DOCTORADO EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MENCIÓN MATEMÁTICA

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas

Departamento de Formación Docente

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT)

TESIS DOCTORAL

“Procesos de significación para algunos símbolos matemáticos en estudiantes universitarios”

María Laura Distéfano

Tandil, Marzo de 2017

DOCTORADO EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MENCIÓN MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL

“Procesos de significación para algunos símbolos matemáticos en estudiantes universitarios”

Tesis Doctoral realizada por la Mg. María Laura Distéfano para optar por el título de Doctor en Enseñanza de las Ciencias, Mención Matemática, con la dirección del Dr. Marcel David Pochulu

Tandil, Marzo de 2017

DOCTORADO EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS
MENCIÓN MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL

“Procesos de significación para algunos símbolos matemáticos en estudiantes universitarios”

María Laura Distéfano

Director: Dr. Marcel David Pochulu

La razón es un término verdaderamente inadecuado para abarcar las formas de la vida cultural humana en toda su riqueza y diversidad, pero todas esas formas son formas simbólicas. Por lo tanto, en lugar de definir al hombre como un *animal racional* lo definiremos como un *animal simbólico*.

ERNST CASSIRER
Antropología filosófica

Dedicatoria

A la memoria de mi padre,

quien siempre me impulsó a ir un paso más allá.

Agradecimientos

A mi director, Dr. Marcel Pochulu, por guiarme sin imponerme y por proponerme caminos para pensar en nuevas ideas.

A los docentes del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias, que contribuyeron en esta etapa de mi formación profesional.

A los docentes de las facultades de Ingeniería y de Ciencias Exactas y Naturales de la UNMDP, que generosamente abrieron las puertas de sus aulas y cedieron tiempos de sus clases para permitirme el acceso a sus alumnos: Gloria Prieto, Susana Vecino, Guillermo Valdéz y Perla Medina.

A la Dra. Emilce Moler, directora del grupo de investigación al cual pertenezco (GIEMI), por orientarme e impulsarme en mi formación profesional.

A mis compañeras del grupo de investigación (GIEMI), por acompañarme académica y humanamente a lo largo del tiempo que llevó la realización de esta tesis.

A mi mamá, que pasó largas horas ayudándome a desgrabar entrevistas.

ÍNDICE

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Resumen

En Matemática se hace uso de distintos registros semióticos para la construcción de representaciones ostensivas. El registro simbólico-algebraico adquiere relevancia tanto para generar producciones escritas como para interpretar expresiones simbólicas dadas, y la coordinación entre este registro y el del lenguaje coloquial o natural resulta indispensable en estas tareas.

En la práctica docente, particularmente en el nivel universitario, es frecuente observar las dificultades que los alumnos presentan al efectuar tareas que requieren la lectura y escritura de expresiones formuladas en el registro simbólico-algebraico. Esto genera obstáculos en la comprensión durante las clases teóricas, en la resolución de los ejercicios en las clases prácticas y en la lectura de la bibliografía específica, puesto que las representaciones externas juegan un rol fundamental en la adquisición de conocimiento dentro de la Matemática.

La investigación que se presenta en esta memoria tiene como objetivo principal describir y caracterizar el proceso de construcción de significados de símbolos algebraicos, en estudiantes universitarios. Está focalizada sobre algunos símbolos que tienen la particularidad de no ser utilizados fuera del ámbito matemático, pero que son de uso frecuente en las asignaturas de la Matemática superior, y al mismo tiempo, no suelen ser objeto de enseñanza. Los símbolos sobre los que se centra la investigación son el de pertenencia ($\in$), el de inclusión ($\subset$), el cuantificador universal ($\forall$), el cuantificador existencial ($\exists$), la conjunción ($\wedge$) y la disyunción ($\vee$).

Los lineamientos teóricos de la investigación están dados por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática, de Godino, Batanero y Font, y la Teoría de Registros Semióticos de Duval. Los constructos teóricos aportados por estas teorías de la Didáctica de la Matemática fueron empleados tanto para el diseño de herramientas metodológicas como para el análisis de los datos relevados a partir de ellas. Se diseñó, construyó y administró un instrumento destinado a indagar en las prácticas operativas y discursivas que realizan los estudiantes para la lectura o la formulación de expresiones simbólicas. La tercera, y última versión del mismo, se administró a 90 estudiantes de primer año de las carreras de Ingeniería, Bioquímica, Profesorado en Matemática, y Licenciatura en Biología, de la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina).

Se determinaron las prácticas matemáticas ligadas al significado de estos símbolos y, a partir de ellas, se definieron funciones semióticas que permitieron realizar ajustes en el diseño del instrumento, efectuar un análisis de la complejidad semiótica de las expresiones simbólicas y determinar variables en el relevamiento de datos destinados a estudiar el proceso de significación.

A partir de los análisis realizados, se caracteriza el proceso de construcción de significado de cada uno de los símbolos en estudio. Además, se describe la actividad cognitiva de conversión –analizada como parte de las prácticas matemáticas ligadas a un símbolo– en términos de funciones semióticas. Como parte de la caracterización del proceso de significación, se presenta la construcción y descripción de una trama general de funciones semióticas que participa en distintas tareas, se especifica una secuenciación de las funciones semióticas que intervienen en el proceso y se proponen niveles en la evolución de la construcción de significado de los símbolos estudiados.

Abstract

In Mathematics, different semiotic registers are used for the construction of ostensive representations. The symbolic-algebraic register acquires relevance both to generate written productions and to interpret given symbolic expressions, and the coordination between this register and that of the natural language is essential for these tasks.

In the teaching practice, particularly at the university level, it is frequent to observe the difficulties that students present when performing tasks that require the reading and writing of expressions formulated in the symbolic-algebraic register. This becomes an obstacle in the understanding during the theoretical classes, in the resolution of the exercises in the practical classes and in the reading of the specific bibliography, since the external representations play a fundamental role in the acquisition of knowledge within Mathematics.

The main objective of the research presented here is to describe and characterize the process of meaning construction of algebraic symbols by university students. It is focused on some symbols that have the peculiarity of not being used outside the mathematical scope, but they are frequently used in the subjects of Mathematics in the high level and, at the same time, they are not usually object of teaching. The symbols on which research is centered are membership ($\in$), set inclusion ($\subset$), universal quantifier ($\forall$), existential quantifier ($\exists$), conjunction ($\wedge$) and disjunction ($\vee$).

The theoretical guidelines of the research are given by the Ontosemiotic Approach to Cognition and Mathematical Instruction, by Godino, Batanero and Font, and Duval's Theory of Semiotic Registers. The theoretical constructs contributed by these theories of the Didactics of Mathematics were used both for the design of methodological tools and for the analysis of the data collected from them. An instrument was designed, constructed and administered to investigate the operative and discursive practices that the students perform for the reading or the formulation of symbolic expressions. The third, and last version, was administered to 90 freshmen of the careers of Engineering, Biochemistry, Degree in Mathematics Education, and Degree in Biology, of the Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina).

Mathematical practices linked to the meaning of these symbols were determined and, from them, semiotic functions were defined. These function allowed to make adjustments in the design of the instrument, to make an analysis of the semiotic complexity of the symbolic expressions and to determine variables in the collection of data to study the process of meaning construction.

From the analysis performed, the process of construction of meaning of each of the symbols under study is characterized. In addition, the cognitive conversion activity is described – analyzed as part of mathematical practices linked to a symbol– in terms of semiotic functions. As part of the characterization of the process of meaning construction, the formulation and description of a general net of semiotic functions is presented, which participates in different tasks, a sequencing of the semiotic functions is specified which is involved in the process and levels in the evolution of the construction of meaning of the symbols studied are proposed.

Résumé

Mathématiques utilise différents registres sémiotiques pour construire représentations ostensive. Le registre symbolique-algébrique devient pertinente à la fois de générer des productions écrites et à interpréter des expressions symboliques donnés, et la coordination entre ce registre et la langue familière ou naturel est essentiel dans ces tâches.

Dans la pratique d'enseignement, en particulier au niveau universitaire, il est fréquent de voir les difficultés que les élèves doivent effectuer des tâches qui nécessitent une lecture et d'écriture des expressions formulées dans le registre symbolique-algébrique. Cela crée des obstacles à la compréhension au cours théoriques, dans la résolution des exercices au cours pratiques et lecture de la littérature spécifique, puisque les représentations externes jouent un rôle fondamental dans l'acquisition de connaissances en mathématiques.

La recherche présentée dans ce rapport a l'objectif principal de décrire et de caractériser le processus de construction du sens des symboles algébriques dans les étudiants universitaires. Elle est focalise sur certains symboles qui ont la particularité pas être utilisé en dehors du champ mathématique, mais sont souvent utilisés dans les cours de mathématiques supérieures, alors que pas souvent l'objet d'enseignement. Les symboles sur lesquelles se concentre de recherche sont l'appartenance ($\in$), l'inclusion ($\subset$), le quantificateur universal ($\forall$), le quantificateur existentiel ($\exists$), la conjonction logique ($\wedge$) et la disjonction logique ($\vee$). Les lignes théoriques directrices de recherche sont donnés par la Focus ontosémiotique de Cognition et de formation en mathématiques de Godino, Batanero et Font, et Theory de Registres Sémiotiques de Duval. Les constructions théoriques fournies par ces théories de l'enseignement des mathématiques ont été utilisés tant pour la conception d'outils méthodologiques, comme pour analyser les données recueillies auprès d'eux. Il a été conçu, construit et géré un instrument pour enquêter sur les pratiques opérationnelles et discursives entreprises par les élèves pour la lecture ou de la formulation des expressions symboliques. La troisième, et dernière version, a été administré à 90 étudiants de première année de l'ingénierie, Biochimie, Faculté de Mathématiques et Licence en Biologie de l'Université Nationale de Mar del Plata (Argentine).

Pratiques mathématiques liées à la signification de ces symboles ont été déterminés et, d'eux, definir les fonctions sémiotiques qui permettent des ajustements dans la conception de

l'instrument, faire une analyse de la complexité sémiotique des expressions symboliques et déterminer les variables dans les données d'enquête pour étudier le processus de signification. À partir des analyses réalisées, on caractérise le processus de construction de signifié de chacun des symboles dans étude. De plus, l'activité cognitive de conversion est décrite - analysée comme partie des pratiques mathématiques liées à un symbole- dans termes de fonctions sémiotiques. Comme partie de la caractérisation du processus de signification, se présente la construction et la description d'une trame générale de fonctions sémiotiques qui participe aux tâches distinctes, un séquencement des fonctions sémiotiques spécifie qui interviennent au processus et des niveaux se proposent dans l'évolution de la construction de signifié des symboles étudiés.

Les apports de cette recherche peuvent se constituer dans les outils qui permettent de réaliser des analyses critiques sur les pratiques d'enseignement dans une relation à la question symbolique et de prévoir des actions possibles pour favoriser ce processus de construction de signifiés chez les étudiants.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los procesos de enseñanza y aprendizaje que se desarrollan dentro de un aula, cualquiera sea la disciplina abordada, están afectados por múltiples factores que inciden en su efectividad y en el logro de los objetivos deseados. Uno de esos factores es la comunicación entre docentes y estudiantes, que constituyen un pilar esencial en la transmisión y la construcción de conocimiento, y por lo tanto es objeto de interés de la didáctica. La Matemática no escapa a esta realidad. En el aula en el que se desarrollan contenidos de esta ciencia, la interacción discursiva entre docente y estudiantes está estrechamente ligada a las representaciones semióticas que se utilizan, pues el discurso oral está en constante relación con representaciones simbólicas y gráficas empleadas. Para que la comunicación sea eficaz debe existir una coordinación entre las expresiones orales y las representaciones semióticas utilizadas, es decir, que las comprendan e interpreten todos los actores intervinientes en el proceso.

Las tareas o prácticas matemáticas están inmersas en la necesidad del uso e interpretación de las representaciones externas utilizadas, en particular de los símbolos matemáticos. Esta necesidad se acrecienta en los niveles superiores, donde los símbolos se constituyen en una herramienta cotidiana que termina condicionando, en alguna medida, los procesos de enseñanza y aprendizaje, como una forma de comunicación y representación de los contenidos a enseñar y aprender.

Dado el rol fundamental que las representaciones, tanto internas como externas, juegan en la adquisición del conocimiento, han sido tema de interés y de estudio desde distintas disciplinas, como la neurología, la psicología cognitiva y la semiótica, lo que ha dado lugar a una diversidad de enfoques y maneras de concebirlas. Todos estos aportes, desde distintas ramas del conocimiento, han contribuido al estudio de la incidencia de las representaciones en el aprendizaje y han sido muy valiosos desde el punto de vista de la didáctica.

Las representaciones externas no pueden ser consideradas simplemente como un medio para exteriorizar las representaciones internas con fines de comunicación. Según Duval (2004), esto sería olvidar que las representaciones internas no pueden separarse de la interiorización de representaciones semióticas ("No hay noesis sin semiosis", p. 16). También afirma que las representaciones semióticas, además de una función de expresión para otros, cumplen una función de objetivación para el propio sujeto, permitiendo una manipulación que las representaciones internas no permiten. Es decir que las representaciones semióticas resultan esenciales para acceder a los objetos matemáticos, para exteriorizar las representaciones mentales de un individuo y, en general, para toda la actividad cognitiva del pensamiento ya que ningún tipo de proceso matemático puede ser ejecutado sin utilizarlas (Duval, 2006).

En Matemática se hace uso de distintos registros semióticos para la construcción de representaciones, es decir de aquellos sistemas de signos que permiten la formación de representaciones y sus posibles transformaciones (Duval, 2004). El registro simbólico-algebraico adquiere una relevancia fundamental tanto para generar producciones escritas como para interpretar expresiones simbólicas dadas, y la coordinación entre este registro y el del lenguaje coloquial o natural resulta indispensable en estas tareas. Tal como expresan Colombano, Formica y Camós (2012), los docentes no advierten que existe una distancia entre lo que expresan en lenguaje coloquial, aún con manifiesta claridad, y lo que al mismo tiempo registran simbólicamente en el pizarrón. Esta disparidad que se produce en el uso simultáneo entre los dos registros también es señalada por Duval (2006, p.114): "*And in the classroom we have a very specific practice of simultaneously using two registers. It is spoken in natural language, while it is written in symbolic expressions as if verbal explanations could make any symbolic treatment transparent.*"[1]

La investigación en Didáctica de la Matemática ha puesto de manifiesto la relevancia que tienen los aspectos semióticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Desde la perspectiva semiótica se han planteado interrogantes en cuanto a la independencia, o no, del pensamiento matemático respecto del lenguaje y de los sistemas de representación utilizados. Es una cuestión abierta, con posiciones enfrentadas entre los investigadores, y para abordarla se debe partir del hecho de que la actividad matemática se desarrolla en un contexto donde se usan signos ostensivos. En este sentido, esta investigación pretende ser un aporte al conocimiento de la actividad matemática que se lleva a cabo al utilizar determinados signos matemáticos ostensivos.

En la práctica docente, particularmente en el nivel universitario, es frecuente observar las dificultades que los alumnos presentan en el uso del registro simbólico algebraico, tanto en la lectura como en la escritura de expresiones simbólicas. Esto genera obstáculos en la comprensión durante las clases teóricas, en la resolución de los ejercicios en las clases prácticas, en las tareas de generalización y en la lectura de la bibliografía. Alcalá (2002) afirma que la progresión en el aprendizaje matemático se produce gracias a la apropiación y al uso de símbolos, y determina aspectos que caracterizan al dominio de un símbolo para que se convierta en un recurso intelectual:

> La tesis central de nuestra interpretación es que el avance en el conocimiento, la progresión en el aprendizaje matemático de cada estudiante, se produce gracias a la apropiación y al uso de símbolos y estructuras simbólicas; símbolos y estructuras que son cada vez más jerarquizados. El relativo dominio de los códigos propios de cada nivel es condición *sine qua non* para avanzar en el aprendizaje. Por la misma razón, *el mayor o menor dominio del código a un determinado nivel sirve de acelerador o de freno en el avance, en la conquista del conocimiento matemático escolar* (tengamos en cuenta que no hay dominio del código si no se tiene un conocimiento semántico, sintáctico y funcional del mismo, es decir, si no se ha convertido en un recurso intelectual). (Alcalá, 2002, p. 164)

Una de las razones de esas dificultades que presentan los alumnos podría ser una construcción insuficiente o inadecuada del significado de algunos símbolos. Esto se

[1] Y en el aula tenemos una práctica muy específica de utilizar simultáneamente dos registros Se habla. en lenguaje natural, mientras que se escribe en expresiones simbólicas como si las explicaciones orales pudieran hacer transparente cualquier tratamiento simbólico. (Traducción propia. Confrontar con Duval, 2006, p.114)

observa más acentuadamente en aquellos que Pimm (1990) denomina *logogramas* y Socas (2010) define como *signos artificiales*. Se trata de símbolos que son propios de la Matemática, que han sido creados convencionalmente para referirse a conceptos totales y que no se utilizan fuera de un contexto matemático, como por ejemplo: $<$, $>$, $\therefore$, $\in$, $\cup$, $\cap$, $\subset$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$. Un símbolo es una convención semiótica que aparece una vez que una comunidad ha decidido usarlo como expresión de un objeto ideal. Para formar parte de esa comunidad, es necesario conocer el significado y el uso de ese símbolo (Gianella, 1996).

No obstante, y a pesar de su frecuente uso, en la mayoría de las carreras universitarias que contienen asignaturas de Matemática en su diseño curricular, estos símbolos no son objetos de enseñanza con un proceso de instrucción específico. Si bien los docentes aluden con mayor o menor énfasis a su significado, esto sucede cuando abordan temas o contenidos cuyas representaciones los requieren. Los alumnos, en tanto, comienzan a construir el significado de estos símbolos a través de las prácticas matemáticas que subyacen a otros objetos matemáticos (propiedades de los números reales, inducción completa, definición de límite funcional, etc.).

Sin embargo, la construcción del significado no se produce por la simple traducción del símbolo en una palabra del lenguaje coloquial. Un alumno puede leer un símbolo o incluso escribir utilizándolo de forma apropiada y, aun así, el significado asociado podría no ser correcto en el contexto en que se desempeña (Colombano, Formica y Camós, 2012). Esa construcción está asociada a las prácticas, tanto operativas como discursivas, que se llevan a cabo con el uso de esos símbolos para las representaciones semióticas de otros objetos matemáticos que son el foco de estudio. Si dicha construcción es deficiente se produce en los alumnos una discrepancia entre lo expresado oralmente en lenguaje coloquial y lo escrito en forma simbólica.

A su vez, es deseable, y al mismo tiempo esperable, que la construcción del significado de estos símbolos por parte de los estudiantes, evolucione a medida que transcurre el tiempo, pues no se utilizan sólo en un momento de la carrera universitaria y luego se olvidan, sino que están presentes en las representaciones semióticas de la mayoría de los temas y contenidos de la Matemática Superior. En principio, se podría suponer que un alumno puede pasar por distintas instancias en esa construcción, desde reconocer sólo el nombre del símbolo -lo que constituiría el nivel más elemental en la construcción del significado- hasta llegar a un nivel óptimo en el que lo utilice debidamente. Ante esta suposición, cabe preguntarse: ¿Es posible determinar y caracterizar esas instancias en estudiantes que no han tenido formación específica en relación a estos símbolos?

Alcalá (2002, p. 35) afirma que el aprendizaje matemático es "un proceso continuo de construcción de significados que realiza el aprendiz gracias, entre otras cosas, a la apropiación y al uso de símbolos y estructuras simbólicas". Por tanto, y dado que la construcción de significado no es inmediata sino que es un proceso, el mismo se constituye en un tema de interés a investigar. Estudiar, describir y caracterizar la manera en que evoluciona este proceso para el registro simbólico algebraico puede aportar a la Didáctica de la Matemática una herramienta que permita facilitar y favorecer su adquisición y desarrollo.

1.2. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En este contexto se plantean las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué elementos componen el significado de los símbolos estudiados, en términos de prácticas operativas y discursivas?
- ¿Cómo se caracteriza el proceso de construcción de significado de un símbolo matemático?
- ¿Qué similitudes o diferencias pueden identificarse en los procesos de construcción de significado de los distintos símbolos estudiados?
- ¿Es posible distinguir niveles o etapas en la evolución de la construcción del significado personal de símbolos algebraicos en estudiantes universitarios?

1.3. OBJETIVOS

A continuación se detallan el objetivo general y los objetivos específicos, planteados a partir de las preguntas de investigación.

1.3.1. OBJETIVO GENERAL

Describir y caracterizar el proceso de construcción de significados de símbolos algebraicos, en estudiantes universitarios.

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar componentes del significado, en términos de prácticas operativas y discursivas, de los símbolos más usuales en el inicio de estudios de Matemática en el nivel superior, tales como $\in$, $\subset$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$.
- Analizar el proceso de construcción del significado personal, de los símbolos en estudio, en términos de los componentes identificados.
- Establecer similitudes o diferencias que pueden interpretarse en los procesos de construcción de significado de los distintos símbolos en estudio.
- Identificar y caracterizar niveles de evolución en la construcción de significados de símbolos algebraicos estudiados.

1.4. ANTECEDENTES

En la década del 80 surge una nueva tendencia en los estudios del aprendizaje de la Matemática, que aborda nuevos aspectos que van más allá de la visión conceptualista de la educación matemática predominante en la década anterior. Esta nueva tendencia busca relacionar el aprendizaje de la Matemática con los procesos de adquisición y uso del lenguaje que le es propio, y surge el interés por estudiar los aspectos semántico y sintáctico que están involucrados (Rojano, 1994).

Particularmente, el uso de símbolos matemáticos y su incidencia en los procesos de enseñanza y aprendizaje han sido abordados por numerosos autores, desde diversas líneas teóricas que abarcan perspectivas psicológicas, enfoques lingüísticos y aspectos didácticos (Kieran y Filloy, 1989; Pimm, 1990; Kaput, 1991; Rojano, 1994; Arcavi, 1994, 2007; Font, 2001; Radford, 2000, 2010; Filloy, Puig y Rojano, 2008). En todos los casos se destaca la relevancia del dominio del sistema simbólico matemático, su implicancia en la capacidad de resolver tareas problemáticas de un determinado nivel y en la posibilidad de expresar desarrollos y resultados.

También existe consenso en relación a las dificultades que los estudiantes presentan respecto del manejo del sistema simbólico matemático, focalizadas principalmente en la transición de la aritmética al álgebra. Probablemente por esta razón, en la mayoría de las publicaciones el estudio está centrado en estudiantes de primaria y de secundaria (Hiebert, 1988; Booth, 1988; Gómez Granell, 1989; Palarea Medina, 1999; Trigueros, Ursini y

Lozano, 2000; Alcalá, 2002; Palencia y Talavera, 2004; Sanz Lerma, 2007; Socas, 2007, 2011; Ruano, Socas y Palarea, 2008; Cerdán, 2010; Rodríguez Domingo y Molina, 2013; Rodríguez Domindo, Molina, Cañadas y Castro, 2015).

Las dificultades que presenta la adquisición de las habilidades propias de la lectura y la escritura de expresiones simbólicas han sido asemejadas con las del dominio de las lenguas naturales, desde distintos puntos de vista. Freudental (1983; citado por Rojano, 1994) realiza la comparación con las dificultades a que se enfrenta un individuo al aprender la lengua materna. En este contexto, aduce que la persistencia de los errores en el lenguaje algebraico se debe a que su uso está restringido al aula, mientras que en la lengua natural los errores se corrigen por la rectificación y retroalimentación por el uso constante. En cambio, Pimm (1990) se inclina por la comparación con el aprendizaje de una lengua extranjera, en el sentido de adquirir una *competencia comunicativa*, que "requiere tener conciencia de las conversaciones concretas, dependientes del contexto, conversacionales o escritas, vigentes, cómo influyen sobre lo que se comunica y cómo han de utilizarse de acuerdo con el contexto" (p. 27).

Las publicaciones que se centran en las dificultades o los errores más frecuentes en alumnos de primaria y secundaria, los agrupan y caracterizan en distintos tipos:

- *La diferencia entre la actividad algebraica y la actividad aritmética*. Mientras que la actividad aritmética se centra en hallar respuestas numéricas particulares, la actividad algebraica gira en torno a procedimientos, relaciones y expresiones generales (Booth, 1988; Palarea Medina, 1999; Ruano, Socas y Palarea, 2008; Rodríguez Domingo y Molina, 2013).
- *La no aceptación de la falta de cierre*. Los estudiantes esperan obtener como resultado a un ejercicio una respuesta bien formada, es decir un número, en lugar de expresiones que incluyen literales y operaciones (Booth, 1988; Kieran y Filloy, 1989; Ruano, Socas y Palarea, 2008).
- *El uso de las notaciones y las convenciones*. En el contexto del álgebra, cambia la interpretación de algunos símbolos y notaciones respecto de la aritmética. A partir de su experiencia artimética, los estudiantes acostumbran ver al signo igual en forma unidiraccional, como simple predecesor de un resultado, en lugar de la bidireccionalidad que implica la equivalencia entre dos expresiones que se encuentran a ambos lados (Booth, 1988; Kieran y Filloy, 1989; Palarea Medina, 1999; Molina González, 2006; Cerdán, 2010; González Trujillo, 2012; Rodríguez Domingo y Molina, 2013).

Tambipen sucede que la concatenación de símbolos, que en artimética se interpreta como suma, en álgebra pasa a indicar multiplicación , lo que conduce a los alumnos a malinterpretar el sentido de los términos algebraicos (Booth, 1988; Kieran y Filloy, 1989).

- *El significado de letras y variables*. En aritmética las letras pueden tener el sentido de una abreviatura, como *m* para metros, pero en álgebra pasan a representar cantidades. Además aparece la noción de variable, donde las letras no indican un único valor sino un número en general (Booth, 1988; Kieran y Filloy, 1989, Palarea Medina, 1999; Cerdán, 2010; Rodríguez Domingo y Molina, 2013). Diversas publicaciones se centran en el estudio del uso que los alumnos, de la escuela secunadaria y de la universidad, hacen de las variables (Trigueros, Ursini y Lozano, 2000; Juarez López, 2011; Ursini y Trigueros, 2006; Escalante Vega y Cuesta Borges, 2012; Herrera López, Cuesta Borges y Escalante Vega, 2016)
- *La manipulación de símbolos sin sentido*. La manipulación de símbolos, sin relacionarlos con sus referentes conceptuales o situacionales, conduce a la formación de "reglas prototípicas" que son extrapoladas de manera incorrecta a contextos o situaciones no adecuadas (Gómez Granell, 1989; Socas y Palarea Medina, 1997).
- *El álgebra como generalización de la aritmética*. Para lograr la generalización que conduce al álgebra, es necesario comprender y reconocer los métodos y relaciones que subyacen a la actividad aritmética. Si los estudiantes tienen conceptos erróneos o no reconocen las relaciones y procedimientos que deben ser aprehendidos en el contexto aritmético, esto se traslada al desempeño en el álgebra (Booth, 1988; Socas y Palarea Medina, 1997).

En los últimos años, se observa un interés creciente en el estudio de las conversiones entre expresiones de la lengua natural y expresiones a través del simbolismo matemático, reflejado en distintas publicaciones (Marquina Quintero, Moreno y Acevedo Barrios, 2014; Soneira, Souto y Tarrío, 2014; Molina, 2014; Rodríguez-Domingo, 2015; Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro, 2015; Fernández Millan y Molina, 2016). Las expresiones simbólicas con las que se trabaja, ya sea como representación de partida o de llegada, corresponden a ecuaciones. El nivel educativo en el que se ubican las investigaciones es, en la mayoría de los casos, el de la escuela secundaria. Algunos de los trabajos están focalizados en un único sentido de conversión, mientras que otros abordan ambos sentidos. En estos últimos casos, se reporta que el sentido de conversión que resulta de mayor dificultad para los estudiantes es aquel que va de los enunciados verbales a las expresiones simbólicas. En algunos casos, se identifican y clasifican errores propios del sentido de conversión estudiado y se proponen recomendaciones para favorecer estas actividades cognitivas.

Entre las distintas publicaciones que hacen foco en las cuestiones simbólicas en general, se encuentran algunas que proponen distintas formas de tipificar procesos, niveles o estadios en la evolución que muestran los estudiantes en el manejo de símbolos. A continuación se reseñan algunas de ellas.

Hiebert (1988) formula una teoría para explicar el desarrollo de la competencia del manejo de los símbolos matemáticos, entendiendo a éstos como entidades que se usan para ocupar el lugar de otras y reconociendo que constituyen sólo una de las formas que de representación posibles para describir ideas matemáticas. Este autor propone una sucesión de procesos cognitivos que se acumulan para producir la competencia en el manejo de dichos símbolos. Identifica cinco tipos de procesos básicos:

1) conectar o relacionar los símbolos individuales con sus referentes,
2) desarrollar procedimientos de manipulación de símbolos,
3) elaborar procedimientos para los símbolos,
4) construir una rutina de los procedimientos con los símbolos, y
5) construir un sistema de símbolos más abstracto.

El desarrollo de los primeros procesos permite la fundamentación del dominio de los procesos posteriores, por lo que los primeros conocimientos y experiencias son cruciales para el aprendizaje posterior. El sentido acumulativo de esta teoría indica que los primeros procesos no son descartados, sino empleados por los procesos subsiguientes. Este autor sugiere que, muchas de las deficiencias que muestran los estudiantes al trabajar con símbolos escritos, se deben a que éstos se involucran en los procesos más avanzados sin tener los fundamentos de los procesos más elementales. Destaca que la teoría presentada "está más relacionada con matemática elemental, aunque el trabajo con matemáticas avanzadas muy a menudo involucra el quinto proceso como guía de desarrollo" (p.16).

Centrado al ámbito de los números y las operaciones aritméticas básicas, Alcalá (2002) postula cuatro niveles de simbolización en el proceso de construcción simbólica a lo largo de la escolaridad obligatoria, como fases sucesivas con complejidad y abstracción crecientes:

1) *Introducción al simbolismo*, en la que se conforma la noción de número. Se utilizan palabras referidas a cantidades (símbolos de primer orden) y luego se pasa de la expresión verbal a la expresión notacional (símbolos de segundo orden).

2) *Adquisición de las operaciones aditivas y formación operatoria del número natural*, en la que se inicia la operatoria aditiva y aparece la necesidad de la sintaxis. “El simbolismo matemático va constituyéndose en un apoyo tecnológico para el pensamiento. […] Son las propias notaciones (su semántica y su sintaxis) las que se convierten en un poderoso amplificador de la capacidad operatoria.” (p.55)

3) *Las operaciones multiplicativas y nuevos campos numéricos*. Las operaciones multiplicativas no se generan naturalmente por situaciones ambientales ni por cálculo intuitivo sino que su construcción y aprendizaje se realiza en situaciones de aprendizaje formal. El paso a concepciones multiplicativas requiere un cambio conceptual y puede constituirse en un obstáculo epistemológico.

4) *El simbolismo de tercer orden*. Se inicia con la introducción al álgebra, que conlleva el uso de símbolos más abstractos y el razonamiento proposicional, que constituyen los símbolos de tercer orden. Se produce el cambio del número como expresión de una cantidad al número como expresión de algo no tangible, no comprobable empíricamente. También se produce un cambio sobre las nociones de las operaciones, se pasa de la operación numérica verificable empíricamente con cantidades a la operación aritmética que obedece a propiedades específicas y a la coherencia lógica. Además, se introduce la simbología algebraica, literal, que aparece como generalización de regularidades y propiedades numéricas, y que conlleva una nueva pragmática, una forma diferente de operar. La resolución de problemas se apoya ahora en los signos y en sus propiedades. “Ese grado mayor de generalidad y abstracción se ve enriquecido con una potencialidad operatoria formidable: en ello reside el gran valor del lenguaje algebraico.” (p.62).

Por su parte, Socas y Palarea (1997) y Socas (2007) postulan tres estadios de desarrollo cognitivo que se suceden hasta producir competencia en el manejo de un sistema de representación semiótico (SMS):

1) *El estadio semiótico*, donde los alumnos aprenden y usan signos nuevos que adquieren significado a partir de signos antiguos ya conocidos y utilizados.

2) *El estadio estructural*, que se caracteriza porque el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo. En este estadio aparecen dificultades cognitivas para el alumno, dado que determinados comportamientos de los signos no pueden ser explicados por el sistema antiguo, y se recurre entonces a la observación de regularidades y comportamientos patrones para otorgarles significado.

3) *El estadio autónomo*, en el que los signos actúan con significados propios con independencia del sistema anterior.

Estos autores afirman que esta secuencia de estadios es la que determina el proceso de generalización en Matemática y la que caracteriza el desarrollo de sus signos. Cambiar el sistema de signos genera dificultades en el alumno, pues se enfrenta a elementos del sistema nuevo que no pueden ser conocidos o explicados a partir del sistema antiguo. Esto sucede en el pasaje de la aritmética al álgebra.

A diferencia de los estudios efectuados en los niveles de la enseñanza básica, son escasos los antecedentes de investigaciones realizados en el nivel superior. Entre los ya citados, se centran en este nivel los trabajos de Ursini y Trigueros (2006), Escalante Vega y Cuesta Borges (2012), Soneira *et al*. (2014) y Molina (2014).

También situados en el nivel superior del sistema educativo se encuentran los trabajos de Camós y Rodríguez (2009) y de Colombano, Formica y Camós (2012), quienes centran su investigación en la exploración y tipificación del uso que los docentes hacen de los lenguajes natural y simbólico al enseñar los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad, revelando como problemática la escasa atención que los docentes dan a la conversión entre registros y al uso simultáneo de ambos lenguajes.

Distéfano, Urquijo y González (2010), presentan una experiencia de enseñanza para mejorar las habilidades en el registro simbólico-algebraico con estudiantes de nivel universitario. En el mismo se describe una intervención didáctica efectuada con alumnos ingresantes a las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática, contrastando los resultados obtenidos en un grupo experimental y en un grupo control. Desde la perspectiva de los Sistemas Matemáticos de Símbolos (SMS), Lacués Apud (2011, 2014) también refiere experiencias de enseñanza de sistemas matemáticos de símbolos, con alumnos que cursan la asignatura Álgebra Lineal en carreras de Ingeniería. En ambos artículos, este autor describe estudios contrastando grupos que reciben una enseñanza tradicional versus una enseñanza en la que se enfatiza el uso de los SMS para la construcción y comunicación de soluciones. En estos últimos antecedentes, los artículos arriban a una evaluación positiva de las respectivas intervenciones educativas y se concluyen que es posible promover una mayor competencia en los estudiantes en relación con la utilización de símbolos matemáticos, a través de formación específica.

La investigación relativa a cuestiones simbólicas ha dado lugar a diversas tesis doctorales focalizadas sobre distintos aspectos y que han sido abordadas con líneas teóricas diferentes. A continuación se reseña a algunas de ellas.

La tesis doctoral de Palarea Medina (1998) se centra en la adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes, cometidos en álgebra, por alumnos de 12 a 14 años. Estudia habilidades cognitivas de carácter operacional y de carácter conceptual del pensamiento algebraico, como así también dificultades y errores que se presentan en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Su enfoque teórico está dado por la tesis dual de Paivio sobre el conocimiento del pensamiento formal, la postulación de Duval sobre la necesidad de varios registros para interiorizar un objeto algebraico y las diferentes fuentes de significado de Kaput. Concluye que los *sistemas de representación semiótica* ocupan un lugar central en la construcción del conocimiento algebraico, que muchas de las dificultades y errores de los alumnos en el aprendizaje del álgebra tienen origen en la ausencia de significado, pudiendo ser explicados como una falta de coordinación de registros de las representaciones y que para un mejor entendimiento de la aprehensión de los objetos matemáticos es necesaria una teoría de conocimiento que se apoye en una teoría de la representación, donde el conocimiento del objeto matemático aparece como el invariante de las diferentes representaciones semióticas.

Molina González (2006) contextualiza la investigación de su tesis doctoral en la escolaridad primaria, planteando como objetivo el estudio del uso y desarrollo de pensamiento relacional y de los significados del signo igual que ponen de manifiesto los alumnos de tercer grado de primaria. Está fundamentada en la propuesta *Early-Algebra* de integración de modos de pensamiento algebraico en el currículo de matemática de educación primaria. El contexto de trabajo está dado por las igualdades y sentencias numéricas basadas en propiedades aritméticas, por su potencial para promover el uso de pensamiento relacional. Los resultados de la investigación le permiten arribar a la conclusión de que el signo igual no es un conocimiento intuitivo para los alumnos, ni es adquirido directamente durante la explicación que el docente formule en el aula. Por el contrario, es necesario el trabajo con diversas formas de expresión para ir construyendo una comprensión del significado relacional del signo igual como así también para modificar la interpretación operacional que los alumnos tienen de este signo. El análisis de las respuestas de los estudiantes permitió detectar cuatro significados del signo igual, de los cuales los alumnos hacen uso al abordar la resolución de las igualdades y la construcción de sentencias: *operador, expresión de una acción, equivalencia numérica* y *similitud numérica*.

Por su parte, Rojas Garzón (2012) documenta, en su tesis doctoral, las dificultades que presentan algunos estudiantes, de educación básica y de educación media, en relación a la articulación de los significados asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático. Basado en la Teoría de Registros Semióticos, de Duval, y en el Enfoque Ontosemiótico, de Godino, Batanero y Font, este autor utiliza funciones semióticas como herramienta metodológica para sus análisis. Estudia el sentido que dan los estudiantes a distintas expresiones simbólicas correspondientes a circunferencias y su asociación con representaciones gráficas. Concluye que en ciertos casos, los estudiantes asignan sentido a las expresiones basados de manera casi exclusiva en un reconocimiento icónico de las mismas. Expresa la manifestación de un cierto "anclaje" a la situación dada en la tarea, en la que los estudiantes tienen cierta tendencia a realizar interpretaciones ligadas casi exclusivamente con la situación propuesta. Finalmente, pone de manifiesto las dificultades que los estudiantes evidencian con relación a la interpretación y manipulación de expresiones simbólicas, particularmente en el contexto algebraico, y en la generalización a partir de casos particulares.

En el caso de la tesis doctoral de Camós (2013), la autora plantea una investigación orientada a estudiar el uso del lenguaje natural y del simbólico en clases de Matemática Superior. Se centra en el modo en que los docentes utilizan ambos lenguajes cuando enseñan un concepto y cómo los utilizan los estudiantes al momento de mostrar los aprendizajes alcanzados. Las clases en las que se relevaron los datos para la investigación correspondían al tema de límite funcional, en la Universidad Abierta Interamericana (Argentina). El Marco Teórico se encuadra en el Enfoque Cognitivo y la investigación es de tipo cualitativo. A partir de los datos relevados, se observa una brecha entre las expresiones que el docente manifiesta en lenguaje natural y lo que queda expresado en símbolos en el pizarrón. También detectó que los estudiantes pueden reproducir símbolos pero muestran dificultades al otorgarles significado, de modo que realizan una asignación de significado tan atomizada que la misma no transmite el concepto que se intenta comunicar. Como parte de las conclusiones, queda planteada una hipótesis que relaciona las dificultades que los estudiantes presentan al intentar comprender un texto matemático con una construcción deficiente del significado de los símbolos:

> Una explicación sobre las dificultades que los estudiantes tienen al intentar comprender un texto matemático puede darse al considerar que éstas se originan en la falta de preparación para asignar significados matemáticamente correctos a los significantes en el contexto de trabajo. Sumado a esto, las prácticas de lectura de símbolos "ingenua" (en el sentido de poder expresarlos y nombrarlos) muchas veces es considerada, por el docente, suficiente indicador de comprensión. Esto permite suponer que un trabajo sostenido en el tiempo de parte del docente para que los estudiantes trasciendan la lectura ingenua y comprendan que la asignación de significados "local" (decodificación) no es suficiente sin una comprensión global de las proposiciones, enunciados, demostraciones, etc., permitiría lograr mejoras en la interpretación autónoma de un texto matemático. (p. 101)

La tesis doctoral de Rodríguez-Domingo (2015), está centrada en analizar el proceso de traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal que realizan estudiantes de educación secundaria que están iniciándose en el estudio del álgebra escolar. Clasifica y analiza los errores en los que incurren los estudiantes considerados al abordar dichas traducciones, para enunciados algebraicos contextualizados y no contextualizados, a los que tipifica como: (I) errores según la completitud del enunciado (incompleto o desmedido); (II) errores derivados de la aritmética (paréntesis, división-multiplicación, potenciación-multiplicación, suma-multiplicación o división-multiplicación); y (III) errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico (generalización, particularización, letras o complicación estructural). Destaca que cuando los enunciados están en representación verbal, los estudiantes incurren en mayor cantidad de errores, o ausencia de resolución, que en aquellos presentados mediante simbolismo algebraico, es decir que las conversiones del registro del lenguaje natural al registro simbólico resultan de mayor dificultad para los estudiantes. Concluye que los resultados obtenidos aportan recomendaciones específicas para orientar el desarrollo de la comprensión del simbolismo algebraico, poniendo de manifiesto los procesos de traducción analizados y el modo en que progresa el desarrollo cognitivo de los alumnos.

En las investigaciones relacionadas con el aprendizaje y la habilidad de manipular y comprender símbolos matemáticos, anteriormente mencionadas, el foco está puesto principalmente sobre símbolos aritméticos, por tratarse de estudios centrados en alumnos en etapas de escolaridad primaria o secundaria, previas al abordaje del álgebra formal.

Otra característica de estas investigaciones es el estudio de errores cometidos por los estudiantes o las dificultades que éstos presentan al momento de manipular símbolos matemáticos.

A diferencia de esas investigaciones, en esta tesis se aborda otro tipo de símbolos matemáticos y desde una perspectiva que se focaliza en sus formas de uso en el ámbito de las aulas universitarias. Se plantea un estudio del proceso de construcción del significado de algunos símbolos matemáticos que no tienen uso fuera del ámbito de esta ciencia, a través de herramientas metodológicas empleadas en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática de Godino y colaboradores. El objetivo fue la descripción y la caracterización de dicho proceso, bajo una concepción pragmática del significado, que es la asumida por este marco teórico. Este planteamiento condujo a la identificación de las prácticas matemáticas implicadas en la construcción del significado de los símbolos estudiados y, posteriormente, a la definición de las funciones semióticas que están involucradas. El uso de estas últimas también marca una diferencia en el abordaje del tema y en la forma de análisis, en relación con los antecedentes mencionados. Los estudios realizados permitieron arribar a la descripción de la trama de funciones semióticas que vinculan los distintos objetos que se ponen en juego en las prácticas matemáticas con estos símbolos. También se pudo detectar una secuenciación en la manifestación de las distintas funciones semióticas descritas y, consecuentemente, la determinación de niveles que caracterizan la evolución en la construcción de significado de los símbolos estudiados. Todas estas características permiten presentar un estudio detallado y minucioso del proceso de significación de símbolos algebraicos por parte de estudiantes universitarios de primer año que cursan alguna asignatura del área Álgebra.

1.5. ESTRUCTURA DE LA TESIS

Los capítulos que siguen compilan los lineamientos teóricos, los fundamentos metodológicos, los resultados obtenidos y las conclusiones a las que se arribó en la investigación.

En el Capítulo 2 se presentan algunas concepciones en torno a la noción de significado, que permiten contextualizar la postura adoptada en esta investigación. También se presentan los constructos tomados de las dos teorías de la Didáctica de la Matemática que son las que dan fundamento, desde el punto de vista teórico: el *Enfoque Ontosemiótico* *de la Cognición y la Instrucción Matemática*, de Godino y colaboradores, y la *Teoría de Registros Semióticos* de Duval.

El Capítulo 3 contiene el detalle de los aspectos metodológicos regentes en esta investigación, describiendo las características del tipo de investigación efectuada, que es principalmente cualitativa. También se explicitan la población y las muestras tomadas, los instrumentos utilizados y las herramientas de análisis empleadas.

Dado que el proceso de diseño, construcción y validación del instrumento utilizado tuvo varias etapas, se destinó para el mismo un capítulo completo, el Capítulo 4. En el mismo, se detallan la construcción de cada una de las tres versiones que se sucedieron en el diseño, como así también el análisis de las mismas y los criterios de valoración utilizados para puntuar las respuestas de los estudiantes. También se describen las funciones semióticas definidas para esta investigación, las cuales participan tanto en el diseño del instrumento como en el análisis de los datos relevados.

El Capítulo 5 contiene los resultados obtenidos a partir de los datos recolectados con cada una de las tres versiones del instrumento, y sus respectivos análisis. Para la primera versión, los análisis están principalmente centrados en la detección de falencias en el diseño, reveladas a partir de las respuestas de los estudiantes. Para la segunda versión, se realiza un análisis profundo de la complejidad semiótica de los ítems que componen las distintas tareas planteadas en el instrumento, como así también el análisis de los datos relevados conjuntamente con las respuestas delos estudiantes en las entrevistas realizadas a algunos de los estudiantes que respondieron a esta versión del instrumento. Finalmente, para la tercera versión se efectúa un análisis de los datos relevados con el mismo y se estudia la secuenciación en la que se manifiestan las funciones semióticas consideradas. Este estudio permitió la definición de niveles en el proceso de construcción de significado de los símbolos estudiados.

Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones a las que se arribó a lo largo de la investigación. Se describen conclusiones generales en relación a la construcción de significado de cada uno de los símbolos estudiados observada en los estudiantes. Se retoma la descripción de las conversiones en términos de las funciones semióticas definidas, lo que relaciona los conceptos teóricos provenientes de las dos teorías didácticas consideradas. Se presenta la formulación de una trama general de las funciones semióticas que participan en la lectura y escritura de expresiones simbólicas. Se caracterizan la secuenciación de la manifestación de las funciones semióticas consideradas en el proceso de construcción de significado y los niveles descritos para dicho proceso. Por último, se presentan las dificultades y limitaciones de la investigación realizada, y se formulan perspectivas futuras en relación a la temática abordada.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

2.1. INTRODUCCIÓN

En las secciones que componen este capítulo se describen algunas concepciones de significado, como así también, los constructos y nociones provenientes de dos teorías de la Didáctica de la Matemática que fundamentan tanto las acciones realizadas como los análisis efectuados para describir y caracterizar el proceso de construcción de significado de símbolos matemáticos.

En relación al significado, se reseñan algunas posturas en torno a esta noción para contextualizar la concepción adoptada en esta investigación.

Para el diseño de instrumentos metodológicos y para los análisis de los resultados se consideraron conceptos provenientes del *Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática* (EOS), de Godino, Batanero y Font, y de la *Teoría de Registros Semióticos* de Duval.

De entre los constructos propuestos por el EOS, se consideraron definiciones de *práctica matemática*, de *significado*, de *configuración*, de *idoneidad didáctica* y de *función* *semiótica*.

De la Teoría de las Representaciones Semióticas se utilizaron las *actividades cognitivas* definidas en este marco, denominadas *formación de representaciones*, *tratamiento*s y *conversiones*.

2.2. EL SIGNIFICADO

La noción de significado ha sido abordada desde distintas ciencias avocadas a estudios relativos a la cognición humana, tales como la Filosofía, Lingüística, la Lógica y la Semiótica. Es un tema que ha sido tanto central como controversial, dadas las diferentes posturas con las que ha sido abordado y analizado.

Sin embargo, la idea de significado no es terminante y definitiva, no sólo en el ámbito de la Educación matemática, sino que tampoco lo es en la Lingüística. Ullmann (1965) afirma que “el ‘significado’ es uno de los términos más ambiguos y más controvertidos de la teoría del lenguaje” (p. 62).

2.2.1. TEORÍAS DEL SIGNIFICADO: REALISMO VS PRAGMATISMO

Para abordar la idea de construcción de significado, es preciso determinar previamente la concepción que se tiene de significado pues, como afirma D’Amore (2005, p. 3), “sólo puntualizando sobre la forma de concebir el *significado*, adquiere sentido hablar de *construcción del significado*”.

La forma de concebir la esencia del significado ha conducido al establecimiento de distintas clasificaciones en relación a las teorías de significado. Entre ellas se encuentra la propuesta el filósofo alemán von Kutschera (1975), quien distingue entre las teorías realistas o referenciales y las teorías pragmáticas u operacionales. Esta clasificación también es adoptada por D’Amore (2005) y por Ullmann (1965). Este último autor refiere que:

> Hablando en términos generales, hay dos escuelas de pensamiento en la lingüística actual: la tendencia ‘analítica’ o ‘referencial’, que intenta apresar la esencia del significado resolviéndolo en sus componentes principales, y la tendencia ‘operacional’, que estudia las palabras en acción y se interesa menos por lo que es el significado que cómo opera. (Ullman, 1965, p. 63)

En las teorías *realistas*, o *referenciales*, se asocia a las palabras con su correspondiente representación en el mundo, el significado de una expresión es su referente. De esta manera, el significado es interpretado como una relación convencional entre signos y entidades concretas o conceptuales y es independiente del uso que se hace de dichos signos, según afirma Kutschera (1975, pp. 19-20):

> They interpret meaning as a conventional relationship between signs and concrete or conceptual entities, which exist independently of the linguistic signs. On this interpretation the meaning of a linguistic expression does not depend on its use in concrete situations, but the use is determined by the meaning, so that a sharp separation between semantics and pragmatics is possible.

De acuerdo con estas palabras de Kutschera, en las teorías realistas, es tajante la diferencia entre semántica y pragmática. En la semántica resultante de esta postura, a las expresiones lingüísticas se le atribuyen funciones puramente semánticas (D'Amore, 2005). El significado de un nombre propio es el objeto que ese nombre propio indica, los enunciados atómicos expresan hechos que describen la realidad (en 'H es una montaña', H es el nombre de la montaña) y los predicados binarios designan los atributos que la frase expresa ('Z lee X' indica que la persona Z lee la cosa X). Por consiguiente, la función semántica de las expresiones es una relación nominal (D'Amore, 2005), consistente en designar, de acuerdo con determinadas convenciones, a ciertas entidades. En palabras de Kutschera (1975, p. 24): "Realistic semantics takes on its simplest form when it is said that linguistic expressions have only *one* semantic function, which consists in the fact that (on the basis of convention) they *designate* certain entities".

Dentro de esta posición se ubican, entre otros, Frege, Russel, Carnap y Wittgenstein en su primera etapa, la que culmina en la publicación del *Tractatus Logico-Philosophicus* (D'Amore, 2005). Esta obra, Wittgenstein trata sobre las posibilidades del lenguaje, pero no de un lenguaje hablado en un momento y lugar determinados o de un lenguaje formal concreto, sino de cualquier lenguaje posible. La idea fundamental es que la esencia de cualquier lenguaje es su capacidad representacional, esto es, el uso de ciertos signos construidos, a través de reglas, con el propósito de referirse con ellos a objetos y situaciones distintos de ellos. La obra de Wittgenstein lleva a la idea de que tal capacidad es posible en la medida en que el lenguaje y el mundo sean lógicamente isomorfos, esto es, que ambos consten de objetos con las mismas posibilidades de combinación entre ellos. Según esta primera postura de Wittgenstein, una proposición es una figura o una representación de una parte de la realidad. Por lo tanto, comprender una proposición es conocer la situación o el estado de cosas que representa. Ser una figura de una situación equivale a describirla o ser un modelo de ella: "La proposición es una figura de la realidad.

La proposición es un modelo de la realidad tal como la pensamos" (Wittgenstein, 1973, p. 71). Los elementos de la proposición son signos simples a los que denomina *nombres* y el significado de éstos es, simplemente, el objeto al que cada uno se refiere estos signos son nombres: “El nombre significa el objeto. El objeto es su significado” (Wittgenstein, 1973, p. 53).

Las teorías referenciales presentan dificultades para abordar algunos aspectos del significado, como por ejemplo, que en una lengua existan expresiones que tienen el mismo referente pero en cada caso éste tiene distinto significado pues alude a objetos distintos, o el de las palabras que tienen significado dentro de una lengua pero que no tienen referente pues no aluden a ningún objeto o lo hacen en relación a objetos que no tienen existencia real.

Las teorías *pragmáticas* u *operacionales* del significado subrayan que el significado de las expresiones lingüísticas no se fija relacionándolas con entidades, sino que está determinado a través del uso que se hace de ellas (D’Amore, 2005). Esta concepción del significado resalta el carácter instrumental del lenguaje. En esta postura, se considera que las expresiones lingüísticas tienen significados diversos, de acuerdo con el contexto en el que se usen, por lo que no es posible realizar una observación científica objetiva ya que el único análisis posible es subjetivo o circunstancial y no generalizable. “No se puede hacer otra cosa que examinar los diversos ‘usos’: el conjunto de los ‘usos’, en efecto, determina el significado de los objetos” (D’Amore, 2005, p. 5).

En esta concepción se agrupan, entre otras, las posturas de Peirce, Morris y Wittgenstein en la etapa cuyas ideas están reunidas en la obra *Investigaciones Filosóficas.*

Desde esta nueva perspectiva, Wittgenstein, propone una postura mucho más realista del uso del lenguaje, basada en la experiencia de los sujetos. Según sus propios términos, lo define como los “juegos de lenguaje”, en el apartado 7 de su obra *Investigaciones Filosóficas*:

> Podemos imaginarnos también que todo el proceso del uso de palabras […] es uno de esos juegos por medio de los cuales aprenden los niños su lengua materna. Llamaré a estos juegos «juegos de lenguaje» y hablaré a veces de un lenguaje primitivo como un juego de lenguaje. […] Llamaré también «juego de lenguaje» al todo formado por el lenguaje y las acciones con las que está entretejido. (Wittgenstein, 1999, pp. 10-11)

Wittgenstein (1999) postula que el significado es equivalente al uso, lo que indica el significado de las palabras es el uso que se hace de ellas (*Investigaciones Filosóficas,* 10, 30). Por lo tanto, una palabra tiene significado dentro de un lenguaje particular (*Investigaciones Filosóficas*, 6, 47) y entender una oración significa entender un lenguaje (*Investigaciones Filosóficas,* 199).

La definición de significado de un objeto matemático que adopta el EOS también se encuentra enmarcada en esta postura. Godino (2003, pp. 37-38) afirma que:

> Desde nuestro punto de vista, los supuestos ontológicos del constructivismo social como filosofía de las matemáticas (Ernest, 1998) llevan también a la adopción de las teorías pragmáticas del significado. Los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realicen determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los "objetos matemáticos" y que el "significado" de estos objetos esté íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática.

Si bien los postulados de las teorías referenciales parecen enfrentados a los de las teorías pragmáticas, son considerados como complementarios, según expresa Ullmann (1965):

> El investigador debe comenzar por reunir una muestra adecuada de contextos y abordarlos luego con un espíritu abierto, permitiendo que el significado o los significados emerjan de los contextos mismos. Una vez que se ha concluido esta fase, puede pasar con seguridad a la fase “referencial” y procurar formular el significado o los significados así identificados. La relación entre los dos métodos, o más bien entre las dos fases de la indagación, es, en definitiva, la misma que hay entre la lengua y el habla: la teoría operacional trata del significado en el habla; la referencial, del significado en la lengua. No hay, absolutamente, necesidad de colocar los dos modos de acceso uno frente a otro: cada uno maneja su propio lado del problema, y ninguno es completo sin el otro. (pp. 76-77).

2.2.2. LA CONCEPCIÓN DESDE LA SEMIÓTICA: SAUSSURE, PEIRCE Y ECO

La Semiótica, como ciencia que estudia los signos, también aborda la cuestión del significado. En esta línea y partiendo desde un punto de vista lingüístico, Saussure denomina como *signo* a la relación diádica entre concepto e imagen acústica, a los que llama *significado* y *significante,* respectivamente.

> Y proponemos conservar la palabra signo para designar el conjunto, y reemplazar concepto e imagen acústica respectivamente con significado y significante; estos dos últimos términos tienen la ventaja de señalar la oposición que los separa, sea entre ellos dos, sea del total de que forman parte. (Saussure, 1945, p. 93)

El significante es la parte sensorial o material del signo lingüístico, una imagen acústica o visual, que remite, no a una cosa o a una realidad "externa", sino a lo inmaterial, a una idea o un concepto evocado en la mente, es decir, al significado. La relación que se establece entre significante y significado es además arbitraria. En palabras de Saussure: "El lazo que une el significante al significado es arbitrario; o bien, puesto que entendemos por *signo* el total resultante de la asociación de un significante con un significado, podemos decir más simplemente: *el signo lingüístico es arbitrario*" (Saussure, 1945, p. 93). Sin embargo, esa arbitrariedad no se refiere a una libre elección del usuario del signo sino a que el significante no está motivado por el significado al que está asociado.

> La palabra arbitrario necesita también una observación. No debe dar idea de que el significante depende de la libre elección del hablante (ya veremos luego que no está en manos del individuo el cambiar nada en un signo una vez establecido por un grupo lingüístico); queremos decir que es inmotivado, es decir, arbitrario con relación al significado, con el cual no guarda en la realidad ningún lazo natural. (Saussure, 1945, p. 94)

Eco (1991, p. 31) destaca la definición diádica de Saussure como una anticipación de la función semiótica, cuando afirma en relación a este autor que: "Su definición de signo como entidad de dos caras (*signifiant* y *signifié*) ha anticipado y determinado todas las definiciones posteriores de la función semiótica".

Por su parte, Peirce, considerado como el fundador del pragmatismo y de la semiótica moderna, toma la Lógica como punto de partida: "Peirce parte de la lógica así como Saussure había partido de la lingüística" (Magariños de Moretín, 1983, p. 14). Amplía la dualidad significado-significante introducida por Saussure, definiendo una conformación triádica. Dicha conformación triádica está constituida por: el objeto, el representamen o signo, y el interpretante:

- El *objeto* es la "porción" de la realidad a la que se puede acceder a través del signo.
- El *representamen* o *signo* es la representación de algo.
- El *interpretante* es el signo que el representamen produce en la mente de la persona.

Una de las definiciones de signo dada por Peirce (1974, p. 22) establece que:

> Un signo, o representamen, es algo que, para alguien, representa o se refiere a algo en algún aspecto o carácter. Se dirige a alguien, esto es, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o, tal vez, un signo aún más desarrollado. Este signo creado es lo que yo llamo el interpretante del primer signo. El signo está en lugar de algo, su objeto. Está en lugar de ese objeto, no en todos los aspectos, sino sólo con referencia a una suerte de idea, que a veces he llamado el fundamento del representamen.

De este modo, Peirce añade a la definición de signo una referencia a lo que se genera en la mente. Lo que este autor denomina *interpretante*, que es a su vez un nuevo signo al que el objeto da lugar en la mente del quien usa el signo, supone la mediación entre el signo y el objeto. Si el signo no tuviera la capacidad de producir esos pensamientos interpretantes en una mente, no sería significativo.

Según considera Marafiotti (2004, p. 73), la definición de Peirce –"el signo o representamen es algo que está para alguien, por algo, en algún aspecto o disposición"– le otorga al signo cuatro condiciones, cada una de las cuales está ligada, y es posible, a partir de las otras:

1. La condición *representativa*. Todos los signos están direccionados hacia algún objeto en la medida que están "por algo". El signo debe entrar en relación con un objeto, es decir, representarlo.
2. La condición *presentativa*. El signo está "en alguna relación" con el objeto, lo presenta en algún aspecto y parcialmente.
3. La condición *interpretativa*. Para ser un signo, debe representar algo "para alguien" que resulta ser el usuario del signo. El signo debe tener la capacidad de crear otro equivalente, o más desarrollado, en algún intérprete que es quien articula el objeto original con la referencia.
4. La relación triádica entre signo, objeto e interpretante es una relación inevitable, son triádicamente interdependientes y es por dicha relación que cada uno de los componentes adquiere sentido.

Para que un signo sea considerado como tal debe poder ser interpretado, es decir, debe poder determinarse un interpretante. Dicho interpretante puede ser considerado como la traducción en otro signo (mental) que es significativo para quien lo produce. Por consiguiente, el significado para Peirce es la traducción a otro signo:

> El interpretante puede entenderse en un sentido general como la traducción de un signo, su resultado significativo ("*the significate outcome of a sign*"): "un signo no es un signo a menos que pueda traducirse en otro signo en el que es más plenamente desarrollado" (Colected Papers, 5.594). (Marafioti, 2004, p. 81)

Por lo tanto, la significación implica un proceso se inferencia, según el cual se puede ligar un *representamen* a un objeto y extraer una conclusión que es el representante. Ese proceso de inferencia es la semiosis.

> La propuesta semántica de Peirce se fundamenta en el hecho de que un signo obtiene su significado por su necesaria referencia a otros signos, es decir el significado de un signo no es otra cosa que el conjunto de signos que permiten desarrollarlo y explicitarlo. (Socas, 2007, p. 29)

Por su parte, Eco (1986, p. 61) define al significado como unidad cultural, como una construcción social que proviene de acuerdos culturales:

> Así pues, ¿qué es el significado de un término? Desde el punto de vista semiótico no puede ser otra cosa que una unidad cultural. En toda cultura una "unidad" es, simplemente, algo que está definido culturalmente y distinguido como entidad. Puede ser una persona, un lugar, una cosa, un sentimiento, una situación, una fantasía, una alucinación, una esperanza o una idea.

2.2.3. LA CONCEPCIÓN DE OGDEN Y RICHARDS

Ogden y Richards (1923) buscaron sistematizar el conocimiento y las estrategias de estudio del significado con perspectivas multidisciplinares, involucrando a la Lingüística, la Filosofía, la Lógica, la Matemática y la Semiótica. Estos autores, planten el significado en un esquema triangular, basado en las ideas de Peirce, en el que definen tres factores: los procesos mentales (pensamiento o referencia), el símbolo (o signo, palabra, significante) y el referente (u objeto, el elemento externo al que uno se refiere). Dicho esquema, conocido como triángulo de Ogden y Richards o triángulo epistemológico, se presenta en la Figura 2.1.

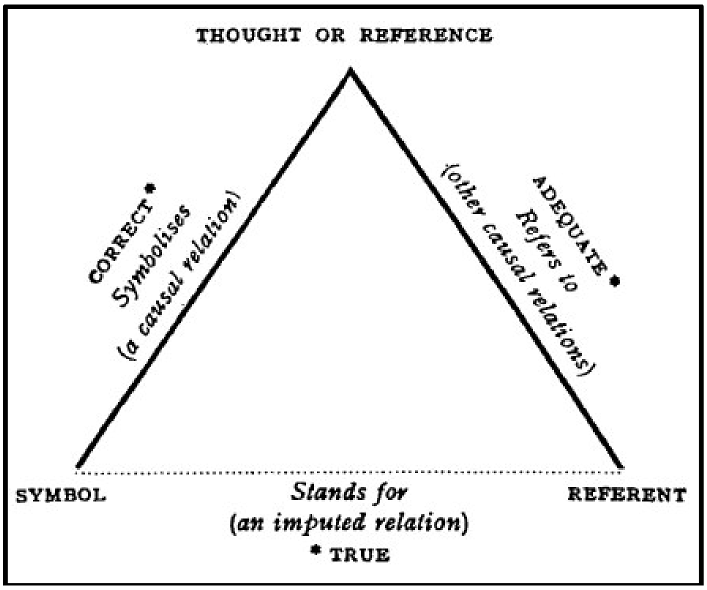


Figura 2.1. Esquema triangular para representar el significado de Ogden y Richards
Fuente: Ogden y Richards (1923, p. 11)

Entre estas tres entidades se establecen relaciones, las cuales resultan los puntos esenciales de interés. Entre 'pensamiento' y 'símbolo' se establece una relación de *simbolización*, la cual es causal puesto que, según los autores, el simbolismo que alguien utiliza al hablar es causado, en parte, por factores sociales y psicológicos, tales como el propósito por el cual se hace la referencia, el efecto que el símbolo tienen sobre la otra persona y la propia actitud del hablante. Para quien escucha lo dicho, los símbolos causan un acto y una actitud, que puede o no, ser similar al acto y la actitud del hablante.

Entre ‘pensamiento’ y ‘objeto’ la relación es de *referencia*, que también es causal y puede ser directa o indirecta.

Entre ‘símbolo’ y ‘objeto’ aparece la relación *representación* aunque, según Ogden y Richards, esta relación no es directa, sino sólo presunta. Esta condición en el esquema es representada por una línea punteada y no por una línea rellena. La relación símbolo-objeto tiene como mediadora la mente subjetiva de la persona que codifica el enunciado o que lo descodifica. Por lo tanto, es variable, individual e indirecta.

