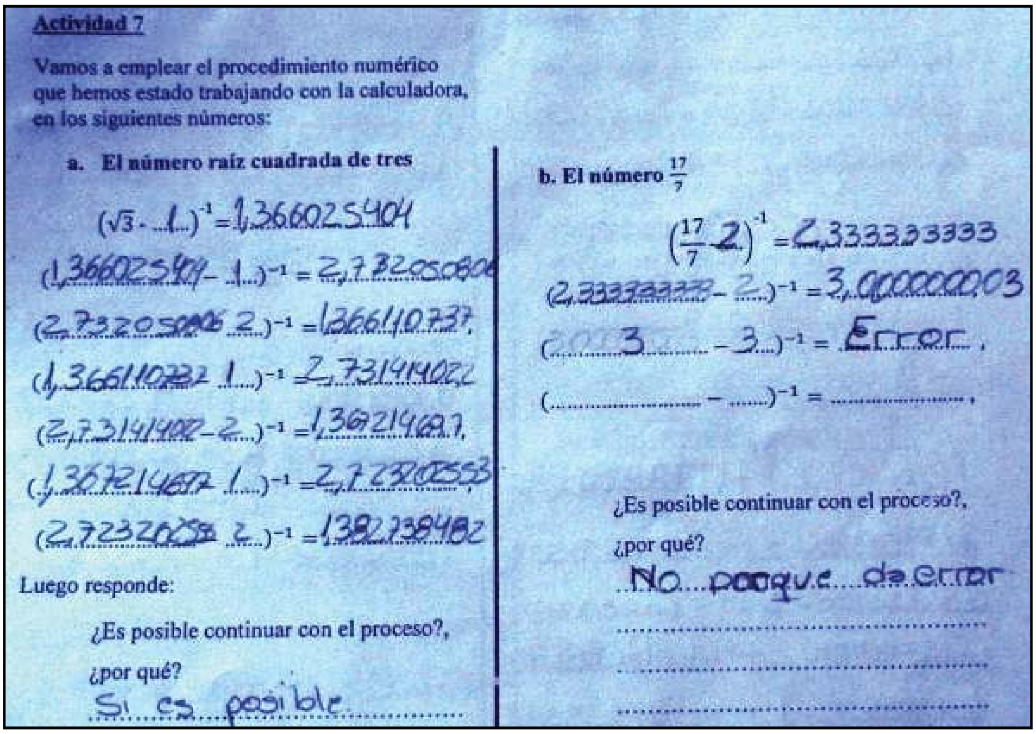
D3: ¿Qué va ocurriendo, qué me vuelve a dar? A_3: Lo mismo. A_4: Lo mismo. D3: El mismo resultado que habíamos obtenido. Si vuelvo a hacer el mismo procedimiento ¿qué me va a dar? Als.: Lo mismo (varios alumnos). A_2: Cambian las dos últimas cifras. Se corta la energía eléctrica de la escuela por unos minutos. El docente intenta continuar con luz natural. D3: Tal vez este proceso se pueda continuar ¿o no? (no da tiempo a que respondan los alumnos).En cambio cuando teníamos fracciones ¿Qué ocurría? Se han fijado, ¿han sacado las cuentitas?... Als.: [...] Silencio. D3: Ya lo van a ir probando a ver si el proceso en unos es infinito o no es infinito. Sigan trabajando en la actividad 7 cuando terminen volvemos a hacer una puesta en común. Regresa la energía eléctrica a la escuela.

Tabla 99. Diálogo entre docente y alumnos en una puesta en común.

El conflicto interaccional emerge cuando el alumno A_2 expresa: “cambian las dos últimas cifras”, para él no se tratan de los mismos números, para el profesor se obtienen resultados iguales porque se trata de operaciones que devuelven el mismo número. Esto último no fue aclarado por el docente, el conflicto no se resuelve y queda latente en un estado residual, al menos para el alumno A_2.

Luego los alumnos continúan realizando las actividades (A7), preguntando las dudas (una importante cantidad) al profesor (A4) las cuáles son respondidas por el profesor (P5) mientras circula por los diferentes grupos (P8).

Como se había previsto, fue necesaria una actividad de “rutinización” de la técnica empleada, se trata de la actividad siete para diferentes números reales (figuras 229 y 230).


Actividad 7

Vamos a emplear el procedimiento numérico que hemos estado trabajando con la calculadora, en los siguientes números:

a. El número raíz cuadrada de tres

$(\sqrt{3} - 1)^{-1} = 1{,}366025404$

$(1{,}366025404 - 1)^{-1} = 2{,}732050808$

$(2{,}732050808 - 2)^{-1} = 1{,}366110737$

$(1{,}366110737 - 1)^{-1} = 2{,}731414022$

$(2{,}731414022 - 2)^{-1} = 1{,}367214687$

$(1{,}367214687 - 1)^{-1} = 2{,}723202553$

$(2{,}723202553 - 2)^{-1} = 1{,}382738482$

Luego responde:

¿Es posible continuar con el proceso?, ¿por qué?

Si es posible

b. El número $\frac{17}{7}$

$\left(\frac{17}{7} - 2\right)^{-1} = 2{,}333333333$

$(2{,}333333333 - 2)^{-1} = 3{,}000000003$

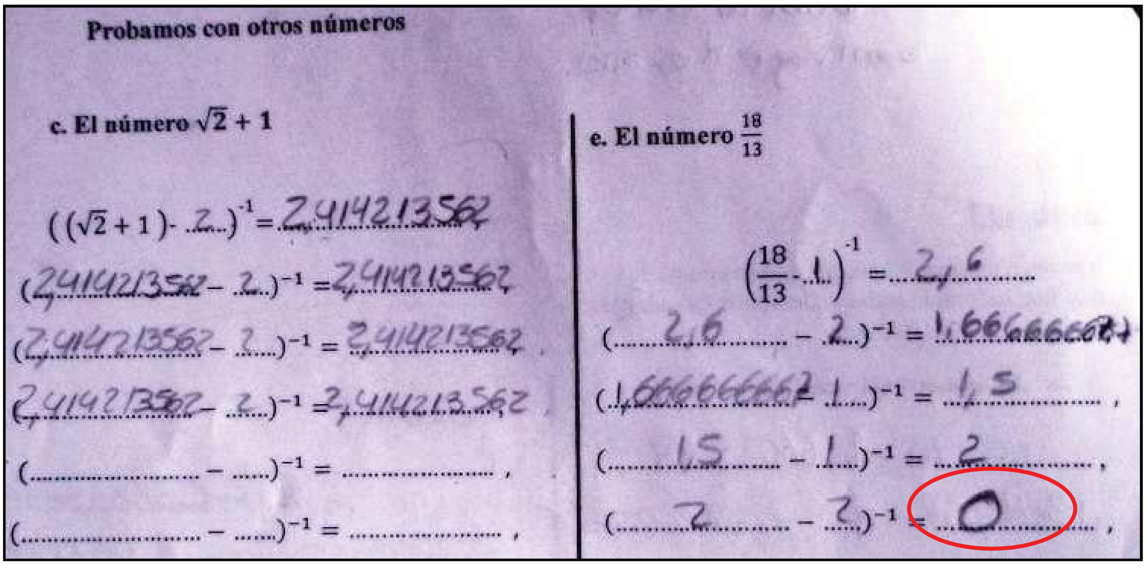
$(3 - 3)^{-1} = \text{Error}$

$(\ldots - \ldots)^{-1} = \ldots$

¿Es posible continuar con el proceso?, ¿por qué?

No porque da error

Fig.229. Respuestas de un grupo de alumnos a parte de la actividad siete.


Probamos con otros números

c. El número $\sqrt{2} + 1$

$((\sqrt{2} + 1) - 2)^{-1} = 2{,}414213562$

$(2{,}414213562 - 2)^{-1} = 2{,}414213562$

$(2{,}414213562 - 2)^{-1} = 2{,}414213562$

$(2{,}414213562 - 2)^{-1} = 2{,}414213562$

$(\ldots - \ldots)^{-1} = \ldots$

$(\ldots - \ldots)^{-1} = \ldots$

e. El número $\frac{18}{13}$

$\left(\frac{18}{13} - 1\right)^{-1} = 2{,}6$

$(2{,}6 - 2)^{-1} = 1{,}666666667$

$(1{,}666666667 - 1)^{-1} = 1{,}5$

$(1{,}5 - 1)^{-1} = 2$

$(2 - 2)^{-1} = 0$

Fig.230. Respuestas de un grupo de alumnos a parte de la actividad siete.

Para este grupo de alumnos (fig.230) el resultado de la operación es cero probablemente esto último ocurra porque los alumnos realizan una "anticipación" del resultado sin verificar el mismo. Parecen decir "dos menos dos es cero por lo que si lo elevo a la menos uno el resultado será cero". Aparece allí la problemática de la división por cero esta se analiza por el profesor públicamente más adelante en la sesión cuatro.

La mayoría de los grupos pueden realizar sin dificultad los cálculos (fig.231).

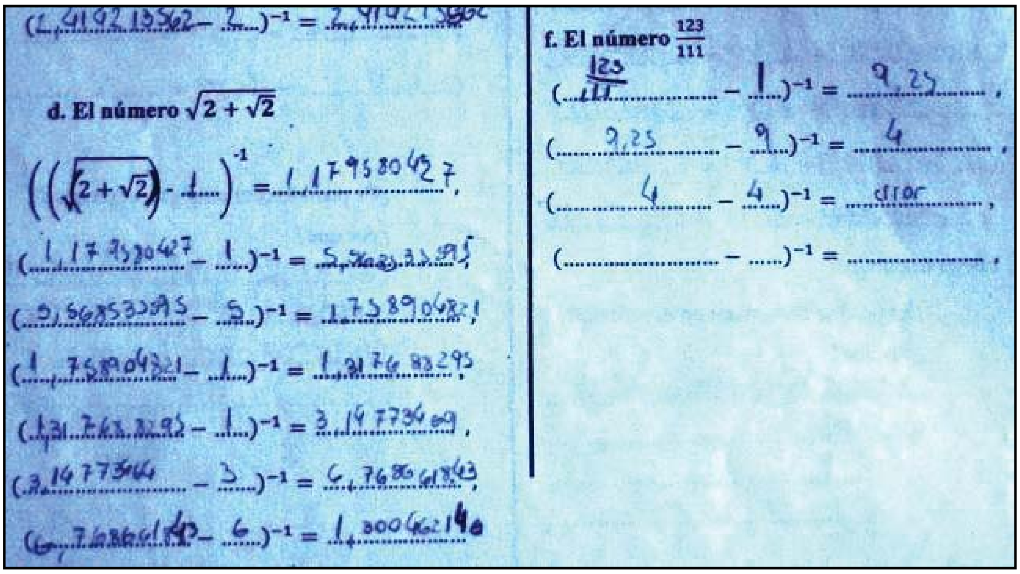
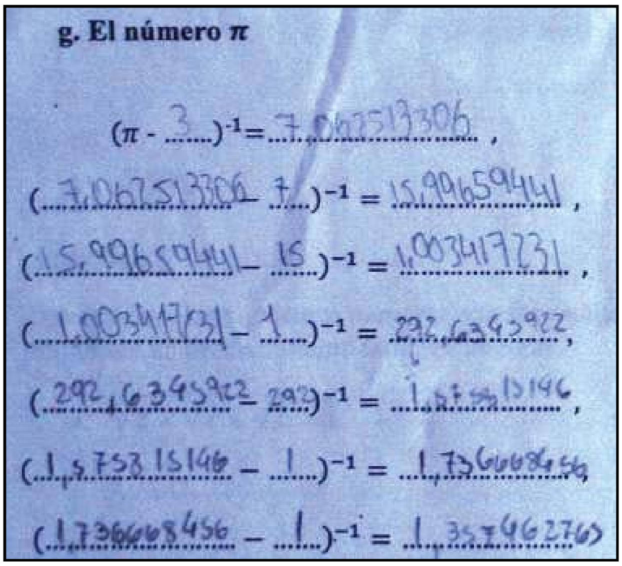


Fig.231. Respuestas de un grupo de alumnos las actividades “7.d” y “7.f”.

Entre los minutos cincuenta y cuatro y cincuenta y cinco (M54 a M55) el profesor explica en el pizarrón cómo utilizar a los números π y e, con la calculadora, para poder aplicarles el algoritmo y de esta manera diferenciar de otros números en los que el procedimiento finaliza.

Los diferentes grupos producen respuestas a las actividades “7g” y “7h” que involucran a dichos números (figuras 232 y 233).

La mayoría de los grupos pueden emplear correctamente el algoritmo.



g. El número π

$(\pi - 3)^{-1} = 7,062513306$,

$(7,062513306 - 7)^{-1} = 15,99659441$,

$(15,99659441 - 15)^{-1} = 1,003417231$,

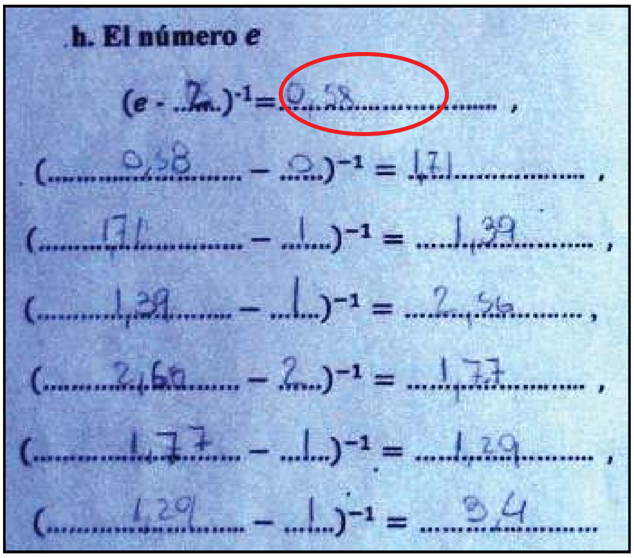
$(1,003417231 - 1)^{-1} = 292,6345922$,

$(292,6345922 - 292)^{-1} = 1,575315146$,

$(1,575315146 - 1)^{-1} = 1,736668456$,

$(1,736668456 - 1)^{-1} = 1,357462763$

Fig.232. Respuestas de un grupo de alumnos a la actividad "7.g".



h. El número e

$(e - 2)^{-1} = 0,58$,

$(0,58 - 0)^{-1} = 1,71$,

$(1,71 - 1)^{-1} = 1,39$,

$(1,39 - 1)^{-1} = 2,56$,

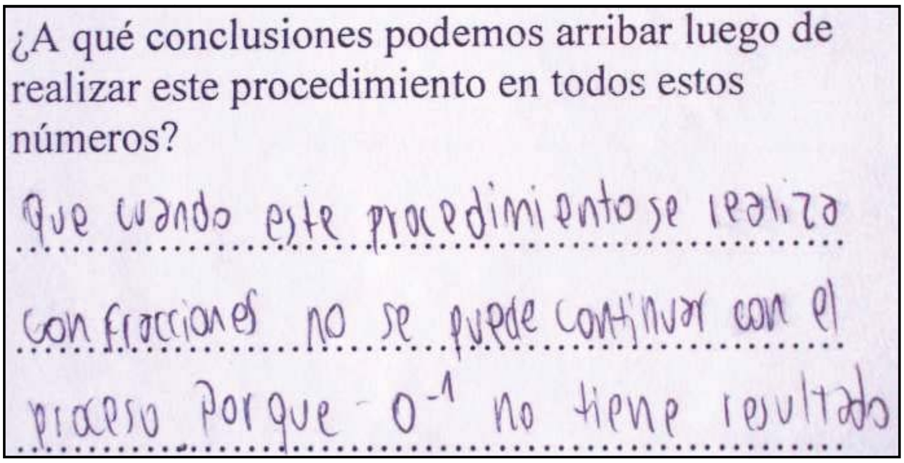
$(2,60 - 2)^{-1} = 1,77$,

$(1,77 - 1)^{-1} = 1,29$,

$(1,29 - 1)^{-1} = 3,4$

Fig.233. Respuestas de un grupo de alumnos a la actividad "7h".

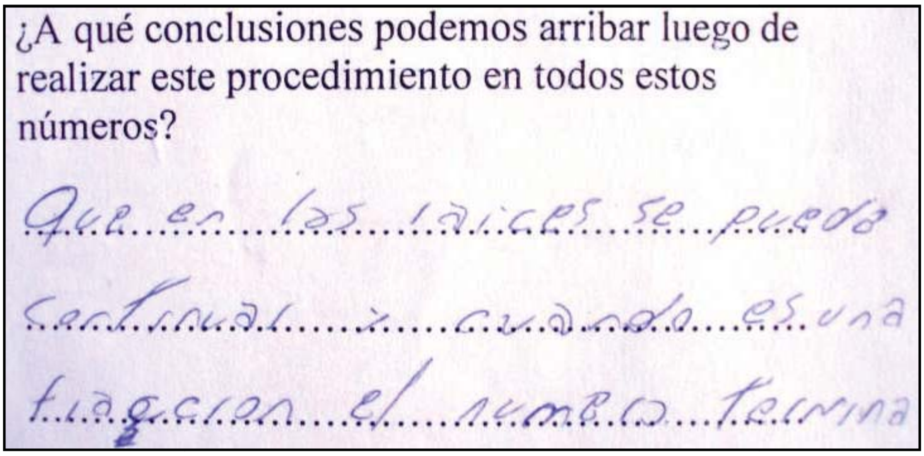
Se debe hacer notar que algunos grupos de alumnos cometen errores en el procedimiento (fig.234), esto último de acuerdo a lo previsto en el capítulo 8, es esperable. En relación a las conclusiones que llegan los alumnos de la actividad 7, seis grupos arriban a diferentes conclusiones aunque estrechamente relacionadas. A continuación damos tres ejemplos de ellas (figuras 234,235 y 236).



¿A qué conclusiones podemos arribar luego de realizar este procedimiento en todos estos números?

que cuando este procedimiento se realiza con fracciones no se puede continuar con el proceso porque 0^{-1} no tiene resultado

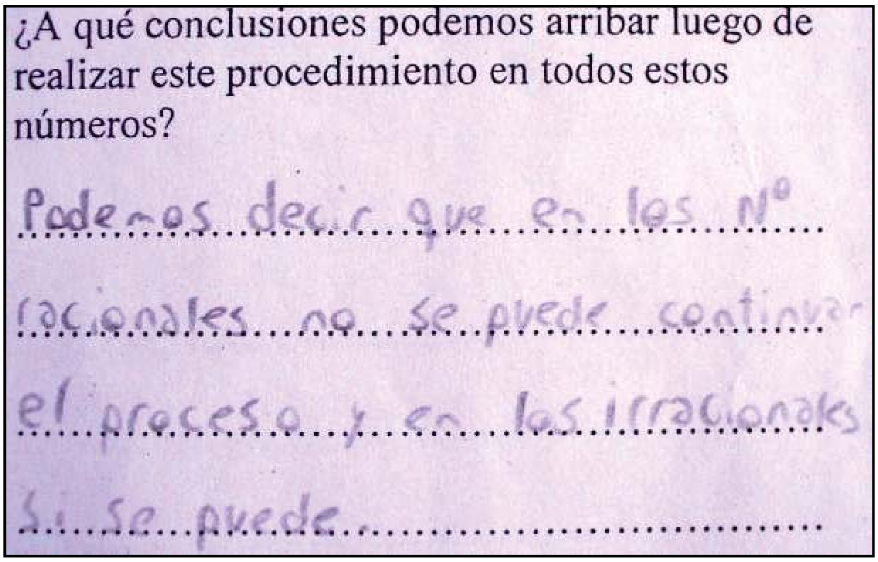
Fig.234. Respuestas de un grupo de alumnos a las conclusiones de la actividad siete.



¿A qué conclusiones podemos arribar luego de realizar este procedimiento en todos estos números?

Que en las raices se puedo continuar y cuando es una fraccion el numero termina

Fig.235. Respuestas de otro grupo de alumnos a las conclusiones de la actividad siete.



¿A qué conclusiones podemos arribar luego de realizar este procedimiento en todos estos números?

Podemos decir que en los N° racionales no se puede continuar el proceso y en los irracionales si se puede.

Fig.236. Respuestas de un grupo de alumnos a las conclusiones de la actividad siete.

Las respuestas hacen diferentes focos, en el grupo de la figura 234 no es posible continuar el procedimiento cuando se trata de un número racional. Para el grupo de la figura 235 se trata de que en las “raíces” no se puede continuar con el proceso, generalizando para cualquier raíz cuadrada, pero no indican que ocurre en el caso de los números π o e. Otro grupo expresa que “en algunos ejercicios se puede continuar y con otros no” no aclarando en qué casos ocurre cada cuestión.

El grupo de la figura 236 arriba a una conclusión más “general”, “en los números racionales no se puede continuar con el proceso y en los irracionales sí se puede”, dos grupos más llegan a conclusiones similares. Solamente dos grupos de discentes no logran arribar a conclusiones por falta de tiempo ya que se termina la clase.

Desde el minuto sesenta y tres al sesenta y cinco, ya finalizando la clase el profesor considera oportuno, de acuerdo a lo observado por él en los diferentes grupos, realizar algunas consideraciones “públicas”, esta vez se trata de hacer hincapié en cuándo el proceso que aplicamos a los números “termina” y cuando es posible “continuar” con dicho procedimiento. Relatamos a continuación el diálogo con los alumnos entablado por el profesor (tabla 100).

D3:”En unos números, no sé si se han dado cuenta, el proceso que aplicamos ‘termina’ y en otros ‘se puede continuar’, ¿se han dado cuenta de eso?...” A: Si (varios alumnos). D3: ¿En cuales ese proceso se termina? A: Cuando son fracciones (responden algunos alumnos). D3: ¿Y qué ocurre con los otros números? A: En las “raíces” continua (responden algunos alumnos). D3: Bien, entonces cuando el número es una fracción, por ejemplo 5/3 el proceso termina, cuando es un número, por ejemplo raíz cuadrada de dos, ese proceso continua. Pero alguien dijo con coma, 5/3= 1,66666… y $\sqrt{2}$ = 1,414213562 ..., ¿en qué se diferencian estos dos números?... A: Que uno es “finito” y el otro “infinito” (un alumno). D3: ¿Este es finito? (el profesor señala el número 1,66666…). A: Es infinito (varios alumnos). D3: ¿Y este? (El profesor señala el número 1,414213562 ...). A: También (varios alumnos). Toca el timbre para el recreo. D3: ¿Pero uno tiene la parte decimal cómo? A: Periódica (algunos alumnos) D3: ¿Y este?, (señala el número 1,414213562 ...) ¿tendrá la parte decimal periódica? A: No (algunos alumnos). D3: Entonces chicos, la diferencia entre unos y otros…, unos se llaman “racionales” (señala el número 1,66666…) y otros “irracionales” (señala el número 1,414213562 ...). Finaliza la clase.

Tabla 100. Diálogo entre docente y alumnos en puesta en común.

Vemos en este diálogo que el profesor comienza a institucionalizar la noción de número irracional acercando la noción de fracción continua (como un proceso infinito) con la noción de no periodicidad, en sus cifras decimales, intentando que el alumno diferencie números racionales de otros irracionales. Está claro que no es "suficiente" que el profesor "muestre" la diferencia para que el alumno pueda reconocer ambos tipos de números. El hecho de que toque el timbre para el recreo limita el accionar del profesor.

Nuevamente aparece la problemática entre lo finito y lo infinito, un conflicto semiótico epistémico que emerge en la sesión 2 y que no queda resuelto tampoco en esta sesión.

En esta sesión se produce un "acoplamiento" entre dos holo-significados, la de FC y la de número irracional, en un contexto de uso numérico-aritmético (figura 237).

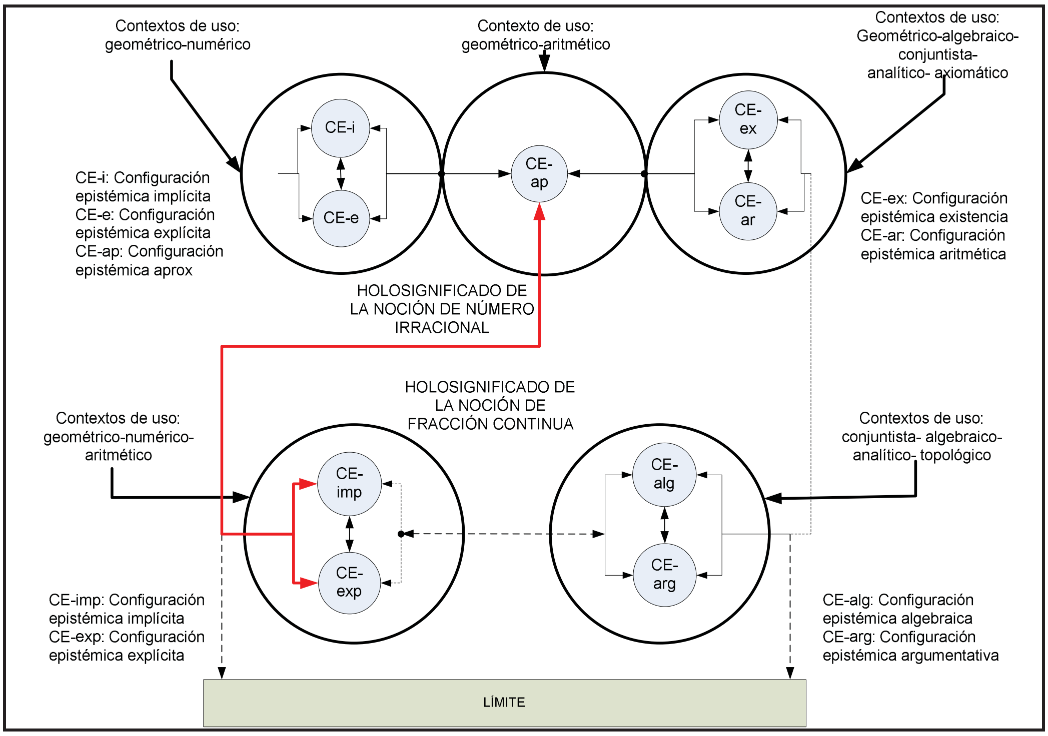


Fig.237. Acoplamiento entre holosignificados de las nociones de número irracional y fracción continua.

El docente produce una (SDC), de intensidad “media”, entre ambas nociones en el marco del currículo prescripto por el gobierno educativo.

Si bien en el diseño curricular de la Provincia de Mendoza (año 2013) no aparece explícitamente ni se prevé el uso de la noción de fracción continua no se aclara ni se expresa cuáles métodos de aproximación o de diferenciación entre números reales puedan aplicarse.

Se recuerda que el diseño curricular expresa:

> “Números reales: operaciones. Aplicaciones a la medida. Errores” (DGEPM, 2001, 43).

Por lo que el algoritmo puede resultar de utilidad para estos fines.

El docente 3 propone en su planificación anual:

> “Los números irracionales. Propiedades del conjunto I. Representación en la recta numérica de algunos números irracionales. Algunos métodos de aproximación de números irracionales: la fracción continua. Los números reales. Propiedades del conjunto R. Orden en R. Aproximaciones. Intervalos en la recta real. Módulo de un número real. Operaciones en R. Raíz enésima de un número real. Propiedades de la radicación Operaciones con radicales. Simplificación de radicales. Racionalización de denominadores con radicales. Exponentes racionales” (PDM b, 2013, 3).

El profesor realiza la siguiente simbiosis didáctica curricular SDC entre los objetos matemáticos presentes en la planificación anual (figura 238).

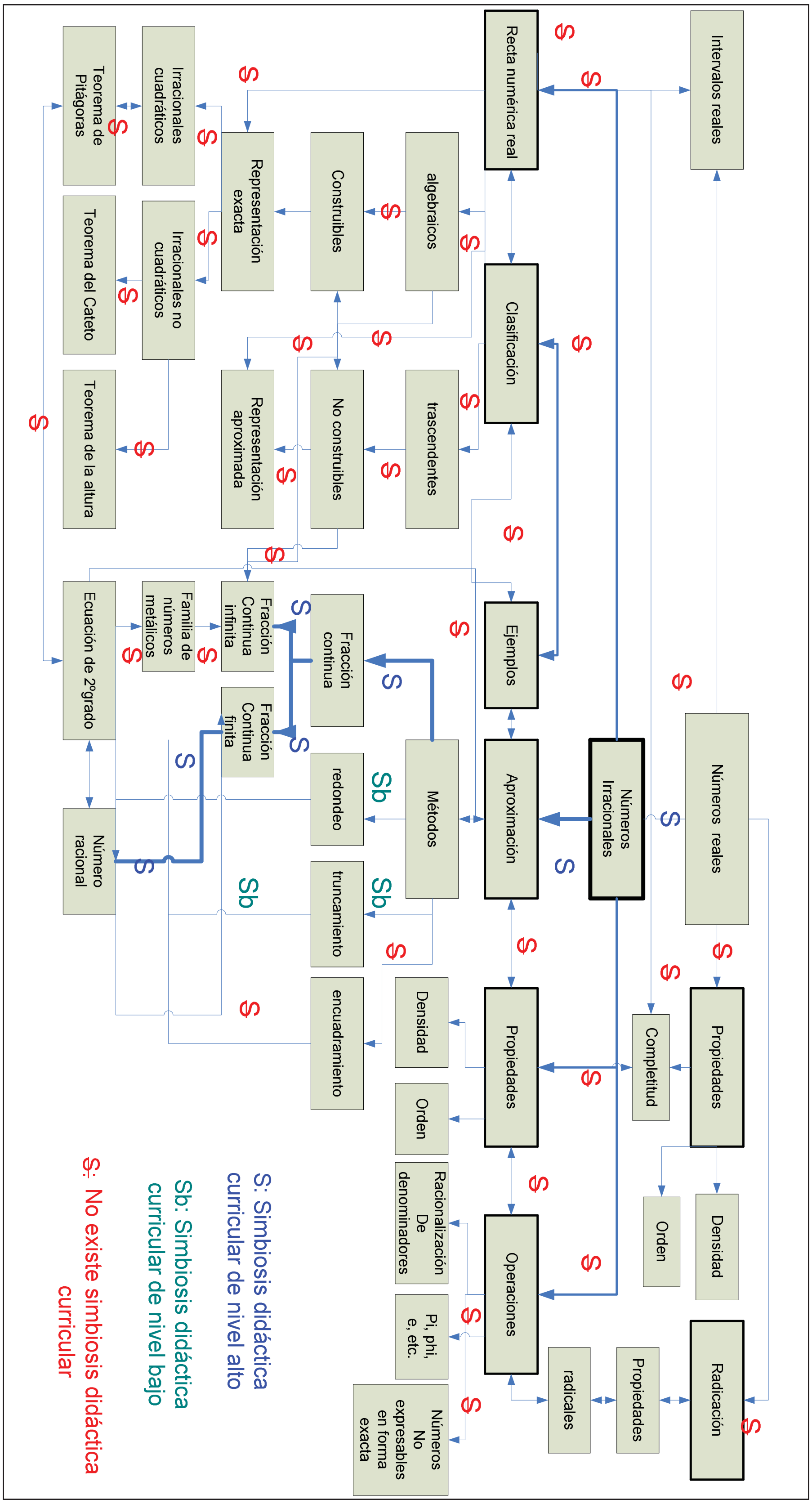


Fig.238. Recorrido didáctico-curricular del Docente 3 con interacciones entre objetos matemáticos a través de la noción de simbiosis didáctica curricular.

El recorrido didáctico-curricular realizado por el docente 3 se ajusta a lo planificado, se trata del recorrido "real" llevado a cabo por el profesor en el aula hasta esta sesión, por lo tanto no existe simbiosis entre éste objeto y otros del currículo, el docente no lo considera por ahora para su enseñanza.

Es de hacer notar que el profesor realiza una SDC de nivel "bajo" entre las nociones de número racional - irracional y las de aproximación por redondeo y truncamiento ya que es precisamente por esa baja simbiosis que aparecen conflictos semióticos interaccionales que quedan en estado residual como se señaló anteriormente. Por ahora el profesor no realiza SDC entre la noción de número irracional y el de aproximación por "encuadramiento".

11.3.2 Configuración didáctica global de la sesión 3 del grupo experimental: de los racionales a los irracionales

Si se observa la figura 239 los tiempos empleados (M01 a M65), las "cintas" de colores muestran una actividad tanto de los estudiantes como del profesor "equilibrada".

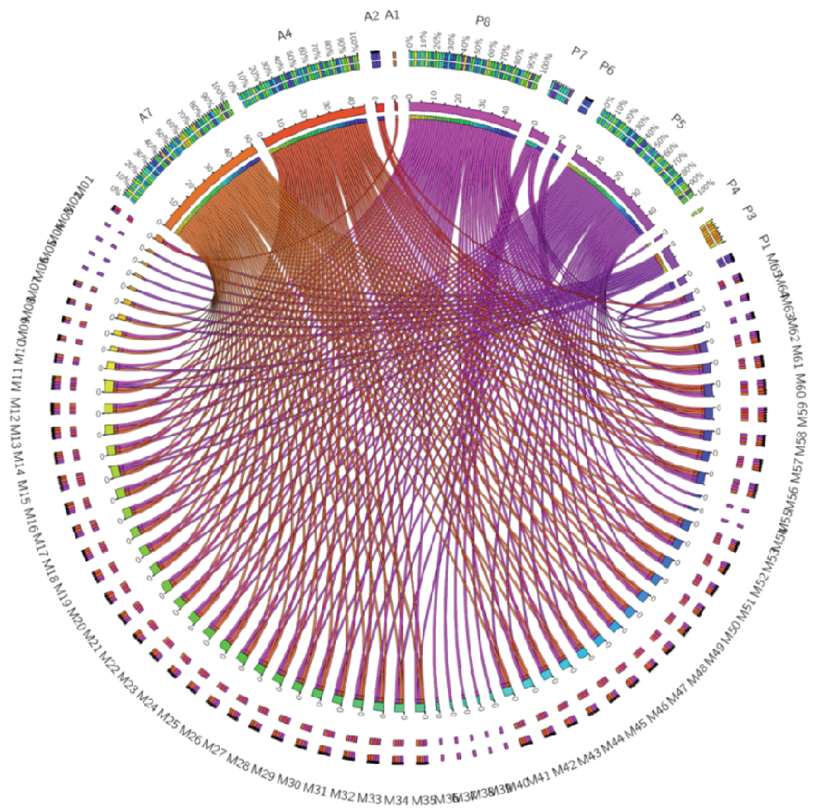


Fig. 239. Sesenta y cinco minutos de la tercera clase de matemática según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

Los grupos de alumnos resuelven las situaciones (A7) mientras el profesor acompaña el trabajo de los alumnos (P8). Desde el minuto once (M11) y hasta prácticamente el minuto sesenta y dos (M11-M62) se plantearon muchas dudas por parte de los alumnos (A4), el profesor responde algunas de ellas en forma pública (P5) mientras recorre los bancos (P8) en donde están sentados los alumnos tratando de disipar otras dudas en forma privada, hubo momento donde se expusieron públicamente cuestiones relativas al conocimiento puesto en juego.

En suma los alumnos participaron activamente en este proceso de realizar las actividades e identificar números y hacerlos corresponder a un conjunto numérico determinado pero continúa, para que el alumno avance en las actividades, una dependencia del profesor. Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración descrita de tipo "personal" con rasgos de dependencia "dialógica".

11.4 SESIÓN 4: LA IMPORTANCIA DE LA FINITUD O INFINITUD DE UN ALGORITMO

11.4.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDACTICO DE LA SESIÓN 4

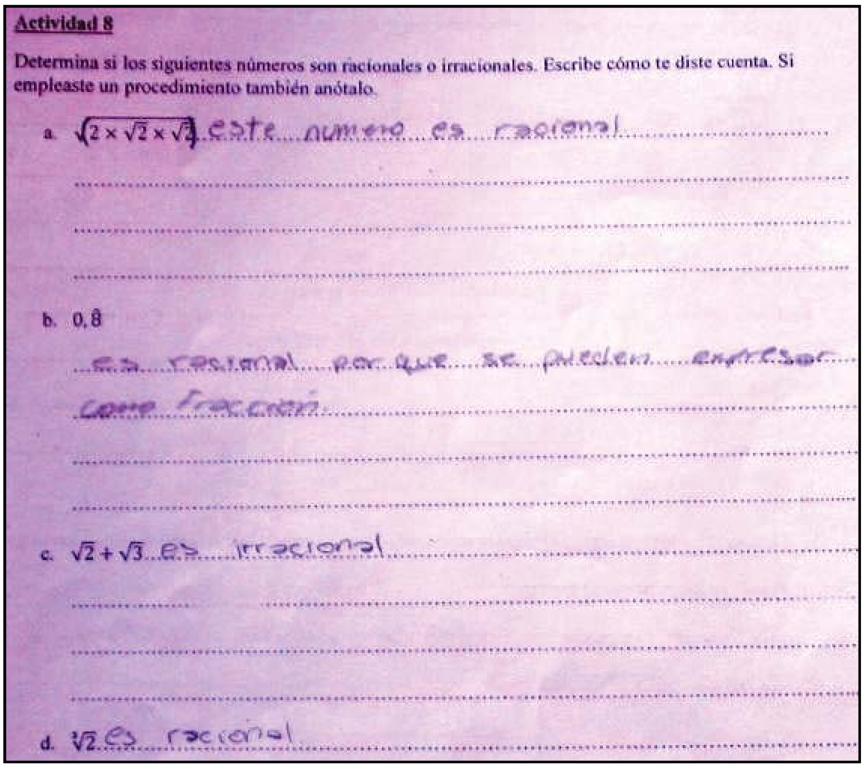
Desde el minuto uno hasta el minuto cuarenta y cuatro (M01 a M58) los alumnos se dedican a realizar las actividades propuestas (A7), mientras el profesor circula por los bancos (P8) respondiendo preguntas (P5) formuladas por los diferentes grupos de alumnos (A4). Del minuto cuarenta y cinco al cuarenta y siete (M45 al M47) el profesor retoma el significado del proceso y hace hincapié que puede emplearse este proceso para determinar si un número es racional o irracional.

Unos números se pueden expresar como fracción de enteros otros no, o inclusive, no es necesario aplicar dicho proceso en algunos números para poder diferenciarlos (tabla 101).

D3: Lo principal que hemos estado viendo es que hay unos números al que le aplicamos el procedimiento y ¿qué le pasa a ese procedimiento? A_1: Continúa (el profesor señala a los alumnos a medida que responden a la pregunta). A_2: Se detiene. D3: En otros no continúa el procedimiento, ¿en cuáles no continúa el procedimiento? Als.: En los racionales (varios alumnos). D3: ¿En cuáles? (el docente pregunta porque parece que algunos alumnos respondieron irracionales). Als.: En los racionales. D3: En los racionales me dicen que no continúa el procedimiento porque les da cero y les da error al elevar a menos uno; ¿y en los otros qué les pasaba? Als.: Seguía. D3: ¿Y cómo se llamaban esos? Als.: Irracionales (varios alumnos). D3: Irracionales (el docente enfatiza la respuesta a modo de que quede claro para los alumnos). Escribe en el pizarrón las palabras "irracional" y "racional" separadas por una línea divisoria formando dos columnas. Depende en cuáles el proceso continúa y en cuáles se detiene (el profesor señala con su mano ambos tipos de números escritos en el pizarrón). Eso es lo que tienen que determinar en la actividad 8, lo pueden hacer con el procedimiento o mirando el número (el docente se refiere a los números racionales). A_3:¿Cómo como fracción Profe, no entiendo? D3: ¿Y los racionales qué característica tienen?, o sea en esos que se detuvo el procedimiento… A_5: Son todos fracciones. D3: Son todos fracciones me dicen ahí (señala al alumno), o sea que acá queda 8/5 (escribe en la columna de los números racionales), una fracción, ahí se detiene el procedimiento. ¿Pero estos son fracciones? (señala la columna de los irracionales) A_6: No, raíces. D3: Hay que ver si son todas raíces ¿no? Porque en algunas raíces que te doy en la ocho, no sé si son irracionales, ustedes vean. En estos (señala los racionales) sí sabemos que los podemos expresar ¿cómo? Als.: Como fracción. D3: ¿Y los otros? Als.: No. D3: Los otro no. Los alumnos continúan con las actividades. A modo de refuerzo de lo hablado el docente escribe debajo de la columna de los números racionales: "sí se pueden expresar como fracción de enteros"; y debajo de la columna de los irracionales: "no se pueden expresar como fracción de enteros".

Tabla 101. Diálogo entre docente y alumnos en puesta en común.

Los alumnos, desde el minuto cuarenta y ocho al cincuenta y siete (M48 a M57) continúan realizando la actividad ocho (figuras 240 y 241).