Los conceptos y los vínculos que Ogden y Richards establecen a través del esquema triangular forman parte de los fundamentos que dieron lugar a la definición de significado de un objeto matemático postulada por el EOS.

2.2.4. RELEVANCIA DEL SIGNIFICADO EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

En Didáctica de la Matemática resultan relevantes las cuestiones relativas al significado, las cuales se encuentran involucradas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Particularmente, el interés está centrado en el significado que los estudiantes atribuyen a los términos, a los símbolos y a los objetos matemáticos que entran en juego en dichos procesos, como así también en la posibilidad de interpretar el modo en que se construyen esos significados a partir de la instrucción.

El análisis del significado, desde el punto de vista de la didáctica, permite investigar desde una perspectiva diferente los procesos que se desarrollan en el aula, la organización de dichos procesos y la evaluación de los conocimientos.

Investigadores en Didáctica de la Matemática reconocen el papel relevante que la noción de significado tiene en esta disciplina. Balacheff (1990) afirma que un problema pertenece a una *problemática* en la investigación de Didáctica de la Matemática si está específicamente relacionado con el significado matemático de las conductas de los alumnos en el aula, destacando que la palabra clave en este tipo de investigaciones es *significado*. Este autor enumera algunas cuestiones que plantea como centrales en las investigaciones en este área, y que están vinculadas a la construcción de significado, tales como: ¿Qué tipos de significado pueden construir los alumnos en el contexto de la enseñanza de la matemática?, ¿Cuál es la relación entre el significado del contenido a enseñar y el del conocimiento matemático elegido como referencia? Más allá de las definiciones, ¿cómo se puede caracterizar el significado de los conceptos matemáticos?

Kaput (1987) plantea que el aprendizaje de la matemática puede considerarse como construcción de significados, que al menos pueden ser establecidos de cuatro maneras, es decir, puntualiza cuatro fuentes para la construcción de significado:

1. Por transformaciones dentro de un sistema particular de representación sin referencia a ninguna otra representación.

2. Por traducción entre distintos sistemas matemáticos de representación

3. Por traducción entre representaciones matemáticas y representaciones no matemáticas.

4. La consolidación a través de la construcción de objetos mentales mediante acciones, procedimientos y conceptos que provienen de sistemas de representación intermedios, creados durante el desarrollo de una secuencia de enseñanza.

Por su parte, Gómez Granell (1989) también destaca el papel decisivo que la significación posee en investigaciones relativas a didáctica de la Matemática cuando afirma que: “El pensamiento y el lenguaje matemático no se pueden producir al margen de la significación” (p. 13).

Focalizada en la cuestión de la comprensión de los conocimientos matemáticos, Sierpinska (1990) realiza un análisis referido a establecer relaciones entre comprensión, significado y sentido. Refiere que “comprender un concepto será concebido como el acto de captar su significado” (p. 27). Postula que este acto implica procesos de generalización y síntesis de los significados, correspondientes a elementos particulares que constituyen la “estructura” del concepto, donde dicha estructura refiere a la red de sentidos de las oraciones que se hayan considerado. Estos significados particulares, también deben ser captados en actos de comprensión. Destaca que, mientras que la metodología de ‘niveles de comprensión’ se focaliza en la evaluación de conocimiento de los estudiantes, la metodología de ‘actos de compresión’ se ocupa principalmente por el proceso de construcción de significado de los conceptos.

En la Teoría de Campos Conceptuales también se otorga relevancia a la noción de significado, cuya composición tríadica se observa en la definición de *concepto* dada por Vergnaud (1990). En este marco, un concepto es una terna de conjuntos: **C = (S, I, R)**, donde:

S: es el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto. Es el *referente* del concepto. A partir de ellas el concepto adquiere utilidad y resulta significativo.

I: es el conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones), sobre los cuales reposa la operacionalidad del concepto, que los sujetos utilizan para analizar y dominar las situaciones del primer conjunto. Constituye el *significado* del concepto.

R: es el conjunto de representaciones simbólicas (lingüísticas, gráficas o gestuales) que pueden ser usadas para indicar y representar esos invariantes y, consecuentemente, representar las propiedades, funciones y procedimientos asociados al concepto en tales situaciones. Es el *significante*.

Este autor afirma que, para estudiar el desarrollo y funcionamiento de un concepto en el transcurso del aprendizaje, es necesario considerar estos tres planos conjuntamente.

Por su parte, Pimm (1990) también enfatiza la importancia de las cuestiones de la comprensión y el significado en lo relativo a la educación matemática en cualquier nivel, pero advierte que la definición de estos términos está lejos de ser clara u obvia. Asimismo, hace una distinción entre comprensión y significado. Según este autor, la comprensión puede derivarse del uso creativo del lenguaje y a partir de imágenes que ofrecen una iluminación repentina, mientras que el significado parece estar más ligado a la referencia, lo que lo vuelve más específico y local.

Socas (2011) afirma que la búsqueda de significados, particularmente para el Álgebra, ha estado presente en la mayoría de las investigaciones de los últimos treinta años. Plantea que en dichas investigaciones, numerosos autores han tratado de identificar las distintas fuentes de significados para los sistemas semióticos de representación utilizados en el Álgebra. Entre esas fuentes enumera algunas que son internas a la propia disciplina, como operaciones, estructuras y procesos del Álgebra que implican el uso de letras y símbolos en el planteo y resolución de problemas contextualizados. También considera fuentes externas, relacionadas con actividades lingüísticas, metáforas, imágenes, experiencias vividas y el lenguaje gestual.

2.3. EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DE LA COGNICIÓN Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA (EOS)

Esta teoría de Didáctica de la Matemática aborda numerosos aspectos de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. En esta sección se presentan algunas nociones y constructos básicos del EOS, que han sido fundamento teórico en esta investigación, tales como práctica matemática, significado de un objeto matemático, objetos de primer orden, configuraciones, funciones semióticas e idoneidad didáctica.

2.3.1. PRÁCTICA MATEMÁTICA Y SIGNIFICADO DE UN OBJETO MATEMÁTICO

Un concepto básico para el EOS es el de *práctica matemática*. La misma se define como cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos (Godino, Batanero y Font, 2009). A partir de la concepción de práctica matemática, surge la noción de *significado* de un objeto matemático. El mismo se define como "el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006, p. 7). Las bases para determinar los elementos que intervienen en el significado sistémico de un objeto matemático fueron el triángulo de Odgen y Richards y la definición de concepto, como una terna de conjuntos, dada por Vergaud:

> Basados en estas dos ideas (triángulo epistemológico y teoría de los campos conceptuales) nuestra primera clasificación incluyó los siguientes tipos de elementos en el significado sistémico de un objeto matemático:
> • *Situaciones-problemas*, aplicaciones, tareas, que inducen actividades matemáticas.
> • *Lenguaje*, incluyendo en el mismo todo tipo de representaciones materiales ostensivas usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, gráficos, tablas, diagramas).
> • *Generalizaciones*, ideas matemáticas, abstracciones (conceptos, proposiciones, procedimientos, teorías). (Godino, 2003, p. 107)

Tanto para las prácticas matemáticas como para el significado de un objeto matemático se distinguen dos dimensiones interdependientes, la *personal* y la *institucional*, de acuerdo con los sujetos que intervienen.

Las prácticas personales pueden ser tanto actuaciones observables constituidas por manifestaciones empíricas, como acciones interiorizadas que no son directamente observables. Intervienen objetos ostensivos (símbolos gráficos, etc.) y no ostensivos (evocados al hacer matemática) que son representados en forma textual, oral gráfica e incluso gestual. El sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas está constituido por las prácticas prototípicas que un sujeto realiza en su intento de resolver un campo de problemas. Ese sistema de prácticas personales del que emerge un objeto en un momento dado es el que constituye el *significado personal* del objeto. (Godino y Batanero, 1994).

Una institución está constituida por las personas involucradas la resolución de un mismo tipo de problemas. Las instituciones se conciben como “comunidades de prácticas”, por consiguiente incluyen culturas, grupos étnicos y contextos socioculturales. El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas está constituido par las prácticas consideradas como significativas para resolver estos problemas y que son compartidas en el seno de la institución. Dicho sistema de prácticas constituyen el significado institucional. (Godino y Batanero, 1994).

En este contexto, el aprendizaje supone la apropiación por parte del estudiante de los significados validados en el seno de una institución, mediante su participación en las comunidades de prácticas (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Batanero y Font, 2009).

2.3.2. OBJETOS PRIMARIOS Y CONFIGURACIONES

Debido al rol preponderante que juegan los objetos, el EOS considera que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Así, la tipología de objetos primarios, u objetos de primer orden, según Font, Godino y Gallardo (2013), está constituida por:

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual)
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc.)
- *Conceptos-definiciones* (introducidos mediante definiciones o descripciones)
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.)
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Estas seis entidades primarias postuladas no son objetos aislados (Rondero y Font, 2015) sino que se vinculan entre sí: las situaciones-problemas son el origen y motivación de la actividad, el lenguaje actúa como soporte para representar a las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción, los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que, conjuntamente con las definiciones, resuelven las situaciones-problemas. Estas relaciones entre los objetos primarios, esquematizadas en la Figura 2.2, determinan las configuraciones, definidas por Godino, Batanero y Font (2009) como “las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos” (p. 8).

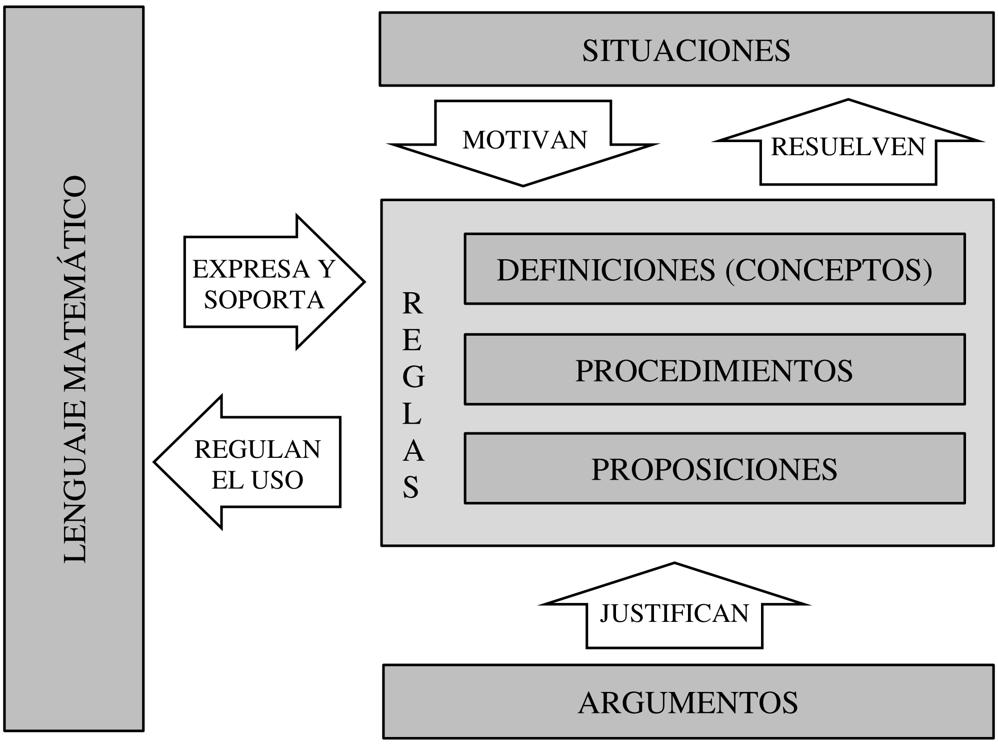


Figura 2.2. Relación de los objetos primarios en una configuración epistémica
Fuente: Font y Godino (2006, p. 69)

Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional. Por consiguiente, las configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Plantear el aprendizaje en términos de significados, otorga una relevancia central al proceso mediante el cual un sujeto crea un significado, vinculando una expresión con un contenido a través de una función semiótica. Para el EOS, el significado de un objeto matemático no es sólo un sistema de prácticas, sino también el contenido de cualquier función semiótica (Godino, Batanero y Font, 2009; Godino, 2015).

Como se detallará en el próximo apartado, una función semiótica es establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia. De esta manera, los distintos objetos primarios no resultan aislados entre sí, sino que se vinculan a través de las funciones semióticas construidas entre ellos. Dichos objetos pueden ejercer el rol de antecedente o de consecuente de la función semiótica (Godino, Batanero y Font, 2009). De este modo, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada tienen en cuenta la naturaleza relacional de la matemática y amplían el significado de representación.

2.3.3. FUNCIONES SEMIÓTICAS

El EOS describe y analiza la trama de objetos y procesos puestos en juego en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática a través de las funciones semióticas.

El punto de partida es la noción de *función* proporcionada en la teoría del lenguaje del lingüista danés Hjemslev (1971). Este autor denomina *función* a la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí, y denomina funtivos a los terminales de una función. Considera que un signo "se caracteriza primera y principalmente por ser signo de alguna otra cosa –peculiaridad ésta que probablemente despertará nuestro interés, puesto que parece indicar que 'signo' se define por una función-. Un 'signo' funciona, designa, denota" (Hjemslev, 1971, p. 68).

Entre los tipos de dependencias que es posible identificar entre las partes de un texto, resaltan aquellas en que una parte (plano de expresión) se pone en representación de otra (plano del contenido), que son las que definen al signo según Hjemslev (1971, p. 73):

> Mientras que, de acuerdo con el primer punto de vista, el signo es una *expresión* que señala hacia un *contenido* que hay fuera del signo mismo, de acuerdo con el segundo punto de vista (que ha expuesto especialmente Saussure y, tras sus pasos Weisgerber) el signo es una entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido.

Este autor designa a los funtivos como expresión y contenido, y a la conexión entre ellos la denomina *función de signo*:

> Hemos presentado los términos expresión y contenido como designaciones de los funtivos que contraen a la función a que nos referimos, la función de signo. Es ésta una definición puramente operativa, y además una definición formal, en el sentido de que en este contexto no se dará ningún otro significado a los términos *expresión* y *contenido*. (Hjemslev, 1971, p.74).

La concepción de significado de un signo que presenta Hjelmslev es pragmática: "Totalmente aislado, ningún signo tiene significación; toda significación del signo surge en el contexto, entendiendo por tal un contexto situacional o un contexto explícito" (Hjemslev, 1971, p. 70).

Partiendo de las ideas de Hjemslev, Eco (1991, p. 83) define esta misma asociación entre expresión y contenido como *función semiótica*:

> Cuando un código asocia los elementos de un sistema transmisor con los elementos de un sistema transmitido, el primero se convierte en la EXPRESIÓN del segundo, el cual, a su vez, se convierte en el CONTENIDO del primero.
> Existe función semiótica, cuando una expresión y un contenido están en correlación, y ambos elementos se convierten en FUNTIVOS de la correlación.

También manifiesta que un signo está constituido por uno o más elementos de un plano de la expresión que se encuentran convencionalmente en correlación con uno o más elementos de un plano del contenido. Si esta correlación es reconocida por una sociedad humana, entonces existe el signo. Eco (1991) manifiesta que bajo estas condiciones es posible aceptar la definición de signo de Saussure dada como la correspondencia entre un significante y un significado.

Como consecuencia de estas consideraciones, este autor pone en relevancia la condición relacional del signo, que es la función semiótica:

> (a) UN SIGNO NO ES UNA ENTIDAD FÍSICA, dado que la entidad física es, como máximo, la ocurrencia concreta del elemento pertinente de la expresión; (b) UN SIGNO NO ES UNA ENTIDAD SEMIÓTICA FIJA, sino el lugar del encuentro de elementos mutuamente independientes, procedentes de dos sistemas diferentes y asociados por una correlación codificadora. Hablando con propiedad, no existen signos, sino funciones semióticas (Hjelmslev, 1943).
> Una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua: pero el mismo funtivo puede entrar también en correlación con otros elementos, con lo que se convertirá en un funtivo diferente que da origen a otra función. (Eco, 1991, pp. 83-84)

Desde esta perspectiva, las funciones semióticas ponen de manifiesto la naturaleza esencialmente relacional de la actividad matemática. Godino (2003) considera que esa dependencia entre los objetos relacionados no es sólo representacional, sino que existen otras dependencias de naturaleza operatoria o actuativa.

El EOS considera que el significado está conformado por una trama de funciones semióticas, cada una de las cuales asigna a una expresión un contenido, mediante un cierto criterio o regla de correspondencia establecida por un sujeto. Este contenido puede ser un término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico, una situación problema, un concepto o definición, una acción u operación, algoritmo o procedimiento, una argumentación, etc. (Godino, Batanero y Font, 2009). Es decir que el contenido puede ser cualquiera de los objetos primarios que el EOS contempla en su ontología.

> Los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto se pueden describir de manera global, con la noción de "sistemas de prácticas personales", que queda concretada mediante la trama de funciones semióticas que el sujeto puede establecer en las que el objeto se pone en juego como expresión o contenido (significante, significado). (Godino, 2015, p. 12)

Las funciones semióticas poseen un gran potencial como herramientas metodológicas al momento de estudiar significados, particularmente los significados personales construidos por los estudiantes. Font (2002, p. 156) expresa que:

> El hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel muy importante en el proceso relacional entre entidades (o grupos de ellas), activadas en prácticas que se realizan dentro de un determinado juego de lenguaje, permite también entender la comprensión en términos de funciones semióticas. En efecto, podemos interpretar la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (sea individuo o institución) en términos de funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego O como funtivo (expresión o contenido).

La ausencia de construcción de las distintas funciones semióticas por parte de los estudiantes, o el establecimiento de funciones incorrectas, da lugar a errores.

Las funciones semióticas permiten un refinamiento del análisis de la complejidad semiótica y cognitiva de las distintas tareas como así también la tipificación de los errores. Este tipo de análisis conduce a una visión más detallada del significado personal manifestado por los estudiantes sobre un objeto matemático.

2.3.4. IDONEIDAD DIDÁCTICA

La noción de idoneidad está orientada a valorar las diferentes trayectorias en procesos de estudio. La idoneidad didáctica, como criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción, está formada por seis dimensiones que interactúan entre sí (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006):

1. *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.
2. *Idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.

3. *Idoneidad interaccional*, grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos9 potenciales (que se puedan detectar a priori), y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados.
4. *Idoneidad mediacional*, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.
5. *Idoneidad emocional*, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
6. *Idoneidad ecológica,* grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

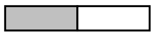
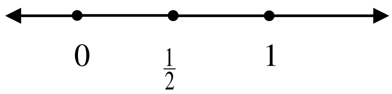
El análisis de estas dimensiones en un proceso de instrucción permite estudiar no sólo la gestión de lo actuado en el aula sino también materiales didácticos y la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales.

2.4. LA TEORÍA DE REGISTROS SEMIÓTICOS

En su Teoría de Registros Semióticos, Duval (1999, 2000, 2004, 2006) plantea el uso de múltiples sistemas de representación como herramienta fundamental para el desarrollo de las actividades cognitivas en Matemática. Su interés en la cuestión representacional se basa en que la actividad matemática requiere de procesos cognitivos –tales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la interpretación de textos– que necesariamente utilizan sistemas de representación semiótica, tales como los distintos sistemas numéricos, notaciones simbólicas para objetos matemáticos, escritura lógica, escritura algebraica, figuras geométricas, gráficos cartesianos, etc.

2.4.1. REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS Y REGISTROS SEMIÓTICOS

Un *registro semiótico* es todo sistema de representación que cumple con tres condiciones cognitivas fundamentales: a) comunicación, b) procesamiento, c) objetivación (Contreras de la Fuente y Font Moll, 2002). Por consiguiente, no todo sistema semiótico constituye un registro sino sólo aquellos que permiten una transformación de las representaciones (Duval, 2006). Dentro de cada registro semiótico pueden obtenerse distintas *representaciones semióticas*, es decir producciones de un mismo concepto constituidas por el empleo de signos. El siguiente ejemplo, basado en los expuestos por D'Amore (2003, 2004), ilustra estas definiciones. En el mismo se muestran representaciones del concepto 'un medio', efectuadas en distintos registros semióticos:

- <u>Registro semiótico r^1</u>: Registro coloquial
  - Representación semiótica R_1^1: un medio
  - Representación semiótica R_2^1: la mitad
- <u>Registro semiótico r^2</u>: Registro aritmético
  - Representación semiótica R_1^2: $\frac{1}{2}$ (escritura fraccionaria)
  - Representación semiótica R_2^2: 0,5 (escritura decimal)
  - Representación semiótica R_3^2: $5 \, . \, 10^{-1}$ (escritura exponencial)
- <u>Registro semiótico r^3</u>: Registro algebraico
  - Representación semiótica R_1^3: $\{x \in \mathbb{R} / 2x - 1 = 0\}$
  - Representación semiótica R_2^3: $\exists! \, x \in \mathbb{Q} / 1 - 2x = 0$
- <u>Registro semiótico r^4</u>: Registro gráfico
  - Representación semiótica R_1^4: 
  - Representación semiótica R_2^4: 

Se puede observar que, si se cambia el registro semiótico, la representación semiótica necesariamente se modifica. Pero esto no sucede en el sentido contrario, es decir, puede cambiar la representación semiótica pero manteniéndose el mismo registro semiótico.

2.4.2. NOESIS Y SEMIOSIS

Entendiendo a la *semiosis* como la aprehensión o producción de una representación semiótica y a la *noesis* como el proceso mediante el cual se logra la aprehensión conceptual de un objeto, Duval (2004, p. 16) afirma que "no hay noesis sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis". Es decir que no puede haber aprehensión conceptual de un objeto sin algún representante de éste. La semiosis es por tanto considerada como característica necesaria para garantizar un primer paso hacia la noesis (D'Amore, 2005).

2.4.3. ACTIVIDADES COGNITIVAS LIGADAS A LA SEMIOSIS

Duval (2004) distingue tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis: la formación de representaciones, el tratamiento y la conversión.

La *formación de representaciones* es definida por Duval (2004, p. 43) como el recurso de utilizar signos para sustituir un objeto:

> La formación de una representación semiótica es el recurso a un(os) signo(s) para actualizar la mirada de un objeto o para sustituir la visión de ese objeto. Excepto casos de idiosincrasia, los signos utilizados pertenecen a un sistema semiótico ya constituido y ya utilizado por otros. […] Los actos más elementales de formación son, según los registros, la designación nominal de objetos, la reproducción de un contorno percibido, la codificación de relaciones o las propiedades de un movimiento.

Dado que los signos utilizados pertenecen a un sistema semiótico constituido, la formación de representaciones ha de realizarse de acuerdo a reglas propias del sistema utilizando determinadas *reglas de conformidad*, las cuales intervienen en la aceptabilidad de una representación producida. Dichas reglas se refieren esencialmente a:

- La determinación de unidades elementales (símbolos, vocabulario, etc.).
- Las combinaciones admisibles de unidades elementales para formar unidades de nivel superior: reglas de formación de un sistema formal.
- Las condiciones para que una representación de orden superior sea pertinente y completa.

La formación de representaciones semióticas es más compleja que la aplicación de las reglas de conformidad, pues implica la selección de un cierto número de caracteres de un contenido percibido, imaginado o ya representado en función de las posibilidades de representación propias al registro. Así lo remarca Duval (1998, p. 177) al expresar: “Ello quiere decir que el conocimiento de reglas de conformidad no implica la competencia en la formación de representaciones sino sólo reconocerlas”.

La segunda de las actividades cognitivas consideradas en esta teoría es el *tratamiento* de representaciones, definido como: “una transformación de la representación interna a un registro de representación” (Duval 2004, p. 44). Es decir que es una transformación en la que coinciden el registro inicial y el registro terminal. Así, por ejemplo, la transformación de la expresión “3x+5x” en “8x”, en el registro algebraico, es un tratamiento. La paráfrasis y la inferencia son tratamientos en el registro del lenguaje natural (Duval, 1998, 2004).

Las reglas para efectuar tratamientos son propias del registro semiótico en el que se efectúen. Según Duval (2004, p. 48), esta es una de las actividades que son privilegiadas en educación, pues afirma que:

> La enseñanza privilegia el aprendizaje de las reglas que conciernen la formación de las representaciones semióticas y las que conciernen su tratamiento. Y esto principalmente para el registro de los discursos en lengua natural, para los registros numéricos y para el registro de la escritura simbólica.

Finalmente, la tercera de las actividades cognitivas es la *conversión* de representaciones, a la que Duval (2004, p. 46) define expresando que: “es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de ese mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro”.

A diferencia de la actividad de tratamiento, donde la representación inicial y final pertenecen al mismo registro, en las conversiones la representación final es externa al registro de la representación inicial.

Por ejemplo, representaciones en el registro algebraico tales como $y=2x-1$ o $y<x-2$ pueden convertirse a sus representaciones en el registro de gráficos cartesianos. En el sentido inverso, la representación de una recta o de una región del plano, pueden convertirse a una representación en el registro algebraico. Otro ejemplo es la conversión de una expresión dada en palabras que corresponden al registro del lenguaje coloquial o natural a una expresión simbólica en el registro algebraico. La conversión en el sentido inverso permite obtener, a partir de una expresión simbólica en el registro algebraico, una expresión en el lenguaje natural.

La actividad de conversión no suele tener el mismo nivel de dificultad si se invierte el sentido de la misma, es decir si se intercambian los registros de partida y de llegada. Esto se debe a que las conversiones, en general, no tienen reglas de transformación como existen para los tratamientos, lo que las convierte en la más dificultosa de las actividades cognitivas: “la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos. […] la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales” (Duval, 2004, p. 49).

Una conversión se denomina *congruente* si existe la posibilidad de establecer una correspondencia término a término entre las unidades significantes de dos representaciones semióticas en registros diferentes (Duval, 2004, 2006). La dificultad o imposibilidad de efectuar conversiones de manera espontánea está ligado a fenómenos de *no-congruencia*:

> En caso de no congruencia no sólo aumenta el tiempo de tratamiento, sino que la conversión puede resultar imposible de efectuar, o incluso de comprender, si no ha habido un aprendizaje previo concerniente a las especificidades semióticas de formación y de tratamiento de la representación, propias a cada uno de los registros presentes. (Duval, 2004, p. 51)

Para determinar la congruencia entre dos representaciones de registros semióticos diferentes Duval (2004,2006) enuncia tres criterios a verificar. Los mismos son:

- *Posibilidad de una correspondencia semántica de los elementos significantes*, es decir que a cada unidad significante de una de las representaciones se le pueda asociar una unidad significante en la otra representación.
- *Univocidad semántica terminal*, es decir que a cada unidad significante elemental de la representación de partida le corresponde una única unidad significante elemental en el registro de llegada.
- *Correspondencia en el orden del arreglo de las unidades significantes que componen cada una de las representaciones*. Este último criterio sólo es pertinente al caso de dos registros de representación que tengan la misma dimensión como es el caso de los registros del lenguaje coloquial y del lenguaje simbólico.

Por lo tanto, dos representaciones son *congruentes* cuando se cumplen estos tres criterios. En el caso de que no se verifique alguno de ellos aparece el fenómeno de *no-congruencia*, cuyo grado será mayor cuantos menos criterios se cumplan, con el consecuente crecimiento en las dificultades de la conversión correspondiente (Duval, 2004).

Capítulo 3

METODOLOGÍA

3.1. INTRODUCCIÓN

Tal como se ha explicitado en el Capítulo 1, el objetivo de esta investigación se centra en la descripción y caracterización del proceso de construcción de significados de símbolos matemáticos, en estudiantes universitarios. En este capítulo se presentan las características metodológicas que fundamentan la investigación. Se describen el tipo de investigación, los objetivos planteados, la población, las muestras tomadas y los instrumentos utilizados para la recolección de datos.

3.2. TIPO DE INVESTIGACIÓN

Las características metodológicas de la investigación son de tipo interpretativo y cualitativo, ya que se pretende arribar a una comprensión profunda sobre los procesos llevados a cabo por los estudiantes mediante un análisis inductivo/constructivo (Lincoln y Guba, 1985).

El diseño metodológico utilizado lleva a clasificar a la investigación como:

- *Exploratoria*: ya que se indaga sobre la construcción de significados, por parte de estudiantes universitarios, dentro del registro simbólico-algebraico.
- *Descriptiva*: dado que se caracterizan los rasgos fundamentales del proceso de significación de símbolos algebraicos.
- *Etnográfica*: pues se pretende comprender los acontecimientos tal y como los interpretan los sujetos investigados, a través de una inmersión en su pensamiento y práctica.
- *Empírica:* ya que está basada en la observación, con un trabajo fundamentado en hechos de experiencia directa no manipulados por la investigadora.
- *De campo*: puesto que la información se obtuvo en el lugar de trabajo de los sujetos investigados.
- *Hermenéutica*: pues se realizan interpretaciones sobre las interpretaciones que hacen los estudiantes.

3.3. OBJETIVOS

El objetivo general de la investigación fue enunciado del siguiente modo:

> Describir y caracterizar el proceso de construcción de significados de símbolos matemáticos, en estudiantes universitarios.

Mientras que los objetivos específicos quedaron conformados de la siguiente manera:

- Identificar componentes del significado, en términos de prácticas operativas y discursivas, de los símbolos más usuales en el inicio de estudios de Matemática en el nivel superior, tales como $\in$, $\subset$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$.
- Analizar el proceso de construcción del significado personal, de los símbolos en estudio, en términos de los componentes identificados.
- Establecer similitudes o diferencias que pueden interpretarse en los procesos de construcción de significado de los distintos símbolos en estudio.
- Identificar y caracterizar niveles de evolución en la construcción de significados de los símbolos algebraicos estudiados.

3.4. POBLACIÓN

La población está constituida por los alumnos matriculados en un primer curso de Álgebra en carreras de la Universidad Nacional de Mar del Plata (UNMDP), Argentina, en los años 2012, 2013 y 2016.

Las carreras consideradas son Profesorado en Matemática, Licenciatura en Ciencias Biológicas, Bioquímica, Ingeniería Electrónica, Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Química, Ingeniería Mecánica, Ingeniería en Materiales, Ingeniería en Alimentos e Ingeniería Industrial. A estas últimas, de aquí en más se las mencionará globalmente como carreras de Ingeniería.

Las carreras fueron seleccionadas por la accesibilidad que la investigadora tuvo a esos estudiantes, dado que los docentes a cargo de las correspondientes cátedras permitieron la entrada a sus respectivas aulas y cedieron tiempo de sus clases para la toma de datos.

3.5. MUESTRAS

Se tomaron muestras intencionales de estudiantes a los que se les administró el instrumento, a lo largo del proceso de diseño del mismo.

La intencionalidad de la muestra consiste en la selección de estudiantes que cursan la primera asignatura del área Álgebra en el plan de estudios de las carreras mencionadas. Esta decisión estuvo basada en el hecho de que en esta área se emplean con más frecuencia los símbolos en estudio.

• MUESTRA 1. Para la *versión piloto* del instrumento, se tomó una muestra de 41 estudiantes de las carreras de Ingeniería de la UNMDP. Esta muestra fue tomada en el año 2012.

• MUESTRA 2. La *versión 2* del instrumento fue administrada, en el año 2013, a una muestra de 101 estudiantes de las carreras de Ingeniería, Profesorado en Matemática, Bioquímica y Licenciatura en Ciencias Biológicas, de la UNMDP, dispuestos a formar parte de la investigación.

La composición de la muestra quedó formada de la siguiente manera:

- Ingeniería: 54 estudiantes, pertenecientes a una comisión del turno mañana.
- Licenciatura en Ciencias Biológicas: 9 estudiantes, pertenecientes a la única

comisión de la asignatura.

- Profesorado en Matemática: 10 estudiantes, pertenecientes a la única comisión de la asignatura.
- Bioquímica: 26 estudiantes, pertenecientes a la única comisión de la asignatura.

Cada estudiante fue identificado con un número. El mismo fue asignado arbitrariamente al momento de la recepción del protocolo del instrumento resuelto por el estudiante. Por esta razón, los alumnos son identificados como A1, A2, A3,…, A101. De acuerdo al orden de las carreras en que fueron relevados los datos, los estudiantes identificados de A1 a A54 pertenecen a las carreras de Ingeniería, de A55 a A64 a la Licenciatura en Ciencia Biológicas, de A65 a A75 al Profesorado en Matemática y de A76 a A101 a Bioquímica.

• MUESTRA 3. La *versión 3* del instrumento fue administrada, en el año 2016, a 90 estudiantes de las mismas carreras presentes en la muestra de la versión 2, para mantener la composición de la muestra y así poder establecer comparaciones generales.

La composición de esta última muestra, de acuerdo con las distintas carreras es:

- Ingeniería: 43 estudiantes, pertenecientes a una comisión del turno mañana.
- Licenciatura en Ciencias Biológicas: 10 estudiantes, pertenecientes a la única comisión de la asignatura.
- Profesorado en Matemática: 16 estudiantes, pertenecientes a la única comisión de la asignatura.
- Bioquímica: 20 estudiantes, pertenecientes a la única comisión de la asignatura.

3.6. SELECCIÓN DE LOS SÍMBOLOS DE ESTUDIO

Para llevar a cabo la investigación fue necesario realizar un recorte en los símbolos que se estudiarían, puesto que no es posible abordar el proceso de construcción de significado, con profundidad, en un número excesivo de ellos.

La selección estuvo basada en algunos criterios que permitirían una mejor aproximación al proceso a estudiar. En primer lugar, investigar con relación a símbolos que fueron creados en el ámbito de la Matemática y que son utilizados, predominantemente, en el quehacer matemático. Son aquellos a los que Pimm (1990) denomina *logogramas* y Socas (2010) define como *signos artificiales*. Esta característica en su uso permite suponer que la construcción del significado de este tipo de símbolos está, en principio, restringido a las prácticas que se realizan en el proceso de instrucción de las asignaturas. En segundo lugar, se pretendía que el proceso de construcción de significado estuviera en evolución, y no completamente avanzado. Por estas razones, se decidió que la selección debía realizarse entre aquellos símbolos que no fueran utilizados en la escuela secundaria, o al menos que su uso fuera poco frecuente en dicha etapa escolar.

Bajo estas premisas, se analizaron los materiales de cátedra y la bibliografía que se utilizan en las asignaturas de Álgebra a cuyos estudiantes se les administraría el instrumento, con el fin de registrar cuáles eran los símbolos que más se empleaban.

La decisión final fue restringir el estudio a seis símbolos: dos operadores relacionales, $\in$ y $\subset$, dos operadores lógicos, $\wedge$ y $\vee$, y los cuantificadores, $\forall$ y $\exists$.

3.7. INSTRUMENTOS

Para la recolección de datos se utilizaron dos instrumentos: un cuestionario cuyo protocolo incluye actividades que contienen distintas tareas vinculadas al manejo de expresiones simbólicas, y entrevistas semiestructuradas. En las siguientes secciones se describen ambos instrumentos.

3.7.1 INSTRUMENTO CONSTRUIDO AD-HOC

Se diseñó y construyó un instrumento especialmente para esta investigación. El mismo está destinado a relevar datos, relativos al significado que los estudiantes tienen construido respecto de los símbolos en estudio, a través de distintas tareas de lectura y de escritura (prácticas operativas y discursivas) de expresiones cuyas representaciones involucran a los mismos.

El diseño y construcción fue realizado en sucesivas etapas, las cuales se describen en detalle en el Capítulo 4, como así también la fundamentación de la selección y adecuación de las tareas que lo componen, los criterios de valoración con que fueron analizadas las respuestas y las herramientas metodológicas que se utilizaron tanto para el diseño como para la evaluación de los datos recolectados.

Este instrumento fue administrado, en todos los casos, en la semana siguiente al primer examen parcial de la asignatura de cada carrera. Esta decisión estuvo basada en la necesidad de que los estudiantes ya hubieran pasado por una etapa de estudio más intensa destinada a rendir dicho examen. No se realizó más adelante en el tiempo para evitar el obstáculo generado por el desgranamiento que se podría producir al finalizar la cursada de la materia y no poder contactar a los estudiantes para realizar las entrevistas previstas.

Al momento de su administración, la investigadora fue presentada a los estudiantes por el docente a cargo de cada asignatura. En todos los casos, se puso en conocimiento a los estudiantes sobre el carácter voluntario de la resolución y que la misma no tenía ningún tipo de calificación o peso sobre las notas de la asignatura. La investigadora explicó el propósito al que estaba destinada la información que de allí surgiera y resaltó la necesidad de que lo resolvieran de manera individual puesto que, cuanto más genuina fuera la información recabada de las resoluciones, mayor valor tenían a los fines de la investigación. Es para destacar que, de todos los protocolos recolectados, en las tres instancias de administración de las distintas versiones, ninguno fue devuelto en blanco. Esto sugiere que los estudiantes asumieron el compromiso de responderlo.

El tiempo de resolución en la administración de la versión piloto fue de 15-20 minutos mientras que el de la segunda y tercera versión fue de 25-30 minutos. Estos tiempos son acordes a la recomendación que Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez (1999, p. 196) hacen respecto a la administración de un cuestionario: "De una forma general, y con las debidas matizaciones, la mayor parte de los tratadistas aconsejan que la contestación de un cuestionario no sea superior a treinta minutos".

3.7.2. ENTREVISTAS SEMIESTRUCTURADAS

Luego de administrada la segunda versión del instrumento, se efectuó la puntuación de las respuestas de los estudiantes. En base a las puntuaciones obtenidas, se seleccionaron los estudiantes a los que se les haría la entrevista. Se seleccionaron estudiantes cuyo desempeño en la resolución del instrumento hubiera sido bueno, medio y bajo, en cada una de las carreras. En total, se realizaron 18 entrevistas a estudiantes distribuidos de la siguiente manera: 8 estudiantes de Ingeniería, 4 estudiantes del Profesorado en Matemática, 3 estudiantes de Bioquímica y 3 estudiantes de la Licenciatura en Ciencias Biológicas.

Los estudiantes entrevistados ya conocían a la investigadora pues habían resuelto el protocolo del instrumento. No obstante, se les aclaró nuevamente que la entrevista también formaba parte de la investigación y cuál era el objetivo de la misma. A cada uno de los estudiantes seleccionados para ser entrevistados se le consultó si estaba dispuesto a realizarla y se resaltó que no estaba de ninguna manera comprometido a aceptar. En todos los casos, los estudiantes aceptaron de buen grado y se mostraron muy predispuestos a colaborar. En varios casos, al finalizar y sin que mediara ninguna pregunta, manifestaron que estaban dispuestos a hacer otra entrevista si era necesario.

La duración de las entrevistas osciló entre 35 y 50 minutos. El audio fue grabado, con el previo consentimiento de los entrevistados. Posteriormente fueron desgrabadas por la investigadora para su análisis y se incluyen en el Anexo 1.

El guión de las entrevistas fue previamente diseñado y analizado, y se realizaron algunos ajustes finales a la vista de las resoluciones de los protocolos del instrumento. A continuación se describe la estructura del guión de la entrevista.

Antes de comenzar cada entrevista, se le detalló al estudiante entrevistado el motivo y el objetivo de la entrevista en el marco de la investigación, pues Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez (1999, p. 170) afirman que: "es necesario introducir una explicación de la entrevista que vamos a desarrollar". También se le volvió a expresar a cada alumno que sus respuestas no tenían ninguna injerencia sobre sus calificaciones en ninguna asignatura y que se mantendría la confidencialidad de su nombre.

Cada entrevista se inició con algunas preguntas amplias, tal como se sugiere para que el entrevistado entre en clima y se relaje (Muñoz Razo, 2011). El entrevistador debe ganarse la confianza del entrevistado, según afirman Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez (1999), y eso puede lograrse manteniendo al entrevistado hablando:

> Los primeros momentos de la relación entrevistador-entrevistado suelen estar presididos por una desconfianza mutua, por un sentimiento de aprensión. Uno no sabe muy bien cómo el otro va a interpretar lo que decimos, nuestros gestos o incluso cómo nos ve físicamente. En estos momentos iniciales, la estrategia que mejor puede favorecer el comienzo de una relación de confianza es la de procurar mantener hablando al entrevistado. Es importante que perciba que se le escucha con atención y que aquello que dice tiene algún sentido para nosotros, que el entrevistado comparte un mismo lenguaje y quizás un mismo significado y llama a las cosas de la misma manera. (p. 171)

Siguiendo estas recomendaciones, se le efectuaron al estudiante preguntas referidas a sus experiencias personales en relación a su educación, a modo de conversación informal: *¿A qué colegio fuiste? ¿Cómo fue la experiencia de entrar en la universidad? ¿Cuáles de las materias que cursás te gustan más? ¿Qué te parecen las clases teóricas? ¿y las prácticas?*

Transcurrida esta primera etapa, se realizaron las primeras preguntas específicas en relación a los símbolos en estudio:

1- Antes se ingresar a la universidad, ¿conocías alguno de éstos símbolos?

2- ¿Qué ventajas y/o desventajas le encontrás al uso del lenguaje simbólico en Matemática?

3- ¿Qué te resulta más fácil: leer símbolos o escribir en símbolos? ¿Por qué?

4- Cuando explican un tema en clase, ¿podés interpretar inmediatamente las expresiones simbólicas que escriben los profesores o sólo copiás y después tratás de entender lo que dice? ¿Tomás nota del significado de algunas expresiones simbólicas?

5- Suponiendo que le tuvieras que explicar a un compañero que no conoce el símbolo $\in$*, ¿te parece que con sólo decirle el nombre del símbolo a esa persona le alcanzaría para utilizarlo correctamente? ¿Qué le dirías?*

La pregunta 5 se repitió para cada uno de los símbolos en estudio y estuvo destinada a indagar sobre la construcción de las funciones semióticas que cada estudiante tiene en relación con estos símbolos.

Posteriormente, en cada caso se trabajó sobre algunas cuestiones particulares a las resoluciones del estudiante, haciéndole preguntas puntuales referidas a sus respuestas. Para esta etapa de la entrevista se le entregó al estudiante su resolución del instrumento, que no tenía ninguna marca ni corrección hecha por la investigadora, pues las correcciones fueron hechas sobre una fotocopia, con la intención de evitar influir sobre las respuestas que diera el alumno en este momento de la entrevista. Se realizaron preguntas centradas sobre sus errores (sin decirle que lo son), sobre los valores de verdad dados como respuesta en el protocolo para constatar si fue resuelto por azar o razonándolo, sobre de la forma de escritura según la Lógica Formal versus la escritura de uso habitual en Matemática, etc.

Terminada esta etapa de la entrevista focalizada en la resolución del instrumento, se propuso a cada estudiante la resolución de dos actividades más, con el objetivo de constatar algunos aspectos de los ya evaluados en el instrumento.

Para la primera de ellas, se le entregó al estudiante una hoja con las expresiones que se muestran en la Figura 3.1 y se le formuló, en forma oral, la siguiente consigna:

La expresión de la izquierda es la que se esperaba que dieran los alumnos en un parcial, y las de la derecha son las que se encontraron. ¿Podrías decirme cuáles son correctas por ser equivalentes a la primera?

$\forall x \in \mathbb{Z}\ x< x+1$	• $\forall x\ (x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x< x+1)$ • $x\in\mathbb{Z}\ ,\ x< x+1$ • Los números enteros son menores que su sucesor • Para todo x perteneciente al conjunto de los números enteros x es menor que x más 1 • $\forall x\ x< x+1$ • $x< x+1\ \forall x \in\mathbb{Z}$
$\exists x \in \mathbb{Z}\ x< 5$	• $\exists x\ (x\in\mathbb{Z} \wedge x< 5)$ • $x\in\mathbb{Z}\ ,\ x< 5$ • Los números enteros son menores que 5 • Para algún x perteneciente al conjunto de los números enteros x es menor que 5 • Hay números enteros menores que 5

Figura 3.1. Enunciado de una actividad propuesta durante las entrevistas

Esta actividad estuvo destinada a analizar las asociaciones con otras formas de escritura simbólica (según las reglas de la Lógica Formal, el uso tácito del cuantificador universal, la cuantificación posterior a la función proposicional en el caso del cuantificador universal), y con expresiones coloquiales.

Finalmente, se propuso a cada estudiante entrevistado la resolución de dos actividades de conversión entre el registro coloquial y el simbólico-algebraico, en ambos sentidos. La particularidad en este caso es que la expresión correspondiente al registro coloquial fue formulada en forma oral, por el alumno en un caso y por la investigadora en el otro, con el objetivo de emular las situaciones que se producen en una clase. Es decir, se llevó al estudiante del medio escrito al medio oral.

La tarea fue planteada mediante las siguientes consignas:

1- En un pizarrón quedaron escritas las siguientes expresiones, ¿qué te parece que dijo el profesor de manera oral cuando las escribió?

$\forall$ m, n$\in\mathbb{R}$ si m.n = 0 $\Rightarrow$ m = 0 ó n = 0 $\qquad$ $\forall$ a,b $\in\mathbb{R}$ $\exists$ c$\in\mathbb{R}$ / a < c < b

(Nota: Estas dos expresiones simbólicas se presentaron al estudiante por escrito)

2- *Si un profesor dice de manera oral:* Todos los números naturales son enteros. *¿Qué te parece que escribiría en el pizarrón?*

Si un profesor dice de manera oral: Dado un número real siempre existe un número entero que es mayor que él. *¿Qué te parece que escribiría en el pizarrón?*

3.8. HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS CUANTITATIVO

Si bien esta investigación es fundamentalmente de tipo cualitativo, se utilizaron algunas herramientas de Estadística Descriptiva para los análisis, tales como frecuencias y proporciones. Estos valores numéricos fueron incluidos como un dato que permite observar la relevancia o no de determinados resultados. Por ejemplo, no es igualmente significativo que cierto tipo de error sea cometido por un único estudiante a que lo haya cometido la mitad de la muestra.

También se utilizó el test estadístico chi-cuadrado para analizar la dependencia entre algunas variables correspondientes a los registros de funciones semióticas. Estos test se realizaron utilizando el *software* SPSS, versión 15.0.

3.9. HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS CUALITATIVO

Para analizar la complejidad semiótica de algunos ítems se emplearon dos herramientas metodológicas provistas por el EOS: las *configuraciones* y las *funciones semióticas*, descritas en general en el Capítulo 2 y en particular en el Capítulo 4. Estas dos herramientas fueron utilizadas de manera conjunta, lo que permitió describir de manera minuciosa la complejidad semiótica de cada una de las tareas propuestas en los distintos ejercicios del instrumento utilizado para la recolección de datos, como podrá observarse en el Capítulo 5. Esta combinación de herramientas también dio lugar a un análisis detallado de los errores detectados en las resoluciones que los estudiantes realizaron en el protocolo del instrumento.

Para organizar y presentar la información cualitativa, tanto la que surge de las resoluciones del instrumento como de las entrevistas efectuadas, se realizaron categorizaciones, particularmente en el caso de los errores y de las respuestas, dadas por los estudiantes durante las entrevistas a las preguntas que fueron comunes a todos los entrevistados. El proceso efectuado es el que, en la “Teoría fundamentada en los datos” (*Gounded Theory*), se denomina *codificación*:

> Una vez obtenido un conjunto de datos a través de alguno o varios de los procedimientos antes mencionados, la primera operación a desarrollar consiste en comparar la información obtenida, tratando de dar una denominación común a un conjunto de datos que comparten una misma idea. Es lo que llamamos *codificar*. Codificar supone leer y releer nuestros datos para descubrir relaciones, y en tal sentido codificar es ya comenzar a interpretar. (Soneira, 2007, p. 156)

Siguiendo esta línea de trabajo, en cada caso se formularon categorías provenientes de regularidades y coincidencias observadas en etapas sucesivas de lectura y relectura, tal como lo describe Soneira (2007, p. 157):

> Al principio se compara entrevista (u otra fuente de datos) contra entrevista (u otra fuente): de aquí surgen las categorías. Luego, cuando la teoría emerge, se comienzan a comparar los nuevos datos que se van recolectando con las categorías teóricas. Esto es lo que se denomina *comparación constante*.

Este procedimiento permitió segmentar la información relevada y realizar agrupaciones, para obtener luego una organización de los datos en una presentación sintética y estructurada.

Capítulo 4

EL INSTRUMENTO

4.1. INTRODUCCIÓN

Para la recolección de datos, destinados a indagar en la construcción de significado de los símbolos en estudio, se diseñó un instrumento *ad-hoc*. El mismo tuvo tres versiones sucesivas. La primera fue una versión piloto, destinada a obtener una aproximación sobre la información que se deseaba relevar. La segunda surgió como un rediseño obtenido a partir de los análisis realizados luego de administrar la primera versión. Estos análisis estuvieron focalizados no sólo en los datos relevados, sino también en el estudio de la idoneidad del instrumento y en la pertinencia y adecuación de las herramientas metodológicas utilizadas en para el análisis de los datos. A partir de la evaluación de la segunda versión y del análisis de los datos relevados a través de la misma, se realizaron algunos ajustes finales, que condujeron a la tercera versión del instrumento, con la que se realizaron los estudios finales de la investigación.

El proceso de construcción, ajuste y reformulación del instrumento, determinó siete fases a lo largo de su desarrollo:

1- Diseño de la primera versión (piloto)

2- Análisis de la primera versión

3- Redefinición de herramientas metodológicas de análisis

4- Rediseño del instrumento (versión 2)

5- Análisis de la segunda versión

6- Rediseño del instrumento (versión 3)

7- Análisis de la tercera versión

En cada una de estas etapas se consideraron múltiples aspectos relativos a fundamentos teóricos, herramientas metodológicas y datos relevados, que permitieron establecer criterios para efectuar modificaciones y que fundamentaron el paso a la siguiente fase. A lo largo de este capítulo se detallan los criterios y acciones que caracterizan cada una de las distintas fases.

4.2. FASE 1: DISEÑO DE LA PRIMERA VERSIÓN (PILOTO)

En las siguientes subsecciones se describen los criterios considerados en el diseño y construcción de la primera versión del instrumento, los ejercicios que conforman el protocolo con la descripción de las tareas involucradas en cada uno y los criterios de valoración con los que fueron puntuadas las respuestas de los estudiantes a cada uno de los ejercicios.

4.2.1. CRITERIOS GENERALES

El punto de partida para diseñar la versión piloto fue el propósito de evaluar prácticas matemáticas ligadas a cada uno de los símbolos que se estudiarían, observando aspectos sintácticos y semánticos.

La sintaxis y la semántica constituyen –junto a la pragmática– las tres dimensiones de la Semiótica y, por ende, son consideradas en un análisis semiótico, donde la sintaxis concierne a la relación sistémica que un signo mantiene con otros signos, la semántica corresponde a la relación entre el signo y los objetos a los cuales se refiere, y la pragmática se refiere a la relación con el usuario del signo en el contexto de la interacción comunicativa (Tobón Franco, 2004). Es adecuado el estudio de cada dimensión por separado pues, de acuerdo con Klimovsky y Boido (2005, p. 50), "la sintaxis, la semántica y la pragmática, originan problemas muy ligados entre sí, pero constituyen, realmente, ámbitos de estudio diferentes, aunque en conjunto se los considere formando parte de la disciplina llamada 'semiótica' o 'teoría de los signos' ". Además, diversos autores plantean el abordaje de la sintaxis y la semántica en el estudio del manejo simbólico desde una perspectiva didáctica (Gómez Granell, 1989; Rojano, 1994; Goldin y Kaput, 1996; Palarea Medina, 1999). Por esta razón, se consideró importante diseñar tareas que posibilitaran el estudio de ambas dimensiones. Para ello, se contempló evaluar distintos tipos de tareas: identificación del símbolo, lectura y escritura de expresiones simbólicas, conversión desde el registro coloquial al simbólico y viceversa, y la asignación de valor de verdad.

Se partió de la idea previa de que la cantidad y el tipo de símbolos involucrados en una expresión sería lo que determina el nivel de complejidad de la expresión y que, la manifestación de habilidades ligadas a cuestiones sintácticas y semánticas en los diferentes tipos de expresiones, permitiría detectar distintos grados en la evolución de la construcción de significado.

Desde esta perspectiva, se incluyeron en el instrumento expresiones con distinto nivel de complejidad. Se diseñaron ítems que incluyeron expresiones atómicas con símbolos de pertenencia o inclusión, expresiones moleculares con el operador lógico de conjunción o de disyunción y expresiones moleculares con una variable cuantificada.

Para construir cada una de las expresiones que forman parte del instrumento se consideró el hecho de que el contenido matemático al que cada expresión se refiere podía interferir en los datos que se deseaba obtener en relación al símbolo. Es decir, que si un alumno no conociera el contenido matemático, esto pudiera afectar su desempeño en la resolución de la tarea, contaminando o distorsionando la información que se obtuviera de su respuesta en relación a la cuestión simbólica, por no poderse discriminar el origen de algún error cometido. Para procurar salvar este obstáculo, todas las expresiones utilizadas en el instrumento refieren a unidades temáticas que se imparten en la escuela secundaria, de modo que el contenido matemático al que cada expresión refiere no resulte un obstáculo en la comprensión de la misma.

Otro aspecto que se observó particularmente es la longitud total de instrumento. Se procuró que la presentación impresa del protocolo no excediera a una carilla. Esta consideración estuvo basada en experiencias anteriores de la investigadora y en ocasión de otras instancias de relevamiento de datos. En estas oportunidades, se observó que los estudiantes presentaban cierta resistencia a resolver protocolos de varias hojas, y la primera acción que realizaban al recibirlos era mirar su extensión. En las ocasiones en las que los protocolos eran más extensos, se constató que eran numerosos los estudiantes que no lo resolvían completamente, dejando en blanco los últimos ejercicios. Estos hechos definieron la decisión de que el instrumento debía tener una extensión no superior a una carilla y que no debía verse densamente poblado de tareas. Esto condujo a una selección minuciosa de la cantidad de ítems.

A continuación se presentan los detalles de la construcción de cada uno de los ejercicios que formaron parte de la versión piloto.

4.2.2. EJERCICIO 1

En este ejercicio se presenta la lista de símbolos a estudiar, y se solicitan dos tareas para cada uno de ellos:

- Escribir cómo se lee (para determinar si el estudiante conoce el símbolo)
- Escribir un ejemplo utilizándolo (para analizar si el estudiante es capaz de construir una expresión sintácticamente correcta, generada por él mismo)

En la Figura 4.1 se muestra el formato en el que fue presentado el ítem en el protocolo utilizado.

❶- Completar:

Símbolo	¿Cómo se lee?	Muestre un ejemplo utilizándolo
$\in$		
$\notin$		
$\subset$		
$\forall$		
$\exists$		
$\wedge$		
$\vee$		

Figura 4.1. Enunciado del Ejercicio 1 de la versión piloto

Para cada ejercicio se elaboró una clave de puntuación para valorar la respuesta del estudiante. Los criterios considerados para puntuar cada una de las tareas requeridas en este ejercicio son los siguientes:

Lectura del símbolo:

1: si escribe correctamente

0: si escribe incorrectamente o no escribe nada

Escritura del ejemplo:

1: si el ejemplo es correcto

0.5: si utiliza algún literal (por ejemplo $x \in R$), pues se debe asumir que ese literal juega el rol correcto (ser un elemento, ser un conjunto, etc).

0: si el ejemplo no es correcto o no fue respondido el ítem.

4.2.3. EJERCICIO 2

Se proponen siete expresiones simples, destinadas a indagar sobre el conocimiento de los estudiantes con relación a la sintaxis. Las mismas involucran los símbolos de pertenencia, inclusión, conjunción y disyunción. De las siete expresiones presentadas, cinco son expresiones atómicas con símbolos de pertenencia o inclusión y las dos restantes son expresiones moleculares con un operador lógico de conjunción o de disyunción. No se incluyeron en este ejercicio expresiones cuantificadas por considerarlas de mayor complejidad, dado que esta versión piloto se diseñó bajo la premisa de que el nivel de complejidad de la expresión está vinculado a niveles en la evolución de la construcción de significado.

Este ejercicio requiere de dos tareas:

- Determinar si la expresión está o no correctamente escrita (para analizar si el estudiante puede distinguir la estructura sintáctica adecuada al símbolo utilizado)
- En caso de estar correctamente escrita, determinar su valor de verdad (para analizar si los estudiantes interpretan el contenido semántico de la expresión)

En la Figura 4.2 se presentan los ítems que conformaron este ejercicio y el formato tal como fue formulado en el protocolo utilizado.

❷- Coloque una cruz en la casilla correspondiente:

Expresión	**La escritura es incorrecta**	**La escritura es correcta y además resulta:**	
		Verdadera	**Falsa**
$3 \subset \mathbb{Z}$			
$\{1 , 2\} \subset \mathbb{N}$			
$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$			
$-2 \in \mathbb{N}$			
$[2, 5] \subset \mathbb{R}$			
$4 \in \mathbb{N} \wedge 4$ es impar			
$-1 \in \mathbb{N} \vee -1 \in \mathbb{Z}$			

Figura 4.2. Enunciado del Ejercicio 2 de la versión piloto

Para puntuar las respuestas a este ejercicio se consideraron los siguientes criterios:

1: Resuelve correctamente

0.5: Determina que está correctamente escrito pero establece mal el valor de verdad

0: Determina mal la pertinencia de la escritura o no responde

4.2.4. EJERCICIO 3

Se proponen tres expresiones coloquiales simples para ser convertidas a una expresión simbólica. Dado que se distinguió la complejidad de las expresiones de acuerdo a la cantidad de símbolos que contiene, en este ejercicio las expresiones sólo involucran el uso de los símbolos de pertenencia, de inclusión, de conjunción y de disyunción. Este ejercicio está destinado a indagar sobre habilidades relativas a la sintaxis pero, a diferencia del Ejercicio 1, a partir de una expresión dada.

En la Figura 4.3 se muestran los ítems de este ejercicio, tal como fueron presentados en el protocolo del instrumento.

❸- Escribir las siguientes expresiones en forma simbólica:

a) -3 es un número entero ....

b) 4 es positivo y -2 es negativo...............................

c) El conjunto de los números enteros está incluido en el conjunto de los números reales ....

Figura 4.3. Enunciado del Ejercicio 3 de la versión piloto

Los criterios para puntuar las respuestas a este ejercicio son:

1: Resuelve correctamente

0: Presenta errores en la sintaxis, o la expresión simbólica no se corresponde con la dada en lenguaje coloquial, o no responde.

4.2.5. EJERCICIO 4

En este ejercicio se presentan seis expresiones cuantificadas, tres en lenguaje coloquial y tres en notación simbólica. Este ejercicio propone dos tareas:

- Escribir la expresión en el otro lenguaje (para evaluar la habilidad de conversión entre los dos registros semióticos utilizados, en ambos sentidos. Esta tarea está asociada a la sintaxis)
- Determinar el valor de verdad de las expresiones dadas (para analizar si los estudiantes interpretan el contenido semántico de la expresión, particularmente de aquellas expresadas en lenguaje simbólico, dado que esta determinación sobre expresiones escritas en lenguaje coloquial no aporta información sobre la construcción de significado de los símbolos).

En la Figura 4.4 se presentan los incisos que constituyeron este ejercicio, tal como aparece en el protocolo utilizado.

❹- Escribir las siguientes expresiones en lenguaje coloquial o simbólico, según corresponda. Además indicar si son verdaderas o falsas.

EN LENGUAJE COLOQUIAL	EN LENGUAJE SIMBÓLICO	Es verdadera	Es falsa
Todo número entero es menor que su sucesor.			
Algunos números naturales son pares			
Ningún número entero es mayor que 2 y menor que 3.			
	Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a.b=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$		
	$\exists x \in \mathbb{Z} / x<0$		
	$\forall x \in \mathbb{N}$ $x=2.k \vee x=2.k+1$, $k \in \mathbb{N}$		

Figura 4.4. Enunciado del Ejercicio 4 de la versión piloto

La puntuación de las respuestas a este ejercicio fue realizada considerando los siguientes criterios:

- *Conversiones al lenguaje simbólico*:

  1: Convierte correctamente

  0: Convierte incorrectamente o no resuelve

  En estos ítems no se hallaron resoluciones que puedan considerarse como parcialmente correctas por lo que no se establecieron puntuaciones intermedias.

- *Conversiones al lenguaje coloquial*:

  1: Convierte correctamente

  0.75: Omite traducir algún símbolo (por ejemplo el conjunto de pertenencia) o realiza la conversión utilizando alguna variable y el resto de la expresión está en lenguaje coloquial, es decir que parte de la expresión está en el registro de partida (simbólico)

  0.5: Realiza una traducción símbolo a símbolo en lugar de utilizar una expresión global que indica la interpretación del contenido semántico

  0.25: Traduce algunos elementos de la expresión simbólica al registro coloquial y el resto queda en el mismo registro simbólico

  0: Convierte incorrectamente o no resuelve

- *Establecimiento del valor de verdad*:

  1: Convierte correctamente

  0: Convierte incorrectamente o no responde

4.2.6. ADMINISTRACIÓN DE LA VERSIÓN PILOTO

Esta versión del instrumento se administró a 41 estudiantes de primer año de las carreras de Ingeniería que cursaban la asignatura Álgebra A (primer curso de Álgebra). La administración fue realizada aproximadamente a los dos meses de iniciadas las clases, en la semana siguiente a la que se tomó el primer parcial de la asignatura.

El tiempo de resolución fue de 15 a 20 minutos.

4.3. FASE 2: ANÁLISIS DE LA VERSIÓN PILOTO

Los instrumentos de recolección de datos deben cumplir con dos requisitos, calificados como esenciales por Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio (1997), como son la confiabilidad y la validez. En esta sección se presentan los análisis realizados sobre la primera versión del instrumento para determinar los requisitos establecidos.

La *confiabilidad* de un instrumento de medición se refiere al grado en que su aplicación reiterada produce resultados similares. La *validez*, en términos generales, se refiere al grado en que un instrumento realmente mide lo que pretende medir. De esta última pueden obtenerse distintos tipos de evidencia: la relacionada con el contenido, la relacionada con el criterio y la relacionada con el constructo. La *validez de contenido* se refiere al grado en que el instrumento refleja un dominio específico de lo que se mide y su evaluación se realiza a través de jueces expertos. La *validez de criterio* establece una comparación con algún criterio externo; si el criterio se fija en el presente se habla de validez concurrente, si el criterio se fija en el futuro se la denomina validez predictiva y se la evalúa a través del Análisis correlacional. La *validez de constructo* se refiere al grado en que la medición contempla de forma adecuada el constructo teórico o rasgo abstracto que pretende medir y en qué nivel las hipótesis derivadas del mismo se confirman empíricamente mediante este procedimiento, su evaluación se realiza utilizando la técnica de análisis factorial. (Hernández Sampieri *et al.*, 1997)

Para analizar la confiabilidad de esta versión del instrumento, se calculó el coeficiente Alfa de Cronbach, dado que las variables correspondientes a la valoración de los distintos ítems son continuas. Los valores de salida de este coeficiente oscilan entre 0 y 1, donde 0 significa confiabilidad nula, es decir que la medición está contaminada de error, y 1 significa confiabilidad total, sin error. Cuanto más cercano a 1 sea el valor obtenido, más confiable es la medición realizada con el instrumento. En este caso, el cálculo se efectuó utilizando el software SPSS versión 15.0. El mismo arrojó un valor de 0.721, que puede considerarse como aceptable, de acuerdo con la escala que proponen Hernández Sampieri *et al.* (1997). La salida obtenida en la ejecución del programa se presenta en el Anexo 2.

El análisis de validez se restringió a la validez de constructo. Para esta versión piloto del instrumento, el análisis se realizó conjuntamente entre el director de esta tesis y los miembros del Grupo de Investigación de Enseñanza de la Matemática en carreras de Ingeniería (GIEMI), radicado en el Departamento de Matemática de la Facultad de

Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Estos jueces expertos realizaron la valoración de la idoneidad del instrumento en su carácter de expertos en el marco teórico utilizado, bajo el conocimiento de los objetivos de la tesis y condiciones de administración del instrumento. Se consideró pertinente el análisis de tres dimensiones de la idoneidad didáctica: la idoneidad epistémica, la idoneidad cognitiva y la idoneidad mediacional.

El EOS propone determinados indicadores para valorar los distintos componentes de cada dimensión (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2011). De acuerdo con la mayor o menor presencia de los mencionados indicadores es posible establecer una valoración de tipo cualitativo, donde cada una de las dimensiones puede ser considerada como alta, media o baja.

En las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3 se presenta, respectivamente, la valoración de estas tres dimensiones de la idoneidad, a través del grado de cumplimiento de algunos de los indicadores que corresponden a las dimensiones consideradas. Los indicadores están adaptados de los propuestos por Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006).