Actividad 8

Determina si los siguientes números son racionales o irracionales. Escribe cómo te diste cuenta. Si empleaste un procedimiento también anótalo.

a. $\sqrt{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$ este numero es racional

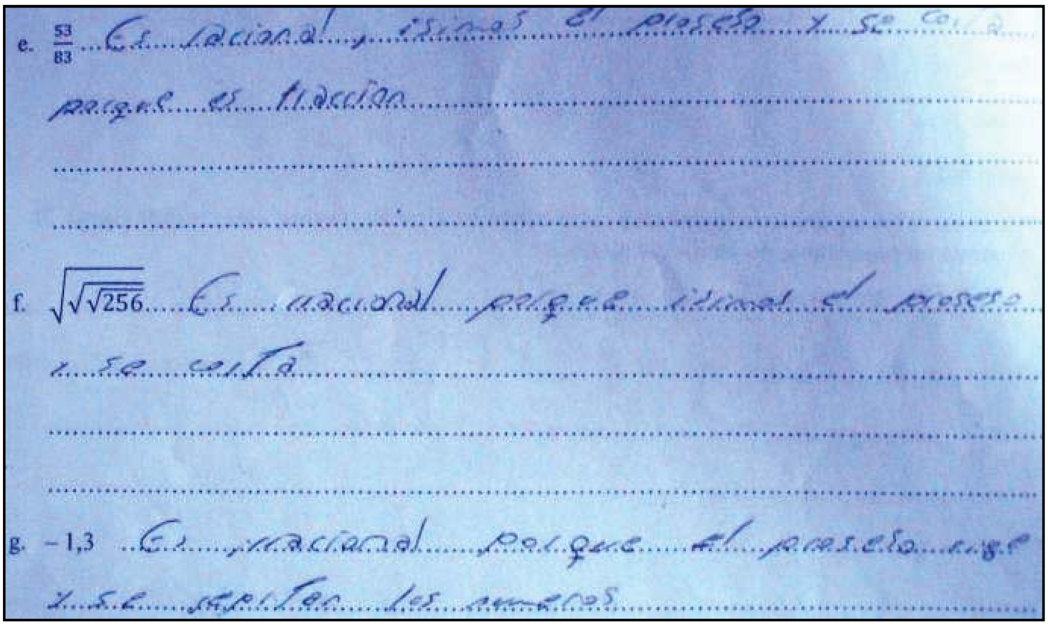
b. $0,\hat{8}$

es racional por que se pueden expresar como fraccion.

c. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es irracional

d. $\sqrt{2}$ es racional

Fig.240. Respuestas de un grupo de alumnos a la actividad 8.a, 8.b, 8.c y 8.d.



e. $\frac{53}{83}$ Es racional, isimos el proseso y se corta porque es fraccion

f. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$ Es racional porque isimos el proseso y se corta

g. $-1,3$ Es irracional porque el proseso sige y se repiten los numeros

Fig.241. Respuestas de un grupo de alumnos a la actividad 8.e, 8.f y 8.g.

Si bien existen respuestas erróneas en algunos grupos para la clasificación de ciertos números, la mayoría de las respuestas se encuentran dentro de lo que se espera como respuesta acertada. Llama la atención la clasificación del número -1,3 el cual la mayoría de los grupos (nueve) presenta como irracional (tabla 102).

Act. 8	Determina si los siguientes números son racionales o irracionales																				
	$\sqrt{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$			$0,\hat{8}$			$\sqrt{2} + \sqrt{3}$			$\sqrt[3]{2}$			$\frac{53}{83}$			$\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$			$-1,3$		
	Rac.	Irrac.	NC	Rac.	Irrac.	NC	Rac.	Irrac.	NC	Rac.	Irrac.	NC	Rac.	Irrac.	NC	Rac.	Irrac.	NC	Rac.	Irrac.	NC
Cantidad de grupos	13	1	3	13	0	3	3	11	3	2	12	3	9	5	3	11	2	4	4	9	3

Tabla 102. Respuestas de los grupos de alumnos a la actividad 8.

Esto último puede deberse a que los alumnos no habían sido enfrentados a determinar, por medio del algoritmo, el caso de un número negativo. Para este caso el profesor debe señalar a los alumnos que para aplicar el procedimiento se debe tomarse el número como positivo, luego a la expresión en FC de dicho número se le coloca un signo menos delante del corchete. Esto último no se expresa (en forma pública) por parte del docente y por ello las respuestas obtenidas por la mayoría de los grupos son erróneas ya que el procedimiento parece no detenerse. Se produce un conflicto semiótico interaccional que queda en estado residual hasta las actividades de la sesión nueve en donde estas dificultades son tratadas por el profesor.

En el minuto cincuenta y ocho (M58), ya finalizando la clase, el Profesor pregunta a los alumnos sobre la división por cero (tabla 103).

P: ¿Por qué cuando se detiene el proceso, ejemplo *4 - 4* y luego elevamos a menos uno el resultado da error? A: Porque cero no se puede elevar a menos uno (un alumno). P: Elevar cero a menos uno: $0^{-1} = \frac{1}{0}$ (el profesor escribe en el pizarrón) A: ¡No se puede hacer eso! (un alumno). P: ¡Eso!, no podemos dividir por cero.

Tabla 103. Diálogo entre docente y alumnos respecto a la problemática de la división por cero.

Toca el timbre para el recreo. Finaliza la clase.

En esta sesión el "acoplamiento" entre los holosignificados de FC y de número irracional continúa y se afianza en un contexto de uso numérico-aritmético (figura 242).

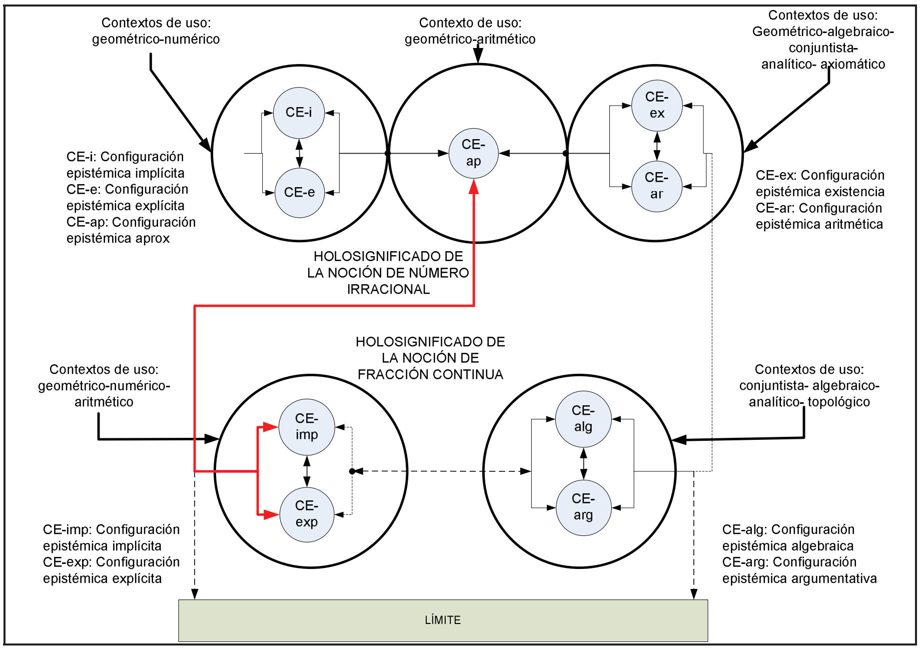


Fig.242. Acoplamiento entre holosignificados de las nociones de número irracional y fracción continua.

Los alumnos comienzan a "automatizar" el algoritmo.

> "El funcionamiento cognitivo del alumno comporta operaciones que se automatizan progresivamente (cambiar de signo cuando se cambia de miembro, aislar x en un lado de la igualdad) y de decisiones conscientes que permiten tener en cuenta valores particulares de las variables de la situación. La fiabilidad del esquema para el sujeto reposa en último extremo sobre el conocimiento que tiene, explícito o implícito, de las relaciones entre el algoritmo y las características del problema a resolver. La automatización es evidentemente una de las manifestaciones más visibles del carácter invariante de la organización de la acción. [...] Por otra parte, la automatización no impide que el sujeto conserve el control de las condiciones bajo las cuales tal operación es apropiada o no "(Vergnaud, 1990,135).

Se intensifica la SDC al realizar los alumnos varios ejercicios, se vuelve de nivel "alto" a partir de un conocimiento previo estable, donde la resolución de conflicto se observa eficaz pero muy centrada en el contexto propio original y no permite al estudiante la determinación de su campo de validez o eficacia (por ello las dificultades que acarrean la aplicación del algoritmo a números negativos). Esta falta de análisis del campo de validez limita la reutilización de los objetos emergentes al contexto propio original y, por lo tanto, su estabilidad.

Sin embargo esta SDC alta provoca un aumento en la autonomía de los alumnos en la resolución de las tareas y por ende un incremento de la autoestima en ellos.

11.4.2 Configuración didáctica global de la sesión 4 del grupo experimental

11.4.2.1 Configuración didáctica 4: la automatización de un algoritmo

Si se observa en la figura 243 los tiempos empleados (M01 a M58), las "cintas" de colores muestran una actividad tanto de los estudiantes como del profesor "compartida".

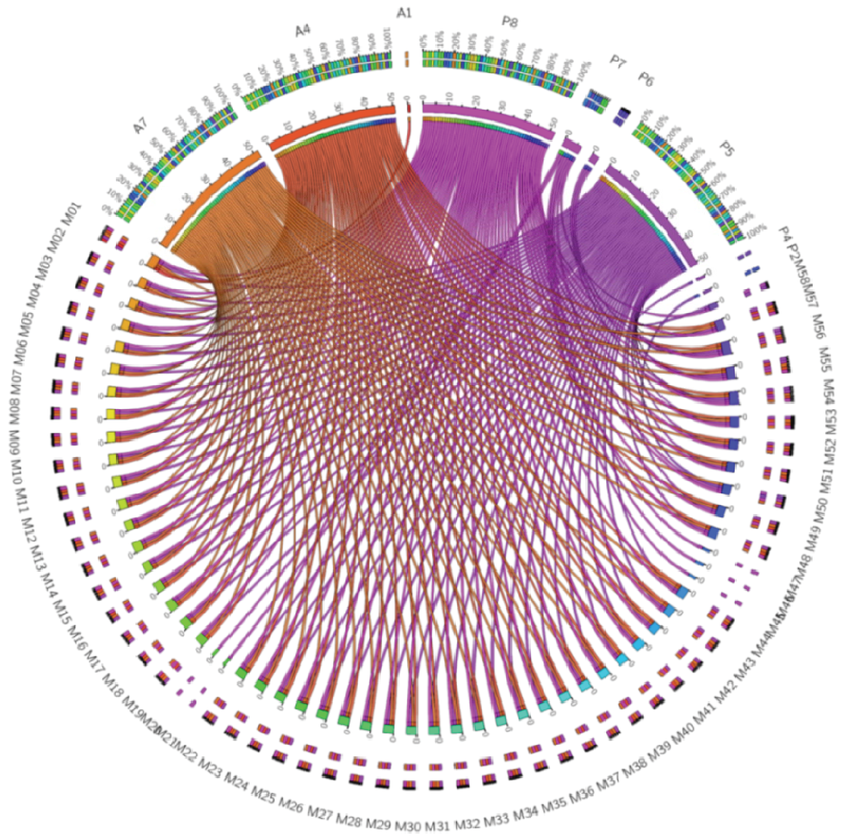


Fig.243. Cincuenta y ocho minutos de la cuarta clase de matemática según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

Los grupos de alumnos realizan muchas preguntas (A4) mientras resuelven las situaciones (A7). El profesor responde las preguntas (P5) y acompaña el trabajo de los alumnos (P8).

Desde el minuto uno (M01) se plantea dudas (A4) por parte de los alumnos y hasta prácticamente el minuto cincuenta y siete (M57). Si bien los alumnos manifiestan un mayor afianzamiento en la utilización del algoritmo mantienen la dependencia de su avance atada a las respuestas provistas por el profesor.
Durante toda la clase el profesor recorre por los bancos en donde están sentados los alumnos tratando de disipar dichas dudas (P5), hubo momento donde se expusieron públicamente cuestiones relativas al conocimiento puesto en juego (P7).
Se advierte una “simetría” en el gráfico (fig.243) marcando que las actividades en el aula han sido realizadas en igual medida por alumnos y por el profesor.

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración descrita de tipo “personal” con rasgos “dialógica”. Persiste, para que el alumno avance en las actividades, una dependencia del profesor.

11.5 SESIÓN 5: LA RELACIÓN FRACCIÓN CONTINUA – NÚMERO RACIONAL E IRRACIONAL

11.5.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDACTICO DE LA SESIÓN 5

Desde el minuto uno al doce (M01 al 12) los alumnos se dedican a realizar la tarea propuesta (A7) que en este caso no se trata de una tarea prevista, se implementa por el docente a modo de afianzar el algoritmo.

Los discentes realizan preguntas al profesor (A4), mientras el profesor recorre los diferentes grupos de alumnos (P8) respondiendo inquietudes de ellos (P5).

En el minuto trece (M13) y hasta el minuto diecisiete (M17) el profesor escribe en el pizarrón (P2) la actividad mientras los alumnos copian (A2) en sus cuadernos dicha tarea (figura 244).

Fig.244. Tarea dada por el profesor a los alumnos.

Se trata de determinar si algunos números son racionales o irracionales a modo de lograr que se transforme en rutinaria la implementación del algoritmo y reforzar las actividades dadas en las clases anteriores.

Los alumnos realizan la tarea (A7), mientras el profesor circula por los grupos orientando la tarea y respondiendo preguntas (P5).

En algunos minutos el profesor hace pública algunas cuestiones (M13-M17) o (M23-M26) relativas al reconocimiento de un número sin necesidad de aplicar el algoritmo, esto se realiza en interacción con los alumnos que aportan sus pareceres, el diálogo siguiente da muestras de ello (tabla104).

D3: Van a ver que en algunos casos no es necesario aplicar el procedimiento.
¿Alguien puede decir cómo darnos cuenta sin emplear el procedimiento?
A_7: Ya sabemos que las fracciones son racionales y que los números periódicos también son racionales, no hace falta aplicar el procedimiento (respuesta de un alumno en forma pública que es resaltada por el profesor).
D3: Entonces podemos observar y ver cuáles son números racionales, los números periódicos también se lo pueden expresar como fracción ya que son racionales como dijo su compañero.
A_8: ¡Pero entonces todos se pueden expresar como fracción! (aporte de un alumno).
D3: ¿Estás seguro que todos los números se pueden expresar como fracción? (diferentes alumnos dan su opinión).
D3: ¿Este se puede expresar como fracción? (señala en el pizarrón la $\sqrt{5}$).
Als.: Varios alumnos responden que no.
D3: Fíjate, emplea la calculadora, aplica el procedimiento, si se detiene el proceso es racional, si no se detiene es… (el profesor se dirige al alumno que plantea la duda)
A_8: es irracional (respuesta del alumno).
Los alumnos continúan su tarea, en el minuto veintinueve (M29) el profesor sociabiliza la pregunta de un alumno:
D3: ¿Qué pasa cuando el número es “finito”, termina?
A_5: Es racional (un alumno responde rápidamente).
D3: ¿Por qué es racional?
A_5: Porque termina.
D3: Él dice que porque se termina es racional, ¿qué dicen los demás?
A_8: Si hacemos el procedimiento se termina.
D3: O sea, todo número que sea finito, que termine, es racional, porque los irracionales…qué pasaba con el procedimiento?
Als.: Sigue (algunos alumnos).
D3: Aparte porque ahí en la calculadora parece que terminara el número,
la $\sqrt{5}$ parece que termina en la calculadora, eso vamos a investigar mañana con la computadora.

Tabla104. Diálogo entre docente y alumnos en puesta en común.

No parece quedar clara la diferencia entre aplicar el algoritmo de fracción continua y que este finalice en algún punto, lo que significaría que se trata de un número racional, y otra, que el número sea finito o infinito expresado en forma decimal. Por lo que la diferencia racional (finito o infinito) - FC (finita o infinita) no logra una estabilidad en la conceptualización de los alumnos, más bien surge un conflicto semiótico interaccional que queda en estado residual el cual aún no se sabe si queda resuelto con los aportes del docente.

El profesor más adelante vuelve a realizar una puesta pública esta vez resalta la cuestión de que la expresión fraccionaria de un número racional debe formarse con números enteros (tabla 105).

D3: El alumno A_8 sacó la conclusión de que mientras sea una fracción es racional, pero, hay que ver si las fracciones que estamos hablando son de números enteros. Por ejemplo esta es una fracción de números enteros (señala en el pizarrón al número 11/17) porque tengo 11 y 17, y este (señala al número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) hay que ver, ya dijimos que la raíz cuadrada de cinco no es racional, no es entero. Entonces hay que sacar la cuenta y fijarse.

Tabla105. Diálogo entre docente y alumnos en puesta en común.

El docente intenta esclarecer cuestiones relativas a la expresión fraccionaria de un número racional y diferenciarla de otras expresiones fraccionarias no racionales.

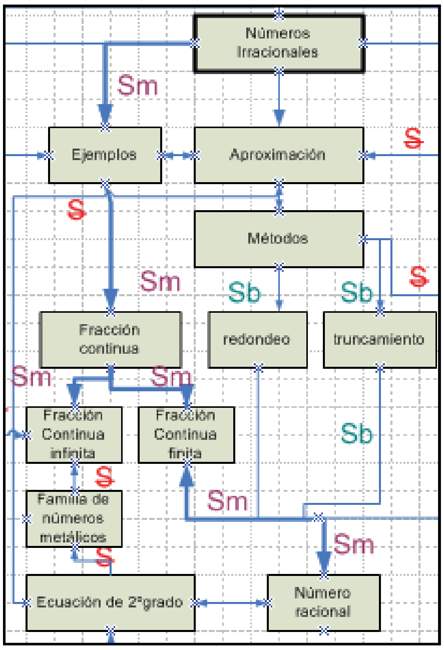


Fig.245. SDC media entre las nociones de número racional, irracional y fracción continua.

La simbiosis SDC que propone el docente, para esta sesión (figura 245), pasa entonces por la relación FC- número racional o FC - número irracional, se trata de una simbiosis de nivel "medio" ya que el conocimiento previo se observa estable. La resolución de conflictos ha conllevado intervenciones regulativas no contrastadas por lo que el profesor intenta, como se dijo, que los alumnos diferencien la notación en fracción de enteros de la formada por otros números tratando de superar dificultades compartidas por algunos alumnos. Las producciones de los estudiantes, aun siendo correctas, carecen de un sustento discursivo que garantice la estabilidad de los conocimientos emergentes.

11.5.2 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA SESIÓN 5 DEL GRUPO EXPERIMENTAL

11.5.2.1 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA 5: EL RECONOCIMIENTO DE NÚMEROS REALES POR MEDIO DE UN ALGORITMO

Si se observa en la figura 246 los tiempos empleados (M01 a M37), las "cintas" de colores muestran una actividad "variada" tanto de los estudiantes como del profesor. Los grupos de alumnos resuelven las situaciones (A7) mientras el profesor acompaña el trabajo de los alumnos (P8).

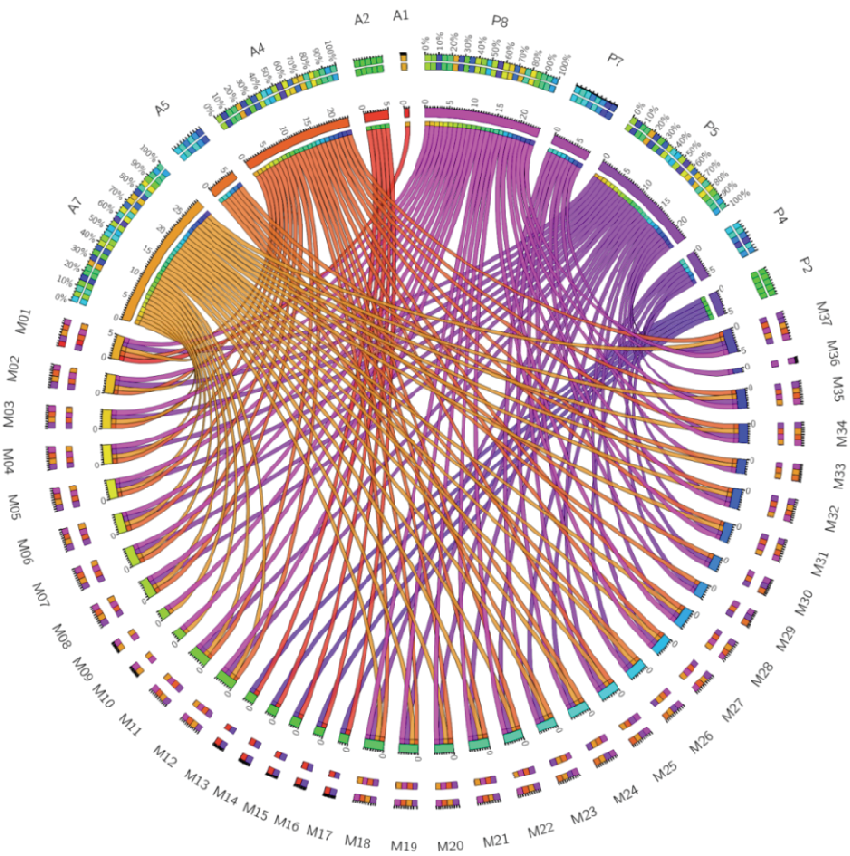


Fig.246. Treinta y siete minutos de la quinta clase de matemática según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

Las puestas en común (P7), donde se sociabilizan dudas y cuestiones comunes, fueron empleadas por el profesor para intentar hacer avanzar el conocimiento. En algunos minutos el alumno copia (A2) mientras el docente escribe en el pizarrón (P2). Se plantearon menos dudas por parte de los alumnos (A4) que en otras sesiones. El profesor recorrió por los bancos en donde están sentados los alumnos tratando de disipar dichas dudas (P8), hubo momento donde se expusieron públicamente cuestiones relativas al conocimiento puesto en juego (P7).

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración descrita de tipo "personal" con rasgos de persistencia "dialógica" y de dependencia de los alumnos con el profesor.

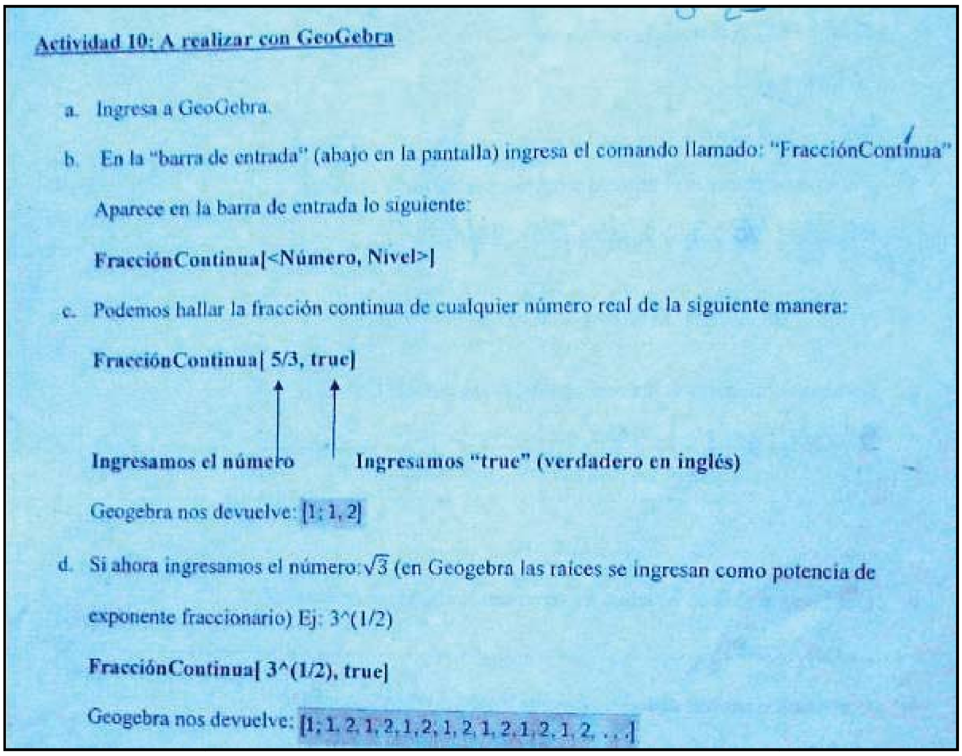
11.6 SESIÓN 6: LA HERRAMIENTA INFORMÁTICA COMO MEDIO DE EXPERIMENTACIÓN

11.6.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDACTICO DE LA SESIÓN 6

Esta clase se caracteriza por utilizar, para la actividad diez, la herramienta informática. Todos los alumnos cuentan con una netbook que fue provista por el Estado (figura 247).

Fig.247. Los alumnos del grupo experimental resuelven situaciones con ayuda de la computadora.

Los primeros ítems de la actividad diez están reservados a la utilización del programa Geogebra y la noción de fracción continua (figura 248).



Actividad 10: A realizar con GeoGebra

a. Ingresa a GeoGebra.

b. En la "barra de entrada" (abajo en la pantalla) ingresa el comando llamado: "FracciónContinua"

Aparece en la barra de entrada lo siguiente:

FracciónContinua[<Número, Nivel>]

c. Podemos hallar la fracción continua de cualquier número real de la siguiente manera:

FracciónContinua[5/3, true]

Ingresamos el número **Ingresamos "true" (verdadero en inglés)**

Geogebra nos devuelve: [1; 1, 2]

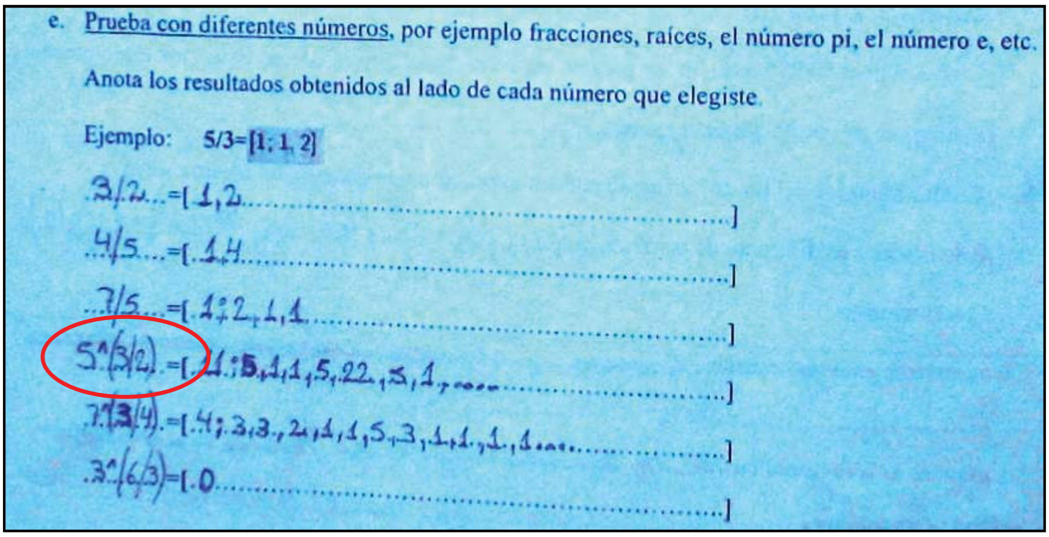
d. Si ahora ingresamos el número: $\sqrt{3}$ (en Geogebra las raíces se ingresan como potencia de exponente fraccionario) Ej: 3^(1/2)

FracciónContinua[3^(1/2), true]

Geogebra nos devuelve: [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, . . .]

Fig.248. Primeras actividades con Geogebra y la noción de fracción continua.

En actividad "10.e" la tarea que deben realizar los alumnos es "inventar" ejemplos de números y luego, con ayuda de Geogebra expresarlos como fracción continua. Un grupo de alumnos da las siguientes respuestas (figura 249).



e. Prueba con diferentes números, por ejemplo fracciones, raíces, el número pi, el número e, etc.

Anota los resultados obtenidos al lado de cada número que elegiste

Ejemplo: 5/3=[1; 1, 2]

3/2...=[1,2 ....]

4/5...=[1,4 ....]

7/5...=[1;2,1,1 ....]

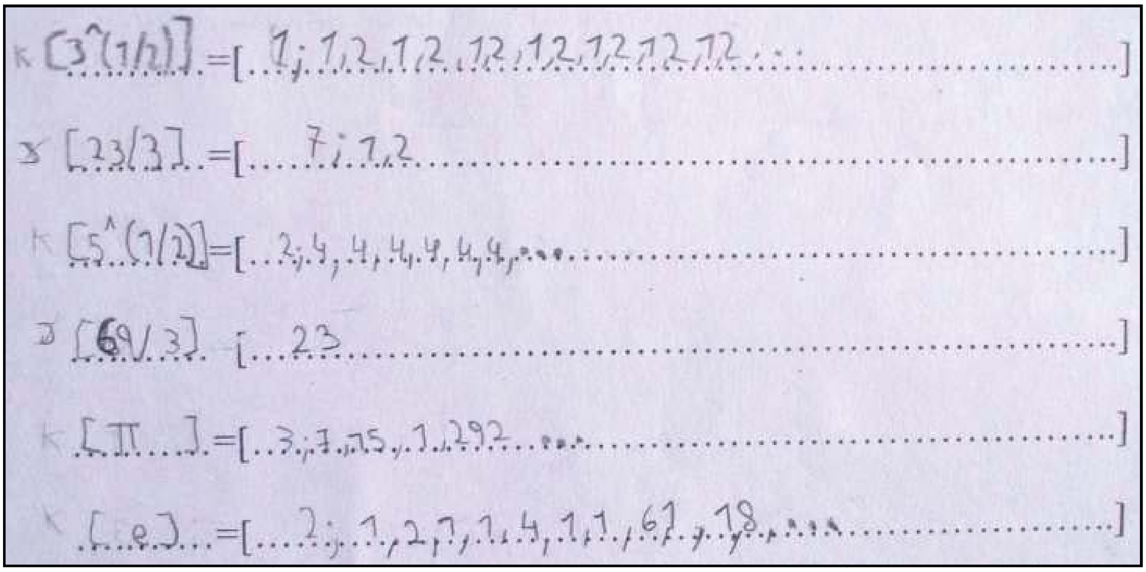
5^(3/2)=[11;5,1,1,5,22,5,1,.... ....]

7^(3/4)=[4;3,3,2,1,1,5,3,1,1,1,1.... ....]

3^(6/3)=[0 ....]

Fig.249. Respuestas dadas por un grupo de alumnos empleando GeoGebra.

En la figura 249 se señala con una elipse roja la escritura que se emplea, por algunos grupos de alumnos, en sus respuestas. Éstas obedecen a la notación que debe utilizarse en Geogebra y los alumnos la “trasladan” a la escritura matemática en el papel (figuras 250 y 251).



[3^(1/2)]=[1;1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2... ....]

[23/3]=[7;1,2 ....]

[5^(1/2)]=[2;4,4,4,4,4,4,... ....]

[69/3] [23 ....]

[π]=[3;7,15,1,292... ....]

[e]=[2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,...,1,8,... ....]

Fig.250. Notaciones de numeros dadas por un grupo de alumnos empleando GeoGebra.

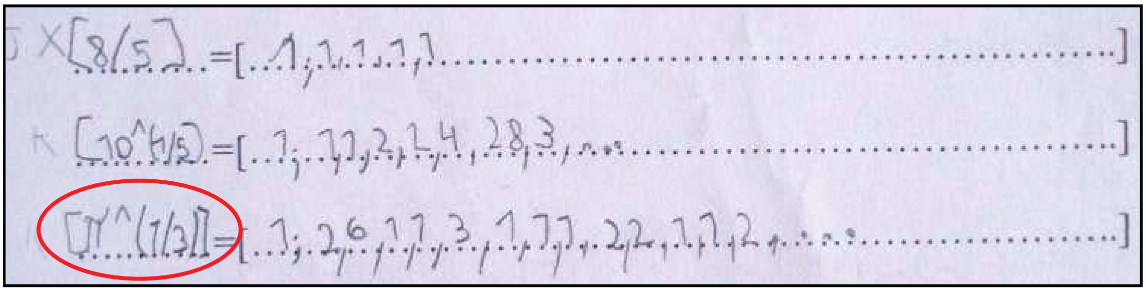


Fig.251. Respuestas dadas por un grupo de alumnos empleando la raíz cúbica de π.

Los diferentes grupos de alumnos "prueban" el algoritmo de FC con diferentes números reales, a saber, raíces de diferentes índices, fracciones, el número π, el número *e*, estos últimos sugeridos en la consigna, e inclusive prueban con raíces cúbicas del número π (fig.251) o del número *e* (fig.252).

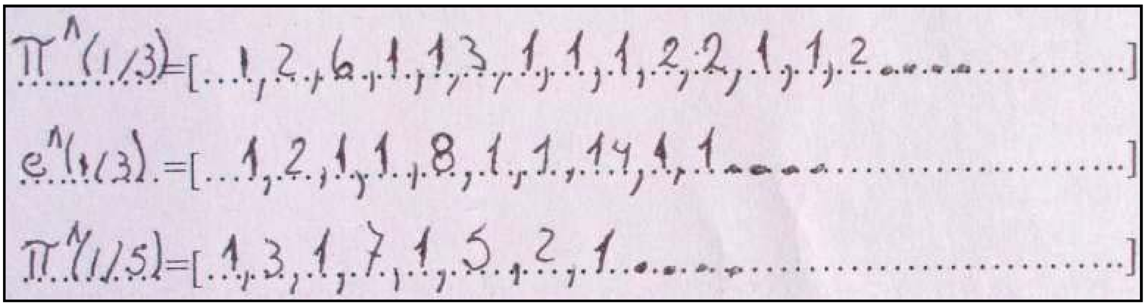


Fig.252. Respuestas dadas por otro grupo de alumnos donde se emplean raíces de los números pi y *e*.

En las preguntas "10.f" y "10.g" se trata de que los alumnos respondan, observando los resultados obtenidos en la consigna anterior, en cuáles números el proceso termina y que luego los escriban en la hoja (figura 253).

f. ¿En algunos números el proceso termina? ¿en cuáles? Escríbelos:

El proseso termina en los números racionales: $8/5$; $23/3$; $69/3$

g. ¿En algunos números el proceso continúa? ¿en cuáles? Escríbelos:

El proseso continúa en los N° irracionales : $10^{\wedge}(1/5)$; $\pi^{\wedge}(1/3)$; $3^{\wedge}(1/2)$; $5^{\wedge}(1/2)$; π ; e

Fig.253. Respuestas dadas por un grupo de alumnos de acuerdo al algoritmo de FC.

En los ítems "10.h" y "10.i" se trata de que diferencien, de acuerdo al algoritmo, los números racionales de los irracionales (figura 254).

h. ¿Qué nombre reciben aquellos números donde el proceso se detiene?

Se llaman racionales

i. ¿Qué nombre reciben aquellos números donde el proceso continúa?

Se llama irracionales

Fig.254. Respuestas dadas por un grupo de alumnos según la FC se finita o infinita.

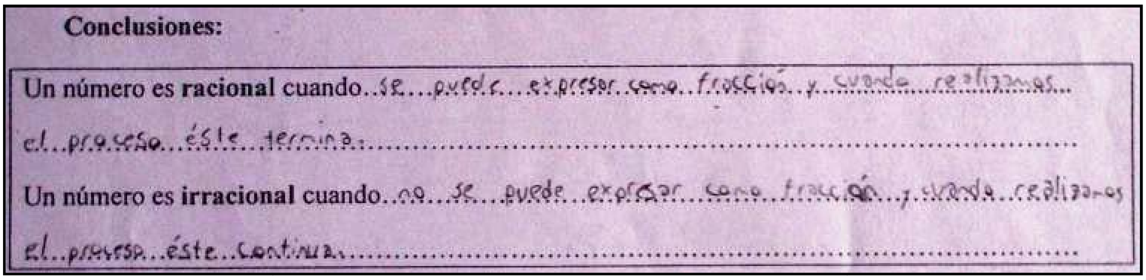
Los puntos "10.j" y "10.k" se relacionan con el ítem 10.e a través de la noción de fracción de enteros buscando también la diferenciación entre números (figura 255).

j. ¿Cuáles números del punto "e" se pueden expresar como fracción de enteros, cuyo denominador es diferente de cero? $8/5$; $23/3$; $69/3$

k. ¿Cuáles números del punto "e" no se pueden expresar como fracción de enteros, cuyo denominador es diferente de cero? $\sqrt[5]{10}$; $\sqrt[3]{\pi}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; π ; e

Fig.255. Respuestas dadas por un grupo de alumnos a la posibilidad de expresar números como fracción .

Por último, en las conclusiones, los alumnos debe ser capaces de dar una definición de número racional e irracional (figura 256).



Conclusiones:

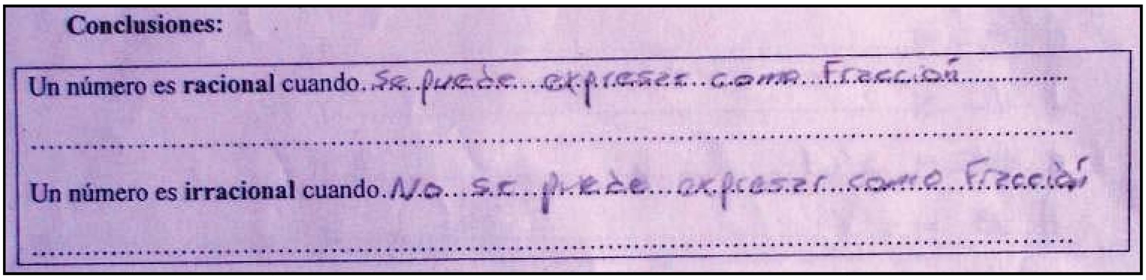
Un número es **racional** cuando se puede expresar como fracción y cuando realizamos el proceso éste termina.

Un número es **irracional** cuando no se puede expresar como fracción y cuando realizamos el proceso éste continua.

Fig.256. Respuestas dadas por un grupo de alumnos a las conclusiones.

Siete grupos relacionan (recordemos que para esta actividad son grupos de dos alumnos), para definir al número racional e irracional, al algoritmo y a la noción de fracción de enteros (figura 256).

Cuatro grupos relacionan las definiciones con la noción de fracción solamente (figura 257).



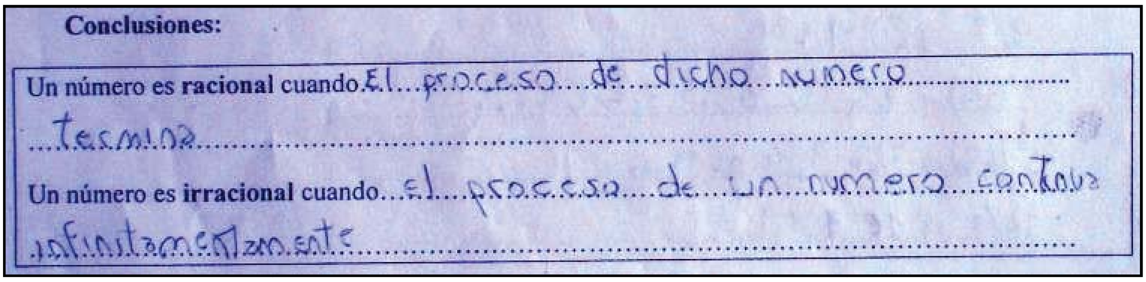
Conclusiones:

Un número es **racional** cuando se puede expresar como fracción

Un número es **irracional** cuando No se puede expresar como fracción

Fig.257. Respuestas dadas por otro grupo de alumnos a las conclusiones.

Dos grupos de alumnos definen número racional e irracional por la detención o no del algoritmo (figura 258).


Conclusiones:

Un número es **racional** cuando El proceso de dicho numero termina

Un número es **irracional** cuando el proceso de un numero continua infinitamentamente

Fig.258. Respuestas dadas por un tercer grupo de alumnos a las conclusiones.

Un grupo no responde a las conclusiones probablemente por falta de tiempo.

Se puede considerar que casi todos los grupos de alumnos dieron respuestas correctas a la redacción de conclusiones de la actividad diez.

La clase se desarrolla con una gran dosis de autonomía por parte de los alumnos.

La SDC puede considerarse "óptima" ya que el conocimiento previo se observa estable, donde las intervenciones docentes para la resolución de conflictos semióticos es eficaz (ya por una regulación expresa del docente, ya por una devolución de la tarea a los estudiantes que permite a éstos su resolución). La resolución eficaz conlleva un aprendizaje estable, que permite la reutilización de los objetos en contextos equiparables (diferenciación número racional – irracional).

11.6.2 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA SESIÓN 6 DEL GRUPO EXPERIMENTAL

11.6.2.1 Configuración didáctica 6: el algoritmo de FC y el empleo de un software "CAS" (cálculo simbólico)

Si observamos en la figura 259 los tiempos empleados (M01 a M30), las "cintas" de colores muestran una actividad tanto de los estudiantes como del profesor "equilibrada".