Tabla 4.1. Valoración de indicadores de la Idoneidad Epistémica.

COMPONENTES	DESCRIPTORES	Se cumple totalmente	Se cumple parcialmente	No se cumple
Situaciones-problemas	Selección de una muestra representativa y articulada de expresiones			x (1)
Lenguaje	Uso de diferentes modos de expresión (verbal, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos.	x		
	Nivel del lenguaje adecuado a quienes se dirige.		x (2)	
	Propuesta de situaciones de expresión e interpretación.	x		
Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen	x		
	Presentación de los enunciados, según los significados que se pretenden evaluar		x (3)	
Argumentos	Se promueven momentos de validación.			x (4)

(1): Se considera que no se cumple pues la muestra de ítems no es equilibrada para todos los símbolos estudiados. En el Ejercicio 2 no se presentan expresiones tanto correcta como incorrectamente escritas para todos los símbolos. Esto no permite obtener conclusiones al respecto.

(2): Se considera parcialmente logrado pues el enunciado del Ejercicio 2 podría conducir a un conflicto semiótico, en tanto que los estudiantes podrían interpretar que el vocablo "correcta" hace alusión a "verdadera". Este conflicto semiótico se evidenció en el análisis de los datos relevados, pues se observó que algunos estudiantes indicaran que las expresiones incorrectamente escritas son falsas. Estas observaciones llevaron a considerar que los enunciados de los Ejercicios 1 y 2 deben ser reformulados.

(3): Se considera parcialmente logrado pues se observa que la manera en que se expresa el enunciado del Ejercicio 1 la solicitud del ejemplo, da lugar a que se formulen expresiones que no sean proposiciones y que, por consiguiente, no permitan evaluar lo que se pretende. Por lo tanto se sugiere que de alguna forma se soliciten proposiciones y en lugar de ejemplos, para evitar otras respuestas que no dan información.

(4): No se observa la solicitud de justificaciones de las respuestas.

Todas estas observaciones conducen a calificar esta idoneidad como *baja*.

Tabla 4.2. Valoración de indicadores de la Idoneidad Cognitiva.

COMPONENTES	DESCRIPTORES	Se cumple totalmente	Se cumple parcialmente	No se cumple
Conocimientos previos (Componentes similares a la dimensión epistémica)	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien porque se han estudiado anteriormente o porque el profesor planifica su estudio).	x		
Evaluación de los Aprendizaje	Se incluyen diversas prácticas matemáticas asociadas al uso de símbolos en los dos registros considerados	x		

Se consideró esta dimensión de la idoneidad como *mediana-alta* ya que en la redacción de los ítems está contemplado que los estudiantes tuvieran los conocimientos previos necesarios para interpretar cada proposición. Las mismas están referidas a unidades temáticas que se imparten en la escuela media y en el curso de ingreso de las carreras. Se valoró como positiva la inclusión de tareas tanto de lectura como de escritura para evaluar los significados.

Tabla 4.3. Valoración de indicadores de la Idoneidad Mediacional.

COMPONENTES	DESCRIPTORES	Se cumple totalmente	Se cumple parcial-mente	No se cumple
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	Uso adecuado del espacio en el material impreso	x		
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la administración del instrumento para la toma de datos	x		
	El momento de administración es apropiado pues coincide con el horario de clases.	x		
	El aula es adecuada para la toma de datos	x		
Tiempo (De administración)	Adecuación de los significados evaluados al tiempo disponible	x		

Esta dimensión de la idoneidad se valoró como *mediana-alta*. El hecho de que los estudiantes pudieran resolver el cuestionario en un tiempo entre 15 y 20 minutos muestra un apropiado uso del recurso tiempo, ya que no genera el cansancio o hastío de los estudiantes. Esto reafirma como positiva la consideración que se tuvo en el diseño, atendiendo especialmente al número total de ítems, en pos de asegurar una fiabilidad satisfactoria, evitando respuestas en blanco provenientes del desgano al resolver y no como producto del desconocimiento del estudiante en relación a la tarea planteada. También fue considerada adecuada la forma de presentación de los ítems en una única hoja, facilitando una clara legibilidad y distribución, con espacio adecuado para las respuestas y procurando evitar en los alumnos la sensación de que la tarea de resolución fuera densa y extensa. Otro aspecto considerado como positivo es que los ítems de menor dificultad están ubicados al principio, para promover la agilidad en la resolución y prevenir el cansancio.

Los jueces sugirieron, en principio, depurar la definición de las prácticas matemáticas que se pretende evaluar, determinando las funciones semióticas ligadas a estas prácticas. Propusieron que, de acuerdo a lo obtenido en el paso anterior, se efectúe el rediseño del instrumento, para superar los aspectos que se observaron como deficientes o inadecuados.

4.4. FASE 3: REDEFINICIÓN DE HERRAMIENTAS METODOLÓGICAS DE ANÁLISIS

En esta sección se describen las prácticas matemáticas que participan en la construcción del significado de los símbolos matemáticos, en particular los que son objeto de estudio de esta investigación. Esta caracterización de las prácticas dio lugar a la definición de las funciones semióticas que deben ser establecidas en el proceso de construcción de significado. También se presenta una descripción minuciosa de cada una de las funciones semióticas definidas, con las particularidades que poseen según cada uno de los seis símbolos en estudio.

4.4.1. PRÁCTICAS MATEMÁTICAS Y FUNCIONES SEMIÓTICAS

A partir de los análisis anteriores, de las producciones de los estudiantes y de la concepción de significado que contempla el EOS, se reconsideraron las prácticas involucradas en la construcción del significado de un símbolo. De esta manera, se diferenciaron las prácticas que se describen a continuación:

- *Representar en forma escrita u oral el vocablo asociado a un símbolo dado, o, recíprocamente, representar en forma escrita el símbolo asociado a un vocablo dado.*

Esta práctica está ligada a la situación básica de conocer el símbolo. De manera trivial, constituye el punto inicial en el proceso de construcción de significado, pues si no se conoce su grafismo ni la asociación con el vocablo del lenguaje coloquial que lo identifica no sería posible efectuar ninguna otra práctica que implique la utilización del símbolo en cuestión.

- *Escribir una proposición de manera simbólica, respetando las reglas de sintaxis asociadas a los símbolos utilizados.*
- *Decidir si una expresión simbólica dada está correctamente escrita de acuerdo con las reglas de sintaxis de los símbolos empleados.*

Estas prácticas implican el reconocimiento de la estructura formal de la sintaxis asociada a un determinado símbolo. Requieren identificar la secuencia correcta en la formulación de una expresión en la que participa el símbolo, como así también el rol que ejerce cada uno de los restantes símbolos. Además, estas prácticas están vinculadas con la actividad cognitiva definida por Duval (2004) como “formación de representaciones” puesto que, en los términos de este autor, se debe realizar o constatar la selección de símbolos apropiados dentro del registro simbólico-algebraico y combinarlos de acuerdo con las reglas de conformidad de este registro.

- *Determinar el valor de verdad de una proposición dada de manera simbólica.*
- *Efectuar conversiones entre representaciones realizadas en el registro simbólico-algebraico y el registro coloquial.*

Estas dos últimas prácticas están vinculadas con el aspecto semántico, es decir, a comprender el contenido matemático representado por la expresión simbólica. Su participación es fundamental en tareas de lectura, pues no es suficiente la simple decodificación de los símbolos para interpretar el contenido semántico de una expresión.

Tal como se plantea en el EOS, las prácticas matemáticas, como componentes del significado, involucran asociaciones de objetos primarios. De esta manera, la práctica en la que se observa si un estudiante conoce el símbolo implica la asociación del grafismo del símbolo con el vocablo con el cual se lo identifica en la lengua natural o lenguaje coloquial. Las prácticas ligadas a la estructura formal de una expresión simbólica que emplea determinado símbolo, requiere la asociación del símbolo a la forma sintácticamente correcta de su uso. Las prácticas vinculadas con la comprensión del contenido semántico de una expresión simbólica implican, en un caso, poder asociar la proposición simbólica con su valor de verdad, y en el otro, asociar la expresión simbólica con una expresión coloquial equivalente.

Estas asociaciones pueden representarse a través de funciones semióticas, que conjugan los distintos objetos primarios involucrados en las prácticas matemáticas descritas.

Teniendo en cuenta los objetos involucrados en las prácticas matemáticas ligadas al proceso de construcción de significado de un símbolo, se definieron tres funciones semióticas:

F1: relaciona el símbolo con el vocablo de su denominación.

F2: relaciona el vocablo/el símbolo con la estructura sintáctica de la expresión que lo contiene

F3: relaciona la proposición en la que está presente el símbolo, con su valor de verdad, el cual depende también de los significados de los restantes símbolos involucrados en la expresión.

Las funciones semióticas definidas, de acuerdo a sus consecuentes, pueden clasificarse de la siguiente manera: F1 como *nominal*, F2 como *sintáctica* y F3 como *semántica.*

En la Figura 4.5 se presentan de forma esquemática las tres funciones semióticas descritas.

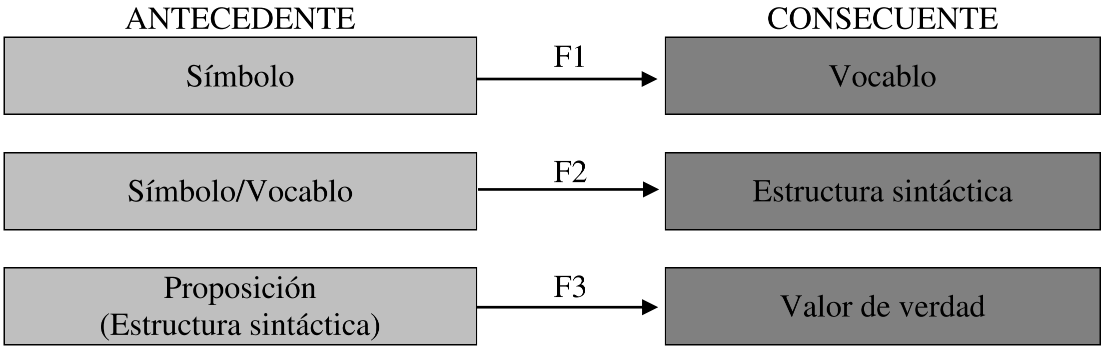


Figura 4.5. Funciones semióticas ligadas a la construcción de significado de un símbolo

A modo de ejemplo, se presentan en la Figura 4.6 estas funciones semióticas para el caso particular del símbolo de pertenencia, en el que se detallan el antecedente y el consecuente para cada una de ellas.

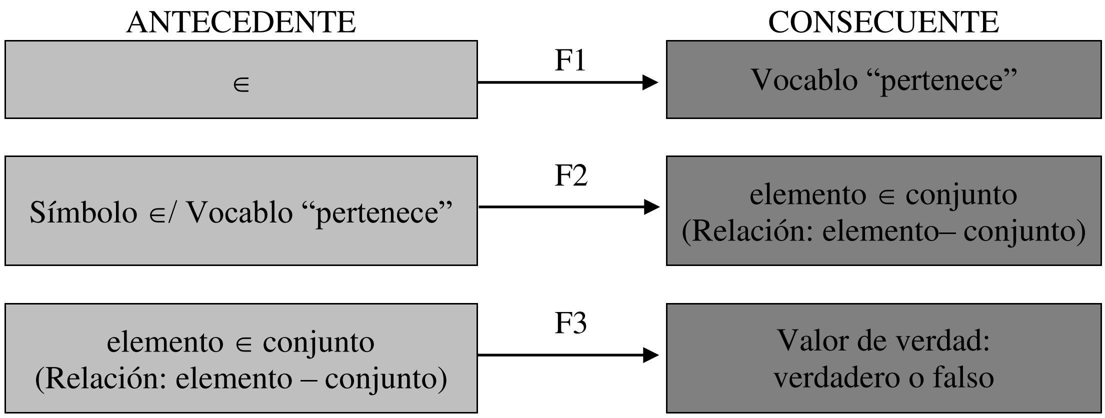


Figura 4.6. Funciones semióticas para el símbolo de pertenencia

En las subsecciones que siguen se describen las características de cada una de las funciones semióticas definidas y sus particularidades en relación a cada uno de los símbolos en estudio.

4.4.2. LA FUNCIÓN SEMIÓTICA F1

Como ya se describió, la función semiótica F1 relaciona el símbolo con el vocablo de su denominación en el lenguaje natural o coloquial. Su definición la asemeja a la del primer proceso cognitivo considerado por Hiebert (1988) en su teoría para explicar el desarrollo de la competencia del manejo de los símbolos matemáticos escritos: *Conectar o* *relacionar los símbolos individuales con sus referentes*. Si bien este autor no emplea funciones semióticas en su teoría, en la descripción de este proceso cognitivo hace referencia a la asociación que se establece mediante la función F1 definida en esta investigación:

> Los significados para los símbolos individuales se usan como conexiones y son establecidos entre las marcas escitas en papel y las cantidades o acciones que ellos Re-presentan (Van Engen, 1949). El proceso involucra la construcción de puentes entre símbolos y referentes. (Hiebert, 1988, p. 4)

De las tres funciones semióticas definidas, esta es la de menor complejidad y por ello la más elemental. Sin embargo, se percibe como necesaria su construcción por parte de un sujeto para que puedan construirse las restantes funciones semióticas ligadas al significado de un símbolo matemático.

Además, esta función es biunívoca, es decir que se puede interpretar en los dos sentidos de asociación de los elementos que vincula. En una tarea de lectura de una expresión simbólica vincula al símbolo con el vocablo mientras que, en una tarea de escritura, la vinculación está dada en el sentido inverso.

Debe puntualizarse que, en este caso, no se distinguen particularidades en relación a cada símbolo, razón por la cual el establecimiento de esta función semiótica no está sujeto a características propias del símbolo en cuestión.

4.4.3. LA FUNCIÓN SEMIÓTICA F2

La función semiótica F2 se establece entre la denominación del símbolo o el símbolo y la estructura determinada por la sintaxis de la representación. Es importantes destacar que esa sintaxis involucra tanto el orden de los elementos como los roles jugados por cada uno de ellos. Los roles están vinculados al universo de objetos matemáticos involucrados en el campo de problemas en el que se realizan las prácticas matemáticas. La sintaxis está ligada a las reglas de formación de representaciones en el registro simbólico, que permiten obtener expresiones *bien formadas*. A su vez, las reglas están condicionadas por el universo de objetos involucrados en el contexto del problema, como se detallará más adelante.

La formación de representaciones semióticas es la primera de las actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis descriptas por Duval (20014). Si esta formación es realizada en un registro semiótico ya construido y utilizado por otros, debe respetar las reglas de conformidad que se definen en el registro y que están acordadas por la comunidad que lo utiliza. Tal es el caso del registro simbólico-algebraico, cuyas reglas de conformidad provienen tanto de la Lógica Formal como de convenciones propias del uso en el ámbito de la Matemática. Las reglas de conformidad se refieren a: la determinación de las unidades elementales a utilizar (en este caso símbolos), las combinaciones admisibles entre las unidades elementales y las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa (Duval, 2004).

Cada uno de los símbolos en estudio requiere de una estructura sintáctica particular para formular una expresión que lo contenga. La manifestación del reconocimiento de esta estructura, tanto en expresiones ya formuladas como en las que construye el propio estudiante, es la que se evalúa a través de la función semiótica F2.

A continuación se describe la estructura sintáctica que corresponde a cada uno de los símbolos en estudio.

- <u>*Pertenencia e inclusión*</u>

La pertenencia y la inclusión son operadores relacionales, por lo que cada uno debe ser precedido y sucedido por un operando relacional. El operando relacional de la izquierda, es decir el que precede, será un elemento o un conjunto, según si el símbolo es la pertenencia o la inclusión, respectivamente. El operando relacional de la izquierda debe ser un conjunto en ambos casos.

En la Figura 4.7 se esquematiza la estructura que debe tener una expresión en la que participe el símbolo de pertenencia o el de inclusión.

Operando Relacional de la izquierda	*Relación representada por el símbolo*	Operando Relacional de la derecha

Figura 4.7. Estructura sintáctica para los símbolos de pertenencia y de inclusión

En el caso de la pertenencia, las reglas de sintaxis exigen que, para que una expresión esté bien formada, el operando de la izquierda debe jugar el rol de *elemento* mientras que el de la derecha debe ser un *conjunto*. Por ejemplo, la expresión '$-2 \in$ N' es una expresión bien formada (aunque sea falsa), porque el operando de la izquierda está en la categoría *número* y el de la derecha es un *conjunto* de números; en cambio la expresión ‘{-2}∈N’ no está bien formada pues el operando de la izquierda está en la categoría ‘conjunto’ y el de la derecha no es un conjunto de conjuntos.

Es necesario hacer una aclaración en relación al símbolo de pertenencia. En el campo de problemas relativos a conjuntos numéricos, abordados en un curso de álgebra inicial, una expresión del tipo ‘{2}∈ N’ está mal formulada, como ya se fundamentó en el párrafo anterior. En cambio, la expresión ‘{2} ∈ {{1},{4}}’ está bien formulada en un universo que contemple como objetos matemáticos a conjuntos de conjuntos. Esto conduce al hecho de que el objeto *{2}* puede ser considerado como elemento. De manera general, los conjuntos pueden jugar el rol elementos en ciertos contextos. Esa posibilidad implica ampliar el significado de ‘elemento’ y de ‘conjunto’. Sin embargo, la población de individuos sobre la que se define esta investigación no tiene construida esa ampliación, pues en general nunca se han enfrentado a prácticas matemáticas en las que intervengan conjuntos de conjuntos. Por esa razón, la situación no es contemplada en el diseño del instrumento.

Análogamente, una expresión en la que esté presente el símbolo de inclusión estará bien formada si ambos operandos juegan el rol de *conjunto* en el universo de referencia trabajado.

En este caso, cabe hacer la misma observación que en el caso de la pertenencia. Si se trabajara con conjuntos de conjuntos, la expresión ‘{1,2}⊂ {{1}, {2},{3}}’ está mal formada pues el operando de la izquierda es un conjunto de números y el de la derecha es un conjunto de conjuntos.

- *Conjunción y disyunción*

Los símbolos de conjunción y disyunción representan operaciones lógicas, por lo que cada uno de ellos debe ser precedido y sucedido por un operando lógico.

Para una expresión en la que participe el símbolo de conjunción o el de disyunción, se distingue una estructura como la que se esquematiza en la Figura 4.8.

Operando de la izquierda	*Operación lógica representada por el símbolo*	Operando de la derecha

Figura 4.8. Estructura sintáctica para los símbolos de conjunción y de disyunción

La condición para que la expresión esté bien formada es que ambos operandos sean proposiciones, es decir expresiones para las cuales tenga sentido afirmar que son verdaderas o falsas. Por consiguiente, el establecimiento de esta función semiótica requiere, previamente, el reconocimiento de proposiciones.

Cabe una observación para el caso de la conjunción. A diferencia de las reglas que establece la Lógica Formal, en Matemática son de uso habitual representaciones en las que se hace un "uso tácito" de este símbolo. Por ejemplo en Matemática, la expresión formulada como '$a, b \in R$' se interpreta por convención como: '$(a\in R) \wedge (b\in R)$'. Estas expresiones de uso frecuente en el ámbito de la Matemática también fueron consideradas como correctas en esta investigación.

- *Cuantificadores*

Para expresiones cuantificadas, la estructura estrictamente bien formada desde la Lógica Formal, debe contener al cuantificador seguido de la variable cuantificada y luego una función proposicional (o forma proposicional) referida a la variable cuantificada, como se esquematiza en la Figura 4.9. Se entiende por función proposicional en una variable x a cualquier expresión que contiene a la variable x y que, al sustituir x por algún objeto del universo de referencia (dominio de la variable), la expresión se convierte en una proposición (Garrido, 1979).

Cuantificador	Variable cuantificada	Función proposicional

Figura 4.9. Estructura sintáctica para los cuantificadores

Resulta necesario puntualizar algunos aspectos relativos a ciertas convenciones que son de uso habitual en Matemática, y que por lo tanto son admitidas como correctas, aunque difieren de las reglas estipuladas por la Lógica Formal.

Por ejemplo, una expresión que, desde la estructura estrictamente bien formada de la Lógica se representaría '$(\exists x)\ (x\in Q \wedge x^2 < 1)$', en Matemática se admite como correctamente escrita de esta manera: '$\exists x \in Q / x^2<1$'.

Para el cuantificador universal, también se permite la convención del 'uso tácito'. Expresiones como: '*Si* $x, y \in R$ *entonces* $|x + y| \leq |x| + |y|$', son de uso habitual en Matemática, como una forma simplificada de la expresión que estaría bien formada desde la Lógica Formal: '$(\forall x)\,(\forall y)\,(x \in R \wedge y \in R \Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y|)$'. Este uso tácito es reconocido como habitual por Klimovsky y Boido (2005), quienes expresan que: "En general, muy a menudo, los cuantificadores universales iniciales pueden sobreentenderse, de modo que xRa se identificará con $(\forall x)$ xRa" (p. 139).

En esta investigación, también se consideraron como correctamente escritas las expresiones de uso habitual en Matemática. Por consiguiente, se reconoció como construida la función semiótica F2, tanto para las expresiones que presentan la forma que impone la Lógica Formal como las de uso habitual en Matemática.

4.4.4. LA FUNCIÓN SEMIÓTICA F3

Esta función semiótica vincula una expresión sintácticamente correcta con su valor de verdad. La manifestación de esta función semiótica permite reconocer si el estudiante le da sentido al contenido semántico que está implícito en la expresión simbólica.

- *Pertenencia e inclusión*

En el caso de la pertenencia, una expresión esté bien formada será verdadera si el operando de la derecha es un conjunto de objetos de una determinada categoría y el de la izquierda es un objeto que forma parte de esta categoría. Para el establecimiento de esta función semiótica se requiere de la caracterización del conjunto y del reconocimiento de esa característica en el objeto que juega el rol de elemento.

Para que una expresión que utilice la inclusión sea verdadera, *todos* los elementos que pertenecen al primer conjunto deben pertenecer al segundo.

Se debe realizar una categorización de los elementos de ambos conjuntos y luego la generalización sobre la pertenencia de todos los elementos del primer conjunto en el segundo.

- *Conjunción y disyunción*

Para establecer el valor de verdad de una conjunción o una disyunción, se debe establecer previamente el valor de verdad de cada una de las proposiciones que constituyen los dos operandos lógicos. Luego es necesario conocer la asignación de verdad resultante de estas operaciones lógicas. En el caso de la conjunción, *ambas* proposiciones deben ser verdaderas para que el resultado sea verdadero, mientras que para la disyunción es suficiente que *alguna* de las proposiciones sea verdadera para que resulte verdadera.

- *Cuantificadores*

  El establecimiento del valor de verdad de una expresión que contiene un cuantificador universal requiere de una generalización sobre todos los elementos del conjunto de referencia, para determinar que todos ellos satisfacen la función proposicional definida en la expresión.

  En el caso del cuantificador existencial, para determinar el valor de verdad de una expresión que lo contiene, es suficiente con determinar la verdad de la función proposicional para al menos un valor de la variable cuantificada, dentro del conjunto de referencia.

4.5. FASE 4: REDISEÑO DEL INSTRUMENTO PARA LA SEGUNDA VERSIÓN

En las siguientes subsecciones se presentan los criterios considerados en el diseño y construcción de la segunda versión del instrumento, la descripción de los ejercicios propuestos, la justificación de la incorporación o modificación de cada ítem respecto de la versión anterior, las funciones semióticas que se pretende evaluar con cada uno de ellos y los criterios de valoración con los que fueron puntuadas las respuestas de los estudiantes a cada uno de los ejercicios.

4.5.1. CRITERIOS GENERALES

Los análisis realizados y el planteo de la nueva herramienta metodológica constituida por las funciones semióticas condujeron al ajuste y rediseño del instrumento.

Los ejercicios planteados en la versión piloto fueron analizados bajo la perspectiva de las funciones semióticas definidas, y se observó que, si bien presentaban falencias, podían reformularse en términos de estas funciones, de modo que las resoluciones pudieran ser una manifestación del establecimiento, o no, de cada función semiótica.

La idea regente fue procurar una distribución equilibrada de los ítems, de acuerdo a las funciones semióticas evaluadas. Se consideró que la cantidad de ítems destinados a evaluar la función asociada a la sintaxis fuera la misma, para cada uno de los símbolos. También se contempló presentar un ítem correctamente escrito y otro que no lo estaba, para cada uno de los símbolos.

Para contribuir a la mejora de la idoneidad epistémica se amplió la representatividad de los ítems, adicionando algunas expresiones que contienen un cuantificador universal tácito; asimismo se incluyeron expresiones similares escritas en dos formas diferentes: unas respetando las reglas de formación de fórmulas de la Lógica Formal y otras representadas mediante convenciones de uso habitual en Matemática. No obstante, se siguieron incluyendo expresiones atómicas, pues esto habilita a obtener información de manera segmentada, ya que las expresiones más complejas no permiten, en ciertos casos, distinguir el origen de los errores.

En las siguientes subsecciones se presentan las modificaciones efectuadas en cada ejercicio para construir la nueva versión del instrumento. En cada caso, se detallan los criterios de valoración utilizados para puntuar cada ítem.

4.5.2. EJERCICIO 1

En este ejercicio se mantuvo la estructura de dos columnas en las que se pide la forma en que se nombra el símbolo en el lenguaje coloquial y se solicita un ejemplo en el que se utilice el símbolo. De la lista de símbolos se eliminó la negación del símbolo de pertenencia pues, en las respuestas obtenidas a partir de la versión 2, se observó que no agregaba información adicional.

La escritura de la expresión coloquial correspondiente al símbolo permite evaluar la manifestación de la función semiótica F1. La formulación del ejemplo de uso del símbolo está destinada a evaluar la manifestación de la función semiótica F2, en una tarea de escritura.

Con la intención de evitar que los estudiantes escribieran expresiones tales como '$x \in R$' o como '$p \wedge q$', en las que el uso de literales no permite conocer con certeza a qué objetos hace referencia el estudiante, se adicionó en el enunciado que la condición de que el ejemplo dado fuera verdadero, de modo que los ejemplos que fueran proposiciones. Esto permite evaluar los roles de los objetos involucrados en la función semiótica correspondiente a la sintaxis (F2).

Esta última condición en relación al valor de verdad, conduce a que en este ejercicio también se evalúe la función semiótica relativa a la asignación del valor de verdad (F3), ligada al aspecto semántico de la expresión.

En la Figura 4.10 se presenta el enunciado del Ejercicio 1 tal como aparece en el protocolo.

❶ Completar:

Símbolo	¿Cómo se lee?	Escriba una expresión utilizando el símbolo de la que se pueda afirmar que es VERDADERA
$\in$		
$\subset$		
$\forall$		
$\exists$		
$\wedge$		
$\vee$		

Figura 4.10. Enunciado del Ejercicio 1 de la segunda versión del instrumento

La puntuación efectuada a modo de valoración de cada respuesta dada por los estudiantes se realizó utilizando determinados criterios, que se describen a continuación.

La expresión dada como respuesta a la forma en que se lee el símbolo fue calificada de manera dicotómica, como bien o mal, pues no admite resoluciones intermedias. En valores numéricos, la calificación fue codificada como 1 ó 0, respectivamente.

Por su parte, la formulación de los ejemplos requeridos fue puntuada en distintas etapas. En la primera de ellas se efectuó una valoración cualitativa. Esto permitió distinguir y caracterizar los errores más frecuentes.

A partir de esta primera valoración, y con los errores ya categorizados, se establecieron claves numéricas para una puntuación cuantitativa. En la primera puntuación numérica efectuada se utilizó una variable continua, que toma valores entre 0 y 1. Sin embargo este tipo de variable no resultó apropiada para los análisis estadísticos que posteriormente se decidió realizar. Esto se debió a que, en la valoración de las respuestas de los distintos ejercicios del instrumento, algunas de las variables utilizadas requerían ser dicotómicas, y la diversidad en el tipo de variables invalidaba los supuestos de los estadísticos calculados, como por ejemplo el coeficiente de confiabilidad. Por lo tanto, se tomó la decisión de unificar el tipo de variables utilizadas y se recalificó este ejercicio a través de una variable dicotómica, redefiniendo los criterios.

Además de la valoración de la resolución general de cada ítem, se efectuó un análisis semiótico. Para ello, se realizó una evaluación de la manifestación de las funciones semióticas involucradas en cada respuesta. Esta manifestación puede considerarse como una operativización de construcción de cada función semiótica.

En la primera columna de la Tabla 4.4 se presentan los tipos de errores identificados en las resoluciones de este Ejercicio. En las columnas siguientes se presenta, respectivamente, la valoración otorgada en la primera etapa utilizando una variable continua, la valoración utilizando una variable dicotómica, y la consideración en relación al establecimiento, o no, de cada una de las dos funciones semióticas que se evalúan en esta parte Ejercicio (F2 y F3), identificadas con 1 ó 0, respectivamente.

Tabla 4.4. Criterios de valoración para el Ejercicio 1

Tipo de error	Calificación con **variable continua**	Calificación con **variable dicotómica**	En términos de **funciones semióticas**	
			F2	F3
1- Ejemplos sin valor de verdad	0.5	0	1	0
2- Ejemplos que tienen valor de verdad *Falso*	0.5	0	1	0
3- Uso coloquial de la conjunción o de la disyunción	0	0	0	0
4- Expresiones del tipo $p \wedge q$ ó $p \vee q$, sin referencia de las supuestas proposiciones p y q	0	0	0	0
5- Para los cuantificadores, ausencia del conjunto de pertenencia de la variable cuantificada	0.5	0	1	0
6- Para los cuantificadores, incorrecto la función proposicional	0	0	0	0
7- Uso coloquial del cuantificador existencial	0	0	0	0

Cabe hacer algunas aclaraciones en relación a los criterios establecidos, describiendo los casos que entran en cada categoría como así también las razones por las cuales se decidió la puntuación otorgada.

1- Ejemplos sin valor de verdad: En esta categoría entran los casos como '$x \in R$' o del tipo '$p \wedge q$', donde se utiliza algún literal y, por lo tanto, no es posible indicar su valor de verdad. Utilizando una variable continua, se calificó como parcialmente correcto (0.5), sin embargo se calificó con 0 utilizando la variable dicotómica, por no cumplir totalmente con lo que el enunciado solicita, que es un ejemplo con un valor de verdad determinado. En términos de funciones semióticas, se consideró que la función F2 está establecida, pues la sintaxis es correcta, y que la función F3 no lo está, pues no se puede establecer el valor de verdad.

2- *Ejemplos que tienen valor de verdad Falso*: En este caso, los ejemplos tienen valor de verdad pero no es el solicitado. Siguiendo un criterio similar al anterior, se calificó como parcialmente correcto (0.5) utilizando una variable continua, pero con 0 utilizando la variable dicotómica, por no cumplir totalmente con lo que el enunciado solicita, que es un ejemplo *verdadero*. En términos de funciones semióticas, se consideró que la función F2 está establecida, pues la sintaxis es correcta, y que la función F3 no lo está, pues el valor de verdad no se corresponde con lo que se requiere en el enunciado.

3- *Uso coloquial de la conjunción o de la disyunción*: Corresponden a esta categoría ejemplos tales como '$½ \in R \wedge Q$' ó '$2 \wedge 3$ *son primos*'. Es decir que estos estudiantes hacen una simple codificación de los vocablos coloquiales 'y' y 'o'. La calificación es 0 con ambos tipos de variable numérica, y se consideró que no está establecida ninguna de las funciones semióticas evaluadas.

4- *Expresiones del tipo '$p \wedge q$' ó '$p \vee q$', sin referencia de las supuestas proposiciones p y q*: En estos ejemplos se debe asumir que p y q aluden a alguna proposición, pero sin certeza de ello. Por lo tanto fueron calificados con 0 en las variables numéricas y se consideró que no está establecida ninguna de las funciones semióticas evaluadas.

5- *Para los cuantificadores, ausencia del conjunto de pertenencia de la variable cuantificada*: Estos ejemplos presentan expresiones del tipo: '$\exists x / 2x+4=0$'. Utilizando la variable continua fueron calificados como parcialmente correctos (0.5), porque parte de la sintaxis es correcta. Sin embargo, se calificó con 0 en la variable dicotómica, pues la ausencia del conjunto de pertenencia para la variable cuantificada no permite establecer el valor de verdad, con lo cual el ejercicio no está completamente correcto. Con el mismo criterio, se consideró que la función semiótica F2 está establecida, pero no la función F3.

6- *Para los cuantificadores, incorrecta la función proposicional*: El hecho de estar incorrectamente formulada la función proposicional hace que la expresión no sea ni siquiera evaluable. Por lo tanto se calificó con 0 en ambas variables numéricas y se consideró que no está establecida ninguna de las dos funciones semióticas evaluadas.

7- *Uso coloquial del cuantificador existencial*: Los ejemplos que entran en esta categoría son aquellos en los que se utiliza el cuantificador existencial como una simple traducción de la palabra 'existe', como por ejemplo: '$\exists \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2}$'. En este caso, se calificó con 0 en ambas variables numéricas y se consideró que no está establecida ninguna de las dos funciones semióticas evaluadas.

4.5.3. EJERCICIO 2

Para el diseño de este ejercicio se tomó como base la estructura del Ejercicio 2 de la versión piloto, a la que se le hicieron diversas modificaciones, ligadas tanto a aspectos comunicacionales como a la representatividad de los ítems.

La tarea que se solicita realizar en este ejercicio es determinar si cada una de las expresiones presentadas en una lista está, o no, correctamente formulada.

En el diseño de este ejercicio también se consideró la observación que realizan Kieran y Filloy (1989, p. 230), citando a Booth, en relación a que algunos estudiantes pueden utilizar ciertas notaciones y sin embargo no distinguir entre expresiones correctas y otras que no lo son:

> Booth (1983) señaló también que los estudiantes que pueden responder correctamente a ítems que requieren el uso de una cierta notación o unas ciertas convenciones y ser incapaces sin embargo de discriminar entre representaciones correctas e incorrectas. Esto sugiere, según Booth, que la comprensión de las notaciones puede avanzar por etapas.

En el análisis del enunciado del Ejercicio 2 de la versión piloto se detectó un conflicto semiótico en la interpretación del enunciado, que llevó a algunos estudiantes a confundir "escritura incorrecta" con "expresión falsa". Para procurar resolver el conflicto, se reformuló la redacción del mismo aludiendo a "expresiones bien escritas" y "expresiones mal escritas" – en lugar de expresiones correctas e incorrectas – y se eliminó la solicitud de la determinación del valor de verdad. En su lugar, se solicita la reescritura de las expresiones que se considere están mal escritas, lo cual permite conocer la razón por la cual el estudiante categorizó a la expresión como incorrectamente escrita. El haber resignado la información proveniente de evaluar el valor de verdad en este ejercicio está compensado con el agregado que se hizo en el Ejercicio 1, al solicitar que el ejemplo de uso de cada símbolo sea verdadero.

Para asegurar la evaluación de todos los símbolos en estudio, se incluyeron tanto un ítem correctamente escrito como uno que no lo está, utilizando cada uno de los símbolos en estudio. Se tuvo la precaución de que esta situación no siguiera un orden, es decir, que los ítems correctamente escritos y los que no lo están aparecen sin guardar ningún tipo de correspondencia. El ítem que, en cada caso, está correctamente formulado no aporta demasiada información sobre el razonamiento que realizó el estudiante para responder, como sí lo hacen aquellos que no respetan la sintaxis correspondiente pues en este último caso el estudiante debe reescribir la expresión. Sin embargo, la presencia de los correctamente formulados es necesaria para dar sentido a los que son incorrectos, pues de lo contrario se le estaría anticipando al estudiante que en todos los casos se debe hallar un error a corregir.

Este ejercicio evalúa la función semiótica de sintaxis (F2), tanto en una tarea de lectura (necesaria para la decisión de responder en relación a la corrección de cada expresión dada) como en una tarea de escritura (al momento de reescribir aquellas expresiones que el alumno considere como incorrectamente escrita).

En la Figura 4.11 se muestra la versión final del Ejercicio 2 de la segunda versión del instrumento, tal como aparece en el protocolo utilizado.

❷ Determinar si las siguientes expresiones están BIEN ESCRITAS. En caso de no estarlo re-escribirlas en forma correcta.

Expresión	Si la expresión está BIEN ESCRITA señale con una x en esta columna	Si la expresión está MAL ESCRITA, re-escribirla en forma correcta en esta columna
$-2 \in \mathbb{Z}$		
$3 \subset \mathbb{Z}$		
$\{1 ; 2\} \subset \mathbb{N}$		
$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$		
$[2 ; 5] \subset \mathbb{R}$		
$4 \in \mathbb{N} \wedge -3 < 0$		
$-1 \in \mathbb{N} \vee -1 \in \mathbb{Z}$		
$-5 \wedge 4 \in \mathbb{R}$		
$4 \in \mathbb{N} \vee \mathbb{Z}$		
$\forall \mathbb{N} \quad \mathbb{N} > 0$		
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$		
$\exists x \in \mathbb{R} \ / \ y + 2 = 5$		
$\exists x \in \mathbb{Z} / x < 0$		

Figura 4.11. Enunciado del Ejercicio 2 de la segunda versión del instrumento

A continuación se presentan los ítems que conforman el Ejercicio 2 de la nueva versión del instrumento, con la fundamentación de su presencia en esta versión:

$-2 \in \mathbb{Z}$	En la versión piloto, este ítem estaba formulado como '$-2 \in N$'. Se modificó por '$–2 \in Z$' pues la sintaxis evaluada es la misma pero al ser verdadero evita el conflicto semiótico entre "incorrecto" y "falso". Corresponde a una expresión 'bien escrita' de la relación entre elemento y conjunto.
$3 \subset \mathbb{Z}$	Se mantuvo como en la versión piloto, pues permite evaluar si al estudiante le resulta indistinto el uso de la pertenencia o el de la inclusión, el cual es un error observado con frecuencia. Este ítem corresponde a una expresión 'mal escrita' de la relación entre elemento y conjunto.
$\{1, 2\} \subset \mathbb{N}$	Se mantuvo como en la versión piloto, pues permite evaluar si el estudiante reconoce el estatus de conjunto que otorgan las llaves. Corresponde a una expresión 'bien escrita' de la relación entre conjuntos.
$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$	Se mantuvo como en la versión piloto, pues permite evaluar si al estudiante le resulta indistinto el uso de la pertenencia o el de la inclusión. Este ítem corresponde a una expresión 'mal escrita' de la relación entre conjuntos.
$[2, 5] \subset \mathbb{R}$	Se mantuvo como en la versión piloto, ya que permite evaluar si el estudiante reconoce a un intervalo como un conjunto. Corresponde a una expresión 'bien escrita' de la relación entre conjuntos.
$4 \in \mathbb{N} \wedge -3<0$	El origen de este ítem fue la expresión '$4 \in N \wedge$ 4 es impar' que aparecía en la versión piloto. Fue modificado por dos razones, en relación a la proposición "4 es impar". Por un lado, la expresión coloquial generaba en algunos alumnos la idea de que estaba mal por no estar expresada en lenguaje simbólico, y por otra parte, la falsedad de esta proposición, y en consecuencia la de la conjunción, ocasionaba el conflicto semiótico entre "incorrecto" y "falso". Corresponde a una expresión 'bien escrita' de la conjunción.
$-1 \in \mathbb{N} \vee -1 \in \mathbb{Z}$	Se mantuvo como en la versión piloto, pues permite evaluar si el estudiante reconoce a los operandos como proposiciones (sean verdaderas o no) y por ende, reconocer a la expresión como correctamente escrita. Corresponde a una expresión 'bien escrita' de la conjunción.

$-5 \wedge 4 \in \mathbb{R}$	Incorporado en la segunda versión. Corresponde a una expresión 'mal escrita' en el uso de la conjunción, pues uno de los operandos no es una proposición. Es un error frecuentemente observado en el que los estudiantes utilizan la conjunción como una simple traducción de la conjunción "y" en el lenguaje coloquial.
$4 \in \mathbb{N} \vee \mathbb{Z}$	Incorporado en la segunda versión. Corresponde a una expresión 'mal escrita' en el uso de la conjunción, pues uno de los operandos no es una proposición.
$\forall \mathbb{N}\ \mathbb{N} > 0$	Incorporado en la segunda versión. Corresponde a una expresión en la que interviene el cuantificador universal y que está incorrectamente formulada, pues no contiene una variable cuantificada ni un esquema proposicional que la involucre. Esta expresión fue tomada de un error frecuente observado en un parcial de la asignatura Álgebra.
$\forall \in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0$	Incorporado en la segunda versión. Corresponde a una expresión 'bien escrita' utilizando el cuantificador universal.
$\exists\ x \in \mathbb{R}\ /\ y+2 = 5$	Incorporado en la segunda versión. Corresponde a una expresión 'mal escrita' en el uso del cuantificador existencial, pues la función proposicional no contiene a la variable cuantificada.
$\exists\ x \in \mathbb{Z}\ /\ x < 0$	Incorporado en la segunda versión. Corresponde a una expresión 'bien escrita' utilizando el cuantificador existencial.

La puntuación efectuada a modo de valoración de cada respuesta dada por los estudiantes se realizó utilizando los criterios que se describen a continuación.

Para la puntuación numérica de este ejercicio, se utilizó inicialmente una variable dicotómica, pues la decisión en relación a si la expresión está correctamente escrita no admite soluciones parciales o intermedias. Además, para aquellas expresiones que están incorrectamente escritas, la valoración de su reformulación también resulta dicotómica.

El criterio de valoración utilizado en este ejercicio fue el siguiente:

Para las expresiones correctamente escritas:

1: Indica que está correctamente escrita

0: Reescribe (incorrectamente) en la segunda columna

Para las expresiones correctamente escritas:

1: Reescribe correctamente en la segunda columna

0: Reescribe con una expresión incorrecta o indica que está correctamente escrito

En este ejercicio, se evalúa la función semiótica F2. La misma se consideró como establecida en los casos de respuesta correcta, es decir, pera las expresiones correctamente escritas que fueran consideradas como tal y para las incorrectamente escritas que fueran reformuladas correctamente, dando cuenta que se reconoció el motivo de la decisión del estudiante de clasificarla como incorrectamente escrita.

4.5.4. EJERCICIO 3

En este ejercicio se evalúan conversiones entre dos registros semióticos: el registro del lenguaje coloquial y el simbólico algebraico.

Para el diseño de este ejercicio se tomó como base la estructura del Ejercicio 4 de la versión piloto, a la que se le hicieron diversas modificaciones que observan tanto aspectos comunicacionales (relacionadas a la forma de escritura de las expresiones) como la representatividad de los ítems.

Se agregaron ítems para evaluar expresiones en las que aparecen la conjunción, la disyunción y los cuantificadores, tanto en un registro como en el otro. También se evalúa la asignación del valor de verdad, es decir que se evalúa el establecimiento de la función semiótica F3.

Para analizar la conversión de una expresión del lenguaje coloquial al registro simbólico-algebraico, se definió una función semiótica, F_{cs}, en la que el antecedente es una expresión coloquial y el consecuente es la correspondiente expresión en el registro simbólico.

Obtener la expresión en lenguaje coloquial, a partir de una simbólica, involucra tanto una conversión como un tratamiento, dado que la respuesta final requiere construir una oración que manifieste el sentido de la expresión, más allá de la traducción símbolo a símbolo que devuelve la conversión congruente de los símbolos uno a uno. Por lo tanto, se definieron dos funciones semióticas correspondientes a cada una de las mencionadas actividades cognitivas. La función semiótica relativa a la conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial, F_{sc}, tiene como antecedente una expresión simbólica y como consecuente una expresión coloquial. La función semiótica correspondiente al tratamiento, F_t, tiene como antecedente y como consecuente a dos expresiones coloquiales, cuyo contenido semántico es el mismo. En principio, puede parecer que una función semiótica que es interna al registro coloquial no es relevante para esta investigación, pues en la misma no participa directamente el registro simbólico-algebraico. Sin embargo, este tratamiento está ligado a la comprensión del contenido semántico de una expresión simbólica pues transforma la expresión formulada símbolo a símbolo en una expresión más global, en el registro coloquial, que se asemeja a la forma en que la idea representada se expresa en lenguaje oral. La manifestación del establecimiento de esta función semiótica es un indicador de la comprensión del contenido semántico de la expresión. Esta consideración es reafirmada por Colombano, Formica y Camós (2012, p. 138):

> En definitiva, el buen uso de los significantes no garantiza la comprensión matemática de las nociones. Cabe resaltar que la asignación de significados realizada símbolo a símbolo no garantiza la comprensión global que una "frase simbólica" requiere. Lo que se debe recuperar es el mensaje competo que se está tratando de transmitir en el contexto en cuestión.

Por su parte, Gardner (1996, citado por Colombano *et al*., 2012) coincide en que la habilidad de transformar una expresión simbólica en una expresión coloquial de carácter global es signo de experticia:

> …las personas novatas o con pocos conocimientos matemáticos suelen traducir los problemas numéricos en forma literal y frase por frase. Por el contrario, los expertos […] suelen realizar una traducción mucho más global […] Esta traducción rápida y lineal de los novatos (y los alumnos son novatos casi por definición) contribuye a que no sean detectadas las posibles inconsistencias o incoherencias en el texto. (p. 150)

En consecuencia, considerar la función semiótica F_t y consignar su manifestación, resulta de interés en una investigación relativa a la construcción de significado.

En la Figura 4.12 se representan las funciones semióticas detalladas, que están ligadas a las actividades cognitivas de conversión y tratamiento, en los registros semióticos en estudio.

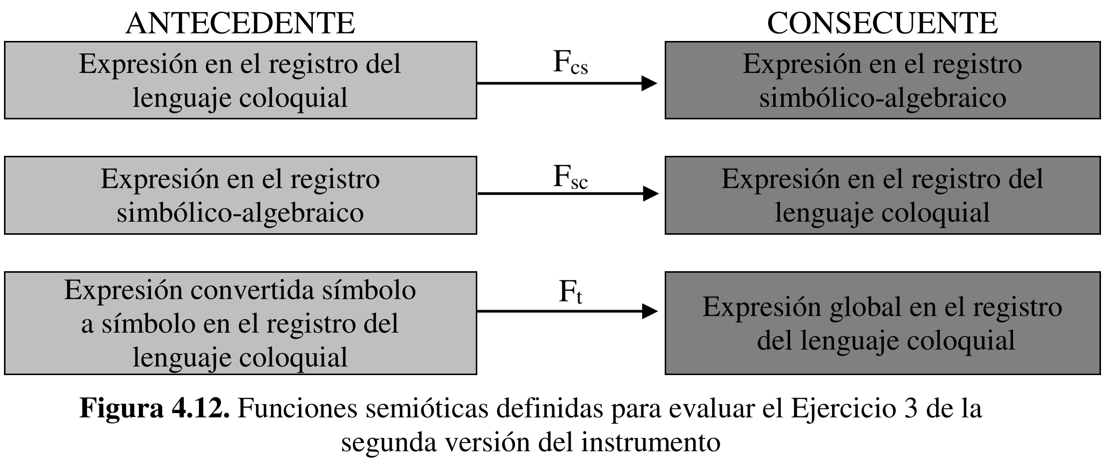


Figura 4.12. Funciones semióticas definidas para evaluar el Ejercicio 3 de la segunda versión del instrumento

Estas funciones semióticas vinculadas a actividades cognitivas en los registros coloquial y simbólico-algebraico, pueden ser expresadas o desagregadas en términos de las funciones F1 y F2, definidas anteriormente.

En la función semiótica F_{sc}, que interviene en la transformación de una expresión dada en el registro simbólico-algebraico a otra en el registro del lenguaje coloquial, están involucradas las funciones semióticas F1correspondientes a cada uno de los símbolos que conforman la expresión, tanto las de los símbolos en estudio como las funciones semióticas –equivalentes a la F1– para otros símbolos que participen de la expresión. La conversión podría ser entendida como la composición de todas estas funciones F1, que producen vocablos en el lenguaje coloquial. Con esta transformación se obtiene una expresión a la que se denominó conversión *Símbolo a Símbolo* (SaS). Luego participa otra función semiótica correspondiente al tratamiento, F_t , para obtener una oración que expresa la idea global en el lenguaje coloquial, tal como las que se utilizan en la lengua oral para comunicarse. En la Figura 4.12 se esquematiza la función F_{sc} en términos de las funciones F1 intervinientes.

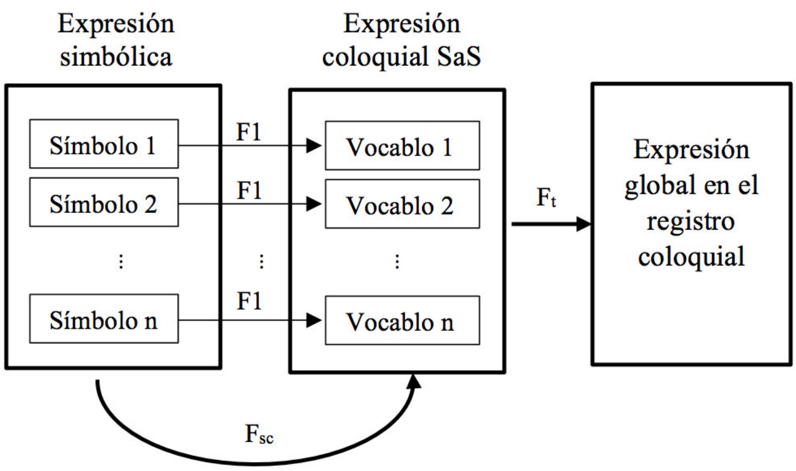


Figura 4.13. Función semiótica de conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial en términos de las funciones semióticas F1

Por su parte, en la función semiótica correspondiente a la transformación de una expresión en el registro coloquial al registro simbólico-algebraico, F_{cs}, están implícitas las funciones semióticas F1, para transformar los vocablos en símbolos, y la función F2 para obtener una expresión bien formada en el registro simbólico-algebraico (podría intervenir más de una función semiótica F2, correspondientes a distintos símbolos que forman parte de la expresión, como por ejemplo, en el caso de las expresiones cuantificadas). En la Figura 4.14 se esquematiza la función semiótica F_{cs}, en términos de las funciones F1 y F2.

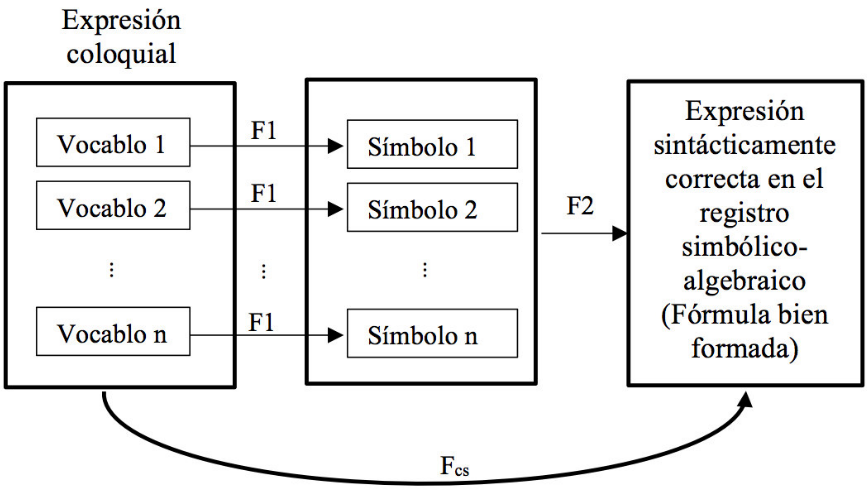


Figura 4.14. Función semiótica de conversión del registro coloquial al registro simbólico-algebraico en términos de las funciones semióticas F1 y F2

En la Figura 4.15 se presenta el enunciad del Ejercicio 3 tal como aparece en el protocolo utilizado.

❸ Escribir las siguientes expresiones en lenguaje coloquial o simbólico, según corresponda. Además indicar si son verdaderas o falsas.

EN LENGUAJE COLOQUIAL	**EN LENGUAJE SIMBÓLICO**	**Indicar V o F**
	$0{,}5 \in \mathbb{Z} \vee -1 \in \mathbb{Z}$	
	$-2 \in \mathbb{Z} \wedge -1 \in \mathbb{N}$	
	$\forall x\ (x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x<0)$	
	$\exists x\ (x \in \mathbb{Z} \wedge x<0)$	
	$\exists x \in \mathbb{N} / x<0$	
	$\forall x \in \mathbb{N}\ x>0$	
	$\forall x \in \mathbb{N}\ x=2.k \vee x=2.k-1\ ,\ k \in \mathbb{N}$	
3 es un número entero e impar		
3 y 5 son números naturales		
4 es un número natural o es un número entero		
Cada número entero es menor que su sucesor		
Algunos números naturales son negativos		
El cuadrado de cualquier número real es positivo		

Figura 4.15. Enunciado del Ejercicio 3 de la segunda versión del instrumento

El Ejercicio 3 de esta nueva versión del instrumento está formado por doce ítems, de los cuales siete corresponden a conversiones del registro simbólico-algebraico al registro coloquial y cinco conversiones en el sentido inverso. A continuación se presenta la fundamentación de la presencia de cada ítem en esta versión:

$0{,}5 \in \mathbb{Z} \vee -1 \in \mathbb{Z}$	Fue incorporado para evaluar la asignación del valor de verdad de la disyunción, además de la conversión correspondiente, que es simple por ser congruente.
$-2 \in \mathbb{Z} \wedge -1 \in \mathbb{N}$	Fue incorporado para evaluar la asignación del valor de verdad de la conjunción, además de la conversión correspondiente, que es simple por ser congruente.
$\forall x\ (x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x < 0)$	La expresión que aparece en este inciso está formulada en términos de lo que se considera correcto en la Lógica Formal, para analizar si los estudiantes son capaces de interpretar esta forma de expresión. Se corresponde con otro similar que aparece posteriormente, pero escrito en la forma de uso habitual en Matemática. También permite analizar, a partir del valor de verdad otorgado, si el estudiante comprende el alcance del cuantificador, pues su alcance es el que convierte en falsa a la expresión.
$\exists x\ (x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0)$	De manera análoga al ítem anterior, esta expresión está formulada en términos de lo que se considera correcto en la Lógica Formal, pero en este caso con el cuantificador existencial. También se corresponde con otro ítem que aparece luego pero escrito en la forma de uso habitual en Matemática. También se evalúa a través del valor de verdad, la comprensión del alcance del cuantificador.
$\exists\ x \in \mathbb{N}\ /\ x < 0$	Se mantuvo de la versión piloto. Este ítem se corresponde con el ítem anterior que está escrito según las reglas de la Lógica Formal, pero en este caso está formulado de acuerdo con las expresiones de uso habitual en Matemática.
$\forall\ x \in \mathbb{N}\ x > 0$	Este ítem se corresponde con un ítem anterior que está escrito según las reglas de la Lógica Formal, pero en este caso está formulado de acuerdo con la forma de uso habitual en Matemática.
$\forall\ x \in \mathbb{N}\ x=2k \vee x=2k+1,\ k \in \mathbb{N}$	Se mantuvo de la versión piloto. Este ítem evalúa una expresión cuantificada pero con una función proposicional no tan simple.
3 es un número entero e impar	En este ítem se evalúa el uso de la conjunción y permite analizar una consonancia con el ítem anterior, en relación a la expresión que simboliza la paridad.

3 y 5 son números naturales	En este ítem se evalúa el uso de la conjunción y permite analizar una correspondencia con la resolución del ítem del Ejercicio 2 en el que se debe analizar si es correcta o no la expresión ‘$5\wedge 4 \in \mathbb{R}$’.
4 es un número natural o es un número entero	En este ítem se evalúa el uso de la disyunción y permite analizar una correlación o reciprocidad con el ítem del Ejercicio 2 en el que se debe analizar la adecuación de la sintaxis de la expresión ‘$4\in\mathbb{N} \vee \mathbb{Z}$’. Además permite evaluar la asignación del valor de verdad en la conjunción, por eso también se corresponde con el primer ítem de este ejercicio.
Cada número entero es menor que su sucesor	Proviene de la versión piloto, pero se cambió el vocablo ‘Todo’ por ‘Cada’. Permite evaluar la interpretación del vocablo ‘cada’ como una expresión equivalente a una cuantificación universal.
Algunos números naturales son negativos	Tiene origen en la versión piloto, pero se cambió la función proposicional ‘son pares’ por ‘son negativos’, pues la función proposicional correspondiente a la paridad ya aparece en otros ítems. Este ítem pretende evaluar la interpretación del vocablo ‘algunos’ como una expresión coloquial equivalente a una cuantificación existencial. Salvo por el conjunto de referencia, la expresión es equivalente a la del último ítem del Ejercicio 2, lo que convierte en comparables las resoluciones. La función proposicional correspondiente a ‘ser negativo’ se corresponde con las de algunos ítems escritos en forma simbólica de este ejercicio, que también permite la comparación de las resoluciones.
El cuadrado de cualquier número real es positivo	Este ítem pretende evaluar la interpretación del vocablo ‘cualquier’ como una expresión equivalente a una cuantificación universal. La expresión es similar a la del ítem ‘$\forall\in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0$’ del Ejercicio 2, lo que permite analizar una correlación entre las resoluciones. La función proposicional correspondiente a ‘ser positivo’ se corresponde con la de otro ítem de este ejercicio escrito en forma simbólica, que también permite la comparación de las resoluciones.

A continuación se describen los criterios que se definieron para realizar la puntuación de este Ejercicio.

Tal como se hizo para el Ejercicio 1, las conversiones requeridas en este Ejercicio también fueron valoradas en distintas etapas. La primera de ellas fue una corrección cualitativa. Esto permitió, por un lado, caracterizar las conversiones del registro simbólico al coloquial y, por otro, distinguir y describir los errores más frecuentes.

A partir de esta primera valoración, y con las resoluciones ya categorizadas, se establecieron claves numéricas para una calificación cuantitativa. En la primera puntuación numérica efectuada se utilizó una variable continua, que toma valores entre 0 y 1. Tal como se describió para el Ejercicio 1, se arribó a la necesidad de recalificar utilizando una variable dicotómica, para lo cual se redefinieron los criterios.

Finalmente, se realizó una puntuación en términos de funciones semióticas, indicando si se manifestaba o no la construcción de las funciones semióticas involucradas, correspondientes a cada una de las conversiones (F_{sc} y F_{cs}) y al tratamiento en el registro coloquial (F_t) en el caso de las conversiones en las que éste es el registro de llegada. También se puntuó la función semiótica que corresponde al establecimiento del valor de verdad (F3).

a. Conversiones al registro del lenguaje coloquial

En esta investigación se distinguirán dos formas de efectuar este tipo de conversiones a las que se diferenciará como conversiones *Símbolo a Símbolo* (SaS) y conversiones *Globales*.

Las conversiones SaS comprenden a aquellas que son efectuadas como una simple decodificación de los símbolos y no hay un tratamiento posterior. En la expresión resultante en el registro coloquial, suele aparecer el nombre de la variable involucrada o expresiones como 'pertenece a N' en lugar de 'es un número natural'. En cambio, una conversión *Global* es aquella en la que la expresión resultante en lenguaje coloquial manifiesta la idea general que se representa en la expresión simbólica de origen, siendo más similar a las expresiones utilizadas en el lenguaje de habla oral. Como ya se detalló, para obtener este tipo de expresiones, se debe efectuar un tratamiento en el registro coloquial, que debe ser posterior a la conversión SaS.

En la primera columna de la Tabla 4.5 se presentan los tipos de errores identificados. En las columnas siguientes se presentan, respectivamente, la valoración otorgada en la primera etapa utilizando una variable continua, la valoración utilizando una variable dicotómica y la consideración en relación al establecimiento de cada una de las dos funciones semióticas que se evalúan en este Ejercicio (F_{sc} y F_t).

Tabla 4.5. Criterios de valoración para las conversiones al registro del lenguaje coloquial.

Tipo de resolución	Calificación con **variable continua**	Calificación con **variable dicotómica**	En términos de **funciones semióticas**	
			F_{sc}	F_t
1- Conversión SaS	0.5	1	1	0
2- Conversión combinando SaS y Global	0.75	1	1	0
3- Conversión Global	1	1	1	1
4- Conversión SaS con algún error	0.25	0	0	0
5- Conversión Global con algún error	0.75	1	1	1

A continuación, se describen los criterios considerados para otorgar las puntuaciones establecidas:

1- Conversión SaS: Como ya se expresó, en esta categoría entran los casos en los que, si bien existe una conversión al lenguaje coloquial, ésta fue hecha como una simple decodificación. En las variables continuas se los puntuó con 0.5, por considerarse que la expresión dada en lenguaje coloquial no manifiesta totalmente la comprensión de la expresión simbólica dada. Sin embargo, al momento de calificar con una variable dicotómica, se consideró otorgarle puntaje 1, pues en definitiva el ejercicio pedía una expresión en lenguaje coloquial y la respuesta de este tipo lo es. En términos de funciones semióticas, se consideró como manifiesta la función semiótica correspondiente a la conversión al lenguaje coloquial pero no así la correspondiente al tratamiento.

2- Conversión combinando SaS y Global: En esta categoría entran los casos en los que se distinguen partes de simple decodificación (por ejemplo, aparece el nombre de la variable), pero otras expresiones manifiestan algún tratamiento. En variables continuas estos casos se puntuaron con 0.75, por estar algo mejor que ser sólo una decodificación. En variable dicotómica, se puntuó con 1, por las mismas razones descritas en el caso anterior. En términos de funciones semióticas, se consideró como manifiesta la función semiótica correspondiente a la conversión al lenguaje coloquial pero no así la correspondiente al tratamiento, por no estar esta última totalmente manifiesta.

3- Conversión Global: Son los casos completamente correctos, y por consiguiente se otorgó un 1 en todos los modos de puntuación.

4- *Conversión SaS con algún error*: Esta categoría engloba los casos en los que la expresión dada como respuesta está formulada como una decodificación, pero además presenta algún error, como por ejemplo la omisión de algún símbolo. En variable continua se le otorgó puntaje 0.25 por considerarse que está peor que los de la categoría 1, pero en variable dicotómica se otorgó puntaje 0, pues se acerca más a estar incorrectamente resuelto que a bien resuelto. En términos de funciones semióticas, se consideró que ninguna de las dos involucradas estaba manifiesta.

5- *Conversión Global con algún error*: Los casos que participan de esta categoría son aquellos en los que se manifiesta una expresión de uso en el lenguaje oral, pero presentan algún error menor, generalmente de omisión. Utilizando una variable continua se calificó con 0.75, por estar peor que los de la categoría 3 pero mejor que los de la categoría 1. En variable dicotómica, también se consideró como puntuación un 1, pues el estudiante manifiesta la noción de lo que está leyendo en forma simbólica. Por la misma razón, se consideraron manifiestas las dos funciones semióticas involucradas en la resolución.

b. Conversiones al registro simbólico-algebraico

En este caso se identificaron errores particulares a cada ítem, los cuales se describen en la primera columna de la Tabla 4.6, y en las restantes columnas las valoraciones en variables numéricas (continua y dicotómica) y en la función semiótica involucrada (F_{cs}).

Tabla 4.6. Criterios de valoración para las conversiones al registro del lenguaje coloquial.

Ítem y tipo de error	Calificación con **variable continua**	Calificación con **variable dicotómica**	En términos de **funciones semióticas** (F_{cs})
3 es un número entero e impar			
No simboliza ‘impar’ o lo simboliza mal	0	0	0
Simboliza ‘impar’ como 2k+1 sin aclarar que es para *algún* k	0.5	1	1
Omite la conjunción	0	0	0
Utiliza ‘$\vee$’ en lugar de’ $\wedge$’	0	0	0

3 y 5 son números naturales			
Expresa: $3 \wedge 5 \in$ N	0	0	0
Expresa: $\{3, 5\} \in$N	0	0	0
Convierte incorrectamente el símbolo'$\wedge$'	0	0	0
4 es un número natural o es un número entero			
Escribe $4 \in$ N $\vee$ Z	0	0	0
Utiliza '$\wedge$' en lugar de' $\vee$'	0	0	0
Omite el símbolo la disyunción	0	0	0
Cada número entero es menor que su sucesor			
Utiliza un cuantificador existencial	0	0	0
No indica conjunto de pertenencia de la variable	0.5	0	0
Aparece el cuantificador, la variable y alguna función proposicional pero la sintaxis es incorrecta	0	0	0
Algunos números enteros son negativos			
No cuantifica o usa cuantificador universal	0	0	0
No indica conjunto de pertenencia de la variable	0.5	0	0
Escribe mal la función proposicional o no la escribe	0.5	0	0
El cuadrado de cualquier número real es positivo			
No indica conjunto de pertenencia de la variable	0.5	0	0
Utiliza un cuantificador existencial	0	0	0
Formula mal la función proposicional o no la escribe	0.5	0	0

c. Determinación del valor de verdad

La valoración del valor de verdad coincide tanto para la puntuación mediante una variable dicotómica como para la manifestación de la función semiótica F3:

1: Determina correctamente el valor de verdad

0: No determina correctamente el valor de verdad

4.6. FASE 5: ANÁLISIS DE LA VERSIÓN 2

En esta sección se presenta el análisis de confiabilidad y validez efectuado sobre la versión 2 del instrumento.