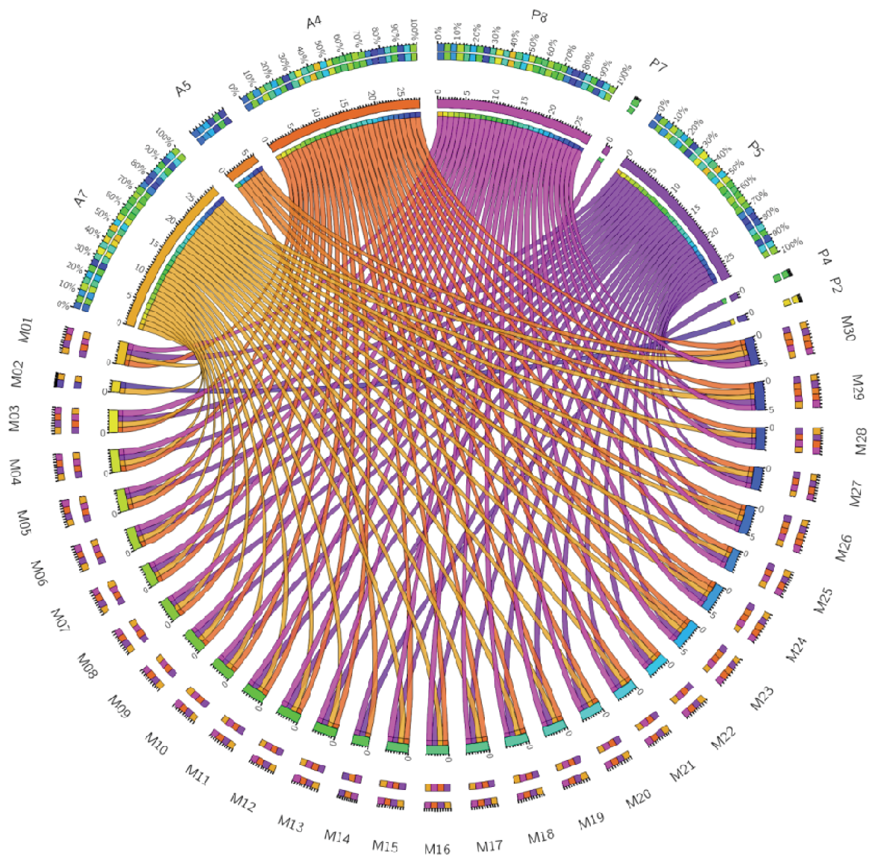


Fig.259. Treinta minutos de la sexta clase de matemática según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

Los grupos diferentes grupos de alumnos resuelven las situaciones mientras el profesor acompaña el trabajo de los alumnos.

Docente y alumnos realizan las actividades (M01-M30) en forma "paralela" y "lineal", al parecer se trata de una lógica de trabajo para esta sesión de la forma: tarea del alumno-pregunta al profesor- respuesta del docente. Esto último puede deducirse por la "simetría" del gráfico 51, donde se muestra a cada minuto el "acompañamiento" del docente a las actividades realizadas.

Se plantearon dudas por parte de los alumnos (A4), el profesor recorrió por los bancos en donde están sentados los alumnos con sus computadoras tratando de disipar dichas dudas (P8).

En el minuto catorce el docente expone públicamente cuestiones relativas al conocimiento puesto en juego (P7), se trata explicar cómo se escriben las raíces cuadradas, cúbicas, etc., en el software.

El empleo de la computadora y del hecho que tener que investigar números racionales o irracionales por su escritura en fracción continua, permite mayor grado de libertad al alumno aunque con dependencia del profesor al empleo del software. Por ello estos recurren al apoyo del docente para los casos en que el programa plantea algún inconveniente de trabajo.

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración descrita de tipo “personal” con rasgos de dependencia dialógica del profesor.

11.7 SESIÓN 7: LA RUTINIZACIÓN DE UN ALGORITMO Y SU EMPLEO PARA LA DIFERENCIACIÓN DE NÚMEROS REALES

11.7.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDACTICO DE LA SESIÓN 7

Algunos grupos continúan su trabajo sobre la actividad diez.

El profesor en sólo una oportunidad realiza una aclaración, empleando el pizarrón en forma pública (P7), esto ocurre entre los minutos siete y ocho (M07 y M08).

Esta aclaración tiene que ver con la escritura en fracción continua que devuelve Geogebra y donde es importante, para el profesor, resaltar los tres puntos suspensivos que automáticamente coloca el programa ante la presencia de un número irracional.

Para aquellos grupos que han terminado la actividad 10, el profesor escribe en el pizarrón nuevos números para continuar estudiando la racionalidad o irracionalidad de ellos (figura 260).

Fig.260. Tarea dada por el profesor a los alumnos en el pizarrón.

Los números propuestos por el profesor para que los alumnos determinen su FC correspondiente son:

$$\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1231}{13}, \frac{1}{198}, -\frac{11}{13}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3}, \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{144}}, \sqrt{8}, \sqrt{\frac{15}{49}}$$

La SDC continúa siendo "óptima" entre la noción de FC y la de número irracional ya que no parecen haber grandes dificultades, para los alumnos, en la diferenciación entre números racionales e irracionales. Por lo que el conocimiento previo se observa estable, las intervenciones docentes para la resolución de conflictos semióticos es eficaz, por una devolución de la tarea a los estudiantes, que permite a éstos su resolución y conlleva a un aprendizaje estable, que permite la reutilización de los objetos en contextos equiparables.

11.7.2 Configuración didáctica global de la sesión 7 del grupo experimental: una entrada "algorítmica" a la noción de número irracional

Si observamos en la figura 261 los tiempos empleados (M01 a M44), las "cintas" de colores muestran una actividad tanto de los estudiantes como del profesor "equilibrada".

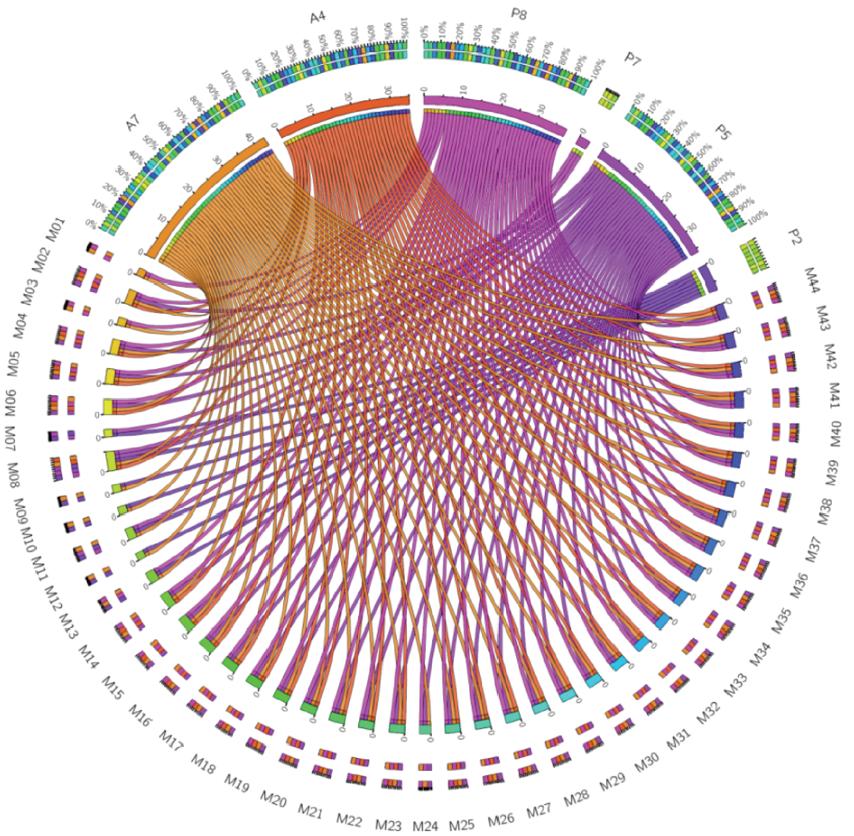


Fig.261. Cuarenta y cuatro minutos, séptima clase de matemática según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

Los grupos de alumnos resuelven las situaciones mientras el profesor acompaña el trabajo de los alumnos.

Desde el minuto uno al cuarenta y cuatro (M01 al M44), los alumnos se dedican a realizar la tarea propuesta (A7), a realizar preguntas al profesor (A4), mientras el profesor recorre los diferentes grupos de alumnos (P8) respondiendo inquietudes de ellos (P5).

Nuevamente el gráfico da muestras de "simetría" en las actividades que manifiesta dependencia del alumno del profesor en relación a las actividades. Si bien es el alumno el que realiza la mayor parte de las actividades.

Se plantearon dudas por parte de los alumnos (A4), el profesor recorrió por los bancos en donde están sentados los alumnos tratando de disipar dichas dudas,

hubo momento donde se expusieron públicamente (puesta en común) (P7) cuestiones relativas a la utilización del software.
Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración descrita de tipo "personal" con rasgos dependencia dialógica del profesor.

11.8 SESIÓN 8: LA INSTITUCIONALIZACIÓN DE NOCIONES MATEMÁTICAS COMPLEJAS

11.8.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDACTICO DE LA SESIÓN 8

La clase comienza (M01), y hasta el minuto quince (M15), con el profesor realizando una "institucionalización", se trata de recordar (gesto memorial) junto a los alumnos lo trabajado hasta ese momento.

Se recuerda los primeros problemas en donde tenían que hallar la menor cantidad de alfombras cuadradas en una superficie rectangular, sin cortarlas ni superponerlas. En algunos casos el profesor pregunta a los alumnos (P4) y los alumnos responden (A5) de acuerdo a lo vivido en las siete clases. Se recuerda el algoritmo empleado en resolver los diferentes problemas y también se recuerda cómo se hacía para obtener el resultado del proceso de fracción continua en Geogebra (gesto memorial tecnológico).

El profesor pregunta a los alumnos ¿por qué aparece un "punto y coma" al principio, luego del primer número, en la escritura de un número en fracción continua?, pregunta que no es respondida por los alumnos, por lo que el profesor responde su pregunta (P5) (tabla 106).

D3: Fíjense algo importante…aparece un punto y coma ";" (señala la expresión en FC del número 87/11) y después coma ¿Por qué aparece un punto y coma y luego coma? Als.: […] Silencio. D3: Porque corresponde a la parte entera de 87/11 y esta parte (se refiere a los cocientes parciales de la FC) corresponden a la parte decimal del número. A_9: Pero no entiendo porqué parte decimal. D3: Porque cada una de estas (señala los cocientes parciales), ya vamos a ver más adelante, son una aproximación del número. A_9: Y cuando en el número se repiten la parte decimal (se refiere a cocientes parciales periódicos). D3: No siempre, fijate que en el número "*e*" y en el número π ; no siempre se repiten, en algunos sí, en otros no.

Tabla106. Diálogo entre docente y alumnos en puesta en común.

En este diálogo surge un conflicto semiótico interaccional entre lo que el docente reconoce de la notación en FC y lo que este alumno (y probablemente los demás) interpreten de la escritura. Esto último queda en estado residual, probablemente se manifieste más adelante través de dificultades en las respuestas de los estudiantes. El profesor seguidamente pregunta a los alumnos sobre una posible "conclusión" de lo visto hasta ahora (tabla 107).

D3: ¿Cuál es la conclusión que ustedes sacan del proceso que hemos estado haciendo?
A_1: Que con los números racionales no se puede continuar con este proceso.
A_2: Si el número es una fracción no es necesario aplicar el proceso.
A_3: Igual que si es periódico.
D3: ¡Bien! si fuera el número 1,3333…ese número también me está diciendo que es racional ¿por qué?
Als.: [..] Silencio.
A_4: Porque hay que pasarlo a fracción.
D3: ¡Bien!, porque ese número se puede pasar a fracción. ¿El 1,33333… lo puedo expresar como fracción?
A: Sii (varios alumnos)
D3: Él decía muy bien (señalando a un alumno) si es racional es porque lo puedo expresar como fracción.
D3: Al revés, si es periódico, yo sé que es racional ¿por qué?
A_4: Porque lo puedo expresar como fracción.
D3: Porque lo puedo expresar como fracción (afirmando lo dicho por el alumno)
D3: Conclusión, todo número que… (espera que los alumnos respondan)
A_5: Que se pueda expresar como fracción es racional.
D3: Todo número que se pueda expresar como fracción es un número racional.
D3: ¿Todo número racional se puede expresar como fracción? (el profesor juega con las oraciones invirtiéndolas para ver si los alumnos comprenden su significado)
A_6: No (un alumno).
A: Si (varios alumnos).
D3: Ahora, si es un número irracional… (espera que los alumnos respondan).
A: No (varios alumnos)
D3: ¿No qué?
A_7: No se puede expresar como fracción.
A_8: El proceso no termina.
D3: Acuérdense que este proceso se llama "fracción continua".
Luego de estos minutos de institucionalización el profesor dicta (P3) mientras los alumnos registran en sus carpetas lo hablado (M16 a M22).
En el minuto veintitrés y hasta el minuto veintiocho (M23 a M28) el profesor continua la "institucionalización":
D3: Otra cosa que dijimos de los números irracionales además que no se pueden expresar como fracción…
El profesor trata de escuchar los aportes de un alumno (luego lo hace público).
D3: El dice que el proceso que se llama fracción continua, continuaba en los números irracionales, ¿está bien?
A: Si (varios alumnos).
D3: ¿Qué aparecía en el resultado? (se refiere a lo que Geogebra expone luego de ingresar un número de tipo irracional).
A8: Puntos suspensivos.
D3: Dijimos que los números irracionales son aquellos que no se pueden expresar como fracción de números enteros, y aparte las cifras decimales… ¿qué pasaba con las cifras decimales?
A: Nunca terminan las cifras decimales (varios alumnos).
D3: El profesor escribe en el pizarrón dos números expresados en forma decimal, uno periódico otro no. Él dice que en uno de los números se va repitiendo una cifra de tal manera que forman un período. ¿Qué quiere decir período?
A_9: Que sigue (las cifras decimales)
D3: Que ese bloque de números se continua repitiendo de la misma manera a partir de una cifra determinada. En este caso ¿cuál de los dos tiene un período?
A6: El de abajo (señala el pizarrón).
D3: Bien.
D3: El primer número tiene período doce ¿y el segundo?
A_9: Va subiendo uno (se refiere a un número irracional con un patrón)
A_{10}: Va cambiando.
D3: En realidad no podemos establecer un período.
D3: ¡Muy buena la pregunta de él! (el profesor señala a un alumno).
Los demás compañeros aplauden en señal de aprobación.
D3: Él dice: ¿no puede ser que el período abarque todo esto? (refiriéndose a todos los decimales visibles)
A_{11}: Sí, puede ser.
D3: Si, puede ser que el número "nos parezca" irracional y después continúe de la misma manera porque tiene un período muy grande.
A_6: ¿Cómo sabemos eso?
D3: ¡Muy bien! ¿Cómo sabemos entonces? (el profesor resalta la importancia de la pregunta del alumno y se la traslada a los demás alumnos).
D3: Aplicando el proceso de fracción continua. Con la fracción continua no nos vamos a equivocar (el profesor responde su propia pregunta).
Luego, desde el minuto veintinueve y hasta el treinta y siete (M29 al M37) el dicta (P3) a los alumnos lo hablado para que quede registrado en sus carpetas (A2).
D3: "Un número es irracional cuando sus cifras decimales no son periódicas".
"Hay que tener cuidado al observar las cifras decimales de un número infinito porque puede ocurrir que el período de un número sea muy grande y por lo tanto sea racional".
"Entonces para darnos cuenta si es o no irracional, podemos aplicar el procedimiento llamado fracción continua, siempre y cuando conozcamos el número que le dio origen, de otra manera no es tan sencillo conocer si el número es irracional".

Tabla107. Diálogo entre docente y alumnos en puesta en común.

Luego los alumnos copian (A2) los ejemplos de números que se observan en el pizarrón (figura 262).

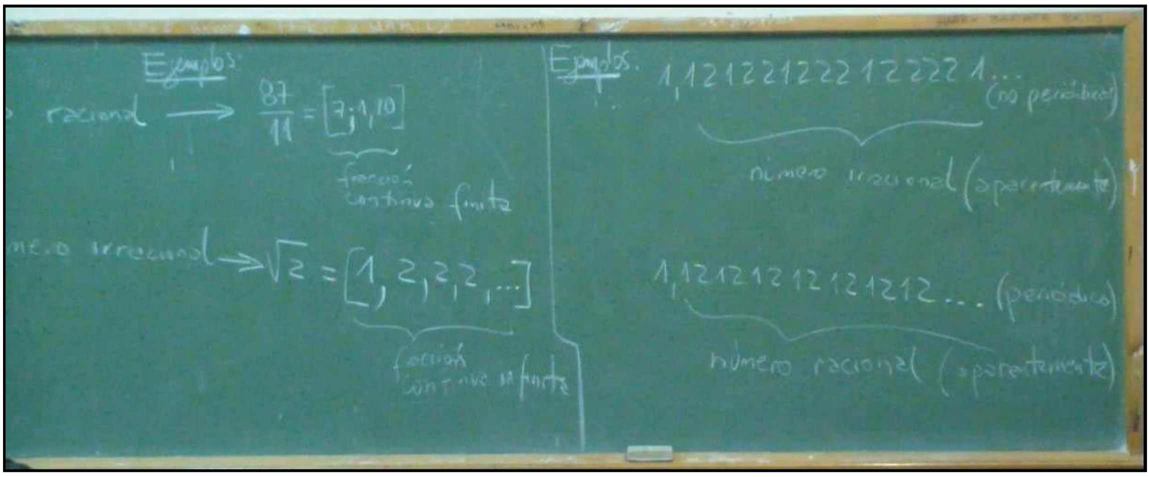


Fig.262. Ejemplos de números racionales e irracionales escritos en el pizarrón por el profesor.

Un aporte que realiza un alumno en los últimos diálogos sobre la posibilidad de que un número nos parezca irracional pero en realidad tenga un período muy grande, se analiza en el capítulo 7. También allí se estudia la otra posibilidad, a saber, que un número tenga una expresión decimal aparentemente periódica (pseudoperiodicidad) para varias cifras y luego "rompa" ese bloque periódico. Los últimos dos párrafos de la tabla 13 muestran que el docente señala esto institucionalizándolo de tal manera que quede registrado en el cuaderno de los alumnos.

La SDC esta vez se intensifica (nivel medio) entre el objeto número irracional y el de fracción de números enteros.

11.8.2 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA SESIÓN 8 DEL GRUPO EXPERIMENTAL

11.8.2.1 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA 8: LA INSTITUCIONALIZACIÓN DE LA NOCIÓN DE NÚMERO IRRACIONAL

Si se observa en la figura 263 los tiempos empleados (M01 a M51), las "cintas" de colores muestran que el docente realiza una actividad de tipo "puesta en común” (P7) durante varios minutos. Durante este lapso de tiempo el profesor pregunta (P4) a los estudiantes a medida que se desarrolla la puesta “pública” de los conocimientos.

Los alumnos responden (A5) las preguntas realizadas por el profesor, también durante varios minutos.

Es limitada, en tiempos, la tarea (A7) que realizan los alumnos (M07-M09) y donde el profesor circula por los bancos despejando dificultades (P8).
Se emplean varios minutos para que el alumno “copie” (A2) lo que el profesor escribe (P2) o dicta (P3). En algunos momentos (M39-M47) algunos alumnos no trabajan (A1).

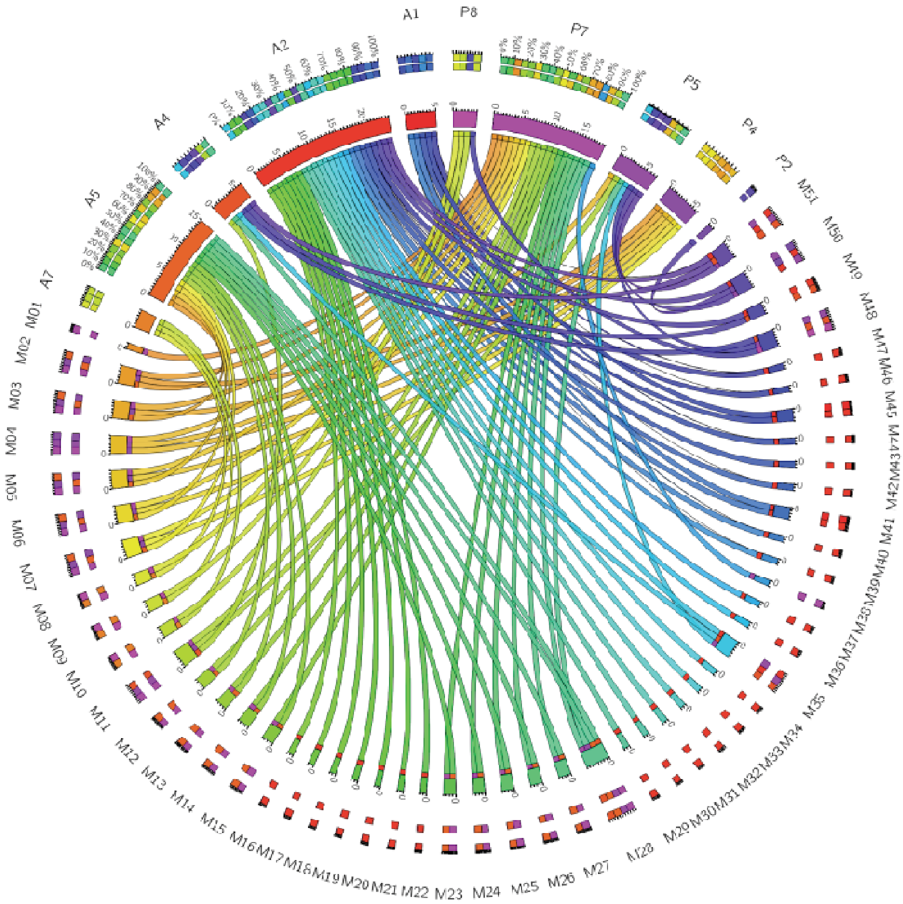


Fig.263. Cincuenta y un minutos, octava clase de matemática, según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración como “dialógica” con rasgos de “magistral”.

11.9 SESIÓN 9: EL AFIANZAMIENTO DE LO ESTUDIADO

11.9.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDACTICO DE LA SESIÓN 9

La clase comienza (M01), y hasta el minuto quince (M15), con el profesor interactuando con sus alumnos en relación a la resolución de la tarea propuesta en la clase anterior.

Se trata de ejercicios donde los discentes deben determinar si un número es racional o irracional al expresar dichos números en FC como método para clasificar números reales.

Varios alumnos pasan al pizarrón a dar los resultados obtenidos mientras el profesor analiza junto a los demás discentes las respuestas que se observan en la pizarra.

En el minuto dieciocho el profesor analiza junto a sus alumnos el número (tabla 108):

$$\mathbf{7,79799799979999\ldots}$$

D3: ¿A_5 por qué es irracional el número? (se dirige públicamente al alumno que escribió la respuesta en el pizarrón). A_5: Porque no es periódico el número. D3: ¿Por qué te das cuenta que no es periódico? A_5: Porque los nueves cada vez que se repiten van “creciendo” (las comillas son nuestras). D3: ¡Ah bien!, el se ha dado cuenta que existe una “regla de formación”. O sea que acá (señala el número en el pizarrón y va marcando los diferentes nueves) aparece un nueve, acá aparecen dos nueves, acá tres, acá cuatro, si eso continúa de la misma manera quiere decir que el número es irracional. Había alguien que dijo la otra vez que qué pasaba si después aparecía periódico, bueno nosotros vamos a aclarar que va a continuar de la misma manera, pero podría ser que se transformara en periódico. Por ahora decimos que hasta acá, hasta donde nosotros “vemos” ese número es irracional.

Tabla108. Diálogo entre docente y alumnos a propósito de la regla de formación de un número irracional.

Luego los ejercicios cambian, se trata de expresar algunos números en FC (fig.264).

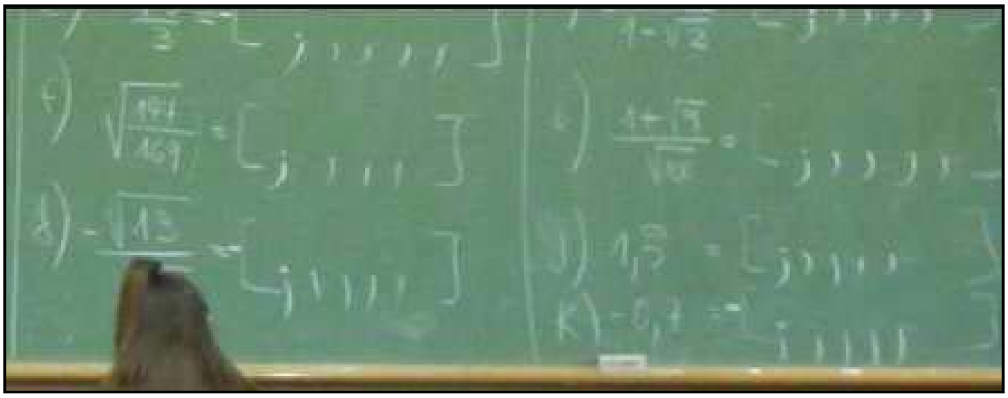


Fig.264. Ejercicios para la obtención de FC escritos en el pizarrón por el profesor.

Los alumnos continúan pasando al pizarrón a exponer sus resultados mientras en profesor los analiza junto a los demás discentes.

Se estudian el caso del número $-\frac{14}{13} = -[1; 13]$ y del número $\frac{2\sqrt{5}}{5} = [0; 1,8,2, \ldots]$. Ambos presentan diferentes dificultades a los alumnos: el primero es un número negativo, el docente explica porque Geogebra expresa la FC precedida de un signo menos. El segundo número presenta la dificultad a los alumnos al no poner ellos en la calculadora los paréntesis.

En el minuto treinta y dos el docente realiza una mini-institucionalización (tabla 109).

D3: Cuando el número sea negativo se pone el signo menos delante de la FC y se toma como si fuese positivo y ahí saco las cuentas (el docente señala el número $-\frac{14}{13} = -[1; 13]$ en el pizarrón). Cuando tenga más de un número en el numerador pongo paréntesis en la calculadora sino les va a dar mal (señala el otro número escrito en el pizarrón $\frac{2\sqrt{5}}{5}$). A_8: ¿El "b" es racional o irracional? D3: Chicos, es infinito, nosotros dijimos que cuando la FC da infinita era un número ¿de qué tipo? A_7: Irracional. D3: Porque podemos continuar con el proceso. A_{10}: Pero es periódico. D3: Esta muy bien lo que dice A_{10}, pero es periódica la "fracción continua". La FC que sea periódica se escribe así: $\frac{2\sqrt{5}}{5} = [0; 1, \overline{8,2}]$

Tabla109. Diálogo entre docente y alumnos a modo de institucionalización.

En el diálogo del profesor con el alumno A_7 plantea un conflicto semiótico de tipo interaccional al mencionar la noción de periodicidad, el docente intenta superar el conflicto expresando que la periodicidad corresponde a la FC, pero no conocemos si queda resuelto con esta acción.

Se observa un nivel de SDC "bajo" ya que la inestabilidad de los conocimientos previos se suma a la ineficaz resolución de conflictos entre la noción de FC infinita y la periodicidad de algunas FC (representada en el gráfico por la familia de los números metálicos). Esto último limita la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo un significado atomizado, sin conexiones matemáticas que viabilicen su estabilidad y reutilización en tareas posteriores (fig.265).

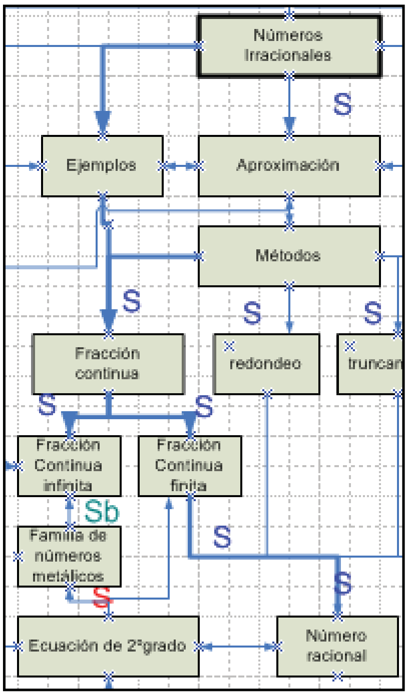


Fig.265. Simbiosis didáctica curricular de nivel "bajo" entre la FC infinita y las FC periódicas (familia de los números metálicos).

El docente luego pregunta a los alumnos ¿por qué aparece un "punto y coma" al principio, luego del primer número, en la escritura de un número en fracción continua?, pregunta que no es respondida por los alumnos, por lo que el profesor responde su pregunta (P5).

11.9.2 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA SESIÓN 9 DEL GRUPO EXPERIMENTAL

11.9.2.1 Configuración didáctica 9: la puesta en común como actividad integradora

Si se observa en la figura 266 los tiempos empleados (M01 a M56), las “cintas” de colores muestran una gran actividad por parte del profesor en relación a “puesta en común” (P7).

El docente realiza varias preguntas (P4) durante varios minutos (M01- M14), (M18-M21), (M26-M32) y algunas entre (M34-M39) que son respondidas por los alumnos (A5).

Se trata de un “momento regulativo” que el profesor considera necesario producir.

Posteriormente los grupos de alumnos resuelven las situaciones (A7) mientras el profesor en algunos momentos acompaña el trabajo de los alumnos (P8) pero esto último ocurre en los minutos (M13-M19), de (M23-M26) y de (M45-M56).

Se plantearon pocas dudas (A4) por parte de los alumnos.
El profesor escribe en el pizarrón (P2) en algunos instantes (M39-M44).

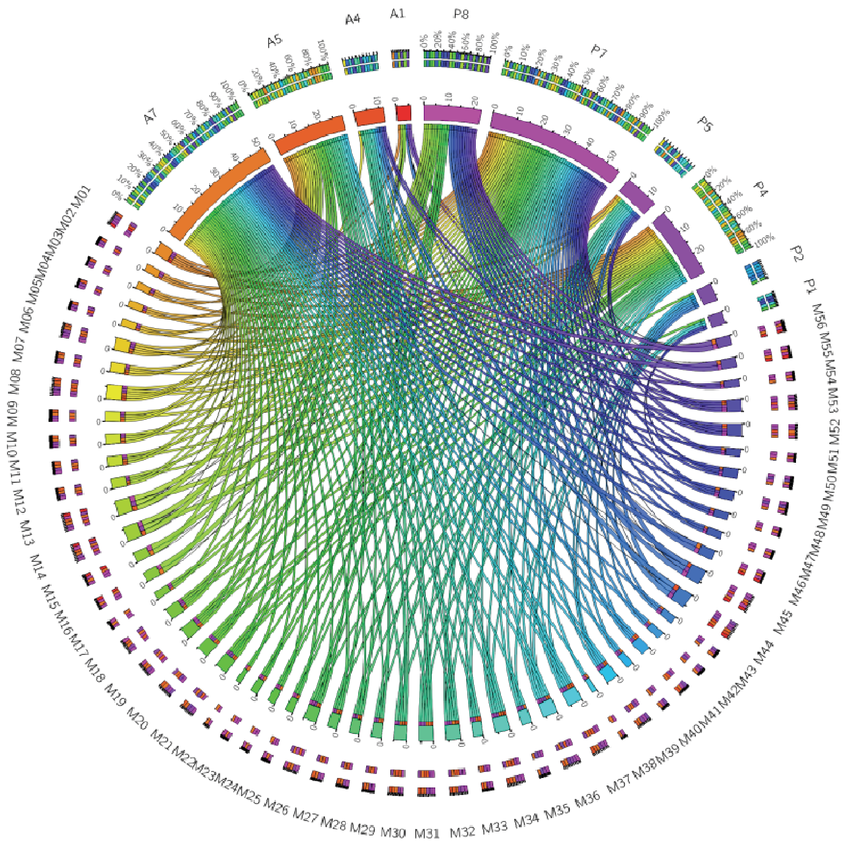


Fig.266. Cincuenta y seis minutos, novena clase de matemática según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración como “dialógica” con rasgos de tipo “magistral”.

11.10 SESIÓN 10: LA NOCIÓN DE APROXIMACIÓN COMO TRÁNSITO ENTRE LO RACIONAL Y LO IRRACIONAL

11.10.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDACTICO DE LA SESIÓN 10

La clase comienza con el profesor indicando que se comienza con una nueva tarea (actividad 11), se trata de una actividad de “aproximación”. Entre el minuto dos (M02) y el minuto sesenta y seis (M66), transcurre con el alumno realizando la tarea (A7) y también preguntas al profesor (A4) mientras el docente circula por el aula aclarando dudas (P8).

El profesor en el minuto diez (M10) observa algunas dudas de los alumnos y realiza una aclaración pública sobre cómo indicar la cantidad de cuadrados que obtienen luego de medir y dibujar dichos cuadrados en la hoja de formato A4. Los alumnos obtienen diferentes resoluciones gráficas al problema "11.a" (figuras 267 y 268).

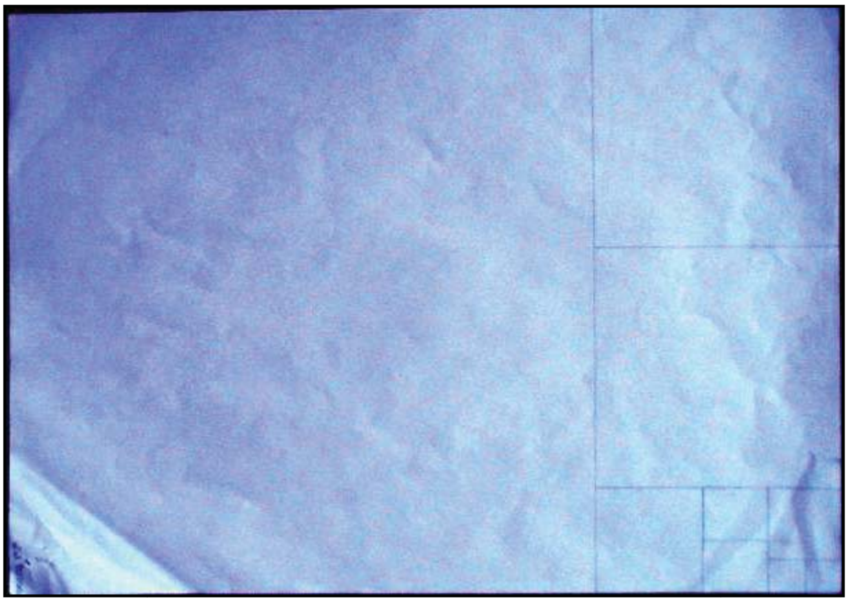


Fig.267.Resolución gráfica obtenidas por un grupo de alumnos a la actividad 11a.

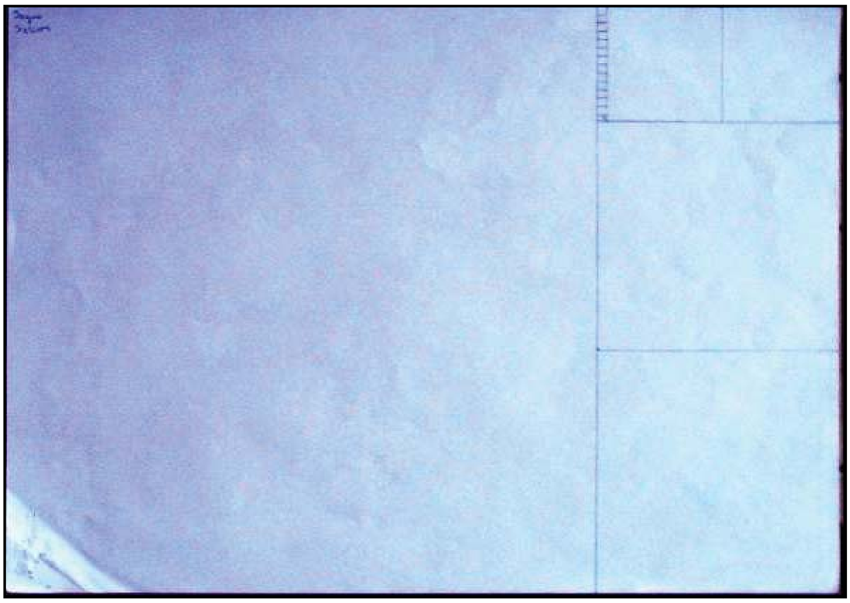


Fig.268.Resolución gráfica obtenidas por otro grupo de alumnos a la actividad 11a.

Entre los minutos veintitrés (M23) y veinticuatro (M24) el profesor realiza una puesta en común (P7) para intentar que el alumno supere las dificultades al realizar el proceso inverso del aplicado hasta ahora (dada la FC hallar la fracción correspondiente) (tabla 110).

D3: Veo que les cuesta hacer el proceso inverso; el proceso que hacemos siempre ¿cómo es? A_3: De una fracción sacamos la fracción continua. D3: Bien, pero cómo lo hacemos… Als.: Restamos la parte entera y elevamos a la menos uno (varios alumnos). D3: Bien, restamos la parte entera elevamos a la menos uno, ¿y cómo sería al revés? Als.: Varios alumnos responden y se superponen sus respuestas. D3: Entonces como lo pensaríamos al revés…elevamos a la menos uno y… Als.: Algunos alumnos expresan "restamos". D3: Y no restamos sino que sumamos como él dice (señala a un alumno). O sea si acá (señala en el pizarrón el desarrollo en FC de un número: $[1;3,5,2]$) tuviéramos que empezar hacemos 2^{-1} y después ¿qué sumamos? A_4: La parte entera. A_5: Dos. D3: Sumamos el anterior, cinco, y al resultado sumamos…(un alumno interrumpe la exposición del profesor). A_7: Profe, no me da cinco… D3: Bueno, lo que te dé (el docente intenta con el ejemplo que el alumno vea el proceso, el alumno se centra en el caso que él está resolviendo en la actividad). D3: Y al resultado otra vez lo elevamos a la menos uno y les sumamos tres (explica mientras escribe en el pizarrón). Luego volvemos a elevar a la menos uno y al resultado sumamos uno y ahí paramos.

Tabla110. Diálogo entre docente y alumnos respecto a la cantidad de cuadrados obtenidos en la actividad "11.b".

Entre los minutos treinta y seis (M36) y treinta y nueve (M39) el docente realiza una nueva puesta en común (P7), esta vez intenta clarificar las dificultades que emergen de la aproximación y de la cantidad de cuadrados obtenidas (tabla 111).

D3: Van a notar que no a todos los grupos les ha dado la misma cantidad de cuadrados, ¿por qué será? Als.: Se superponen diferentes respuestas de los alumnos. D3: Él dice porque miden mal (señala a un alumno). D3:¿Qué otra causa puede ser? A_1: No piensan. D3: A_1, no, no es eso. Als.: Se superponen diferentes respuestas de los alumnos. D3: Cada uno lo ha hecho de una manera y, a lo mejor, no le ha dado la misma cantidad de cuadrados ¿Por qué puede ser eso? Als.: […] Silencio. D3: Él dice que no sabe. Una de las cuestiones puede ser… la medida, lo que nosotros midamos con la regla siempre tenemos un error al medir, no medimos exactamente por más que uno lo quiera hacer muy preciso no lo hacemos exacto. Siempre que nosotros medimos no lo hacemos en forma exacta por más que lo hagamos en milímetros o utilicemos un rayo laser, siempre vamos a tener un error, entonces es por eso que aparece esa diferencia en los cuadraditos y por eso aparece ese símbolo en la raíz cuadrada de dos (dibuja en el pizarrón: $\sqrt{2} \cong$) o sea que aproximadamente va a ser igual a eso, ya vamos a ver qué ocurre si utilizamos más cifras. Nosotros hemos obtenido una aproximación pero comparándola con esto: $[1; 2,2,2,2,2] = \frac{297}{210}$ vemos que a veces no nos da igual, hemos empezado con 1 y después con 2,2,2,2,… a algunos chicos les dio otros numeritos y no pudieron obtener ese valor (señala a la fracción $\frac{297}{210}$) ¿por qué? Porque tenemos error al medir, esto no nos da error (señala nuevamente la fracción), el procedimiento que nosotros hacemos no nos da error pero al medirlo no nos da igual porque tendríamos que hacer cuadraditos tan chiquitos que a veces no nos da. El procedimiento da 2,2,2,2, y en algún momento para. Nosotros hemos hecho 1,2,2,2 (señala una hoja con los dibujos realizados por los alumnos) y de ahí no podemos seguir tanto con 2,2,… A_4: Ah! ya entiendo! D3: Entonces nos estamos aproximando, no podemos medir exacto (señala la hoja que tiene en la mano) y por eso usamos ese símbolo de aproximación. Sigan.

Tabla111. Diálogo entre docente y alumnos respecto a la cantidad de cuadrados obtenidos en la actividad “11.b”.

En este diálogo se manifiesta la interacción “dialéctica” entre la noción de aproximación y la de exactitud, para los alumnos lo ostensivo (la representación en la hoja de papel) se “mimetiza” con lo no ostensivo (la noción de aproximación) lo que provoca dificultades.