Hernández Sampieri *et al*. (1997) exponen algunos factores que pueden afectar a la confiabilidad y validez del instrumento. A continuación se los enumera y se explicita de qué manera fueron superados.

1- *Improvisación*. Se refiere a la elección de ítems poco cuidadosa y no fundamentada, o al escaso conocimiento de las variables a medir.

En este caso, cada uno de los ítems que componen los ejercicios propuestos fue pensado y diseñado en forma particular, teniendo plena conciencia de lo que se pretende observar en cada una de las respuestas relevadas, como se detalló en la Sección 4.5.

2- *Utilización de instrumentos desarrollados en el extranjero que no han sido validados en el contexto en el que van a ser aplicados*. Se refiere a la cultura y el tiempo en el que van a ser utilizados, pues éstos pueden variar de manera que afecte la adecuación de su uso.

El instrumento que se presenta fue diseñado especialmente para esta investigación, considerando las realidades que se viven en un aula de nivel universitario en Argentina, particularmente en la Universidad Nacional de Mar del Plata, conociendo la modalidad en que se desarrollan las clases en las asignaturas en las que se relevaron los datos, y teniendo presente el significado institucional que se otorga a cada uno de los símbolos en estudio.

3- *El instrumento resulta inadecuado para las personas a las que se les aplica*. Alude al uso de un lenguaje demasiado elevado para quien responde, a no tomar en cuenta la capacidad de respuesta, los conocimientos, etc.

En este caso, se observaron tanto las dificultades de comprensión de los enunciados que se habían detectado en la versión anterior, como así también el contenido matemático representado en las distintas expresiones que componen los ítems, de manera que no resultaran un obstáculo en la observación de lo que se pretende estudiar.

4- *Las condiciones en que se aplica el instrumento.* Se puntualizan factores relativos a cuestiones ambientales, tales como ruido o temperatura, y a que la extensión no lo convierta en demasiado largo y tedioso.

La administración de este instrumento fue realizada en las aulas en las que normalmente se dictan las clases de las asignaturas que cursan los estudiantes participantes, con lo cual no hubo interferencias de ruidos molestos ni de cuestiones climáticas, ni se restó tiempo de realizar ninguna actividad, pues el tiempo dispuesto para la administración fue cedido por los respectivos profesores que dictan las clases teóricas. Asimismo, ya se explicitó que la longitud total del instrumento fue cuidadosamente contemplada para que no resultara excesiva.

5- *Aspectos mecánicos*. Se especifican aspectos como la mala legibilidad, que no haya suficiente espacio para responder o que no se comprenda lo que se debe realizar.

Este aspecto también fue contemplado, pues se observó que las copias de los protocolos fueran de buena calidad, se realizó el diseño considerando proporcionar el espacio adecuado para cada respuesta y se consideraron diversas modificaciones para mejorar la interpretación de los distintos enunciados.

Como ya se detalló en la Sección 4.5, en esta versión del instrumento se realizaron valoraciones sucesivas de las respuestas de los estudiantes, en todos los ítems. La valoración inicial fue de tipo cualitativo, la cual devino luego en una valoración numérica a través de una variable continua y finalmente se la convirtió en una variable dicotómica, cuyos valores son los que se utilizaron para los análisis posteriores. Por consiguiente, la confiabilidad de esta versión no es posible de analizarse a través del coeficiente Alfa de Cronbach, pues éste se aplica a variables continuas. En su lugar, la confiabilidad fue analizada utilizando el coeficiente de Kuder-Richardson (KR-20), el cual está definido para variables dicotómicas.

El mismo fue calculado utilizando el software SPSS, versión 15.0, obteniéndose un valor de 0.842 (ver Anexo 2), que puede ser considerado como muy aceptable, de acuerdo con la escala que proponen Hernández Sampieri et al. (1997). Es decir que si esta versión del instrumento se aplica en reiteradas ocasiones se obtendrían resultados similares.

Para el análisis de validez se recurrió a tres jueces expertos:

- Dra. Mabel Rodríguez, Profesora Asociada en la Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina, por ser experta en el marco teórico utilizado y por haber realizado y dirigido investigaciones (a nivel de tesis de doctorado) relativas a cuestiones simbólicas y uso del lenguaje en Matemática.

- Dra. Marisol Radillo Enríquez, Profesora Titular en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías de la Universidad de Guadalajara, México, por ser experta en cuestiones del lenguaje y de símbolos matemáticos.

- Dr. Vicenç Font Moll. Profesor de Didáctica de la Matemática en la Universitat de Barcelona, España, y reconocido a nivel internacional por desarrollar el Enfoque Ontosemiótico junto al Dr. Juan Díaz Godino y la Dra. Carmen Batanero Bernabeu.

Para guiar a los jueces en la evaluación del instrumento se les envió un resumen de los criterios utilizados en el diseño del instrumento, detallados en la Sección 4.5, los objetivos de la tesis y un protocolo construido *ad hoc* (ver Anexo 3), para guiar su evaluación.

La comunicación con los jueces continuó vía e-mail, y se extractan a continuación los aportes que cada uno de ellos realizaron en relación al diseño del instrumento.

La Dra. Rodríguez consideró que las tareas propuestas en cada uno de los ejercicios son adecuadas a los fines expresados, como así también que la muestra de ítems permite evaluar cada uno de los propósitos indicados. Destacó como valiosa la observación realizada en torno al conflicto semiótico en relación a que una expresión esté "correctamente escrita" o sea "verdadera" y como acertada la decisión de presentar sólo expresiones verdaderas como estrategia para evitar este conflicto. Consideró que todos los enunciados son claros. Realizó dos observaciones. La primera de ellas referida a la necesidad de obtener más datos en relación a la razón a la determinación del valor de verdad de las proposiciones para evaluar la función semiótica F3, es decir la necesidad de conocer la argumentación bajo la cual el estudiante decide el valor de verdad. De no contarse con esta argumentación, propuso relativizar los resultados obtenidos. La segunda observación está referida a la formulación del ítem del Ejercicio 3 expresado como '$\forall x \in N\ x=2k \vee x=2k+1,\ k \in N$' en el cual está implícito un cuantificador existencial. En el mismo, si bien se usa una notación habitual en el contexto de la Matemática, consideró que debería aclararse.

La Dra. Radillo Enríquez no realizó objeciones en relación a los enunciados ni a los ítems incluidos en cada caso, pero recomendó cuidar la longitud total del instrumento por considerar las tareas propuestas son de alta demanda cognitiva. Realizó una advertencia en relación a que los ejercicios relativos a las conversiones entre los registros coloquial y simbólico algebraico pueden no tener una respuesta única, lo cual ya había sido tenido en cuenta al momento de valuar cada uno de éstos ítems. Consideró que las reglas de sintaxis de los símbolos de pertenencia e inclusión no deberían plantearse sólo en el sentido de lectura de izquierda a derecha, pues los mismos podrían ser utilizados en el sentido inverso, es decir, expresados como $\ni$ y $\supset$. Si bien la observación es válida, no se utilizan estos símbolos invertidos en el desarrollo de las asignaturas que cursan los estudiantes que conforman la muestra. Por lo tanto, no conforman las prácticas institucionales y por consiguiente no forman parte del significado institucional de estos símbolos. Como consecuencia de esto, los estudiantes no han trabajado con los símbolos representados en este orden, por lo que la forma de notación no forma parte del significado personal de estos estudiantes. A su vez, estuvo de acuerdo con que el aprendizaje de estos símbolos para los estudiantes "novatos" no es trivial, como no lo fue para los matemáticos profesionales de fines del siglo XIX y principios del siglo XX, que es al momento al que se remonta el comienzo de su uso.

El Dr. Font Moll consideró adecuados los enunciados de los distintos ejercicios y también los ítems propuestos en cada caso. Puso especial atención en las funciones semióticas definidas y manifestó que la definición de las mismas es correcta, sumado a que resultan adecuadas para el estudio que se está realizando. Propuso efectuar un análisis conjunto entre configuraciones y funciones semióticas, incorporando estas últimas al esquema de las configuraciones. También sugirió la definición de funciones semióticas especiales para el análisis de las tareas de conversión entre los registros algebraico-simbólico y coloquial.

Las observaciones realizadas por los jueces expertos han sido consideradas tanto en el análisis de los resultados obtenidos con esta versión del instrumento como así también en el rediseño del instrumento que deviene en la versión 3 del mismo.

4.7. FASE 6: REDISEÑO DEL INSTRUMENTO PARA LA TERCERA VERSIÓN

El rediseño que condujo a esta nueva versión del instrumento estuvo basado en las observaciones realizadas por los jueces expertos, como así también, en aspectos provenientes del análisis de los datos relevados con la versión anterior. Está destinado a un nuevo relevamiento de datos que resulten confirmatorios de los resultados obtenidos con la versión 2, con los ajustes realizados para mejorar la validez de contenido del instrumento.

En todos los ejercicios se mantuvieron los criterios de valoración utilizados en la versión anterior, aunque en este caso sólo se realizó la puntuación en variables dicotómicas (para la corrección general) y la puntuación para la manifestación de las funciones semióticas involucradas en cada ítem.

Las modificaciones de enunciado realizadas en cada uno de los ejercicios se detallan en las siguientes secciones.

4.7.1. EJERCICIO 1

En este ejercicio se introdujo una única modificación, que fue cambiar la palabra ‘expresión’ por la palabra ‘ejemplo’ en el encabezado de la tercera columna de la tabla, resultando la siguiente consigna: *Escriba un ejemplo utilizando el símbolo del que se pueda afirmar que es VERDADERO*. Se mantuvo en mayúsculas la palabra ‘verdadero’, para acentuar esta condición en la consigna.

Esta modificación pretende acercar la consigna al lenguaje que es más familiar para los estudiantes. En las resoluciones de la versión anterior se observó que algunos estudiantes proponían expresiones que no tenían sentido, como ‘$\forall\ x \in R$’, que, si bien es una expresión, no resulta un ejemplo válido en el uso adecuado del símbolo en estudio. Dado que los estudiantes están habituados a la propuesta de ejemplos, se utilizó esta palabra con la intención de clarificar la consigna para la interpretación que los estudiantes hagan de ella.

En la Figura 4.16 se presenta el enunciado del ejercicio tal como aparece en el protocolo utilizado.

❶ Complete:

Símbolo	¿Cómo se lee?	Escriba un ejemplo utilizando el símbolo del que se pueda afirmar que es VERDADERO
$\in$		
$\subset$		
$\forall$		
$\exists$		
$\wedge$		
$\vee$		

Figura 4.16. Enunciado del Ejercicio 1 de la tercera versión del instrumento

4.7.2. EJERCICIO 2

En este ejercicio se introdujeron varias modificaciones motivadas por distintos aspectos. En la versión 2 se modificó el enunciado de este ejercicio para evitar la aparición del conflicto semiótico, que se había manifestado en las resoluciones de la versión piloto, en relación a la confusión entre las condiciones de ‘estar bien escrita’ y de ‘ser verdadera’. Con el enunciado propuesto en la versión 2, *Determinar si las siguientes expresiones están BIEN ESCRITAS. En caso de no estarlo re-escribirlas en forma correcta*, se observó una disminución en la aparición del mencionado conflicto. Sin embargo, no desapareció totalmente. Por lo tanto, en esta nueva versión se introdujo una nueva modificación de este enunciado, con la intención de superar el conflicto. En esta versión el enunciado pasó a ser: *Analice si las siguientes expresiones están BIEN ESCRITAS (independientemente de ser verdaderas o falsas). En caso de no estarlo escríbala en forma correcta.* La principal modificación está en la aclaración que se hace en relación a que el análisis pretendido es independiente del valor de verdad, para evitar que el foco de atención de los estudiantes se centre en la cuestión del valor de verdad en lugar de la sintaxis.

También se reformuló la consigna de la segunda columna. En la versión 2 se indicaba: *Si la expresión está BIEN ESCRITA señale con una x en esta columna*. En algunas resoluciones se observó que el estudiante indicaba con una ‘x’ en esta columna pero también reformulaba la expresión. Además, se consideró que colocar una cruz podía resultar en alguna medida una respuesta aleatoria. Para mejorar esta situación, en esta versión se solicita colocar las palabras SI o NO, según considere la adecuación o no de la expresión dada. De esta manera, la consigna de esta columna pasó a ser: *¿La expresión está BIEN ESCRITA? (SI/NO)*. Puede observarse que se mantuvo en mayúsculas la consigna de estar ‘bien escrita’, para enfatizar el aspecto que se está analizando en el ejercicio.

Además de estas modificaciones en las consignas, se realizaron dos cambios en los ítems que componen el ejercicio.

En primer lugar, se eliminó el ítem cuya expresión es ‘$[2; 5] \subset \mathbb{R}$’. Esta decisión estuvo motivada por lo observado en algunas de las resoluciones, en la que algunos estudiantes no reconocen la notación de un intervalo real como un conjunto. Esto provocó que su respuesta sea que la expresión no es correcta por no relacionarse a dos conjuntos a través de la inclusión, lo que conduce a una especie de paradoja al momento de hacer la valoración de la respuesta. Por un lado, la respuesta es incorrecta, pero por otro lado, la reflexión que hacen los estudiantes para arribar a su respuesta, relativa a que la inclusión relaciona a dos conjuntos, es una manifestación de la función semiótica F2 de este símbolo. Es decir que este ítem provoca un conflicto que no se debe precisamente al símbolo de inclusión sino a la notación utilizada para un intervalo cerrado. Por otra parte, en este ejercicio contiene, para cada uno de los símbolos en estudio, un ítem en que la expresión está correctamente formulada y otra que no lo está, pero para el símbolo de inclusión había dos expresiones correctamente formuladas. Esto interfiere en los análisis, pues desequilibra la cantidad de datos obtenidos con respecto a este símbolo en relación a los demás. Todas estas consideraciones condujeron a la decisión de la eliminación del ítem en esta nueva versión.

También se modificó el ítem '$-1 \in \mathbb{N} \vee -1 \in \mathbb{Z}$'. La mayoría de los estudiantes que manifestaron que la expresión no está correctamente formulada (con el protocolo de la versión 2), basaron su decisión en el hecho de la falsedad de la primera proposición, si bien la disyunción es verdadera. Esto provoca una distorsión en el análisis del ítem, que está destinado a indagar sobre la manifestación de la función semiótica relativa a la sintaxis. Por esta razón, se reformuló el ítem convirtiendo en verdadera a la primera proposición: '$7 \in \mathbb{N} \vee -1 \in \mathbb{Z}$'.

En la Figura 4.17 se presenta una imagen del enunciado completo de este ejercicio, tal como aparece en el protocolo utilizado.

❷ Analice si las siguientes expresiones están BIEN ESCRITAS (independientemente de ser verdaderas o falsas). En caso de no estarlo, escríbala en forma correcta.

Expresión	¿La expresión está BIEN ESCRITA? (SI/NO)	Si la expresión está MAL ESCRITA, escríbala en forma correcta
$-2 \in \mathbb{Z}$		
$3 \subset \mathbb{Z}$		
$\{1 ; 2\} \subset \mathbb{N}$		
$\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$		
$4 \in \mathbb{N} \wedge -3 < 0$		
$7 \in \mathbb{N} \vee -1 \in \mathbb{Z}$		
$-5 \wedge 4 \in \mathbb{R}$		
$4 \in \mathbb{N} \vee \mathbb{Z}$		
$\forall \mathbb{N} \quad \mathbb{N} > 0$		
$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$		
$\exists x \in \mathbb{R} \ / \ y + 2 = 5$		
$\exists x \in \mathbb{Z} / x < 0$		

Figura 4.17. Enunciado del Ejercicio 2 de la tercera versión del instrumento

4.7.3. EJERCICIO 3 Y EJERCICIO 4

En el Ejercicio 3 de la versión anterior se requería completar con la expresión correspondiente en el registro faltante (conversiones entre los registros coloquial y simbólico-algebraico) y determinar el valor de verdad en cada caso.

Al momento de efectuar los análisis de este Ejercicio se observó que, en el caso de las expresiones dadas en el registro coloquial, la determinación del valor de verdad no aporta información a esta investigación, pues el registro de partida es el coloquial y por lo tanto no se está evaluando la manifestación de la función semiótica F3, ya que el registro de partida no es el simbólico-algebraico. Esto implica que se incluyó una tarea innecesaria en el instrumento, pues no participa de los análisis.

Por otra parte, para las expresiones dadas en el registro simbólico-algebraico se observó que la determinación del valor de verdad por sí solo no sería suficiente como manifestación de la función F3, ya que podría intervenir un factor aleatorio en la respuesta.

Para introducir las modificaciones necesarias a partir de las observaciones anteriores, el Ejercicio 3 de la versión anterior se desdobló en dos ejercicios en esta nueva versión, evaluando por separado las conversiones en cada sentido, entre los registros coloquial y simbólico-algebraico.

El nuevo Ejercicio 3 está centrado en las conversiones que tienen como registro de partida el simbólico-algebraico. En este caso, se cambió el enunciado general, dando una interpretación de lo que se espera que el estudiante haga como resolución. Esta modificación surgió a partir de lo observado en las entrevistas realizadas luego de la administración de la versión 2. Cuando a los estudiantes se solicitaba oralmente si podían ‘contar con sus palabras’ lo que alguna de las expresiones simbólicas representaba, los estudiantes podían dar una expresión global aunque en su conversión realizada en el instrumento era ‘símbolo a símbolo’. Esto condujo a pensar que, en algunos casos, la ausencia de una expresión global como respuesta quizás no significa la imposibilidad de construirla sino una mala interpretación de la consigna que refiere ‘Expresar en lenguaje coloquial’. También se incluyó, en esta versión, la solicitud de una justificación para la determinación del valor de verdad, para contar con una herramienta que permita comprobar que la decisión del valor de verdad no fue resuelta de manera aleatoria. Bajo estas consideraciones, el enunciado general del nuevo Ejercicio 3 es: *Exprese coloquialmente (con sus palabras) lo que representa cada una de las siguientes expresiones simbólicas. Indique si es verdadera o falsa, justificando su respuesta.*

También en este caso se introdujeron modificaciones relativas a los ítems que componen el ejercicio.

El ítem '$\forall x \in \mathbb{N}\ x = 2.k \vee x = 2.k - 1,\ k \in \mathbb{N}$' fue eliminado en el Ejercicio 3 de la nueva versión. La razón que llevó a la exclusión de esta expresión fue la observación en relación con el abuso notacional que se utiliza en la expresión, relativo a que el parámetro toma valores en el conjunto de los números naturales, en realidad está conduciendo a un error conceptual. La forma en que está expresada la variación del parámetro, '$k \in \mathbb{N}$', da lugar a una posible interpretación como un cuantificador universal tácito, aunque en realidad se trata de un cuantificador existencial. Si se modificara utilizando otra de las expresiones de uso habitual en matemática, como es '*para algún* $k \in \mathbb{N}$', también podría dar lugar a interpretarla como si se tratara de un valor fijo de k. La forma adecuada de expresar simbólicamente el concepto '*todos los números naturales son pares o impares*' requiere de dos cuantificadores: '$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} / x = 2.k \vee x = 2.k - 1$'. Por lo tanto, es necesario considerar que esto aumenta el nivel de dificultad de la expresión y por consiguiente se distancia del tipo de expresiones utilizadas en el instrumento. Estas consideraciones llevaron a decidir la eliminación del ítem. Por otra parte, este ítem no estaba destinado a ser comparado con ningún otro del instrumento, con lo cual su eliminación no distorsiona ningún análisis.

Luego de la eliminación fundamentada en el párrafo anterior, se observó que en los restantes ítems que poseen un cuantificador, la función proposicional alude a las mismas condiciones: ser positivo o ser negativo. En la versión 2, esta homogeneidad entre las funciones proposicionales estuvo destinada a comparar las expresiones que mantienen las reglas de la Lógica Formal y las que están formuladas según el uso habitual en Matemática. En los análisis realizados sobre las resoluciones de estos ítems en la versión 2, se observó que, si bien existen diferencias entre las conversiones efectuadas por los estudiantes con cada una de las formulaciones, lo que marca la diferencia no es la función proposicional sino la forma sintáctica de la expresión cuantificada. Estas observaciones condujeron a la idea de modificar las funciones proposicionales de alguna de las cuatro expresiones cuantificadas, pero manteniendo el valor de verdad que la expresión tiene en la versión 2. De esta manera, la expresión '$\exists x \in \mathbb{N} / x < 0$' fue reemplazada por '$\exists x \in \mathbb{N} / 2 < x < 3$' y la expresión '$\forall x \in \mathbb{N}\ x > 0$' fue sustituida por '$\forall x \in \mathbb{N}\ x < x + 1$'.

Como ya se anticipó, los criterios de valoración de todos los ejercicios se mantienen tal como fueron definidos para la versión 2. Sin embargo, en este ejercicio se añadió la solicitud de la justificación del valor de verdad. El criterio adoptado en esta nueva versión, para la modificación introducida es:

1: Determina correctamente el valor de verdad y justifica adecuadamente.

0: No determina correctamente el valor de verdad o si determina correctamente el valor de verdad pero no justifica o justifica de manera inadecuada

En la Figura 4.18 se presenta el enunciado de este ejercicio, tal como aparece en el protocolo utilizado.

❸ Exprese coloquialmente (con sus palabras) lo que representa cada una de las siguientes expresiones simbólicas. Indique si es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

Expresión simbólica	**Expresión coloquial (con sus palabras)**	**V-F**	**Justificación del V-F**
$0{,}5 \in \mathbb{Z} \vee -1 \in \mathbb{Z}$			
$-2 \in \mathbb{Z} \wedge -1 \in \mathbb{N}$			
$\forall x\ (x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x < 0)$			
$\exists x\ (x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0)$			
$\exists\, x \in \mathbb{N} \,/\, 2 < x < 3$			
$\forall\, x \in \mathbb{N}\ x < x + 1$			

Figura 4.18. Enunciado del Ejercicio 3 de la tercera versión del instrumento

El segundo de los ejercicios provenientes del mencionado desdoblamiento del Ejercicio 3 de la versión anterior pasó a ser el Ejercicio 4 de esta nueva versión. En el mismo, se solicitan las conversiones del registro coloquial al registro simbólico-algebraico.

Para esta tarea se mantuvieron los ítems de la versión 2, pero se introdujeron modificaciones en dos ítems.

En el primer ítem se modificó la condición de ser ‘impar’ por ser ‘positivo’. Es decir que el ítem quedó formulado como: ‘*3 es un número entero y positivo*’. Este cambio estuvo motivado por la observación de las dificultades que los estudiantes presentaban, en la versión 2, al expresar la condición de ser ‘impar’. Esto impedía el análisis de la conjunción que está implicada en la expresión dada, la cual es, en definitiva, lo que se pretende estudiar. Por lo tanto, se consideró que era necesario hacer una modificación en la segunda proposición de este ítem, con el objetivo de saltear conflictos provocados por cuestiones ajenas al símbolo en estudio.

Otra modificación fue introducida en el ítem que en la versión 2 se expresó como '*4 es un número natural o es un número entero*'. En este caso se decidió eliminar las palabras '*es un número*' en la segunda parte. Es decir que la expresión queda formulada como '*4 es un número natural o entero*'. Este cambio estuvo motivado porque una vez finalizado el análisis de las respuestas a este ítem en la versión 2, se consideró que quizás la formulación está demasiado 'dirigida' para la conversión. La nueva formulación requiere de un tratamiento previo, en el registro coloquial, para obtener las dos proposiciones que conformarán la expresión simbólica. Además, esto permitirá una posible comparación con el ítem del Ejercicio 2, '$4 \in \mathbb{N} \vee \mathbb{Z}$'.

Tal como se anticipó al comienzo de esta sección, los criterios de valoración se mantuvieron idénticos a los de la versión anterior.

En la Figura 4.19 se presenta en enunciado de este ejercicio tal como aparece en el protocolo utilizado.

❹ Escriba en forma simbólica cada una de las siguientes expresiones coloquiales.

Expresión coloquial	**Expresión simbólica**
3 es un número entero y positivo	
3 y 5 son números naturales	
4 es un número natural o entero	
Cada número entero es menor que su sucesor	
Algunos números naturales son negativos	
El cuadrado de cualquier número real es positivo o cero	

Figura 4.19. Enunciado del Ejercicio 4 de la tercera versión del instrumento

4.8. FASE 7: ANÁLISIS DE LA VERSIÓN 3

Para esta última versión del instrumento se calculó el coeficiente de Kuder-Richardson para determinar su confiabilidad. En este caso se obtuvo un valor de 0.793 (ver Anexo 2), que sigue siendo un valor aceptable pues se mantiene por encima de 0.70.

Dado que las tareas propuestas son, básicamente, las mismas que en la versión anterior y que los ítems correspondientes a cada ejercicio son los mismos o con pequeñas modificaciones, no se realizó para esta versión el análisis de la complejidad semiótica de cada uno de ellos.

En el próximo capítulo, podrá observarse que los resultados obtenidos con esta versión extremadamente similares a los obtenidos en la versión anterior, salvo en lo referido a la asignación de los valores de verdad, pues en esta última versión se incluyó el requerimiento de la correspondiente argumentación. Esto reafirma la validez general que el instrumento posee.

Capítulo 5

RESULTADOS Y ANÁLISIS

5.1. CONSIDERACIONES GENERALES

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a lo largo de la investigación como así también el análisis de los mismos. En algunos casos se muestran resultados cuantitativos, con el propósito de situar en contexto la medida del éxito o el fracaso en las resoluciones de las distintas tareas. El resto de los análisis están efectuados en forma cualitativa, categorizando los tipos de respuestas y/o los tipos de errores que se manifiestan y estudiando la complejidad semiótica que está implícita en tareas con expresiones simbólicas.

El capítulo tiene como propósito mostrar el proceso completo de investigación seguido en esta tesis, razón por la cual se presentan los resultados y análisis de todas las fases, aún las iniciales donde se debieron hacer ajustes. Está organizado en seis secciones correspondientes a:

- los resultados de la administración de la versión piloto del instrumento,
- los resultados de la segunda versión del instrumento,
- las entrevistas efectuadas a posteriori de la administración de la segunda versión,

- los resultados de la tercera versión del instrumento,
- el estudio de la red de funciones semióticas que se presentan como parte de la construcción de significado de los símbolos, y
- la definición y caracterización de niveles del proceso de construcción de significado de los símbolos seleccionados para el estudio.

5.2. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA VERSIÓN PILOTO DEL INSTRUMENTO

Los datos recolectados a partir de la administración de la versión piloto del instrumento permitieron la reformulación y mejora de esta herramienta. Los resultados que se presentan en esta sección son globales para cada ejercicio propuesto, en el sentido de que están orientados a mostrar la adecuación o no de las tareas seleccionadas, en vista del propósito de la investigación. Los ejercicios que componen esta versión del instrumento fueron descritos en la Sección 4.2 del Capítulo 4.

5.2.1. EJERCICIO 1

En el primer ejercicio se propusieron siete símbolos para los que se solicitaba su lectura y un ejemplo en el que se lo empleara. En la Tabla 5.1 se muestran los porcentajes de estudiantes que resolvieron correctamente las tareas de lectura y de ejemplificación como así también los casos en los que se manifestaron errores en la formulación del ejemplo propuesto. Tal como se detalló en la Sección 3.5 del Capítulo 3, esta versión del instrumento fue administrada a 41 estudiantes.

Tabla 5.1. Porcentajes de resoluciones del Ejercicio 1 de la versión piloto.

Símbolo	Lectura correcta	Ejemplo bien	Ejemplo regular	Ejemplo mal	No propone ejemplo
$\in$	100	41	49	10	0
$\notin$	98	39	41	15	4
$\subset$	17	19	10	32	39
$\forall$	100	39	41	12	7
$\exists$	100	46	36	10	7
$\wedge$	95	2	63	24	10
$\vee$	93	4	58	24	12

Los resultados obtenidos para los símbolos $\in$ y $\notin$ son muy similares, como así también los tipos de errores que se presentaron. En casi todos los casos, los estudiantes resuelven de manera análoga para ambos símbolos. Esto condujo a la decisión de no incluir el símbolo $\notin$ en la siguiente versión del instrumento, ya que no aportaba información relevante ni distinta que el propio símbolo '$\in$'.

El símbolo de inclusión es el que se presenta como menos conocido por los estudiantes, tanto en su denominación en el lenguaje coloquial como en su uso.

Por su parte, los símbolos de conjunción y disyunción, si bien se manifiestan como conocidos pues la gran mayoría de los estudiantes realiza correctamente su lectura, también se evidencian como los más desconocidos en su uso.

Los casos de ejemplificación que se consideraron regulares son aquellos en los que el símbolo no fue utilizado de un modo completamente erróneo, no obstante, de la expresión propuesta no puede observarse fehacientemente que el estudiante conoce la sintaxis correspondiente al símbolo en cuestión. En el caso del símbolo de pertenencia y de inclusión, numerosos estudiantes propusieron expresiones en las que aparece algún literal, como por ejemplo '$x \in R$' o '$A \subset B$', en los que debe asumirse que los mismos juegan un determinado rol que no es constatable fuera de contexto, o en una expresión aislada como son estos ejemplos. Para los cuantificadores, se observa que los estudiantes cuantifican una variable pero no colocan luego una función proposicional, con lo cual la expresión cuantificada no está completa. Para los símbolos correspondientes a los operadores lógicos de conjunción y disyunción, resultó notablemente alto el número de estudiantes que lo resuelve de manera regular. Los ejemplos propuestos por los estudiantes que se incluyen en este caso contienen como operandos expresiones que no son proposiciones, como por ejemplo '$p \wedge q$', en los que debe suponerse que los literales ofician de proposiciones, pero fuera de contexto no resultan serlo. También dentro de esta categoría de ejemplos se observaron casos del estilo a '$x=3 \vee x=5$', en los que los operandos no tienen valor de verdad.

Todas estas observaciones condujeron a la decisión de modificar el enunciado de este ejercicio solicitando que el ejemplo propuesto sea *verdadero*.

Entre los casos de ejemplos mal formulados, correspondientes a la conjunción y disyunción, se observaron con cierta frecuencia expresiones del tipo '$3 \wedge 9 \in N$'. Este tipo de error dio lugar a la posterior inclusión del ítem incorrectamente formulado del

Ejercicio 2 de la segunda versión del instrumento (‘$-5 \wedge 4 \in R$’). Además, a modo de indagación, se decidió que, para el ítem sintácticamente incorrecto correspondiente a la disyunción, la operación se colocaría entre dos conjuntos (‘$4 \in N \vee Z$’), con el objetivo de observar si para los estudiantes también resulta aceptable esta forma de escritura.

5.2.2. EJERCICIO 2

En este ejercicio se propusieron siete expresiones simbólicas para las cuales el estudiante debía decidir si cada una está correctamente escrita o no y, en caso de ser correcta, determinar su valor de verdad.

Como ya se anticipó en la Sección 4.3, el enunciado de este ejercicio provocó un conflicto semiótico en su interpretación, pues los estudiantes confundieron ‘escritura correcta’ con la condición ‘es verdadera’. Esto provocó una distorsión en los resultados obtenidos. En la Tabla 5.2 se presentan los porcentajes para cada una de las respuestas posibles. En la celda correspondiente a la resolución correcta, el valor aparece en negrita.

Tabla 5.2. Porcentaje de resoluciones del Ejercicio 2 de la versión piloto.

Ítem	Decide que la escritura es incorrecta	Decide que la escritura es correcta y que es:		No resuelve
		Verdadera	Falsa	
$3 \subset Z$	**36**	36	7	19
$\{1, 2\} \subset N$	19	**49**	10	22
$N \in Z$	**15**	68	15	2
$-2 \in N$	15	7	**76**	2
$[2, 5] \subset R$	17	**44**	10	29
$4 \in N \wedge 4$ es impar	12	4	**83**	0
$-1 \in N \vee -1 \in Z$	12	49	**34**	4

Más allá de la distorsión que pudo provocar el conflicto semiótico antes mencionado, puede observarse que aparece manifiesta cierta confusión entre los símbolos de pertenencia y de inclusión. Por ejemplo, más de la mitad de los estudiantes acepta como correctamente escrita la expresión ‘$N \in Z$’.

También se observa que no está afianzada la asignación del valor de verdad de una disyunción (último ítem), pues numerosos estudiantes consideran que la expresión es falsa.

Al momento de hacer comparaciones entre el desempeño de los estudiantes con los distintos símbolos, se observó que no aparecían utilizados en dos versiones (una correcta y otra que no lo es) como así también que no todos los símbolos en estudio estaban involucrados en las expresiones presentadas en este ejercicio. Estas razones dificultaron el análisis, sumadas al conflicto semiótico en el enunciado y a la gran cantidad de estudiantes que no resolvieron algunos de los ítems, condujeron a las modificaciones que se operaron sobre los ítems de este ejercicio en la segunda versión del instrumento.

5.2.3. EJERCICIO 3

Las tres expresiones propuestas, para su simbolización, en este ejercicio requieren realizar una conversión que resulta congruente, tanto por su simplicidad como por la forma en que están enunciadas las expresiones. En los resultados expuestos en la Tabla 5.3 se observa que la mayoría de los estudiantes pudo resolver correctamente esta tarea, aunque la expresión que involucra al símbolo de inclusión es la que se presenta como de mayor cantidad de resoluciones incorrectas.

Tabla 5.3. Porcentaje de resoluciones del Ejercicio 3 de la versión piloto.

Expresión	Convierte bien	Convierte mal	No resuelve
-3 es un número entero	95	4	0
4 es positivo y -2 es negativo	85	12	2
El conjunto de los números enteros está incluido en el conjunto de los números reales	55	44	2

Para la primera expresión, puede decirse que casi la totalidad de los estudiantes interpreta como ‘pertenencia’ al verbo ‘ser’ en una expresión coloquial. Esta observación redundó en que esta conversión no necesitaba ser un aspecto evaluado por separado, como en este caso, para la siguiente versión del instrumento.

En el caso de la segunda expresión del ejercicio, la mitad de los estudiantes a los que se les consideró como bien resuelta esta tarea, no lo hicieron a través de una conversión congruente. Estos estudiantes, en lugar de utilizar una desigualdad con respecto al cero para indicar la positividad o negatividad del número, lo representan a través de la pertenencia a un conjunto de números positivos o negativos, utilizando expresiones tales como ‘$4 \in R^{+} \wedge -2 \in R^{-}$’. Si bien la expresión no es incorrecta, tampoco es completamente fiel a la expresión coloquial dada. En realidad, en estos casos agregaron a la expresión simbólica información que no se daba en la expresión original, como es un conjunto de pertenencia. Esto podría deberse a que el verbo ‘ser’ se asocia a ‘pertenencia’, como se dijo en relación a la expresión anterior.

Para esta expresión, también se observó que la similitud entre las dos proposiciones (ambas relativas al signo de un número) aportaba información redundante, por lo que se decidió que en la siguiente versión del instrumento alguna de ellas sería reemplazada por otro tipo de expresión.

En relación a la tercera expresión, la cantidad de estudiantes que resuelven correctamente es mucho menor. La mayoría de los estudiantes que simbolizan incorrectamente lo hacen utilizando el símbolo de pertenencia. Coincidentemente, estos estudiantes no habían completado cómo se lee el símbolo de inclusión, o lo habían hecho mal. Sin embargo, la expresión coloquial ‘está incluido en’ que aparece en esta expresión los conduce a utilizar el símbolo de pertenencia, como si naturalmente y por la similitud entre las expresiones coloquiales, la inclusión pueda ser simbolizada por la pertenencia.

5.2.4. EJERCICIO 4

El ejercicio está compuesto por conversiones, en ambos sentidos, entre expresiones en el registro coloquial y el registro simbólico-algebraico. También se solicita el valor de verdad de cada una de las expresiones.

En las Tablas 5.4 y 5.5 se presentan los porcentajes del tipo de resoluciones para este ejercicio, discriminados según el sentido de la conversión requerida entre los registros coloquial y simbólico-algebraico.

Tabla 5.4. Porcentaje de resoluciones del Ejercicio 4 de la versión piloto (Primera parte)

Expresión	Convierte bien	Convierte mal	No resuelve	Asigna correctamente valor de verdad
Todo número entero es menor que su sucesor	63	32	4	83
Algunos números naturales son pares	44	46	8	93
Ningún número entero es mayor que 2 y menor que 3	55	46	0	63

Para todas las expresiones propuestas en lenguaje coloquial, los porcentajes de la Tabla 5.4 muestran que las resoluciones correctas rondan la mitad de los casos.

La omisión del cuantificador o el uso de dos cuantificadores se encuentran entre los errores más frecuentes que se presentan entre los estudiantes que realizaron una conversión incorrecta de la primera expresión. Sólo 3 estudiantes cometen el error de omitir el conjunto de referencia. El error más reiterado para la segunda expresión se encuentra en la formulación de la función proposicional, sin embargo, no se observan dificultades en la selección del cuantificador a utilizar. Los errores más frecuentes en la tercera expresión están ligados a la cuantificación, omitiendo el conjunto de referencia o en la negación del cuantificador existencial.

Con relación a la asignación del valor de verdad, debe notarse que ésta se realiza a partir de la expresión coloquial, por lo tanto puede considerarse más sencilla, aunque aún así algunos estudiantes no lograron establecerla correctamente.

En la Tabla 5.5 se presentan los porcentajes de resoluciones de las conversiones del registro simbólico-algebraico al registro coloquial. En ella se categorizan las respuestas según el tipo de conversión realizada, como así también, se consignan las respuestas incorrectas o ausentes. También se indican los porcentajes de resoluciones correctas en la asignación del valor de verdad.

Tabla 5.5. Porcentaje de resoluciones del Ejercicio 4 de la versión piloto (Segunda parte).

Expresión	Realiza conversión global	Realiza conversión mixta	Realiza conversión SaS	Resuelve mal	No resuelve	Asigna bien valor de verdad
Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a.b=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$	39	10	29	15	7	83
$\exists x \in \mathbb{Z} / x < 0$	49	29	20	0	2	80
$\forall x \in \mathbb{N}$ $x=2.k \vee x=2.k+1$, $k \in \mathbb{N}$	27	12	17	24	20	55

En general, son pocos los estudiantes que ponen de manifiesto la comprensión global de la expresión simbólica dada, logrando formular la expresión completamente en lenguaje coloquial, sin utilizar las variables y sin realizar una simple decodificación de cada símbolo. Algunos utilizan expresiones combinadas, realizando conversiones de tipo mixto, en las que aparece la variable pero interpretan el sentido de la función proposicional, o bien, no mencionan la variable (la interpretan como un número en general) pero la función proposicional es descripta símbolo a símbolo, haciendo una decodificación literal de la expresión simbólica.

La tercera de las expresiones es la que presentó mayor dificultad, pues disminuyen las conversiones en todas sus clasificaciones y aumentan las resoluciones incorrectas y las no realizadas.

En términos generales, a este ejercicio se le encontraron algunas deficiencias en su diseño. Por un lado, no se solicitan conversiones, en ambos sentidos, con otros de los símbolos en estudio, como por ejemplo la conjunción y la disyunción.

5.3. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA SEGUNDA VERSIÓN DEL INSTRUMENTO

Como ya se expresó en el Capítulo 4, para cada ítem de cada uno de los ejercicios se le otorgaron valores correspondientes a un desempeño general, utilizando una variable dicotómica, como así también se consignó la manifestación de la o las funciones semióticas involucradas.

Una vez establecidos los criterios de puntuación para los datos relevados, se obtuvieron algunos valores cuantitativos que describen el desempeño de los estudiantes en cada una de las tareas propuestas en los ejercicios del instrumento.

Debe hacerse una aclaración con relación a los valores numéricos con que se trabajará en las subsecciones que siguen, correspondientes a la versión 2 del instrumento. Dado que el tamaño de la muestra es de 101 estudiantes, los valores que representan la cantidad de estudiantes y los porcentajes correspondientes son prácticamente idénticos. Por esa razón, se utilizan los valores enteros que indican cantidad de estudiantes, pero en todos los casos podrían interpretarse como porcentajes, pues su diferencia está en el orden de los centésimos y no es significativa para los análisis que se efectúan.

También se presentan análisis cualitativos, que permiten establecer categorías en los tipos de resoluciones, analizar los errores cometidos por los estudiantes y obtener conclusiones parciales para cada ejercicio.

5.3.1. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL EJERCICIO 1

En el ejercicio se solicita la realización de dos tareas: indicar cómo se lee el símbolo y escribir un ejemplo utilizándolo cuyo valor de verdad debía ser verdadero.

En la Tabla 5.6 se presentan la cantidad de estudiantes que resolvieron correctamente cada una de las tareas propuestas, para cada uno de los símbolos que son objeto de estudio. Las columnas indicadas con L corresponden a la tarea de lectura del símbolo y las columnas indicadas con EE, a la escritura del ejemplo. Los valores expresados indican la cantidad de alumnos que resolvieron correctamente en cada caso.

Tabla 5.6. Cantidad de estudiantes que resolvieron correctamente el Ejercicio 1 (de la versión 2)

Símbolo	$\in$		$\subset$		$\forall$		$\exists$		$\wedge$		$\vee$	
Tarea	L	EE	L	EE	L	EE	L	EE	L	EE	L	EE
Cantidad de estudiantes	100	83	52	38	100	56	101	45	90	25	89	33

Si se observan las columnas correspondientes a la lectura (indicadas con L), resulta evidente que la mayoría de los símbolos son conocidos por prácticamente todos los estudiantes. La excepción es el símbolo de inclusión, para el que apenas la mitad de los alumnos evidenciaron conocer su denominación coloquial. Como se verá más adelante, esta deficiencia no es sólo en la denominación sino también en el uso.

En general, se observa que la escritura de un ejemplo utilizando el símbolo no es tan exitosa, a pesar de conocer la denominación coloquial del mismo. Salvo en el caso de la pertenencia, en que 83 alumnos pudieron resolver bien la tarea de escribir un ejemplo con las condiciones requeridas, en los demás casos apenas ronda la mitad de los estudiantes, o menos aún. La dificultad se manifiesta, en primer lugar, en la sintaxis asociada a cada símbolo y, en segundo lugar, relacionada con el valor de verdad.

En la Tabla 5.7, se presentan las cantidades correspondientes a cada una de dichas funciones semióticas, para cada símbolo.

Tabla 5.7. Cantidad de estudiantes que manifestaron las funciones semióticas asociadas a cada símbolo en el Ejercicio 1 (de la versión 2)

	Símbolo	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$
Función semiótica	F1	100	52	100	101	90	89
	F2	95	50	69	58	40	49
	F3	83	38	56	45	25	33

A partir de los valores de la Tabla 5.7, puede observarse que para todos los símbolos los valores decrecen para cada función semiótica estudiada. Esto es, los estudiantes que logran escribir un ejemplo sintácticamente correcto son menos que los que manifiestan conocer la denominación coloquial del símbolo, y los que pueden establecer correctamente el valor de verdad son menos de los que pudieron escribir una expresión sintácticamente correcta.

Cada símbolo tiene características diferentes, por lo que se efectuará un análisis particular a cada caso, a través del uso de configuraciones epistémicas/cognitivas y funciones semióticas.

La tarea de escribir un ejemplo utilizando un determinado símbolo es un ejercicio de tipo abierto, por lo que la respuesta no es única. Por lo tanto, para analizar los resultados obtenidos, se construyó la configuración epistémica de una resolución tipo de cada ítem, tomada de entre las resoluciones formuladas por los estudiantes de la muestra.

En los análisis tradicionales en los que se emplean configuraciones epistémicas/cognitivas como instrumento no se incluyen funciones semióticas. Sin embargo, en este caso se las incorporó para observar las vinculaciones que estas últimas establecen sobre los objetos primarios que constituyen cada configuración. De esta manera se logró que la combinación de ambas herramientas permitiera un análisis más refinado de cada ítem, visualizando detalladamente las redes mediante las cuales se relacionan los elementos particulares de estas configuraciones epistémicas/cognitivas de expresiones simbólicas.

La resolución de cada ítem involucra una gran cantidad de funciones semióticas, sin embargo no se las ha representado a todas, sino que se prescindió de aquellas que son irrelevantes al proceso en estudio. De esta manera, en cada esquema se incluyen las funciones semióticas que fueron definidas especialmente para esta investigación y algunas otras a las que se denominó *funciones semióticas auxiliares* (FA). Estas últimas no corresponden al proceso de significación propio del símbolo en estudio pero necesariamente intervienen en la interpretación de la totalidad de la expresión configurada. Por esta razón, en las próximas figuras se las representa con líneas punteadas y en color gris, mientras que las funciones semióticas *principales* (F1, F2 y F3) son representadas en color negro y con líneas continuas y gruesas.

En las próximas subsecciones se describen, para cada uno de los símbolos en estudio, los tipos de resoluciones recolectadas para este ejemplo, las configuraciones epistémicas/cognitivas, las funciones semióticas intervinientes y se categorizan los errores observados.

5.3.1.1. Denominación y ejemplificación para el símbolo de pertenencia

De acuerdo con los valores presentados en la Tabla 5.7, el símbolo de pertenencia fue reconocido por todos los estudiantes salvo uno, pero 95 pudieron formular un ejemplo sintácticamente correcto y, de ellos, sólo 83 con valor de verdad verdadero, como se solicitaba. La mayoría de los ejemplos corresponden a valores correspondientes a alguno de los conjuntos numéricos N, Z o R (77 alumnos), otros utilizaron valores pertenecientes a un intervalo real (7 alumnos).

Para construir la configuración epistémica/cognitiva de la resolución para el símbolo de pertenencia se tomó un ejemplo tipo, que es ‘4∈R’, ya que la mayoría de los estudiantes respondió escribiendo un número que pertenece a algún conjunto numérico. La expresión elegida fue la respuesta de los estudiantes identificados con A7, A78 y A96, que corresponden a las carreras de Ingeniería, Matemática y Bioquímica, respectivamente.

En la Figura 5.1 se presenta la configuración epistémica para la expresión ‘4∈ R’, con algunas funciones semióticas incorporadas. Como se aclaró anteriormente, las flechas negras compactas representan las funciones semióticas definidas para la investigación, mientras que las grises punteadas representan a otras funciones semióticas que intervienen en el significado de la expresión, a las que se denominó ‘Auxiliares’.

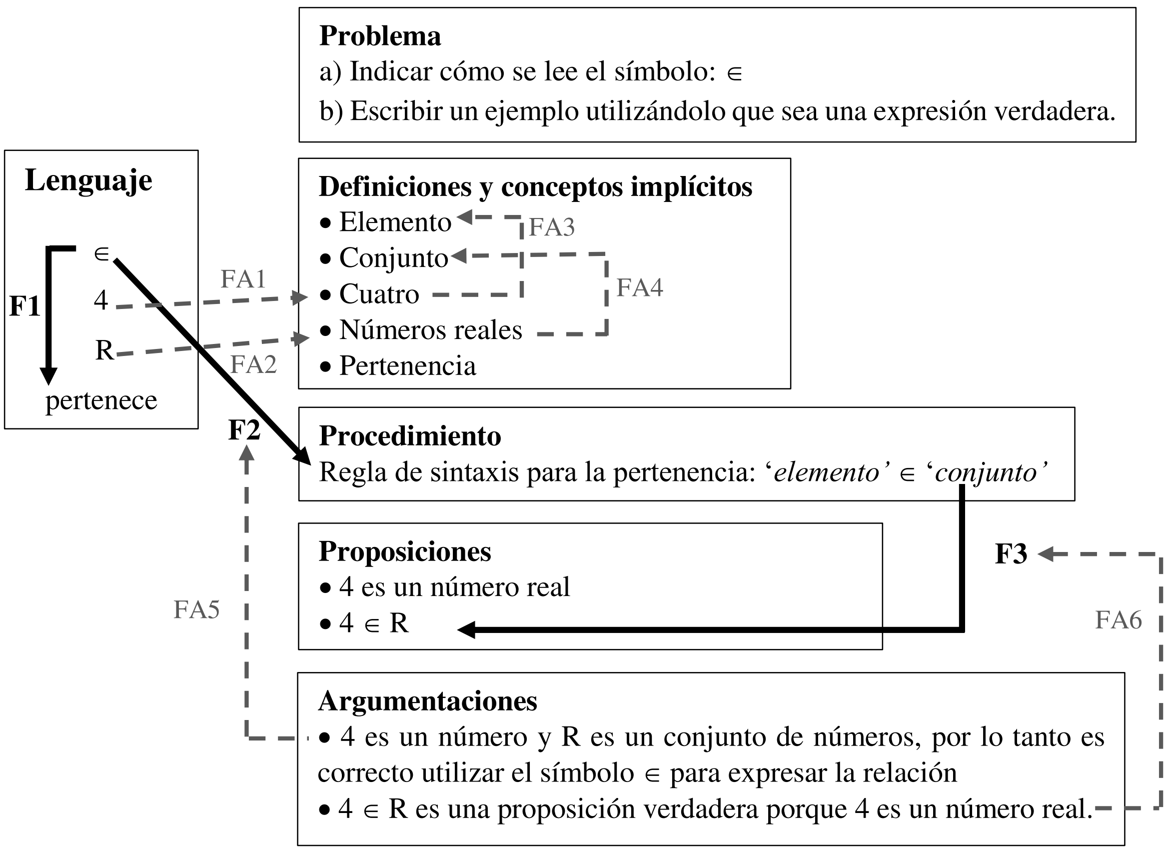


Figura 5.1. Configuración epistémica/cognitiva y funciones semióticas de una expresión como ejemplo de uso del símbolo ∈

En la Figura 5.1 puede observarse la trama de funciones semióticas que intervienen en el proceso de resolución de esta tarea, y de qué manera estas funciones semióticas vinculan los elementos primarios que constituyen la configuración epistémica.

La función semiótica F1, que se establece entre el símbolo y su denominación coloquial, se manifiesta en la resolución de la primera tarea del Ejercicio 1, en la que el estudiante debe completar 'Cómo se lee'.

En la resolución de la segunda tarea, donde el estudiante debe emplear el símbolo proporcionando un ejemplo cuyo valor de verdad sea *verdadero*, se manifiestan las funciones semióticas F2 y F3.

La función semiótica F2 se manifiesta en la precisión de la sintaxis empleada. En términos de los objetos de la configuración epistémica, vincula un objeto del Lenguaje con el objeto Procedimiento. La función F3, asocia el Procedimiento con la Proposición que constituye la expresión formulada.

Además se representaron seis funciones semióticas auxiliares, que son algunas de las que intervienen necesariamente para la correcta formulación del ejemplo. Las mismas se describen en la Tabla 5.8, detallando los correspondientes antecedente y consecuente y el modo en que participa en la resolución de esta tarea.

Tabla 5.8. Funciones semióticas auxiliares intervinientes en la construcción de un ejemplo con el símbolo $\in$.

Función semiótica auxiliar	Antecedente		Consecuente
FA1	4	$\rightarrow$	Cuatro
FA2	R	$\rightarrow$	números reales
FA3	cuatro	$\rightarrow$	Elemento
FA4	números reales	$\rightarrow$	Conjunto
FA5	Argumentación de la sintaxis	$\rightarrow$	F2
FA6	Argumentación del valor de verdad	$\rightarrow$	F3

Las funciones FA1 y FA2 relacionan otros objetos simbólicos que intervienen en la expresión con su correspondiente vocablo. Estas funciones son análogas a la función semiótica F1 que se definió para el análisis de los símbolos que son objeto de estudio. Podría decirse que estas funciones semióticas son las funciones F1 de los símbolos que participan de la expresión.

Las funciones FA3 y FA4 relacionan los vocablos con el rol que juegan en la expresión y por lo tanto, condicionan la adecuación de la sintaxis.

Finalmente, las funciones FA5 y FA6 relacionan distintas argumentaciones con las funciones semióticas F2 y F3 respectivamente. La función FA5 interviene en el correcto establecimiento de la función F2 ya que fundamenta la sintaxis de la expresión a partir de los roles que juegan los objetos simbólicos intervinientes. Por su parte, la función FA6 es requerida para el establecimiento de la función F3, puesto que relaciona la argumentación, por la cual la expresión formulada es verdadera, con la función F3.

En la resolución de la tarea de escribir un ejemplo utilizando el símbolo se detectaron errores que ya fueron mencionados. Los mismos pueden agruparse en dos categorías:

1- *Uso de literales*. Los alumnos que comenten este tipo de error proponen expresiones tales como ‘x ∈ R’. En estos casos puede decirse que se manifiesta la función F2 sólo si se asume que el literal (x) juega el rol de elemento, lo cual lleva a establecer la función semiótica auxiliar FA3 partiendo del literal. Sin embargo, es claro que los estudiantes que escribieron este tipo de expresiones no formularon Argumentaciones. Por consiguiente no no manifiestan como establecidas las funciones FA5 y FA6 ni la función F3, pues no es posible determinar el valor de verdad (12 casos).

2- *Confusión entre pertenencia e inclusión*. Los estudiantes que cometieron errores de sintaxis asociados a la confusión entre pertenencia e inclusión, vinculando a través de la pertenencia a dos conjuntos, probablemente desconocen la regla de sintaxis que constituye el procedimiento y no establecieron la función semiótica auxiliar FA3 para determinar qué objeto de la expresión es el *elemento* (4 casos).

Para este símbolo (∈) no se observaron casos en los que el ejemplo fuera sintácticamente correcto pero el valor de verdad fuera falso.

5.3.1.2. Denominación y ejemplificación para el símbolo de inclusión

El símbolo de inclusión es el que se distingue como menos conocido por los estudiantes. En la Tabla 5.7 se observa que sólo 52 estudiantes pudieron dar una expresión coloquial asociada. Las expresiones consideradas válidas fueron ‘incluido’ que es la más habitual, pero también ‘contenido en’ y ‘es subconjunto de’ que aparecieron entre los datos relevados. Entre las expresiones coloquiales incorrectas, las que más se repiten son ‘incluye’, ‘contiene a’ y ‘conjunto’. Esta última denominación parece disparatada. El alumno identificado como A39, se refiere a esta denominación durante la entrevista: “*Lo había visto como conjunto, no me acordaba* (se refiere al momento en que resolvió en el instrumento) *si era incluido o conjunto*”. Cuando se le vuelve a preguntar si sabe en qué casos debe utilizarse, responde: “*Lo explicó la profesora de álgebra, pero no me* *acuerdo*". Dado que no es posible que en sus clases universitarias se haya identificado al símbolo de inclusión como conjunto, pareciera que en este alumno prevaleció la palabra 'conjunto' (probablemente haya sido enfatizada en relación al tipo de objetos que relaciona el símbolo) y construyó la función semiótica F1 del símbolo con el vocablo 'conjunto', como de hecho se observa en su resolución del instrumento.

Es para destacar que la totalidad de alumnos de la carrera de profesorado en Matemática que respondieron correctamente a esta tarea utilizaron la palabra 'contenido'. Esto conduce a pensar que en prácticas operativas o discursivas previas conocieron la denominación de este símbolo y la asociaron con "contenido" en lugar de 'incluido' que es el más habitual de encontrar en la bibliografía.

Con relación a la formulación de los ejemplos requeridos para la tarea, se registraron 50 sintácticamente correctos, aunque sólo 38 de ellos lo hicieron con el valor de verdad solicitado. En 17 casos no se resolvió la tarea de escribir el ejemplo.

La mayoría de los ejemplos correctamente formulados utilizan alguno de los conjuntos numéricos N, Z, Q, R o C. Unos pocos estudiantes (8 casos) utilizaron subconjuntos particulares, ya sean intervalos reales o subconjuntos discretos finitos. Se observó un único caso en que el ejemplo está expresado en términos en los que se debe asumir que los literales utilizados representan un conjunto ('$A \subset B$').

Como se expresó anteriormente, debido a que no hay una respuesta única para la tarea se tienen diferentes configuraciones epistémicas/cognitivas. Por esta razón se consideró uno de los ejemplos más reiterado, '$N \subset Z$', que fue presentado por 9 alumnos, distribuidos en las carreras de Ingeniería, Bioquímica y Profesorado en Matemática. En la Figura 5.2 se presenta la configuración de esta expresión, con las funciones semióticas más relevantes que intervienen.

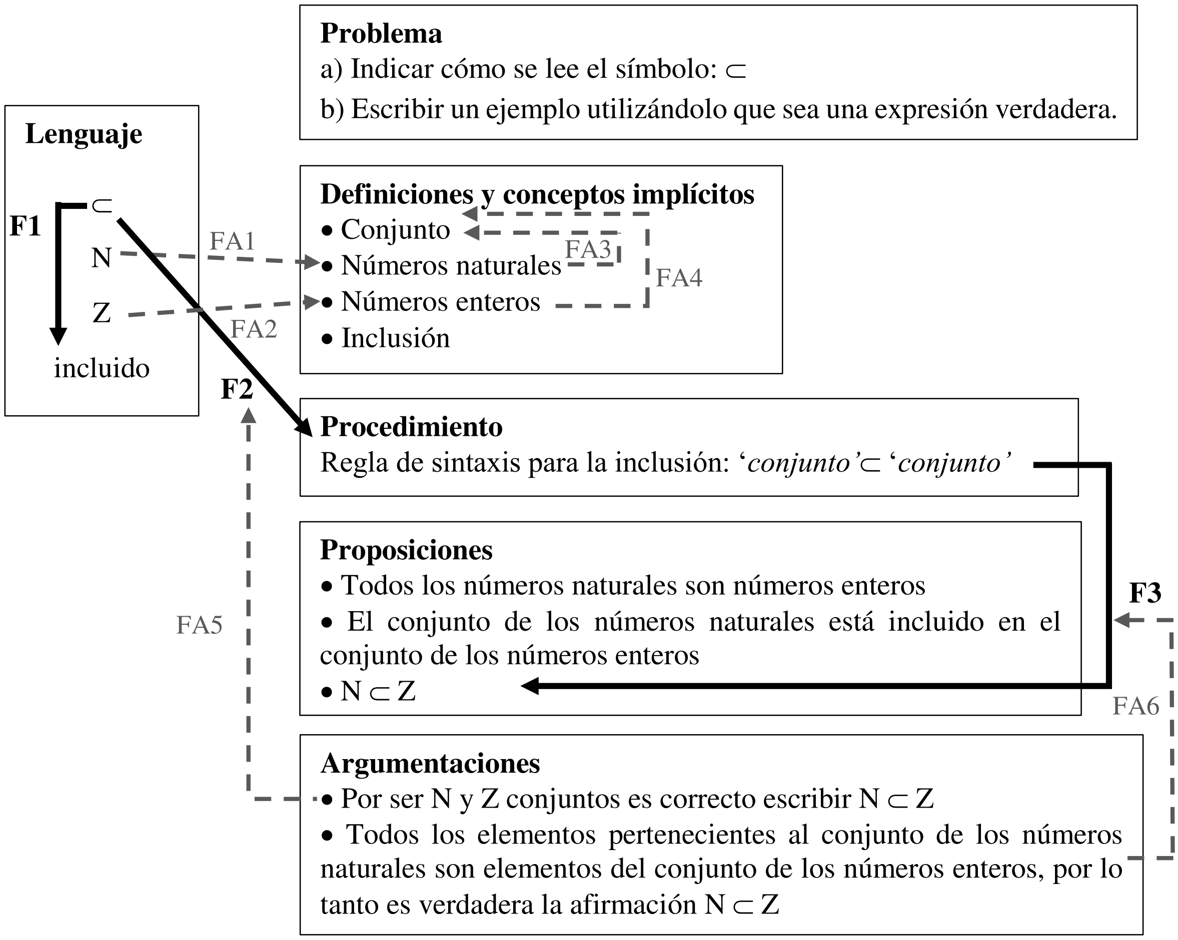


Figura 5.2. Configuración epistémica/cognitiva y funciones semióticas de una expresión como ejemplo de uso del símbolo ⊂

En la trama de funciones semióticas que se representan en la configuración epistémica/cognitiva de la Figura 5.2, aparecen las funciones semióticas principales (F1, F2 y F3) y otras que son auxiliares. Estas últimas se describen en la Tabla 5.9.

Tabla 5.9. Funciones semióticas auxiliares intervinientes en la construcción de un ejemplo con el símbolo ⊂.

Función semiótica auxiliar	Antecedente		Consecuente
FA1	N	→	números naturales
FA2	Z	→	números enteros
FA3	números naturales	→	conjunto
FA4	números enteros	→	conjunto
FA5	Argumentación de la sintaxis	→	F2
FA6	Argumentación del valor de verdad	→	F3

Las funciones semióticas auxiliares FA1 y FA2 relacionan dos símbolos que intervienen en la expresión (conjuntos numéricos) con los correspondientes vocablos que los identifican. Como se expresó para el caso del símbolo de pertenencia, estas funciones son análogas a la función semiótica F1 que se definió para el análisis de los símbolos en estudio.

Por su parte, las funciones FA3 y FA4 relacionan los vocablos con su condición de conjunto, razón por la cual condiciona la adecuación de la sintaxis.

Finalmente, las funciones FA5 y FA6 relacionan distintas argumentaciones con las funciones semióticas F2 y F3 respectivamente. La función FA5 interviene para el correcto establecimiento de la función F2, ya que fundamenta la sintaxis de la expresión a partir de los roles que juegan los objetos simbólicos intervinientes. La función FA6 es necesaria para el establecimiento de la función F3 debido a que relaciona la argumentación, por la cual la expresión formulada es verdadera con la función F3.

Los errores observados en la formulación de un ejemplo, utilizando el símbolo de inclusión, pueden clasificarse en tres grupos o categorías:

1- *Asociados a la confusión con el símbolo de pertenencia.* En estos casos la expresión formulada vincula un número con un conjunto numérico a través de la inclusión. Pareciera que prevalece la construcción en lenguaje coloquial, donde las expresiones 'pertenecer' y 'estar incluido' aluden a situaciones similares en términos coloquiales y podrían interpretarse como sinónimos. Estos estudiantes manifiestan la lectura del símbolo utilizando expresiones tales como 'contenido', 'contiene', 'integra' o 'comprende'. Estos vocablos conducen a la idea de que algo *forma parte* de alguna otra cosa, y esa es la noción que pareciera predominar por sobre el formalismo simbólico. Es decir, la idea manifestada en la expresión coloquial prevalecería por sobre el rigor de la sintaxis que requiere el uso de los símbolos matemáticos. Esto parece suceder aún en los casos en que los estudiantes expresan su lectura como 'incluido en' y sin embargo cometen este mismo tipo de error en la escritura del ejemplo. En estos casos no se manifiesta como construida la función semiótica F2 relativa a la sintaxis (19 casos).

2- *Asociados a la confusión con el símbolo de pertenencia e invirtiendo el orden.* Además de observase un uso del símbolo de inclusión como si fuera el símbolo de pertenencia para vincular un elemento y un conjunto, estos casos tienen un agravante que es el orden en que se presentan los símbolos. En estos casos la estructura que le otorgan a la expresión es: 'conjunto $\subset$ número'. Si bien el signo está mal utilizado, considerando la lectura habitual de izquierda a derecha, esta inversión en el orden se corresponde con la expresión coloquial que le asignan al símbolo, que es 'incluye', 'contiene a' y 'comprende'. Si se considera esta coherencia entre el vocablo utilizado y la forma de la expresión, los ejemplos son similares a los del tipo anterior, en el que la idea coloquial prevalece, conduciendo a un uso de la inclusión como si fuera pertenencia. Tampoco en estos casos se manifiesta como construida la función semiótica F2 (9 casos).

3- *El valor de verdad es falso.* El valor de verdad de la expresión no se corresponde con lo que el enunciado solicita. La falsedad se produce porque los conjuntos están relacionados en un sentido inverso, por ejemplo '$R \subset Z$'. En los casos con esta característica no se manifestaría como construida la función semiótica F3, aunque sí la función semiótica F2, pues las expresiones dadas como ejemplo efectivamente vinculan dos conjuntos. Estos estudiantes no tendrían establecida la función semiótica auxiliar FA5 para argumentar en favor de la pertenencia de los elementos a cada uno de los conjuntos. O bien, podrían estar haciendo parcialmente esta argumentación, pero realizando una lectura "desordenada" de la expresión, sin seguir el orden natural de izquierda a derecha, confundiendo cuál es el primer conjunto y cuál el segundo. Sin embargo, en todos los casos en que se presenta este tipo de ejemplo, el vocablo con el que manifiestan que se lee este símbolo es 'incluye', 'contenido' o 'contiene'. Esto implica que el establecimiento erróneo de la función semiótica F1 influye sobre la construcción de la expresión simbólica, pero deja en evidencia una coherencia entre la forma en que estos estudiantes leen el símbolo y la forma en que hacen uso de él (13 casos).

5.3.1.3. Denominación y ejemplificación para los cuantificadores

A partir de los datos presentados en la Tabla 5.7 puede inferirse que la denominación del cuantificador universal se presenta como ampliamente conocida por los estudiantes ya que prácticamente la totalidad (salvo uno) manifestaron que se lee 'para todo'. Esa casi totalidad en la lectura baja a las tres cuartas partes al momento de escribir un ejemplo sintácticamente correcto, pues fueron 69 estudiantes los que realizaron bien esa tarea, y apenas superó la mitad el número de estudiantes cuyo ejemplo es sintácticamente correcto y además es verdadero (56 estudiantes).

El cuantificador existencial fue el único de los símbolos estudiados en el que la totalidad de los estudiantes manifestó conocer su denominación coloquial. Sin embargo, poco más de la mitad de los estudiantes (58) lograron construir un ejemplo sintácticamente correcto y sólo 45 de ellos proporcionaron un ejemplo que además fuera verdadero.

Para el cuantificador universal, sólo 4 estudiantes no escribieron un ejemplo utilizándolo, mientras que para el cuantificador existencial, fueron 9 alumnos los que no expresaron el ejemplo.

Los ejemplos correctamente formulados están constituidos por una variable cuantificada en alguno de los conjuntos N, Z o R, y una función proposicional que está representada, generalmente, a través de una igualdad o desigualdad (ser positivo, ser negativo, ser mayor/menor que algún número, etc.).

En las Figuras 5.3 y 5.4 se presentan las configuraciones epistémicas/cognitivas de un ejemplo tipo utilizando un cuantificador, en las que la expresión establecida en cada caso fue elegida entre los ejemplos más reiterados que se presentaron en la muestra tomada.

Puede observarse que en estas configuraciones ya no aparecen separados cada uno de los símbolos que constituyen el objeto primario Lenguaje de la expresión estudiada, sino que se presentan agrupados en relación a la sintaxis de los cuantificadores. En estos casos no se desglosa el análisis de la pertenencia y de los restantes símbolos que forman parte de la función proposicional, pues éstos no constituyen el foco de estudio en estas configuraciones. Por consiguiente, para favorecer la lectura de las mismas no se representan esas funciones semióticas que subyacen a la interpretación de la expresión.

Para el cuantificador universal, la configuración epistémica/cognitiva que se presenta en la Figura 5.3 corresponde a la expresión ‘$\forall x \in N\ x > 0$’, que se observó en 11 casos, distribuidos en alumnos de todas las carreras en las que se recolectaron datos.

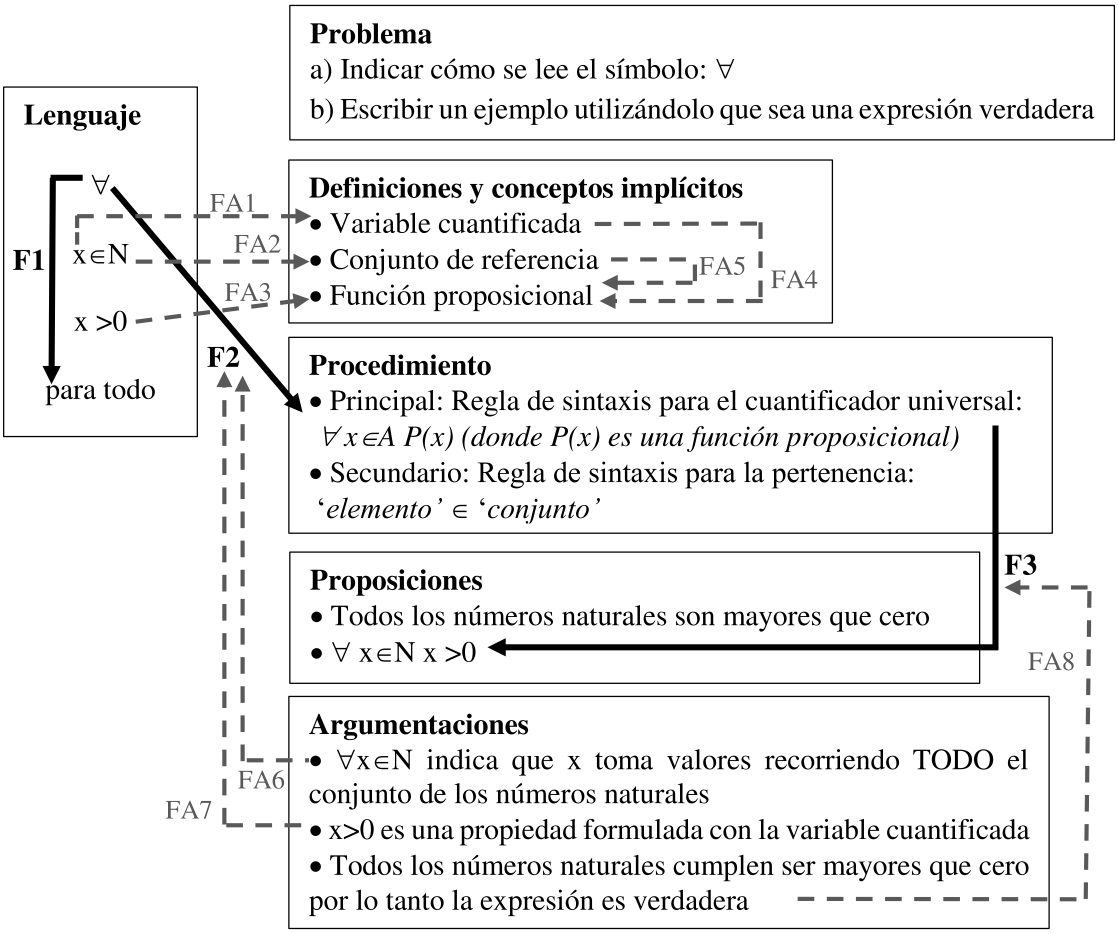


Figura 5.3. Configuración epistémica y funciones semióticas de una expresión como ejemplo de uso del símbolo ∀

La configuración construida para el cuantificador existencial corresponde a la expresión '$\exists\, x \in Z \,/\, x+2=7$'. Esta expresión es tomada como ejemplo de entre todas aquellas cuya función proposicional está formulada mediante una igualdad y fue observada en 17 casos correspondientes a estudiantes de todas las carreras. La misma se presenta en la Figura 5.4.

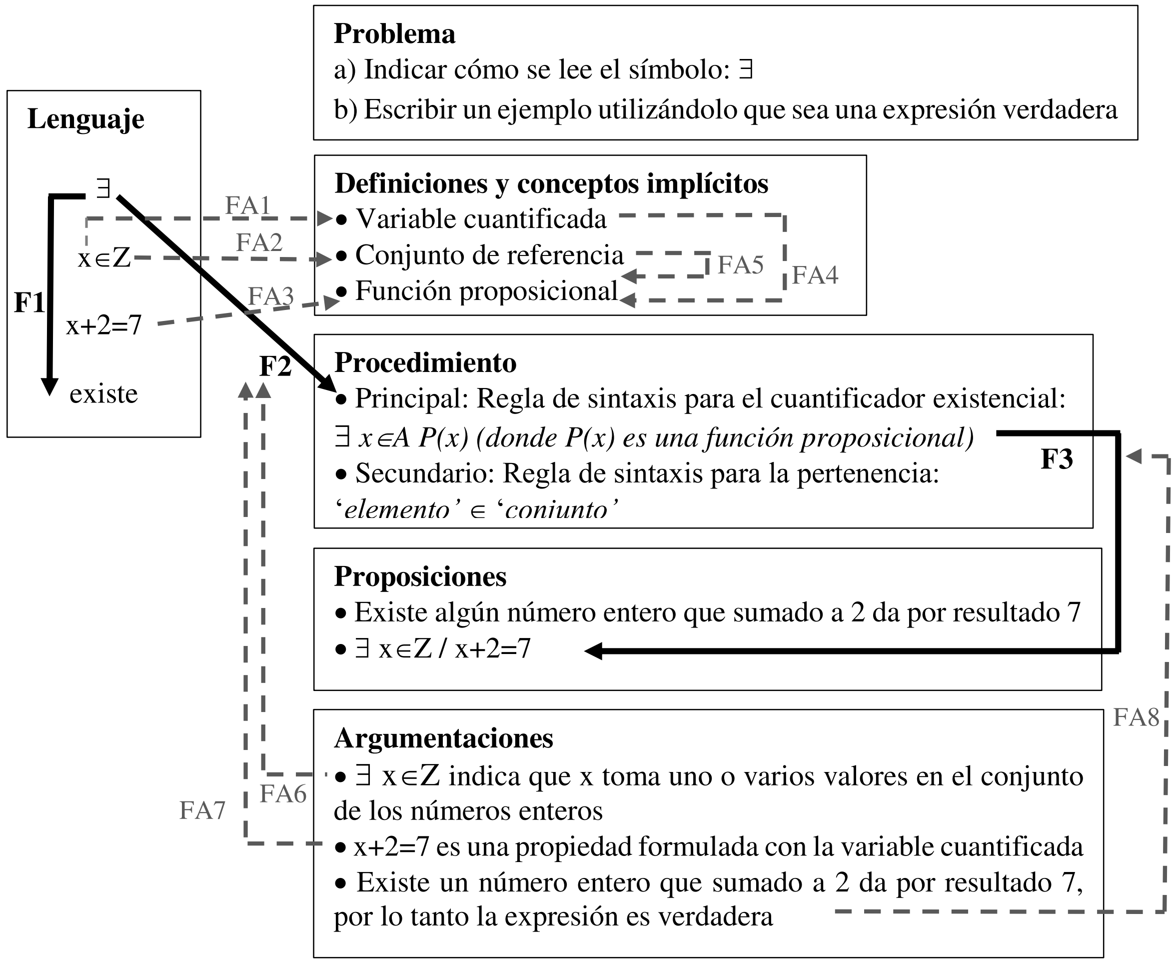


Figura 5.4. Configuración epistémica/cognitiva y funciones semióticas de una expresión como ejemplo de uso del símbolo ∃

En las dos configuraciones anteriores se han representado las tres funciones semióticas principales (F1, F2 y F3) y otras que son auxiliares. Dado que las funciones auxiliares son comunes a las expresiones formuladas con cada uno de los cuantificadores, su descripción se presenta en forma conjunta en la Tabla 5.10.

Tabla 5.10. Funciones semióticas auxiliares intervinientes en la construcción de un ejemplo de una expresión cuantificada.

Función semiótica auxiliar	Antecedente		Consecuente
FA1	x	→	variable cuantificada
FA2	N / Z (conjunto numérico)	→	conjunto de referencia
FA3	x>0 / x+2=7	→	función proposicional
FA4	variable cuantificada	→	función proposicional
FA5	conjunto de referencia	→	función proposicional
FA6	Argumentación de la variable	→	F2
FA7	Argumentación de la función proposicional	→	F2
FA8	Argumentación del valor de verdad	→	F3

La función semiótica auxiliar FA1 es la que determina el reconocimiento del literal ‘x’ en su rol de variable sobre la que opera el cuantificador. El establecimiento de esta función semiótica permite la identificación de la variable en la función proposicional.

La función FA2 confiere al conjunto numérico su condición de conjunto de referencia. Su establecimiento intervendrá en la determinación del valor de verdad de la expresión.

La función FA3 vincula la expresión simbólica con su rol de función proposicional, como propiedad que deben verificar los elementos del conjunto de referencia.

Las funciones FA4 y FA5 vinculan, respectivamente, a la variable cuantificada y al conjunto de referencia con la función proposicional; la primera en cuanto a la presencia ostensiva de la variable en dicha función y la segunda en relación a los elementos del conjunto de referencia que satisfacen la función proposicional. Además, la función FA4 incidirá en el establecimiento de la función semiótica F2, pues es relativa a la sintaxis, mientras que la función auxiliar FA5 incidirá sobre el establecimiento de la función F3, pues es requerida para determinar el valor de verdad de la expresión cuantificada.

Las funciones FA6, FA7 y FA8 relacionan distintas argumentaciones con las funciones semióticas F2 y F3. Las dos primeras contribuyen a la correcta formulación de la sintaxis mientras que la tercera lo hace al establecimiento del valor de verdad.

Dado que las expresiones en las que se utiliza un cuantificador tienen el mismo tipo de estructura, los errores de sintaxis cometidos en la formulación del ejemplo son similares para ambos cuantificadores. Por esta razón, la mayoría de ellos se los puede agrupar distinguiendo cinco categorías:

1- *Expresión sin función proposicional*. En estos casos, los estudiantes proporcionan como ejemplo la cuantificación de una variable sin determinar la propiedad que satisfacen, con lo que la expresión es incompleta y por consiguiente no es posible la determinación del valor de verdad. Para el cuantificador universal se observaron 15 casos, mientras que aparece un único caso para el cuantificador existencial. La diferencia en el número de apariciones de esta situación para cada cuantificador hace suponer que existe alguna razón por la que a muchos alumnos les resulte natural escribir, por ejemplo, ‘$\forall x \in Z$’ mientras que no lo sería ‘$\exists x \in Z$’. Si se piensa en las prácticas docentes que suelen ser la fuente de donde los estudiantes obtienen la información en relación a la forma de uso de los símbolos, es frecuente escribir una expresión y luego cuantificarla (por ejemplo en el desarrollo de una demostración).

Esto puede deberse a que dentro de los usos habituales en Matemática está permitida esa forma de notación (con el cuantificador universal al final de la expresión). Este abuso notacional deja por resultado una expresión en la que la cuantificación de la variable no está seguida de otro símbolo o expresión (porque la función proposicional que representa la propiedad está antes), y si un alumno no es totalmente consciente de ello, afianzaría la idea de estar frente a una expresión válida. Sin embargo, la costumbre de cuantificar al final no se utiliza con el cuantificador existencial, por lo que no está incorporada por los alumnos en sus usos, pues no lo han visto usado de esa manera y por lo tanto tampoco lo repiten ni asumen que podría ser empleado de ese modo. En definitiva, el uso que se hace con el cuantificador universal, en esta notación "invertida" o "post-cuantificada", podría haber causado que estos alumnos perdieran, por decirlo de alguna forma, la estructura que debe tener una expresión que contiene este símbolo y no se construya correctamente el significado.

Como ejemplo de esta situación se transcribe parte de la entrevista efectuada al estudiante identificado en la muestra como A99. El ejemplo que este alumno formuló para el cuantificador universal es '$\forall$ n$\in$R' y para el cuantificador existencial escribió una expresión que manifiesta un uso coloquial del mismo en relación a la existencia del límite de una función.

> I: Este ejemplo que vos escribiste para el "para todo", ¿es verdadero?
> A99. *Depende de lo que tengas* ***antes****, porque esto puede ser verdadero pero no tenés sólo un criterio para...*
> I: Pero esto que está acá escrito.
> A99. *Escrito está bien escrito.*
> I: ¿Y es verdadero? Así, lo que está escrito ahí.
> A99. (Piensa)
> I: ¿Le agregarías algo?
> A99. *Le agregaría algo* ***antes.***
> I: ¿Como qué?
> A99. *Alguna solución o alguna ecuación.... No sé. No sabría qué.*

En este diálogo se pone de manifiesto que el estudiante toma la expresión que dio como ejemplo de alguna situación en la que observó la cuantificación al final de la misma. Considera que la cuantificación está ligada a alguna expresión anterior a la misma, pero sin embargo no las considera como un todo y por lo tanto para él la expresión '$\forall n \in R$' es válida en sí misma. De todos modos no reproduce este patrón para el cuantificador existencial, al cual este estudiante le da un uso coloquial.

2- *Función proposicional incorrecta*. En estos ejemplos aparece una función proposicional pero está incorrectamente formulada desde el punto de vista de la sintaxis (7 casos para el cuantificador universal y 5 para el existencial). El error no tiene que ver directamente con la estructura de una expresión cuantificada, sino con la de otros símbolos que intervienen, porque estos alumnos están reconociendo que debe aparecer una variable la cual toma valores en un determinado conjunto y verifica una determinada propiedad.

3- *Sin conjunto de pertenencia para la variable*. En estos casos aparece una variable a cuantificar y una función proposicional, pero no se indica en qué conjunto toma valores la variable. Esta omisión lleva a que no se pueda determinar el valor de verdad de la expresión. Este tipo de error se manifestó en 7 casos para el cuantificador universal y en 9 casos para el existencial. Los estudiantes que no indican el conjunto de pertenencia no establecieron las funciones semióticas auxiliares FA5 y FA8, y en consecuencia tampoco la función F3.

4- *Uso coloquial del cuantificador existencial.* En estos casos simplemente se realiza un reemplazo de la palabra *existe* por el cuantificador, sin guardar ninguna relación con la estructura sintáctica que este símbolo requiere ni con el verdadero uso del mismo. Los ejemplos observados se refieren a la existencia del límite de una función o a la existencia de la derivada de una función. Esto podría provenir de un abuso notacional que se suele utilizar en el desarrollo de las clases de Cálculo. Se observó en 23 casos donde los estudiantes parecen quedarse sólo con la función semiótica F1 para la identificación del símbolo, y no manifiestan tener construida la función semiótica F2 ni las funciones semióticas auxiliares que aportan a ella.

5- *El valor de verdad es falso.* Se registraron pocos casos en los que la estructura es sintácticamente correcta y es falso el valor de verdad, donde la falla para que la expresión sea verdadera es precisamente la cuantificación. Fueron sólo 3 casos para el cuantificador universal y uno para el existencial. Estos estudiantes no manifiestan haber establecido la función auxiliar FA8 ni la función principal F3.

Finalmente, debe destacarse que existen numerosos casos en los que el ejemplo de uso de un cuantificador es correcto mientras que el del otro no lo es. Se observaron 18 casos en los que utilizan correctamente el cuantificador universal y mal el existencial, y otros 10 casos en el sentido inverso (mal el uso del universal y bien el del existencial). Estos 28 casos de discrepancia que manifiestan los estudiantes en el uso de los cuantificadores conducen a la idea que la construcción de su significado sería independiente, a pesar de las similitudes en sus estructuras sintácticas y en la necesidad de su uso.

5.3.1.4. Denominación y ejemplificación para los símbolos de conjunción y disyunción

De acuerdo con los datos registrados en la Tabla 5.7, la denominación coloquial de la conjunción fue manifestada por 90 estudiantes, lo que pareciera mostrarse como un símbolo ampliamente conocido. Apenas 40 estudiantes construyeron un ejemplo sintácticamente correcto y 25 de ellos lo hicieron de modo que resultara verdadera la expresión.

Para la disyunción, los valores son muy similares, 89 estudiantes manifiestan conocer su denominación coloquial, mientras que 49 propusieron un ejemplo sintácticamente correcto y sólo 33 de ellos lo hizo con el valor de verdad que se pedía en el enunciado. A pesar de la similitud de los valores, la disyunción pareciera ser mejor utilizada pues los valores de la Tabla 5.7 correspondientes a la construcción de los ejemplos es levemente mejor que para la conjunción.

La cantidad de estudiantes que no escribieron el ejemplo utilizando la conjunción y la disyunción fueron 7 y 9 respectivamente.

Las proposiciones que conforman los operandos de los ejemplos correctamente formulados están referidas, mayoritariamente, a la pertenencia de algún número a un conjunto o desigualdades entre algún número con respecto al cero. Esto determinó la elección de las expresiones seleccionadas para construir las configuraciones epistémicas/cognitivas de las Figuras 5.5 y 5.6 de cada uno de estos operadores lógicos.

Como resolución tipo de la conjunción se seleccionó la expresión '$2 \in N \wedge 5 \in R$'. En la Figura 5.5 se presentan las principales funciones semióticas involucradas para la expresión. Del mismo modo que en la sección anterior, para dotar de mayor claridad para interpretar la información plasmada en la figura, no se desagregaron todos los símbolos de la expresión para el objeto primario Lenguaje, sino que se presentan agrupados de acuerdo a los aspectos en que está centrado el análisis en estos casos. Por el mismo motivo, tampoco aparecen explícitamente representadas las funciones semióticas subyacentes al significado de los restantes símbolos, a pesar que intervienen en la trama que se conforma para cada una de las expresiones.

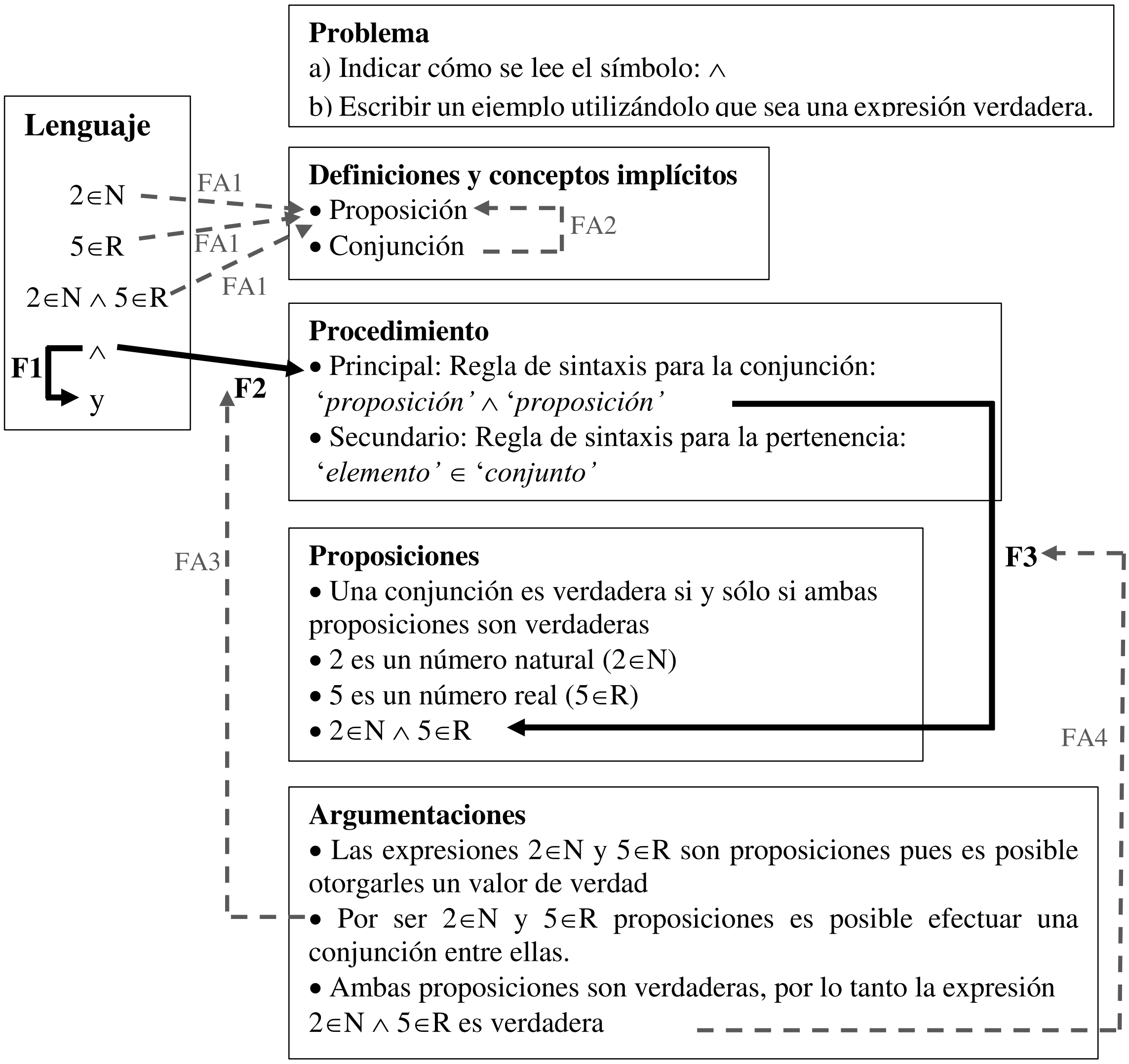


Figura 5.5. Configuración epistémica/cognitiva y funciones semióticas de una expresión como ejemplo de uso del símbolo ∧

Para la construcción de la configuración de la disyunción, representada en la Figura 5.6, se tomó como resolución tipo a la expresión '$-2 \in N \vee 4 \in Z$'.

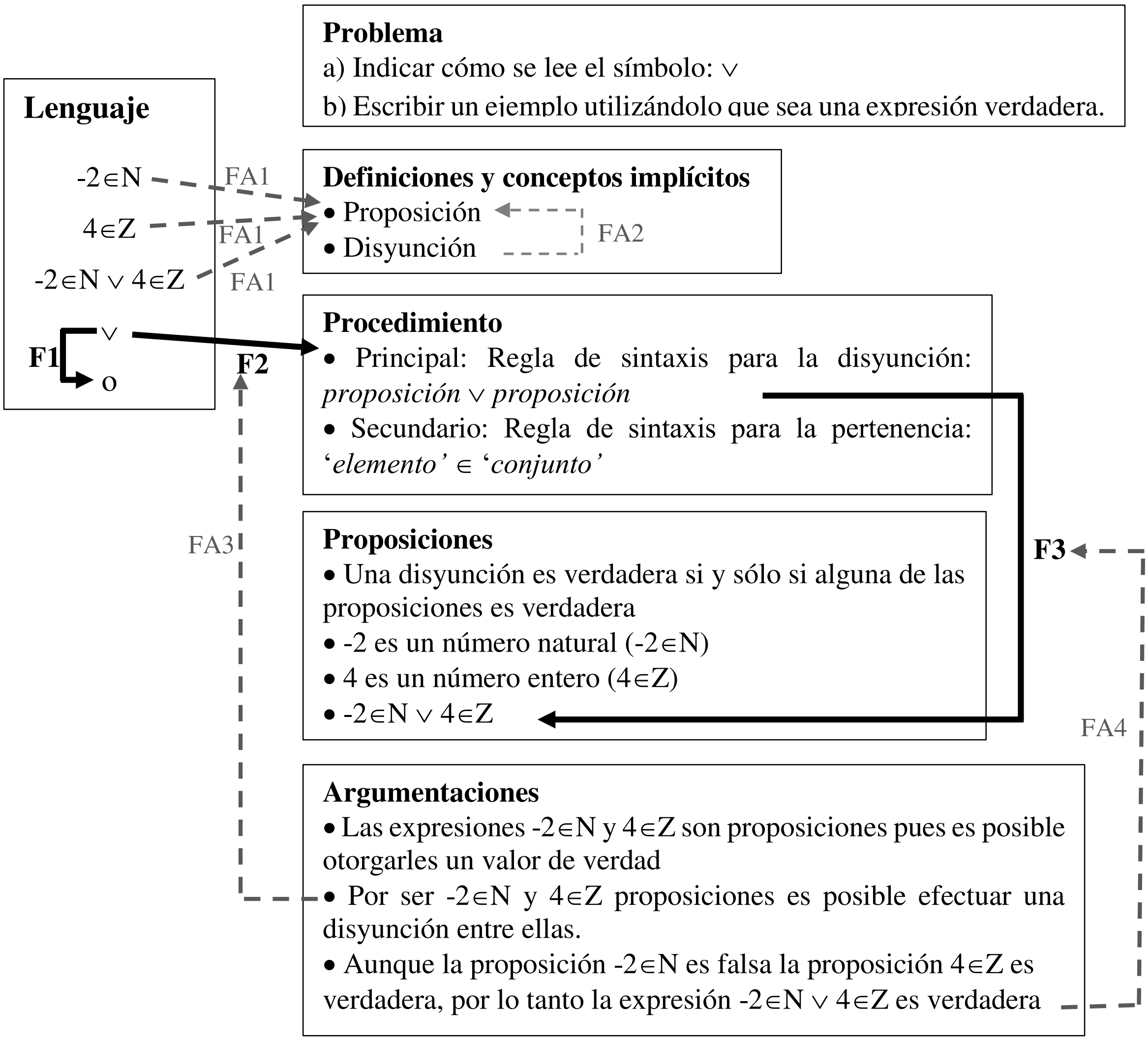


Figura 5.6. Configuración epistémica/cognitiva y funciones semióticas de una expresión como ejemplo de uso del símbolo ∨

Como en casos anteriores, las dos últimas Figuras tienen representadas en la configuración epistémica/cognitiva, las funciones semióticas F1, F2 y F3, y algunas de las que resultan auxiliares. La descripción de estas últimas se detalla en la Tabla 5.11.

Tabla 5.11. Funciones semióticas auxiliares intervinientes en la construcción de un ejemplo de una expresión que contiene una conjunción o una disyunción.

Función semiótica auxiliar	Antecedente		Consecuente
FA1	Expresión simbólica	→	proposición
FA2	Conjunción / Disyunción de proposiciones	→	proposición
FA3	Argumentación de la sintaxis	→	F2
FA4	Argumentación del valor de verdad	→	F3

La función semiótica auxiliar FA1 vincula una expresión simbólica y su condición de proposición. Su establecimiento incide sobre la función auxiliar FA3 y la función principal F2.

La función FA2 vincula a cada una de estos operadores lógicos con la condición de que sus operandos deben ser proposiciones. Su establecimiento también tiene incidencia sobre la función auxiliar FA3 y la función principal F2.

Las funciones FA3 y FA4 relacionan distintas argumentaciones con las funciones semióticas F2 y F3 respectivamente. La primera contribuye a la correcta formulación de la sintaxis mientras que la segunda lo hace al establecimiento del valor de verdad.

Los dos operadores lógicos analizados en esta sección requieren de estructuras sintácticas del mismo tipo y tienen usos similares, por lo que los errores detectados en la formulación del ejemplo de cada uno de estos símbolos son análogos y se los puede clasificar conjuntamente. Se determinaron seis categorías:

1- *Una o las dos expresiones vinculadas no son proposiciones*. Por consiguiente no es posible otorgarle un valor de verdad a cada una de las expresiones vinculadas por estos operadores lógicos. Son ejemplos del tipo '$1 \wedge 2 \in N$'. Se registraron 25 casos para la conjunción y 19 para la disyunción. Los estudiantes que expresan este tipo de ejemplo están manifestando un uso coloquial del operador, como si fueran un simple reemplazo de las palabras 'y' y 'o' respectivamente. En este uso del símbolo sólo parece establecida la función semiótica F1. No se pone de manifiesto la función semiótica auxiliar FA3 para argumentar que las expresiones vinculadas deben ser proposiciones y, por consiguiente, tampoco está construida la función F2.

2- *Uso de literales para indicar una proposición.* Los estudiantes cuyas respuestas entran en este caso proponen como ejemplo expresiones del tipo '$p \wedge q$', en las que se debe asumir que tanto p como q representan una proposición, que no está expresada y por consiguiente no es posible determinar su valor de verdad. En estas situaciones no se cumplió con la condición de que el ejemplo sea verdadero tal como lo requiere la consigna del ejercicio. Para la conjunción se registraron 21 casos en esta situación y para la disyunción fueron 20. En algunos casos aparece definido el contenido de esas proposiciones con expresiones que tienen un valor de verdad fáctico, no un valor de verdad formal, como por ejemplo la proposición *p: 'llueve'*. Los estudiantes que proponen este tipo de ejemplos no consideran argumentaciones para establecer el valor de verdad y no manifiestan conocer las tablas de verdad que determinan el valor de verdad de la expresión resultante de la conjunción o de la disyunción. Por consiguiente, se advierte que no han establecido la función semiótica auxiliar FA4, y en consecuencia, tampoco la función principal F3.

Este tipo de ejemplos sólo aparecen es estudiantes de las carreras de Ingeniería y de Profesorado en Matemática, los cuales tuvieron formación en Lógica. La primera unidad de la asignatura Álgebra de Ingeniería corresponde a Lógica y en el Profesorado en Matemática cursan, en forma paralela a álgebra la asignatura Lógica. Es decir que estos estudiantes tuvieron formación específica en el uso de estos operadores. Al observar las guías de trabajos prácticos que utilizaron, los ejercicios iniciales están formulados utilizando este tipo de proposiciones para pasar luego a la representación formal de las mismas. Por su parte, los estudiantes de las carreras de Bioquímica y de Profesorado de Biología no tuvieron formación con este tipo de ejemplos ni ejercitación, y por consiguiente la construcción de su significado probablemente provenga de imitar lo que los docentes hacen en sus clases o de la lectura de algún texto o material de las asignaturas donde aparece este símbolo. Esto es lo que podría haber provocado que ninguno de los estudiantes de Bioquímica y de Biología propusiera un ejemplo con estas características.

3- *Uso de literales en la proposición.* En otros casos, las expresiones dadas contienen un literal, a modo de variable, que no permiten establecer el valor de verdad, como por ejemplo la expresión: '$x > 1 \vee x < -1$'. Se observaron 7 casos para la conjunción y 11 casos parra la disyunción. Los alumnos que propusieron este tipo de ejemplos no sólo no establecieron las funciones semióticas FA4 y F3, ligadas al valor de verdad, sino que establecen erróneamente la función semiótica auxiliar FA1. Consideraron que expresiones como '$x > 1$' son proposiciones, sin advertir que la presencia de la variable descontextualizada no permite establecer un valor de verdad y, por consiguiente, la expresión no es una proposición.

4- *Confusión con el símbolo de una operación entre conjuntos (intersección/unión)*. Son aquellos casos en los que el ejemplo está constituido por una expresión en la que la conjunción o la disyunción vinculan a dos conjuntos numéricos (12 casos para la conjunción y 14 para la disyunción). Es probable que la confusión provenga de una asociación con la definición de cada una de estas operaciones entre conjuntos, intersección y unión, en las que la pertenencia al conjunto solución de cada una de dichas operaciones está determinada por una conjunción o disyunción, respectivamente. Sólo en 3 casos es correcta la lectura del símbolo pero en el ejemplo está empleado como una operación entre dos conjuntos. En otros 11 casos, expresan que se leen como 'intersección' y 'unión', respectivamente, y el ejemplo confirma ese uso, como operación entre conjuntos. Los alumnos que expresan este tipo de ejemplos no manifiestan constituidas las funciones semióticas F1 y F2 correspondientes a este símbolo, sino que en su lugar tendrían construida una función semiótica errónea, en la que asocian el símbolo a la operación entre conjuntos. Es posible que esta confusión provenga no sólo a partir de la definición de las operaciones, sino que también pudiera estar ligado a la semejanza que existe entre el grafismo de los símbolos de unión e intersección con los de disyunción y conjunción. En ambos casos la apertura del símbolo está dirigida en el mismo sentido, arriba o abajo, y sólo cambian en que el extremo contrario a la apertura es redondeado o anguloso.

5- *Expresión coloquial.* En estos casos, el ejemplo dado es una expresión en lenguaje coloquial en la que no sólo las proposiciones son oraciones en dicho lenguaje sino que la conjunción o disyunción están expresadas mediante la palabra 'y' u 'o'. Si bien fueron sólo 4 los estudiantes que formularon este tipo de ejemplos, para ambos símbolos, puede inferirse que no perciben la necesidad del uso del símbolo y que les resulta suficiente con el lenguaje coloquial para expresarse. Estos estudiantes sólo habrían establecido la función F1 y ninguna de las demás funciones semióticas presentadas en la configuración epistémica/cognitiva.

6- *El valor de verdad es falso.* Son aquellos ejemplos en los que la construcción sintáctica es correcta pero el valor de verdad es falso, contrariamente a lo que se solicitaba en el enunciado. Estos estudiantes ponen de manifiesto un desconocimiento de las tablas de verdad de estos símbolos o, al menos que no las tienen en cuenta al momento de analizar si la expresión formulada es verdadera. En estos casos no estaría establecida la función semiótica auxiliar FA4 ni la función principal F3. Con este tipo de error, se observaron 3 casos para la conjunción y 2 casos para la disyunción.

5.3.2. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL EJERCICIO 2

La resolución de este ejercicio requiere analizar si una serie de expresiones está correctamente escrita y, en caso de no estarlo, reescribirla correctamente. Está dirigido a evaluar aspectos sintácticos ligados a los símbolos en estudio, tanto en la tarea de lectura como en la de escritura (en los casos en que se debe reescribir la expresión). Considerando que para cada uno de los seis símbolos se incluyó una expresión correctamente escrita como una que no lo está, para cada uno de ellos se está evaluando ambos tipos de tareas.

Realizando un análisis de tipo cualitativo, las resoluciones de los ítems que tienen expresiones correctamente escritas determinaron tres categorías disjuntas:

- *Marca como correcto*. El estudiante manifestaría tener establecida la función semiótica F2 del símbolo principal de la expresión, al menos en la tarea de lectura.
- *Marca incorrecto y corrige*. En estos casos resulta obvio que la reescritura formulada es errónea, dado que la expresión dada está correctamente formulada. El estudiante manifestaría no tener establecida la función semiótica F2 del símbolo pues comete errores en la lectura y en la escritura.
- *Sin resolver*. No se puede realizar afirmaciones.

En la Tabla 5.12 se presenta la cantidad de alumnos en cada una de las categorías. Puede observarse que, en general, estos ítems fueron correctamente resueltos. La mayor cantidad de errores se produjeron en las expresiones en las que aparece el símbolo de disyunción y el de inclusión.

Tabla 5.12. Cantidad de estudiantes en cada categoría para los ítems con expresiones correctamente formuladas en el Ejercicio 2 (de la versión 2).

CATEGORÍA / ÍTEM	**Marca como correcto** (resuelve bien)	**Marca incorrecto y corrige**	**Sin resolver**
$-2 \in Z$	**96**	5	0
$\{1, 2\} \subset N$	**67**	27	7
$[2, 5] \subset R$	**62**	32	7
$4 \in N \wedge -3<0$	**89**	7	5
$-1 \in N \vee -1 \in Z$	**54**	45	2
$\forall\, x \in R\ x^2 \geq 0$	**90**	10	1
$\exists\, x \in Z / x<0$	**90**	10	1

Por su parte, los ítems en los que la expresión está incorrectamente escrita, y por consiguiente debía ser reformulada, fijaron cinco categorías disjuntas:

- *Marca incorrecto y corrige bien*. Estos estudiantes manifiestan tener establecida la función semiótica F2 del símbolo pues resuelven correctamente tanto la tarea de lectura como la de escritura.

- *Marca incorrecto pero corrige mal.* Si bien en la lectura parecieran tener construida la función semiótica F2, el corregir mal indicaría que no es así, por lo tanto puede considerarse que no tienen establecida la función F2.
- *Marca incorrecto pero no corrige*. Probablemente en estos casos la respuesta fue azarosa y no pueden realizarse conjeturas.
- *Marca como correcto*. Estos estudiantes manifestarían no tener establecida la función semiótica F2 del símbolo para una tarea de lectura.
- *Sin resolver*. No se puede realizar afirmaciones.

En la Tabla 5.13 se presentan las cantidades de alumnos en cada una de estas categorías. En casi todos estos ítems se observa que son muy pocos los estudiantes que resuelven bien, es decir que deciden que la expresión está incorrectamente escrita y la reescriben correctamente.

Tabla 5.13. Cantidad de estudiantes en cada categoría para los ítems con expresiones incorrectamente formuladas en el Ejercicio 2 (de la versión 2)

CATEGORÍA / **ÍTEM**	**Marca incorrecto y corrige bien** (resuelve bien)	**Marca incorrecto pero corrige mal**	**Marca incorrecto pero no corrige**	**Marca como correcto**	**Sin resolver**
$3 \subset Z$	**26**	22	3	42	7
$N \in Z$	**33**	10	2	56	0
$-5 \wedge 4 \in R$	**8**	17	0	74	2
$4 \in N \vee Z$	**17**	45	2	35	2
$\forall N\ N > 0$	**19**	19	2	57	4
$\exists\ x \in R\ /\ y + 2 = 5$	**62**	4	0	33	2

Como puede observarse a partir de los datos de las Tablas 5.12 y 5.13, los ítems de este ejercicio que presentaron mayores dificultades a los estudiantes son los que corresponden a las expresiones que están incorrectamente escritas, donde en la mayoría de los casos el nivel de éxito en la respuesta no llega al 30%. Las dificultades se manifestaron tanto en la tarea de lectura (pues las consideran correctamente escritas) como en la tarea de escritura (las reconocen como incorrectamente escitas pero las reformulan mal).

A continuación se presenta el análisis de cada uno de los ítems que conforman este Ejercicio. Para los ítems en los que la expresión está incorrectamente formulada se ha construido la configuración epistémica/cognitiva correspondiente. En las mismas, se consideraron los objetos intervinientes tanto de la actividad de lectura como la de escritura. También se incorporaron, en el esquema de cada configuración, algunas de las funciones semióticas involucradas, las que fueron representadas con el mismo criterio utilizado para los ítems del Ejercicio 1: las definidas en relación al significado del símbolo en estudio en línea gruesa negra y las denominadas 'auxiliares', que vinculan otros objetos que son relevantes al análisis, en línea punteada gris.

Para los ítems en los que la expresión está correctamente formulada no se incluyó la configuración epistémica/cognitiva pues, en cada caso, es muy similar a las construidas para el Ejercicio 1 y no aportan información nueva. Si bien en el Ejercicio 1 la tarea es de escritura (sobre ejemplos tipo que están correctamente formulados) y en estos casos del Ejercicio 2 es sólo una tarea de lectura, las correspondientes configuraciones no difieren demasiado.

En las siguientes subsecciones se presenta el análisis de cada uno de los ítems que conforman el Ejercicio 2, y en el orden en que aparecen en el instrumento.

5.3.2.1. Análisis del ítem: $-2 \in Z$

Este ítem presenta una expresión correctamente formulada. En la Tabla 5.12 se observa que 96 estudiantes respondieron correctamente esta condición, mientras que 5 estudiantes respondieron que no lo era y ninguno se abstuvo de responder. Como es de esperar, la expresión es ampliamente reconocida por los estudiantes.

Durante las entrevistas realizadas, algunos estudiantes argumentaron las razones por las que consideraron a esta expresión como correctamente formulada: "*Porque está diciendo que un elemento pertenece a un conjunto, entonces está bien usado el pertenece*" (A20); "*Porque ese número es del grupo de los enteros*" (A10).

Los 5 estudiantes que respondieron reescribiéndola (incorrectamente), lo hicieron con una misma característica: cambiaron el conjunto de pertenencia. Formularon expresiones tales como '$-2 \in Z^-$', '$-2 \in Q$' o '$-2 \in R$'. Estos estudiantes no estarían desconociendo por completo la sintaxis del símbolo $\in$ sino que no estarían estableciendo la función semiótica auxiliar a través de la cual se identifica a 'Z' con un conjunto numérico. En este caso no puede adjudicarse el error a la confusión entre 'correctamente escrita' y 'verdadera' porque la expresión efectivamente es verdadera.

5.3.2.2. Análisis del ítem: $3 \subset Z$

La expresión formulada en este ítem es sintácticamente incorrecta y requiere reescribir la expresión. La misma podría ser reformulada de dos maneras: reemplazando el símbolo relacional o bien, mantener el símbolo relacional de inclusión pero modificar el estatus del objeto 3 (de elemento a conjunto). Las expresiones correctas serían '$3 \in Z$' o bien '$\{3\} \subset Z$'. Sólo 4 estudiantes optaron por la segunda forma de reescritura y pertenecen a las carreras de Profesorado en Matemática.

Retomando los datos de la Tabla 5.13, este ítem fue correctamente resuelto por 26 estudiantes, 22 estudiantes reescribieron la expresión pero de forma incorrecta, 3 estudiantes lo indicaron como incorrecto pero no reescribieron, 42 indicaron que era correcta y 7 no lo resolvieron.

En la Figura 5.7, se presenta la configuración epistémica/cognitiva de este ítem con las funciones semióticas más relevantes que intervienen en la resolución.

La función semiótica F2 del símbolo de *inclusión* interviene en la tarea de lectura, para decidir que la expresión no está correctamente escrita. La función está involucrada en tanto que el alumno la necesita para determinar que NO se verifica la regla de sintaxis.

Dado que la expresión admite ser reescrita de dos formas distintas, en la tarea de escritura puede intervenir la función semiótica relativa a la sintaxis del símbolo '$\in$' o la del símbolo '$\subset$', que son representadas respectivamente como F2($\in$) y F2($\subset$).

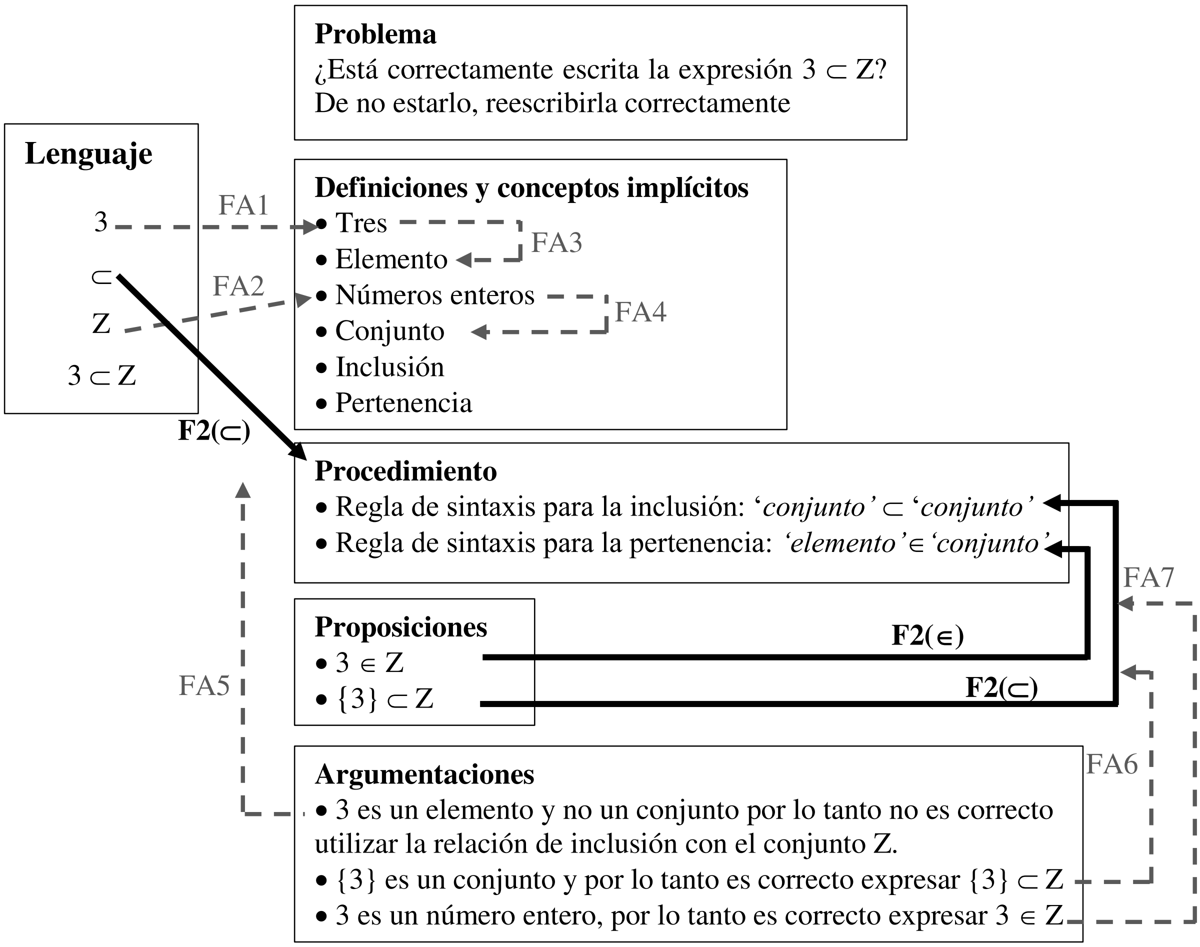


Figura 5.7. Configuración epistémica/cognitiva y funciones semióticas de la expresión ‘$3 \subset Z$’

En el diagrama de la Figura 5.7, además de esquematizarse las funciones semióticas principales, se han representado algunas de las funciones semióticas auxiliares que se considera que participan en la tarea analizada. Las funciones semióticas auxiliares FA1 y FA2 vinculan los restantes símbolos que intervienen en la expresión con su correspondiente definición en lenguaje coloquial, mientras que FA3 y FA4 relacionan la definición asociada al símbolo con su correspondiente rol en la expresión. Estas últimas tienen incidencia tanto en la decisión relativa a la adecuación sintáctica de la expresión dada como en la forma de reescribirla. Para decidir que la expresión no está correctamente formulada debe entrar en conflicto la participación simultánea de las funciones FA3 y F2($\subset$). Finalmente, FA5 interviene, desde la Argumentación, en la decisión sobre lo inapropiado de la regla de sintaxis utilizada (F2($\subset$)) en la lectura de la expresión dada. Las funciones FA6 y FA7 participan desde la Argumentación en la decisión de la reescritura.

El hecho de que sólo 26 estudiantes resolvieron correctamente este ítem, reescribiendo la expresión apropiadamente, conduce a pensar que el nivel de construcción del significado del símbolo de inclusión es muy bajo en la mayoría de los estudiantes que conformaron la muestra.

En los estudiantes que reformulan utilizando la expresión '$3 \in Z$', prevalece la función FA3 que estaría induciendo la aplicación de la función F2($\in$), mientras que en aquellos que reescriben como '$\{3\} \subset Z$', la que prevalece es la función F2($\subset$).

En la entrevista efectuada al alumno A38, quien había considerado la expresión como correctamente formulada, al preguntarle sobre este ítem se observa que prevalece la función semiótica F2($\subset$), pues reconsidera su respuesta y se centra en que el elemento '3' no es un conjunto: "*Pensando en que tendría que ser un conjunto no puedo dejar un número suelto* […] *Le pondría llaves*".

En la entrevista realizada al alumno A57, que también había considerado como correcta a la expresión dada, se observa que prevalece la función semiótica auxiliar FA3 y la función F2($\in$), cuando detecta que el símbolo '3' es un elemento: "*Es medio contradictorio, porque el 3 está incluido en Z, pero incluido se usa con conjuntos numéricos, así que… el 3 solo está mal* [¿Cómo lo escribirías?] *Que el 3 pertenece a los enteros*".

En el caso del alumno A67, quien había respondido que la expresión es correcta, al observar su resolución del instrumento durante la entrevista realizada, aclara que no lo está. Cuando se le pide que la reformule, pregunta: "*¿Tengo que dejar el incluido?*". Con esta pregunta pone de manifiesto que prevalece en él la función semiótica auxiliar FA3 y por lo tanto también la función F2($\in$), pues en primer lugar atina a la modificación sobre el símbolo de inclusión. Luego escribe la expresión '$3 \in Z$', pero se queda pensando y afirma que podría hacer otra modificación pero que no sabe si está bien. Se le pide que lo haga de todas maneras, y entonces formula la expresión '$\{3\} \subset Z$'. A pesar que su primer accionar estuvo guiado por las funciones FA3 y F2($\in$), esto no impidió la manifestación de la función F2($\subset$), aunque con menos seguridad. En cambio, el alumno A38 también formula las dos expresiones durante la entrevista, pero lo hace en el orden inverso.

Se encontraron 4 casos en los que las expresiones dadas por los estudiantes no son las esperadas, pero son sintácticamente correctas. Una de las expresiones es '$N \subset Z$' (3 casos) y la otra es '$3 \in N$' (1 caso). En los estudiantes que utilizaron la primera de ellas, parece prevalecer la función semiótica F2($\subset$), pues reescriben buscando mantener el símbolo de inclusión y en consecuencia reemplazan el elemento '3' por un conjunto. En el caso del estudiante que reescribe mediante la expresión '$3 \in N$' (A39), parece prevalecer la función semiótica auxiliar FA3, que permite establecer el rol de 'elemento' y por lo tanto construye la expresión utilizando la pertenencia pero cambiando el conjunto. La razón del cambio en el conjunto podría ser adjudicado al desconocimiento del conjunto de los números enteros, pues en los ejemplos del Ejercicio 1 no utilizó dicho conjunto en ningún caso y, en el Ejercicio 3, lo convierte al lenguaje coloquial como 'números complejos' y en la conversión al registro simbólico lo transforma en 'N'. Durante la entrevista que se efectuó a este alumno se constató esa confusión, pues el estudiante argumenta: "*Creí que Z eran los complejos*".

La gran cantidad de estudiantes que erróneamente considera la expresión como bien escrita (42) podría provenir de la confusión que se genera en torno a la similitud semántica que tienen las expresiones "pertenecer" y "estar incluido" en el lenguaje coloquial. La construcción deficiente del significado de cada uno de los símbolos '$\in$' y '$\subset$' hace que los estudiantes no adviertan la precisión que tiene su uso en el quehacer matemático.

Entre los estudiantes que reescribieron la expresión, pero lo hicieron de manera indebida, se encontró un error recurrente, que es la reformulación mediante la expresión '$Z \subset 3$'. Son 14 los estudiantes que utilizaron esta expresión como reescritura y no basan su decisión en el signo utilizado para vincular un elemento y un conjunto, sino que para ellos el error se produce en el orden de los objetos simbólicos. Por lo tanto, también entrarían en el caso de la confusión entre los símbolos '$\in$' y '$\subset$'. No obstante debe observarse que 11 de ellos manifestaron leer el símbolo '$\subset$' de manera invertida, como "incluye", "contiene a" o "comprende". Esto se confirma durante una de las entrevistas realizadas, en la que el alumno A99 refiere: "*Es que yo leí como Z incluye al 3*". Los estudiantes que cometen este tipo de error han construido erróneamente la función semiótica F1 y esto, manteniendo la coherencia respecto de la función F1 construida, incide en la sintaxis de las expresiones en las cuales lo utilizan.

5.3.2.3. Análisis del ítem: $\{1, 2\} \subset \mathrm{N}$

Este ítem presenta una expresión correctamente formulada. De acuerdo a los datos de la Tabla 5.12, fueron 67 los estudiantes que lo resolvieron correctamente, reconociendo su condición de ser sintácticamente correcta; 27 estudiantes determinaron que no era correcta y la reformularon (incorrectamente) y 7 estudiantes no lo resolvieron.

Entre los estudiantes que consideraron que la expresión no está correctamente escrita y la reformularon se detectaron dos errores reiterados. Uno de ellos es la escritura en sentido inverso, '$N \subset \{1, 2\}$' propuesta por 11 alumnos. Para estos casos, se constató la expresión con la que manifestaron, en el Ejercicio 1, cómo se lee el símbolo '$\subset$'. En todos los casos el vocablo coloquial corresponde a la relación inversa: 'contiene a', 'incluye' o 'comprende'. El ejemplo de uso dado por estos alumnos es compatible con esa expresión coloquial, pues proponen expresiones donde la inclusión está manifestada exactamente al revés, por ejemplo la expresión '$R \subset Z$'. Este grupo de estudiantes tiene construida erróneamente la función F1 del símbolo de inclusión, y ésta interviene negativamente en la construcción de las funciones semióticas F2 y F3.

Debe observarse que en el Ejercicio 2 no se pedía el análisis de la verdad o falsedad de la expresión. No obstante, la 'inversión' entre los conjuntos que realizan estos estudiantes, no tiene que ver con la sintaxis (sigue siendo la relación entre dos conjuntos), sino que está ligada al valor de verdad que, según su construcción de la F1, sería falso.

El otro error frecuente es la sustitución del símbolo de inclusión por el de pertenencia, de modo que reformulan la expresión como '$\{1, 2\} \in N$'. Este error fue observado en 12 estudiantes que estarían manifestando no haber establecido la función semiótica auxiliar que vincula la expresión '$\{1, 2\}$' con su rol de conjunto, por lo que la expresión es entendida como una enumeración de elementos individuales.

El alumno A91 utilizó esta expresión en su resolución. En la entrevista realizada se le preguntó sobre el significado de la expresión '$\{1, 2\}$'. En su respuesta revela su confusión en cuanto al estatus de conjunto que otorgan las llaves al expresar: "*Esto dice que son dos elementos, el 1 y el 2, o puede ser el conjunto compuesto por el 1 y el 2*". Cuando se le aclara que es un conjunto, responde: "*Ahora por lo que estoy diciendo, que un conjunto tiene que estar incluido en otro conjunto, entonces esto debe estar mal* (se refiere a su respuesta original)". Esto pone de manifiesto que su error no proviene del desconocimiento de la sintaxis del símbolo de inclusión sino de su confusión con las llaves, pues una vez aclarado este punto pudo reconocer su equivocación y volver a resolver correctamente.

Otros errores se presentan con menos frecuencia, como es el caso de la reformulación mediante la expresión '$1 \wedge 2 \subset N$' (3 casos). Estos alumnos tampoco reconocen el estatus de conjunto otorgado por las llaves, confunden la pertenencia con la inclusión y hacen un uso indebido de la conjunción. El alumno A20 reformuló utilizando esta expresión y cuando en la entrevista se le preguntó por el significado de las llaves, respondió: "[significa] *que es el número 1 y el número 2, no los que hay en el medio*". Con esto deja ver que sabe que se trata de un conjunto finito y no de un intervalo real. Al preguntársele si es un conjunto, lo afirma, luego se queda pensando y dice: "*Entonces si son conjuntos está bien escrito, y esto* (se refiere a lo que él respondió) *está mal escrito*". Como en el caso anterior, el error cometido al reformular la expresión no está asociado a falencias en relación a la sintaxis sino al significado de las llaves, pues una vez aclarado esto pudo reconocer su error y decidir que la expresión dada está correctamente escrita.

5.3.2.4. Análisis del ítem: $N \in Z$

La expresión formulada en este ítem es sintácticamente incorrecta y requiere reescribir la expresión. De acuerdo con los datos de la Taba 5.13, fue correctamente resuelto por 33 estudiantes, que efectivamente lo reescribieron como '$N \subset Z$', 10 estudiantes reformularon la expresión pero de forma incorrecta, 2 estudiantes lo indicaron como incorrecto pero no reescribieron, 56 indicaron que era correcta y ningún estudiante omitió resolverlo.

En la Figura 5.8, se presenta la configuración epistémica/cognitiva de esta tarea, con el detalle de las funciones semióticas más relevantes que participan en la resolución.

En este caso, intervienen dos funciones semióticas relativas a la sintaxis, la del símbolo '$\in$', representada en la Figura 5.8 como F2($\in$), para determinar en la lectura que la expresión NO está correctamente formulada, y la del símbolo '$\subset$', representada como F2($\subset$), que interviene para reescribir la expresión de manera sintácticamente correcta.

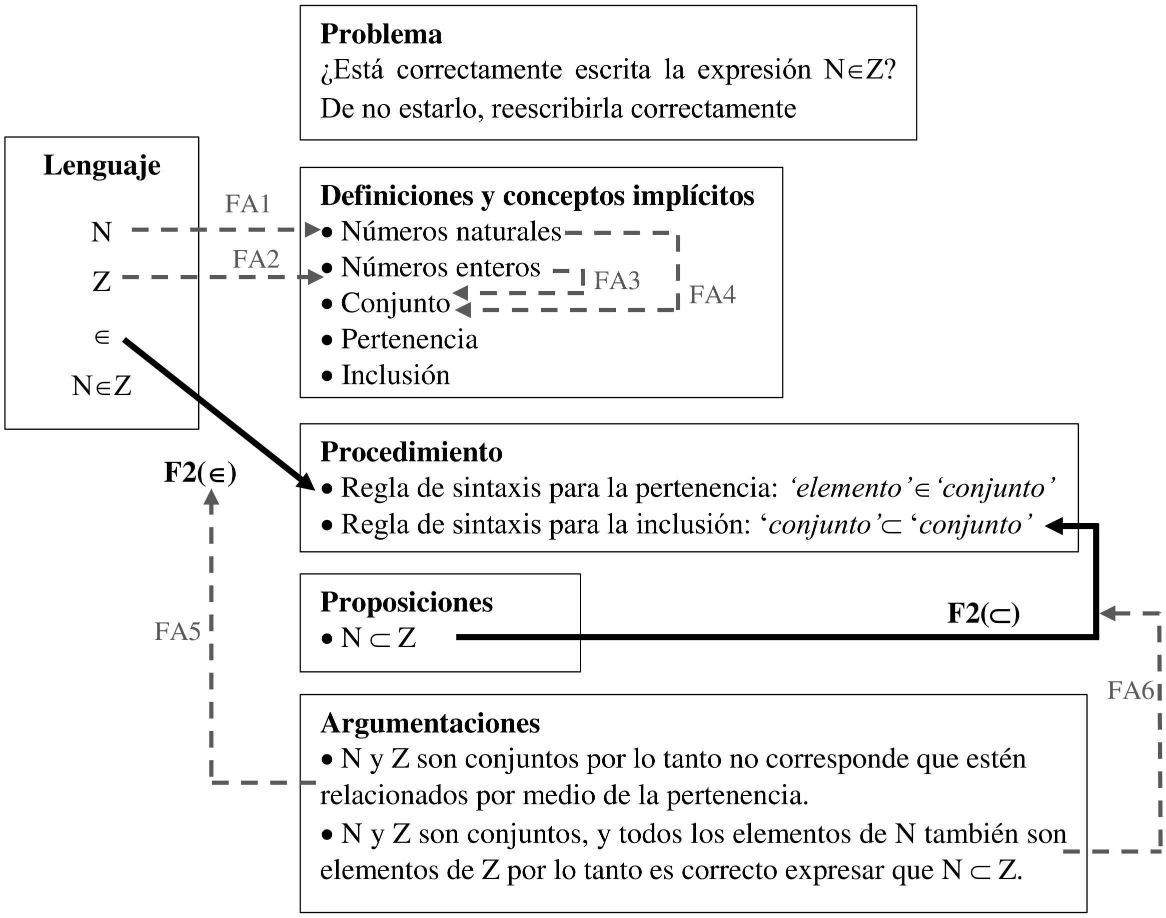


Figura 5.8. Configuración epistémica/cognitiva y funciones semióticas de la expresión '$N \in Z$'

En la Figura 5.8 se representan también algunas de las funciones semióticas auxiliares que intervienen en la tarea propuesta. Las funciones FA1 y FA2 relacionan los símbolos de los conjuntos numéricos con sus definiciones, las funciones FA3 y FA4 vinculan las definiciones con su categoría (rol que juega en la expresión) y las funciones FA5 y FA6 inciden en la decisión de la incorrecta escritura y en la reformulación de la expresión a través de las Argumentaciones correspondientes.

De los 33 estudiantes que reformularon utilizando una expresión correcta, 30 lo hicieron mediante '$N \subset Z$', pero los 3 restantes utilizaron expresiones como '$-4 \in Z$', donde se indica que un número pertenece al conjunto de los números enteros. En estos últimos casos, parece prevalecer la pertenencia y el cambio lo realizan reemplazando el conjunto N por un número entero, de manera que la expresión es sintácticamente correcta.

La gran cantidad de alumnos que consideran correcta a la expresión (56) podría adjudicarse, como en casos anteriores, a la confusión coloquial entre las expresiones 'pertenecer' y 'estar incluido', que incide sobre sobre la construcción del significado de los símbolos '$\in$' y '$\subset$'. Los estudiantes A73 y A99 habían indicado que la expresión es correcta cuando resolvieron este ejercicio. Durante la entrevista y luego de haber hablado sobre las condiciones de uso de cada uno de los símbolos en estudio, advirtieron su error y modificaron la expresión correctamente, notando en ese momento que se trata de dos conjuntos.

De los 10 estudiantes que reformulan la expresión pero lo hacen de manera incorrecta, 4 utilizan la expresión '$Z \subset N$' y los otros 6 lo hacen con '$Z \in N$'. En el primer caso, la expresión no es incorrecta desde el punto de vista sintáctico, pero sí lo es desde la definición de inclusión de conjuntos, que la convierte en una expresión falsa. La segunda es incorrecta en ambos aspectos.