En la siguiente tabla se pueden observar las “configuraciones” de cuadrados producidas por cada grupo de alumnos para poder cubrir con dichos polígonos el rectángulo formado por la hoja A4. Se puede observar que el grupo Nº1 es el único que dibuja la cantidad correcta de cuadrados.

Grupo	Cuadrado "grande"	Cuadrados	Cuadrados	Cuadrados	Cuadrados	Cuadrados	Total de cuadrados
Nº1	1	2	2	2	2	2	11
Nª2	1	2	2	2	2		10
Nº3	1	2	2	2	2		10
Nº4	1	2	2	2			7
Nº5	1	2	2	2			7
Nº6	1	2	2	2			7
Nº7	1	2	3				6
Nº8	1	2	3				6
Nº9	1	2	2	3			8
Nº10	1	2	2	4			9
Nº11	1	2	2	4	4		13
Nº12	1	2	2	3	2		10
Nº13	1	2	2	13	1	2	21
Nº14	1	2	1	2	1	2	9

Tabla112. Configuraciones de cuadrados dibujados por los diferentes grupos de alumnos.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la tabla 18 y en el diálogo entre el profesor y los alumnos (tabla 17) se puede destacar la gran complejidad didáctica que manifiesta la noción de aproximación, tanto cuando se trata de un número racional infinito como de un número irracional.

Si bien la SDC aparece de nivel alto en la transición numero racional - aproximación decimal - número irracional, se revela de nivel bajo en la aproximación por FC, por ello persisten dificultades que los alumnos, en algunos casos, no pueden explicar: "D3: él dice que no sabe" (tabla 17). Un conflicto semiótico interaccional surge en el diálogo del profesor con los discentes, no se conoce, hasta esta instancia, si éste queda resuelto con las explicaciones del profesor.

Finalizando la clase, entre los minutos sesenta y siete a setenta (M67-M70) el docente explica el encuadramiento por FC (exceso y defecto) de un número irracional.

Se observa entonces una SDC de nivel bajo todavía (figura 269), entre la aproximación y el método por encuadramiento (actividad "12.c").

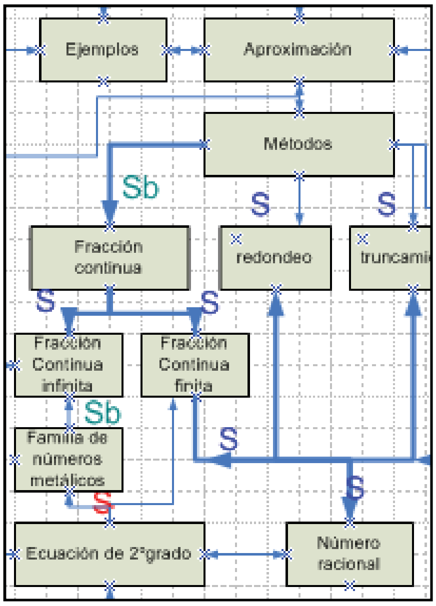


Fig.269. Simbiosis didáctica curricular entre algunas nociones matemáticas.

La inestabilidad del conocimiento previo restringe la eficacia de las intervenciones y condiciona la emergencia de conocimientos estables.

11.10.2 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA SESIÓN 10 DEL GRUPO EXPERIMENTAL: EL DESARROLLO DE LA FC COMO "ALGORITMO INVERSO" PARA APROXIMAR NÚMEROS REALES

Si se observa la figura 270 los tiempos empleados (M01 a M70), las "cintas" de colores muestran una actividad tanto de los estudiantes como del profesor "equilibrada". Los grupos de alumnos resuelven las situaciones (A7) mientras el profesor acompaña el trabajo de los alumnos (P8).

Se plantearon dudas por parte de los alumnos (A4), el profesor recorrió por los bancos en donde están sentados los alumnos tratando de disipar dichas dudas, hubo momentos donde se expusieron públicamente cuestiones relativas al conocimiento puesto en juego y donde el docente escribe en el pizarrón (P2). Por algunos momentos algunos alumnos no realizan la tarea propuesta (A1).

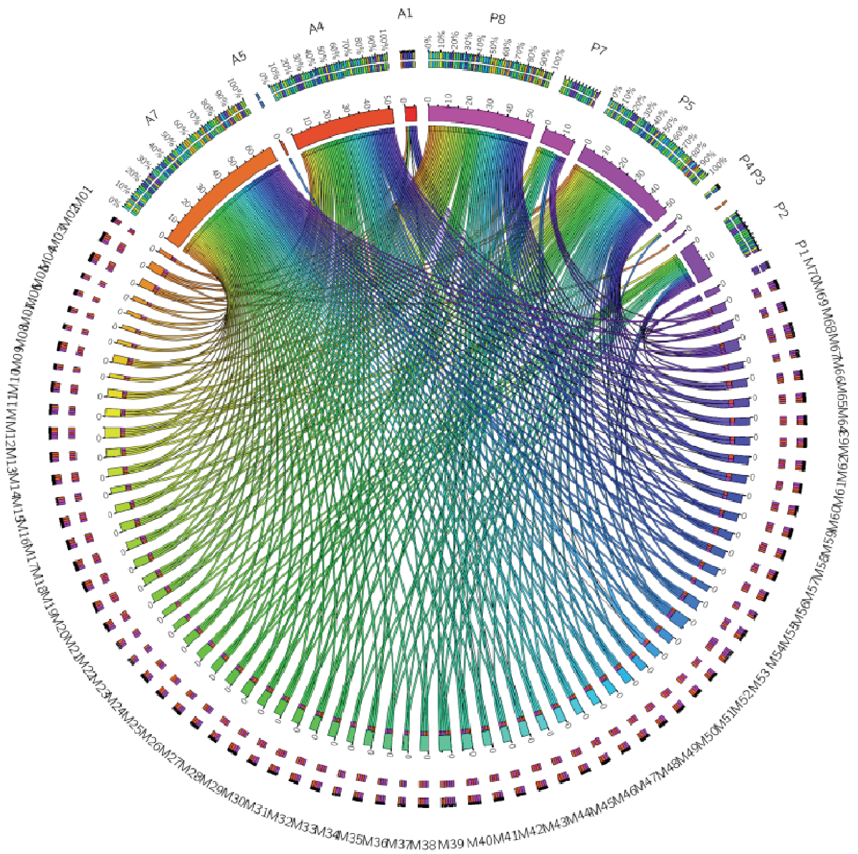


Fig.270. Setenta minutos, décima clase de matemática según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración descrita de tipo “personal” con rasgos de dependencia dialógica del profesor.

11.11 SESIÓN 11: LA APROXIMACIÓN DE NÚMEROS IRRACIONALES

11.11.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDACTICO DE LA SESIÓN 11

Los primeros minutos de la clase (M01-M06) trascurren con el profesor realizando una puesta en común (P7) donde simultáneamente explica (P1) y escribe en el pizarrón (P2) sobre la aproximación por “exceso” y por “defecto” de un número real. A continuación se detalla el diálogo realizado (tabla 113).

D3: Hay una parte donde les pregunto qué quiere decir por exceso y por defecto. Fíjense que los números que hemos ido obteniendo están entre 1,4 y 1,5. Después pusimos un número un poco más preciso ¿qué número tenía? A_1: 1,414201182 D3: Bueno, ese número es un poco más preciso que 1,4, aunque todavía le falta y a este también (señala en el pizarrón el otro número), nos vamos aproximando a un número que está entre esos valores. A esta aproximación donde le está faltando valores, le decimos por defecto, en cambio estos valores es como que se han pasado de ese número, son mayores que éste. Estos números son menores que el número que queremos aproximar y estos como que son mayores, se han pasado de ese número (señala en el pizarrón). La llamamos aproximación por exceso. A_2: Está redondeado. D3: Es como que están pasados, exacto está redondeado (señala al alumno A_2), este redondeo es cuando se pasa de ese valor, el número es más grande que el número que nosotros nos estamos aproximando, aunque sea en pequeñas cifras. Si uno es 1,41 y el otro es 1,42 ¿cuál es por defecto y cuál por exceso? Als.: Diferentes respuestas se superponen. D3: ¿Este es por?... Als. Defecto D3: ¿Por qué? A_3: Porque no ha crecido. D3: Porque es menor que el número que nosotros tenemos acá (señala en el pizarrón). Y este numerito está aproximado por exceso ¿por qué? Als.: Porque es mayor D3: Decimos que este número va a ser menor que este (muestra en la pizarra). Después 1,413 y 1,414 ¿Cuál es por defecto y cuál por exceso? Als.: Señalan el número de la izquierda. D3: ¿Cuál es por defecto? Als.: El de la izquierda (varios alumnos). D3: ¿Por qué? Als.: Porque es menor. D3: ¿Y este cómo es? (señala el otro número). Als.: Mayor. D3: Mayor, por exceso. Y así vamos poniéndolos (se refiere a los números en las actividades). D3: Fíjense que difieren en una milésima cada uno de estos números, este es menor y a su vez este es menor que este otro (señala en el pizarrón), el número está entre los dos, al que nos vamos aproximando. Eso quiere decir defecto y exceso.

Tabla113. Diálogo entre docente y alumnos respecto a la actividad "12" de aproximación.

Luego los alumnos continúan, entre los minutos (M07-M22), realizando las tareas, algunos de ellos no trabajan (A1), mientras el profesor circula por el aula (P8) respondiendo (P5) inquietudes de los alumnos (A4).

Entre los minutos veintitrés y veinticuatro (M23-M24) el docente produce una puesta pública relativa a los ítems "12.d" y "12.e".

Posteriormente (M25-M54) los alumnos continúan realizando las tareas hasta la finalización de la clase mientras el profesor acompaña la evolución de los mismos. En estos minutos muy pocos alumnos no realizan la tarea solicitada.

En esta sesión se observa una SDC de nivel "alto" entre la noción de número irracional y la de aproximación por "encuadramiento", el conocimiento previo se manifiesta estable, la resolución de conflictos se observa eficaz, aunque centrada en el contexto de la aproximación, por defecto y por exceso, que no permite al estudiante la determinación de su campo de validez o eficacia a otros contextos de uso.

11.11.2 Configuración didáctica global de la sesión 11 del grupo experimental: los momentos regulativos

Si se observa la figura 271 los tiempos empleados (M01 a M54), las "cintas" de colores muestran una actividad tanto de los estudiantes como del profesor "variada".

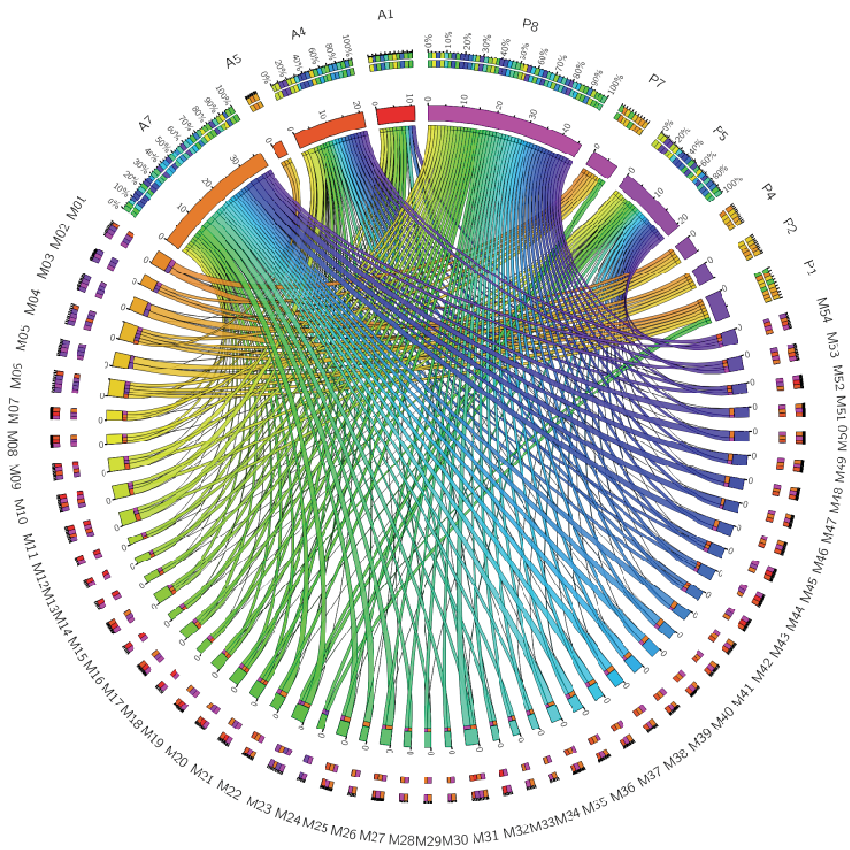


Fig.271. Cincuenta y cuatro minutos, undécima clase de matemática según las actividades realizadas por alumnos y por el profesor.

Los primeros siete minutos el profesor produce un "momento regulativo" por medio de una puesta en común (P7). Éste realiza preguntas (P4) a los alumnos que son respondidas por algunos de ellos (A5).

Los grupos de alumnos resuelven las situaciones (A7), aunque en determinados momentos (M07-M21), para algunos alumnos, esto último no ocurre (A1).

El profesor acompaña el trabajo de los alumnos (P8) respondiendo (P5) las preguntas (A4) realizadas por ellos durante toda la sesión.

Hubo momentos (M01-M06 y M23-M24) donde se expusieron públicamente cuestiones (P1) relativas al conocimiento puesto en juego y donde el docente escribe (M02-M06) en el pizarrón (P2) mientras explica.

El profesor solicita traer la computadora y continuar trayendo la calculadora para la próxima clase.

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración descrita de tipo "personal" con rasgos de dependencia dialógica del profesor.

11.11.3 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LAS SESIONES 12, 13, 14 Y 15 DEL GRUPO EXPERIMENTAL.

En las sesiones N° 12, 13 y 14 los alumnos continuaron trabajando de la misma manera que en la sesión 11 y hasta finalizar las actividades propuestas. Continúa la dependencia del profesor para poder avanzar, con momentos de autonomía.

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a las configuraciones descritas de tipo "personal" con rasgos de dependencia dialógica del profesor.
En la sesión N°15 los alumnos comienzan a realizar el trabajo práctico previsto denominado por el docente "de los racionales a los irracionales".
A medida que van obteniendo resultados algunos alumnos pasan al pizarrón a mostrarlos a sus compañeros. Estos son revisados y analizados por el profesor junto a todos los discentes en forma pública.

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración descrita de tipo "personal" y "dialógica".

11.12 SESIÓN 16: APROXIMACIÓN DE UN NÚMERO IRRACIONAL POR EL DESARROLLO EN FC

11.12.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDACTICO DE LA SESIÓN 16

Los primeros dos minutos de la clase (M01-M02) los alumnos continúan realizando las actividades del trabajo práctico integrador.

Para el minuto tres (M03) y hasta el minuto nueve (M09) el profesor, en forma pública, recuerda lo trabajado intentando recuperar la memoria didáctica de los alumnos (tabla 114).

D3: El que va por el cuatro (ejercicio N°3) y no sabe como aproximar el numero $\sqrt{8}$ en FC, pásenlo a FC y después se empieza con el proceso inverso (escribe en la pizarra mientras habla) ¿se acuerdan como era? (no da tiempo a que respondan los alumnos, se responde a sí mismo) [; , , , , 3]por ejemplo 3^{-1} y sumamos el anterior (se refiere al cociente parcial anterior en el desarrollo de FC) y así sucesivamente. Cada aproximación la van a ir colocando por defecto y por exceso, eso es lo que hacen.

Tabla114. Diálogo entre docente y alumnos respecto a las actividades del trabajo práctico integrador.

El docente intenta recuperar el "proceso inverso", se trata de dado el desarrollo en FC hallar la fracción correspondiente o las aproximaciones a un número irracional. Por ejemplo:

$$\sqrt{8} = [\ 2\ ;\ 1\ ,4\ ,1\ ,4\ ,\ldots]$$

Primera aproximación: $[\ 2\ ;\ 1\ ] = 1^{-1} + 2 = 3$

Segunda aproximación: $[\ 2\ ;\ 1\ ,4\ ]$

$$4^{-1} + 1 = \tfrac{5}{4}\ ;$$

$$\left(\tfrac{5}{4}\right)^{-1} + 2 = \tfrac{14}{5} = 2{,}8$$

$$[\ 2\ ;\ 1\ ,4\ ] = 2{,}8$$

Tercera aproximación: $[\ 2\ ;\ 1\ ,4,1\ ]$

$$1^{-1} + 4 = 5 \ \longrightarrow\ ;\ \ 5^{-1} + 1 = \tfrac{6}{5} \ \longrightarrow\ ;\ \ \left(\tfrac{6}{5}\right)^{-1} + 2 = \tfrac{17}{6}$$

$$[\ 2\ ;\ 1\ ,4,1\ ] = \frac{17}{6} = 2{,}8\hat{3}$$

El profesor entre los minutos quince (M15) y dieciséis (M16) realiza una puesta en común dando algunas indicaciones del proceso de obtención de las aproximaciones (tabla 115).

D3: Chicos, para ir aproximando [; , , , ,] primero empiecen por esos dos (señala los dos primeros cocientes parciales del desarrollo en FC), después con tres, después con cuatro, después con cinco, van aproximando haciendo el proceso inverso.

Tabla115. Diálogo entre docente y alumnos respecto a las actividades del trabajo práctico integrador.

El docente percibe que las dificultades que manifiestan los alumnos se relacionan con el proceso de aproximación dado el desarrollo en FC de un número irracional.

Esta (SDC) entre el desarrollo en FC y la noción de aproximación se observa con un nivel "bajo" ya que la resolución de conflictos es ineficaz (parcial o totalmente), limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo un significado atomizado, sin conexiones matemáticas que viabilicen su estabilidad y reutilización en tareas posteriores. Se observa así un conflicto semiótico interaccional que queda en estado residual y que se volverá a manifestar en la sesión 17 y en las respuestas a las evaluaciones tanto de proceso como integradora que analizaremos más adelante en el capítulo doce.

11.12.2 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA SESIÓN 16 DEL GRUPO EXPERIMENTAL.

Si se observa la figura 272 los tiempos empleados (M01 a M27), las "cintas" de colores muestran una actividad tanto de los estudiantes como del profesor "variada". En los primeros minutos (M03-M09) el profesor explica (P1) y escribe (P2) mientras realiza una puesta en común (P7) junto a los alumnos. Les realiza preguntas (P4) que son respondidas por algunos de ellos (A5).

Los discentes realizan la tarea (A7) durante varios minutos (M10 a M27) mientras el profesor acompaña disipando dudas de ellos (P8).

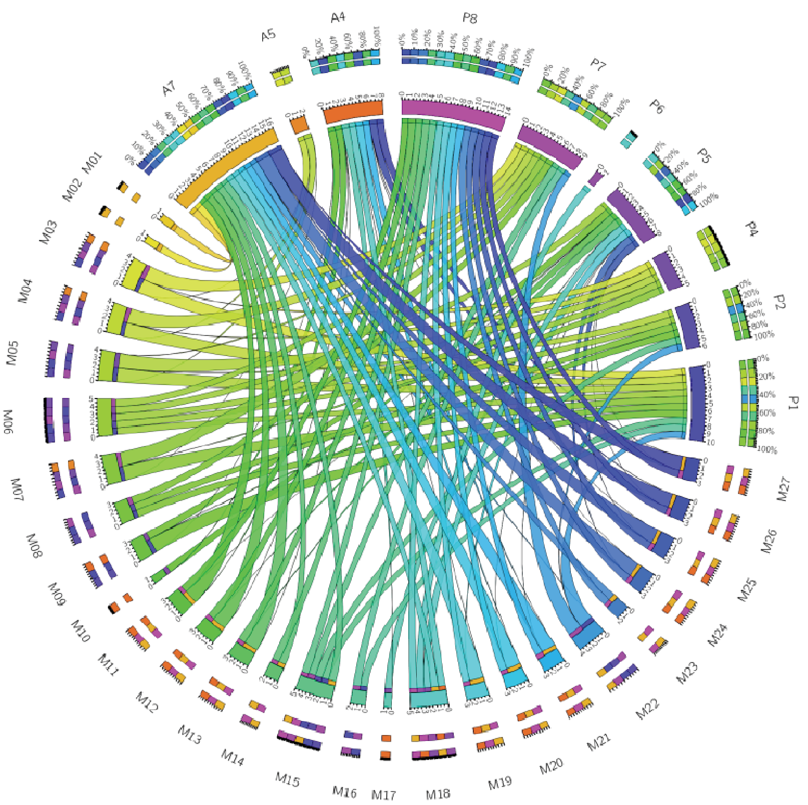


Fig.272. Veintisiete minutos de la sesión N° 16 de matemática según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

A continuación se muestra un episodio donde el profesor interviene ante reiteradas dificultades de los alumnos (tabla 116).

D3: Chicos atiendan, para que ustedes entiendan que lo que están haciendo, sino no se entiende que es lo que hacen, prestamos atención A_1. ¿Qué me da esto: $\frac{188}{123} = [1;1,1,8,3,2]$?
A_2: La cantidad de cuadrados.
D3: La cantidad de cuadrados, ¿cuántos cuadrados entonces voy a tener en ese rectángulo?
Als.: Quince- dieciséis (ambas respuestas son dadas por los diferentes grupos de alumnos).
D3: Pónganse de acuerdo, quince o dieciséis?
D3: Dieciséis (el profesor va señalando los cocientes parciales y haciendo que los sumen). Lo que no sabemos ¿es..?
A_3.: La medida de cada cuadrado.
D3: La medida de los lados da cada cuadrado.A_1 por favor, chicos la idea es que todos comprendan y lo puedan hacer. Esto entonces ¿qué es lo que me da?
Als. Cantidad de cuadrados.
D3: ¿Qué es lo que no sabemos?
A_3: Las medidas.
D3: Las medidas de los lados que tienen cada cuadrado, pero en cada uno de los pasos que hemos ido haciendo hemos obtenido las medidas, cuando nosotros hacemos 188/123 nos da un número con coma que lo podemos expresar como fracción (el profesor saca la cuenta en su calculadora). Este 123 es uno de los lados (escribe en el pizarrón) restamos la parte entera y elevamos a la menos uno, eso da 123/65 (señala al denominador) ese es otro lado, o sea que otro lado mide 65 (escribe en la pizarra) y así seguimos, resto la parte entera y elevamos a la menos uno, da 65/58 quiere decir que 56 es la medida de otro cuadrado. ¿Quieres hacerlo? (pregunta a un alumno) ante la respuesta negativa otro alumno se ofrece a completar las respuesta.

Tabla 116. Diálogo entre docente y alumnos respecto a las actividades del trabajo práctico integrador.

Más adelante en el tiempo el docente realiza una intervención pública haciendo hincapié en la diferencia entre las medidas "reales" y los resultados matemáticos (ideales) obtenidos (tabla 117).

D3: Una pregunta: ¿por qué nunca me da la cantidad de cuadrados que yo puedo dibujar?, una hoja inclusive no me da la cantidad… $A_{5.:}$ Da aproximada. D3: Porque son medidas aproximadas. A_4: Igual el lápiz o el papel no son exactos. D3: Esto es matemático, no es lo que ocurre con una hoja física o que ocurre con un terreno, por eso siempre va a ser aproximado, de las medidas que tomemos de un terreno o de las medidas que tomemos de la hoja o de lo que sea físico. Esto es matemático (señala la el desarrollo en FC).

Tabla 117. Diálogo entre docente y alumnos respecto a las actividades del trabajo práctico integrador.

Si bien el profesor intenta superar las dificultades que plantea la noción de aproximación de un número real en relación con los objetos físicos reales y a su medición, no parece conseguirlo.

Queda manifiesto un conflicto semiótico interaccional que se puede volver a manifestar en las respuestas a las evaluaciones previstas. Estas se analizan en el capítulo doce.

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración descrita de tipo "dialógica" y "personal".

11.13 SESIÓN 17: EN BUSCA DE LA AUTONOMÍA EN EL TRABAJO DE LOS ALUMNOS

11.13.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDACTICO DE LA SESIÓN 17

La clase comienza con los alumnos continuando con el trabajo práctico integrador. Durante los sesenta y ocho minutos que dura la sesión los discentes realizan la tarea, en algunos momentos más autónoma que en otros.

El profesor en cuatro momentos (minutos: ocho, diecinueve, treinta y tres y cincuenta y cinco) realiza explicaciones de ejercicios en forma pública.

Durante algunos momentos acompaña el trabajo de los alumnos atendiendo dificultades en forma privada.

Se vuelven a manifestar las dificultades en relación al “proceso inverso”, o sea dada el desarrollo en FC hallar la aproximación correspondiente.

No es fácil para los alumnos emprender el proceso inverso, por ejemplo:

$$[1; 2,2,2] = \ldots\ldots$$

Se trata de comenzar desde el último denominador $1+\frac{1}{2*\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ hacia “arriba”.

El procedimiento inverso del algoritmo no ha logrado una estabilización en las respuestas de los alumnos, ni una “automatización”, a pesar del esfuerzo del docente. Este conflicto semiótico interaccional nuevamente se manifiesta tanto en las evaluaciones de proceso como integradora. Se realiza el análisis de estas cuestiones en el capítulo doce.

Se observa entonces una SDC de nivel “bajo” con una resolución de conflictos ineficaz, la cual limita la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo, en todo caso, un significado atomizado, sin conexiones matemáticas que viabilicen su estabilidad y reutilización en tareas posteriores.

11.13.2 CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA GLOBAL DE LA SESIÓN 17 DEL GRUPO EXPERIMENTAL: LA ACTIVIDAD INTEGRADORA COMO FUENTE DE AUTONOMÍA

Si se observa la figura 273 los tiempos empleados (M01 a M68), las “cintas” de colores muestran una actividad tanto de los estudiantes como del profesor “variada”. Los grupos de alumnos resuelven las situaciones (A7) mientras el profesor acompaña el trabajo de los alumnos (P8).

Se plantearon dudas por parte de los alumnos (A4), el profesor recorrió por los bancos en donde están sentados los alumnos tratando de disipar dichas dudas, hubo momentos donde se expusieron públicamente cuestiones relativas al conocimiento puesto en juego y donde el docente escribe en el pizarrón (P2). Por algunos momentos algunos alumnos no realizan la tarea propuesta (A1).

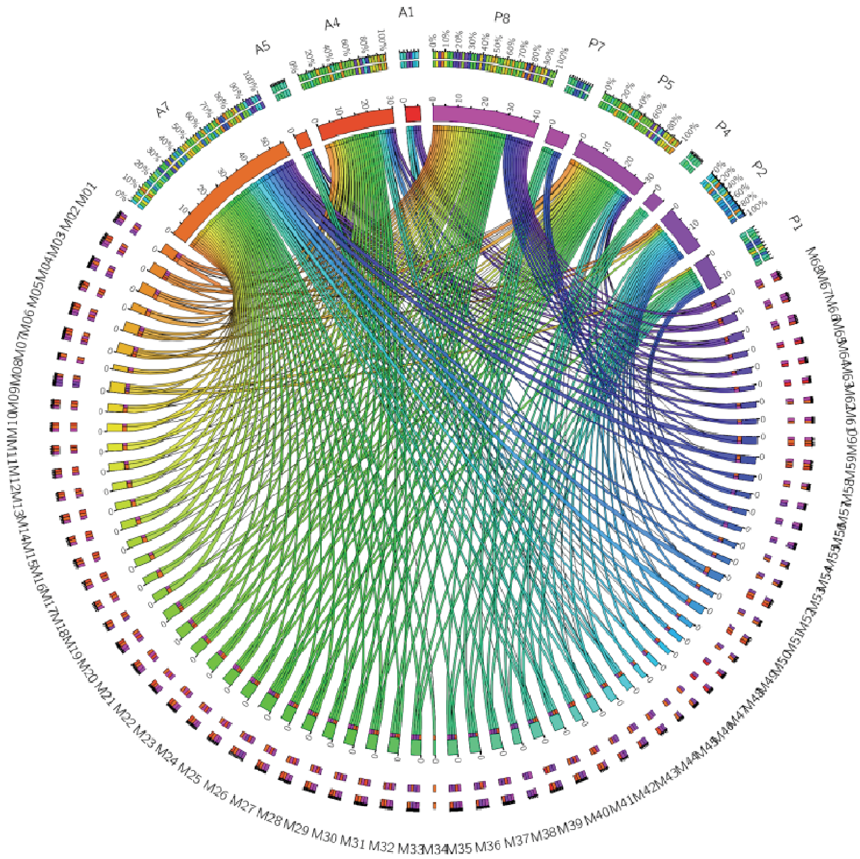


Fig.273. Sesenta y ocho minutos de la clase N° 17 de matemática, según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

Por lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración descrita de tipo “personal” con rasgos de dependencia “dialógica”.

11.14 SESIÓN 18: CONTINUACIÓN DE ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

11.14.1 ANÁLISIS EPISTÉMICO Y DIDACTICO DE LA SESIÓN 18

Los grupos de alumnos resuelven las situaciones (A7) mientras el profesor acompaña el trabajo de los alumnos (P8).

En algunos intervalos de tiempo (M48-M58) ellos copian en el pizarrón sus resultados a pedido del docente. Se aclaran dudas de acuerdo a las resoluciones dadas.

Se plantean dudas (M05-M08; M11-M14; M21-M27; M29-M31; M38-M52; M56-M66) por parte de los alumnos (A4), el profesor recorre el aula tratando de disipar dichas dificultades (P8). Hay momentos (M32-M36) donde se exponen públicamente cuestiones relativas al conocimiento puesto en juego y donde el docente escribe (M35) en el pizarrón (P2). Por unos momentos (M48-M58) algunos alumnos no realizan la tarea propuesta (A1).

Se observa un nivel de SDC "alto" donde el conocimiento previo se mantiene estable, donde la resolución de conflictos aun siendo eficaz, ha estado muy centrada en el contexto propio original y no permite al estudiante la determinación de su campo de validez o eficacia. Esta falta de análisis del campo de validez limita la reutilización de los objetos emergentes al contexto propio original y, por lo tanto, su estabilidad.

11.14.2 Configuración didáctica 18: la integración de nociones matemáticas

Si se observa la figura 274 los tiempos empleados (M01 a M66), las "cintas" de colores muestran una actividad tanto de los estudiantes como del profesor "variada".
Desde el minuto dos (M02) en adelante los grupos de alumnos resuelven las situaciones (A7) y hasta terminar la clase. Mientras el profesor acompaña el trabajo de los alumnos (P8) circulando por el aula.

Durante varios minutos (M05-M08; M11-M14; M21-M31; M38-M52; M56-M58 y M60-M66) los alumnos plantean dudas (A4), el profesor recorre por los bancos en donde están sentados los alumnos tratando de disipar dichas dudas (M05-M08; M11-M14; M21-M31; M38-M52; M56-M58 y M60-M66).
En el minuto sesenta y cuatro (M64) el profesor, ante el requerimiento de un alumno le explica las "limitaciones" que presenta la calculadora ante los cálculos. La expresión de un número racional en fracción no siempre es posible luego de una serie de cálculos sucesivos ya que la calculadora se queda "sin memoria".

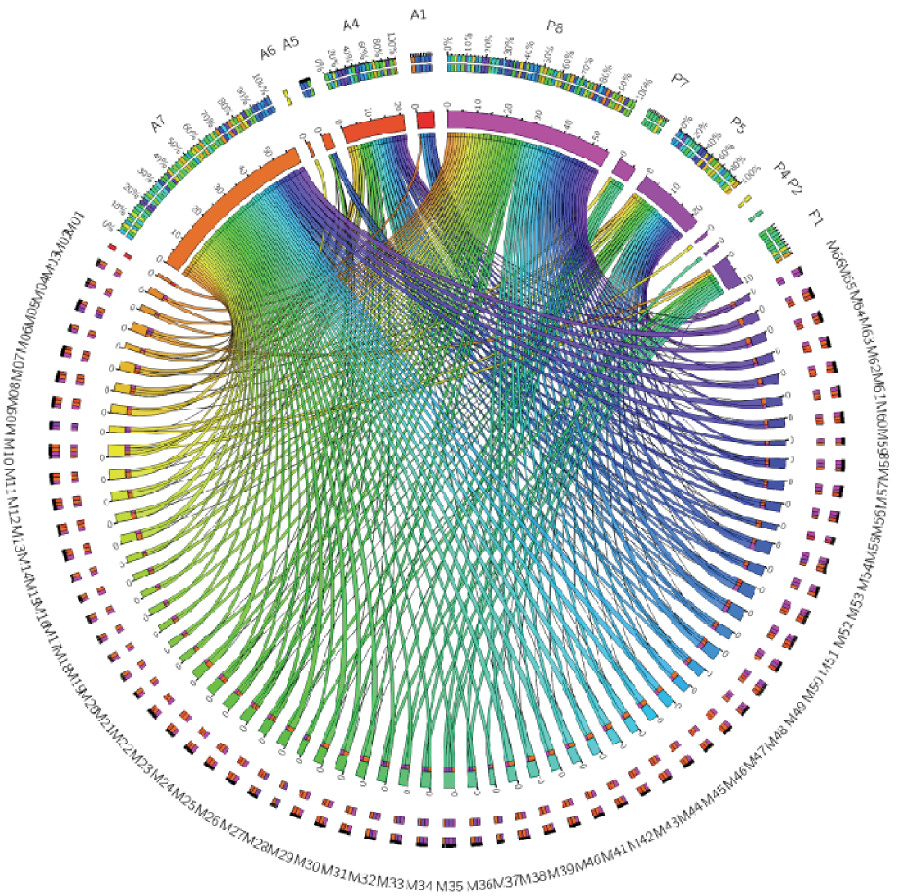


Fig.274. Sesenta y seis minutos de la clase N° 18 de matemática según las actividades realizadas por alumnos y profesor.

En algunos momentos (M04; M09; M27-M28; M32-M37 y M54) se exponen públicamente cuestiones relativas al conocimiento puesto en juego y en otros (M35) el docente escribe en el pizarrón (P2). En algunos momentos (M48-M58) los alumnos no realizan la tarea propuesta (A1).

Por todo lo anteriormente expuesto se puede considerar a la configuración descrita de tipo “personal” con rasgos de dependencia “dialógica”.

Capítulo 12

Discusión de resultados del grupo experimental y su comparación con los grupos de control

En este capítulo, se analiza la trayectoria didáctica del grupo experimental y sus implicaciones (sección 12.1). A continuación se comparan las trayectorias didácticas del grupo experimental y los de control (sección 12.2). Luego se discuten los resultados obtenidos en las evaluaciones comunes al grupo experimental y de control (sección 12.3). Por último, se analiza la idoneidad didáctica del proceso de estudio efectivamente implementado por el grupo experimental (sección 12.4).

12.1 TRAYECTORIA DIDÁCTICA DEL GRUPO EXPERIMENTAL

En este apartado se estudian las interacciones entre objetos matemáticos, se trata de simbiosis didácticas curriculares SDC que los docentes proponen y que en algunos casos son fuente de conflictos semióticos.

Se analizan algunos "hechos y fenómenos didácticos" (Wilhelmi, Font y Godino, 2005) detectados tanto en la trayectoria didáctica del grupo experimental como en las de los grupos control.

12.1.1 LAS CONFIGURACIONES DIDÁCTICAS Y LA SIMBIOSIS DIDÁCTICA CURRICULAR

A lo largo de dieciocho sesiones el docente y los alumnos describen una trayectoria didáctica global que muestra la evolución de la secuencia de enseñanza desarrollada desde el punto de vista de las configuraciones didácticas.

En algunas sesiones se muestra que puede haber más de una configuración didáctica, siendo alguna de ellas privilegiada.

Por ejemplo, para la sesión 1 se observa que la configuración didáctica muestras rasgos marcados adidácticos y también de tipo personal, siendo de menor intensidad los rasgos de tipo dialógica (por ello el color verde es más tenue) (figura 275).

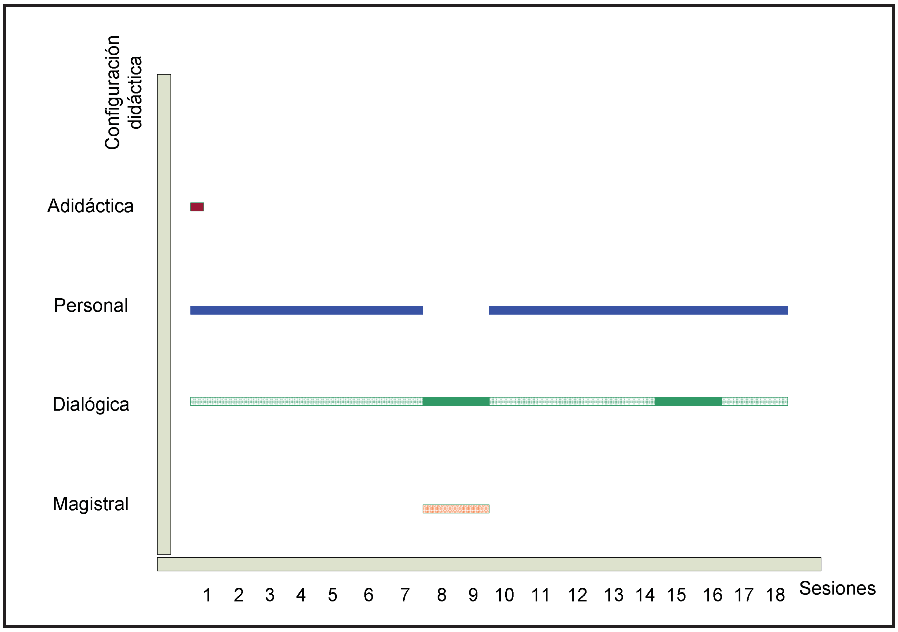


Fig. 275. Configuraciones didácticas en las dieciocho sesiones realizadas por el grupo experimental (docente 3).[1]

La configuración didáctica global revela la estabilidad de la propuesta de enseñanza centrada en el trabajo personal del alumno en interacción con los pares.

Las primeras dos actividades, de la primera sesión, tienen un componente adidáctico esencial (Bloch, 1999). Así, los alumnos resuelven las situaciones con sus conocimientos previos con alto nivel de autonomía. El profesor, por su parte, acompaña la evolución de los discentes interaccionando con ellos frente a los problemas enunciados.

[1] Los rectángulos de color más oscuro muestran la presencia efectiva de la configuración, mientras que una de color más débil señala solamente la presencia de ciertos rasgos de ella.

El docente propone una simbiosis didáctica curricular (SDC), se trata de un tipo particular de norma “epistémica” y “ecológica” (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009) que regula los contenidos matemáticos, en este caso entre los objetos número racional y fracción continua (FC) (todavía implícita en la construcción geométrica) en esos primeros minutos de la secuencia de enseñanza.

Son los alumnos, en forma grupal, quienes interaccionan con los objetos matemáticos y las respuestas que se obtienen por parte de los discentes se mantienen dentro de las previsiones.

Se evidencia que las respuestas obtenidas a las interacciones de los objetos matemáticos (y observadas) por el docente, dan muestra de la estabilidad del conocimiento previo y del conocimiento emergente aunque limitado a un contexto geométrico-numérico.

El profesor acompaña la evolución de los alumnos con poca intervención sobre los conocimientos puestos en juego.

El nivel de SDC se identifica como “alto” ya que, como se expresa en párrafos anteriores, el conocimiento previo se manifiesta estable, no existen grandes perturbaciones a la interacción propuesta, la resolución de conflictos se manifiesta eficaz pero muy centrada en el contexto geométrico-numérico por lo que, para el alumno, la determinación de su campo de validez o eficacia se encuentra restringido.

El profesor toma la decisión didáctica *ipso facto* de hacer que los alumnos continúen con la interacción, aunque se reconoce el carácter provisional en la estabilidad[2] de dicho conocimiento emergente.

En síntesis se produce una estabilidad en la negociación de significados (Godino y Llinares, 2000) entre el docente y los alumnos.

---

[2] “En este sentido podemos considerar que ninguno de los sistemas que conocemos es realmente estable, sino solamente metaestable” (Prigogine, 1997a, 97). Si bien esta cita se enmarca en el dominio de la Física y la Química, y no se pretende realizar un reduccionismo ingenuo, se puede pensar al sistema didáctico como un sistema complejo sujeto a perturbaciones de distinta índole. Esta metáfora sirve para ilustrar algunos de los hechos observados en el sistema didáctico.

A medida que comienzan las interacciones entre las nociones de número racional y la de fracción continua (ahora en forma numérica) surgen algunos conflictos epistémicos e interaccionales. En una primera instancia la SDC se plantea de tipo "baja" ya que la resolución de conflictos se observa ineficaz, limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo.

La observación de las respuestas inestables de los alumnos obtenidas *in situ* por el docente hacen que se encuentre ante una "bifurcación"[3] de las acciones posibles a tomar, a saber, una de ellas es continuar con la interacción "suponiendo" la estabilidad de la misma, haciendo caso omiso a la lectura de las respuestas de los alumnos que manifiestan conflictos epistémicos e interaccionales. La otra, que es la que lleva adelante el profesor, se trata de intentar la estabilización del conocimiento emergente y continuar con la interacción prevista[4].

Lentamente, el docente junto a sus alumnos logran una "transición" donde la SDC evoluciona de un nivel de tipo bajo a una de tipo "medio". El conocimiento previo se estabiliza no así el emergente que continúa inestable ya que la resolución de conflictos ha conllevado intervenciones regulativas no contrastadas y las producciones de los estudiantes, aun siendo correctas, carecen de un sustento discursivo que garantice la estabilidad de los conocimientos emergentes.

En este tipo de interacción entre nociones matemáticas la negociación de significados entre los alumnos y el docente se mantiene aún inestable.

El profesor toma la decisión didáctica de continuar con la interacción aunque se manifiesten algunos conflictos semióticos interaccionales, por lo que intenta estabilizar el conocimiento emergente (figura 276).

[3]"Si llevamos un sistema lo bastante lejos del equilibrio, entra en estado inestable en relación con la perturbación. El punto exacto en que esto sucede se denomina *punto de bifurcación*" (Prigogine, 1997a, 26).

[4] "Una propiedad destacada de estas bifurcaciones es su sensibilidad, el hecho de que pequeñas variaciones en la naturaleza del sistema lleven a la elección preferente de una de las dos ramas" (Prigogine, 1997b, 30).

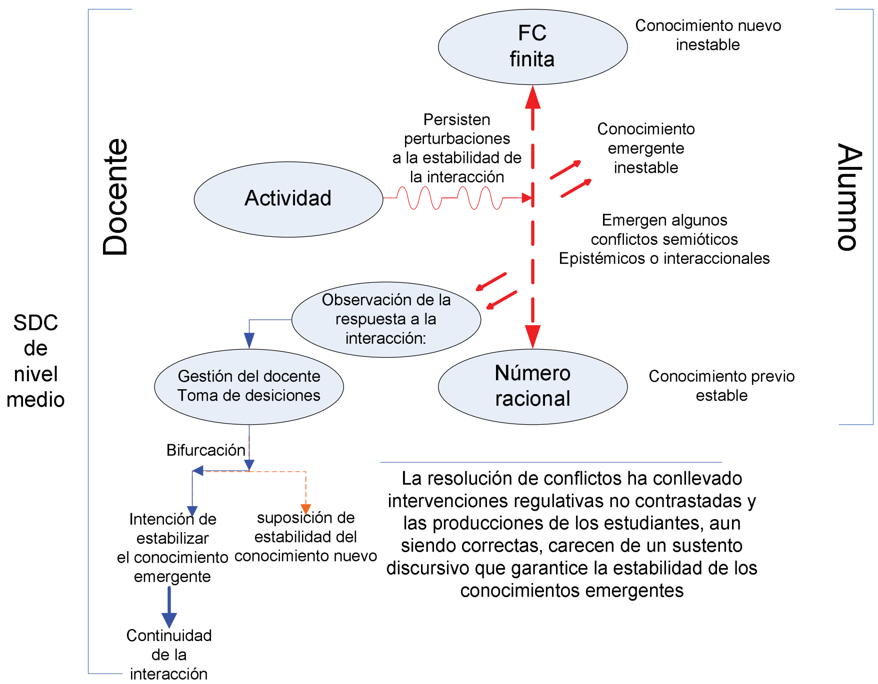


Fig.276. Características de una simbiosis didáctica curricular de nivel "medio".

Esto último no se logra y muestra de ello son los resultados obtenidos a las evaluaciones de proceso e integradora que se analizan luego en el ítem 12.4.1.

La propuesta del docente para la sesión 2 se trata de comenzar la interacción entre la noción de FC y número irracional. Esta se mantendrá en nivel bajo las sesiones 3 y 4 ya que la inestabilidad del conocimiento previo restringe la eficacia de las intervenciones y condiciona la emergencia de conocimientos estables.

Si bien los resultados eran previsibles por el profesor, para un primer encuentro de los alumnos con el algoritmo de FC infinito y su interacción con la noción de número irracional, aparece un conflicto semiótico epistémico en las respuestas de los alumnos (figura 277).

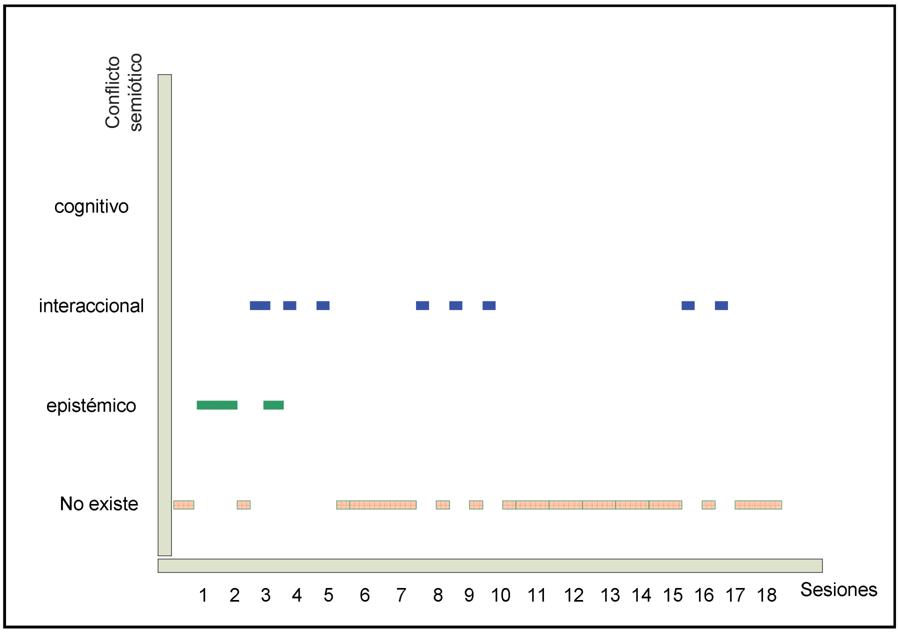


Fig.277. Conflictos semióticos presentes a lo largo de dieciocho sesiones.

Las perturbaciones provienen de las interacciones entre los objetos matemáticos involucrados donde se observa la debilidad en la conceptualización, por parte de los alumnos, de nociones como exactitud o inexactitud de un número, periodicidad numérica y de finitud o infinitud de un número real.

En la actividad 6a el profesor pregunta: "¿Hallaste un resultado exacto?, ¿por qué?".Claramente el docente introduce una interacción entre la exactitud o no de un número irracional considerando "transparente" a la noción de exactitud de un número real.

Para el ítem 6c nuevamente el docente intenta una interacción que perturba el conocimiento emergente, pregunta en la actividad propuesta:" ¿La raíz cuadrada de dos tiene cifras decimales finitas o periódicas?, ¿se trata entonces de un número racional? ¿Por qué?"

Las respuestas dadas por los alumnos muestran las dificultades a las interacciones propuestas por el profesor las cuales se describen en el apartado 11.2.1.

El profesor propone entonces “interacciones didácticas dialécticas” (IDD’s) entre nociones asociadas a la noción de número irracional que, en este caso, perturban la estabilidad de la interacción[5].

En estas IDD los objetos matemáticos son “dialécticos” entre sí, se trata de una “relación entre opuestos”, en este caso entre lo finito y lo infinito, lo exacto o lo aproximado, y la periodicidad o la aperiodicidad de un número racional o irracional.

Dichas IDD actúan perturbando la estabilidad de la interacción provocando un conocimiento emergente muy inestable en los alumnos donde es posible distinguir conflictos semióticos epistémicos e interaccionales (figura 278)

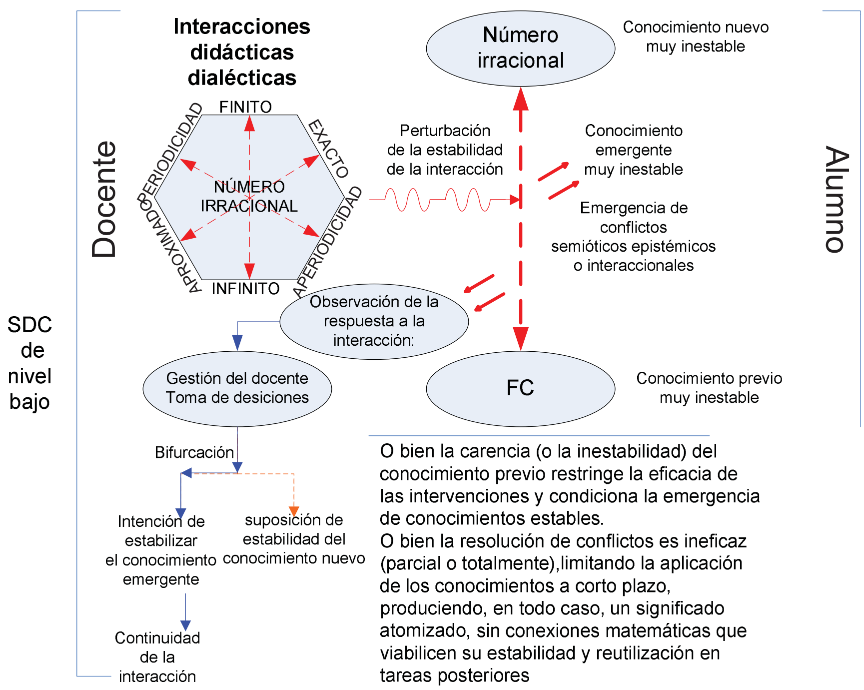


Fig. 278. Características de una simbiosis didáctica curricular de nivel “bajo”.

El nivel de SDC se observa bajo ya por la inestabilidad del conocimiento previo, ya porque la resolución de conflictos es ineficaz.

[5] “Cuantos más elementos entran en interacción […] mayores las posibilidades de obtener […] inestabilidad” (Prigogine, 1997a, 287).

El docente activa la dualidad (unitario-sistémico) (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009) al proponer una interacción del número racional, en forma unitaria (como objeto conocido) pero a su vez sistémica, a través de su descomposición en objetos (periodicidad, finitud e infinitud, exactitud, aproximación) que le son necesarios para la interacción con otros objetos asociados al número irracional (aperiodicidad, infinitud, exactitud, aproximación). De esta manera intenta la construcción del número irracional en forma sistémica ya que lo descompone para su estudio.

La bifurcación en las acciones posibles a tomar, por parte del docente, hace que él tome la decisión de continuar con la interacción prevista aunque en ésta se observen conflictos.

Esto último se debe a que el docente prevé dificultades a la hora de comenzar con la interacción entre dos objetos matemáticos complejos y “nuevos” cuyo conocimiento se mantiene aún muy inestable.

Se advierte que los conflictos semióticos de tipo interaccional, se continúan observando en la sesión 3, esta vez asociados la noción de número irracional expresado como FC. Los conflictos semióticos se visualizan entre las nociones de exactitud y aproximación y también continúa el relativo a la finitud e infinitud de un número real expresado como FC. Se identifican así nuevas IDD entre las nociones señaladas que nuevamente perturban la interacción entre la FC infinita y la noción de número irracional. La SDC se observa de nivel medio ya que el conocimiento previo se mantiene estable y la resolución de conflictos ha conllevado intervenciones regulativas no contrastadas que garantizan la estabilidad de los conocimientos emergentes.

Para la sesión 4 se observa una perturbación muy débil a la interacción FC finita – FC infinita, se trata de una ruptura de cláusula de contrato ya que el docente viene trabajando en las sesiones anteriores con números racionales e irracionales positivos, por ende la FC es de tipo positiva. En la nueva actividad se propone el número –1,3, en un ejercicio, se trata de una interacción donde al aplicar el algoritmo se desarrolla una FC de tipo negativa. Se observan, en las respuestas de los grupos de alumnos, dificultades en la resolución de este ejercicio (apartado 11.4.1).

Dicha perturbación débil no alcanza a desestabilizar la interacción entre los objetos por lo que el conocimiento emergente se mantiene estable[6].

El profesor propone una evaluación de proceso para la próxima clase, los resultados de la evaluación en relación a la diferenciación entre un número racional y otro irracional, muestran un conocimiento emergente estable pero limitado al contexto numérico- aritmético (apartado 12.4).

La SDC adquiere entonces un nivel alto con un conocimiento previo y emergente estable con limitaciones contextuales.

Se observa en la toma de decisiones que el docente tiene la intención de continuar con la interacción prevista (figura 279).

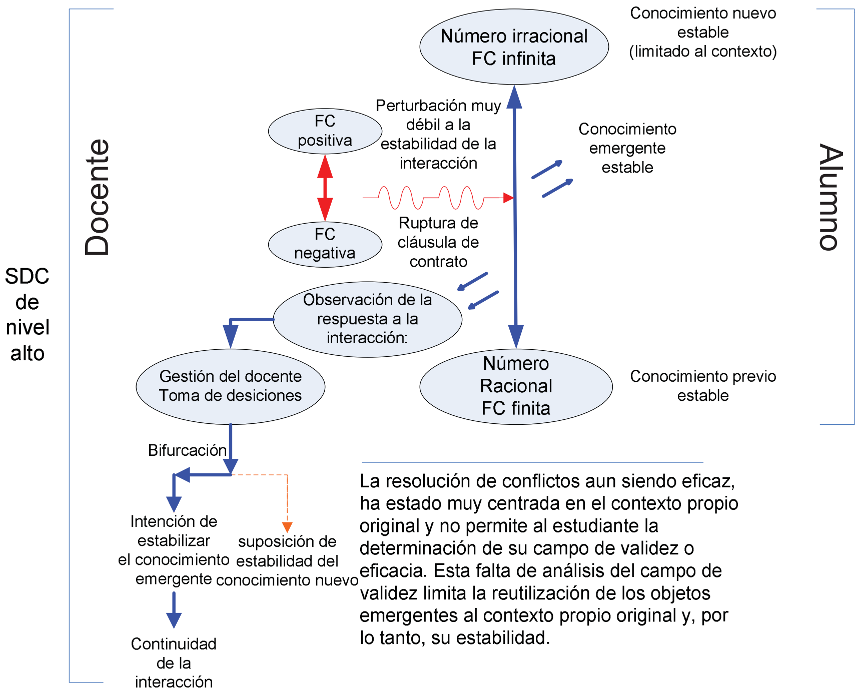


Fig. 279. Características de una simbiosis didáctica curricular de nivel "alto".

En la sesión 5 el docente continúa con la interacción entre objetos prevista, se observan conflictos semióticos interaccionales emergentes de la interacción entre

[6] "Si la perturbación del equilibrio es lo bastante pequeña, podemos analizar el sistema añadiendo una leve corrección al estado de equilibrio" (Prigogine, 1997a, 235).

la noción de FC su finitud o infinitud, la diferencia cuando el número racional es finito o infinito y a su vez con la detención o no del algoritmo de FC.

Se tratan de IDD que, en este caso, perturban la interacción entre las nociones señaladas observándose un conocimiento emergente inestable.

Se percibe que el docente tiene la intensión de estabilizar el conocimiento por lo que produce momentos regulativos públicos (minutos M23, M29 y M33) donde se analizan algunas dificultades y se da continuidad a la interacción.

Si bien la diferenciación entre un número racional y otro irracional, a través de la noción de fracción continua, ha ido evolucionando en las sesiones pasadas se observan algunos conflictos para la sesión cinco que hace que la SDC sea de tipo "media", por tanto la resolución de conflictos ha conllevado intervenciones regulativas aunque estas no son contrastadas. Las producciones de los estudiantes, aun siendo correctas, carecen de un sustento discursivo que garantice la estabilidad de los conocimientos emergentes por lo que recién se logra una evolución para la sesión 6.

En dicha sesión el trabajo relativamente autónomo de los alumnos con ayuda de la computadora y el software Geogebra permiten una evolución en el conocimiento de los alumnos.

Se observa entonces ausencia de perturbaciones a la interacción entre objetos matemáticos y de conflictos semióticos, manteniéndose estable la evolución de la negociación de significados entre docente y alumnos.

De acuerdo a las evaluaciones tanto de proceso como integradora (apartado 12.4.1) el conocimiento emergente también se mantiene estable. Por lo que se puede fijar como "óptimo" ya que el conocimiento previo se observa estable, las intervenciones docentes para la resolución de conflictos semióticos es eficaz y esto conlleva un aprendizaje estable, que permite la reutilización de los objetos en contextos equiparables.

La SDC continúa de tipo óptimo para la sesión 7 (figura 280).

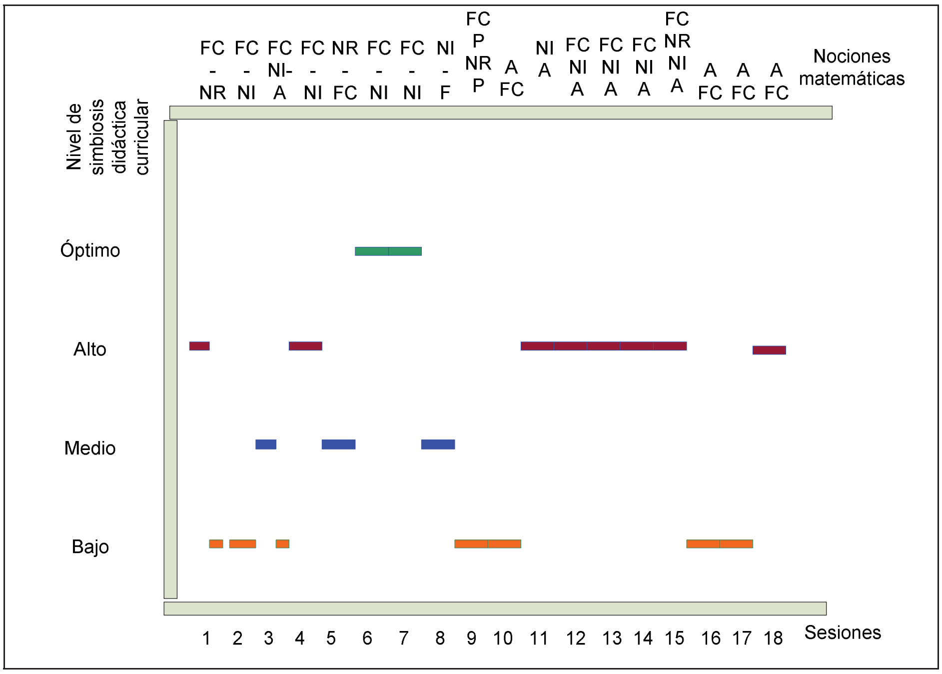


Fig. 280. Interacciones entre objetos matemáticos y simbiosis didáctica curricular para cada sesión.

Los alumnos interaccionan casi en todo momento de las dieciocho sesiones ya que, como se había anticipado, el trabajo se plantea en forma grupal.

En la sesión 8 se percibe el trabajo de regulación del profesor sobre el conocimiento emergente de la interacción de objetos matemáticos, a través de puestas en común, en diálogo con los alumnos en forma pública que en ambas sesiones se extiende durante varios minutos (apartado 11.8.1).Si bien el trabajo regulativo propuesto por el profesor contribuye a la interacción se observan la presencia de algunas perturbaciones y conflictos semióticos interaccionales. La evolución de la negociación de significados entre docente y alumnos entonces se mantiene inestable por lo que el nivel de SDC se puede considerar como medio entre el objeto número irracional y el de fracción de números enteros donde la resolución de conflictos aun siendo eficaz, ha estado muy centrada en el contexto propio original y no permite al estudiante la determinación de su campo de validez o eficacia.

En la sesión 9 se observa una SDC de nivel "bajo" entre la FC su periodicidad y su relación con los números irracionales que resulta confuso para los alumnos por su "parecido" con la noción de periodicidad de los números racionales. La ostensión de los objetos, a través de su escritura, dificulta su diferenciación: $1,\hat{2} \neq [1;\overline{2}]$.

Se observa entonces un conflicto semiótico de tipo interaccional (tabla 107, apartado 11.9.1).

La diferencia parte entera de la FC con su parte decimal también es fuente de dificultades, se observa así un nuevo conflicto semiótico de tipo interaccional.

Se tratan de IDD entre las nociones de FC finita e infinita y, además, la de parte entera de una FC y su parte decimal (cocientes parciales), que "perturban" la evolución del conocimiento entre la noción de FC y la de número irracional.

La evolución de la negociación de significados entre docente y alumnos y el conocimiento emergente se mantienen inestables por lo que el nivel de SDC se puede considerar como bajo.

Si bien el profesor percibe algunas dificultades que se observan en las respuestas de los alumnos, a la interacción entre la FC y su escritura y la relación con los números irracionales, decide continuar con la misma.

El docente toma entonces la decisión de continuar la interacción "suponiendo" una estabilidad del conocimiento en base a la puesta en común realizada. Se identifica así un fenómeno didáctico de "ilusión de estabilidad de los conocimientos emergentes" (figura 281).

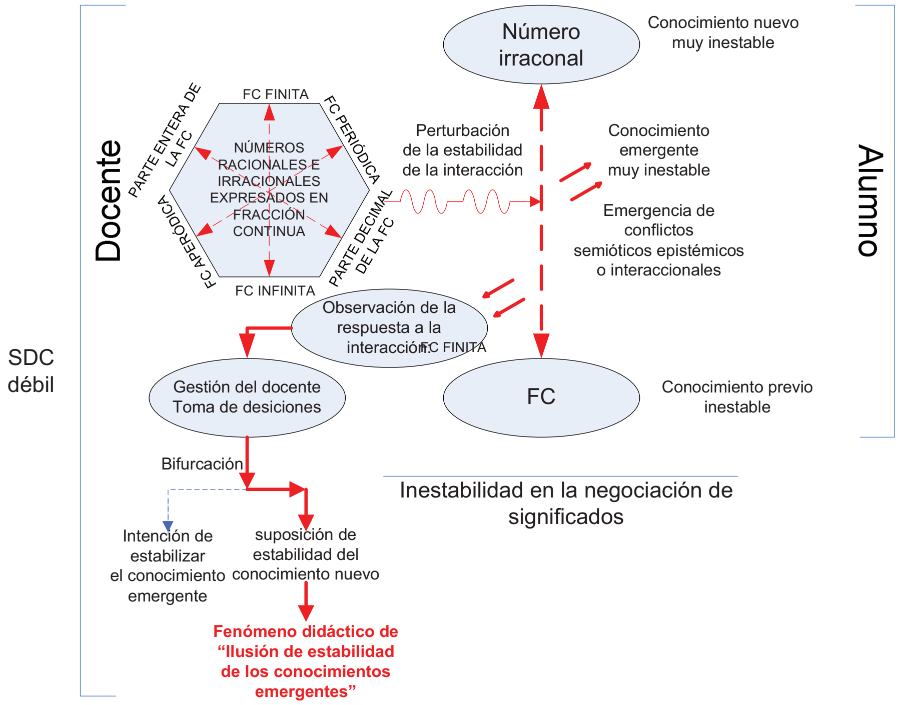


Fig. 281. Interacciones entre objetos matemáticos y conflictos semióticos asociados.

Inclusive el profesor propone una evaluación de proceso para la próxima clase, pero esta se remite sólo a la diferenciación entre números racionales e irracionales (apartado 12.3.1).

Se observa así un conocimiento emergente inestable que se mantendrá en dicho estado hasta tanto éste resulte necesario de emplear.

Para la sesión 10 el conflicto se observa en la interacción entre la noción de aproximación y la de FC.

Si bien el docente percibe que los alumnos presentan dificultades en la resolución de las actividades al introducir el "algoritmo inverso", al aproximar números irracionales por FC y producir acciones (puesta en común) para intentar superar dichas perturbaciones, estas no alcanzan para superarlas.

A pesar del intento de estabilización de la interacción, por parte del profesor, persiste la perturbación, el profesor supone superado el conflicto.

Sin embargo la perturbación a la interacción continúa presente en las sesiones 16 y 17.Se observan diferentes momentos regulativos por parte del profesor en relación al conocimiento emergente inestable, en la sesión 16 en los minutos quince y dieciséis (M15 yM16) y en el veintidós (M22).

Para el caso de la sesión 17 en los minutos ocho (M08) y veintiséis (M26) se producen momentos donde el docente intenta estabilizar el conocimiento emergente pero estas acciones nuevamente resultan insuficientes. Los conflictos no quedan resueltos como puede observarse en los resultados obtenidos en las evaluaciones de proceso e integradora (apartado 12.4.1).

Para las sesiones 11,12, 13,14 y 15 no se observan conflictos semióticos ni perturbaciones a la interacción entre objetos matemáticos, la evolución de la negociación de significados entre docente y alumnos y el conocimiento emergente se mantienen estables por lo que el nivel de SDC se puede considerar como alto. Muestra de esto último son los resultados obtenidos en la experiencia llevada adelante por el grupo experimental (apartado 12.3.1).

Es de hacer notar que el profesor prevé la interacción, a lo largo de dieciocho sesiones, de relativamente pocos objetos matemáticos, a saber, número racional, periodicidad numérica, FC, número irracional y aproximación.

Se debe señalar que el sistema didáctico se encuentra perturbado a lo largo de las dieciocho sesiones por la presencia de la videocámara.

12.1.2 IMPLICACIONES DE LA TRAYECTORIA DIDÁCTICA DEL GRUPO DE EXPERIMENTAL OBSERVADA: LAS INTERACCIONES DIDÁCTICAS DIALÉCTICAS, EL DELGADO EQUILIBRIO ENTRE EL PASADO Y EL FUTURO

A lo largo de varias sesiones el docente del grupo experimental intenta introducir nuevas nociones matemáticas en el proceso de enseñanza, se produce así una “dialéctica” entre lo “previo” y lo “emergente”.

El profesor propone interaccionar con los conocimientos “pasados” de los alumnos, conocimientos antiguos supuestamente aprendidos y estables, en pos de nuevos conocimientos.

Se trata de una dualidad (conocimiento previo- conocimiento emergente) que el docente intenta activar y hacer evolucionar.

El profesor produce así, en algunos casos, una interacción didáctica entre objetos matemáticos "dialécticos", opuestos, al intentar introducir nuevos saberes.

En el caso de los números irracionales, el profesor pretende la relación entre lo previo y lo emergente a partir de interacciones dialécticas (fig. 282).

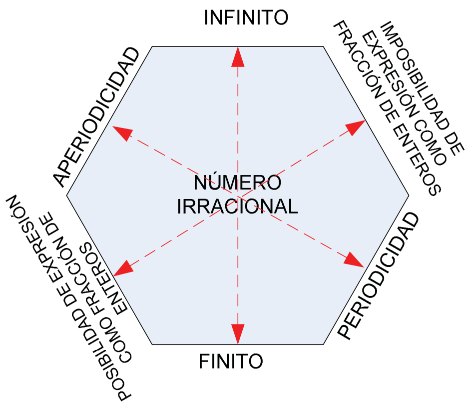


Fig. 282. Interacciones didácticas dialécticas entre nociones asociadas a los números irracionales.

Se trata de interacciones entre objetos asociados a la noción de número racional y la de número irracional. Periodicidad y aperiodicidad numérica, número finito e infinito, imposibilidad de expresión de un número como fracción de enteros y aquellos donde esto es posible, son las "bases" que sientan el "equilibrio contradictorio" entre el pasado y el futuro llevada adelante por el docente.

Se observa que las nociones matemáticas "antiguas", aquellas que se suponen aprendidas no lo están o se encuentran todavía en estado "inestable".

El reconocimiento de la periodicidad o de la aperiodicidad numérica por decimales no es tan sencilla de visualizar por el alumno, salvo para casos muy sencillos, donde el período tiene pocas cifras o la aperiodicidad se manifiesta por una "ley de formación".

El docente elige introducir la FC para que el reconocimiento no provenga de los decimales sino de la estructura misma del número. Si bien un número racional se puede reconocer por la posibilidad de expresarse como fracción de enteros (con denominador diferente de cero), muchas veces el alumno recurre a la calculadora para expresarlo en forma decimal.

Para ambos casos, ya sea por expresión como fracción o en forma decimal dada por una calculadora científica, la FC permite determinar si el número es o no racional.

Si el número es irracional, escrito como raíz enésima, como fracción irracional (no formada ambos, numerador y denominador, por enteros), como número con nombre propio como π o e, o aún cuando un alumno recurre a la expresión decimal dada por una calculadora, de un número irracional, que se obtiene del visor, también el desarrollo en FC puede determinar si se trata o no de un número irracional.

Dos caminos a seguir, una bifurcación, se retoman los conocimientos inestables y se tratan de estabilizar o, de lo contrario, se continúa y se obvian las dificultades emergentes.

El profesor decide continuar con la interacción y de esta manera estabilizar el conocimiento emergente.

Se observa que el conocimiento emergente, en relación a la identificación y determinación si un número es o no irracional se estabiliza, prueba de ello son los resultados obtenidos del proceso de estudio (tabla 100 del capítulo 11) y de las evaluaciones de proceso e integradora (tablas 134, 135, 136 y 137 de este capítulo).

Sin embargo un ejercicio presenta dificultades para algunos alumnos, se trata del número racional: $-4445678912649{,}123456745674567\ldots$ Como se expresa en el capítulo 7 (apartado 7.5.1.1) estas dificultades en torno a la visualización para el reconocimiento de regularidades y patrones en la búsqueda de periodicidad y aperiodicidad numérica pueden implicar algunas cuestiones epistemológicas, relativas al grado de conocimiento, por parte del alumno, de las nociones matemáticas asociadas. También cuestiones cognitivas como la "percepción visual" y el "proceso de visualización" al momento del reconocimiento de patrones y regularidades por parte del estudiante y cuestiones sociológicas relativas a las expectativas mutuas entre profesores y alumnos en relación con el conocimiento (dimensión normativa). Se activa entonces la dualidad (personal- institucional) ya que el alumno debe emplear su "cognición" tanto "personal" como "institucional" (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009).

En este caso particular la percepción visual juega un papel fundamental, los alumnos perciben un número irracional donde deberían "ver" un número racional, se observa así un mimetismo entre nociones producto de la semejanza de la racionalidad con una aparente irracionalidad en las cifras del número. Se trata de un fenómeno de "mimetismo por ostensión" que hace que los alumnos, en este caso, perciban la irracionalidad en las cifras decimales del número. La irracionalidad entonces la perciben en la racionalidad del número, lo ostensivo prima por sobre lo no ostensivo, se activa así la dimensión dual (ostensivo- no ostensivo) y es fuente de dificultades.

Luego el docente produce nuevas IDD ahora asociadas a la noción de FC.

Nociones como fracción continua finita e infinita, número racional finito e infinito, detención o no del algoritmo, son interacciones que exigen un equilibrio sutil entre estos objetos asociados a la interacción FC (número racional)- FC (número irracional), que en estos casos no se observa.

Las interacciones propuestas por el profesor ocasionan algunos conflictos semióticos de tipo interaccional y epistémicos que en ciertos casos se resuelven a lo largo de las sesiones, y en otros, esto no sucede así. Algunos de estos casos se muestran en la figura 283.

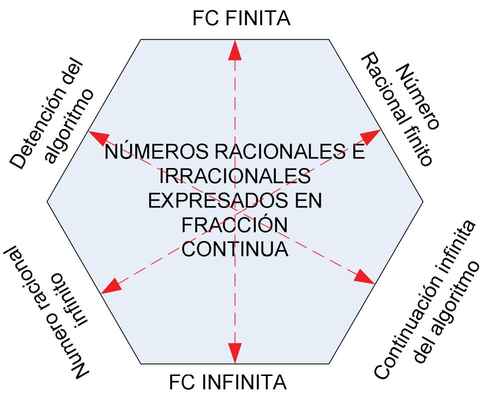


Fig. 283. Conflictos semióticos surgidos a partir de las IDD's propuestas por el docente3 entre nociones asociadas a los números racionales e irracionales expresados en FC.

El profesor, en la bifurcación, toma la decisión de continuar con la interacción prevista e intentar estabilizar el conocimiento emergente.

Las dificultades para los alumnos provienen nuevamente de un "mimetismo ostensivo" entre nociones que en apariencia, por su "forma", coinciden, aunque matemáticamente, son muy diferentes. En este caso a una FC finita le corresponde a un número racional, ya sea finito o infinito periódico y, para una FC infinita, periódica o no, le corresponde un número irracional.

La detención del algoritmo se produce cuando el número es racional, periódico o no, y la continuación infinita del algoritmo se presenta sólo cuando el número es irracional.

$$0{,}3 = [0; 3{,}3]$$

$$0{,}33333\ldots = 0{,}\widehat{3} = [0; 3]$$

$$[0; 3{,}3{,}3{,}3, \ldots] = [0; \overline{3}] = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}$$

En el entorno de las IDD propuestas por el docente estos objetos matemáticos se "asemejan" para los alumnos, la ostensión, su forma, les impide una diferenciación eficaz de las nociones matemáticas.

Para los alumnos lo periódico se mimetiza con lo racional y lo irracional, a su vez, lo racional y lo irracional se mimetizan en lo periódico.

De esta manera una IDD puede ser generadora de conflictos semióticos o no, esto último depende del tipo de interacción propuesta, del nivel de estabilización de los conocimientos previos en relación con los emergentes o al grado de "idoneidad didáctica" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) del proceso de estudio implementado.

El docente continúa con las interacciones previstas y nuevamente se presentan dificultades en las respuestas de los alumnos a la interacción. Estas tienen que ver ahora con las interacciones entre las nociones de FC finita y la infinita, la de FC periódica y aperiódica y la de parte entera y cocientes parciales (parte decimal) de una FC (figura 284).

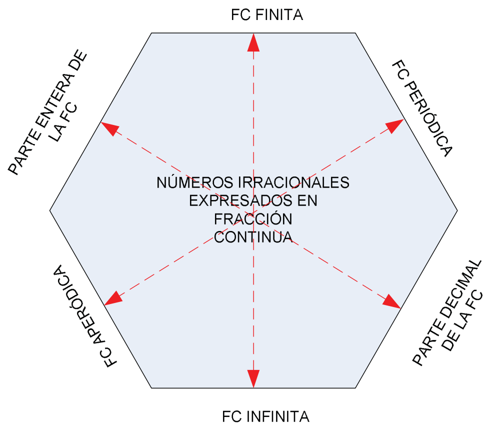


Fig. 284. Interacciones didácticas dialécticas propuestas por el docente3 entre nociones asociadas a los números irracionales expresados en FC.

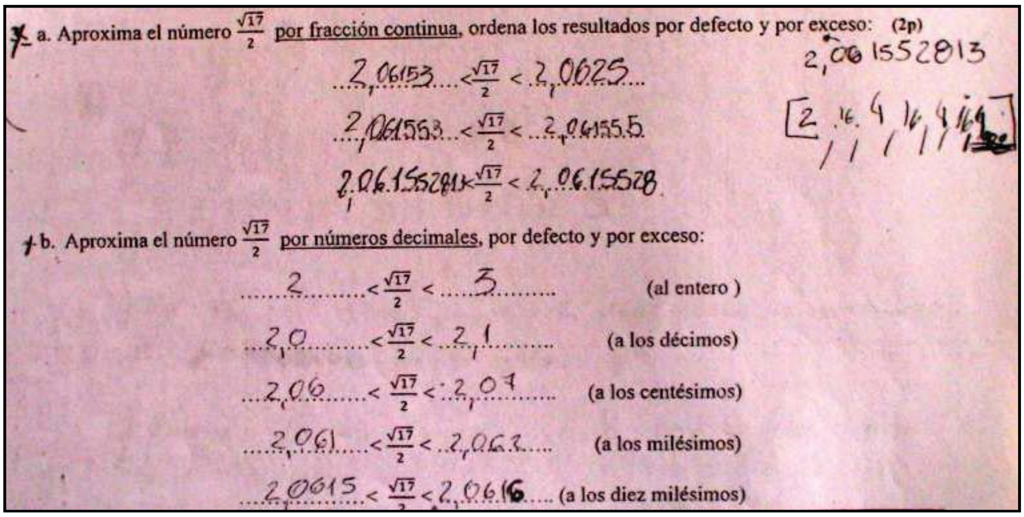
Las interacciones se manifiestan muy débiles y las explicaciones del profesor no alcanzan para que el alumno pueda diferenciar las diferentes nociones asociadas a la FC como numero irracional.

Se observa que nuevamente aparece el fenómeno didáctico de "mimetismo por ostensión" entre nociones matemáticas en apariencia semejantes. Para los alumnos la FC periódica se mimetiza, por ostensión, con el número racional periódico, como lo señalamos en el apartado 12.1.1. La escritura $1,\hat{2} \neq [1;\overline{2}]$ da lugar al fenómeno didáctico en el alumno, matemáticamente se trata de los números $\frac{11}{9}$ y $\sqrt{2}$, uno racional y el otro irracional, pero estos se "mimetizan" por su escritura, uno en su expresión decimal periódica, el otro por su desarrollo en FC periódico, para los alumnos resulta dificultosa su diferenciación. Para ellos no queda claro cuando una FC es periódica y si es o no lo mismo que un número racional periódico (apartado 9.8.1). Nuevamente surgen dificultades en la activación de la dualidad (ostensivo- no ostensivo) de los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas y de los emergentes (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009).

El profesor, en la toma de decisiones en bifurcación, decide continuar con nuevas interacciones, esto último trae aparejado el fenómeno didáctico de "ilusión de estabilidad de los conocimientos emergentes" como lo señalamos en el punto 12.1.1. El conocimiento emergente no se presenta estable y esto se mantendrá para las siguientes sesiones.

Para la sesión 10 el conflicto semiótico se observa en la interacción entre la noción de aproximación y la de FC. Si bien esta interacción no se trata de una de tipo dialéctica, igualmente se muestra perturbada. Las dificultades se observan de la SDC entre la FC y la aproximación de un número irracional y la expresión decimal dada por una calculadora científica común.

Tanto en las actividades dadas en el proceso, como en las relativas a las evaluaciones de proceso e integradora, se solicita aproximar por encuadramiento, por defecto y por exceso, un número irracional de dos maneras, a saber, por su desarrollo finito en FC y por su expresión decimal dada por la calculadora (figura 285).


a. Aproxima el número $\frac{\sqrt{17}}{2}$ por fracción continua, ordena los resultados por defecto y por exceso: (2p)

$2,06153 < \frac{\sqrt{17}}{2} < 2,0625$

$2,061553 < \frac{\sqrt{17}}{2} < 2,061555$

$2,06155281 < \frac{\sqrt{17}}{2} < 2,0615528$

2,0615528 13

b. Aproxima el número $\frac{\sqrt{17}}{2}$ por números decimales, por defecto y por exceso:

$2 < \frac{\sqrt{17}}{2} < 3$ (al entero)

$2,0 < \frac{\sqrt{17}}{2} < 2,1$ (a los décimos)

$2,06 < \frac{\sqrt{17}}{2} < 2,07$ (a los centésimos)

$2,061 < \frac{\sqrt{17}}{2} < 2,062$ (a los milésimos)

$2,0615 < \frac{\sqrt{17}}{2} < 2,0616$ (a los diez milésimos)

Fig. 285. Respuesta de un alumno a la interacción numero irracional-aproximación, en la evaluación integradora.

Estas interacciones de aproximación propuestas no se estudian por sus “diferencias”, por ejemplo ¿cuál de los métodos de aproximación es más óptimo? Allí claramente la FC es superior, en pocos “pasos” el algoritmo aproxima “mejor”.

El profesor intenta superar las dificultades observadas en las respuestas de los alumnos, incorporando en las últimas sesiones momentos regulativos públicos (puestas en común). Éstas no alcanzan para que los alumnos logren superar los conflictos semióticos. Las perturbaciones a la interacción se mantienen, el conocimiento emergente persiste inestable.

Las dificultades que se observan provienen de uso del “algoritmo inverso”, dado el desarrollo en FC, hallar la expresión decimal correspondiente.

La interacción desarrollo en FC- expresión decimal del desarrollo en FC no funciona como se espera y los alumnos manifiestan conflictos interaccionales y epistémicos.

El docente toma, en la bifurcación, la decisión de continuar con las interacciones previstas. Nuevamente se observa el fenómeno didáctico de ilusión de estabilidad del conocimiento emergente.

Los resultados obtenidos hacen visibles los errores recurrentes (Wilhelmi, 2009), tanto en la evaluación de proceso como integradora (tablas 130, 131, 132 y 133).

12.2 COMPARACIÓN ENTRE LAS TRAYECTORIAS DIDÁCTICAS DEL GRUPO EXPERIMENTAL Y LOS DE CONTROL

Si se intenta una comparación entre la trayectoria didáctica del grupo experimental y los de control se encuentran puntos en común y divergencias.

Entre los aspectos comunes a todos los grupos se observan las IDD's entre el valor exacto y aproximado, entre el valor finito e infinito y entre la periodicidad y la aperiodicidad numérica. En los tres grupos estas interacciones dialécticas perturban la SDC entre las nociones de número racional y número irracional.

Dichas perturbaciones provocan conflictos semióticos de tipo interaccional y epistémicos que no siempre son percibidos por los docentes los cuáles toman la decisión didáctica de continuar con las SDC previstas. Esto último provoca un fenómeno didáctico: "la ilusión de estabilidad de los conocimientos emergentes". Para los tres profesores los conocimientos se observan estables y continúan con lo planificado. Por su parte los alumnos muestran dificultades que se observan luego de la puesta en juego de IDD producidas por los tres docentes.