5.3.2.5. Análisis del ítem: $[2, 5] \subset R$

Esta expresión está correctamente formulada y según los valores de la Tabla 5.12, 62 respuestas fueron correctas, 32 incorrectas (reformulan la expresión, incorrectamente) y 7 casos sin resolver.

Entre los errores más frecuentes que se observaron en aquellos casos en los que fue reescrita la expresión por considerarla incorrecta, se encuentran las siguientes reformulaciones erróneas: '$[2, 5] \in R$' (10 casos), '$R \subset [2, 5]$' (9 casos) y '$\{2,5\} \subset R$' (6 casos).

La expresión '$[2, 5] \in R$', parece manifestar como no establecida la función semiótica auxiliar correspondiente a la vinculación entre el intervalo con su condición de conjunto. Estos estudiantes interpretan los objetos '2' y '5' como dos elementos individuales, omitiendo el significado de los corchetes como indicadores de que los valores que se encuentran en el interior corresponden a los extremos de un subconjunto de números reales. Probablemente consideran a los corchetes como un simple símbolo de agrupamiento y no como delimitadores de los extremos del intervalo. Al interpretarlos como elementos desagregados, consideran que la relación que corresponde es la de pertenencia.

La expresión '$R \subset [2, 5]$ ', en la que invierten el sentido de la inclusión, representa una situación análoga a la analizada en la Sección 5.3.2.3 para el ítem '$\{1, 2\} \subset N$'. Casi todos los estudiantes que efectúan esta forma de reescritura lo hacen en ambos ítems. Se observa la persistencia de una función semiótica errónea, en cuanto a la denominación del símbolo

'$\subset$', (al que denominan 'incluye', 'contiene a') que interfiere en la sintaxis y en el establecimiento del valor de verdad, pues consideran de manera inversa la definición de inclusión de un conjunto en otro.

La expresión '$\{2,5\} \subset R$', en la que convierten el intervalo real en un subconjunto finito de dos elementos, resulta un caso similar al primero, en el que los corchetes no son considerados como una notación conjuntista y por ende debe cambiarse la notación por una que le otorgue al primer objeto el estatus de conjunto. Si bien esta expresión es sintácticamente correcta en términos del símbolo de inclusión, el error radica en la lectura de la expresión original.

5.3.2.6. Análisis del ítem: $4 \in N \wedge -3 < 0$

En este ítem aparece una expresión en la que el símbolo principal es la conjunción y está correctamente formulada. Los datos de la Tabla 5.12 indican que fueron 89 los estudiantes que reconocieron esta situación, mientras que otros 7 consideraron que era incorrecta y por consiguiente propusieron una reformulación de la misma. Sólo 5 estudiantes no resolvieron este ítem.

Entre las expresiones con las que reformulan los 7 estudiantes que consideran que la expresión es incorrecta, no se presenta ningún patrón de error frecuente. Dos de los estudiantes cambian la conjunción por una disyunción, otros dos cambian alguna de las proposiciones para que las dos guarden similitud ('$4>0 \wedge -3 <0$'; '$4 \in N \wedge -3 \in Z$'). En estos cuatro casos pareciera que la disparidad entre lo que manifiesta cada una de las proposiciones que conforman la expresión original no les resultara apropiada para realizar una conjunción. Los otros tres casos reformulan de manera casi arbitraria, realizando modificaciones que no merecen análisis en relación al símbolo en estudio.

5.3.2.7. Análisis del ítem: $-1 \in N \vee -1 \in Z$

Esta expresión corresponde al caso de una expresión en la que aparece la disyunción y que está correctamente formulada, por lo tanto no debe hacerse ninguna modificación en ella para obtener una expresión sintácticamente adecuada. De acuerdo con los valores de la Tabla 5.12, los estudiantes que la reconocieron como sintácticamente correcta fueron 54, mientras que 45 estudiantes consideraron que no lo era y la reescribieron, aunque en este último caso se detectó la intervención de otros factores en la decisión, que más adelante en esta misma sección. Sólo 2 estudiantes no resolvieron esta tarea.

De los 45 estudiantes que decidieron que la expresión está incorrectamente escrita y la reescribieron, 24 realizan alguna modificación que está ligada a la proposición '$-1 \in N$' para convertirla en verdadera. Estos alumnos cambian el -1 por un 1, o reemplazan el símbolo '$\in$' por el símbolo '$\notin$', o modifican el conjunto numérico para que el '-1' sea un elemento del conjunto. En estos casos, se manifiesta un conflicto semiótico entre 'estar correctamente escrita' y ser 'verdadera' (en relación a la primera proposición de la expresión), pero además se evidencia el desconocimiento del valor de verdad de una disyunción, con lo que manifiestan no tener establecida la función semiótica F3 de la disyunción, lo cual termina incidiendo en la decisión de la adecuación de la sintaxis (función semiótica F2).

Otros 7 estudiantes reformulan la expresión dada utilizando sólo la segunda proposición y eliminando por completo la proposición '$-1 \in N$' como así también la disyunción, con lo cual cambian por completo la estructura de la expresión original, pero evidenciando que el factor de conflicto en su decisión es la proposición falsa.

También se observó que 14 alumnos, además de realizar algunas de las modificaciones mencionadas sobre la expresión '$-1 \in N$' para convertirla en verdadera, cambian la disyunción por una conjunción, como si no fuera posible la disyunción entre dos proposiciones verdaderas. Esto podría deberse a la construcción de significado que tienen efectuada para la conjunción y la disyunción. Algunos de estos estudiantes, durante la entrevista, describieron el uso de estos dos operadores lógicos a partir del valor de verdad de las proposiciones con las que van a operar, como si su uso estuviera restringido a las características de las proposiciones que juegan el rol de operandos. A continuación se transcriben las explicaciones que algunos de estos estudiantes dieron en las entrevistas, en relación a este tipo de uso:

> A20: *El "o" lo usás cuando puede ser verdadero o falso. Según… la expresión puede ser verdadera…. Si una puede ser verdadera y la otra falsa uso el "o" y si es "y" las dos tienen que ser verdaderas, para que la función sea verdadera.*
>
> A57: *El "y" es cuando pasan dos cosas simultáneamente, y el "o" cuando pasa una cosa o la otra, cuando de dos cosas pasa una sola.*
>
> A73: *Cuando quiero hacer una propiedad que tiene dos condiciones, puede ser que las dos condiciones sean.... tendrían que ser verdaderas o falsas, se usa el "y", y puede que con una que esté bien, que ya es condición, se usa el "o".*

Otro factor que pudo haber inducido a los estudiantes a efectuar este tipo de cambio es el que manifiesta el alumno A63, quien realizó uno de los cambios mencionados sobre la primera proposición (reescribió como '$1 \in N \vee -1 \in Z$'). Aunque no cambió la disyunción por conjunción, durante la entrevista efectuada da una argumentación para ese cambio. Cuando se le vuelve a preguntar si, más allá de la verdad o falsedad la expresión está correctamente escrita, manifiesta: "*En realidad tendría que haber un 'y' porque si pertenece a N también pertenece a Z*".

5.3.2.8. Análisis del ítem: $-5 \wedge 4 \in R$

La expresión que se presenta en este ítem corresponde al caso en que la conjunción está incorrectamente utilizada, produciendo una fórmula mal formada por no operar con dos proposiciones. En la Tabla 5.13 se observa que apenas 8 estudiantes reconocieron esta situación y reformularon la expresión correctamente. De los restantes casos, 17 la reescriben pero mal, 74 la consideran correcta y sólo 2 estudiantes no respondieron.

En la Figura 5.9 se presenta la configuración de este ítem conjuntamente con las funciones semióticas más relevantes involucradas. La función semiótica F2 correspondiente a la conjunción interviene en la tarea de lectura, pues participa en la decisión de que la expresión no está correctamente formulada desde el punto de vista sintáctico. Esta función semiótica también está involucrada en la reescritura de la expresión, para construir una expresión bien formada de acuerdo con la sintaxis que requiere la conjunción.

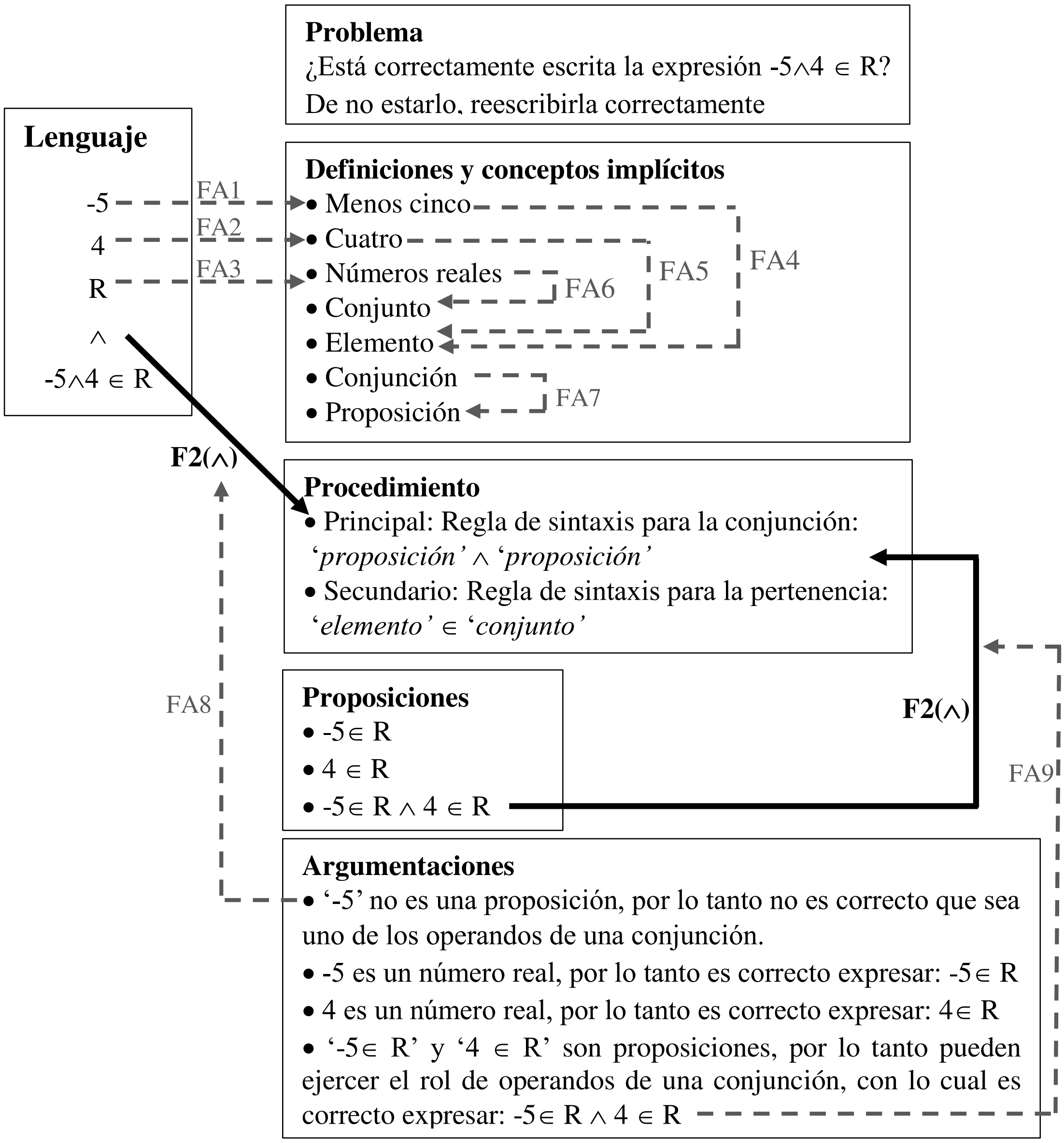


Figura 5.9. Configuración epistémica y funciones semióticas de la expresión '-5∧ 4 ∈ R'

Además de la función semiótica principal F2, en la Figura 5.9 se representan también algunas de las funciones semióticas auxiliares que participan tanto para decidir que la expresión dada no está correctamente formulada como para la reescritura de la misma. Las funciones FA1, FA2 y FA3 relacionan los restantes símbolos de la expresión con el vocablo que los identifica, mientras que las funciones FA4, FA5 y FA6 vinculan cada uno de esos vocablos con el rol que objeto tiene en la expresión. La función FA7 vincula a la Conjunción con la categoría que deben tener sus operandos, que deben ser Proposiciones. Esta función auxiliar, junto a la función auxiliar FA8, inciden en la función semiótica F2 al momento de decidir que la expresión dada no es sintácticamente correcta. Finalmente, la función FA9 incide sobre la función semiótica F2($\wedge$) para efectuar la reformulación de la expresión a través de la argumentación correspondiente.

Los 74 estudiantes que responden que es correcta, no sólo no manifiestan como establecida la función semiótica F2 del símbolo '$\wedge$' sino que realizan un uso coloquial del símbolo, como un reemplazo de la conjunción 'y' en el lenguaje coloquial, en lugar de entenderlo como un operador lógico.

El error más observado es la reformulación utilizando la expresión '$\{-5, 4\} \in R$' (10 alumnos). Pareciera que estos alumnos, entendiendo de forma coloquial a la conjunción, pretenden reformular mediante una enumeración, sólo que no advierten que el uso de llaves le confiere a la expresión {-5, 4} el estatus de conjunto y eso hace que sea incorrecta la relación de pertenencia. Probablemente hayan pretendido utilizar una expresión que es de uso habitual en Matemática, como es la enumeración utilizando comas: '$-5, 4 \in R$'. El alumno A99 hace referencia a esta idea de enumeración durante la entrevista realizada, cuando reformula mediante la expresión '$\{-5, 4\} \in R$': "*Me parecía raro que estén así, como sueltos, siendo que tienen que estar así entre corchetes. Yo me acuerdo que siempre me decían: corchetes para enumerar... digo... llaves es para enumerar. Entonces me quedó grabado. Me parece que está mejor escrito así*".

Durante las entrevistas, y luego de haber hablado sobre las condiciones de uso de la conjunción, se les preguntó a los estudiantes si tenía sentido determinar la verdad o falsedad de la expresión '*-5*'. Reconsiderando la sintaxis de la expresión a partir de esta pregunta, la mayoría reformuló la expresión correctamente.

5.3.2.9. Análisis del ítem: $4 \in N \vee Z$

En este ítem se presenta una expresión mal formulada en la que se utiliza la disyunción, y por consiguiente debía se reescrita. En la fila de la Tabla 5.13 correspondiente a este caso, se observa que 17 estudiantes la reformularon correctamente. De los restantes casos, 45 estudiantes la reescribieron pero con una expresión que seguía siendo sintácticamente incorrecta, 2 la consideran incorrecta pero no presentan ninguna expresión alternativa, 35 estudiantes la consideraron como correctamente escrita. Sólo 2 estudiantes no respondieron este ítem.

En la Figura 5.10 se presenta la configuración de este ítem con las funciones semióticas más relevantes que están involucradas. De manera análoga a ítems anteriores, la función semiótica F2 interviene en la tarea de lectura, puesto que participa en la decisión de que la expresión no es sintácticamente correcta y también está involucrada en la reescritura de la expresión.

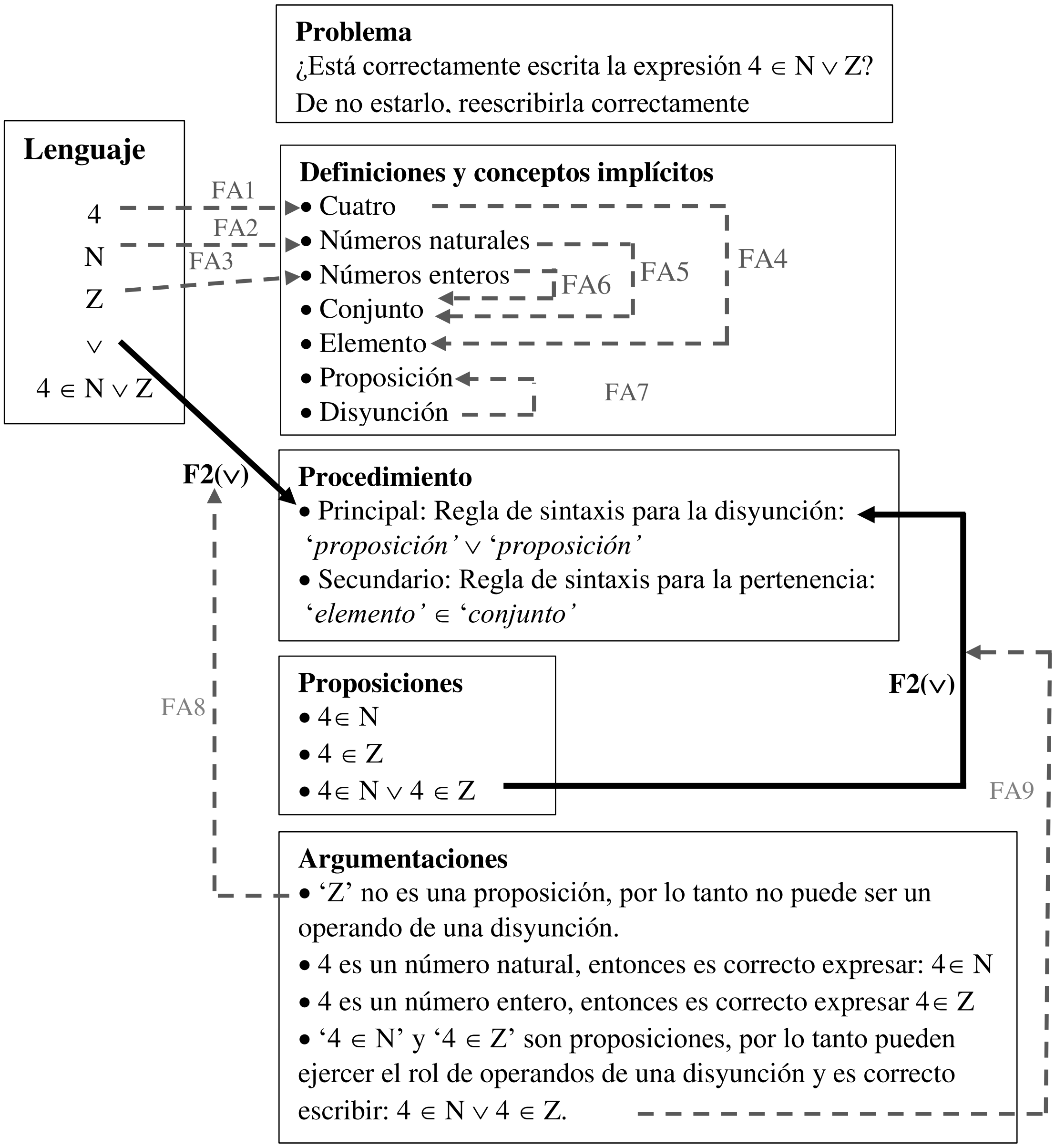


Figura 5.10. Configuración epistémica/cognitiva y funciones semióticas de la expresión '$4 \in N \vee Z$'

En la Figura 5.10 se representan también algunas de las funciones semióticas auxiliares que participan en esta tarea. Las funciones FA1, FA2 y FA3 relacionan los restantes símbolos de la expresión con el vocablo que los identifica, mientras que las funciones FA4, FA5 y FA6 vinculan cada uno de esos vocablos con el rol que el objeto tiene en la expresión. La función FA7 vincula a la disyunción con la categoría que deben tener sus operandos, que deben ser Proposiciones. Esta función auxiliar tiene participación al momento de decidir que la expresión no está correctamente formulada. La función FA8, que incide en la función semiótica F2($\vee$) al momento de decidir que no está correctamente escrita, permite argumentar dicha decisión. La función FA9 incide sobre la función semiótica F2($\vee$) para efectuar la reformulación de la expresión a través de la argumentación correspondiente.

El error en la formulación de esta expresión guarda cierta similitud con el presentado en el apartado anterior ($-5\wedge 4 \in \mathbb{R}$). En relación a esto, parece notable la diferencia en las resoluciones. Treinta y cinco alumnos consideraron bien formulada la expresión de este ítem, mientras que la del apartado anterior fue considerada como correcta por 74 estudiantes. Esto llevaría a pensar que el operador ubicado entre los conjuntos – de manera incorrecta– es reconocido como un error de sintaxis por más alumnos. Sin embargo, 34 estudiantes, de los 45 que intentan reescribirlo, cometen el mismo tipo de error: lo reescriben como '$4 \in N \wedge Z$'. Esto estaría indicando que lo que consideran incorrecto no es que las expresiones operadas no son proposiciones, sino que estarían poniendo en juego (también de manera incorrecta) el valor de verdad de la disyunción. El alumno A91 resolvió de esta manera y en la entrevista argumenta que es "*porque el 4 pertenece a los dos conjuntos*". La misma fundamentación es la que da el alumno A99 en su entrevista.

Otro error observado (7 casos) es haber reescrito mediante la expresión '$4 \in N \wedge 4 \in Z$'. Los estudiantes manifiestan tener construida, al menos parcialmente, la función semiótica relativa a la sintaxis al separar la expresión en dos proposiciones, pero en lugar de utilizar la disyunción colocan el símbolo de conjunción.

Estos dos errores tienen en común el reemplazo de la disyunción por la conjunción (más allá del error sintáctico que persiste en el primer caso). Esto podría deberse a la misma razón que se argumentó en la Sección 5.3.2.7 y es relativa a la construcción que algunos alumnos tienen sobre la conjunción y la disyunción. Durante la entrevista, estos estudiantes describen el uso de estos dos operadores lógicos a partir del valor de verdad de las proposiciones con las que van a operar, como si su uso estuviera restringido a las características de las proposiciones que juegan el rol de operandos. El relato de estos estudiantes podría resumirse en que la conjunción se utiliza con proposiciones verdaderas y la disyunción con una verdadera y otra falsa. Como en el segundo caso, al separar en dos proposiciones, ambas resultan verdaderas, y esa podría ser la causa del reemplazo de la operación. Nuevamente se observa que un fallido establecimiento de la función semiótica F3 de alguna manera estaría influyendo sobre la sintaxis.

Dos estudiantes reformularon la expresión utilizando únicamente la proposición '$4 \in Z$', probablemente por considerar redundante la pertenencia al conjunto de los números naturales por estar éste incluido en el conjunto de los números enteros. Es posible que la misma consideración de la inclusión entre los conjuntos haya basado la decisión de otro alumno que expresó como reformulación '$4 \in N \subset Z$'. Una expresión similar a esta última, aunque mejor formulada surge durante la entrevista efectuada con el alumno A57. Este estudiante no había resuelto este ítem, sin embargo durante la entrevista explica que fue porque '*es medio confuso lo de N o Z, porque nunca lo vi*'. Manifiesta que le es difícil separar entre 'correctamente escrita' y 'verdadera'. Subsanada esa cuestión expresa oralmente, y sin demasiada seguridad, que escribiría '*que cuatro pertenece a N... ¿incluido en Z?*'. Luego vuelve a expresar: '*que 4 pertenece a Z y que N está incluido en Z*', aduciendo que de esa manera también está expresando que 4 pertenece al conjunto de los números naturales. Finalmente escribe la expresión simbólica '$4 \in Z \wedge N \subset Z$'. En la misma se observa que toma la idea de la expresión original y la reformula mediante el uso de la inclusión, como si el hecho de informar que un número pertenece a dos conjuntos, donde uno está incluido en el otro, fuera redundante.

Como se relató en el apartado anterior, durante las entrevistas y luego de haber hablado sobre las condiciones de uso de la conjunción y la disyunción, se les preguntó a los estudiantes si tenía sentido determinar la verdad o falsedad de la expresión '*Z*'. Los estudiantes nuevamente reconsideraron la sintaxis de la expresión a partir de esta pregunta y la mayoría reformuló la expresión correctamente.

5.3.2.10. Análisis del ítem: $\forall$ N N>0

La expresión presentada en este ítem contiene un cuantificador, pero no respeta ninguna de las reglas que componen la sintaxis de una expresión cuantificada. En la Tabla 5.13 se observa que sólo 19 estudiantes reformularon la expresión correctamente, utilizando una variable que toma valores en un conjunto de referencia y está presente en la función proposicional. Una cantidad muy alta de estudiantes (57) la consideraron como correctamente formulada, mientras que 19 alumnos la consideran incorrecta pero la reformulan mal. Sólo 2 alumnos indicaron como incorrecta pero no propusieron una reformulación posible y 4 estudiantes no resolvieron el ítem.

En la Figura 5.11 se presenta la configuración espistémica/cognitiva de este ítem con las funciones semióticas más relevantes involucradas. De manera análoga a ítems anteriores, la función semiótica F2(∀) interviene tanto en la tarea de lectura, dado que participa en la detección de la sintaxis incorrecta, como también en la reescritura de la expresión.

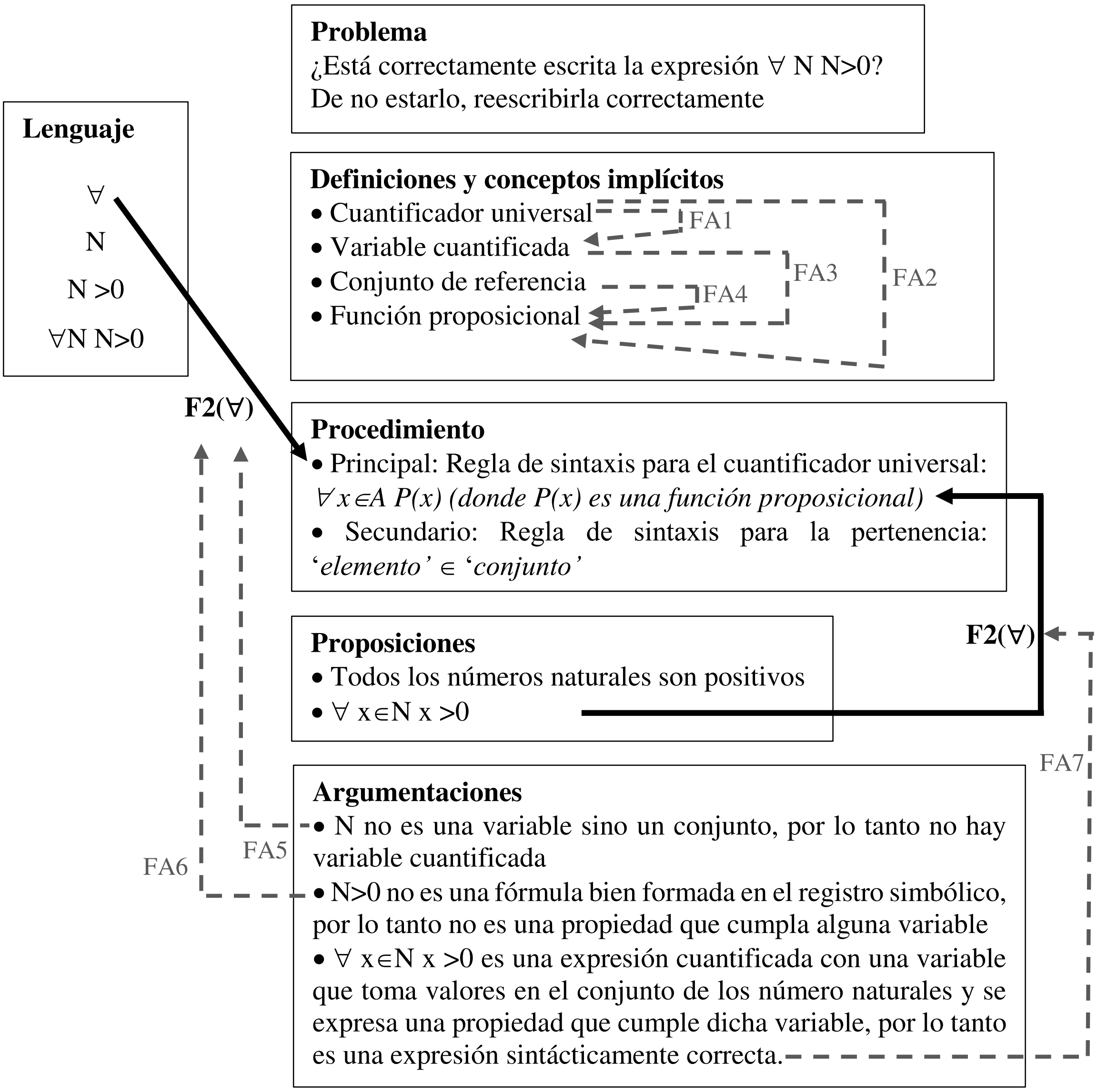


Figura 5.11. Configuración epistémica/cognitiva y funciones semióticas de la expresión '∀ N N>0'

En relación con las funciones semióticas participantes en la tarea de analizar si esta expresión está correctamente formulada y su reescritura, debe observarse que no es posible representar en el esquema de la Figura 5.11 las funciones semióticas auxiliares que vincularían a los restantes símbolos de la expresión que forman parte del Lenguaje. Esto es así porque en la expresión dada no existe una variable cuantificada, y además la expresión que hace las veces de función proposicional no es tal, ya que no tiene sentido la comparación de un conjunto con un número (‘N>0’). Sin embargo la presencia del cuantificador conlleva a la consideración de una variable a cuantificar, el conjunto de referencia y la función proposicional en el objeto correspondiente a *Definiciones y conceptos implícitos*. Entre ellos se consideran las funciones auxiliares que los vinculan. Las funciones FA1 y FA2 relacionan al cuantificador universal con la variable cuantificada y la función proposicional. La función FA3 representa la asociación entre la variable y la función proposicional pues la primera debe formar parte de la segunda. La función FA4 vincula al conjunto de referencia, en el cual toma valores la variable, con la función proposicional pues esto incidirá en que la expresión resulte una proposición verdadera.

Las funciones auxiliares FA5, FA6 y FA7 vinculan las Argumentaciones con la función F2(∀), las dos primeras intervienen en la decisión de que la expresión dada no está correctamente formulada, mientras que la última participa en la justificación de la forma correcta de reescritura.

Como ya se observó numéricamente, son muy pocos los estudiantes que reformulan correctamente esta expresión y muchos los que la consideran sintácticamente correcta.

Entre los 19 estudiantes que reformularon la expresión pero lo hicieron de manera incorrecta se observaron distintos tipos de errores. Algunos detectan la ausencia de una variable a cuantificar, con lo cual manifiestan la construcción de la función FA1, pero no construyen correctamente la función proposicional y/o omiten la pertenencia (las transcripciones son literales): ‘ $\forall n\ n \in N$ ’ (1 caso); ‘ $\forall x \in N\ N>0$’ (3 casos); ‘ $\forall n\ N\ N>0$’ (1 caso); ‘ $\forall n\ N\ n>0$’ (1 caso).

Otros sólo agregan o eliminan algún símbolo a la expresión original, sin incorporar una variable ni la pertenencia, como por ejemplo ‘ $\forall N\ /N>0$’ (4 casos); ‘ $\forall N;\ N>0$’ (1 caso); ‘ $\forall N\ [N>0]$ ’ (1 caso); ‘ $\forall N>0$’ (2 casos); ‘$N>0$’ (1 caso).

Durante la entrevista realizada al alumno A28, quien resolvió correctamente este ítem, se le preguntó por qué advirtió que la expresión no es correcta, y argumentó: ‘*Porque acá estaba hablando de todos los números, que tiene que ser un valor en particular, para un valor determinado’*.

En las entrevistas, ante la pregunta referida a si tiene sentido expresar que un conjunto es positivo del modo en que aparece en esta expresión (N>0), algunos estudiantes advierten la necesidad de utilizar una variable. Tal es el caso de los alumnos A29 y A39, que en su resolución habían expresado ‘ $\forall x \in N\ N>0$’ y durante la entrevista modificaron la función proposicional utilizando la variable. Otros mantienen su postura de que es correcta esa forma de escritura que compara al conjunto con un número (A91y A99).

El alumno A57, que en su resolución indicó que la expresión está correctamente escrita, en la entrevista argumenta que: *‘En este no me fijé si está bien escrito, me fijé si era verdadero lo que decía* […] *pero no está bien escrito, tendría que poner algo así* [reescribe correctamente]’. Los graves errores que posee la expresión dada no le impiden a este alumno interpretar un contenido semántico al que le otorgó un valor de verdad. Observando el hecho de que es capaz de reformular la expresión correctamente, conduce a pensar que le es indiferente la sintaxis de una expresión para su interpretación. El estudiante que no respondió a este ítem (A85), advierte que esta expresión está mal formulada durante la entrevista: ‘*Éste estaría mal escrito porque para todo habla de elementos* [¿Y cómo lo reescribirías?] *Entendería que es para todo número que esté en naturales tal que el número sea mayor que cero* [Escribe $\forall\ x \in N$: $x>0$]’. Aunque utiliza incorrectamente un ‘tal que’, condicionando la expresión como si fuera un cuantificador existencial, manifiesta la necesidad de emplear una variable a la que cuantifica y a la que utiliza en la función proposicional.

5.3.2.11. Análisis del ítem: $\forall\ x \in R\ x^2 \geq 0$

La expresión es sintácticamente correcta, lo cual fue detectado por 90 estudiantes, mientras que 10 la consideraron incorrecta y la reformularon, y un único estudiante no respondió al ítem, de acuerdo con los valores presentados en la Tabla 5.12.

Algunos estudiantes reformularon la expresión pero utilizando otra que es equivalente y sintácticamente correcta: ‘ $\forall x \in R\ [x^2 \geq 0]$’ (1 caso) y $\forall x\ (x \in R \Rightarrow x^2 \geq 0)$’ (1 caso). Otro estudiante incluye una expresión coloquial que enfatiza la generalidad de la expresión, como si la expresión dada contemplara todos los valores ‘ $\forall x \in R\ x^2$ *siempre es* ≥ 0’. En otros 3 casos, los estudiantes incluyen en la expresión el símbolo ‘/’, como si se tratara de un cuantificador existencial: ‘$\forall x \in R\ /\ x^2 \geq 0$’.

5.3.2.12. Análisis del ítem: $\exists\ x \in R/\ y+2 = 5$

En este ítem se presenta una expresión cuantificada, en la que la variable cuantificada no aparece en la función proposicional, lo que la convierte en sintácticamente incorrecta. Esta situación fue detectada por 62 estudiantes, que la reformularon correctamente, según se expresa en la Tabla 5.13. En los restantes casos, 33 estudiantes la consideraron como correcta, 4 la consideraron incorrecta pero propusieron una expresión incorrecta como respuesta, y sólo 2 estudiantes no respondieron.

En la Figura 5.12 se presenta la configuración epistémica/cognitiva de este ítem, con las funciones semióticas más relevantes que intervienen. Este ítem admite dos formas de respuesta válidas, ambas basadas en la unificación de la variable. Puede reformularse como ‘*∃ x∈R/ x+2 =5*’ o como ‘*∃ y∈R/ y+2 =5*’.

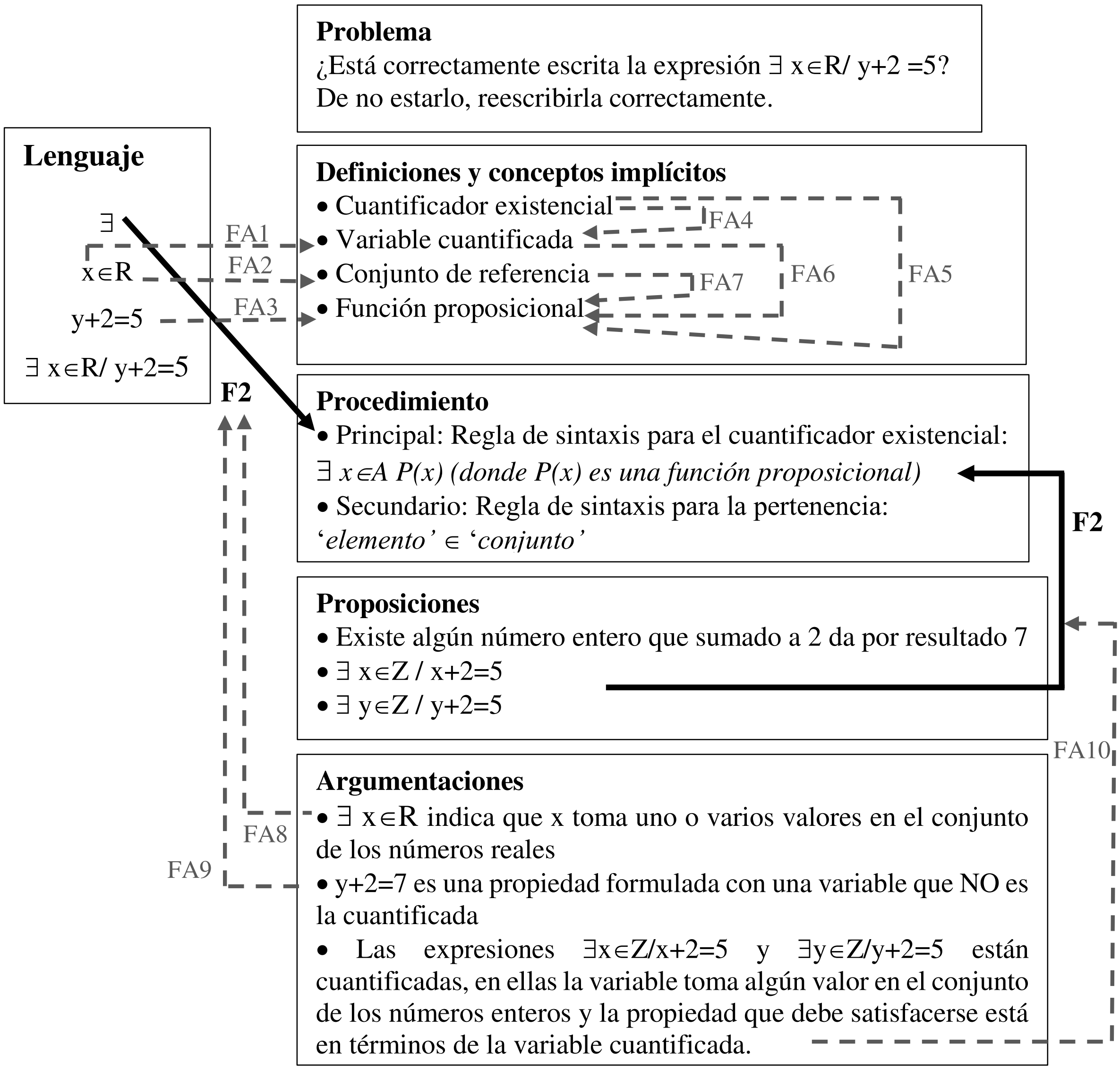


Figura 5.12. Configuración epistémica/cognitiva y funciones semióticas de la expresión ‘∃ x∈R/ y+2 =5’

Las características de las funciones semióticas auxiliares que participan en este caso son similares a las detalladas en apartados anteriores.

Entre los estudiantes que reformularon la expresión correctamente, 13 de ellos lo hacen utilizando la variable '*y*', lo aque indica que estaría prevaleciendo la expresión de la función proposicional y la función auxiliar FA3. Un total de 48 estudiantes lo hacen utilizando la variable '*x*', en los que podría suponerse que, siguiendo el orden convencional de lectura, asumen que la variable cuantificada es la que debe aparecer en la función proposicional, con lo que prevalecería la función auxiliar FA6. Un único estudiante presentó las dos formas de escritura.

Sólo 4 estudiantes reformularon mediante una expresión errónea. Uno de ellos modifica la variable pero también cambia el cuantificador: '$\forall\, x \in R /\ x+2\ =5$'. Otro estudiante pretende efectuar una forma de escritura según las reglas de la Lógica, pero no advierte la discrepancia entre las variables: '$\exists\, x\ (x \in R /\ y+2\ =5)$'. En otros dos casos, la forma de ecuación de la función proposicional parece conducir a los estudiantes que reformularon omitiendo el cuantificador o bien agregando otro: '$x+2=5$' y '$\forall\, x \in R\ \exists\, y\ =3$'.

En tres entrevistas se le consultó al estudiante, que había considerado que la expresión está correctamente formulada, sobre la razón de su decisión. En los tres casos, al releer la expresión identificaron el error automáticamente y reformularon correctamente la misma.

5.3.2.13. Análisis del ítem: $\exists\ x \in Z /\ x<0$

La expresión dada en este ítem está cuantificada y correctamente escrita. Esta condición fue considerada como tal por 90 estudiantes, mientras que 10 asumen que es incorrecta proponiendo una solución no válida y un único estudiante no respondió, de acuerdo con los datos vertidos en la Tabla 5.12.

De los 10 estudiantes que consideran que no está correctamente formulada y la reescriben, 6 hacen modificaciones sobre la función proposicional, particularmente sobre el signo de la desigualdad. Estos cambios son irrelevantes al objeto de estudio de esta investigación y las reformulaciones son sintácticamente correctas desde el punto de vista de las expresiones cuantificadas. El alumno A29, que reformuló este ítem mediante la expresión '$\exists\, x \in Z /\ x \geq 0;\ x<0$', manifiesta durante la entrevista que lo hizo así "*porque Z se divide en dos, en los negativos y en los positivos, eso es lo que yo interpreté* [¿Qué interpretaste?] *Que esto era falso*". Esto indicaría que las modificaciones probablemente están inducidas, como en el caso del estudiante A29, por una incorrecta interpretación del contenido semántico de la expresión.

Otros dos estudiantes reemplazan 'Z' por 'R' como conjunto de referencia. Como en el caso anterior, el error no está centrado en la sintaxis de la expresión sino en su contenido semántico, por una incorrecta interpretación. Así se infiere de la respuesta que el alumno A73 da para argumentar este reemplazo:

> I: ¿Estaba mal que dijera Z?
> A29: *No.*
> I: Quiero que me cuentes por qué decidiste que no estaba bien.
> A29: *Está bien escrito. Quizás porque o no vi el existe.....* (lo relee en voz baja). *Claro si es existe puede haber uno... Es que tomé el Z como que puede haber menores que cero como puede haber mayores, entonces tomé directamente los reales. Pero no lo tendría que haber tomado porque cambié todo.*
> I: En definitiva, como expresión ¿estaba bien escrita?
> A29: *Sí.*

5.3.3. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL EJERCICIO 3

Las tareas involucradas en el Ejercicio 3 de la segunda versión del instrumento son conversiones entre el registro simbólico-algebraico y el registro coloquial, y la determinación del valor de verdad de las expresiones dadas. Si bien para simplificar el diseño del ejercicio se solicitó el valor de verdad de todas las expresiones, en esta investigación tiene sentido el análisis de los ítems en los cuales la expresión está dada en forma simbólica, pues involucra a la función semiótica F3.

En las siguientes secciones se analizan las conversiones, en cada uno de los sentidos planteados, y la determinación del valor de verdad de las expresiones simbólicas.

5.3.3.1. Conversiones del registro algebraico-simbólico al registro coloquial

Como ya se detalló en el Capítulo 4, se observó que algunos estudiantes resolvieron estas conversiones simplemente haciendo una traducción símbolo a símbolo (SaS) y otros mediante una expresión global, manifestando el sentido del contenido semántico en el registro coloquial, lo cual involucra un tratamiento en dicho registro. Por lo tanto se consideraron dos funciones semióticas, la de la conversión propiamente dicha (F_{sc}) y la del tratamiento (F_t), como ya se explicó en el Capítulo 4.

En la Tabla 5.14 se muestran, para cada uno de estos ítems, la cantidad de estudiantes que manifiestan cada una de las funciones semióticas, F_{sc} y F_t, como así también los que resolvieron mal y los que no resolvieron. También se presenta la cantidad de estudiantes que determinaron correctamente el valor de verdad, en cada caso.

Tabla 5.14. Cantidad de alumnos en las conversiones de expresiones simbólicas del Ejercicio 3 (de la versión 2)

Expresión	Manifiestan F_{sc} (F_t)	Resuelven mal	Sin resolver	Valor de verdad
$0,5 \in Z \vee -1 \in Z$	90 (11)	8	3	66
$-2 \in Z \wedge -1 \in N$	86 (18)	14	1	93
$\forall x\ (x \in Z \Rightarrow x<0)$	79 (9)	20	2	86
$\exists x\ (x \in Z \wedge x < 0)$	76 (17)	21	4	77
$\exists\ x \in N\ /\ x < 0$	92 (21)	7	2	93
$\forall\ x \in N\ x > 0$	89 (19)	10	2	95
$\forall\ x \in N\ x = 2.k \vee x = 2.k - 1\ ,\ k \in N$	72 (18)	16	13	71

Como puede observarse en la Tabla 5.14, la mayoría de los estudiantes pudo realizar la conversión símbolo a símbolo, como una simple traducción que posiblemente esté fundada en el conocimiento del vocablo asociado a cada símbolo. Sin embargo, no es posible asegurar que el estudiante esté comprendiendo el contenido semántico de la expresión, tal como debería sucederle al leer una expresión simbólica formulada en cualquier material escrito del cual estudie.

Con el establecimiento de la función semiótica nominal (F1) de cada uno de los símbolos involucrados en la expresión, sería suficiente para efectuar la conversión SaS, mientras que esto no parece ser suficiente para la compresión de la expresión. Pocos alumnos se vieron impedidos de realizar la conversión, pues son ínfimas las cantidades de estudiantes que no resolvieron la tarea, a excepción de la última expresión, en la que la dificultad radica en la función proposicional pero no en la cuantificación.

Se advierte que apenas una quinta parte de los estudiantes realiza el tratamiento en el registro coloquial, manifestando la comprensión del contenido semántico de la expresión.

En la Sección 4.5.4 se describió a las conversiones como una composición de funciones semióticas F1, correspondientes a cada uno de los símbolos en juego. A modo de ejemplo se representan los esquemas de dos de las conversiones de este ítem.

En la Figura 5.13 se representa el esquema correspondiente a la conversión de la expresión '$0,5 \in Z \vee -1 \in Z$', donde aparecen las funciones semióticas F1 que intervienen en la conversión F_{sc}, que da lugar a la primera parte de la transformación al registro coloquial (conversión SaS) y luego la función semiótica F_t, que permite obtener una expresión coloquial global, similar a la que se utilizaría en forma oral para comunicar la idea que está expresada en la forma simbólica. Dado que el lenguaje coloquial admite muchas variantes para expresar la misma idea, se optó por una de ellas para construir la Figura 5.13, pero el tratamiento podría haber dado por resultado otra expresión equivalente, como por ejemplo: '*0,5 o -1 son números enteros*'. Las figuras ovaladas muestran los agrupamientos que se producen en los tratamientos dentro del registro coloquial, los cuales no serán analizados en detalle pues no son un objetivo de esta investigación.

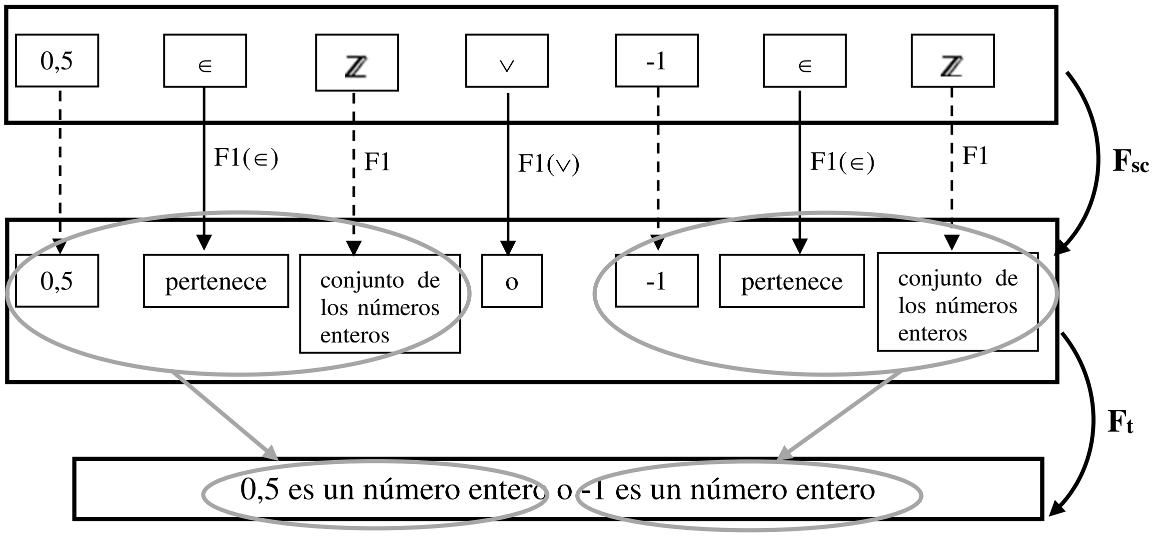


Figura 5.13. Representación de una conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial a través de funciones semióticas.

De manera similar a la anterior, en la Figura 5.14 se representan las actividades cognitivas correspondientes a la expresión '$\forall x\ (x \in Z \Rightarrow x<0)$', en términos de funciones semióticas.

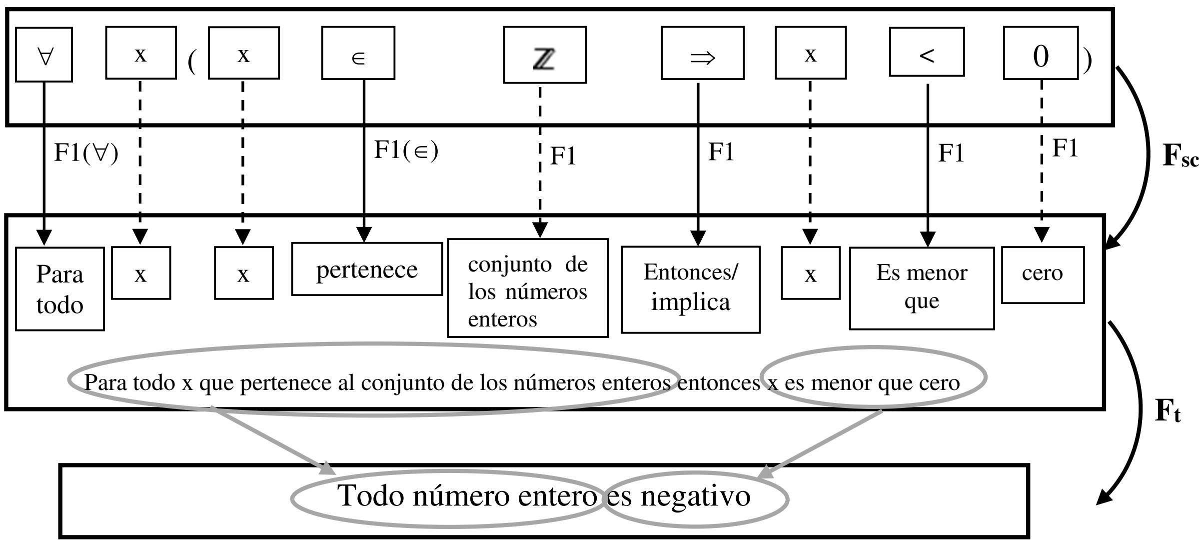


Figura 5.14. Representación de una conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial a través de funciones semióticas.

A partir de los valores registrados en la Tabla 5.14, puede decirse que, en cada caso, la mayoría de los estudiantes realizó la conversión SaS aunque fueron pocos los que efectuaron un tratamiento posterior. A continuación se detallan los errores observados, para cada una de las expresiones propuestas.

***a.* Expresión: '$0,5 \in Z \vee -1 \in Z$'**

Entre los estudiantes que no resolvieron correctamente la conversión de este ítem, los errores concernientes a la disyunción están vinculados a una deficiencia en el establecimiento de la función semiótica F1 correspondiente a este símbolo, al que convierten como 'unión' o como 'y'. Se observaron 7 casos y todos son coherentes con lo que respondieron en la lectura del símbolo efectuada en el Ejercicio 1.

Otros errores observados están vinculados a la interpretación del conjunto de los números enteros y a la conversión de una única proposición.

El hecho de que sólo 66 estudiantes determinaran correctamente que la expresión es verdadera hace presumir que desconocen las condiciones para que una disyunción tome este valor de verdad o, al menos, no las tuvieron presentes al momento de responder. Tal es el caso del alumno A39, quien respondió que la expresión es falsa, y en el transcurso de la entrevista revela inseguridad respecto de la asignación del valor de verdad de la conjunción y la disyunción: "*Me acuerdo que el 'o' era verdadero sólo cuando era verdadero-verdadero. Y el 'y' era.... no, te lo dije al revés. El 'o' es verdadero siempre salvo cuando es falso-falso. Y el 'y' era verdadero cuando había un falso.... no... Ahora me confundí...*". Sin embargo, en un momento posterior, al preguntársele nuevamente por el valor de verdad de esta expresión, analiza y luego asigna el valor de verdad correcto: "*Tengo un verdadero y tengo un falso y sin embargo es verdadero*".

***b.* Expresión: '$-2 \in Z \wedge -1 \in N$'**

Los errores detectados guardan similitud con los del ítem anterior, ligados a la conjunción, como producto del incorrecto establecimiento de la función semiótica F1 correspondiente a este símbolo, al que estos estudiantes leen como 'o', como 'intersección' o bien lo omiten, todos en concordancia con la respuesta que dieron en el Ejercicio 1.

También se observaron incorrectas lecturas de los símbolos correspondientes a los conjuntos numéricos.

***c.* Expresión: '$\forall x\ (x \in Z \Rightarrow x<0)$'**

Entre los estudiantes que resolvieron incorrectamente la conversión se observaron algunos errores recurrentes. La mayoría están ligados a la implicación que aparece en la expresión. En 6 casos la leen en forma invertida, poniendo como antecedente la condición de ser un número menor a cero. Otros 5 estudiantes omiten la lectura de la implicación, resultado una expresión tal como '*Para todo x, x pertenece a los enteros* ***con*** *x menor que cero*'. Sin embargo, estos errores no están ligados al símbolo principal de la expresión que es el cuantificador universal. Sólo un estudiante omite la lectura del cuantificador y otros dos proponen una expresión que no tiene coherencia ni siquiera como una lectura símbolo a símbolo.

En la entrevista realizada con el alumno A38, se le pide que 'relate' el contenido de esta expresión, a lo que responde: "*Todos los x enteros son menores que cero*". Su respuesta en el instrumento fue: "*Para todo x, y x pertenece a los enteros, entonces x es menor que cero*". Puede observarse que la respuesta oral si bien mantiene la mención explícita de la variable x, ya no hace una conversión símbolo a símbolo, pues el cuantificador lo menciona con 'todos', no hace explícita la implicación y convierte al plural la mención de la desigualdad.

***d.* Expresión: '$\exists x\ (x \in Z \wedge x < 0)$'**

Al convertir esta expresión, 10 estudiantes colocan incorrectamente el condicional '*si*', como si se tratara de una implicación. Otros estudiantes leen incorrectamente el símbolo '$\wedge$', en 3 casos lo interpretan como 'o' y en otros 3 casos como 'intersección'. Esta incorrecta lectura manifiesta que no está establecida la función semiótica F1 de la conjunción, y es coherente con lo que estos seis estudiantes expresaron en la lectura de este símbolo en el Ejercicio 1. Un alumno 'distribuye' el cuantificador a cada una de las proposiciones que están entre paréntesis y otro omite la lectura del cuantificador. Finalmente, 2 estudiantes proponen una expresión que es incoherente, aún en la conversión SaS.

Durante las entrevistas realizadas se les preguntó a algunos estudiantes si, entre las expresiones simbólicas dadas en el Ejercicio 3, hay alguna que diga '*Algunos números enteros son negativos*', con el objetivo de que detectaran esta expresión, formulada según las reglas de la Lógica formal. Los estudiantes A38, A58, A73, A74, A91 y A99 respondieron correctamente señalando esta expresión. Sin embargo, todos estos estudiantes habían respondido a este ítem con una conversión SaS. Esto conduce a pensar que no lograron interpretar la consigna del ejercicio, pero en realidad son capaces de realizar correctamente la lectura de la expresión simbólica. Los estudiantes A28 y A65 eligen como primera respuesta la expresión '$\exists x \in N / x < 0$', sin notar que la expresión elegida se refiere a los números naturales. Al hacerles notar esa diferencia el alumno A29 decide que no hay ninguna expresión entre las dadas que coincida con la expresión oral formulada, mientras que el alumno A65 reconsidera y responde correctamente. Otros dos alumnos, A67 y A85, respondieron que ninguna de las expresiones planteadas representa a la oración formulada de manera oral por la investigadora. No obstante, estos cuatro últimos estudiantes también habían respondido al ítem con una conversión SaS, pero evidencian que no son capaces de efectuar una lectura comprensiva de la expresión.

***e.* Expresión: '$\exists x \in N / x < 0$'**

Son pocos los estudiantes que cometen errores en este ítem. Un estudiante convierte como si hubiera una implicación y otro, además del cuantificador existencial, expresa en la conversión un cuantificador universal inexistente en la expresión dada. Como en las dos expresiones anteriores, se observa un caso de una lectura sin coherencia. Otros 4 estudiantes cometieron errores ligados a la función semiótica de otros símbolos, como la desigualdad y el conjunto N.

***f.* Expresión: '$\forall x \in N\ x > 0$'**

El error que presenta mayor frecuencia en este ítem, aunque sólo son 3 casos, es una lectura incorrecta de la implicación que está implícita ('*para todo x pertenece a los números naturales si x es menor que cero*'). Otro estudiante expresa el cuantificador como 'existe', a pesar de mostrar en otros ítems que conoce el cuantificador universal. Otros errores cometidos sólo por un alumno en cada caso son: la lectura de una conjunción que no aparece en la expresión dada, la incorrecta lectura de la desigualdad y la ausencia de la lectura de la función proposicional. También en este caso, 3 alumnos proponen expresiones cuya lectura no guarda coherencia.

***g.* Expresión: '$\forall x \in N\ x = 2.k \vee x = 2.k - 1,\ k \in N$'**

En este caso, la mayoría de los errores están ligados a una incorrecta lectura de la función proposicional. En 4 casos, la lectura de la implicación, que está implícita, está al revés ('*para todo x pertenece a los números naturales si x es igual a….*'). En un caso se presenta una incorrecta lectura del conjunto N, y en 3 casos se observa una lectura sin coherencia en la oración expresada.

En ocho de las entrevistas realizadas se volvió a indagar sobre la comprensión del contenido semántico de esta expresión por parte de los estudiantes. Estos alumnos son A29, A38, A39, A57, A63, A74 y A91. A excepción de los dos últimos, los restantes estudiantes sólo pudieron leer la expresión símbolo a símbolo, manifestaron no poder no poder hacerlo de otra manera y no lograron explicar cuál es el contenido de la expresión. El alumno A74 manifestó: "*Todos los x que pertenecen a los naturales o son pares o son impares*". Como en casos anteriores, se observa que a pesar de haber convertido la mayor parte de la expresión a una forma oral coloquial, aún conserva la expresión de la variable x en lugar de hablar simplemente de 'todos los números naturales'. El alumno A91 persiste en una lectura símbolo a símbolo, pero cuando se le solicita que 'relate' el contenido de la expresión, sólo puede decir: 'es par o impar', ignorando el conjunto de pertenencia y la generalidad que el cuantificador le impone a la expresión.

5.3.3.2. Conversiones del registro coloquial al registro algebraico-simbólico

Estas conversiones, que requieren la escritura de expresiones simbólicas a partir de una expresión coloquial dada, se presentan como de mayor dificultad para los estudiantes. Esto se observa en la cantidad de estudiantes (Tabla 5.15) que resolvió exitosamente cada una de las conversiones propuestas, mostrando que han establecido la función semiótica F_{cs}. En la mayoría de los casos, la cantidad de estudiantes que pudieron resolver correctamente esta tarea es menor que en las conversiones anteriores, y aumentó la cantidad de estudiantes que no pudieron abordarla. Una de las razones a las que se puede adjudicar esta dificultad en la intervención de la sintaxis, correspondiente al registro simbólico-algebraico, en la formulación de la expresión.

Tabla 5.15. Cantidad de alumnos en las conversiones de expresiones coloquiales del Ejercicio 3 (de la versión 2).

Expresión	Manifiesta F_{cs}	Resuelve mal	No resuelve
3 es un número entero e impar	53	44	4
3 y 5 son números naturales	39	62	0
4 es un número natural o es un número entero	82	18	1
Cada número entero es menor que su sucesor	65	28	8
Algunos números enteros son negativos	57	38	6
El cuadrado de cualquier número real es positivo	77	22	2

Las conversiones del registro coloquial al registro simbólico-algebraico también fueron descriptas en la Sección 4.5.4 como una función semiótica, F_{cs}, resultante de una composición de otras funciones semióticas ya definidas. En este caso intervienen las funciones semióticas F1, correspondientes a cada uno de los símbolos que forman parte de la expresión, y la función semiótica F2 (con preponderancia de la correspondiente al símbolo principal) para obtener una fórmula bien formada en el registro simbólico-algebraico. A modo de ejemplo, se representan dos de las conversiones de este ítem, en términos de las funciones semióticas. En la Figura 5.15 está representada la expresión *'3 y 5 son números naturales'*. En la misma se observan las funciones semióticas F1 de los símbolos que intervienen y la función semiótica F2 correspondiente a la conjunción.

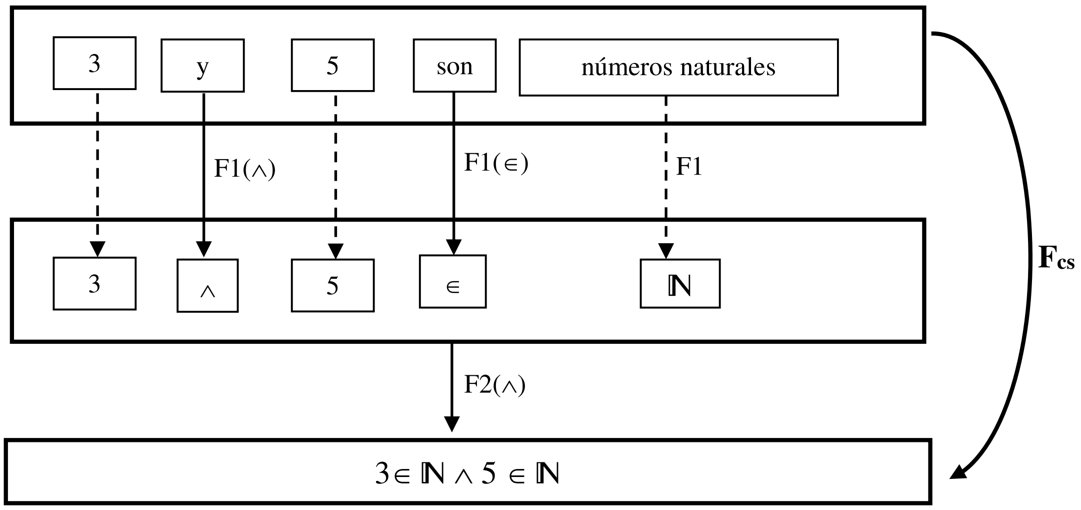


Figura 5.15. Representación de una conversión del registro coloquial al registro simbólico-algebraico a través de funciones semióticas.

De manera análoga a la anterior, en la Figura 5.16 se representa conversión correspondiente a la expresión '*Cada número entero es menor que si sucesor'*, en términos de funciones semióticas. Como en el caso anterior, se observan las funciones semióticas F1 de los símbolos que intervienen y la función semiótica F2 correspondiente al cuantificador universal.

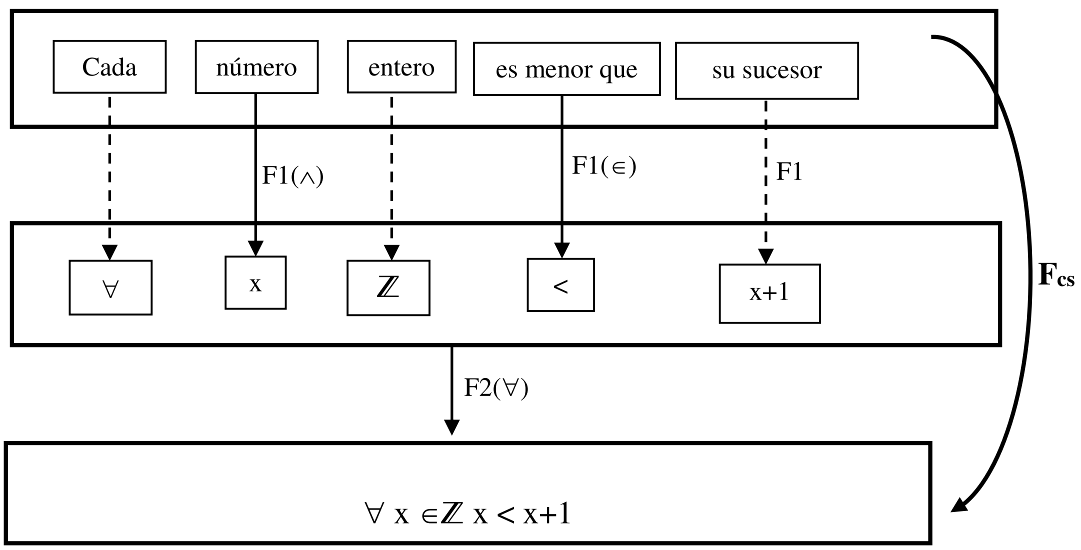


Figura 5.16. Representación de una conversión del registro coloquial al registro simbólico-algebraico a través de funciones semióticas.

A continuación de describen los errores observados con más frecuencia, para cada uno de los ítems de este Ejercicio en los que se solicita el pasaje de una expresión coloquial a una expresión simbólica.

***a.* Expresión: '*3 es un número entero e impar*'**

La mayoría de los errores observados en las conversiones correspondientes a este ítem están vinculados a la representación de la condición de 'impar' y no a la conjunción, que es el símbolo principal en la expresión.

Los errores observados en relación a la conjunción son la omisión de la misma (7 casos) y el uso del símbolo '$\vee$' en lugar de '$\wedge$' (1 caso). En los casos de omisión de la conjunción, no puede afirmarse que estos estudiantes no conocen el símbolo de la conjunción, pues se comprobó que en la mayoría de los casos, manifestaron correctamente su lectura en el Ejercicio 1.

***b.* Expresión: '*3 y 5 son números naturales*'**

En la conversión de esta expresión se observaron dos errores que se presentan con mayor frecuencia. El primero de ellos es convertir mediante la expresión simbólica '$3 \wedge 5 \in N$' (39 casos). En estas resoluciones, la conversión fue realizada como si fuera congruente, convirtiendo símbolo a símbolo en la misma secuencia en que aparecen los vocablos. Este uso de la conjunción pone en evidencia que los estudiantes efectúan una traducción coloquial de la conjunción, sin interpretarla como un operador entre proposiciones. En términos de las funciones semióticas, estos estudiantes sólo aplicaron las funciones F1 de cada símbolo pero no manifiestan como establecida la función F2 de la conjunción para obtener una fórmula bien formada en el registro simbólico-algebraico. Los alumnos A20, A29 y A67 formularon esta expresión como respuesta al ítem. Sin embargo, en sus respectivas entrevistas, todos advirtieron por sí mismos su error y reformularon correctamente la expresión, probablemente influenciados por la conversación mantenida anteriormente sobre el Ejercicio 2.

El otro error que se observó es la conversión mediante la expresión '$\{3, 5\} \in N$' (18 casos). Estos estudiantes no manifiestan errores en la sintaxis de la conjunción ni tampoco de hacer un uso coloquial de la conjunción, ya que ésta no aparece explícita en la expresión simbólica. El error cometido en esta expresión está ligado al símbolo de pertenencia y a la confusión entre este símbolo con el de inclusión. Estos alumnos hacen uso de la coma para la enumeración de elementos de un conjunto, costumbre que es de uso habitual en Matemática pero que también es un abuso notacional. Pero el agregado de las llaves le otorga a la enumeración el estatus de conjunto y no advierten que ya no es correcto el uso de la pertenencia.

En otros 4 casos se observó la ausencia de la manifestación de la función F1 de la conjunción, ya sea porque los estudiantes la convierten con el símbolo '/' o con el símbolo '$\vee$' o bien porque repiten el vocablo 'y'. Esto es coincidente con el desempeño de estos 4 estudiantes en el Ejercicio 1, en el que realizan una incorrecta lectura de este símbolo, lo que muestra que no lo conocen, y por consiguiente no logran hallar un símbolo apropiado para efectuar esta conversión.

_c._ Expresión: '_4 es un número natural o es un número entero_'

El error más frecuente en esta conversión es la escritura de la expresión '$4 \in N \vee Z$' (7 casos). Como en la expresión anterior, estos estudiantes no manifiestan la función semiótica F2 para obtener una fórmula bien formada, sino que sólo aplican las funciones F1 correspondientes a cada símbolo, haciendo un uso coloquial de la disyunción.

Otros estudiantes formulan dos proposiciones pero cometen errores ligados a la función F1 de la disyunción. Éstos se advierten en el uso del símbolo '$\wedge$' en lugar de' $\vee$' (5 casos), o bien mantienen el vocablo 'o' en lugar del símbolo '$\vee$' (2 casos) o simplemente omiten el símbolo '$\vee$' (1 caso). Sin embargo, sólo la mitad de estos 8 casos manifiestan una incorrecta lectura del símbolo de disyunción en el Ejercicio 1.

Los estudiantes A28, A29 y A39 omitieron determinar el valor de verdad de esta expresión en su resolución del ítem. Al preguntársele a cada uno de ellos por esta situación, durante la entrevista, adujeron que no habían estado seguros al momento de responder, pero luego, todos ellos respondieron correctamente. Es probable que el haber conversado explícitamente durante la entrevista sobre las tablas de verdad de la conjunción y la disyunción haya activado este conocimiento para aplicarlo en la resolución.

***d.* Expresión: '*Cada número entero es menor que su sucesor*'**

En este caso no se observa un error de mayor frecuencia y los cometidos aisladamente están ligados a la sintaxis. En ellos, la expresión formulada aparece el cuantificador universal (explícito o tácito), hay una variable, figura el conjunto Z y también alguna función proposicional, pero todos estos elementos están desordenados, con lo que la sintaxis es incorrecta, y por lo tanto la función F2 no está manifiesta (7 casos). Por ejemplo, se observaron expresiones tales como: '$a \in Z < a+1$' ; '$x < x+1 \ \in Z$'.

Otros 4 estudiantes optan por una expresión que tiene la sintaxis correspondiente a la usada en la Lógica Formal, '$\forall x \ (x \in Z, \ x < x+1)$', en la que no utilizan una implicación sino una coma.

En otros 3 casos, no indican el conjunto de pertenencia de la variable y en un único caso el estudiante utiliza el cuantificador existencial. Durante la entrevista del alumno A74, que escribió de esta manera, detecta su omisión y la corrige, mostrando que no desconoce la necesidad de expresar el conjunto de pertenencia.

En 4 casos, se observa el uso de los dos cuantificadores, donde el cuantificador existencial no cuantifica a ninguna variable, sino que estos estudiantes hacen un uso coloquial del mismo para indicar la existencia del sucesor. Con algunas variantes entre sí, estas expresiones son del tipo:' $\forall x \in Z \ \exists x+1 \, / \, x<x+1$'.

El estudiante A29, no respondió a este ítem pero durante la entrevista, aunque no sabe explicar por qué lo omitió, y lo resuelve correctamente utilizando un cuantificador tácito. Cuando se le consulta si el vocablo 'cada' lo remite a 'todos' o a 'algunos', reconoce que son todos y también que su omisión del cuantificador expresa que son 'todos', pero admite que podría colocar explícitamente el cuantificador universal. Esta misma observación la hace el alumno A57 durante la entrevista, quien respondió a este ítem con una expresión que no está explícitamente cuantificada. Este estudiante reconoce que la omisión de un cuantificador implica que es un ‘para todo’.

El estudiante A99 respondió a este ítem con la expresión ‘$x < x + \wedge \in Z$ ’. Durante la entrevista reconoce, en primer lugar, la omisión del ‘1’. Luego se le preguntó a quién se refiere la pertenencia al conjunto de los números enteros. Entonces responde: ‘*Ah, la x. Me faltó ponerlo*’, y reescribe mediante la expresión ‘$x < x+1, x \in Z$’. Mediante el diálogo el estudiante activa su conocimiento de la estructura y puede reconsiderar su error, logrando una respuesta correcta.

***e.* Expresión: ‘*Algunos números enteros son negativos*’**

El error más observado en esta conversión es la ausencia del cuantificador (14 casos). A estos estudiantes el vocablo ‘algunos’ no los remite al cuantificador existencial, y por lo tanto la función F1 de este símbolo probablemente está ligada únicamente al vocablo ‘existe’. Además, puede observarse que para estos alumnos la ausencia del cuantificador no estaría asociada al uso tácito del cuantificador universal, que es de uso habitual en Matemática. Otros 3 casos utilizan el cuantificador universal, con lo cual explícitamente manifiestan no sólo un incorrecto establecimiento de la función F1 sino una interpretación errada del cuantificador universal en cuanto a la generalidad que éste implica. El alumno A67 respondió a este ítem utilizando un cuantificador universal.

Durante la entrevista se le pregunta si la expresión ‘algunos números’ lo conduce a la idea de que son todos, a lo que responde que no, que debería haber usado un ‘existe’. Sin embargo, lo agrega delante de la expresión sin eliminar el cuantificador universal que anteriormente había usado. Cuando se le consulta por esto, responde que es porque la expresión dice ‘algunos’, como si el plural lo remitiera a la necesidad de mantener el ‘para todo’. Es claro que este estudiante no sólo no tiene establecida la función semiótica F1 correspondiente al cuantificador existencial, sino que desconoce el alcance de cada uno de los cuantificadores, y probablemente considera que el cuantificador existencial hace referencia a un único elemento.

Otros 4 estudiantes proponen una expresión que tiene la sintaxis correspondiente a la usada en la Lógica Formal, pero utilizan una implicación en lugar de una conjunción con lo que cambian el sentido de la expresión: ‘$\exists x\ (x \in N \Rightarrow x<0)$’.

En 5 casos se observa que está mal formulada la función proposicional, producto de una conversión en la que no se manifiesta la función F2 del cuantificador, sino que la conversión aparece como congruente (símbolo a símbolo) donde únicamente se manifiestan las funciones F1. Esto dio lugar a expresiones como: '$\exists x \in N < 0$', '$\exists x\, N < 0$' (A29), '$\exists x\, x \in N^-$' (A39) o '$\exists x \in N\ \text{-}1.x$'. En el caso del alumno A29, durante la entrevista relee su expresión y advierte, en primer lugar, la ausencia del símbolo de pertenencia y escribe '$\exists x \in N < 0$'; luego, ante diversas preguntas de la investigadora, logra escribir la expresión correctamente. Sin embargo, el alumno A39 no logra advertir sus errores en esta expresión ni hacer modificaciones.

En un único caso se advierte una inversión entre la función proposicional y la pertenencia al conjunto '$\exists x<0\ x \in N$' y en otro la ausencia del conjunto de pertenencia. Este último caso corresponde al alumno A74, quien durante la entrevista, y luego de haber corregido la misma omisión en el ítem anterior, detecta por sí mismo su error y agrega los símbolos faltantes.

***f.* Expresión: '*El cuadrado de cualquier número real es positivo*'**

El error más observado en esta conversión es la ausencia del conjunto de pertenencia de la variable (7 casos).

Un único alumno utilizó el cuantificador existencial en lugar del universal. También se halló un único caso en el que el estudiante optó por la estructura utilizada en la Lógica Formal pero sin la implicación que está implícita en la expresión dada.

El estudiante A29 resolvió este ítem simbolizando '$x^2>0\ x \in R$'. En la entrevista se le preguntó por la omisión del cuantificador, para indagar si entendía esta ausencia como un cuantificador universal tácito. El alumno manifestó que no sobreentendía la omisión del cuantificador como una alusión a todos los elementos y reescribió la expresión, no sólo agregando el cuantificador sino también invirtiendo la notación, '$\forall x \in R\ x^2>0$'.

5.4. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS

Tal como se detalló en el Capítulo 3, se realizaron entrevistas semiestructuradas a 18 estudiantes seleccionados entre aquellos que resolvieron la versión 2 del instrumento, y considerando individuos de las cuatro carreras en las que se tomaron datos. El criterio para la selección de los estudiantes a ser entrevistados fue que tuvieran desempeños distintos en la resolución del instrumento, considerando la inclusión de estudiantes con bajo, medio y buen desempeño. La valoración del desempeño fue considerada a partir de la primera puntuación que se realizó, con variables continuas, pues ésta fue la primera que se realizó y, por lo tanto, la que estuvo disponible al momento de la selección de estudiantes. Las entrevistas se realizaron durante las tres semanas posteriores a la administración del instrumento.

Los 18 estudiantes entrevistados de cada carrera fueron los siguientes:

- Ingeniería: A10, A20, A28, A29, A33, A38, A39 y A41
- Licenciatura en Biología: A57, A58 y A63
- Profesorado en Matemática: A65, A67, A73 y A74
- Bioquímica: A85, A91 y A99.

Debe tenerse en cuenta que durante la entrevista el estudiante tenía a la vista su resolución del instrumento, aunque éste no presentaba ninguna marca ni corrección hecha por la investigadora, dado que las mismas fueron realizadas sobre una fotocopia de la resolución. Esta metodología de trabajo fue adoptada para que, en el momento de la entrevista, el estudiante no se sintiera influenciado por las marcas que la investigadora pudiera haber realizado al momento del análisis de su resolución. De esta manera, se buscó evitar que el estudiante se avergonzara o inhibiera por sus respuestas, o que ya supiera cuáles de sus respuestas eran incorrectas, o cualquier otro tipo de sentimiento negativo que alterara la espontaneidad de sus respuestas.

5.4.1. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS GENERALES

A continuación se presentan resultados correspondientes a las preguntas generales que se realizaron a todos los estudiantes, y que fueran detalladas en el capítulo de Metodología. Las mismas se refieren a generalidades en relación a cuestiones simbólicas y a los símbolos en estudio en particular.

En las transcripciones, los estudiantes están identificados con su número en la muestra y la investigadora con una letra 'I'.

a. Pregunta general 1: Antes se ingresar a la universidad, ¿conocías alguno de éstos símbolos?

La pregunta se refiere a los seis símbolos en estudio, los cuales están listados en el primer ejercicio del instrumento, y sobre los mismos se realizó la pregunta en cada caso.

Sólo 3 alumnos afirmaron no conocer ninguno de los símbolos antes de su ingreso a la universidad. En el otro extremo, 3 estudiantes manifestaron conocer previamente todos los símbolos indicados, y 3 indicaron conocerlos con excepción del símbolo de 'inclusión'. Los restantes estudiantes, indicaron conocer algunos de los símbolos de la lista.

b. Pregunta general 2: ¿Qué ventajas y/o desventajas le encontrás al uso del lenguaje simbólico que se utiliza en Matemática?

En relación a las ventajas, la mayoría aduce una cuestión de rapidez, brevedad y ahorro en la escritura. Sin embargo, ninguno de ellos manifestó ser consciente de la precisión y la falta de ambigüedad que posee el lenguaje simbólico matemático, ni tampoco su universalidad.

A continuación se transcriben algunas expresiones literales de los estudiantes.

A10: *Se puede tomar nota más rápido.*

A20: *A veces escribo en forma simbólica porque es más corto, y lo escribís más rápido. O sé si está bien escrito, pero por ejemplo para dar una respuesta yo escribo en vez del "y" y el "o" uso estos símbolos, el "no existe" siempre lo uso ... en vez de escribir "no existe" uso el símbolo "no existe". Para mí sí es ventajoso porque escribís más rápido.*

A28: *Una ventaja por el tema de la escritura, por ahí más aliviado, más corto...*

A29: *Abreviar.*

A33: *Es muy ventajoso cuando ya le tomaste la mano. Cuando recién lo estás conociendo te marea un poco. Se te puede confundir el pertenece con el existe. Pero una vez que le tomás la mano, te ahorra en escritura y para mí queda mejor visualmente. Yo me entiendo más así que teniendo todo escrito manualmente* (se refiere a coloquialmente)*, para mí es más práctico. Pero es hasta que le tomaste la mano. Al principio es un plomazo pero después queda bonito...*

A38: *Si sabés usarlo te sirve muchísimo. Ahorrás, reducís todo para que quede perfecto, claro. Lo pueden ver y si saben leerlo....*

A39: *Muchas ventajas. Lleva ahorrar tiempo, a leer más fácil, lo destaco más a la hora de la escritura, se ahorra más tiempo. Y es más fácil de interpretar, si uno tiene obviamente práctica en eso. Y ahora no tengo suficiente práctica como puede ser una de las profesoras, que lo leen más fácil. Pero yo al ver un para todo, un existe, un pertenece, lo leés más fácil, más rápido. Y facilita a veces el estudio. Todo eso lleva a tener una buena práctica.*

A41: *Que la lectura es mucho más rápida. La lectura y la representación… Y para interpretar las consignas o las cosas es… para mí es más fácil.*

A58: *Yo creo que es una ventaja conocerlo porque no vas a encontrar todo siempre* *detallado en palabritas, y es el lenguaje matemático. Si bien nosotros por ahí no nos vamos a especificar tanto, lo vamos a usar. Para mí sí es beneficioso saberlo, es útil. [...] manejarte bien en el ámbito de la matemática, la matemática que vayas a manejar.*

A91: *Te ahorra escribir, vas más rápido y si lo entendés es más práctico.*

En tanto, son muchos menos los estudiantes que manifestaron hallar desventajas, y éstas se refieren, en general, a recordarlos y a los inconvenientes de no saber usarlos. Si bien en las respuestas a la próxima pregunta los estudiantes reconocen las dificultades que les genera la sintaxis en el registro simbólico, no aparece manifiesta aquí como una desventaja.

A28: *Quizás que si no lo escribís bien o no lo aplicás bien estás poniendo cualquier cosa.*

A29: *Si no te lo acordás. Si te olvidaste de lo que significaba, eso puede ser una desventaja.*

A33: *No, lo que te decía que de cuando lo estás aprendiendo, la parte de la memoria. Pero después no.*

A91: *Y la desventaja es que si no lo sabés no entendés lo que escribís, básicamente es eso.*

c. Pregunta general 3: ¿Qué te resulta más fácil: leer símbolos o escribir en símbolos? ¿Por qué?

En relación a esta pregunta, sólo 3 alumnos manifestaron no distinguir diferencias en las tareas de leer y escribir en forma simbólica. Los restantes sí optaron por una de las tareas como más fácil, aunque sólo 3 de ellos refirieron tener mayor facilidad en la escritura. Se induce de sus respuestas que estos estudiantes no parecen preocuparse por la sintaxis, ni por la precisión de su escritura, como se observa en las siguientes transcripciones.

A10: [Es más fácil] *escribir. En leer tardo un poco más, porque escribiendo yo estoy pensando, sé lo que voy a poner, y si lo estoy leyendo tardo más, creo yo.*
I: ¿Tardás más en entender lo que dice?
A10: *Claro, hasta que por ahí pienso en lo que está diciendo.*

A20: *Para mí escribir en símbolos es más fácil, porque capaz que lo interpreto mal cuando lo leo. A veces lo interpreto mal cuando lo leo. No sé si lo escribiré bien pero escribirlo me resulta más simple que leerlo.*

I: Pero te queda la duda de si está bien escrito…
A20: *Claro. Y si está bien lo que entendí o si interpreté otra cosa, también. No sé si llego bien. Es más fácil para mí leerlo con palabras que con símbolos.*

A85: *Me resulta más fácil asociar la palabra con el símbolo que el símbolo con la palabra.*

Los restantes alumnos manifestaron que la lectura de símbolos les resulta más fácil que la escritura. Algunos no pudieron dar argumentos de esto, pero otros aducen como razones las dificultades ligadas a la sintaxis. A diferencia de los que consideran que les resulta más fácil la escritura, la mayoría de estos alumnos revelan tener conciencia de la necesidad de respetar la sintaxis de los símbolos y expresan cuestiones ligadas al orden en que aparecen los símbolos.

A38: *Leerlas siempre es mucho más fácil. Porque cuando leés en realidad es como que te están diciendo esto es de tal forma y pasa esto. Entonces uno se pone a pensar que no puede pasar nada fuera de eso, no se puede contradecir. En cambio cuando tiene que escribir busca no contradecirse o que diga una cosa que no sea demasiado amplia para cerrar bien en lo que uno quiere decir.*

A41: [Escribir me cuesta más] *porque tenés que encontrar la manera de que quede bien expresado lo que estás diciendo... en el orden y sin alterar las cosas.*

A57: *Me resulta más fácil leerlas. O sea, lo puedo escribir pero... ya tengo que pensar, a lo mejor me tengo que poner a pensar cuál es cada uno. Y cómo expresarlo bien.*

A58: *Leer. Quizás por esto que te digo, que por ahí tengo el concepto de lo que puede representar el símbolo pero si lo tengo que armar, por ahí me cuesta traducirlo. Cómo decirlo, lo que está escrito en palabras traducirlo a símbolos.*

A65: *Y... escribir en símbolos es más difícil.* […]. *No darme cuenta de cómo se escribe. Porque no sé cómo escribirlo.*

A67: *Leer me resulta más fácil.*[Le cuesta más escribir] p*orque no sé si está bien, lo entiendo todo, pero no sé si está bien pasado a "letra"*

A73: *A veces leerlas, es como que yo me entiendo más.*
I: O sea que para vos es más fácil leer.
A73: *Sí, pero cuando tengo que demostrar algo con símbolos ahí sí me cuesta más.*
I: ¿Y qué es lo que te cuesta? ¿Te das cuenta por qué te cuesta o qué es lo que te traba?
A73: *No sé, quizás no me siento segura con lo que puedo llegar a responder. Entonces es como que me inclino por algo y después digo: uy, ¿es así como se escribe?*

A74: *Leer. Tal vez porque cuando escribís, el orden en que ponés las cosas. No es* *lo mismo decir para todo x existe un y que decir existe un y para todo x. en cambio cuando lo leés es más fácil, ya te lo dan.*

d. Pregunta general 4: Cuando explican un tema en clase, ¿podés interpretar inmediatamente las expresiones simbólicas que escriben los profesores o sólo copiás y después tratás de entender lo que dice? ¿Tomás nota del significado de algunas expresiones simbólicas?

La mayoría de los estudiantes entrevistados admiten tomar algún tipo de nota ante símbolos o expresiones simbólicas que ven por primera vez. Las razones que argumentan redundan en una misma situación: poder leerlas luego, poder recordarlas en una instancia posterior. Este acto remite a la construcción de la función semiótica F1 del símbolo en cuestión y a la importancia que le otorgan los estudiantes al hecho de recordar el vocablo ligado al símbolo. De forma natural, los estudiantes parten de la construcción de la función F1 para la construcción del significado, y reconocen implícitamente la asociación que implica esta función semiótica como indispensable para el posterior uso del símbolo.

A29: *Si hacen algún símbolo que no sabía lo copio al costado.* […] *porque después llego a mi casa y me olvido de lo que significaba, y no puedo leer más*

A38*: Con todos* [los símbolos] *en algún momento lo tuve que hacer* [anotar]. *Porque en el momento no entendía nada. La primera vez que me ponían algo una expresión así escrita simbólicamente, no.... no entendía.*

A73: *Trato de hacerme una nota al lado como para no olvidármelo o para después reverlo.*

e. Pregunta general 5: Suponiendo que le tuvieras que explicar a un compañero que no conoce el símbolo $\in$, ¿te parece que con sólo decirle el nombre del símbolo a esa persona le alcanzaría para utilizarlo correctamente? ¿Qué le dirías? (Esta pregunta se repitió para cada uno de los símbolos en estudio)

Ante la primera parte de la pregunta, casi todos los estudiantes entrevistados, a excepción de dos (A63 y A99), reconocieron la insuficiencia de dar como información sólo el vocablo asociado al símbolo. De alguna manera, reconocen la presencia de otras habilidades para utilizar apropiadamente un símbolo y, en definitiva, construir su significado.

El estudiante A99, que considera que con sólo darle el vocablo asociado sería suficiente, luego admite que "*con un ejemplo lo entendería mucho mejor*". Por su parte, el estudiante A63, considera que con el vocablo asociado es suficiente ya que "*es una palabra que usamos en castellano, es una palabra*".

En relación a la segunda parte de la pregunta – ¿Qué le dirías? –, las respuestas fueron variadas. Algunos estudiantes no logran explicitar qué dirían en relación a qué otro tipo de dato le aportaría (A29 y A67). Otros simplemente señalan que lo harían con un ejemplo (A20, A28, A41, A73, A85). Pero siete alumnos (A33, A38, A57, A58, A65, A74, A91) refieren que darían alguna explicación de otro tipo que, en general, se refiere al modo de uso o a la estructura de una expresión que lo contenga.

> A38: *Para usarlo bien tenés que ver cómo se usa y cuándo es recomendable usarlo*.
>
> A58: *Le diría qué es y en qué contexto se usa*.
>
> A91: [Le diría] *qué es y en qué se usa*. [...] *Sería como la función del símbolo, para qué sirve y dónde utilizarlo*

Es interesante la distinción que hace el alumno A39 en relación a 'conocer' y 'saber usar'. Este alumno relata que su primer contacto con estos símbolos fue durante el curso de ingreso a la universidad, que allí supo cómo se llamaban, pero que aprendió a usarlos después, durante el cursado de la asignatura Álgebra: "*Más allá de que los conociera, los aprendí a usar después. Con Álgebra los empecé a usar, porque antes no los usaba*". Podría interpretarse que 'conocer' es tener establecida la función semiótica F1, lograr la asociación entre el símbolo y el vocablo, pero 'saber usar' implicaría el establecimiento de las restantes funciones semióticas que están involucradas en la construcción de significado de un símbolo, y ligadas al uso del mismo.

A continuación se presenta un análisis de las respuestas correspondientes a cada uno de los símbolos en estudio. En cada caso, se buscaron y establecieron categorías que tipifican y agrupan las respuestas, en relación con las ideas que manifiestan los estudiantes.

e.1.Respuestas a la Pregunta 5 en relación al símbolo $\in$

En las respuestas referidas a qué tipo de explicación le darían a una persona que no conoce el símbolo '$\in$', se distinguieron cuatro categorías, de acuerdo a los aspectos en que los estudiantes pusieron el énfasis. En cada caso, se transcriben algunas frases textuales a modo de ejemplo.

- NOCIÓN BÁSICA DE USO: En esta categoría se consideran las respuestas de los estudiantes (6 casos) que muestran tener noción del uso del símbolo, pero las expresan vagamente y sin utilizar un lenguaje específico. Por ejemplo, algunos estudiantes utilizan la palabra 'grupo' en lugar de 'conjunto'.

  A10: *Poner límite a las posibilidades. Por ejemplo si pongo x, x podría ser un número cualquiera, entonces con 'pertenece' le estoy poniendo límites al grupo que yo quiero que pertenezca.*

  A28: *Por ejemplo como éste* (se refiere al ejemplo que escribió en el Ejercicio 1, x ∈R) *que x es un número y ése pertenece por ejemplo a los racionales o pertenece a los reales. Depende el número... que ese número pertenece al grupo de números que sea.*

  A29: *Cuando algo pertenece a un grupo. Algo así le diría.*

  A38: *Es muy difícil decirlo así en forma muy genérica, pero por ejemplo si estoy haciendo o resolviendo una ecuación, tengo que aclarar a qué conjunto pertenece la variable. No es lo mismo poner x cuadrado es mayor o igual que cero si x es real o si x es compleja. Ahí tenés que aclarar necesariamente el conjunto. Sino es como que no tiene validez lo que decís.*

  A41: *Le explicaría que algún elemento pertenece a un todo.*

  A74: *Pertenece es un elemento que está adentro de un conjunto más grande, algo chiquito que está dentro de algo más grande.*

- ROLES: En esta categoría se consideran aquellas respuestas (4 casos) en las que el acento está puesto en los roles que juegan los restantes objetos que componen la expresión en la que interviene el símbolo de pertenencia. Utilizan en su relato las palabras 'elemento' y 'conjunto'. Se estaría manifestando una incipiente construcción de la función semiótica F2.

  A20: *Yo al pertenece lo utilizaría cuando tengo un número y un conjunto pero si me dan dos conjuntos utilizaría contiene.*

  A65: *Es un elemento que está dentro de un conjunto.*

  A91: *Pertenece sería en el tema de conjuntos... sería por ahí... un elemento pertenece a un conjunto o no pertenece a este conjunto.*

- ORDEN: En esta categoría se consideran aquellas respuestas en las que, además de los roles que juegan los restantes elementos, los estudiantes hacen referencia a algún tipo de orden en el que deben aparecer los símbolos (3 casos). Podría considerarse como una manifestación de la función semiótica F2.

A39: *Un elemento va a pertenecer a un conjunto y no un conjunto a un elemento.*

A57: *Por lo general, cuando se escribe que algo pertenece a otra cosa… es cuando un número pertenece… por lo general va… o por lo menos lo que yo estoy haciendo últimamente en mi trabajo en matemática, es que un número pertenece a cierto conjunto. Entonces escribo primero el número después pertenece… el símbolo pertenece, y después el conjunto.*

- EXPLICACIÓN: Las respuestas consideradas en esta categoría son aquellas en las que el estudiante busca dar una idea del concepto de pertenencia, más allá de la forma simbólica (4 casos). A modo de ejemplo se transcriben algunos fragmentos:

A33: *Le diría cuando el elemento cumple unas ciertas condiciones ... tomando un elemento patrón, un conjunto patrón, como en este caso los naturales, que tenga una serie de condiciones, todos los que pertenecen a ese conjunto son los que cumplen esas condiciones, necesarias*. [Una expresión está bien escrita] *porque te marca un elemento que cumple una cierta condición, que cumple la condición de ser un número entero y pertenece a este conjunto.*

A73: *Si la persona conoce el conjunto de los naturales le podés llegar a explicar que cualquier número que esté dentro, si le querés explicar el pertenece, elegís uno que esté dentro y lo explicás así, como que pertenece al conjunto.*

A85: *Le daría un ejemplo de un conjunto, de un conjunto que tenga como elementos el 1, el 2 y el 3 puedo decir que pertenecen a ese conjunto. No que está incluido. Porque cuando hablamos de incluido son conjuntos.*

- NO SABE QUÉ EXPLICAR: Un único estudiante no pudo responder nada ante esta pregunta (A67).

e.2.Respuestas a la Pregunta 5 en relación al símbolo $\subset$

En las respuestas referidas a la explicación que los estudiantes darían para explicar el uso del símbolo '$\subset$', se distinguieron cuatro categorías entre aquellos estudiantes que pudieron dar alguna especificación.

- SÓLO LO CONOCE: Estos alumnos (2 casos) admiten conocer el símbolo, saben que lo utilizan en las clases pero no recuerdan su uso o no pueden explicitarlo. En estos casos sólo estaría establecida la función semiótica F1.

- MEDIANTE EJEMPLO: Los alumnos cuyas respuestas se consideran en esta categoría son aquellos que como única explicación de uso presentan un ejemplo (3 casos).

- EXPLICACIÓN: En esta categoría se consideran aquellas respuestas en las que el estudiante da alguna idea del concepto de inclusión (9 casos). No utilizan terminología apropiada pero manifiestan la idea de estar "dentro". La mención a la participación de dos conjuntos permite suponer que es una manifestación de la construcción de la función semiótica F2.

A33: *Cuando estoy hablando no de un elemento puntual sino de un conjunto o grupo de elementos... respecto de otro conjunto patrón que cumple las condiciones, se puede decir que está dentro de ese conjunto.*

A58: *Quiere decir que hay un conjunto dentro de otro.*

A65: *Es un conjunto que está dentro de otros conjuntos.*

A74: *Como dos conjuntos que uno está adentro del otro.*

A85: [Se usa] *cuando se habla de dos conjuntos. Un conjunto puede estar incluido o ser igual a otro.*

A99: *Cuando tenés un conjunto que engloba a otro.*

- CONFUSIÓN CON SÍMBOLO DE PERTENENCIA: En esta categoría se consideran aquellas respuestas en las que los estudiantes manifiestan una confusión entre el símbolo de inclusión y el de pertenencia (4 casos). Esta confusión, como ya se indicó anteriormente, parece provenir de la similitud de significado que poseen las expresiones 'pertenecer' y 'estar incluido' en el lenguaje coloquial. A continuación se transcriben algunas de las respuestas en las que se observa esta confusión. En particular, el alumno A28 hace alusión a que, para él, las expresiones en lenguaje coloquial "dicen lo mismo". Aunque manifiesta la confusión entre ambos símbolos, se observa que intuye una diferencia entre ellos pero no es capaz de explicitarla.

I: Si yo pusiera que un número está incluido en R ¿es lo mismo que poner que pertenece a R?
A28: *Sí.*
I: ¿Es indistinto usar el incluido o el pertenece?
A28: *No, no es indistinto.*
I: Alguna diferencia debe haber, por algo hay dos símbolos.
A28: *Sí, tal cual. Por ahí uno dice el 3 pertenece a R y dice 3 incluido en R está diciendo lo mismo.*
I: Pero fijate que en este ejemplo vos elegiste poner N está incluido en R, como ejemplo del incluido, y es correcto. ¿Por qué elegiste poner un conjunto y no un número? ¿Por qué pusiste N y no un número?
A28: *Porque un número está incluido en los naturales y también está incluido en los reales.*
I: Pero en este caso (se refiere al ítem $N \in Z$ del Ejercicio 2) vos lo reescribiste

poniendo N está incluido en Z, algo te indicó que tenías que escribirlo así, con el incluido y no con el pertenece. ¿Qué te habrá dado la pauta?
A28: *Es que N no pertenece a Z, está incluido pero no pertenece.*
I: ¿Y por qué pasa eso? ¿Por qué como estaba no es correcto y así como vos lo escribiste sí es correcto?
A28: (Piensa largamente) *La verdad es que no sé.*

(El alumno A63 había manifestado al comienzo de la entrevista que considera que no hay necesidad de explicar nada más que su asociación con el vocablo, que con eso es suficiente para entender el significado de un símbolo)
A63: *… pertenece es una palabra que usamos en castellano, es una palabra que se supone que si algo pertenece a algo…* [...] *si un número pertenece a un conjunto quiere decir que ese conjunto lo contiene. Yo creo que se entiende*.
I:Y este símbolo, el incluido, ¿es equivalente al pertenece o se usa en otro casos? (su ejemplo para el símbolo '$\subset$' fue: $2\subset \mathbb{R}$).
A63: *Sí es equivalente. Si un número pertenece a un conjunto quiere decir que está incluido en ese conjunto.*
I: O sea que son dos símbolos para decir lo mismo.
A63: *Sí, no sé quizás hay algunas otras explicaciones pero en este caso es lo mismo.*

A67: *Es que justo el "pertenece" y el "estar incluido" me confunden. Es como que no sé bien en qué momento usar cada uno.* [Me confunden] *los conjuntos. Cuándo un conjunto pertenece a otro conjunto.*

I: ¿Es igual usar el "pertenece" que el "incluido"? ¿Es indistinto?
A29: *No.*
I: Acá pusiste que las expresiones $-2 \in \mathbb{Z}$ y $3 \subset \mathbb{Z}$ están bien escritas…
A29: *Pero no son lo mismo.*
I: Las dos expresiones se parecen.
A29: *Sí.*
I: ¿Es indistinto haber utilizado pertenece que incluido?
A29: *Sí, es intercambiable.*
I: ¿Sirven para lo mismo?
A29: *Si, hacen lo mismo casi. Pero en estos casos. No sé en otros.*

- NO SABE QUÉ EXPLICAR: Dos estudiantes no pudieron dar ninguna respuesta para este símbolo

e.3.Respuestas a la Pregunta 5 en relación a los símbolos $\forall$ y $\exists$

Entre las respuestas que los estudiantes dieron para ambos cuantificadores, con relación a qué aspectos le explicarían a alguien que los desconoce, se distinguieron cuatro categorías.

- NOCIÓN BÁSICA DE USO: Estos estudiantes muestran tener noción del modo de uso de estos símbolos y distinguen entre ambos cuantificadores (6 casos). En general lo dicen con palabras muy informales, sin rigurosidad y omiten expresar que la variable toma valores dentro de un determinado conjunto de referencia.

A20: *cuando se cumple para todos los números*
I: Se cumple que quiere decir? Que es verdadero?
A20: *Claro, que es verdadero o falso para todas las x.*
I: ¿Y el existe?
A20: *yo lo uso siempre para alguna respuesta. Para indiciar que un elemento…. No sé cómo decirlo…porque puede que exista algún número pero no todos cumplen lo que dice, o sea, para algunos es verdadero pero para otros no.*

A28: *Para todo cuando es general, cuando es por ejemplo para todos los números, cuando usas algo abarcando a todos los términos que tenga. Y el existe para cuando tomás algún término en particular, lo usás para uno en particular.*

A29: *Cuando se generaliza.*
I: ¿Los dos?
A29: *No, el para todo. Cuando se cumple para todos los valores de algo.*
I: ¿Y el existe?
A29: *Es que sólo existen algunos, no todos.*
I: ¿Sólo existe algunos que qué?
A29: *Sólo existen algunos valores de algo... de "x"….*
I: ¿Qué les pasa qué?
A29: *Eue dan el resultado... no sé cómo te puedo explicar….*
I: Que cumplen…
A29: *Que cumplen con la regla…*

A57: *Diría que el "para todo" se utiliza cuando es una regla que sí o sí pasa y que "existe" se usa cuando puede haber un caso que ocurra.*

A67: *"Para todo" sería que cualquier elemento cumple determinada regla o propiedad. Y el existe quiere decir que sólo hay unos pocos o alguno que cumplen con esa propiedad.*

- CONOCE USO Y TIENE NOCIÓN DE LA SINTAXIS: Los estudiantes cuyas respuestas son consideradas en esta categoría (7 casos) son aquellos que manifiestan no sólo conocer las condiciones de uso sino también hacen referencia a aspectos formales de la sintaxis, nombrando el conjunto de referencia y también la función proposicional, a la se refieren como 'la regla' o 'la condición'. En estos casos se manifiesta una construcción de la función semiótica F2 correspondiente a este símbolo.

A33: *El para todo cuando no hay excepciones a la regla, cuando usás el para todo lo definís para un conjunto. Cuando dentro de ese conjunto que decidís utilizar no hay excepciones... se cumple en todos los casos, se usa el para todo. Y el existe, cuando dentro del conjunto en el que estás trabajando, hay uno mínimo o más casos donde se cumple esa condición.*

A39: *El para todo lo puedo decir cuando se cumple siempre, es decir, tengo un*

elemento y se va a cumplir…. (piensa)
I: ¿Una propiedad?
A39: *Sí. Que se va a cumplir siempre en un conjunto. No solamente un solo elemento sino para todos.* […]. *El para todo engloba todo. Por decirlo así, no tiene límite. El existe en cambio, si, siempre está limitado en un segmento o en una parte.*

A41: *El para todo se refiere a todos los números del conjunto del que estés hablando o para todo elemento del conjunto del que estés hablando.*
I: Para todo elemento del conjunto del que esté hablando qué cosa?
A41: *Se cumple algo, se cumple alguna propiedad por ejemplo. En cambio, si existe es que puede haber uno entre todos.*
I: ¿Solamente uno?
A41: *Puede haber uno o más pero no necesariamente que se cumpla para todos esa propiedad.*

A65: *Para todos los números de un conjunto se les pone una propiedad y si la cumple... Y el existe, si existe uno por lo menos uno.*

A73: *Cuando vas a hablar de un número o de un x, para todo x es cuando todos los números o todo el conjunto del que esté hablando llevan a una ecuación o una indeterminación que se haya dado, una......*
I: ¿Una propiedad?
A73: *Sí, una propiedad que se haya dado. Y cuando es existe es como que para todos puede ser que uno cumpla esa propiedad*
I: ¿Necesariamente es uno solo?
A73: *No, puede ser uno o más pero es como que con uno ya satisface que existe*

A74: *Para todo es como un universal, para todas las cosas que están dentro de un determinado universo…que cumplen una determinada condición. Y el existe, con que ya haya uno que pertenezca al universo y cumpla la condición, ya está. Existe un elemento en el universo que cumple con la condición.*
I: ¿Tiene que ser uno solo?
A74: *No, pueden ser más pero con que haya uno ya se cumple…*

- CONOCE USO DEL SÍMBOLO $\forall$ PERO NO DEL SÍMBOLO $\exists$: A lo largo de su relato, estos alumnos manifiestan conocer el uso, y en algunos casos también la sintaxis, del cuantificador universal, pero desconocen el uso del existencial, proponiendo un uso coloquial del mismo (2 casos).

- NO SABE QUÉ EXPLICAR: Tres de los estudiantes entrevistados manifestaron no saber o no poder explicar nada respecto del uso de estos dos símbolos.

e.4.Respuestas a la Pregunta 5 en relación a los símbolos $\wedge$ y $\vee$

Al responder en cuanto a las características relativas a los símbolos de conjunción y disyunción, los estudiantes entrevistados no utilizaron en ningún momento la palabra ‘proposición’ aunque en la mayoría de los casos se refieren a ellas y las mencionan como ‘condiciones’, ‘cosas’, ‘elementos’, ‘propiedades’ o ‘respuestas’. Sólo un alumno (A41) intentó recordarla y, aunque no pudo hacerlo, la describió: “*una propiedad de dos elementos…. Es que hay una palabra que no me sale... y que se pueda decir si es verdadero o falso…*”.

Las respuestas que los estudiantes entrevistados dieron, en relación con estos símbolos, se agruparon en tres categorías:

- USO SEGÚN LA VERDAD O FALSEDAD DE LAS PROPOSICIONES: Los estudiantes cuyas respuestas son consideradas en esta categoría (7 casos) describen el uso de la conjunción o la disyunción a partir del valor de verdad de las proposiciones con las que van a operar, como si el uso de cada operación estuviera restringido a las características de las proposiciones que juegan el rol de operandos. Ese “condicionamiento” que establecen para el uso de cada una de las operaciones está dado por el resultado final de la operación, de modo que siempre resulte verdadera.

  A20: *El “o” lo usás cuando puede ser verdadero o falso. Según… la expresión puede ser verdadera…. Si una puede ser verdadera y la otra falsa uso el “o” y si es “y” las dos tienen que ser verdaderas, para que la función sea verdadera.*

  A57: *El “y” es cuando pasan dos cosas simultáneamente, y el “o” cuando pasa una cosa o la otra, cuando de dos cosas pasa una sola.*

  A63: *El “y” se usa cuando dos cosas se cumplen.* […] *El “o” es cuando se cumple una o se cumple la otra. No son las dos.*

  A73: *Cuando quiero hacer una propiedad que tiene dos condiciones, puede ser que las dos condiciones sean.... tendrían que ser verdaderas o falsas, se usa el “y”, y puede que con una que esté bien, que ya es condición, se usa el “o”.*

- CONDICIONES PARA LA VERDAD DE LA EXPRESIÓN: Las respuestas de estos alumnos (6 casos) remiten a la descripción de las tablas de verdad de cada una de las operaciones, pero restringiéndose, en general, a la situación en la que el resultado es verdadero. Estarían manifestando tener construidas, al menos parcialmente, las funciones semióticas F2 y F3 de estos símbolos.

  A33: *El “y” es una conjunción donde tenés dos condiciones, donde tienen que ser verdaderas las dos.* […] *El “o” cuando al menos una de las dos es verdadera.*

A38: [Le diría] *que el "o"... que para que una afirmación que tiene un "o" sea verdadera no es necesario que las dos sean verdaderas.* [Para el "y"] *que sí tienen que ser las dos verdaderas para que sea verdadero.*

A74: *El "y", es cuando cumplen dos cosas "esto" y "esto". Y el "o" pueden ser los dos o uno sí y el otro no.*
I: ¿Y si tengo alguna falsa?
A74: *No es verdadero*
I: ¿Pero se puede usar el "y"?
A74: *Sí, se puede usar también pero no va a ser verdadero. Y el "o", decís esto o esto, para que sea verdadero, con que haya uno que sea verdadero ya es.*

- NO SABE QUÉ EXPLICAR: Cinco estudiantes manifestaron no saber o no poder explicar nada respecto del uso de estos símbolos.

5.4.2. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A OTRA ACTIVIDAD CON EXPRESIONES CUANTIFICADAS

A cada uno de los alumnos entrevistados se le solicitó resolver una actividad en la que debía asociar una expresión simbólica cuantificada dada con aquellas que fueran equivalentes a ésta, escogidas de una lista propuesta. Se presentaron dos expresiones, una de ellas contenía un cuantificador universal y la otra un existencial, y ambas estaban expresadas en la forma de uso habitual en Matemática.

Las opciones para la primera expresión son las siguientes:

$\forall x \in \mathbb{Z}\ x < x+1$

- $\forall x\ (x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x < x+1)$
- $x \in \mathbb{Z}\ ,\ x < x+1$
- Los números enteros son menores que su sucesor
- Para todo x perteneciente al conjunto de los números enteros x es menor que x más 1
- $\forall x\ x < x+1$
- $x < x+1\ \forall x \in \mathbb{Z}$

A continuación se presenta el análisis de las respuestas dadas para cada una de las opciones presentadas en la lista, entre las cuales el estudiante debía elegir cuáles eras equivalentes y cuáles no.

- **$\forall x\ (x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x < x+1)$**: Esta expresión estaba destinada a indagar si los alumnos conocían la forma utilizada en la Lógica Formal, y si la reconocían como equivalente a la dada. De los estudiantes entrevistados, 7 no la eligieron como equivalente, aunque la mayoría no sabe justificar su decisión. Un alumno de la carrera de Biología expresa no haber visto nunca una expresión de esta forma: '*A esto no lo vi nunca. Igual, yo lo leía y no estaba mal, pero no sé si está bien expresado, entonces lo dejé*' (A57), lo cual es esperable, por el hecho de en esta carrera no tiene Lógica como parte de su plan de estudios, ni tampoco como contenido de la asignatura Álgebra.

Las respuestas para esta opción de la lista se contrastaron con las del ítem del Ejercicio 3, en la que debían convertir al lenguaje coloquial una expresión dada en formato de la Lógica Formal que contiene un cuantificador universal ($\forall x\ (x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x<0)$), para analizar si en ese caso lo habían podido resolver. De los 7 estudiantes que no eligieron esta opción como equivalente, 5 habían hecho una conversión SaS. Esto conduce a pensar que la lectura, y posterior conversión, fue realizada sin comprender el contenido de la expresión, sino como una simple decodificación.

• **$x \in \mathbb{Z}$, $x< x +1$**: En esta expresión el cuantificador universal es tácito, lo cual es de uso habitual en Matemática. Con esta expresión se pretende indagar si los estudiantes lo reconocían como tal, ya que si bien es uso habitual, no es frecuente que se haga la aclaración de esta situación en las clases, sino que simplemente aparece en el uso. En este caso, 10 estudiantes eligieron esta opción, que representan aproximadamente la mitad de los estudiantes entrevistados. De los 8 estudiantes que la descartaron, 5 aducen simplemente que falta el cuantificador y los 3 restantes afirmaron que no es un 'para todo' o que la expresión se refiere a 'algunos'.

• **Los números enteros son menores que su sucesor**: Esta expresión en el registro coloquial se corresponde con la expresión dada, pero luego de efectuarse un tratamiento posterior a la conversión correspondiente. Del total de estudiantes, 15 la señalaron como equivalente y 3 la descartaron. Dos de estos últimos argumentan que la expresión coloquial 'no dice **todos'** y el tercero no puede explicitar ninguna razón. Sin embargo, estos tres estudiantes habían realizado correctamente la conversión en el sentido contrario, planteada en el Ejercicio 3 del instrumento. Pero en el ítem la expresión coloquial estaba planteada como *Cada número entero es menor que su sucesor*, lo que conduce a pensar que, para estos alumnos, la idea de generalidad que la palabra 'cada' le otorga a esta última expresión no se la da la frase 'Los números enteros'.

Por otra parte, de los restantes estudiantes que decidieron que esta expresión coloquial es equivalente a la dada en símbolos, 6 de ellos no pudieron resolver correctamente este ítem del Ejercicio 3 del instrumento. En estos casos, lo errores se manifestaron en la sintaxis propia del cuantificador y no en la formulación de la correspondiente función proposicional.

• **Para todo x perteneciente al conjunto de los números enteros x es menor que x más 1**: Esta expresión fue incluida en la lista porque está formulada según la forma de conversión más frecuente que realizan los estudiantes, entre el registro simbólico y el coloquial, a la que anteriormente se denominó como conversión 'símbolo a símbolo'. Todos los estudiantes entrevistados la indicaron como equivalente a la dada. El alumno A58 refiere que esta expresión '*lo traduce fielmente'*.

• **$\forall x$ x< x +1**: El objetivo de incorporar esta expresión a la lista de opciones fue analizar la decisión que tomaban los estudiantes ante uno de los errores más frecuentes que se observan en las expresiones cuantificadas, que es la omisión del conjunto de referencia. Este error se manifiesta en diversas expresiones simbólicas generadas por los estudiantes. También se observó esta omisión en el relato que los estudiantes realizaron durante la entrevista con relación a qué le dirían a una persona que no conoce los cuantificadores, donde muchos parecieron no otorgarle importancia al conjunto de referencia de la variable cuantificada. Sin embargo, todos los estudiantes entrevistados detectaron que esta expresión no es equivalente a la dada por faltarle el conjunto en el que la variable toma valores. Argumentan razones como por ejemplo: '*no define el conjunto en el que está trabajando* x' (A33), '*porque no pertenece a ningún conjunto la x'* (A39), '*no dice que los x sean enteros*' (A67), '*porque no especifica el conjunto y además dice para todo x y siento que me falta algo*' (A99).

• **x< x +1 $\forall x \in \mathbb{Z}$**: Se consideró incluir esta expresión entre la lista de opciones ya que representa otro de los usos habituales que se realizan en Matemática, con relación al cuantificador universal, que es colocarlo al final de la expresión, invirtiendo así la sintaxis habitual. La mayoría de los estudiantes determinó que esta expresión es equivalente a la dada y sólo 2 alumnos manifestaron lo contrario. La única razón que mencionan es simplemente de uso: '*siempre vi el cuantificador al principio*' (A33) y '*porque generalmente el para todo se pone al principio*' (A74). El estudiante A58 se inclina por afirmar que son equivalentes, aunque no parece importarle la corrección de la sintaxis sino lo que él mismo interpreta: '*No sé si es correcto, pero a mí me dice lo mismo. No sé si es correcto escribirlo al principio o al final*'

La segunda expresión, como ya se anticipó, contiene un cuantificador existencial. Esta expresión y la lista de expresiones, entre las cuales los estudiantes debían decidir cuáles resultan ser equivalentes a la dada, son:

$\exists x \in \mathbb{Z}\ x< 5$

- $\exists x\ (x\in\mathbb{Z} \wedge x< 5)$
- $x\in\mathbb{Z}\ , x< 5$
- Los números enteros son menores que 5
- Para algún x perteneciente al conjunto de los números enteros x es menor que 5
- Hay números enteros menores que 5

Análogamente al caso anterior, se presenta a continuación un análisis de las respuestas obtenidas durante las entrevistas, para cada una de las opciones propuestas en la lista.

• **$\exists x\ (x\in\mathbb{Z} \wedge x< 5)$**: Como en el caso de la expresión con el cuantificador universal, esta expresión fue incluida en la lista para analizar si los estudiantes están familiarizados con el tipo de formulaciones que se utilizan en la Lógica Formal y si la reconocen como equivalente. En este caso, 13 estudiantes la eligieron como equivalente a la dada y 5 la descartaron. Estos últimos también descartaron la expresión que contiene el cuantificador universal, entre ellos los 4 estudiantes que atribuyeron su decisión a la presencia del símbolo '$\wedge$' en la expresión. El otro estudiante que la descarta (A57) es el mismo que explica no haber visto este tipo de expresiones antes, tal como lo hizo con el cuantificador universal.

También en este caso, estas respuestas se contrastaron con las del ítem del Ejercicio 3 en la que debían convertir al lenguaje coloquial una expresión dada en formato de la Lógica Formal que contienen un cuantificador existencial ($\exists x\ (x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0)$). De los 5 estudiantes que la descartan, 4 expresaron la respuesta del Ejercicio 3 con una conversión SaS, como en el caso del cuantificador universal. Nuevamente sigue reafirmándose la idea de que esa conversión fue hecha como una simple decodificación, sin hacer una lectura comprensiva de la misma.

• **$x\in\mathbb{Z}\ , x< 5$**: La incorporación de esta expresión a la lista está destinada a corroborar si la ausencia de un cuantificador es nuevamente interpretada como un cuantificador universal tácito y por lo tanto es descartada como equivalente. De los estudiantes entrevistados, 14 optaron por descartarla. Sólo 4 estudiantes la eligieron como equivalente a la expresión dada, aduciendo que la ausencia de un cuantificador explícito les indica que son 'algunos' y por lo tanto coincide con la expresión dada, la cual contiene un cuantificador existencial, '*Que no tenga un cuantificador te da la idea de que habla de algunos*' (A63). La decisión de estos 4 estudiantes es coherente con su respuesta para el cuantificador universal. Sin embargo, de los 14 estudiantes que la descartaron, 3 no tienen respuestas coincidentes en este aspecto, pues rechazan que una expresión con cuantificador tácito sea equivalente a un 'para todo' y también descartan que se corresponda con un 'existe'.

- **Los números enteros son menores que 5**: Todos los estudiantes entrevistados descartaron que esta expresión fuera equivalente a la dada. En este caso, manifiestan que la expresión alude a la totalidad de los números enteros: '[La expresión dice] *que el conjunto de los números enteros son menores a 5*' (A29), ´*Habla de todos*' (A39), *'Los números enteros es general y esto es como más particular* (se refiere a la expresión original)' (A63), '*Ahí está diciendo como todos los números*' (A67).

Los 3 alumnos que habían descartado una expresión similar a ésta como equivalente a la que contenía el cuantificador universal, entran en conflicto con su respuesta, pues la rechazan como equivalente a la que tiene un cuantificador existencial, argumentando que la frase 'Los números enteros' alude a la totalidad del conjunto.

- **Para algún x perteneciente al conjunto de los números enteros x es menor que 5**: Esta expresión coloquial representa la forma más usual en la que los estudiantes convierten al lenguaje coloquial, formulando una expresión símbolo a símbolo. Como en el caso del cuantificador universal, también la totalidad de los estudiantes consideraron esta expresión como equivalente a la dada. Pareciera que es la forma en que a los estudiantes les suena más 'natural' en la lectura, y por consiguiente ninguno duda de su equivalencia con la expresión dada.

- **Hay números enteros menores que 5**: Esta expresión coloquial es la que resulta de realizar un tratamiento en el registro coloquial luego de haber efectuado la conversión correspondiente. En este caso, la totalidad de los estudiantes consideró que es equivalente a la expresión dada. Asocian el vocablo 'hay' con 'algunos', lo que los lleva a argumentar a favor de la equivalencia entre las expresiones: '*porque dice "hay", no todos, no está diciendo ni que todos no que ninguno*' (A67), '[Elegí] *la que dice "hay" porque son algunos´* (A99).

5.5.3. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LAS ACTIVIDADES DE CONVERSIÓN AL LENGUAJE COLOQUIAL REALIZADAS EN FORMA ORAL

Durante la entrevista se propusieron dos expresiones en el registro simbólico para ser convertidas al registro coloquial, pero esta vez la expresión resultante debía ser formulada en forma oral. La consigna fue dada de la siguiente manera:

En un pizarrón quedaron escritas las siguientes expresiones, ¿qué te parece que dijo el profesor de manera oral cuando las escribió?

$\forall$ m, n$\in\mathbb{R}$ si m.n = 0 $\Rightarrow$ m = 0 ó n = 0

$\forall$ a,b $\in\mathbb{R}$ $\exists$ c$\in\mathbb{R}$ / a < c < b

La intención de formular la consigna de esta manera fue la de remitir al alumno a una situación de clase, en la que escucha el discurso oral con el que el docente acompaña su escritura.

Las respuestas de los estudiantes fueron de diverso tipo pero puede decirse, de manera general, que la mayoría de los estudiantes hicieron un primer intento de conversión símbolo a símbolo.

Sólo dos estudiantes (A10 y A41) realizaron una lectura global correcta en el primer intento, para ambas expresiones. Esto es, formularon una expresión en el registro coloquial a la que se le aplicó un tratamiento en dicho registro, luego de la conversión. Uno de ellos (A41) había efectuado conversiones globales en el Ejercicio 3 del instrumento y el otro (A10) había realizado las conversiones combinando SaS y global.

Otros dos estudiantes (A29 y A65) sólo pudieron reformular su respuesta con una conversión SaS. También habían resuelto de esta manera los ítems del Ejercicio 3 del instrumento, en los que debían realizar conversiones en este sentido.

Los restantes 14 estudiantes dieron una primera respuesta con una conversión SaS. Luego, al formulárseles una pregunta con relación a si les parecía realmente que un profesor lo diría de esa manera, respondieron que no, y trataron de dar una expresión que implicaba un tratamiento posterior en el registro coloquial, dando muestras de que sí comprendían (o al menos en parte) el contenido semántico de la expresión. En tres casos sólo lograron dar una expresión mixta, en la que parte de la conversión es SaS y parte es global. De todas maneras, estos tres alumnos muestran un mejor desempeño en estas conversiones, pues en el Ejercicio 3 del instrumento respondieron con conversiones SaS.

Finalmente, de estos estudiantes que necesitaron más de un intento para llegar a expresar una conversión global, al menos para alguna de las dos expresiones dadas, sólo 6 proporcionaron una oración que reproducía la expresión sin ningún error (A20, A28, A33, A57, A58 y A74).

Los restantes estudiantes dieron una respuesta que no se ajustaba exactamente a lo que las expresiones simbólicas decían. Los errores más frecuentes se deben a la omisión del conjunto al que pertenecen las variables (por ejemplo, no dicen que son dos números *reales,* o que existe un número *real* entre ambos).

Como conclusión final puede decirse que, aparentemente, los estudiantes no tienen el hábito de leer en forma global el sentido de una expresión simbólica, que su primera actitud es leer símbolo a símbolo, lo que dificulta la compresión de la expresión. Además, por más que intenten conscientemente hacer una lectura global, la mayoría no manifiesta captar toda la información que la expresión simbólica contiene. Esto conduce a la idea de que esta lectura deficiente de las expresiones simbólicas es un factor que interviene de manera negativa al momento de leer un enunciado de un ejercicio, o de estudiar de un libro de texto o del material que se utiliza en las cátedras de Matemática.

Observando el comportamiento de los 18 estudiantes entrevistados con relación a la comparación entre la respuesta final que dieron en esta actividad y su desempeño en el Ejercicio 3 del instrumento, de detectó que la mitad de ellos mantuvo la forma de conversión (convertían SaS, en forma Global o en forma combinada) siguieron haciéndolo de la misma manera. Esto indicaría que producir una respuesta en forma oral no provocó en ellos ningún tipo de cambio en este sentido. La otra mitad manifestó una mejora en algún sentido, pues en muchos casos pudieron dar una expresión global (aunque tuviera alguna omisión) siendo que en el instrumento sus respuestas habían sido mediante conversiones SaS.

5.4.4. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LAS ACTIVIDADES DE CONVERSIÓN AL LENGUAJE SIMBÓLICO PARTIENDO DE SU FORMULACIÓN EN FORMA ORAL

Como última actividad en la entrevista, se solicitó la conversión de dos expresiones simbólicas, pero éstas resultaban de un nivel de dificultad mayor pues una de ellas tiene implícita una inclusión que en el lenguaje coloquial no se menciona y la otra requiere del uso de dos cuantificadores.

La actividad fue formulada proponiendo al estudiante la situación en la que un docente expresa oralmente una oración coloquial y que luego la escribe en el pizarrón. La pregunta consiste en qué considera el alumno que el profesor escribiría en el pizarrón luego de formular esa oración. Las expresiones a convertir son:

- *Todos los números naturales son enteros.*
- *Dado un número real siempre existe un número entero que es mayor que él.*

Para la primera oración, 12 de los estudiantes entrevistados hacen una conversión correcta, pero sólo 4 de ellos la expresan mediante una inclusión ($N \subset Z$) y 8 lo hacen utilizando una variable cuantificada. Los errores cometidos por los restantes 6 estudiantes, están asociados a un uso incorrecto de la implicación o del símbolo de pertenencia ($N \in Z$).

En tanto, para la segunda expresión sólo 7 estudiantes formularon una conversión correcta, haciendo uso de los dos cuantificadores, de dos variables y guardado un orden apropiado en la sintaxis. Los estudiantes que no lo resolvieron bien cometieron errores que están ligados a cuestiones relativas al orden en que colocan los símbolos, pero en casi todos los casos aparecen los dos cuantificadores y utilizan dos variables.

Si bien estos ejercicios no son exactamente del mismo tipo que los que se presentaron en las seis conversiones, del registro coloquial al registro simbólico, propuestas en el Ejercicio 3 del instrumento, se realizó un mirada global sobre el desempeño de los estudiantes en dicho ejercicio y el que tuvieron en esta actividad de la entrevista. Lo que se observa es que ambos desempeños guardan similitud. Aquellos estudiantes que resolvieron correctamente las dos conversiones propuestas durante la entrevista, no tenían errores en el instrumento o tenían muy pocos. Mientras que los que cometieron errores durante la entrevista, habían cometido muchos errores en el instrumento o bien no habían podido resolver alguno/s de los ítems.

En conclusión, esta actividad realizada durante la entrevista sólo corroboró lo que se había observado de cada alumno en la resolución de este tipo de conversiones en el instrumento. También pudo observarse que en la mayoría de los casos, los errores se deben a cuestiones de sintaxis, particularmente en el orden en que aparecen los símbolos, pero que tienen noción de los objetos simbólicos que deben intervenir en la expresión resultante de la conversión.

5.5. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA TERCERA VERSIÓN DEL INSTRUMENTO

En esta última versión del instrumento mantiene la estructura de la versión anterior y se realizaron sólo algunos ajustes ante determinadas falencias que se detectaron. Por esta razón, se mantuvo el criterio de efectuar una puntuación empleando una variable dicotómica que corresponde al desempeño general en la resolución de cada ejercicio y otra puntuación que corresponde a la manifestación de la/s función/es semiótica/s que se pretende evaluar en cada ejercicio. Se conservaron los criterios de valoración para otorgar la puntuación en cada caso.

El relevamiento de datos realizado con esta versión del instrumento se efectuó sobre una muestra de 90 estudiantes, de las mismas carreras que en la versión anterior. Por esa razón, en este caso se utilizan porcentajes para representar los estudiantes en cada caso.

Para esta versión no se vuelven a presentar las configuraciones epistémicas/cognitivas de los ejercicios, pues son idénticas o similares a las de la versión anterior.

5.5.1. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL EJERCICIO 1

Debe recordarse que en este ejercicio se solicita la realización de dos tareas: indicar cómo se lee el símbolo y escribir un ejemplo utilizándolo cuyo valor de verdad debía ser verdadero.

En la Tabla 5.16 se presentan los resultados correspondientes a estas tareas, para cada uno de los símbolos en estudio. La tarea de lectura del símbolo está indicada con L y la tarea de escritura del ejemplo está indicada con EE. Los valores expresados indican el porcentaje de alumnos que resolvieron correctamente en cada caso.

Tabla 5.16. Porcentaje de estudiantes que resolvieron correctamente el Ejercicio 1 (de la versión 3)

Símbolo	$\in$		$\subset$		$\forall$		$\exists$		$\wedge$		$\vee$	
Tarea	L	EE	L	EE	L	EE	L	EE	L	EE	L	EE
Porcentaje de estudiantes	100	83	50	35	99	45	100	30	97	29	96	25

Para poder efectuar una comparación con los resultados obtenidos en la versión 2 de este ejercicio, debajo se replica la Tabla 5.6, presentada en la Sección 5.3.1. Debe recordarse que, en el caso de los resultados de la versión 2, se utilizaron cantidades para simplificar la presentación de los datos, pero al tratarse de una muestra de 101 individuos, las cantidades y los porcentajes son casi idénticos. Por esta razón, a pesar de las diferencias de unidad de medición, los valores resultan comparables.

Tabla 5.6. Cantidad de estudiantes que resolvieron correctamente el Ejercicio 1 (de la versión 2).