Para los alumnos estas nociones matemáticas se "mimetizan" dialécticamente, se observa así una supremacía de lo ostensivo por sobre lo no ostensivo presentándose así dificultades en la dualidad ostensivo-no ostensivo.

Otra cuestión común en la trayectoria didáctica, ahora restringida sólo a los grupos de control, se refiere a la representación exacta y aproximada de un número irracional en la recta numérica real. Ambos docentes intentan una representación "exacta" de los números irracionales, la ostensión de la construcción geométrica genera la suposición que se trata de una representación exacta. Sin embargo la representación "física" exacta de estos números en una recta dibujada en un cuaderno, en el pizarrón o en una computadora, representa sólo una "ilusión" ya que dicha ubicación es sólo aproximada. Para los alumnos lo ostensivo se mimetiza así con lo no ostensivo y viceversa, se observan de esta manera nuevamente dificultades en la dimensión dual (ostensivo-no ostensivo)

La interacción propuesta por los profesores entre el teorema de Pitágoras y la representación geométrica también es fuente de conflictos semióticos interaccionales y epistémicos. La intensión es que los alumnos "argumenten" los valores obtenidos de los catetos de los triángulos rectángulos para su representación. Se observan dificultades, en las respuestas de los alumnos, tanto en la construcción geométrica como al momento de aplicar el teorema de Pitágoras. Los errores que se observan son de tipo recurrentes[7].

Una nueva cuestión común a ambos grupos de control se presenta, la SDC entre la noción de número irracional (como radical) y las propiedades de la potenciación. Se observan conflictos semióticos y epistémicos que se traducen en errores de tipo recurrentes en la resolución de las evaluaciones tanto de proceso como integradora.

La enseñanza por "imitación" propuesta por los dos docentes no funciona como se espera, los alumnos no tiene demasiadas oportunidades de explorar y poner en juego sus conocimientos emergentes inestables. Los profesores no logran que los alumnos los estabilicen, las interacciones entre objetos propuestas perturban la SDC señalada y los errores se vuelven recurrentes para varios alumnos.

De la "densidad" de nociones matemáticas introducidas en la sesión 1 por el docente 1 del grupo control, relativas a los conjuntos numéricos, sólo se apela a la identificación de algunos números en los diagramas de Euler-Venn (figura 89, capítulo 6). Las propiedades y definiciones de los conjuntos numéricos no son objetos de evaluación Las IDD propuestas que producen perturbación e inestabilidad en los conocimientos emergentes no fueron estudiadas ni exploradas. De esta manera de la dimensión dual (unitario – sistémico) de los objetos matemáticos, el docente sólo considera los objetos como unitarios no en su faz sistémica. Dichos conocimientos de esta manera quedan en un estado inestable hasta tanto sean retomados en otro ciclo de enseñanza.

Se observa que las trayectorias didácticas de los docentes 1 y 2 correspondientes al grupo control (apartado 8.1 y 8.2), persisten en el nivel "bajo" de las interacciones propuestas por lo que los conocimientos emergentes también se

[7] Error reproducible cuyo uso o sentido tiene una presencia longitudinal en la actividad matemática de los sujetos, siendo insuficiente la mostración explícita del conocimiento matemático verdadero para su uso estable por los sujetos (Wilhelmi, 2009,7).

mantienen muy inestables. Estos mantienen su estado hasta tanto resulte "necesaria" para su utilización, dentro del mismo ciclo o en un nuevo ciclo de estudio.

Los tiempos didácticos ejercen una presión constante y persistente por sobre el sistema didáctico y en especial por sobre los profesores, se trata de un proceso irreversible[8].

Muchas de las acciones tomadas y de las interacciones entre nociones realizadas obedecen a esta perturbación persistente que ejercen los tiempos didácticos.

También las perturbaciones y los efectos que se producen, en el sistema didáctico, por acción de la observación del investigador en el aula no son despreciables.

La trayectoria didáctica del docente 3 del grupo experimental difiere de las producidas por los grupos de control en la introducción de un algoritmo, el de fracción continua. Si bien éste funciona estable para la diferenciación número racional - número irracional, no ocurre lo mismo para la aproximación de un número irracional.

Las IDD entre el valor exacto y aproximado, entre el valor finito e infinito y entre la periodicidad y la aperiodicidad numérica ahora relativos a la FC perturban la SDC entre el número irracional y su aproximación. Se observan entonces dificultades en las respuestas de los alumnos que se traducen en errores recurrentes. Nuevamente se presenta el fenómeno, para los alumnos, de "mimetismo por ostensión" de las nociones matemáticas involucradas.

Las SDC producidas a lo largo de las dieciocho sesiones alternan entre "alta" y "media" y "óptimo" con algunas de tipo "bajo".

La incorporación de un objeto matemático nuevo[9] al currículo exige la modificación de la planificación, del programa de estudios y de otras cuestiones relativas a las normas socio-matemáticas de la institución educativa.

[8]"Procesos reversibles son los que no resultan afectados por la flecha del tiempo. Por el contrario, los procesos irreversibles denotan la existencia de flecha temporal" (Prigogine, 1997,158).

Si bien el docente 3 intenta superar otras formas construcción de la noción de número irracional en la enseñanza secundaria, se debe poner "en la balanza" si los efectos beneficiosos para el aprendizaje, producidos por la introducción de un "nuevo" algoritmo, superan los efectos "nocivos".

Las perturbación y las consecuencias que se producen, en el sistema didáctico, por acción de la presencia en el aula de la videocámara no son despreciables.

También la "flecha del tiempo" (Prigogine, 1997) didáctico es inexorable para este sistema didáctico, la perturbación que produce se mantiene constante a lo largo de las sesiones.

El sistema didáctico se encuentra en continua perturbación, el docente es consciente de ello e intenta un equilibrio aparente, intentando una distribución de tiempo en dieciocho clases que resultan, tal vez, demasiadas para el currículo y la planificación propuesta.

12.3 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LAS EVALUACIONES COMUNES AL GRUPO EXPERIMENTAL Y DE CONTROL

12.3.1 EXPERIMENTACIÓN GRUPO EXPERIMENTAL (DOCENTE 3)

El docente 3 entrega a los alumnos una actividad, en donde ellos deben identificar y diferenciar un número irracional de otro racional. Los resultados obtenidos se pueden observar en la tabla 118.

[9] "La innovación hace más complejo el medio en que se produce, planteando problemas inauditos, creando nuevas posibilidades de inestabilidad y conmoción" (Prigogine, 1997,97).

Número	Racional	Irracional
$2\sqrt{5}$	3	28
$\frac{11}{998}$	27	4
$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	3	28
$\sqrt{\sqrt{625}}$	31	0
$\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$	6	25
$\sqrt{\frac{289}{324}}$	2	29
$-\sqrt{196}$	29	2
$0,\hat{7}$	26	5
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$	1	30
$\frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$	8	23
$\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{256}}$	27	4
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	3	28

Tabla 118. Resultados obtenidos en actividad de identificación de un número irracional (grupo experimental)

Dichos resultados se pueden contemplar dentro de los parámetros de aciertos normales, muy pocos alumnos tienen errores en la mayoría de los números propuestos para la identificación.

A pesar de que el docente introduce una noción más, la de FC, y produce una IDD entre las nociones de FC y fracción de enteros y periodicidad numérica, al definir escolarmente al número irracional, no aparecen dificultades o errores que pueden considerarse de importancia.

Luego, en la misma actividad, se les solicita a los alumnos que indiquen cuál o cuáles de los siguientes números no se pueden expresar como fracción de números enteros, los resultados obtenidos se pueden observar en las tablas 119 y 120.

Número	**1,02002000200002…**		**-1,30405060708090…**	
Grupo experimental (alumnos de 15 años)	Irracional	Racional	Irracional	Racional
	26	5	29	2

Tabla 119. Resultados obtenidos en la actividad de identificación de un número irracional (grupo experimental)

Número	- 4445678912649,123456745674567...		- 4,98712345698712345698712 3456...	
Grupo experimental (alumnos de 15 años)	Irracional	Racional	Irracional	Racional
	11	20	3	28

Tabla 120. Resultados obtenidos en la actividad de identificación de un número racional (grupo experimental)

Nuevamente los resultados obtenidos se muestran satisfactorios, los alumnos responden de acuerdo a lo previsto por el docente. Solamente se presenta dificultad al reconocer la racionalidad del número de la tabla 117.

Este error que se observa no es de tipo anecdótico[10]sino que se produce por la mimetización ostensiva de lo irracional en lo racional. Los alumnos "perciben" lo irracional por su "forma" en lo racional y no logran "des-mimetizar" ambas nociones no ostensivamente.

De la misma manera para siete alumnos (tabla 116) la racionalidad se mimetiza en lo irracional. Los alumnos "perciben" lo racional por su "forma" en lo irracional y no logran "des-mimetizar" ambas nociones no ostensivamente.

12.3.2 EXPERIMENTACIÓN DE GRUPO DE CONTROL (docente 1)

Luego de finalizada la última evaluación del tema "números reales", se le solicita al profesor, permita entregar a los alumnos una actividad, sin previo aviso, en donde los alumnos deben identificar y diferenciar un número irracional de otro racional. Los resultados obtenidos se pueden observar en la tabla 121.

[10] "*Errores anecdóticos.* Grupos equiparables de sujetos no utilizan de manera equiparable e inapropiada un objeto matemático ni le atribuyen un mismo sentido inadecuado. Se trata de realizaciones puntuales e individuales sin reflejo directo en cómo un sujeto genérico construye y comunica los conocimientos matemáticos específicos de una noción, un proceso o un significado matemáticos" (Wilhelmi, 2009,7)

Número	Racional	Irracional
$2\sqrt{5}$	2	36
$\frac{11}{998}$	9	**29**
$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	**10**	28
$\sqrt{\sqrt{625}}$	32	6
$\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$	5	33
$\sqrt{\frac{289}{324}}$	24	**14**
$-\sqrt{196}$	34	4
$0,\hat{7}$	31	7
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$	3	35
$\frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$	8	30
$\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{256}}$	30	8
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	6	32

Tabla 121. Resultados obtenidos en la actividad de identificación de un número irracional (grupo de control 1).

Se puede observar que 29 (de 38) alumnos no pueden reconocer como racional al número 11/998. Desde el análisis que se lleva adelante en este capítulo, la propuesta didáctica dada por el docente hizo hincapié en IDD que implica la fracción de enteros pero esto último no se resalta (ítem 6.1.1.3), el profesor sólo remarca la imposibilidad de expresar al número irracional como "razón" (figura 286).

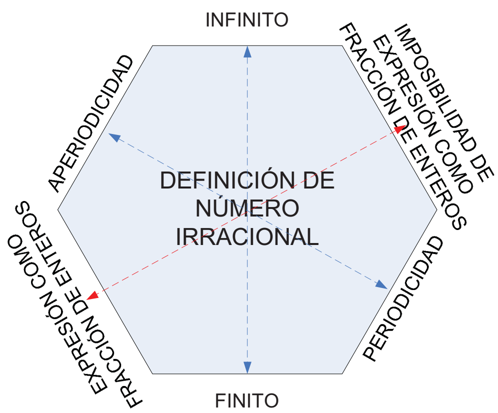


Fig. 286. Interacciones didácticas dialécticas, del docente 1, entre nociones asociadas a la definición escolar de los números irracionales.

Los alumnos responden de acuerdo a lo estudiado en clase, diez de los cuáles consideran al número $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ como racional y catorce como irracional al número $\sqrt{\frac{289}{324}}$. Se observa así un fenómeno de "mimetismo de nociones matemáticas por ostensión", el primero es racional puesto que aparece una "fracción", el segundo es irracional porque aparece una "raíz". Se identifica lo racional o lo irracional por la forma del objeto (ostensivo) y no por su naturaleza (no ostensivo). En la misma actividad se les solicita indiquen cuál o cuáles de los siguientes números no se pueden expresar como fracción de números enteros, los resultados obtenidos se pueden observar en las siguientes tablas (tablas 122 y 123).

Números	**1,02002000200002...**		**-1,30405060708090...**	
Grupo control (alumnos de 15 años)	Irracional	Racional	Irracional	Racional
	26	12	35	3

Tabla 122. Resultados obtenidos en actividad de identificación de un número irracional (grupo de control 1).

Números	**- 4445678912649,123456745674567...**		**- 4,98712345698712345698712345 6...**	
Grupo control (alumnos de 15 años)	Irracional	Racional	Irracional	Racional
	28	10	28	10

Tabla 123. Resultados obtenidos en actividad de identificación de un número racional (grupo de control 1).

Si bien varios alumnos logran reconocer la irracionalidad de los números de la tabla 119, quince alumnos no logran este reconocimiento. Esto último se debe a que, para los alumnos, las nociones se mimetizan en este caso lo racional se mimetiza ostensivamente con lo irracional.

Se observa nuevamente el mismo fenómeno didáctico, ahora en los resultados de la tabla 120. Para veintiocho alumnos lo irracional se mimetiza en lo racional y viceversa.

El conflicto epistémico se observa al proponer el docente la IDD que involucra a la periodicidad y a la aperiodicidad numérica (figura 287).

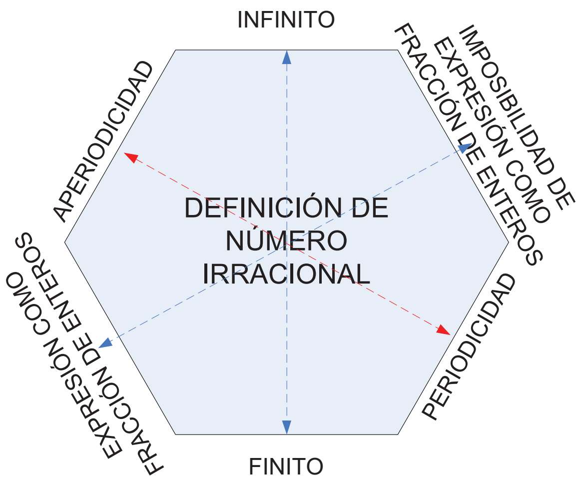


Fig. 287. Interacciones didácticas dialécticas, del docente 2, entre nociones asociadas a la definición escolar de los números irracionales.

Ambos números se “asemejan” a números irracionales, nuevamente se observa el fenómeno de “mimetismo por ostensión”.

Recordemos que, según los estudios realizados, esta dificultad puede estar ligada al reconocimiento de regularidades y patrones numéricos, en la búsqueda de la periodicidad numérica, en la cifras decimales de un número irracional.

Las interacciones dialécticas perturban la SDC entre los números racionales y los irracionales (figura 288).

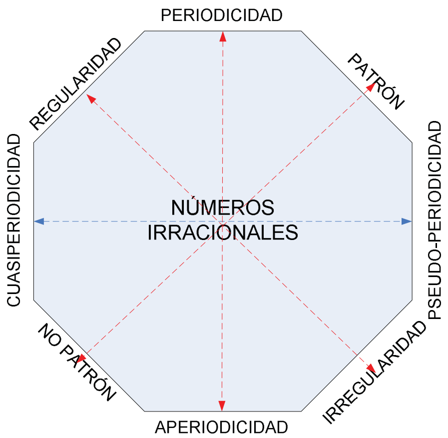


Fig. 288. Interacciones didácticas dialécticas entre nociones asociadas a los números irracionales.

La inestabilidad de los conocimientos “previos” se muestra como una constante que incide en las interacciones propuestas.

Los alumnos tuvieron dificultades en reconocer la “racionalidad” de un número real que implica reconocer la repetitividad numérica, el hallazgo de un patrón y de una regularidad numérica (figura 289).

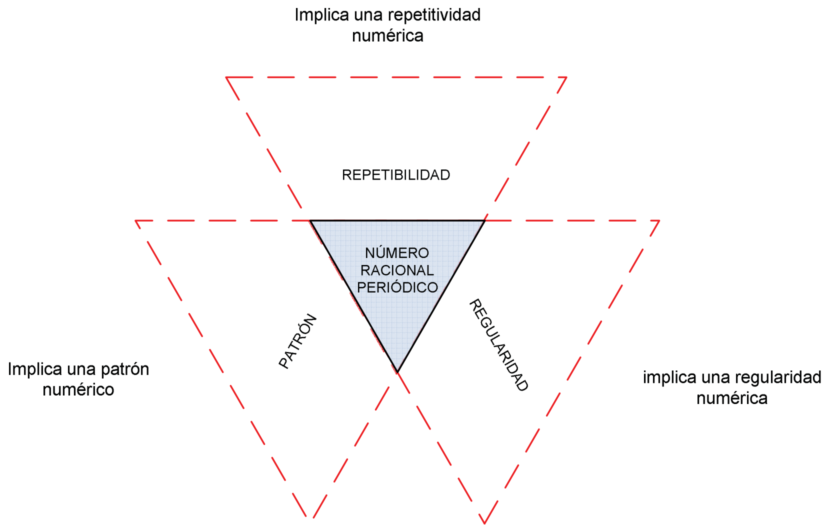


Fig. 289. Dificultades asociadas al reconocimiento de los números racionales.

Se trata de una dificultad que involucran cuestiones relativas a la cognición, al contrato didáctico o al conocimiento matemático de las nociones implicadas, como se expuso en el capítulo 4 (ítem 4.5), lo matemático, lo didáctico y lo cognitivo, en este tipo de actividades se encuentran en estrecha relación (figura 290).

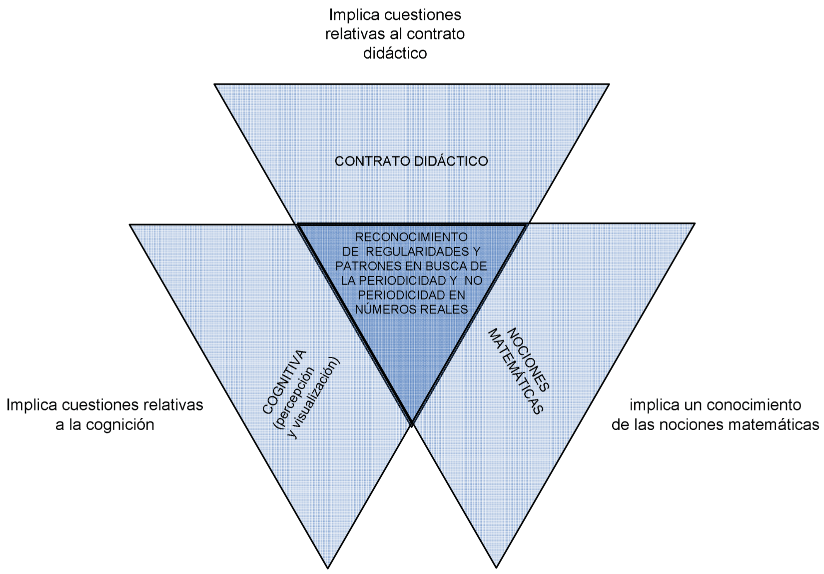


Fig.290. Cuestiones relativas al reconocimiento de patrones y regularidades numéricas en la búsqueda de una periodicidad.

Se debe destacar que el fenómeno de "mimetismo por ostensión" se observa, en el caso del reconocimiento de regularidades y patrones en la búsqueda de la periodicidad y de la no periodicidad numérica, como producto de la "intersección" entre cuestiones de contrato didáctico, cuestiones relativas a la cognición y al conocimiento de las nociones matemáticas "previas".

Para los alumnos se torna muy dificultoso reconocer la aperiodicidad numérica si previamente no se ha explorado y estudiado la periodicidad.

12.3.3 EXPERIMENTACIÓN GRUPO DE CONTROL (docente 2)

Se le solicita al docente 2 permita entregarles a los alumnos una actividad, sin previo aviso, en donde los alumnos deben identificar y diferenciar un número irracional de otro racional. Los resultados obtenidos se pueden observar en la tabla 124.

Número	Racional	Irracional
$2\sqrt{5}$	**10**	10
$\frac{11}{998}$	14	6
$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	**16**	4
$\sqrt{\sqrt{625}}$	11	**9**
$\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$	**16**	3 Y un alumno no contesta
$\sqrt{\frac{289}{324}}$	9	**11**
$-\sqrt{196}$	12	**8**
$0,\hat{7}$	5	**15**
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$	17	3
$\frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$	**15**	5
$\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{256}}$	13	**7**
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	**15**	5

Tabla 124. Resultados obtenidos en la actividad de identificación de un número irracional (grupo de control 2)

De acuerdo a lo analizado en el punto 7.1 el docente 2 realiza una (IDD), al definir número irracional, implicando y resaltando la noción de fracción, pero no destaca que la fracción debe estar formada por "números enteros". El conflicto epistémico se manifiesta en las respuestas erróneas dadas por los alumnos en los números expresados como fracción: $\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{3}, \frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Se observa nuevamente el mismo fenómeno didáctico, el de "mimetismo por ostensión", ahora en los resultados de la tabla 121.

Para varios alumnos la expresión fraccionaria de un número se mimetiza por ostensión con un número racional y a su vez una expresión con raíz con un número irracional. Entonces, para los alumnos, lo racional se mimetiza en lo irracional y lo irracional en lo racional, lo ostensivo predomina por sobre lo no ostensivo.

De la misma manera que el docente 1 las dificultades provienen de la IDD propuesta por el docente al momento del estudio de la noción (figura 291).

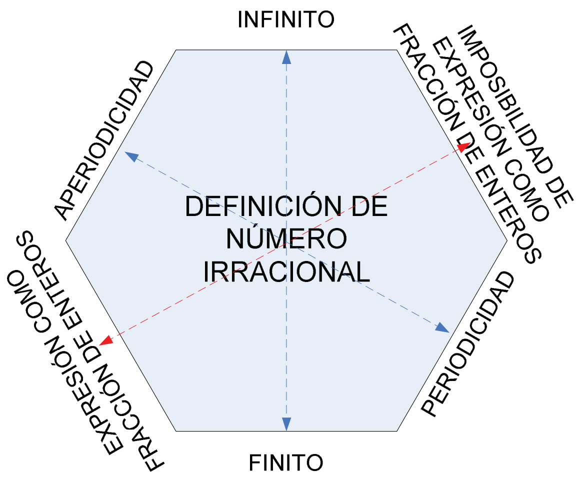


Fig. 291. Interacciones didácticas dialécticas, del docente 2, entre nociones asociadas a la definición escolar de los números irracionales.

El profesor hace hincapié en la interacción expresión fraccionaria - no fraccionaria de un número real, los alumnos no exploran la noción ni son enfrentados a sus conocimientos inestables en la búsqueda de conflictos semióticos.

El conocimiento emergente se manifiesta inestable, los resultados observados muestran que los errores producidos por los alumnos no son de tipo anecdóticos sino reproducibles[11].

En la misma actividad se les solicita a los alumnos que indiquen cuál o cuáles de los siguientes números no se pueden expresar como fracción de números enteros, los resultados obtenidos se pueden observar en las siguientes tablas (tablas 125 y 126).

Número	**1,02002000200002...**		**-1,30405060708090...**	
Grupo control 2 (alumnos de 15 años)	Irracional	Racional	Irracional	Racional
	9	11	15	5

Tabla 125. Resultados obtenidos en actividad de identificación de un número irracional (grupo de control 2)

[11] Errores reproducibles. Grupos equiparables de sujetos utilizan de manera inapropiada un objeto matemático o le atribuyen un sentido inadecuado (Wilhelmi, 2009, 7).

Número	- 4445678912649,123456745674567...		- 4,987123456987123456987123456...	
Grupo control B(alumnos de 15 años)	Irracional	Racional	Irracional	Racional
	15	5	16	4

Tabla 126. Resultados obtenidos en actividad de identificación de un número racional (grupo de control 2)

Nuevamente en las respuestas dadas por los alumnos se muestra que los errores producidos son efectos del fenómeno didáctico de “mimetismo por ostensión”. La aparente racionalidad en las cifras del número (tabla 122) se mimetiza en la irracionalidad del número.

De la misma manera la aparente irracionalidad en las cifras de los números (tabla 123) se “mimetiza” con la racionalidad de los mismos.

Las dificultades que emergen a través de los errores en las respuestas dadas por los alumnos nuevamente involucran cuestiones relativas a la cognición, al contrato didáctico y al conocimiento matemático de las nociones implicadas. Los alumnos responden por una cuestión de contrato didáctico y las dificultades en la “visualización” del número irracional implican cuestiones cognitivas, pero fundamentalmente, relativas a las interacciones débiles propuestas por el docente al momento de la enseñanza de la noción (figura 292).

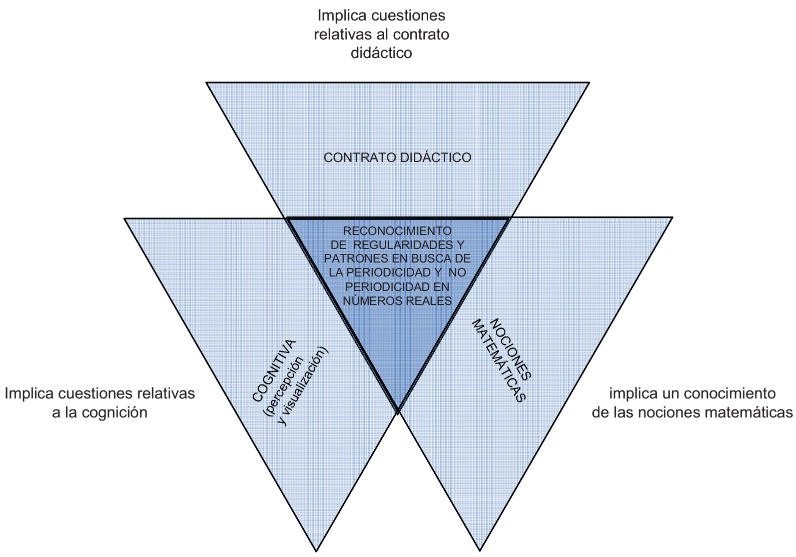


Fig.292. Cuestiones relativas al reconocimiento de patrones y regularidades numéricas en la búsqueda de una periodicidad.

12.4 IDONEIDAD DIDÁCTICA DEL PROCESO DE ESTUDIO EFECTIVAMENTE IMPLEMENTADO (Grupo experimental)

12.4.1 COMPONENTES E INDICADORES DE IDONEIDAD EPISTÉMICA

A continuación se analizan los diferentes componentes de idoneidad epistémica del proceso de estudio efectivamente implementado en base a ciertos indicadores de idoneidad propuesto por Godino (2011).

Las situaciones problemas y las tareas propuestas

A lo largo de veinte actividades se plantean una diversidad de situaciones que a continuación se detallan (tabla 127).

Actividades	Situaciones:					
	contextualizadas	No contextualizadas	De ejercitación	De aplicación	Problemas	De revisión
N°1	X				X	
N°2	X				X	
N°3		X				
N°4	X				X	
N°5	X				X	
N°6		X				
N°7			X			
N°8				X		
N°9						X
N°10	X					
N°11	X				X	
N°12		X				
N°13	X					
N°14	X				X	
N°15				X	X	
N°16				X	X	
N°17				X	X	
N°18			X			
N°19			X			
N°20						X

Tabla 127. Resumen de las diferentes tipos de situaciones y tareas realizadas por el grupo experimental (docente 3).

Las situaciones- problemas propuestas en las distintas actividades generan distintos tipos de dificultades en los alumnos.

Los conflictos epistémicos interaccionales que se presentan en la experimentación (cap.11) se mantienen e impactan en las evaluaciones tanto de proceso como integradora (trimestral). Las dificultades se centran en:

- Dadas las longitudes de largo y ancho de un rectángulo, hallar la cantidad de cuadrados los más grandes posibles (sin superponerlos ni cortarlos) y la medida de sus lados.
- Dada la construcción geométrica de un rectángulo dividido en cuadrados, los más grandes posibles, hallar la medida de los lados de dicho rectángulo y de cada cuadrado.

Las mayores dificultades se presentan en:

- La obtención de las diferentes aproximaciones producidas al hallar el desarrollo en FC del número racional correspondiente (tablas 128 y 129).
- La relación entre el "proceso inverso", dado el desarrollo en FC finito hallar el número racional irreducible correspondiente, y la noción de aproximación de un número irracional (tablas 130 y 131).

Evaluación de proceso	Longitud del lado de cada cuadrado			Cantidad de cuadrados		
Fila 1 Actividad 2	C	I	NC	C	I	NC
	3	**9**	**3**	7	5	3

Tabla 128. Resultados de la evaluación de proceso, fila 1, actividad 2.

Evaluación de proceso	Longitud del lado de cada cuadrado			Longitud de los lados del rectángulo		
Fila 2 Actividad 2	C	I	NC	C	I	NC
	5	**7**	**3**	5	**8**	**2**

Tabla 129. Resultados de la evaluación de proceso, fila 2, actividad 2.

Evaluación integradora	Longitud del lado de cada cuadrado			¿Cuáles son las longitudesde los lados de la plancha de madera?		
Fila 1 Actividad 2	C	I	NC	C	I	NC
	2	**10**	**3**	8	3	4

Tabla 130. Resultados de la evaluación integradora (trimestral), fila 1, actividad 2.

Evaluación integradora	Longitud del lado de cada parcela			¡Cuántos cuadrados se pueden obtener en dicho terreno?		
Fila 2 Actividad 2	C	I	NC	C	I	NC
	2	**12**	**1**	6	**9**	0

Tabla 131. Resultados de la evaluación integradora (trimestral), fila 2, actividad 2.

De acuerdo a las respuestas obtenidas las dificultades se presentan, en mayor medida, en la interacción FC – número racional al hallar la longitud de los lados de los cuadrados (figura 293).

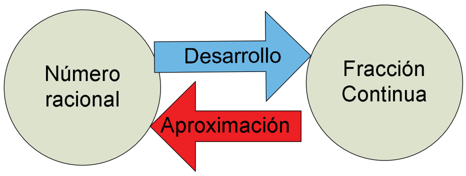


Fig.293. Interacción entre la noción de número racional y la de fracción continua.

En menor medida, la interacción número racional – FC a través del desarrollo del número en FC para hallar la cantidad de cuadrados necesarios para recubrir el rectángulo.

El lenguaje propuesto en las actividades

A continuación se analizan en detalle los diferentes tipos de lenguaje utilizados en cada una de las actividades desarrolladas.
Al introducir el algoritmo finito en la actividad N°3 y el infinito en la actividad N°6 se presentan dificultades en la interpretación del lenguaje necesario para la compresión de las diferentes tareas. Esto trae aparejado una "dependencia" de diálogo del alumno con el profesor para poder avanzar en algunas situaciones (tabla132).

Actividades	Indicadores de idoneidad epistémica (lenguaje)								
	Uso de diferentes modos de expresión matemática					Nivel de lenguaje		Las situaciones implican expresión matemática e interpretación	
	Verbal	Gráfico	Simbólico	Numérico	Arit-mético	Adecuado	No adecuado	Si	No
N°1	X	X		X		X		X	
N°2	X	X		X		X		X	
N°3	X		X	X	X		X	X	
N°4	X		X	X	X	X		X	
N°5	X	X	X	X		X		X	
N°6	X		X	X	X		X	X	
N°7	X		X	X	X	X		X	
N°8	X				X	X		X	
N°9	X							X	
N°10	X		X	X	X	X		X	
N°11	X	X	X	X	X	X		X	
N°12, 13 y 14	X	X	X	X	X	X		X	
N°15	X	X	X	X	X	X		X	
N°16	X		X	X	X	X		X	
N°17	X		X	X	X	X		X	
N°18	X		X	X	X	X		X	
N°19	X		X	X	X	X		X	
N°20	X	X	X	X	X	X		X	

Tabla 132. Resumen del lenguaje utilizado en las diferentes actividades.

Reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos)

En la actividad 10 se les solicita a los alumnos "generar" las definiciones de número racional e irracional como una conclusión a las actividades realizadas. Esta última no produjo inconvenientes o dificultades a los discentes.

Como expresamos en los párrafos precedentes el procedimiento de FC en la actividad 3 no fue sencillo para los alumnos, esta provoca una pérdida de autonomía y una dependencia del profesor. Esto último es esperable por una primera interacción de los alumnos con el objeto matemático.

La actividad 12, de aproximación, provoca dificultades a algunos grupos de alumnos en su resolución, por el procedimiento empleado.

El proceso inverso, dado el desarrollo en FC hallar la aproximación correspondiente, solicitado en las actividades 16, 17 y 18 provoca dificultades y dependencia del profesor. Es posible observar lo señalado anteriormente tanto en los resultados de las evaluaciones de proceso como integradora (trimestral) (tablas 133, 134 ,135 y 136).

Evaluación de proceso	Aproximación por FC			Aproximación por expresión decimal dada por la calculadora		
Fila 1 Actividad 3	C	I	NC	C	I	NC
	0	12	3	0	15	0

Tabla 133. Resultados de la evaluación de proceso, fila 1, actividad 3.

Evaluación de proceso	Aproximación por FC			Aproximación por expresión decimal dada por la calculadora			
Fila 2 Actividad 3	C	I	NC	Incompleto	C	I	NC
	0	11	4	1	10	4	0

Tabla 134. Resultados de la evaluación de proceso, fila 2, actividad 3.

Evaluación integradora	Aproximación por FC			Aproximación por expresión decimal dada por la calculadora		
Fila 1 Actividad 3	C	I	NC	C	I	NC
	3	11	1	13	2	0

Tabla 135. Resultados de la evaluación integradora (trimestral), fila 1, actividad 3.

Evaluación integradora	Aproximación por FC			Aproximación por expresión decimal dada por la calculadora		
Fila 2 Actividad 3	C	I	NC	C	I	NC
	5	8	2	12	3	0

Tabla 136. Resultados de la evaluación integradora (trimestral), fila 2, actividad 3.

De acuerdo a las respuestas obtenidas las dificultades se presentan, en mayor medida, en la interacción FC – número irracional al hallar la aproximación de números irracionales (figura 294).

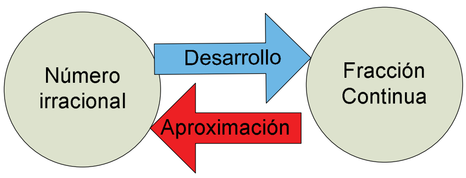


Fig.294. Interacción entre la noción de número irracional y la de fracción continua.

Es de hacer notar que las dificultades que se manifiestan en las respuestas a la actividad 3 (aproximación por expresión decimal dada por la calculadora) de la evaluación de proceso, fila 1, (tabla 14) se deben a la expresión simbólica del número $\frac{\sqrt{17}}{2}$, ya que varios alumnos expresan en su calculadora $\sqrt{\frac{17}{2}}$ generando un error de tipo anecdótico que si no se trata puede volverse de tipo recurrente (Wilhelmi, 2009).

Argumentos

Las explicaciones y comprobaciones del profesor a lo largo de las sesiones, si bien son adecuadas para el nivel educativo, fueron insuficientes en el caso del proceso de aproximación por FC.

En varias actividades se les solicita a los alumnos que argumenten el "por qué" ocurre ciertas cuestiones (por ej. act.6.c).

Relaciones

La mayoría de los objetos matemáticos, los problemas, definiciones y procedimientos se relacionan y conectan entre sí.

La identificación y articulación de significados de los objetos, por ejemplo entre la FC y el número irracional y viceversa, funciona positivamente en la construcción de sentido. Esto último se puede observar en los resultados de las evaluaciones tanto de proceso e integradora (trimestral) donde los errores cometidos por los alumnos se encuentran dentro de parámetros aceptables por el profesor (tablas 137, 138, 139 y 140).

Evaluación de proceso	Número	Determinar si los números son racionales o irracionales	
Fila 1		Número racional	Número irracional
Actividad 1	$5\sqrt{25}$	14	1
	$\frac{5}{9998}$	10	5
	$0,\hat{7}$	10	5
	$\sqrt{\sqrt{25}}$	0	15
	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	3	12
	$-\sqrt{144}$	14	1
	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	1	14
	$\sqrt{\sqrt{5}}$	1	14
	$\frac{7+\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}}$	3	12
	$\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{256}}$	15	0

Tabla 137. Resultados de la evaluación de proceso, fila 1, actividad 1.

Evaluación de proceso	Número	Determinar si los números son racionales o irracionales		
Fila 2		NC	Número racional	Número irracional
Actividad 1	$5\sqrt{2}$		3	12
	$\frac{5}{9998}$		9	6
	$0,\hat{7}$		12	3
	$\sqrt{\sqrt{81}}$	1	12	2
	$\frac{-\sqrt{3}}{5}$		4	11
	$-\sqrt{14}$		2	13
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		6	9
	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{64}}}$		3	12
	$\frac{\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}}$		5	10
	$\frac{1}{\sqrt{256}}$		12	3

Tabla 138. Resultados de la evaluación de proceso, fila 2, actividad 1.

Evaluación integradora	Número	Determinar si los números son racionales o irracionales	
Fila 1		Número racional	Número irracional
Actividad 1	$5\sqrt{14}$	2	13
	$\frac{13}{99}$	14	1
	$1623564,\hat{7}$	11	4
	$\sqrt{\sqrt{8}}$	3	12
	$\frac{-2\sqrt{169}}{5}$	11	4
	$-\sqrt{\sqrt{4096}}$	12	3
	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	2	13
	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$	11	4
	$\frac{6}{3-\sqrt{7}}$	1	14
	$\frac{1}{\sqrt{25}}$	13	2

Tabla 139. Resultados de la evaluación integradora, fila 1, actividad 1.

Evaluación integradora	Número	Determinar si los números son racionales o irracionales	
Fila 2		Número racional	Número irracional
Actividad 1	$5\sqrt{18}$	0	15
	$\sqrt{\frac{81}{36}}$	15	0
	$123,\hat{7}$	14	1
	$\sqrt{\sqrt{256}}$	11	4
	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	6	9
	$-\sqrt{169}$	11	4
	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	2	13
	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}}$	11	4
	$\frac{\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}}$	2	13
	$\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{25}}$	4	11

Tabla 140. Resultados de la evaluación integradora, fila 2, actividad 1.

No ocurre el mismo tipo de articulación entre las nociones de FC y la de aproximación de un número irracional y viceversa como se señala en el apartado "reglas, definiciones, proposiciones y procedimientos" estudiado precedentemente.

La valoración de la idoneidad epistémica luego de analizar los componentes e indicadores nos muestra que se trata de una idoneidad de tipo media.

12.4.2 COMPONENTES E INDICADORES DE IDONEIDAD COGNITIVA

Conocimientos previos

En general los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio de la noción de número irracional y de FC, si bien fue necesario el empleo, por parte del profesor, de la memoria didáctica del alumno. El intenta el rescate de nociones como las de teorema de Pitágoras para la resolución de problemas.

Esto último es posible visualizarlo en los resultados a las situaciones problemáticas de las evaluaciones tanto de proceso como integradora. Los resultados indican una buena cantidad de aciertos en la actividad 4 (tablas 141, 142 y 143).

Evaluación de proceso	¿Cuáles son los volúmenes en cada caso?			¿Es lo mismo tomar una u otra aproximación? ¿Por qué?			¿Por qué ocurre esto cuando se presenta un número como π en una fórmula?		
Fila 1 Actividad 4	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC
	11	2	2	11	1	3	10	2	3

Tabla 141. Resultados de la evaluación de proceso, fila 1, actividad 4.

Evaluación de proceso	¿Cuáles son las longitudes del alambrado de c/caso?			¿Es lo mismo tomar una u otra aproximación? ¿Por qué?			¿Por qué ocurre esto?		
Fila 2 Actividad 4	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC
	11	1	3	12	0	3	9	2	4

Tabla 142. Resultados de la evaluación de proceso, fila 2, actividad 4.

Evaluación integradora	¿Cuáles son las longitudes del alambrado de c/caso?			¿Es lo mismo tomar una u otra aproximación? ¿Por qué?			¿Por qué ocurre esto?		
Fila 1 Actividad 4	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC
	12	0	3	11	1	3	10	0	5

Tabla 143. Resultados de la evaluación de integradora, fila 1, actividad 4.

Se observan dificultades surgidas en la actividad 4 de la evaluación integradora donde los alumnos deben averiguar el volumen de una esfera (tabla 144).

Fila 2	¿Cuáles son los volúmenes en cada caso?			¿Por qué ocurre esto cuando se presenta un número como π en una fórmula?		
	C	I	NC	C	I	NC
Actividad 4	6	8	1	13	1	1

Tabla 144. Resultados de la evaluación de integradora, fila 2, actividad 4.

Los inconvenientes surgen de las operaciones necesarias para hallar el resultado con ayuda de la calculadora, al olvidar los alumnos elevar el valor del radio a la tercera potencia o al multiplicar los números involucrados.

Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales

En las sesiones 7 y 9 se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo y, en la sesión 8, se ejercita el desarrollo en FC de diferentes números reales.

Aprendizaje

Los diversos modos de evaluación (proceso e integradora) indican que los alumnos logran parcialmente la apropiación de los conocimientos y competencias pretendidas. Por ejemplo en la actividad 5, en las evaluaciones de proceso e integradora, es posible observar lo señalado en el párrafo anterior en las respuestas dadas por los alumnos a la situación-problema (tablas 145, 146, 147 y 148).

Evaluación deproceso	Averigua la medida de la diagonal de la rampa			¿Es posible obtener una medida exacta de la diagonal? ¿Por qué?			¿De qué número se trata?			Aproxima a los décimos y centésimos		
Fila 1	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC
Actividad 5	7	6	2	7	6	2	8	5	2	7	4	4

Tabla 145. Resultados de la evaluación de proceso, fila 1, actividad 5.

Evaluación de proceso	Averigua la medida de la diagonal de la varilla			¿Es posible obtener una medida exacta de la diagonal? ¿Por qué?			De qué número se trata?			Aproxima a los décimos y centésimos		
Fila 2	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC
Actividad 5	8	4	3	9	2	4	8	4	3	7	3	5

Tabla 146. Resultados de la evaluación de proceso, fila 2, actividad 5.

Evaluación integradora	Averigua la medida de la diagonal de la varilla			De qué número se trata?			Aproxima a los décimos y centésimos		
Fila 1	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC
Actividad 5	9	3	3	10	3	2	9	3	3

Tabla 147. Resultados de la evaluación integradora, fila 1, actividad 5.

Evaluación integradora	Averigua la medida de la diagonal de la rampa			¿De qué número se trata?			Aproxima a los décimos y centésimos		
Fila 2	C	I	NC	C	I	NC	C	I	NC
Actividad 5	11	3	1	10	4	1	10’	4	1

Tabla 148. Resultados de la evaluación integradora, fila 2, actividad 5.

Se tienen en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia en los distintos modos de evaluación (proceso e integradora).

La valoración de la idoneidad cognitiva luego de analizar los componentes e indicadores nos muestra que se trata de una idoneidad de tipo media.

12.4.3 COMPONENTES E INDICADORES DE IDONEIDAD AFECTIVA

Intereses y necesidades

Las tareas tienen un interés variable para los alumnos, en algunas, como en las actividades 1 y 2, se manifiesta un gran interés por parte de los discentes en resolverlas.

En otras, como en la actividad 3 y 4, ese interés disminuye en la medida que aumenta la dependencia a las respuestas del profesor a las inquietudes de los discentes.

Las situaciones permiten valorar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana, por ejemplo en las actividades 14, 15, 16 y 17.

Actitudes y emociones

Se promueve la participación, la perseverancia, la responsabilidad y la autoestima en todas las sesiones ya que todas las actividades, a excepción de las evaluativas, se realizan en grupo de alumnos.

La valoración de la idoneidad afectiva luego de analizar los componentes e indicadores nos muestra que se trata de una idoneidad de tipo media.

12.4.4 COMPONENTES E INDICADORES DE IDONEIDAD INTERACCIONAL

La interacción entre pares se mantuvo a lo largo de la mayoría de las sesiones al igual que la relación docente- alumno.

La autonomía alterna a lo largo de las dieciocho sesiones, pero se mantiene entre alta y media con algunas sesiones donde ésta desciende a baja (tabla 149).

Sesión	Interacción docente-discente			Interacción entre alumnos			Autonomía		
	Alta	Media	Baja	Alta	Media	Baja	Alta	Media	Baja
N°1	X			X				X	
N°2	X			X			X		
N°3	X			X					X
N°4	X			X					X
N°5	X			X				X	
N°6	X			X				X	
N°7	X			X				X	
N°8		X			X				X
N°9		X		X			X		
N°10	X			X					X
N°11	X			X					X
N°12, 13 Y 14		X		X			X		
N°15		X		X			X		
N°16		X		X				X	
N°17		X		X				X	
N°18	X			X				X	

Tabla 149. Interacciones docente-alumno, entre pares y la autonomía en las sesiones del docente. 3.

La valoración de la idoneidad interaccional luego de analizar los componentes e indicadores nos muestra que se trata de una idoneidad de tipo alta.

12.4.5 COMPONENTES E INDICADORES DE IDONEIDAD MEDIACIONAL

Recursos materiales (manipulativos, calculadores y ordenadores).

Se utilizan recursos manipulativos: hoja de papel de diferentes formatos, regla, escuadra.

Desde el comienzo de las actividades se plantea el uso de la calculadora científica. En algunas sesiones se emplea la computadora con el software Geogebra (tabla 150).

Actividades	Recursos materiales				
	Se usan materiales			Las definiciones y propiedades son contextualizadas usando situaciones concretas y visualizaciones	
	Manipulativos	Calculadora	Informáticos	Si	No
N°1	X	X		X	
N°2	X	X		X	
N°3		X			X
N°4		X			X
N°5	X	X		X	
N°6		X			X
N°7		X			X
N°8		X			X
N°9		X		X	
N°10			X	X	
N°11	X	X		X	
N°12		X			X
N°13			X	X	
N°|4			X	X	
N°15	X	X		X	
N°16		X		X	
N°17		X			X
N°18		X		X	
N°19		X		X	
N°20		X		X	

Tabla 150. Resumen de los recursos materiales empleados en las diferentes actividades.

Número de alumnos, horario y condiciones del aula

El número y la distribución de alumnos, con un total de treinta y dos, permite, llevar adelante la enseñanza pretendida.

El horario del curso se mostró apropiado: lunes y jueves, primera hora, viernes de 9:10 a 9.55.

Tiempo

El tiempo presencial y no presencial se evidencia suficiente para la secuencia de enseñanza pretendida.

Se dedican varias sesiones a las nociones de FC y número irracional siendo suficiente (y tal vez excesivo), no así entre el objeto FC y la noción de aproximación que se muestra insuficiente.

La valoración de la idoneidad mediacional, luego de analizar los componentes e indicadores, nos muestra que se trata de una idoneidad de tipo alta.

12.4.6 COMPONENTES E INDICADORES DE IDONEIDAD ECOLÓGICA

Adaptación al currículo

Si bien la mayoría de los contenidos se corresponden con las directrices curriculares, se plantea una innovación al introducir la noción de FC.

Apertura a la innovación didáctica

La innovación propuesta en ítem anterior se basa en investigación.
Se integran nuevas tecnologías computadoras, calculadoras en el proyecto de enseñanza.

Adaptación socio-profesional y cultural

Las nociones matemáticas introducidas contribuyen a la formación socio-profesional de los alumnos.

Conexión intradisciplinar e interdisciplinar

Se plantean conexiones intramatemáticas entre objetos como área, perímetro, número racional, aproximación de números racionales e irracionales e interdisciplinares relativos a dimensiones de hojas en formato A4, A6, etc. y la informática educativa.

La valoración de la idoneidad ecológica, luego de analizar los componentes e indicadores, nos muestra que se trata de una idoneidad de tipo alta.

Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

La investigación realizada sobre la construcción y comunicación de la noción de número irracional en Educación Secundaria se ha fundamentado teóricamente y se ha contrastado experimentalmente. En la presente sección se aportan las implicaciones para la enseñanza. Antes, a modo de síntesis y conclusión, se analizan el logro de los objetivos de la investigación y el contraste de las hipótesis planteadas. El capítulo termina con unas cuestiones abiertas, marco de futuras investigaciones.

1. ACERCA DE LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

En el capítulo 1 se formulan una colección de objetivos. Se discute a continuación la medida en que han sido alcanzados.

Un primer objetivo general se direcciona hacia la actividad matemática de los procesos didácticos asociados a los números irracionales.

O_ga: *Estudiar la "actividad matemática" de procesos de estudio relativos a la noción de número irracional con estudiantes de secundaria o con profesores en formación y en activo y los potenciales conflictos y dificultades emergentes en dichos procesos. Esta actividad es valorada en términos de idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font, Wilhelmi, 2006).*

La trayectoria didáctica tanto de los grupos control (apartados 8.1 y 8.2) como experimental (apartado 12.1) muestran procesos de estudios con estudiantes de secundaria y los conflictos semióticos y dificultades observados en dichos procesos.

La configuración didáctica global revela la estabilidad de la propuesta de enseñanza, del grupo experimental, centrada en el trabajo personal del alumno en interacción con los pares. En cambio, las configuraciones didácticas globales, asociados a los grupos de control, si bien se mantienen también relativamente estables a lo largo de las cuatro sesiones, éstas se evidencian de tipo magistral con rasgos de tipo dialógica poco centradas en el trabajo personal de los alumnos.

La noción teórica de idoneidad didáctica, propuesta desde el enfoque ontosemiótico (EOS), permite el análisis y la valoración de las diferentes idoneidadespresentes en el proceso de estudio del grupo experimental. La valoración de las idoneidades epistémica, cognitiva y afectiva, luego del análisis realizado, aporta evidencias de que se trata de idoneidades de nivel medio. La valoración de la idoneidad interaccional, mediacional y ecológica, luego de analizar los componentes e indicadores, muestran que se desarrolla con un nivel alto de idoneidad en estas dimensiones.

La noción de simbiosis didáctica curricular (SDC)ha permitido el análisis de las dificultades y conflictos, ya que, diferentes niveles de SDC se observan a lo largo de las sesiones en todos los grupos estudiados, permitiendo interpretar las intervenciones del docente para el control del funcionamiento del sistema didáctico y la evolución del contrato didáctico.

En el caso del grupo experimental se muestran algunos conflictos semióticos epistémicos e interaccionales, en las respuestas de los alumnos, producto de las perturbaciones que provienen de las interacciones entre los objetos matemáticos involucrados. Se observa debilidad en la conceptualización, por parte de los alumnos, de nociones como exactitud o inexactitud de un número, periodicidad numérica y de finitud o infinitud de un número real. Se advierte así que los conflictos semióticos se evidencian cuando los conocimientos previos se mantienen inestables para los alumnos y producen perturbación a la interacción propuesta por el docente.

En el caso de los grupos de control se propone una sucesión de interacciones de nivel bajo y en un lapso de tiempo muy corto, entre conjuntos numéricos y sus propiedades. Se observan de esta manera algunos conflictos semióticos de tipo epistémicos e interaccionales.

Asimismo se evidencia la importancia de lo puramente ostensivo. De hecho, los alumnos diferencian con dificultad números racionales de irracionales, dado que recurren “a su forma”; lo ostensivo entonces predomina sobre lo no ostensivo. De manera similar, también para ellos, lo periódico se “mimetiza” con lo aperiódico y lo aperiódico con lo periódico. Los números que pueden ser expresados como fracción se mimetizan con aquellos donde no es posible expresarlos de esa forma, (por ejemplo una fracción con numerador irracional). Inclusive, para los alumnos, la representación idealmente exacta de un número irracional en la recta numérica real, se mimetiza por ostensión, con la representación aproximada en dicha recta.

Las interacciones didácticas dialécticas (IDD) propuestas por los profesores, a partir de las nociones señaladas (periódico- aperiódico, exacto-aproximado, finito-infinito), perturban la SDC entre los números racionales y los irracionales y se evidencia son generadoras de conflictos semióticos interaccionales y epistémicos señalados.

Las SDC se mantienen en nivel bajo y por ende los conocimientos emergentes de las interacciones entre los objetos matemáticos también se evidencian inestables. La simbiosis didáctica “global” se evidencia estable en una de nivel “bajo” en la mayoría de las cuatro sesiones en los grupos de control.

Una primera conclusión de este estudio asocia los niveles bajos de SDC producto de gran inestabilidad en los conocimientos previos de los alumnos y, además, se suma la complejidad didáctica asociada al significado de número irracional, el cual se apoya en otras nociones matemáticas, como las de exactitud, aproximación, periodicidad y aperiodicidad numérica, infinito matemático, numerabilidad, cardinalidad y densidad de conjuntos infinitos, continuidad numérica, geométrica y funcional, etc.

Un segundo objetivo general se dirige hacia los distintos contextos de uso de la noción de número irracional y a la construcción de sentido en cada uno de esos contextos.

O$_{g}$b: *Describir los diferentes “sentidos” asociados al número irracional, que pueden ser asociados a prácticas matemáticas propias de ciertos momentos históricos y su reflejo en los textos escolares.*

Para dar cumplimiento a este objetivo general se formulan los siguientes objetivos específicos asociados a la determinación de las configuraciones epistémicas de referencia asociadas al número irracional:

O$_e$a: *Analizar desde el marco teórico proporcionado por el EOS la evolución histórica y epistemológica del número irracional.*

O$_e$b: *Determinar diferentes significados parciales y contextos de uso asociados a dicha noción.*

O$_e$c: *Analizar diversos libros de texto de secundaria donde se introduce al número irracional.*

En el capítulo 4 se desarrolla un análisis histórico-epistemológico del número irracional desde la perspectiva del EOS. Se trata de determinar el significado institucional de referencia de dichos números a través de los diferentes contextos de uso de la noción que ha ido evolucionando a través de los tiempos.

Se analizan cinco libros de texto de Educación Secundaria y se determinan cinco configuraciones epistémicas, a saber, implícita, explícita, la de aproximación racional, la aritmética y la de existencia y clasificación de números irracionales. Estas configuraciones epistémicas permiten la observación de concordancias y discrepancias en la forma en que los distintos objetos de significado, asociados al número irracional, son introducidos y desarrollados.

A modo de conclusión y en relación a las *situaciones* se observa, en los libros de texto, que son mayoritarias las situaciones de clasificación entre racionales e irracionales. Esto último tiene su correlato en tareas propuestas a los alumnos por los docentes, relativas a la "diferenciación" entre números reales, tanto de los grupos de control (apartados 6.1.1.3 y 7.1.1.1) como experimental (apartado 11.4.1). Además este último grupo emplea la herramienta informática para que los alumnos, por medio de la noción de FC, puedan diferenciar dichos números (apartado 11.6.1).

Asimismo, en los libros de texto, se presentan cuestiones o problemas relacionados con números "famosos" (pi, número áureo) con un claro objetivo motivacional. Los profesores por su parte también "presentan" o intentan “evocar” la memoria didáctica de los alumnos, en relación a algunos números irracionales “notables” (apartados 6.1.1.3 y 7.1.3.2). Se trata de una pseudo-clasificación didáctica que no se corresponde con la clasificación matemática de los números irracionales en algebraicos y trascendentes. Se identifica así un posible conflicto semiótico interaccional y epistémico que queda en estado residual.

La mayoría de los textos presenta construcciones numéricas por alguna regla de formación, por su parte los docentes también introducen números irracionales a partir de leyes de formación (apartado 6.1.1.3) donde se apela al hallazgo de regularidades y patrones, por parte de los alumnos, en la búsqueda de la aperiodicidad numérica.

Todos los textos introducen situaciones de aproximación racional de irracionales. Se evidencia que los profesores de los grupos de control producen interacciones didácticas entre lo “exacto” y lo “aproximado” en un número irracional (apartados 6.1.1.3 y 7.1.3.1). Por su parte, el profesor del grupo experimental intenta una interacción “dialéctica” entre la noción de aproximación y la de exactitud. Para los alumnos lo ostensivo (la representación en la hoja de papel) se “mimetiza” con lo no ostensivo (la noción de aproximación), lo que provoca dificultades que se traducen en conflictos epistémicos e interaccionales (apartado 11.10.1 y 11.10.2).

Con relación al *lenguaje* si bien en los libros de texto analizados se observan todos los tipos de lenguaje, son el aritmético y geométrico los más abundantes. Los docentes de los grupos de control, por su parte, intentan comenzar a transitar la CE-aritmética privilegiando un lenguaje conjuntista (apartados 6.1.1.3 y 7.1.1.1) inclusive no realizan una distinción clara entre número yconjunto. Se ha podido evidenciar la presencia de conflictos semióticos de tipo epistémicos e interaccionales. El profesor del grupo experimental emplea un lenguaje geométrico-numérico-aritmético, a través del algoritmo de FC (apartado 5.1.1.5), para introducirse en la noción de número irracional (apartado 11.1.1).

Con relación a los *conceptos-regla*, el número irracional se define usualmente en los libros de texto en un contexto geométrico (donde la medida es la noción clave), o como solución de ecuaciones polinómicas sin solución en $\mathbb{Q}$. Los profesores de los grupos de control introducen dos definiciones de número irracional (apartados 6.1.1.3 y 7.1.1.1), las dos relacionadas con la definición de número racional, una como un número que no es posible expresarlo como razón de números enteros y otra como un número cuya expresión decimal es infinita no periódica, ambas al mismo tiempo. Se ha podido así observar conflictos semióticos de tipo interaccional y epistémico. En cambio en el grupo experimental son los alumnos quiénes construyen una definición de número irracional luego de varias actividades (apartado 11.3.1).

En los libros de texto las nociones de continuidad de la recta numérica o de completitud de los reales no son en general abordadas. Los docentes de los grupos de control señalan la "completitud" a partir de los "huecos" de la recta numérica (apartado 6.1.1.3 y 7.1.3.3), de forma verbal, sin actividad matemática para los alumnos, por lo que se evidencia un conflicto semiótico de tipo interaccional (apartado 6.1.1.5).

En los libros de texto se introducen métodos para aproximar números irracionales, el profesor del grupo experimental introduce la noción de fracción continua para dicha aproximación. La SDC asociada es de nivel bajo en la aproximación por FC; de hecho, dificultades observadas en los alumnos son persistentes (apartado 11.10.2). Sin embargo, los docentes de los grupos de control desarrollan la FC por redondeo y truncamiento en las expresiones decimales de los números reales dada por una calculadora.

Con relación a las *propiedades* de densidad y orden de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ son implícitamente consideradas en los libros de texto, como consecuencia de la aproximación por exceso y por defecto de racionales por irracionales. El profesor del grupo de control 1 afirma verbalmente que el conjunto ($\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$) es denso en $\mathbb{R}$, sin embargo no gestiona un estudio de esta noción con los alumnos. Todo queda entonces en un plano exclusivamente mostrativo, que acarrea un conflicto semiótico de tipo epistémico (apartado 6.1.1.3). El docente del grupo de control 2, produce una interacción con la propiedad de cardinalidad del conjunto de los números irracionales; esta interacción verbal es también exclusivamente mostrativa (apartado 7.1.3.3)

Con relación a los *procedimientos* es mayoritaria, en los libros de texto la introducción de procedimientos para representar geométrica y numéricamente los irracionales. Los profesores de los grupos de control también introducen procedimientos para representar algunos números irracionales en la recta real (apartados 6.1.2.7 y 7.1.3.5). Sin embargo, no se discute el hecho de que existan números irracionales no construibles con regla y compás. Se evidencian conflictos interaccionales y epistémicos que se traducen en errores reproducibles en las representaciones producidas por los alumnos (6.1.2.7 y 7.1.5.1).

Con relación a los procesos de *argumentación* y validación están prácticamente ausentes en los libros de texto estudiados. Los profesores de los grupos de control intentan que los alumnos argumenten por medio del teorema de Pitágoras, al momento de representar en la recta numérica real, algunos números irracionales (apartados 6.1.1.6 y 7.1.5.1);sin embargo se evidencian dificultades que se manifiestan por errores (apartados 6.1.2.6, 6.1.2.7, 6.2.1.1, 6.2.1.2 y 7.1.5.1).

Asimismo resulta necesaria para la investigación la identificación de conflictos semióticos asociados al reconocimiento de regularidades y patrones en la búsqueda de la periodicidad y aperiodicidad numérica en la expansión decimal de números reales en formación de profesores. Esta necesidad se traduce en un tercer objetivo general.

O$_g$c: *Analizar la complejidad asociada a la noción de número irracional en Educación Secundaria a partir de la relación entre lo ostensible y lo no ostensible de objetos matemáticos presentes en el currículo de secundaria.*

El cual se concreta a su vez en los siguientes objetivos específicos:

O$_e$j: *Estudiar algunas problemáticas didácticas en torno al reconocimiento de patrones y regularidades en la expansión decimal de los números irracionales y racionales.*

O$_e$k: *Identificar posibles conflictos semióticos asociados al reconocimiento de patrones y regularidades en la búsqueda de la periodicidad o la aperiodicidad numérica.*

O_el: *Analizar los errores emergentes del proceso de reconocimiento de regularidades y patrones en la expansión decimal de los números reales.*

Dado que algunos de profesores encuestados de Educación Secundaria, (apartado 4.4.4), emplean en sus clases ejemplos de números irracionales y que les resulta a su vez a sus alumnos dificultoso la diferenciación y la identificación de números irracionales, se considera entonces importante el estudio de la "percepción" de posibles dificultades y conflictos semióticos en el proceso de "visualización" de la noción de numero irracional.

El estudio se centra en el reconocimiento de patrones y regularidades en la búsqueda de la periodicidad y de aperiodicidad numérica en estudiantes de segundo año del Profesorado de Matemática y en alumnos de tercer año de Educación Secundaria (15-16 años) (apartado 5.5.1).

Se concluye de la experiencia que no es posible, en escenarios escolares, el reconocimiento de regularidades y patrones (salvo que sean casos muy evidentes).La búsqueda de periodicidad y de aperiodicidad numérica solamente por el análisis de sus cifras decimales desconociendo su estructura de origen no es eficaz. Las dificultades provienen de: a) cuestiones epistemológicas, relativas al grado de conocimiento, por parte del alumno, de las nociones matemáticas asociadas; b) cuestiones cognitivas como la "percepción visual" y el "proceso de visualización" al momento del reconocimiento de patrones y regularidades por parte del estudiante; y c), finalmente, a cuestiones didácticas relativas a las expectativas mutuas entre profesores y alumnos en relación con el conocimiento puesto en juego (contrato didáctico o dimensión normativa) (apartado 5.5.1.1).

En relación con esto último los docentes de los grupos de control (apartados 8.1 y 8.2) proponen a los alumnos ejemplos de números, los cuáles se asemejan por su "forma ostensiva" a una fracción de enteros, a un número racional; de la misma manera se presentan números que por su forma ostensiva se asemejan un número irracional. En ambos casos se evidencia en las respuestas de los alumnos un fenómeno didáctico, el de "mimetismo por ostensión", que supone percibir un objeto matemático, mimetizado con otro, semejante en apariencia, por su forma ostensiva no por su naturaleza no ostensiva. Lo ostensivo entonces prima por sobre lo no ostensivo. Se concluye que este fenómeno didáctico de “mimetización ostensiva” es producto de las débiles IDD que perturban las SDC propuestas por el docente.

El cuarto objetivo general analiza relaciones entre configuraciones epistémicas y la emergencia de posibles fenómenos didácticos asociados a la interacción entre nociones matemáticas vigentes en el currículo de matemática de Educación Secundaria.

O$_g$d: *Estudiar posibles relaciones entre las configuraciones epistémicas en libros de texto de Educación Secundaria asociados a potenciales fenómenos didácticos ligados a las conexiones, desarrolladas por el profesor, entre objetos matemáticos presentes en el currículo y asociados a la noción de número irracional.*

Para dar cumplimiento a este objetivo general se formula el siguiente objetivo específico, ligado a la determinación de fenómenos didácticos asociados a la representación de números irracionales y a su clasificación:

O$_e$m: *Estudiar potenciales fenómenos didácticos asociados a las conexiones, desarrolladas por el profesor, asociadas a la representación de números irracionales y a su clasificación.*

En la experimentación con 16 profesores de Educación Secundaria en actividad (apartado 4.4.4), el análisis del cuestionario evidencia, en una primera instancia, un fenómeno de simbiosis didáctica curricular entre la noción de “representación de números irracionales” y la de “raíz cuadrada”, esta simbiosis la produce el docente al momento de elaborar su planificación y su programación, en el trabajo de transposición didáctica, en sintonía con el currículo prescripto y los libros de texto. En un segundo momento se identifica la SDC en la interacción de los objetos prevista por los docentes, en “niveles” de SDC (bajo, medio, alto u óptimo) según los docentes (apartados 8.1, 8.2 y 12.1).

Los profesores indican quelas representaciones de los irracionales en la recta real son problemáticas en la enseñanza y el aprendizaje. Sin embargo, a la mayoría de los profesores no les fue posible determinar cuando un número irracional se puede representar exactamente con regla y compás (ideal). La noción de número construible se revela entonces como muy necesaria para contribuir a alcanzar una conceptualización más estable de la representación de dichos números en la recta real, en lo relativo a la exactitud y aproximación de dicha representación, si previamente, los docentes han logrado una conceptualización estable de dicha noción.

Otro aspecto analizado es la diferenciación de los números racionales de los irracionales. Los profesores señalan a esta noción como dificultosa para la enseñanza y el aprendizaje. Aquí, los docentes también presentan dificultades a la hora de reconocer y diferenciar a un número irracional.

Los profesores señalan asimismo como aspecto conflictivo para la enseñanza y aprendizaje la débil manipulación y operación que los alumnos manifiestan en relación a la noción de número racional, es decir, a los conocimientos previos (antiguos) los cuales no son los esperados por los docentes. Paradójicamente, si bien los profesores esperan una construcción no estable de la noción de número racional, se evidencia que, en los grupos de control 1 y2, los docentes proponen una sucesión de interacciones, entre objetos matemáticos asociados a los números racionales, de nivel bajo y en un lapso de tiempo muy corto que producen diferentes tipos de conflictos semióticos. Estas interacciones provocan una sucesión de tomas de decisiones, por parte de los profesores, en donde la "sucesión de bifurcaciones", genera en cada uno de los casos la misma respuesta: la "suposición" de la estabilidad del conocimiento emergente. Se evidencia así un fenómeno didáctico de "ilusión de estabilidad de los conocimientos emergentes" (apartados 8.1 y 8.2).

Otros objetivos específicos se abocan a la determinación, a partir de una experimentación piloto, de la presencia y funcionamiento de las nociones de número irracional y de fracción continua, con estudiantes de segundo año de Educación Secundaria (14-15 años).

O_ed: *Realizar un estudio sobre la presencia y funcionamiento de las nociones de aproximación de número irracional y de algoritmo, que forme parte del análisis a priori de las condiciones de enseñanza.*

O_ee: *Plasmar a través de la experimentación una situación que involucre las nociones de aproximación de número irracional y de fracción continua.*

O$_{e}$f: *Formalizar un estudio a posteriori, desde el EOS, donde se trate de analizar, sintetizar y extraer conclusiones de dicha puesta en funcionamiento.*

En el capítulo 9 se estudian algunos antecedentes de las primeras situaciones problema que forman parte del proyecto de enseñanza (apartado 9.1). A continuación se adaptan las situaciones-problema a un contexto escolar en un estudio piloto, allí se describen las tareas propuestas, su resolución experta y los comportamientos esperados (apartado 9.2). Posteriormente, se analizan los resultados de este estudio piloto, es decir, los comportamientos observados (apartado 9.3). Finalmente, se discuten los resultados del estudio piloto, destacando aspectos para el diseño de la secuencia de actividades (apartado 9.4).

En el capítulo 11 se describe la experimentación y se analizan los resultados obtenidos. Para la sesión 3 se produce un "acoplamiento" entre dos holo-significados, la de FC y la de número irracional, en un contexto de uso numérico-aritmético. Si bien se produce una SDC, de intensidad "media", entre ambas nociones en el marco del currículo prescripto.

Para la sesión 4 se intensifica el nivel de SDC al realizar los alumnos varios ejercicios, se vuelve de nivel "alto" a partir de un conocimiento previo estable, donde la resolución de conflicto se observa eficaz, pero muy centrada en el contexto propio original y no permite al estudiante la determinación de su campo de validez o eficacia (por ello las dificultades que acarrean la aplicación del algoritmo a números negativos). Esta falta de análisis del campo de validez limita la reutilización de los objetos emergentes al contexto propio original y, por lo tanto, su estabilidad. Sin embargo esta SDC alta provoca un aumento en la autonomía de los alumnos en la resolución de las tareas y por ende un incremento de la autoestima en ellos (idoneidad afectiva).

En la sesión 5 la SDC que propone el docente pasa por la relación FC-número racional o FC-número irracional, se trata de una simbiosis de nivel "medio" ya que el conocimiento previo se observa estable. Para la sesión 6 el nivel de SDC se puede considerar como "óptimo" ya que el conocimiento previo se observa estable, donde las intervenciones docentes para la resolución de conflictos semióticos es eficaz (ya por una regulación expresa del docente, ya por una devolución de la tarea a los estudiantes que permite a éstos su resolución). La resolución eficaz conlleva un aprendizaje estable, que permite la reutilización de los objetos en contextos equiparables (diferenciación número racional – irracional). Para la sesión 7 el nivel de SDC continúa siendo "óptimo" entre la noción de FC y la de número irracional ya que no se evidencian grandes dificultades, para los alumnos, en la diferenciación entre números racionales e irracionales.

En la sesión 8 el nivel SDC se intensifica alcanzando un nivel medio entre el objeto número irracional y el de fracción de números enteros, de esta manera la mayoría de los alumnos. Para la sesión 9 se observa un nivel de SDC "bajo" ya que la inestabilidad de los conocimientos previos se suma a la ineficaz resolución de conflictos entre la noción de FC infinita y la periodicidad de algunas FC. En la sesión 10 la SDC se revela de nivel bajo en la aproximación por FC, por ello persisten dificultades que se transforman en errores (apartado 11.10.1).

Para la sesión 11 se observa una SDC de nivel "alto" entre la noción de número irracional y la de aproximación por "encuadramiento", el conocimiento previo se manifiesta estable, la resolución de conflictos se observa eficaz, aunque centrada en el contexto de la aproximación, por defecto y por exceso, que no permite al estudiante la determinación de su campo de validez o eficacia a otros contextos de uso. En las sesiones 12, 13 y 14 los alumnos continuaron trabajando de la misma manera que en la sesión 11, hasta finalizar las actividades propuestas. En la sesión 15 los alumnos comienzan a realizar el trabajo práctico previsto denominado por el docente "de los racionales a los irracionales".

Para la sesión 16 la SDC entre el desarrollo en FC y la noción de aproximación se observa con un nivel "bajo" ya que la resolución de conflictos es ineficaz (parcial o totalmente), limitando la aplicación de los conocimientos a corto plazo, produciendo un significado atomizado, sin conexiones matemáticas que viabilicen su estabilidad y reutilización en tareas posteriores. Se observa así un conflicto semiótico interaccional que queda en estado residual y que se volverá a manifestar en la sesión 17 y en las respuestas a las evaluaciones tanto de proceso como integradora (apartado 12). En la sesión 17 se evidencian dificultades en relación al "proceso inverso", o sea dada el desarrollo en FC hallar la aproximación correspondiente, se observa entonces una SDC de nivel “bajo” con una resolución de conflictos ineficaz. Para la sesión 18 se observa un nivel de SDC “alto” donde el conocimiento previo se mantiene estable centrado en el contexto propio original.

Un quinto objetivo general se focaliza en estudiar la complejidad didáctica asociada a las propiedades de los números irracionales:

O$_g$e: *Analizar la complejidad asociada a la enseñanza y el aprendizaje de propiedades de los números irracionales en formación de profesores.*

Se pretende entonces la determinación, a través de una experimentación, de conflictos semióticos asociados a los números irracionales y a sus propiedades en formación de profesores que se traducen en los siguientes objetivos específicos:

O$_e$g: *Estudiar la complejidad asociada a la enseñanza y el aprendizaje de propiedades de los números irracionales tal como la de densidad y cardinalidad del conjunto*$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

O$_e$h: *Identificar posibles conflictos semióticos asociados a los números irracionales enla formación de profesores y describir su origen y naturaleza, con vistas a la mejora de la formación matemática y didáctica de dichos profesores.*

O$_e$i: *Analizar los errores emergentes y la atribución de significado, de las nociones involucradas por parte de los estudiantes.*

La experimentación llevada adelante con estudiantes para profesor en Educación Secundaria en Matemática (apartado 4.2.1) permite la determinación de fenómenos didácticos ligados a dos nociones matemáticas asociadas a la de número irracional, a saber, la de cardinalidad de conjuntos infinitos y la de densidad $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Arrigo y D’Amore (2004) señalan dos fenómenos didácticos asociados a la cardinalidad de conjuntos infinitos, el de “aplastamiento” y el de “dependencia”. Ambos fenómenos son detectados en el presente estudio y, a su vez, se evidencia la presencia otro fenómeno didáctico, el de “asimetría de cardinales infinitos por inclusión”, es decir, la noción conjuntista de inclusión utilizada para determinar si un conjunto tiene mayor cantidad de elementos que otro, se erige en “obstáculo” para la adquisición de la noción de numerabilidad de un conjunto o la de coordinabilidad con el conjunto $\mathbb{N}$.

Por su parte la noción de densidad $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ también es fuente de serios conflictos epistémicos. La equiparación infinito matemático-densidad, la cual realizan los alumnos, donde “conjunto infinito equivale a conjunto denso” revela dificultades en la apropiación de la noción. También la manipulación del modelo gráfico lineal es problemática, el conjunto de los números irracionales no es denso porque “existen números en la recta que no son irracionales” evidencia un conflicto semiótico importante. Se trata de un fenómeno didáctico de “mimetización ostensiva” entre dos nociones matemáticas que si bien son próximas, ya que todo conjunto denso es infinito, la recíproca no es cierta. De esta manera, para los estudiantes, lo ostensivo destaca por sobre lo no ostensivo, ellos se “aferran” a lo “conocido ostensivamente” o sea a la recta numérica real. Este conflicto observado, que involucra a la recta numérica real, se suma a los ya señalados por Bergé (2003; 2004; 2010) sobre las dificultades didácticas detectadas entre las nociones de continuidad de la recta y de completitud del dominio real, en estudiantes universitarios; y por Scaglia (2000), relativos ala representación en la recta numérica de los números reales, en alumnos de Educación Secundaria y de los primeros años de Universidad, señalando la relación conflictiva entre los objetos matemáticos y los objetos físicos y caracterizando algunos obstáculosepistemológicos.

Relacionado con esto último se propuso indagar sobre las interacciones didácticas que el profesor desarrolla al momento de pensar y llevar adelante la clase de matemática. Lo señalado se sintetiza en el sexto y último objetivo general:

O_gf: *Indagar si la noción de holo-significado es un medio teórico propicio para la organización, estructuración y secuenciación del currículo, en particular de la noción de número irracional.*

Los objetivos específicos se concretan en relación con la noción de número irracional y al currículo de matemática de educación secundaria. Se trata de determinar de relaciones entre los holo-significados asociados a las nociones de número irracional y fracción continua en Educación Secundaria.

O_en: *Analizar las posibles relaciones entre las nociones de holo-significado de un número irracional y de holo-significado de la fracción continua.*

La determinación de las configuraciones epistémicas de referencia (apartados 4.6 y 5.8) sus significados parciales y sus interacciones, permiten, en el estudio, la construcción de los holo-significados de las nociones de número irracional (apartado 4.8.2) y de fracción continua (apartado 5.9). Esto último proporciona a su vez la descripción de las relaciones entre los diferentes significados y sus interacciones asociadas.

Como un medio de análisis de las interacciones didácticas propuestas a su vez en las planificaciones como en sus clases por los docentes, tanto de los grupos de control como experimental, se introduce en la memoria la noción didáctica de "simbiosis didáctica curricular". Esta permite la observación detallada de las dificultades y conflictos epistémicos emergentes de los procesos de estudios analizados.

Ambos docentes de los grupos de control introducen al número irracional desde una entrada formalista (apartados 8.1 y 8.2) con especial énfasis en las propiedades de los conjuntos numéricos. Inmediatamente se evidencian conflictos semióticos producto de las interacciones didácticas, las cuáles en numerosos casos resultan "dialécticas". Estas interacciones didácticas dialécticas entre objetos matemáticos "opuestos" "perturban" la estabilidad de la simbiosis entre los objetos propuestos por los profesores. Dicha perturbación se produce por la inestabilidad en la conceptualización de uno de dichos objetos (el "antiguo") en los alumnos, por lo que en su mayoría dichas simbiosis resultan de nivel bajo (apartados 8.1 y 8.2).

Por su parte, los docentes no logran percibirlas dificultades que presentan las interacciones propuestas (o las desestiman) en las respuestas producidas por los alumnos. No se debe minimizar la perturbación provocada por la "flecha" inexorable del tiempo didáctico la cual también puede ser "germen" de este fenómeno didáctico.

La "toma de decisiones didácticas" plantea una disyuntiva (bifurcación)a los docentes (en algunos casos no percibida), si éstos perciben conflictos entonces, en algunos casos, deciden continuar con la interacción prevista y tratar de superarlos; pero si “suponen” la estabilidad del conocimiento emergente, en clara controversia con las dificultades que se evidencian en clase, entonces se da un fenómeno didáctico según el cual los docentes suponen la estabilidad de los conocimientos emergentes y continúan con el proyecto educativo previsto. Es pues un fenómeno particular de la ilusión de transparencia. Esto último ocurre en varios “momentos” de las trayectorias didácticas de los docentes tanto de los gruposde control como del experimental (apartado 12.1.1).

Por otro lado, si como docente se toma la decisión didáctica de interaccionar dos objetos matemáticos, formando una simbiosis didáctica curricular y esta interacción se lleva adelante relacionando dialécticamente a otros objetos matemáticos asociados, se debe tener presente que esta IDD no es “transparente”, sino que implica una construcción previa, que tal vez no se encuentre de modo estable en la mayoría de los alumnos. Si esto último ocurre se debe intentar estabilizar al conocimiento previo para recién emprender la interacción con el nuevo objeto y de esta manera lograr una construcción más estable a largo plazo. De otra manera, de no estabilizar al conocimiento previo, ”antiguo”, es posible que se produzcan algunos fenómenos didácticos, como el ya señalado de “mimetismo por ostensión” (de objetos matemáticos) manifestado por los alumnos, el cual se evidencia en varias sesiones de las estudiadas (apartados 8.1, 8.2 y 12.1).

Por su parte, el docente del grupo experimental introduce, en las primeras dos sesiones, la noción de número irracional a través de la noción de fracción continua, se trata de ingresar en un contexto geométrico-numérico-aritmético donde la CE-imp y la CE-exp se relacionan por medio de procesos aproximativos finitos. El profesor propone entonces un tránsito entre la noción de fracción continua finita hacia una infinita que representa a un número irracional. Se trata de un primer acoplamiento entre holo-significados (apartado 11.1.1). Las producciones de los alumnos muestran, en un primer momento, un nivel “bajo” de SDC, si bien los resultados eran previsibles para un primer encuentro de los alumnos entre el algoritmo de FC y la noción de número irracional. Lentamente comienza a producirse la SDC entre estos dos objetos matemáticos previstos en la planificación del docente.

Para la sesión 3 se produce un “acoplamiento” entre dos holo-significados (FC y número irracional) en un contexto de uso numérico-aritmético; la SDC se evidencia de intensidad “media” entre ambas nociones. En la sesión 4 el “acoplamiento” entre los holosignificados de FC y de número irracional continúa y se afianza en un contexto de uso numérico-aritmético. Para la sesión 5 la simbiosis SDC que propone el docente pasa por la relación FC- número racional o FC - número irracional, la cual continúa de nivel “medio” ya que el conocimiento previo se observa estable. La resolución de conflictos ha conllevado intervenciones regulativas no contrastadas por lo que el profesor intenta, como se dijo, que los alumnos diferencien la notación en fracción de enteros de la formada por otros números tratando de superar dificultades compartidas por algunos alumnos. Ya para la sesión 6 la clase se desarrolla con una gran dosis de autonomía por parte de los alumnos, la SDC puede considerarse “óptima” ya que el conocimiento previo se observa estable, donde las intervenciones docentes para la resolución de conflictos semióticos es eficaz (ya por una regulación expresa del docente, ya por una devolución de la tarea a los estudiantes que permite a éstos su resolución). La resolución eficaz conlleva un aprendizaje estable, que permite la reutilización de los objetos en contextos equiparables (diferenciación número racional – irracional).

2. ACERCA DE LAS HIPÓTESIS DE TRABAJO

En este apartado se analizan las hipótesis de investigación establecidas en el capítulo 1 en base a los resultados obtenidos en los diferentes estudios que conforman la memoria.

Una primera hipótesis hace alusión a la introducción del número irracional, en Educación Secundaria, mediante el empleo de fracciones continuas.

H1: Si en la introducción y desarrollo de la noción de número irracional se utilizan de manera sistemática aproximaciones mediante fracciones continuas, entonces los estudiantes son más eficaces en los procesos de construcción y comunicación relativos a la noción, y los aprendizajes son asimismo más estables que tras una enseñanza reglada convencional donde la fracción continua está ausente o su introducción es anecdótica.

Una conclusión se puede extraer de lo estudiado es que un acoplamiento entre holosignificados de número irracional y FC es posible; en la investigación se evidencia un nivel de SDC óptimo en lo relativo a la diferenciación de un número irracional de otro racional. Los aprendizajes se evidencian más estables que tras una enseñanza reglada convencional donde la fracción continua está ausente o su introducción es anecdótica.

No sucece así en lo concerniente al proceso de aproximación de un número irracional por FC. Esta interacción entre objetos matemáticos no funciona como es esperado. Las actividades y tareas propuestas no permiten el logro de una estabilización de los conocimientos emergentes, por lo que la SDC se evidencia de nivel bajo. Si se piensa en la aproximación de números irracionales vía la FC debe reformularse las actividades propuestas para intentar lograr una SDC de nivel óptimo.

Se observa, luego del análisis del proceso de estudio, que los alumnos del grupo experimental son más eficaces en los procesos de construcción y comunicación relativos a la noción de número irracional (apartado 12.2), aunque con las reservas pertinentes relativas a las perturbaciones provocadas por las interacciones entre objetos matemáticos asociados al número irracional y a la FC. La hipótesis entonces se confirma parcialmente.

Una segunda hipótesis se sitúa en la posibilidad que la noción de holo-significado sea un medio apto para la gestión del currículo de matemática.

H2: Si la noción de holo-significado posibilita la descripción sistémica de la noción de número irracional, entonces es un medio teórico propicio para la organización, estructuración y secuenciación del currículo de matemática, ya que determina un marco de referencia para la noción dentro del sistema didáctico, esto es, una perspectiva global de qué técnicas se quiere enseñar en un proyecto global de enseñanza.

La determinación de las configuraciones epistémicas (apartado 4.6) permite la construcción del holo-significado del número irracional (apartado 4.8)que a su vez posibilita la descripción sistémica de dicha noción.

No solo permite la descripción holística de la noción de número irracional, sino también proporciona una multiplicidad de sentidos y contextos dela noción de fracción continua. Se determina entonces las configuraciones epistémicas que se pueden asociar a dicha noción (apartado 5.8) y posteriormente se estructura su complejidad ontosemiótica en la construcción de un holo-significado (apartado 5.9).

En el estudio, incluso, se indaga el acoplamiento didáctico entre ambos holo-significados (número irracional y fracción continua) (apartados 11.4 y 12.1) y se evidencia la emergencia de simbiosis didácticas curriculares entre objetos matemáticos, por parte del profesor. Sin esta visión sistémica que permite desarrollar el holo-significado de la noción de número irracional, se dificulta su estructuración y secuenciación en el currículo de matemática.

Se confirma entonces la hipótesis por la cual la noción de holo-significado es un medio teórico propicio para la organización, estructuración y secuenciación del currículo de matemática, ya que determina un marco de referencia para la noción dentro del sistema didáctico, esto es, una perspectiva global de qué técnicas se quiere enseñar en un proyecto global de enseñanza.

Una tercera hipótesis centra su atención en el proceso de transposición didáctica de la noción de número irracional.

H3: Si el proceso de transposición didáctica de la noción de número irracional revela conflictos semióticos potenciales, entonces es necesaria la construcción de una génesis artificial escolar que permita una "recontextualización" de la noción a enseñar.

La noción de simbiosis didáctica curricular se revela a lo largo del presente estudio de gran utilidad a la hora de analizar las interacciones entre objetos matemáticos propuestos por los docentes en base al currículo prescripto. Ese trabajo interno de transposición didáctica (Chevallard, 1991) se puede "visualizar" en el momento en el que el profesor elabora su planificación y programación. Allí se produce SDC entre objetos que, en clase de matemática, desarrollan diferentes “niveles”. A partir de esta noción, se analiza a lo largo de esta memoria de tesis, el proceso de transposición didáctica de la noción de número irracional el cual revela conflictos semióticos potenciales y efectivos con evidencias de perturbaciones provocadas, en algunos casos, por interacciones didácticas dialécticas.

Resulta entonces necesaria la construcción de una génesis artificial escolar que permita una “recontextualización” de la noción a enseñar que tenga presente las perturbaciones detectadas y los fenómenos didácticos producidos tanto por el profesor—ilusión de estabilidad de los conocimientos emergentes— como por los alumnos—mimetización ostensiva—. Se confirma entonces la hipótesis propuesta.

3. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Sobre la noción de número irracional en Educación Secundaria

- Con relación a las propiedades de los conjuntos numéricos, las interacciones didácticas dialécticas entre nociones como: finitud e infinitud, discreto y denso, ordenado y no ordenado, se evidencian perturbaciones en la SDC entre los conjuntos de los números racionales e irracionales. Se debe tener en cuenta que si se realizan estas interacciones en tiempos didácticos “reducidos”, sin actividad matemática, probablemente se observe un conocimiento emergente inestable. Se debe considerar la posibilidad de dedicar más tiempo didáctico si se desea llevar adelante dichas interacciones.
- Con relación a las nociones de “exactitud y aproximación” de un número racional o irracional: se debe tener en cuenta que, si se desea producir esta interacción entre objetos dialécticos, será necesario estudiar con los alumnos en qué casos un número se expresa de forma exacta o aproximada, aunque parezca algo trivial para el docente.
- Con relación a las nociones de periodicidad y aperiodicidad numérica: se debe tener en cuenta que, si se desea producir esta interacción entre objetos dialécticos, será necesario lograr que los alumnos previamente estabilicen su conceptualización de la propiedad de período de un número racional en su

expresión decimal. Además es deseable tener en presente que no es posible reconocer a un número irracional solamente por su expresión decimal sin estudiar su estructura de origen. Se debe considerar que, si se lleva adelante un "reconocimiento" de un número irracional por sus cifras decimales solamente, pueden emerger conflictos semióticos asociados a cuestiones relativas al proceso de visualización de un número real que incluyen cuestiones cognitivas, culturales y sociológicas.

- Con relación a la noción de número fracción continua: puede ser conveniente su introducción en Educación Secundaria para que los alumnos puedan "diferenciar" números irracionales de racionales por medio de un algoritmo viable y eficaz. Asimismo se debe tener en cuenta la complejidad didáctica de dicho objeto al momento de producir la interacción.
- Con relación a explicación de los conflictos semióticos: la noción teórica de simbiosis didáctica curricular se evidencia como una herramienta de análisis que favorece el estudio de las interacciones didácticas puestas en juego en un proceso de estudio de la matemática.
- Con relación a la noción de número construible: esta noción puede contribuir a una mayor conceptualización de las representaciones de los números irracionales en la recta numérica real, a diferenciar entre lo exacto y lo aproximado, en suma, a estudiar las limitaciones que plantea la ubicación ideal o "real" en la recta de un número real.
- Con relación a los tiempos didácticos y la construcción de la noción de número irracional en Educación Secundaria: a partir del estudio se evidencian conflictos interaccionales, epistémicos o cognitivos relativas a los "reducidos" tiempos didácticos dedicados por los docentes de los grupos de control, a interaccionar con nociones matemáticas asociadas a los números irracionales. Se debe tener en cuenta que, el aprendizaje de los números irracionales, implica un proceso cognitivo necesariamente "lento" y que debe implicar un aumento en los tiempos didácticos empleados en el estudio de dichos números.

Sobre la noción de número irracional en formación de Profesores de Matemática

- La noción de número irracional se desarrolla en general muy rápidamente en Educación Secundaria. La conceptualización de la noción de número irracional solamente puede lograrse en niveles superiores (terciarios o universitarios). Allí deben encontrar cabida este objeto que en la memoria de tesis se evidencia de gran complejidad. El estudio de una "antropología" (apartado 4.1) de dichos números puede contribuir a que los estudiantes logren un significado institucional de referencia que les permita una visión "holística" de este objeto. Asimismo se debe tener en cuentaque la noción de limite está presente implícita o explícitamente en cada una de las configuraciones (y por lo tanto en cada contexto de uso) y da una idea dela importancia de la interacción de la noción de numero irracional y la noción de limite, fundamental en este nivel educativo.
- Con relación a la noción de holosignificado: un aporte del presente estudio se orienta a la posibilidad de emplear esta noción como "medio" propicio para la organización, secuenciación e interacción de los objetos matemáticos presentes en el currículo en conjunto con la noción de configuración epistémica, que permita la determinación de los significados parciales de una noción matemática.
- Con relación a las nociones de cardinalidad y densidad del conjunto de los números irracionales se identifican además de algunos obstáculos ya señalados por Arrigo y D'Amore (2004), como los de *dependencia* de los cardinales infinitos o de *aplastamiento*, el fenómeno didáctico de "asimetría de cardinales infinitos por inclusión", es decir, la noción conjuntista de inclusión utilizada para determinar si un conjunto tiene mayor cantidad de elementos que otro, se erige en "obstáculo" para la adquisición de la noción de numerabilidad de un conjunto o la de coordinabilidad con el conjunto $\mathbb{N}$. Los futuros profesores necesitan conocer con profundidad las propiedades del número irracional para poder enseñar su construcción viable y eficaz en Educación Secundaria.
- En relación de número construible: si bien aparece implícita esta noción en el diseño curricular de la Provincia de Mendoza (DESPM, 2013), para el profesorado de Educación Secundaria en Matemática, no se evidencian indicadores de su conceptualización correcta y estable en los docentes encuestados. Se debe pues hacer hincapié en el estudio de esta noción en este nivel de enseñanza para que los estudiantes puedan diferenciar entre

aquellos números reales que pueden representarse en forma idealmente exacta de aquellos para los cuáles esto no es posible.

- En relación con la noción de fracción continua: esta noción no aparece en forma explícita en el diseño curricular (DESPM,2013), se sugiere tener esta noción presente no solo como un algoritmo que permite diferenciar números irracionales y racionales o aproximar números reales (apartado 5.6.1.1), sino también, como un objeto que permite resolver problemas de máximo común divisor (apartado 5.6.1.2), de ecuaciones cuadráticas (apartado 5.6.3.1) y allí conocer "familias" de números como los "metálicos", y además, permite resolver ecuaciones diofánticas (apartado 5.6.3.2) o problemas de circuitos eléctricos(apartado 5.7.3) e inclusive geométricos (apartado 5.6.2).

4. ALGUNAS LIMITACIONES DEL ESTUDIO Y CUESTIONES ABIERTAS

Se advierten algunas limitaciones y se dejan abiertas otras cuestiones del estudio las cuáles se dan cuenta a continuación:

- El impacto provocado por las observaciones realizadas por el investigador en cada sesión de clase y sus perturbaciones al normal desempeño de las clases de matemática (respuestas condicionadas por la presencia de investigador) han sido controladas mediante procedimientos de triangulación (diferentes técnicas para el registro y análisis de un mismo fenómeno).Sin embargo, el condicionamiento de la respuesta por la presencia del investigación representa una variable extraña, dado que no ha sido objeto explícito de análisis. Así, sería conveniente su análisis e influencia en el proceso de estudio.
- Limitaciones de tiempo impuestas por la aplicación de cuestionarios escritos a grupos de estudiantes de nivel superior, de Educación Secundaria y a profesores en actividad, que llevan a una fuerte restricción en el número de cuestiones que se pueden incluir en los cuestionarios. De esta forma, sería conveniente la mejora del diseño de un cuestionario *ad hoc* con una alta fiabilidad de constructo y unas características óptimas para la valoración de los comportamientos y la obtención de resultados validos.

Referencias

Aarts, J., Fokkink, R., & Kruijtzer, G. (2001). Morphic numbers. *NAW*, *5/2*(2), 56–58.

Adamczewski, B. (2010). On the expansion of some exponential periods in an integer base. *Mathematische Annalen*, *346*, 107–116. doi:10.1007/s00208-009-0391-z

Adamczewski, B. (2010). *Une approche arithmétique des systemes de numération*. Université Claude Bernard Lyon 1. Retrieved from http://adamczewski.perso.math.cnrs.fr/

Adamczewski, B., & Allouche, J. (2007). Reversals and palindromes in continued fractions.*Theoretical Computer Science*, *380*, 220–237.doi:10.1016/j.tcs.2007.03.017

Adamczewski, B., & Bugeaud, Y. (2005). On the complexity of algebraic numbers II. Continued fractions. *Hal-00014575*. Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00014575

Adamczewski, B., & Bugeaud, Y. (2007). Palindromic continued fractions. *Annales de l'institut Fourier*, *57*(5), 1557–1574. Retrieved from http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_5_1557_0

Adamczewski, B., & Bugeaud, Y. (2010). Mesures de transcendanceet aspects quantitatifs de la methode de Thue-Siegel-Roth-Schmidt. *Proceedings of the London Mathematical Society*, *101*(3), 1–26. doi:10.1112/plms/pdp054

Adamczewski, B., & Jordan, I. C. (2013). The Many Faces of the Kempner Number. *Journal of Integer Sequences*, *16*, 1–34.

Alvarez C., Alvarez F., Garrido L., Martinez S., Ruiz A. (2004). *Matemáticas 9*. Buenos Aires: Cúspide (Vicens Vives).

Apostol, T. (1996). Análisis Matemático (segunda ed., pp. 46–47). Barcelona: Editorial Reverté.

Aragón Artacho, F., Bailey, D., Borwein, J., & Borwein, P. (2013). Tools for visualizing real numbers. Part I: Planar number walks. *The Mathematical Intelligencer*, *35*(1), 42–60.

Araya-Chacón, A.-M. (2010). Gestión de la memoria didáctica en secundaria: estudio del micro-marco institucional de la memoria. In *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Retrieved from http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD_II/Comunicaciones_TAD_II/1 - Araya congres_TAD_2.pdf

Arcavi, A. (1985). *History of mathematics as a component of mathematics teachers background*. Weizmann Institute of Science.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 215–241.

Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (1991). Reading Bombelli ' s x-Purgated Algebra. *The College Mathematics Journal, 22*(3), 212–219. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/2686643

Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Zvi- Ben, R. (1987). History of Mathematics for Teachers: the Case of Irrational Numbers. *For the Leaming of Mathematics*, *2*(June).

Aristóteles. (1994). Metafísica. Madrid: GREDOS.

Aristóteles. (1995). Física. Editorial GREDOS.

Arrigo G., D'Amore B. (1999). 'Lo veo, pero no lo creo'. Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. Educación matemática, 11(1), 5–24.

Arrigo G., D'Amore B. (2002). "Lo vedo, ma non ci credo...", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. La matematica e la sua didattica, 1, 4-57.

Arrigo G., D'Amore B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas. Educación Matemática, 16(002), 5-19.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1(1). Comite Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal: México, 40-55.

Bagni, G. T. (1995). Frazioni continue discendenti e ascendenti. *Bollettino Dei Docenti Di Matematica*, *30*, 85–90.

Baker, A. (1975). *Transcendental Number Theory* (pp. 1–128). Cambridge: Cambridge University Press.

Balková, L., & Hrusková, A. (2013). Continued Fractions of Quadratic Numbers. *arXiv:1302.0521v1*, 1–13.

Balasubramanian, S. (2013). On Continued Fractions, Fibonacci Numbers and Electrical Networks. In *International Conferences Education & Technology Math & Engineering Technology* (pp. 1–8). Honolulu, Hawai: Hawaii University.

Bombelli, R. (1572). *L'algebra.* (G. Rossi, Ed.) (pp. 35–36). Bologna. Retrieved from http://www.bncf.firenze.sbn.it/

Belski, A. A.,&Kaluzhmin, L. A. (1980). *División inexacta* (pp. 7–26). Moscú: MIR.

Bencomo, D., Godino, J., & Wilhelmi R, M. (2004). Conflictos epistémicos en un proceso de estudio de la noción de función. Implicaciones para la formación de profesores. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 18).*

Benito Muñoz, M., & Escribano Benito, J. (1999). Introducción a las fracciones continuas. *SUMA*, *30*, 59–64.

Bergé, A. (2004). *Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria*. Buenos Aires.

Bergé A. (2010). Students' perceptions of the Completeness Property of the Set of Real Numbers. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(2), 217–227.

Bergé A., Sessa C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. Relime, 6 (3), 163–197.

Beskin, N. (1987). *Fracciones maravillosas*. (MIR, Ed.) (pp. 9–96). Moscú.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra & I. Saiz (Eds.), *Didáctica de matemáticas Aportes y reflexiones* (Quinta, pp. 65–95). Buenos Aires: Paidós Educador.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
Buendía Abalos, G. (2010). Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. *Relime*, *13*(4-1), 11–28.

Bugeaud, Y. (2011). Continued Fractions of Transcendental Numbers.
CDMTCS Report Series (pp. 1–13).

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM MathematicsEducation*, *40*(1), 3–22. doi:10.1007/s11858-007-0067-7.

Casas, A. (2006). Ecuaciones diofánticas y engranajes cilíndricos. *Sociedad Colombiana de Matemáticas XV. Congreso Nacional de Matemáticas*, *Especial L*, 285 – 298.

Castro, E. (1995). Exploración de patrones numéricos mediante
configuraciones puntuales (pp. 33–34). Granada: COMARES.

Cataldi, P. Antonio. (1613). Trattato del Modo Brevissimo di trouare la
radicequadradellinumeri (pp. 1–70). Bologna.

Cauer, E., Mathis, W., & Pauli, R. (2000). Life and Work of Wilhelm Cauer (1900 – 1945). In *Proc. MTNS2000* (pp. 1–10). Perpignan, Francia.

Champernowne, D. G. (1933). The construction of decimals normal in the
scale of ten. *Journal of the London Mathematical Society*, *8*, 254–260.

Cheng, K. H.F. (1998). *Some Generalized Continued Fractions*. University of

Calgary.

Chevallard Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.(2da ed.) Buenos Aires: Aique.

Chorny F., Salpeter C., Krimker G.(2009). Matemática 2/3.(2da Ed.). Buenos Aires: SM.

Copeland, A. H., &Erdös, P. (1946). Note on normal numbers. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *52*(10), 857–860. Retrieved from http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183509721

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M.R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. Enseñanza de las Ciencias, 28(3), 367-384.

Coriat, M.y Scaglia, S. (2000). Representación de los números reales en la recta. Enseñanza de las Ciencias, 18 (1), 25-34.

Cortés G. (2010). Matemática II. Buenos Aires: Stella.

Crisóstomo E., Ordoñez L., Contreras A., Godino J. D. (2005).Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. En A. Contreras, L. Ordoñez y C. Batanero (Eds.), Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas. (pp. 125–166) Jaen, ESP: Universidad de Jaén.

Collette J. P. (1985). Historia de las Matemáticas I. Madrid: Siglo XXI.

Condesse V., Minnaard C. (2007). La familia de los números metálicos y su hijo pródigo: el número de oro. Revista Iberoamericana de Educación. 42(2), 10 marzo. Disponible en: http://www.rieoei.org/deloslectores/1522Minnaard.pdf

Contreras A., Ordóñez L., Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. Enseñanza de las ciencias, 28(3), 367–384.

Corry L. (1994). La Teoría de las Proporciones de Eudoxio vista por Dedekind. Mathesis 10, 35–68.

Courant R., Robbins H. (1962). ¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos. Madrid: Aguilar.

Dajani, K., & Kraaikamp, C. (2000). The mother of all continued fractions. *Colloquium Mathematicum*, *84/85*, 109–123.

Dantzig T. (1954). Number: The Language of Science. A critical Survey Written for the Cultured non-Mathematician (Fourth Edition). New York: Garden City.

D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Uno 35, 90–106.

D'Amore B., Arrigo G., Bonilla M., Fandiño M.I., Piatti A., Rodríguez J., Rojas P.J., Romero J.H., Sbaragli S. (2006). El sentido del infinito. Epsilon 22(2), n° 65, 187–216.

Dauben, J. (1995). Georg Cantor y la teoría de conjuntos transfinitos. Revista Investigación y Ciencia. Edición española Scientific American.Temas1. Grandes matemáticos. pp. 94-105.
Dedekind, R. (1901). Continuity and irrational numbers. In Essays on the Theory of Numbers (The Open Court, pp. 1–11). Chicago. Retrieved from www.gutenberg.org/files/21016/21016-pdf.pdf

Diccionario Rioduero. (1977). Matemática. En *Ediciones Rioduero* (p. 158). Madrid: Autor.

Dirección de Educación Superior de la Provincia de Mendoza (DESPM). (2013).Diseño Curricular de la Provincia de Mendoza. Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Mendoza: Autor. Retrieved from http://des.mza.infd.edu.ar/sitio/upload/Disenio_MATEMATICA.pdf

Dirección General de Escuelas. Gobierno de Mendoza (DGEGM). (1998). Propuesta curricular de Matemática para el tercer ciclo de la EGB. 33. Mendoza: Autor.

Dirección General de Escuelas de la Provincia de Mendoza (DGEPM). (2001). Diseño Curricular de Nivel Polimodal. Modalidad de Bienes y Servicios con y sin Formación Profesional. Mendoza: Autor.

Dirección General de Escuelas de la Provincia de Mendoza (DGEPM). (2014). Diseño curricular preliminar Ciclo Básico Educación Secundaria. Mendoza: Autor. Retrieved from http://www.mendoza.edu.ar/institucional/index.php?option=com_remository&Itemid=1019&func=startdown&id=1573

Dirección General de Escuelas de la Provincia de Mendoza (DGEPM). (2015a). Diseño Curricular Provincial. Bachiller en Agro y Ambiente. Mendoza: Autor. Retrieved from http://www.mendoza.edu.ar/institucional/index.php?option=com_remository&Itemid=1019&func=select&id=2

Dirección General de Escuelas de la Provincia de Mendoza (DGEPM). (2015b). Documento preliminar para la implementación del Ciclo Básico o Primer Ciclo y 3er año del Ciclo Orientado o Segundo Ciclo de la Educación Secundaria Técnica. Sector : Electricidad. Mendoza: Autor.

Douady, R. (1984). Relación enseñanza-aprendizaje, dialéctica instrumento objeto, juego de marcos. Revista de Didáctica,(03). Francia: Univ. París VII.

Erdös, P., & Shallit, J. O. (1991). Newbounds on the length of finite Pierce and Engel series. *Journal de Théorie Des Nombres de Bordeaux*, *1*(3), 43–53. Retrieved from http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1991__3_1_43_0

Euclides. (s.III a.C.). *Elementos*.Traducción de María Luisa Puertas. Introducción y notas de Luis Vega R. Madrid. España. Ed.Gredos (3 vols). (1991).

Euler, L. (1748). De frationibus continuis. In *Introductio in analysin infinitorum. Tomo I([Reprod . enfac-sim])* (pp. 295–320). Retrieved from http://gallica.bnf.fr/

Ferreirós, J. (1998). El enfoque conjuntista en matemática. *La Gaceta de La Real Sociedad Matemática Española*, *3*, 389–412.

Fischbein, E., & Jehiam,R. Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *29*, 29–44.

Font, V., & Godino, J. D. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. En Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas (pp. 9–52). Barcelona: Ministerio de Educación, España y Graó.

Font, V., Godino J. D., D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. For the Learning of Mathematics, 27(2), 2–7. [Versión española disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf]

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82, 97–124.* The final publication is available at www.springerlink.com.

Fowler D., Robson E. (1998).Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context. Historia Mathematica, 25, 366–378.

Fregona, D., & Orús Baguena, P. (2011). *La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Garbín S. (2005) ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? la influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(2), 169–193.

Gracián, E. (2011). *Un descubrimiento sin fin. El infinito matemático*. Rodesa: RBA Coleccionables.

Grozdanić A., Vojvodić G. (2010).On the ancient problem of duplication of a cube in high School Teaching. The teaching of mathematics, vol. XIII, 1, pp. 51–61.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2014) *TWG 17: Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research* . Versión ampliada en español: Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica. Universidad de la Sabana, Colombia.

Godino J. D., Batanero C., Font V. (2009). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127–135. [Versión española disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf]

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006) Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. Paradigma, XXVII (2), 221-252.

Godino J. Bencomo D., Font V., Wilhelmi M. R. (2007). Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. URL: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm. p.12

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación Matemática. Enseñanza de las Ciencias, 30 (2),163-184.

Godino, J.D.; Contreras A.; Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 26 (1), 39-88.

Godino J. D., Font V., Konic P., Wilhelmi M. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (2009), Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido Numérico. (pp. 117- 184) Granada: SAEM Thales y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. [Disponible en : http://thales.cica.es/granada/]

Godino J. , Font V. , Wilhelmi M. R. (2006) Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (Especial), 133–156. [Disponible en: http://www.clame.org.mx/relime.htm]

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. R. y De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa desde un enfoque ontosemiótico. Enseñanza de las Ciencias, 27(1), 59–76.

Godino J. D., Font V., Wilhelmi M. R., Lurduy O. (2010). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. Educational Studies in Mathematics, in press. DOI: 10.1007/s10649-010-9278-x.

Grozdanić, A. and Vojvodić, G. (2010).On the ancient problem of duplication of a cube in high School Teaching. The teaching of mathematics, vol. XIII, 1, pp. 51–61.

Hardy G. H., Wright E. M. (1975). An introduction to the theory of numbers (Fourth edition). Oxford: Clarendon Press.

Hartono, Y. (2002). *Ergodic Propierties of Continued Fraction Algorithms*. University of Technology in Delft.

Heath T. L. (1897). The Works of Archimedes. Cambridge: University Press.

Heath T. L. (1921). A history of greek mathematics, Vol. II. Oxford: University Press.

Heath, T. L. (1885). *Diophantos of Alexandria*. Cambridge: Cambrige University Press. Retrieved from http://books.google.com/

Hernandez, Jesús (2002). La matemática y sus elementos: de Euclides a Bourbaki. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 5.3 pp. 649-672.

Herschel, J. F. W. (1820). *A Collectio of examples of the applications of the calculus of finite differences*. (L. S. and L. & C. Deighton & sons; G. & W.B. Whittaker, Ave Maria Lane; J.Mawman, Ed.) (pp. 148–156). Cambridge.

Hilbert, D. (1993).Fundamentos de la Matemática. Traducción Luis Felipe Segura. Primera edición en español. Mexico: Mathema. pp.17-22.

Høyrup J. (1990). On Parts of Parts and Ascending Continued Fractions. An Investigation of the Origins and Spread of a Peculiar System. Centaurus, 33, 293–324.

Iaffei B. (2008). Los números irracionales como objeto de saber. Curso para profesores. XXXI Reunión de Educación Matemática. (pp. 1–33) Cuyo, ARG: Unión Matemática Argentina y Universidad Nacional de Cuyo.

Joyce H. (2002). Mathematical mysteries: Transcendental meditation. +Plus Magazine.Millennium Mathematics Project, University of Cambridge. [Disponible en:
http: //plus.maths.org/content/mathematical-mysteries-transcendental-meditation]

Kaplan R., Kaplan E. (2003). The art of the infinite: The pleasures of mathematics. New York: Oxford University Press.

Komatsu, T. (1999). On inhomogeneous diophantine approximation with some quasi-periodic expressions , II. *Journal de Théorie Des Nombres de Bordeaux*, *2*(11), 331–334. Retrieved from http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1999__11_2_331_0

Komatsu, T. (2004). Rational approximations to Tasoev continued fractions. *Mathematica Pannonica*, *15/2*, 199–207.

Komatsu, T. (2005). An algorithm of infinite sums representations and Tasoev continued fractions. *Mathematics of computation*, *74*(252), 2081–2094.

Komatsu,T. (2006). Hurwitz and Tasoev continued fractions with long period. *Mathematica Pannonica*, *17*(1), 91–110.

Konic, P., & Godino, J. D. (2005). Configuraciones epistémicas asociadas al número Pi. In *Congreso Internacional sobre aplicaciones y desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 215–228). Jaén: Universidad de Jaén.

Krzywinski, M. (2011). Genome Visualization with Circos. Introduction to Circos and Visualization Guidelines. Vancouver.

Krzywinski, M. (2015). Using circos to visualize tables. Retrieved August 14, 2015, from http://circos.ca/guide/tables/

Krzywinski, M., Schein, J., Birol, I., Connors, J., Gascoyne, R., Horsman, D., Marra, M. (2009). Circos: An information aesthetic for comparative genomics. Genome Research, 19(9), 1639–1645. http://doi.org/10.1101/gr.092759.109

Lagrange. (1867). Solution d'un probleme d'arithmétique. In M. J. A. Perret (Ed.), *Oeubres de Lagrange. Tome Premier* (pp. 671–731). Paris: Gauthier-Villiars. Retrieved from http://gdz.sub.unigoettingen.de/dms/load/toc/?PPN=PPN308899466&IDDOC=41005

Lambert, J. H. (1767). *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités trascendentes circulaires et logarithmiques* (Mémoires d., pp. 265–322). Berlín. Retrieved from http://www.kuttaka.org/~JHL/L1768b.html

Larson, R., Hostetler, R., & Edwards, B. (1999). Cálculo y geometría analítica Vol. I (Sexta). Madrid: Mc Graw Hill.

Leeuwenberg, E. (2003). Miracles of perception. *Acta Psychologica*, *114*(3), 379–396. doi:10.1016/j.actpsy.2003.09.003.

Leonardo, de P. (1857). *LiberAbbaci* (p. 24). Roma: Baldassarre Boncompagni.

Lützen J. (2010). The Algebra of Geometric Impossibility: Descartes and Montucla on the Impossibility of the Duplication of the Cube and the Trisection of the Angle. Centaurus: Vol. 52: pp. 4–37; doi:10.1111/j.1600-0498.2009.00160.x John Wiley & Sons A/S.

Maillet, E. M. (1906). Sur les nombres transcendants dont le développement en fraction continue est quasi-périodique et sur les nombres de Liouville. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, *34*, 213–227. Retrieved from http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__213_0

Mamolo A., Zazkis R. (2008).Paradoxes as a window to infinity. Research in Mathematics Education, 10 (2), 167–182.

Marsaglia, G. (2010). On the Randomness of Pi and Other Decimal Expansions. Preprint.

Matson, J. (2013, Mayo). Líneas de defensa. Investigación y Ciencia, p.10.

Merenluoto, K. (2004). Problems of conceptual change: continuity of a function. In Kaarina Merenluoto & Mirjamaija Mikkilä-Erdmann (Ed.), Learning research challenges the domain specific approaches in teaching (pp. 100–108). Turku: University of Turku.

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MECT) (2006). *Núcleos de aprendizaje prioritarios. EGB/ Nivel medio.* Buenos Aires. Autor: [Disponible en: http://www.me.gov.ar/curriform/nap.html] (último acceso: 15 setiembre 2015).

Miralles, J., & Deulofeu, J. (2006). Aproximaciones de las raíces cuadradas. *SUMA*, *52*, 7–14.

Moise, E. (1968). *Elementos de Geometría Superior*. Buenos Aires: Compañía Editorial Continental.

Montesino, J. M. (1996). *Número, combinatoria y nudos: de lo discreto al continuo. Discurso inaugural del año académico 1996-1997* (pp. 3–49). Madrid.

O'Connor J., Robertson E. F. (2001). Pythagoras's theorem in Babylonian mathematics.[Disponible en: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PrintHT/Greek_sources_2.html]

Olds, C. D. (1963). *Continued Fractions* (pp. 5–140). New York: New Mathematical library.

Oswald, N. (2014). A specialized mathematician: Julius Hurwitz, and an application of his complex continued fraction. In *Summer School Diophantine Analysis* (pp. 1–45). Würzburg.

Oswald, N. M. R., & Steuding, J. J. (2014). Complex continued fractions: early work of the brothers Adolf and Julius Hurwitz. *Archive for History of Exact Sciences*, *68*(4), 499–528. doi:10.1007/s00407-014-0135-7.

Petrzela, J., Gotthans, T., & Zdenek, H. (2012).Dynamics, General review of the passive networks with fractional-order. In E. Catsigeras (Ed.), *Latest trends in* *circuits , automatic control and Signal Processing* (pp. 172–177). Barcelona, España: WSEAS. Retrieved from http://www.wseas.org/cms.action?id=2514

Pierce, T. A. (1929). On an Algorithm and Its Use in Approximating Roots of Algebraic Equations. *The American Mathematical Monthly*, *36*(10), 523–525. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/2299963

Piñeiro G., Rigetti G., Serrano G., Pérez M. (2008). Matemática III. Buenos Aires: Santillana.

Planificación de Matemática (n.d.) (PM) (2013). Planificación de Matemática de tercer año. San Rafael: Autor.

Prigogine, I. (1997a). *¿Tan solo una ilusión? Una exploración del caos al orden* (Cuarta). Barcelona: Tusquets Editores.

Prigogine, I. (1997b). *Las leyes del caos*. Barcelona: Crítica (Grijalbo Mondadori).

Piskunov, N. (1977). Cálculo diferencial e integral - Tomo 1 (Tercera). Moscú: MIR.

Potápov, M., Alexándrov, V., & Pasichenko, P. (1980). Algebra y análisis de funciones elementales. Moscú: MIR.

Ramos A., Font V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. La Matematica e la sua didattica, 20 (4), 535–556.

Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española* (22.ª ed.). Consultado en http://www.rae.es/rae.html

Redondo, A. (2008). Los números mórficos en secundaria. *SUMA*, *57*, 55–64. Retrieved from http://revistasuma.es/revistas/59-noviembre-2008/los-numeros-morficos-en-secundaria.html

Redondo, A., & Haro, M. J. (2005). Fracciones continuas, números metálicos y sucesiones generalizadas de Fibonacci. *SUMA*, *50*, 53–63. Retrieved from http://revistasuma.es/revistas/50-noviembre-2005/fracciones-continuas-numeros.html

Reina L. (2009). El aprendizaje matemático en un contexto histórico desde un entorno informático: los números irracionales y las espirales. En D. Prieto (Ed.). Investigación Pedagógica en la Universidad. Diez años de docencia universitaria. (pp. 123–138) Cuyo, ARG: Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad Nacional de Cuyo.

Reina L. (2010). La fracción continua y el número irracional. Puntos de encuentro y algunos aportes didácticos. Encuentro Latinoamericano de Profesores y Estudiantes de Matemática y Ciencias Naturales. San Rafael, Mendoza, ARG: IES "Del Atuel".

Reina, L., Wilhelmi, M. R., Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria. Educación Matemática, 24(3), 67–97. [Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525846003]

Reina, L., Wilhelmi, M. R., Carranza, P., & Lasa, A. (2014). Construcción de la noción de número irracional en formación de profesores: conflictos semióticos y desafíos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 27, pp. 629–637). México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Retrieved from http://www.clame.org.mx/acta.htm

Reina, L., Wilhelmi, M., Lasa, A., & Carranza, P. (2013). Entre lo ostensible y lo no ostensible. Simbiosis didáctica curricular entre objetos matemáticos. El caso de los números irracionales, su representación y clasificación en enseñanza secundaria. En *XI Congreso Virtual Internacional de Enseñanza de las Matemáticas: CVEM 2013* (pp. 1–15).

Rey Pastor J., Babini J. (2000a). Historia de la Matemática Vol. 1. Buenos Aires: Gedisa.

Rey Pastor J., Babini J. (2000b). Historia de la Matemática Vol. 2. Buenos Aires: Gedisa.

Rey Pastor J., Pi Calleja P., Trejo C. (1969). Análisis matemático, Vol. 1. Octava edición. Buenos Aires: Kapeluz.

Rezende, V. (2013). *Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino*. Universidade Estadual de Maringá.

Ribenboim P. (2000).My numbers, my friends. Popular lectures on number theory. New York: Springer-Verlag.pp.287-328.

Robert, A., & Pouyanne, N. (2005). Formar formadores de maestros de matemáticas de Educación Media Porqué y Como? *Educación Matemática*, *17*(002), 35–58.

Rojo, A. (1986). *Algebra I*. Buenos Aires: El Ateneo.

Romero, I. (1997). *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación - acción*. Granada: Comares.

Romero, I. y Rico, L. (1999). Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: aspectos cognitivos y actitudinales. Enseñanza de las Ciencias, 17 (2), 259-272.

Sinclair, N., Liljedahl, P., & Zazkis, R. (2006). A coloured window on pre-service teachers' conceptions of rational numbers. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(2), 177–203. doi:10.1007/s10758-006-0002-y.

Scaglia S. (2000). Dos conflictos al representar números reales en la recta. Tesis doctoral no publicada. Granada: Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Sloane, N. J. A. (2013). The on line encyclopedia of integer sequences (OEIS). Retrievedfromhttp://oeis.org/A020725

Sadovsky, P. (2005a). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática. En L. del Zorzal (Ed.), *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (pp. 13–65). Buenos Aires.

Sadovsky, P. (2005b). *Enseñar Matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sanjinés, D. (2010). Sucesión Generalizada de Fibonacci aplicada a circuitos tipo escalera. *Revista Boliviana de Física*, *17*, 41–46.

Shinno Y. (2007). On the teaching situation of conceptual change: epistemological considerations of irrational numbers. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, and D. Y. Seo (Eds.), Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 4. (pp. 185–192) Seoul: PME.

Sirotic N., Zazkis R. (2007). Irrational numbers on a number line – Where are they? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38(4), 477–488. [Disponible en: http://www.peterliljedahl.com/wp-content/uploads/CS-Sirotic-IJMEST-2007.pdf]

Spinadel V. W. de (1995). La familia de los números metálicos y el diseño. Centro MAyDI de la Fac. de Arquitectura, Diseño y Urbanismo. Universidad de Buenos Aires. [Disponible en: http://cumincades.scix.net/data/works/att/4856.content.pdf].

Spinadel, V. W. de. (1999). "Triangulature" in Andrea Palladio. *Nexus Network Journal*, *I*, 117–119. doi:10.1007/s00004-998-0010-4

Spinadel de, V. W. (2001). Half-regular contined fraction expansions and design. *Journal of Mathematics and Design*, *1*(1), 67–71.

Spinadel, V. de (2003). La familia de números metálicos Cuadernos del CIMBAGE N°6 Centro de Matemática y Diseño MAyDI. Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo. Universidad de Buenos Aires. pp.17-44

Spinadel, V. W. de, & Redondo, A. (2009). Towards van der Laan ' s Plastic Number in the Plane.*Journal for Geometry and Graphics*, *13*(2), 163–175.

Stewart, I. (1996, Agosto). Cuentos de un número desdeñado. *Investigación y Ciencia N°239*, 87–89.

Stinsin L., Ziger D. (2010). Matemática 9 Activa. San Isidro, ARG: Puerto de Palos.

Thakur, D. S. (1996). Exponential and Continued Fractions. *Journal of Number Theory*, *59*(0097), 248–261.

Vamvakoussi, X., Vosniadou, S. (2004).Understanding the structure of the set of rational numbers : a conceptual change approach. Learning and Instruction, 14, 453–467. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Van der Helm, P., &Leeuwenberg, E. (1991). Accessibility: A Criterion for Regularity in Visual Pattern Codes and Hierarchy. *Journal of the Mathematical Psychology*, *35*, 151–213.

Van der Poorten, A. J. (2004). Quadratic irrational integers with partly prescribed continued fraction expansion. *arXiv:math/0411005v*, 69–78.

Velasco A. (2005). El problema del continuo antes de Cohen (1873-1963). Aportaciones Matemáticas. Memorias, 35, 61–69.

Voroviov, N. N. (1974). *Números de Fibonacci* (pp. 7–87). Moscú: MIR.

Voskoglou M., Kosyvas G. (2011). A study on the comprehension of irrational numbers. Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), n. 21, G.R.I.M. (Department of Mathematics and Informatics, University of Palermo, Italy.

Voskoglou, M., & Kosyvas, G. (2012). Analyzing students ' difficulties in understanding real numbers. *Journal ofResearch in Mathematics Education*,*1*(3),301–336. doi: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2012.16

Waldschmidt, M. (2005). La quadrature impossible du cercle. *La Recherche*, (392), 35–38.

Waldschmidt, M.(2011). *L' équationdite de Fermat – Pell* (No. 020) (pp. 1–81).París. Retrieved from http://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/enseignement2010-2011.html

Wallis, J. (1656). *Arithmetica Infinitorum* (pp. 1–194). Oxford. Retrieved from http://books.google.com/

Wantzel P. (1837). Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, ou Recueil Mensuel de Mémoires sur les Diverses Parties des Mathématiques; Publié par Joseph Liouville. Tome Deuxième, pp. 366–370.

Wikipedia. (2014). Admitancia. Retrieved January 06, 2015, from http://es.wikipedia.org/wiki/Admitancia

Wilhelmi M. R. (2003). Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos. Sección 2: Tesis doctorales, nº23.Pamplona. Universidad Pública de Navarra.

Wilhelmi, M. R. (2009). Didáctica de las Matemáticas para profesores. Las fracciones: un caso práctico. In *Enseñanza de las Matemáticas IV Coloquio Internacional -Actas 2009* (pp. 1–22). Pontificia Universidad Católica del Perú – Departamento de Ciencias. Retrieved from http://www.pucp.edu.pe/departamento/ciencias/matematicas/irem/index.html

Wilhelmi M. R., Godino J. D., Lacasta E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions. The case of the absolute value. International Electronic Journal of Mathematics Education 2(2). 72–90. [Disponible en: http://www.iejme.com/022007/d2.pdf]

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D.; Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. Reserches en Didactique des Mathématiques, 27(1), 77–120. [Versión inglesa, por M. Montiel (2011): 'Epistemic configurations associated to the notion of equality in real numbers'. Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics) 21, 53–82. Disponible: http://math.unipa.it/~grim/Wilhelmi_Q21.pdf]

Wolf, M. (2010). Continued fractions constructed from prime numbers. *arXiv:1003.4015v2*, 1–35. Number Theory; History and Overview. Retrieved from http://arxiv.org/abs/1003.4015

Zazkis, R & Sirotic, N. (2004). Making sense of irrational numbers: Focusing on representation. En M. Johnsen Høines and A. Berit Fuglestad (Eds.), Proceedings of 28th International Conference for Psychology of Mathematics Education (PME), Vol. 4. (pp. 497–505) Bergen, Norway: PME.

Zazkis R., Sirotic N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link. Research in Collegiate Mathematics Education 7, 1–27.