Símbolo	$\in$		$\subset$		$\forall$		$\exists$		$\wedge$		$\vee$	
Tarea	L	EE	L	EE	L	EE	L	EE	L	EE	L	EE
Cantidad de estudiantes	100	83	52	38	100	56	101	45	90	25	89	33

Los resultados son extremadamente similares a los obtenidos en la versión anterior. Casi la totalidad de los estudiantes conoce la denominación coloquial de los símbolos en estudio, y nuevamente el símbolo de inclusión es la excepción a esta observación, pues sólo la mitad de los estudiantes conoce su denominación.

Una analogía similar se observa en la resolución de la tarea de proporcionar un ejemplo cuyo valor de verdad fuera verdadero. El mejor desempeño se presenta para el símbolo de pertenencia y, para el resto de los símbolos, la mitad de los estudiantes o menos lograron proporcionar correctamente el ejemplo solicitado.

En la Tabla 5.17, se presentan los porcentajes de estudiantes correspondientes a la manifestación de cada una de las tres funciones semióticas evaluadas en este ejercicio, para cada símbolo.

Tabla 5.17. Porcentaje de estudiantes que manifestaron las funciones semióticas asociadas a cada símbolo en el Ejercicio 1 (de la versión 3).

	Símbolo	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$
Función semiótica	F1	100	50	99	100	97	96
	F2	96	41	61	48	48	47
	F3	83	34	47	31	30	24

A continuación, se replica la Tabla 5.7, presentada en la Sección 5.3.1, para poder facilitar la comparación entre los resultados de ambas versiones del instrumento.

Tabla 5.7. Cantidad de estudiantes que manifestaron las funciones semióticas asociadas a cada símbolo en el Ejercicio 1 (de la versión 2).

	Símbolo	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$
Función semiótica	F1	100	52	100	101	90	89
	F2	95	50	69	58	40	49
	F3	83	38	56	45	25	33

Nuevamente se observa una coincidencia con los resultados en obtenidos en la versión anterior. Para cada símbolo, los valores de las correspondientes funciones semióticas decrecen, indicando que son más los estudiantes que conocen su denominación coloquial (F1), menos los que escriben un ejemplo sintácticamente correcto (F2) y menos aún los que lo hacen con el valor de verdad solicitado (F3).

Los tipos de errores observados en las resoluciones de este ejercicio para la muestra de datos relevada con la versión 2 del instrumento, que fueron analizados en la sección 5.3.1, se reiteran en los datos relevados a partir de la administración de la versión 3. Esto significa que la información fue saturada y por esa razón no se retoma el análisis con relación a este Ejercicio en esta sección.

5.5.2. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL EJERCICIO 2

En este ejercicio se propone un conjunto de expresiones para las que el estudiante determine si están correctamente escritas y, en caso de no estarlo, las reescriba correctamente. El objetivo de este ejercicio fue evaluar aspectos sintácticos ligados a los símbolos en estudio, tanto en la tarea de lectura como en la de escritura (en los casos en que se debe reescribir la expresión).

Las categorías que se determinaron en el análisis de la versión anterior, para los tipos de resolución de las expresiones correctamente escritas, son: *Marca como correcto*, *Marca incorrecto y corrige* y *Sin resolver*. En la Tabla 5.18 se presenta el porcentaje de resoluciones que, para esta nueva versión, corresponden a cada una de las mencionadas categorías.

Tabla 5.18. Porcentaje de alumnos en cada categoría para los ítems con expresiones correctamente formuladas del Ejercicio 2 (de la versión 3)

CATEGORÍA / **ÍTEM**	**Marca como correcto** (resuelve bien)	**Marca incorrecto y corrige**	**Sin resolver**
$-2 \in Z$	**99**	1	0
$\{1, 2\} \subset N$	**49**	29	22
$4 \in N \wedge -3<0$	**90**	8	2
$7 \in N \vee -1 \in Z$	**57**	43	0
$\forall\ x \in R\ x^2 \geq 0$	**90**	9	1
$\exists\ x \in Z\ /\ x<0$	**92**	8	0

A continuación, se reitera la Tabla 5.12, presentada en la Sección 5.3.2, para poder efectuar una comparación entre los resultados de estos ítems en las dos versiones del instrumento.

Tabla 5.12. Cantidad de alumnos en cada categoría para los ítems con expresiones correctamente formuladas del Ejercicio 2 (de la versión 2)

CATEGORÍA / ÍTEM	Marca como correcto (resuelve bien)	Marca incorrecto y corrige	Sin resolver
$-2 \in Z$	**96**	5	0
$\{1, 2\} \subset N$	**67**	27	7
$[2, 5] \subset R$	**62**	32	7
$4 \in N \wedge -3<0$	**89**	7	5
$-1 \in N \vee -1 \in Z$	**54**	45	2
$\forall\ x \in R\ x^2 \geq 0$	**90**	10	1
$\exists\ x \in Z\ /\ x<0$	**90**	10	1

Tal como en la versión anterior del instrumento, estos ítems fueron, en general, correctamente resueltos, con una mayor cantidad de errores en las expresiones en las que aparece el símbolo de inclusión y el de disyunción. Una vez más los valores obtenidos, correspondientes a ambas versiones del instrumento, son sumamente parecidos. Esta similitud se mantiene aún en el caso de la expresión correspondiente a la disyunción, en el que la expresión fue modificada. En la versión 2, la expresión era '$-1 \in N \vee -1 \in Z$', la cual era considerada como incorrecta por los estudiantes por tener una de las proposiciones falsa, ya que las modificaciones que introducían al reescribirla tenían relación con este hecho (aunque también se observaron modificaciones sobre la disyunción, como se detalló en la sección 5.3.2.7). Para evitar ese posible factor de distorsión, se cambió la primera proposición por una cuyo valor de verdad fuera verdadero. La nueva expresión, evaluada en esta tercera versión, es '$7 \in N \vee -1 \in Z$'. Sin embargo, los valores correspondientes a la resolución correcta como los de los estudiantes que decidieron que es incorrecta y la modificaron, siguen siendo muy similares. En la mayoría de estos casos, la expresión que utilizan para la modificación contiene una conjunción en lugar de una disyunción. Esto podría deberse, como ya se analizó en la sección 5.4.1, a los casos en los que los estudiantes consideran el uso de los dos operadores lógicos a partir del valor de verdad de las proposiciones. Dado que en esta expresión ambas son verdaderas, estos estudiantes consideran que la operación lógica que corresponde es la conjunción.

Para los ítems en los que la expresión está incorrectamente escrita, y por consiguiente debía ser reformulada, se determinaron cinco categorías: *Marca incorrecto y corrige bien*, *Marca incorrecto pero corrige mal*, *Marca incorrecto pero no corrige*, *Marca como correcto* y *Sin resolver*. En la Tabla 5.19 se presentan los porcentajes de estudiantes cuya resolución corresponde a cada una de estas categorías. Nuevamente, en esta versión se observa que son pocos los estudiantes que resuelven bien, pues deciden que la expresión está incorrectamente escrita y la reescriben con modificaciones adecuadas.

Tabla 5.19. Porcentaje de alumnos en cada categoría para los ítems con expresiones incorrectamente formuladas en el Ejercicio 2 (de la versión 3)

CATEGORÍA / **ÍTEM**	**Marca incorrecto y corrige bien** (resuelve bien)	**Marca incorrecto pero corrige mal**	**Marca incorrecto pero no corrige**	**Marca como correcto**	**Sin resolver**
$3 \subset Z$	**49**	8	1	19	23
$N \in Z$	**38**	8	0	53	1
$-5 \wedge 4 \in R$	**12**	20	0	68	0
$4 \in N \vee Z$	**21**	47	0	30	2
$\forall N\ N > 0$	**22**	19	2	56	1
$\exists\ x \in R / y + 2 = 5$	**48**	3	0	41	8

A continuación, se reitera la Tabla 5.13, presentada en la sección 5.3.2, para poder efectuar una comparación entre los resultados de estos ítems en las dos versiones del instrumento.

Tabla 5.13. Cantidad de alumnos en cada categoría para los ítems con expresiones incorrectamente formuladas en el Ejercicio 2 (de la versión 2)

CATEGORÍA / **ÍTEM**	**Marca incorrecto y corrige bien** (resuelve bien)	**Marca incorrecto pero corrige mal**	**Marca incorrecto pero no corrige**	**Marca como correcto**	**Sin resolver**
$3 \subset Z$	**26**	22	3	42	7
$N \in Z$	**33**	10	2	56	0
$-5 \wedge 4 \in R$	**8**	17	0	74	2
$4 \in N \vee Z$	**17**	45	2	35	2
$\forall N\ N > 0$	**19**	19	2	57	4
$\exists\ x \in R / y + 2 = 5$	**62**	4	0	33	2

Los valores obtenidos en cada una de las categorías son muy similares en ambas muestras de datos, y esta tarea se sigue presentando como de mayor dificultad. En estos ítems no se introdujo ninguna modificación, así que son comparables directamente.

Los errores que se observaron en las reformulaciones incorrectas son de idénticos tipos a los descritos para la versión 2 del instrumento.

5.5.3. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL EJERCICIO 3

El Ejercicio 3 de esta versión solicita dos tareas a realizar a partir de un conjunto de expresiones simbólicas. Una de ellas es la conversión al lenguaje coloquial y la otra es la determinación del valor de verdad con su correspondiente justificación. En este último requerimiento yace la diferencia entre esta versión y la versión anterior.

En la Tabla 5.20 se muestran, para cada uno de los ítems, el porcentaje de estudiantes que manifiestan las funciones semióticas observadas en este ejercicio, donde aparece la función semiótica correspondiente a la conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial (F_{sc}) y la que corresponde al tratamiento en el registro coloquial (F_t). También se registraron en la Tabla los estudiantes que resolvieron mal la conversión y los que no resolvieron. Además, se presenta el porcentaje de estudiantes que determinaron correctamente el valor de verdad. En este caso, el determinar correctamente el valor de verdad también implica haber justificado correctamente su decisión.

Tabla 5.20. Porcentaje de alumnos en las resoluciones del Ejercicio 3 (de la versión 3)

Expresión	**Manifiestan F_{sc} (F_t)**	**Resuelven mal**	**Sin resolver**	**Valor de verdad**
$0,5 \in Z \vee -1 \in Z$	93 (2)	5	2	40
$-2 \in Z \wedge -1 \in N$	94 (9)	5	1	92
$\forall x\ (x \in Z \Rightarrow x<0)$	84 (8)	14	2	71
$\exists x\ (x \in Z \wedge x < 0)$	95 (13)	3	2	56
$\exists\ x \in N / 2 < x < 3$	96 (16)	2	2	66
$\forall\ x \in N\ x < x + 1$	90 (24)	7	3	43

Como en los casos anteriores, se replica la Tabla 5.14, presentada en la Sección 5.3.3.1, para poder realizar una comparación entre los resultados obtenidos en las dos versiones del instrumento.

Tabla 5.14. Cantidad de alumnos en las conversiones de expresiones simbólicas del Ejercicio 3 (de la versión 2)

Expresión	F_{sc} (F_t)	Resuelven mal	Sin resolver	Valor de verdad
$0{,}5 \in Z \vee -1 \in Z$	90 (11)	8	3	66
$-2 \in Z \wedge -1 \in N$	86 (18)	14	1	93
$\forall x\ (x \in Z \Rightarrow x<0)$	79 (9)	20	2	86
$\exists x\ (x \in Z \wedge x < 0)$	76 (17)	21	4	77
$\exists\ x \in N / x < 0$	92 (21)	7	2	93
$\forall\ x \in N\ x > 0$	89 (19)	10	2	95
$\forall\ x \in N\ x = 2.k \vee x = 2.k - 1\ , k \in N$	72 (18)	16	13	71

Comparando las dos Tablas, 5.14 y 5.20, puede notarse que los valores correspondientes a la manifestación de las funciones semióticas de conversión y tratamiento se mantienen muy similares a los datos relevados con ambas versiones del instrumento. Esta situación se reitera para los valores correspondientes a estudiantes que resuelven de manera incorrecta o no proponen una respuesta. Debe tenerse en cuenta que, como ya se describió en el Capítulo 4, la conversión al registro coloquial se considera efectuada aún en los casos en los que haya sido realizada en la forma SaS, para la cual es casi suficiente con tener establecida la función semiótica nominal de los símbolos involucrados en la expresión. Por estas razones, los valores observados en la manifestación de la función F_{sc} son altos.

Sin embargo, y como era de esperar, existen diferencias entre los valores correspondientes a la determinación del valor de verdad que, en todos los casos de la versión 3, descendieron. Esto puede adjudicarse al requerimiento de una justificación de la respuesta, que permita conocer que el estudiante no está decidiendo al azar.

Como se expresó en el Capítulo 4, se introdujeron cambios en la función proposicional de las dos expresiones cuantificadas formuladas según el uso habitual en Matemática, con la finalidad de no reiterar la función de los ítems anteriores. Estas modificaciones no produjeron ningún cambio en la manifestación de las funciones semióticas involucradas, por lo que los valores correspondientes a las resoluciones de estos ítems se mantienen en un rango similar.

5.5.4. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL EJERCICIO 4

Este ejercicio evalúa conversiones del registro coloquial al registro simbólico algebraico, y es una partición del Ejercicio 3 de la versión anterior. En la Tabla 5.21 se presentan los porcentajes de estudiantes en los distintos tipos de resolución de cada ítem.

Tabla 5.21. Porcentaje de alumnos en las resoluciones del Ejercicio 4 (de la versión 3).

Expresión	F_{cs}	Resuelven mal	Sin resolver
3 es un número entero y positivo	82	17	1
3 y 5 son números naturales	23	76	1
4 es un número natural o entero	63	37	2
Cada número entero es menor que su sucesor	76	17	7
Algunos números enteros son negativos	61	25	14
El cuadrado de cualquier número real es positivo o cero	63	34	3

A continuación, se reitera replica la Tabla 5.15, presentada en la Sección 5.3.3.2, para poder realizar una comparación entre los resultados obtenidos en las dos versiones del instrumento.

Tabla 5.15. Cantidad de alumnos en las conversiones de expresiones coloquiales del Ejercicio 3 (de la versión 2)

Expresión	F_{cs}	Resuelven mal	Sin resolver
3 es un número entero e impar	53	44	4
3 y 5 son números naturales	39	62	0
4 es un número natural o es un número entero	82	18	1
Cada número entero es menor que su sucesor	65	28	8
Algunos números enteros son negativos	57	38	6
El cuadrado de cualquier número real es positivo	77	22	2

Tal como sucedió con los resultados de la versión 2, la cantidad de alumnos que manifiestan la función semiótica de la conversión al registro simbólico-algebraico son sensiblemente menores que en la conversión inversa. La participación de la función semiótica correspondiente a la sintaxis (F2), en la expresión de llegada de estas conversiones, podría ser un factor que les añade un grado de dificultad que puede interpretarse en los valores observados en la Tabla 5.21.

En este ejercicio se introdujeron cambios en algunos ítems, como se expresó en el Capítulo 4, los cuales provocaron modificaciones en los valores obtenidos con relación a la función semiótica F_{cs}.

Así, el primer ítem pasó de ser '*3 es un número entero e impar*' a ser '*3 es un número entero y positivo*'. La modificación de la segunda proposición de esta conjunción tuvo un impacto positivo en las resoluciones pues se pasó del 53%, en la versión 2, al 82% en la nueva versión. Esta reformulación del ítem permitió observar el desempeño de los alumnos para el símbolo de conjunción, que es en definitiva lo que se pretende estudiar, sin la distorsión que provocó la dificultad de los estudiantes para expresar la proposición '*3 es impar*'.

El ítem correspondiente a la expresión '*4 es un número natural o es un número entero*' fue reformulado con la expresión '*4 es un número natural o entero*', debido a que se consideró que la primera expresión conducía a una conversión casi congruente y esto no permitía observar la conversión empleando la disyunción en una situación no tan evidente. En este caso, el desempeño bajó del 82% al 63%.

Finalmente, se agregó a la expresión '*El cuadrado de cualquier número real es positivo*' la condición de poder ser nulo, reformulándose como '*El cuadrado de cualquier número real es positivo o cero*'. Esta modificación se introdujo para darle a la expresión valor de verdad verdadero, puesto que la falsedad de la expresión original podría provocar algún tipo de distorsión en los resultados. En este caso, bajó el porcentaje de desempeño, de 77% a 63%, aunque los errores que se observan en las respuestas incorrectas no tienen relación con la función proposicional, que es donde se introdujo la modificación, sino en el uso del cuantificador. Dichos errores corresponden, en su mayoría, a la ausencia del conjunto de pertenencia, o a la formulación de la función proposicional únicamente, o al uso del cuantificador existencial en lugar del universal.

5.5.5. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE ÍTEMS ASOCIADOS A LAS MISMAS PRÁCTICAS

Para cada uno de los símbolos en estudio, se incluyeron en el instrumento distintos ítems que requieren de las mismas prácticas, por lo que es interesante comparar las respuestas dadas por los estudiantes, para analizar si existen vinculaciones entre ellas. Este análisis se presenta en las siguientes subsecciones. Los datos utilizados corresponden al relevamiento efectuado con la versión 3 del instrumento.

5.5.5.1. Acerca de la sintaxis en los ejercicios 1 y 2

En este caso se pretende analizar si hay algún tipo de vinculación entre el desempeño que cada estudiante tiene en relación a la sintaxis de una expresión que él mismo formula libremente y en la reescritura de una expresión dada cuya sintaxis es incorrecta.

En la Tabla 5.22 se presentan los porcentajes de estudiantes que resolvieron exitosamente alguna de las dos tareas analizadas en esta subsección apartado, para cada uno de los símbolos.

Tabla 5.22. Porcentaje de estudiantes en tareas vinculadas a la sintaxis del ejemplo del Ejercicio 1 y en la reformulación del ítem del Ejercicio 2, para cada símbolo.

Sintaxis de la formulación del ejemplo en el Ejercicio 1	**Resolución del ítem del Ejercicio 2 que está *incorrectamente* formulado**	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$
Bien	Bien	36	32	13	22	6	12
Bien	Mal	60	10	48	26	42	34
Mal	Bien	2	18	9	26	6	9

A la vista de los resultados reportados en la Tabla 5.22 puede decirse que, en general, pareciera no haber demasiada vinculación entre el desempeño que los estudiantes manifiestan con relación a proponer un ejemplo sintácticamente correcto y a reformular la sintaxis en expresiones dadas que están incorrectamente formuladas, pues son relativamente pocos los que resuelven correctamente ambas tareas. Esta observación, efectuada por la inspección directa de la Tabla, fue corroborada aplicando el test estadístico chi-cuadrado, para determinar la independencia entre variables. La prueba efectuada arrojó como resultado que las variables son independientes, excepto para el caso del símbolo de inclusión. Este análisis se realizó utilizando el software SPSS, cuyas salidas se muestran en el Anexo 4.

Para la mayoría de los símbolos estudiados, los porcentajes más altos se observan en la segunda fila de la Tabla 5.22, correspondiente a la situación en la que el estudiante propone un ejemplo sintácticamente correcto, pero no puede detectar el error y reformular una expresión dada cuya sintaxis es incorrecta. Esto pone en evidencia que la última tarea se presenta como de mayor dificultad para los estudiantes. La hipótesis se refuerza al efectuar la lectura de la última fila de la Tabla, en la que se observa que, en general, son muy pocos los estudiantes que fallan en la formulación del ejemplo pero son capaces de detectar errores en una expresión dada.

En el caso del cuantificador existencial, se observa que los porcentajes se distribuyen de manera casi uniforme en todas las situaciones consideradas. Para interpretar esto debe recordarse, a partir de análisis presentados en secciones anteriores, que gran cantidad de estudiantes fallaron en la formulación de un ejemplo utilizando este símbolo, debido a que no formularon una función proposicional. Esto incide en que una cuarta parte de los estudiantes haya podido reconocer el error en la expresión del Ejercicio 2 y reformularla, pero no hayan podido proponer un ejemplo sintácticamente correcto.

5.5.5.2. Acerca de la sintaxis en los ejercicios 1 y 4

En este apartado se pretende analizar si existe algún tipo de vinculación entre el desempeño que cada estudiante manifiesta con relación a la sintaxis de una expresión que él mismo formula libremente y a la escritura de una expresión ya dada en el registro coloquial.

En este caso, se consideró el ejemplo que el estudiante propone en el Ejercicio 1 y la resolución de los ítems del Ejercicio 4 que requieren de una conversión del registro coloquial al simbólico, donde los símbolos principales de la estructura son las operaciones lógicas y los cuantificadores.

En la Tabla 5.23 se presentan los porcentajes de estudiantes que resolvieron correctamente alguna de las dos tareas, para los símbolos considerados. En los casos en los que, con el mismo símbolo principal hay más de un ítem (la conjunción y el cuantificador universal), se contabilizaron los que tuvieran alguna de las conversiones correctamente realizada. Se realizó de esta manera para equiparar con aquellos casos en lo que se presenta un único ítem.

Tabla 5.23. Porcentaje de estudiantes en tareas vinculadas a la sintaxis del ejemplo del Ejercicio 1 y en la conversión del Ejercicio 4, para cada símbolo.

Formulación de un ejemplo sintácticamente correcto	**Conversión al registro simbólico**	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$
Bien	Bien	53	36	43	33
Bien	Mal	8	10	4	13
Mal	Bien	27	26	43	30

A la vista de la distribución de los porcentajes de la segunda y la tercera fila de la Tabla 5.23, en las que una de las dos tareas no fue correctamente resuelta, se observa que la actividad de escribir una expresión simbólica generada por el propio sujeto resulta más dificultosa o con menor grado de éxito que la de convertir una expresión dada en el registro coloquial.

Entre los dos cuantificadores se observa que los estudiantes tienen un mejor desempeño para el cuantificador universal. Esto podría deberse a que en la formulación del ejemplo, muchos de ellos propusieron expresiones en las que utilizan al cuantificador existencial de manera coloquial, realizando una simple traducción de la palabra ‘existe’.

Observando la primera fila de valores de la Tabla 5.23, correspondiente a la correcta resolución de ambas tareas, puede verse que allí se ubican los valores más altos para cada uno de los símbolos considerados, lo cual podría conducir a la idea de una posible relación entre ambos tipos de tareas. Sin embargo, los test chi-cuadrado efectuados determinaron que para los dos cuantificadores existe relación mientras que para los dos operadores lógicos no la hay (las correspondientes salidas del software SPSS pueden verse en el Anexo 4). Esta discrepancia no permite realizar ninguna afirmación en cuanto a la vinculación de las dos tareas en general, con independencia del símbolo analizado.

5.5.5.3. Acerca de la sintaxis en los ejercicios 2 y 4

En este caso se pretende analizar si existe algún tipo de relación entre el desempeño que cada estudiante manifiesta con relación a la sintaxis en la reescritura de una expresión incorrectamente formulada y la sintaxis en una expresión simbólica construida por el estudiante como producto de una conversión (a partir de una expresión dada en lenguaje coloquial).

Para estudiar este planteo se observaron conjuntamente las resoluciones del Ejercicio 2, correspondiente a los ítems que debían ser reformulados, y las conversiones del registro coloquial al simbólico del Ejercicio 4.

En la Tabla 5.24 se presentan los porcentajes de estudiantes correspondientes a resoluciones correctas de al menos una de las dos tareas analizadas en este caso. Para considerar si el estudiante convierte bien al registro simbólico, en los casos en que hay más de una conversión para el mismo símbolo, se contempló que sea correcta al menos una de las conversiones.

Tabla 5.24. Porcentaje de estudiantes en tareas vinculadas a la sintaxis del ejemplo del Ejercicio 2 y en la conversión del Ejercicio 4, para cada símbolo.

Reconocimiento y reescritura del ítem incorrectamente formulado del Ejercicio 2	Conversión al registro simbólico	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$
Bien	Bien	21	28	11	14
Bien	Mal	1	19	0	7
Mal	Bien	59	32	76	49

La observación de los porcentajes de la tercera fila de la Tabla 5.24 conduce a la idea de que, en general, los estudiantes consiguen convertir expresiones coloquiales al registro simbólico aunque no logren reconocer errores de sintaxis en una expresión dada y/o reformular la expresión. Esto lleva a pensar que el manejo de la sintaxis en las conversiones podría estar, al menos en parte, guiado por la expresión coloquial. En general, los estudiantes que son capaces de detectar y corregir un error de sintaxis también son capaces de formular una expresión simbólica sintácticamente correcta como producto de una conversión. Más allá de estas observaciones, los test chi-cuadrado efectuados para los datos correspondientes a cada símbolo determinaron que no hay relación entre estas variables, y por lo tanto son independientes (ver Anexo 4).

En esta subsección, como en las dos anteriores, se analizó si existe vinculación en la manifestación de cada estudiante, con relación a la sintaxis en el registro simbólico-algebraico, en las distintas tareas planteadas en los ejercicios del instrumento. En la mayoría de los casos los test estadísticos realizados muestran que las variables son independientes y no es posible atribuir una relación entre ellas. Esto podría adjudicarse al hecho de que las tareas son diferentes, y por ende lo son las prácticas matemáticas implicadas, por lo que los requerimientos difieren y la participación de la función semiótica F2, en cada tipo de tarea, es distinta.

Dentro de esta subsección, es interesante analizar el caso particular de algunas expresiones que tienen el mismo contenido semántico, o es muy similar, pero están expresadas en distintos registros de representación y se requieren tareas diferentes para obtener expresiones simbólicas análogas.

Este análisis está centrado en dos casos, correspondientes a la conjunción y a la disyunción, en los que la expresión presentada en el Ejercicio 2 debe reescribirse y la presentada en el Ejercicio 4 debe convertirse al registro simbólico:

- $-5 \wedge 4 \in R$ (Ejercicio 2)
- *3 y 5 son números naturales* (Ejercicio 4)

- $4x \in N \vee Z$ (Ejercicio 2)
- *4 es un número natural o entero* (Ejercicio 4)

A continuación, en la Tabla 5.25 se presentan los porcentajes de estudiantes obtenidos en cada caso, discriminados para estas expresiones.

Tabla 5.25. Porcentaje de estudiantes en tareas relativas a la reescritura y a la conversión al registro simbólico de expresiones similares.

Símbolo estudiado	Reconocimiento del error y reescritura	Conversión	Cantidad total
$\wedge$	Bien	Bien	8
	Bien	Mal	3
	Mal	Bien	16
$\vee$	Bien	Bien	14
	Bien	Mal	7
	Mal	Bien	49

A partir de los valores observados para ambos símbolos, puede decirse que son muy pocos los estudiantes que realizan correctamente las dos tareas, reconociendo estos símbolos como operadores entre dos proposiciones. Aquellos estudiantes que no identifican a las expresiones simbólicas como incorrectas, en el Ejercicio 2, probablemente estén considerando a la conjunción y la disyunción de forma coloquial, como simples traducciones de los vocablos ‘y’ y ‘o’. Para la disyunción, la mitad de los estudiantes considera correcta la expresión simbólica dada (y por lo tanto resuelven mal el ítem del Ejercicio 2) pero luego realizan bien la conversión propuesta en el Ejercicio 4. Esto podría estar manifestando un conflicto semiótico con relación a este símbolo, dado que en el primer caso lo consideran con un uso coloquial mientras que en el caso de la conversión lo emplean como operación entre las proposiciones. Aunque son menos, es análoga la situación para el 16% de estudiantes que hacen esto mismo para la conjunción.

En estos dos casos también se analizó estadísticamente si existe relación entre las variables consideradas. Para las expresiones que contienen una conjunción, el test chi-cuadrado determinó que las variables correspondientes a ambas tareas tienen relación y resultan ser dependientes, mientras que las correspondientes al caso de la disyunción resultaron independientes (ver Anexo 4). Por lo tanto, no es posible derivar alguna conclusión entre las tareas de producir la misma expresión simbólica a partir de la reformulación de un error o a través de la conversión de una expresión coloquial. Para ello, debería realizarse un estudio más profundo y focalizado que, en esta investigación, queda como una pregunta abierta. Un punto de partida podría ser el hecho que tres cuartas parte de los estudiantes aceptaron como correcta la expresión ‘$-5 \wedge 4 \in R$’ mientras que sólo la tercera parte supuso correcta la expresión ‘$4x \in N \vee Z$’ (ver datos de la Tabla 5.13).

5.5.5.4. Acerca del establecimiento del valor de verdad en los ejercicios 1 y 3

En este apartado se analiza si existe vinculación entre el establecimiento del valor de verdad de una expresión formulada por el estudiante y el de una expresión dada. Para ello se consideraron las respuestas correspondientes a los ejemplos solicitados en el Ejercicio 1 y las de las expresiones simbólicas del Ejercicio 3. Los porcentajes de estudiantes con al menos una de las tareas correctamente resuelta se presentan en la Tabla 5.26.

Tabla 5.26. Porcentaje de estudiantes en tareas relativas al establecimiento del valor de verdad

Formulación de un ejemplo verdadero	Establecimiento del valor de verdad de una expresión dada	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$
Bien	Bien	40	26	29	18
Bien	Mal	7	6	1	7
Mal	Bien	43	48	63	46

En vista de los porcentajes de la Tabla 5.26, puede observarse que los valores más altos se concentran en la primera y tercera fila. Esto corresponde a los casos en los que el estudiante determina correctamente el valor de verdad de expresiones simbólicas dadas, por lo que se infiere que la tarea les resulta de menor dificultad. No obstante, debe tenerse en cuenta que el valor de verdad del ejemplo que propone el estudiante está ligado a la posibilidad de escribirlo adecuadamente desde el punto de vista sintáctico, puesto que no se consideró el valor de verdad de las expresiones, propuestas como ejemplo, que estuvieran incorrectamente formuladas. Este podría ser un factor que incide en que la tarea se observe con menor grado de éxito, y también en la independencia que tienen las variables, como conclusión de los test estadísticos chi-cuadrado efectuados (Anexo 4).

5.5.5.5. Relación entre ítems formulados según el uso habitual en Matemática y según la Lógica Formal

En el Ejercicio 3, para cada cuantificador se propusieron dos expresiones simbólicas que debían ser convertidas al lenguaje coloquial. Una de ellas está formulada según las reglas de la Lógica Formal y la otra según el uso habitual en Matemática:

- Cuantificador universal: $\forall x\ (x \in Z \Rightarrow x<0)$; $\forall x \in N\ x < x + 1$
- Cuantificador existencial: $\exists\, x\ (x \in Z \wedge x <0)$; $\exists\, x \in N \,/\, 2 < x< 3$

En esta subsección se pretende estudiar si existe relación entre el desempeño que cada estudiante manifiesta en las respectivas conversiones al lenguaje coloquial.

En la Tabla 5.27, se presentan los porcentajes de estudiantes que realizaron correctamente al menos una de las tareas propuestas. Como en casos anteriores, se contabilizaron conjuntamente los casos en los se realizó la conversión SaS y la conversión global, pero también se presentan de manera discriminada los porcentajes de conversiones globales (aquellas en las que se aplicó un tratamiento en el registro coloquial).

Tabla 5.27. Porcentaje de estudiantes en tareas de conversión al registro coloquial para expresiones cuantificadas expresadas de dos formas.

Símbolo estudiado	Expresión según reglas de la Lógica Formal	Expresión según uso habitual en Matemática	Porcentaje total de conversiones	Porcentaje de conversiones Globales en la forma de la Lógica formal	Porcentaje de conversiones Globales en la forma de uso habitual
∀	Bien	Bien	79	8	21
	Bien	Mal	6	0	----
	Mal	Bien	11	----	3
∃	Bien	Bien	94	13	16
	Bien	Mal	2	0	-----
	Mal	Bien	1	-----	0

De acuerdo con los porcentajes registrados en la Tabla 5.27, puede decirse que para los dos cuantificadores se observa que las tres cuartas partes de estudiantes pueden convertir exitosamente partiendo de cualquiera de los dos formatos de escritura. Esta observación realizada por la simple inspección de la Tabla es corroborada por los resultados arrojados por los test chi-cuadrado efectuados que, en ambos casos, determinaron que existe relación entre las variables (ver Anexo 4).

Puede realizarse una observación en torno a que el porcentaje de estudiantes que realizan una conversión global (efectuar un tratamiento para obtener una expresión coloquial que exprese la idea general) es más alto en el caso de las expresiones que están formuladas según el uso habitual en Matemática que en aquellas formuladas según las reglas de la Lógica formal (21% para el cuantificador universal y 16% para el existencial). Esto conduce a pensar que a los estudiantes les resulta más fácil realizar una lectura comprensiva en las expresiones formuladas según el uso habitual en Matemática. En el caso del cuantificador universal, la diferencia entre las conversiones globales es más grande, lo que podría adjudicarse a que en la expresión dada según las reglas de la Lógica Formal contiene una implicación, y ése podría ser el factor que marca la diferencia.

5.6. ESTUDIO DE LA SECUENCIACIÓN EN LA MANIFESTACIÓN DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS INVOLUCRADAS

Luego de los análisis de cada uno de los ejercicios propuestos para cada una de las versiones del instrumento, presentados en las secciones anteriores, la investigación se orientó en la búsqueda de niveles en la construcción del significado de los símbolos. Los análisis realizados con anterioridad permitieron observar la disparidad de desempeño que los estudiantes presentan entre los símbolos en estudio no permitiría obtener una conclusión general en cuanto al proceso de simbolización considerado como un todo. Por ejemplo, en el caso de los cuantificadores su sintaxis requiere del uso del símbolo de pertenencia, para lo cual el significado de este último símbolo debería construirse previamente, y por lo tanto no podrían entrar en un mismo nivel general de construcción en el que un estudiante pudiera estar situado.

Debido a las razones expuestas, el análisis se centró en cada uno de los símbolos en estudio, en lugar de un análisis general. Esto resultó beneficioso, pues el producto final que se obtuvo fue una secuenciación en la manifestación de las funciones semióticas involucradas en el proceso de construcción de significado de un símbolo. Para efectuar este análisis se utilizaron algunos valores cuantitativos y técnicas cualitativas para obtener categorías. En las próximas subsecciones se detalla la secuencia de pasos llevada a cabo en este proceso.

5.6.1. PASO 1: AGRUPACIÓN Y CODIFICACIÓN DE ÍTEMS DE CADA SÍMBOLO EN ESTUDIO

Se agruparon los ítems del instrumento para cada uno de los seis símbolos en estudio. Los valores considerados son los correspondientes a la manifestación de las funciones semióticas de cada uno de los ítems considerados.

A modo de resumen, en la Tabla 5.28 se reiteran los ítems que fueron considerados para cada símbolo, con la función semiótica que se pretende evaluar en el ítem y la codificación que luego se utilizará para representar el orden en el que se manifiestan las funciones semióticas.

Tabla 5.28. Ítems de la versión 3 agrupados por símbolo para su codificación.

Símbolo	Ítem	Función semiótica	Codificación
∈	Lectura del símbolo	F1	F1
	Sintaxis en el ejemplo del Ejercicio 1	F2	F2-Ejem
	Valor de verdad en el ejemplo del Ejercicio 1	F3	F3-Ejem
	-2∈Z – Ejercicio 2 (fácil)	F2	F2-Fác
	3 ⊂ Z – Ejercicio 2 (difícil) (∈ interviene en la escritura)	F2	F2-Dif 1
	N∈Z – Ejercicio 2 (difícil)	F2	F2-Dif 2
⊂	Lectura del símbolo	F1	F1
	Sintaxis en el ejemplo del Ejercicio 1	F2	F2-Ejem
	Valor de verdad en el ejemplo del Ejercicio 1	F3	F3-Ejem
	{1, 2} ⊂ N – Ejercicio 2 (fácil)	F2	F2-Fác 1
	3 ⊂ Z – Ejercicio 2 (difícil)	F2	F2-Dif 1
	N∈Z – Ejercicio 2 (difícil) (⊂ interviene en la escritura)	F2	F2-Dif 2
∀	Lectura del símbolo	F1	F1
	Sintaxis en el ejemplo del Ejercicio 1	F2	F2-Ejem
	Valor de verdad en el ejemplo del Ejercicio 1	F3	F3-Ejem
	∀ N N>0 – Ejercicio 2 (difícil)	F2	F2-Dif
	∀ x∈R x^2 ≥0 – Ejercicio 2 (fácil)	F2	F2-Fác
	∀ x (x∈Z⇒x<0) – Conversión al registro coloquial	F_{sc}	F_{sc} -Lóg
	∀ x (x∈Z⇒x<0) – Tratamiento en el registro coloquial	F_t	F_t -Lóg
	∀ x (x∈Z⇒x<0) – Valor de verdad	F3	F3-v/f-Lóg
	∀ x∈N x < x+1 – Conversión al registro coloquial	F_{sc}	F_{sc} -Fác
	∀ x∈N x < x+1 – Tratamiento en el registro coloquial	F_t	F_t -Fác
	∀ x∈N x < x+1 – Valor de verdad	F3	F3-v/f-Fác
	Cada número entero es menor que su sucesor	F_{cs}	F_{cs}-1
	El cuadrado de cualquier número real es positivo o cero	F_{cs}	F_{cs}-2
∃	Lectura del símbolo	F1	F1
	Sintaxis en el ejemplo del Ejercicio 1	F2	F2-Ejem
	Valor de verdad en el ejemplo del Ejercicio 1	F3	F3-Ejem
	∃ x∈ℝ / y + 2=5 – Ejercicio 2 (difícil)	F2	F2-Dif
	∃ x∈ℤ / x < 0 – Ejercicio 2 (fácil)	F2	F2-Fác
	∃x (x∈ℤ ∧ x < 0) – Conversión al registro coloquial	F_{sc}	F_{sc} -Lóg
	∃x (x∈ℤ ∧ x < 0) – Tratamiento en el registro coloquial	F_t	F_t -Lóg
	∃x (x∈ℤ ∧ x < 0) – Valor de verdad	F3	F3-v/f-Lóg
	∃ x ∈ ℕ / 2 < x < 3 – Conversión al registro coloquial	F_{sc}	F_{sc} -Fác
	∃ x ∈ ℕ / 2 < x < 3 – Tratamiento en el registro coloquial	F_t	F_t-Fác
	∃ x ∈ ℕ / 2 < x < 3 – Valor de verdad	F3	F3-v/f-Fác
	Algunos números naturales son negativos	F_{cs}	F_{cs}
∧	Lectura del símbolo	F1	F1
	Sintaxis en el ejemplo del Ejercicio 1	F2	F2-Ejem
	Valor de verdad en el ejemplo del Ejercicio 1	F3	F3-Ejem
	4∈ℕ ∧ -3< 0 – Ejercicio 2 (fácil)	F2	F2-Fác
	-5∧ 4 ∈ ℝ – Ejercicio 2 (difícil)	F2	F2-Dif
	-2 ∈ ℤ ∧ -1∈ ℕ – Conversión al registro coloquial	F_{sc}	F_{sc}
	-2 ∈ ℤ ∧ -1∈ ℕ – Tratamiento en el registro coloquial	F_t	F_t
	-2 ∈ ℤ ∧ -1∈ ℕ – Valor de verdad	F3	F3-v/f
	3 es un número entero y positivo	F_{cs}	F_{cs}-1
	3 y 5 son números naturales	F_{cs}	F_{cs}-2
∧	Lectura del símbolo	F1	F1
	Sintaxis en el ejemplo del Ejercicio 1	F2	F2-Ejem
	Valor de verdad en el ejemplo del Ejercicio 1	F3	F3-Ejem
	7 ∈ ℕ ∨ -1∈ ℤ – Ejercicio 2 (fácil)	F2	F2-Fác

	$4 \in \mathbb{N} \vee \mathbb{Z}$– Ejercicio 2 (difícil)	F2	F2-Dif
	$0{,}5 \in \mathbb{Z} \vee -1 \in \mathbb{Z}$ – Conversión al registro coloquial	F_{sc}	F_{sc}
	$0{,}5 \in \mathbb{Z} \vee -1 \in \mathbb{Z}$ – Tratamiento en el registro coloquial	F_t	F_t
	$0{,}5 \in \mathbb{Z} \vee -1 \in \mathbb{Z}$ – Valor de verdad	F3	F3-v/f
	4 es un número natural o entero	F_{cs}	F_{cs}

5.6.2. PASO 2: CÁLCULO DE PROPORCIONES PARA CADA ESTUDIANTE Y ORDENAMIENTO

Se trabajó con cada símbolo por separado, efectuando en cada caso los mismos cálculos. Para ello se utilizaron seis planillas de cálculo de *Excel*, una por cada símbolo.

Para cada uno de los estudiantes de la muestra se obtuvo la *proporción* entre las funciones semióticas establecidas y las funciones semióticas involucradas, y para cada uno de los seis símbolos en estudio. Esto es, para cada estudiante se calculó el cociente:

$$\text{Proporción} = \frac{\sum \text{ Funciones semióticas establecidas para el símbolo}}{\text{Total de funciones semióticas para el símbolo}}$$

La cantidad de proporciones diferentes obtenidas es finita, pues está condicionada al número de ítems que intervienen en cada caso. Así, por ejemplo para el símbolo de pertenencia, las proporciones posibles son 0/6, 1/6, 2/6, …, 6/6, pues son seis los ítems que participan. Obtenidas las proporciones correspondientes a cada uno de los seis símbolos, en cada una de las planillas se realizó un ordenamiento de menor a mayor de todas ellas.

5.6.3. PASO 3: SEGMENTACIÓN DE LOS DATOS

El ordenamiento realizado permitió detectar que los estudiantes que presentan la misma proporción no necesariamente manifiestan el establecimiento de las mismas funciones semióticas. Estas observaciones condujeron a centrar el interés, dentro de cada grupo, en el porcentaje de estudiantes que manifiestan el establecimiento de cada una de las funciones semióticas consideradas para cada símbolo, puesto que las funciones semióticas con mayor porcentaje caracterizarían a cada grupo.

Para obtener estos porcentajes se efectuaron sucesivas particiones arbitrarias, considerando una o varias proporciones en cada grupo y calculando los porcentajes en cada función semiótica, de modo que entre un grupo y el siguiente, el porcentaje de alumnos que manifiestan cada función semiótica *se mantuviera o aumentara*.

A modo de ejemplo, y para clarificar los cálculos detallados en este paso, en la Tabla 5.29

se presenta un extracto de la planilla correspondiente al cuantificador existencial. En la misma se presentan los tres primeros grupos de la partición realizada. En relación con lo mencionado al comienzo de la sección, respecto a que no todos los estudiantes que presentan la misma proporción manifiestan las mismas funciones semióticas, puede observarse, por ejemplo, en las primeras filas de la Tabla 5.29 que tanto el Alumno 33 como el Alumno 49 tienen la misma proporción de funciones semióticas para el cuantificador existencial (0.25). Sin embargo, estos alumnos no manifiestan las mismas funciones semióticas.

Tabla 5.29. Muestra del cálculo de proporciones y porcentajes para el símbolo ∃

Alumno	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	F_{sc}-Fác	F_t -Fác	F3-v/f-Fác	F_{sc}-Lóg	F_t-Lóg	F3-v/f-Lóg	F_{cs}	Proporción
33	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0,25
49	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0,25
18	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0,33
25	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0,33
45	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0,33
83	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0,33
87	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0,33
Porcentaje	**100**	**0**	**0**	**43**	**43**	**86**	**0**	**0**	**71**	**0**	**14**	**14**	
14	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0,42
34	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0,42
43	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0,42
44	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,42
47	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0,42
55	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0,42
63	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,42
82	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0,42
3	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0,50
4	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0,50
5	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,50
9	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0,50
12	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0,50
13	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0,50
19	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0,50
23	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0,50
31	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0,50
50	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0,50
53	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0,50
68	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0,50
70	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0,50
71	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0,50
74	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0,50
76	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0,50
78	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0,50
81	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,50
84	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0,50
Porcentaje	**100**	**22**	**11**	**30**	**93**	**96**	**4**	**37**	**93**	**7**	**37**	**41**	
1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0,58
2	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0,58
17	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0,58
27	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58
32	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0,58
36	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0,58
38	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0,58
40	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58
42	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0,58
46	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0,58
51	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0,58
59	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0,58
65	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58
73	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0,58
79	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58
89	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0,58
Porcentaje	**100**	**25**	**13**	**31**	**94**	**94**	**13**	**63**	**100**	**6**	**75**	**88**	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	

5.6.4. PASO 4: CARACTERIZACIÓN DE LOS GRUPOS SEGÚN LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS

Una vez obtenidas las particiones, el propósito fue identificar y determinar qué funciones semióticas caracterizan a cada grupo, es decir, cuáles son las funciones semióticas que fueron manifestadas por la mayoría de los estudiantes en cada grupo.

En una primera instancia, se consideró que esa mayoría podía ser considerada arbitrariamente por un porcentaje mayor o igual al 60%, considerando que este porcentaje contempla a más de la mitad de los estudiantes incluidos en cada grupo.

Luego se repitió el procedimiento pero considerando porcentajes mayores o iguales al 70%, con el objetivo de observar si se presentaba algún cambio o modificación con respecto al análisis anterior correspondiente al 60%.

Estos análisis se efectuaron con los datos relevados tanto con la versión 2 como con la versión 3 del instrumento. Dado que la versión 3 es la definitiva, los análisis que se presentan a continuación corresponden a los datos relevados para esta versión. No obstante, el estudio también se realizó con los datos relevados con la versión 2 del instrumento y las tablas correspondientes se encuentran en el Anexo 5. Es interesante observar que las conclusiones que pueden obtenerse a partir de una u otra versión son considerablemente similares.

En las Tablas 5.30 a 5.35 se presentan las particiones definidas a partir de las proporciones consideradas. En las mismas, para cada grupo de la partición, aparecen sombreadas las celdas en las que cada función semiótica se ha manifestado en al menos el 60% de los estudiantes de la partición (gris claro) y en al menos el 70% de los estudiantes (gris oscuro). Así, por ejemplo, en la Tabla 5.30 que ilustra la partición asociada al símbolo de pertenencia, puede observarse que la primera fila corresponde al grupo de estudiantes con proporciones 0.17, 0.33 o 0.55 para los ítems de este símbolo. Para este grupo, puede leerse en los distintos sombreados de la tabla, que el 70%, o más, de los estudiantes de esta partición manifestaron la función F1, más del 60% (pero menos del 70%) manifestaron la función F2 evaluada en el ejemplo del Ejercicio 1 (F2-Ejem) y la función F2 evaluada en el ítem fácil del Ejercicio 2 (F2-Fác), en tanto que las restantes funciones no se manifestaron como logradas por un porcentaje relevante de estudiantes.

En la segunda fila, correspondiente al grupo que manifiesta una proporción correspondiente a 0.67 de las funciones semióticas consideradas para este símbolo, las cuatro primeras funciones semióticas consideradas aparecen manifestadas en el 70% de los estudiantes o más. Además, debe observarse que en este grupo la manifestación de la función semiótica evaluada en el ítem codificado como F2-Ejem subió al 70% o más, y la que corresponde a la función codificada como F3-Ejem, aparece por primera vez y manifestada por el 70% o más de los estudiantes.

La tercera fila corresponde al grupo que manifiesta una proporción del 0.83 de las funciones semióticas consideradas. En la misma aparece, manifestada por un 70% o más de los estudiantes del grupo, la función semiótica que corresponde a uno de los ítems del Ejercicio 2 considerado como difícil (F2-Dif). Finalmente, en la última fila, que corresponde al grupo de estudiantes que manifestaron todas las funciones semióticas consideradas para este símbolo, se observa que la totalidad de las mismas aparecen manifestadas por el 70% o más de los estudiantes del grupo.

Tabla 5.30. Manifestación de cada función semiótica con 60% y 70% para el símbolo $\in$, según relevamiento de la versión 3 del instrumento

Código del ítem / **Proporción**	**F1**	**F2-Ejem**	**F3-Ejem**	**F2-Fác**	**F2-Dif 1**	**F2-Dif 2**
0.17, 0.33 y 0.55						
0.67						
0.83						
1						

Aparece con el 60% o más

Aparece con el 70% o más

Tabla 5.31. Manifestación de cada función semiótica con 60% y 70% para el símbolo $\subset$, según relevamiento de la versión 3 del instrumento

Código del ítem / **Proporción**	**F1**	**F2-Ejem**	**F3-Ejem**	**F2-Fác**	**F2-Dif 1**	**F2-Dif 2**
0 y 0.29						
0.33 y 0.50						
0.67						
0.83						
1						

Tabla 5.32. Manifestación de cada función semiótica con 60% y 70% para el símbolo∀, según relevamiento de la versión 3 del instrumento

Código del ítem / Proporción	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc -Fác	Ft -Fác	F3-v/f-Fác	Fsc -Lóg	Ft -Lóg	F3-v/f-Lóg	Fcs-1	Fcs-2
0.23 y 0.31													
0.38 y 0.46													
0.54 y 0.62													
0.69 y 0.77													
0.85 y 0.92													
1													

Tabla 5.33. Manifestación de cada función semiótica con 60% y 70% para el símbolo ∃, según relevamiento de la versión 3 del instrumento

Código del ítem / Proporción	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc-Fác	Ft -Fác	F3-v/f-Fác	Fsc-Lóg	Ft-Lóg	F3-v/f-Lóg	Fcs
0.25 y 0.33												
0.42 y 0.50												
0.58												
0.67												
0.75; 0.83												
1												

Tabla 5.34. Manifestación de cada función semiótica con 60% y 70% para el símbolo ∧, según relevamiento de la versión 3 del instrumento

Código del ítem / Proporción	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc	Ft	F3-v/f	Fcs-1	Fcs-2
0.30 y 0.40										
0.50 y 0.60										
0.7										
0.80 y 0.90										
1										

Tabla 5.35. Manifestación de cada función semiótica con 60% y 70% para el símbolo ∨, según relevamiento de la versión 3 del instrumento

Código del ítem / Proporción	F1	F2-Ejem	F3-Ejem	F2-Fác	F2-Dif	Fsc	Ft	F3-v/f	Fcs
0.22; 0.33 y 0.44									
0.56									
0.67									
0.78 y 089									
1									

5.6.5. PASO 5: COMPARACIÓN DE LA SECUENCIA DE MANIFESTACIÓN DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS DE CADA SÍMBOLO

El paso anterior permitió realizar, para cada uno de los símbolos, una descripción de las funciones logradas en cada grupo de cada partición y su diferenciación respecto del grupo siguiente. Asimismo, permitió analizar el orden o la secuencia de aparición de cada función semiótica para cada uno de los símbolos en estudio. Por ejemplo, puede observarse que, para el símbolo de pertenencia, la aparición de las funciones semióticas en cada uno de los grupos y con los dos porcentajes considerados es:

Con el 60% o más:

- En el grupo 1: F1; F2-Ejem; F2-Fác
- En el grupo 2: F3-Ejem
- En el grupo 3: F2-Dif 2
- En el grupo 4: F2-Dif 1

Con el 70% o más:

- En el grupo 1: F1; F2-Fác
- En los grupos 2 y 3: F2-Ejem; F3-Ejem
- En el grupo 4: F2-Dif 1; F2-Dif 2

Este resumen se repitió para cada uno de los símbolos, y se volcaron todos los resultados en una misma tabla. El objetivo de realizar esta tabla comparativa fue analizar si se repite la secuencia de aparición, buscando si es posible observar algún patrón de la manifestación de las funciones semióticas de todos los símbolos en estudio. Además, en esta tabla se pretende distinguir y comparar similitudes o diferencias entre los dos porcentajes considerados, es decir con el 60% o más de los estudiantes de cada grupo y con el 70% o más de los estudiantes de cada grupo. En la Tabla 5.36 se presenta el resumen de las apariciones de las funciones semióticas para cada símbolo, con los dos porcentajes considerados.

Dado que la cantidad total de ítems considerados para cada uno de los símbolos no es la misma, la cantidad de proporciones posibles es distinta en cada caso. Por ejemplo, para el símbolo de pertenencia se relevaron datos de seis funciones semióticas, lo que genera siete proporciones posibles, mientras que, por ejemplo, para el cuantificador universal son trece funciones que posibilitan catorce proporciones posibles. Esta diferencia entre la cantidad de funciones semióticas registradas conduce a particiones con diferentes cantidades de grupos, debidas a la mayor variabilidad de las proporciones.

Tabla 5.36. Resumen de la manifestación de las funciones semióticas para cada símbolo con 60% y 70%, según relevamiento de la versión 3 del instrumento

	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$
Con 60% o más	• F1 F2-Fác F2-Ejem • F3-Ejem • F2-Dif 1 • F2-Dif 2	• (Nada) •F1 F2-Fác •F2-Ejem F2-Dif 1 •F3-Ejem F2-Dif 2	•F1 F2-Fác •Fsc-Fác Fsc-Lóg •Fcs-1 Fcs-2 •F2-Ejem F3-Ejem F3-v/f-Lóg •F_t-Fác F3-v/f-Fác •F2-Dif F_t-Lóg	•F1 Fsc-Fác Fsc-Lóg •F2-Fác •F3-v/f-Fác F3-v/f-Lóg Fcs •F2-Ejem F2-Dif •F3-Ejem •F_t-Fác F_t-Lóg	•F1 Fsc •F2-Fác Fcs-1 F3-v/f •F2-Ejem F3-Ejem •Fcs-2 •F2-Dif F_t	•F1 Fsc •F2-Fác F2-Ejem Fcs •F3-v/f •F3-Ejem F2-Dif •F_t
Con 70% o más	• F1 F2-Fác • F2-Ejem F3-Ejem • F2-Dif 1 F2-Dif 2	• (Nada) •F1 F2-Fác •F2-Ejem F2-Dif 1 •F3-Ejem •F2-Dif 2	•F1 F2-Fác •Fsc-Fác Fsc-Lóg •Fcs-1 Fcs-2 •F2-Ejem F3-Ejem F3-v/f-Lóg •F_t-Fác F3-v/f-Fác •F2-Dif F_t-Lóg	•F1 Fsc-Fác Fsc-Lóg •F2-Fác •F3-v/f-Fác Fcs •F3-v/f-Lóg •F2-Ejem F2-Dif F3-Ejem •F_t-Fác F_t-Lóg	•F1 Fsc •F2-Fác Fcs-1 F3-v/f •F2-Ejem F3-Ejem •Fcs-2 •F2-Dif F_t	•F1 Fsc •F2-Fác Fcs •F2-Ejem •F3-Ejem F3-v/f •F2-Dif F_t

La primera observación que puede efectuarse en relación con la Tabla 5.36 resulta de la comparación de las dos filas correspondientes a los dos porcentajes considerados. Se observa que no se presentan grandes diferencias entre la aparición de las funciones semióticas tomando un porcentaje mayor o igual al 60% o mayor o igual al 70%. Si se compara, para cada símbolo, en qué grupo se manifiesta una función semiótica con un porcentaje mayor o igual al 60% y luego con un porcentaje mayor o igual al 70%, cada función semiótica aparece en el mismo grupo o a lo sumo en el siguiente.

Esta similitud entre los registros realizados para cada uno de los porcentajes considerados dio lugar a que los análisis que se efectúen de aquí en más, se realicen tomando sólo las secuencias de manifestaciones correspondientes al 70%, por ser más alto, con lo cual hay un mayor porcentaje de estudiantes del grupo que manifiesta una determinada función semiótica.

La segunda comparación realizada para la información registrada en la Tabla 5.36 proviene de cotejar las columnas, correspondientes a cada uno de los símbolos en estudio. Esto permite efectuar una mirada sobre todos los símbolos a la vez, en busca de algún patrón o similitud en la secuencia de aparición de las funciones semióticas analizadas. Observando la fila correspondiente a "70% o más" puede decirse que, en principio, no hay una secuencia idéntica entre las funciones de cada uno de los seis símbolos estudiados. Sin embargo, hay muchas semejanzas que permiten entrever un orden entre las funciones semióticas y describir cierta secuenciación, como se detalla a continuación.

- **F1**: Es la primera en manifestarse como establecida, en la totalidad de los casos. Al definirla, se supuso a esta función semiótica como necesaria para la construcción de las restantes. Este resultado estaría reafirmando la suposición, dado que para todos los símbolos en estudio, y con los datos relevados con las dos versiones del instrumento, se observa que esta función se manifiesta como construida por el 70%, o más, de los alumnos del primer grupo de todas las particiones efectuadas.

- **F2-Fác**: El reconocimiento de la adecuación sintáctica de una expresión dada se evaluó, para todos los símbolos, con una expresión que está correctamente formulada y con otra que no lo está. Esta función semiótica corresponde al caso del reconocimiento de una expresión cuya sintaxis es correcta, y la más sencilla de las dos. La escasa dificultad en la tarea podría ser la razón de su temprana manifestación en esta secuencia, pues en todos los casos aparece a la par de la función F1 o en el grupo siguiente.

- **F_{sc}**: Esta función semiótica corresponde a las conversiones desde el registro simbólico-algebraico al coloquial. Para los símbolos en los que fue evaluada, la función se manifiesta a la par de la función de reconocimiento de la sintaxis de una expresión o en el grupo siguiente, razón por la cual aparece siempre en el primer o segundo grupo de cada partición. La temprana manifestación puede deberse a dos razones. En primer lugar, esta función se consideró como manifiesta aún para los casos en que la conversión fuera del tipo SaS y, en segundo lugar, para efectuar este tipo de conversiones sería suficiente con tener establecidas las funciones nominales (F1) de cada uno de los símbolos intervinientes, tal como se detalló en la descripción de estas actividades cognitivas en términos de funciones semióticas.

- **F_{cs}**: Estas funciones semióticas corresponden a las conversiones desde el registro coloquial al simbólico-algebraico. Intervienen las funciones F1 de cada uno de los símbolos intervinientes, pero también la función de sintaxis (F2) del símbolo principal (y eventualmente las de otros símbolos participantes de la expresión) para la formulación de una expresión bien formada.

  En todos los casos y para las dos versiones del instrumento, se observa que esta función aparece manifiesta en grupos posteriores a los que aparece la función de conversión en el sentido inverso, y en grupos anteriores a los que se manifiesta la función (F2-Ejem).

  Es conocido que las conversiones entre los mismos registros semióticos y realizadas en distinto sentido suelen implicar distinto nivel de dificultad. En este caso, la aparición de esta función en grupos posteriores a los de la conversión del registro simbólico-algebraico al coloquial se presenta como de mayor dificultad. La razón a la cual puede adjudicarse que resulte más difícil para los estudiantes podría ser que en este sentido de conversión (del registro coloquial al simbólico) interviene la sintaxis correspondiente a los símbolos involucrados en la expresión.

  El hecho de que se manifieste en grupos anteriores a los de la función semiótica F2-Ejem (correspondiente a una expresión que debe ser pensada y formulada totalmente por el estudiantes, como lo es la formulación de un ejemplo en el Ejercicio 1), puede deberse al hecho de que la oración a convertir resulta una guía para el estudiante y en cierta manera le está mencionando todos los elementos u objetos que deben integrar la expresión simbólica. Si el alumno tiene construida la función semiótica correspondiente a la sintaxis de esos símbolos, podrá efectuar la conversión, pero sin la necesidad de tomar la decisión de seleccionar una situación en la que sea pertinente utilizar el símbolo, como sucede en el caso de la formulación de un ejemplo.

- **F2-Ejem**: Esta función semiótica corresponde a la adecuación de la sintaxis de un determinado símbolo en una expresión que es generada totalmente por el estudiante a modo de ejemplo de uso. Esta intervención más fuerte de la dimensión pragmática del símbolo, junto a la dimensión sintáctica, posicionan la aparición más tardía de la función semiótica, posicionándose –en general– de la mitad de la lista en adelante.
- **F3-Ejem**: Esta función semiótica corresponde a la adecuación de la determinación del valor de verdad de una expresión que es generada totalmente por el estudiante a modo de ejemplo de uso de algún símbolo en particular. En general, aparece a la par que la función semiótica correspondiente a la sintaxis de esa expresión (F2-Ejem), aunque en algunos casos, en los datos registrados a partir de la versión 3, aparece después, lo que la hace suponer de un nivel de dificultad mayor.
- **F3-v/f**: Esta función semiótica corresponde al establecimiento del valor de verdad de una expresión simbólica dada. En este caso debe hacerse una observación particular entre los resultados que se registran a partir de las versiones 2 y 3 del instrumento, respectivamente (las tablas correspondientes a este análisis para los datos obtenidos con la versión 2 del instrumento pueden verse en el Anexo 5). En la versión 2, sólo se pedía la determinación del valor de verdad para estos ítems, mientras que en la versión 3 también se solicitaba la justificación de la respuesta y la función semiótica se consignaba como establecida con la correcta justificación. Como era de esperar, estas modificaciones provocaron una "demora" en la aparición de estas funciones en los registros de la versión 3. De esta manera, puede observarse que estas funciones aparecen en uno o dos grupos posteriores, en la versión 3. Por ejemplo, para el cuantificador universal las funciones F3-v/f-Fác y F3-v/f-Lóg aparecen en el tercer grupo, mientras que en los registros de la versión 3 lo hacen en el cuarto y quinto grupo, respectivamente. La demora que se produce en la manifestación de estas funciones, marcan otra diferencia entre los resultados obtenidos en las dos versiones del instrumento. En la versión 2, las funciones F3-v/f se presentan en los mismos grupos que las funciones de conversión del registro simbólico al coloquial, para todos los símbolos, por lo que se manifiestan como construidas al mismo tiempo que la conversión al registro coloquial y la determinación del valor de verdad de una expresión simbólica. En cambio, en la versión 3 sucede lo contrario, en ningún caso estos dos tipos de funciones semióticas se manifiestan a la par,

sino que las funciones correspondientes a la determinación del valor de verdad se manifiestan en grupos posteriores de cada partición, respecto de las funciones de conversión, y en algunos casos aparecen en dos o tres grupos posteriores.

Otra observación realizada sobre estas funciones relativas a la determinación del valor de verdad de una expresión dada, es la relación de su manifestación respecto a la de la determinación del valor de verdad de una expresión construida por el propio alumno. En la versión 2 del instrumento, las funciones correspondientes a la expresión dada aparecen antes (F3-v/f). En la versión 3, y a pesar de la demora en la manifestación de las funciones F3-v/f, también se observa que aparecen antes que la que corresponde a la de la expresión propia (F3-Ejem) o, al menos, aparecen a la par. Esto podría deberse a que, en el caso de la determinación del ejemplo, esta función está ligada directamente a la de la sintaxis, puesto que es no posible determinar el valor de verdad de una expresión que es sintácticamente incorrecta.

- **F2-Dif**: Esta función corresponde a la identificación de una sintaxis incorrecta para una expresión dada y su oportuna rectificación para la obtención de una expresión bien formada. Se presenta como de un mayor grado de dificultad, pues su aparición se observa en el último o anteúltimo de los casos. La dificultad puede radicar en el hecho de que en algunos casos intervienen las funciones semióticas relativas a la sintaxis de dos símbolos distintos–una para la detección del error y otra para la reescritura– o bien que la función semiótica correspondiente a la sintaxis debe ser utilizada dos veces, una para la tarea de lectura en la que se detecte el error y otra para la tarea de escritura en la que se reformula la expresión para convertirla en bien formada.

- **F$_t$**: Esta función semiótica, correspondiente al tratamiento en el registro coloquial, aparece como la de mayor dificultad para los estudiantes, pues en todos los casos y en ambas versiones del instrumento, se manifiesta en el último grupo de las particiones. Si bien la función semiótica no está directamente asociada a los símbolos, tiene estrecha relación con la dimensión semántica, pues sería la que más se asemeja a las expresiones utilizadas en el lenguaje oral y en la forma en que se desarrolla el discurso interno en el pensamiento de un individuo. Esto la liga a la compresión del contenido semántico de la expresión y, por ende, a la compresión que el estudiante tiene de una expresión simbólica que lee, ya sea en materiales de cátedra o en la bibliografía en general.

5.7. NIVELES EN LA COSNTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DE LOS SÍMBOLOS EN ESTUDIO

A partir de la secuencia en que se van manifestando las funciones semióticas consideradas, se observó que algunas de ellas aparecen manifiestas en los mismos grupos de cada una de las particiones efectuadas, correspondientes a los distintos símbolos en estudio. Esto condujo a la idea de agruparlas entre sí, dando lugar a niveles en la evolución de la construcción de significado, cada uno de los cuales estaría caracterizado por las funciones semióticas que se manifiestan en él.

5.7.1. DEFINICIÓN DE LOS NIVELES

Se observó que las funciones nominal, sintáctica de reconocimiento de una expresión correcta y las conversiones hacia el registro coloquial (F1, F2-Fác y F_{sc}, respectivamente) se manifiestan, en todos los casos, en el grupo 1 o en el grupo 2. Por lo tanto estas funciones podrían agruparse en el primer nivel y caracterizarlo.

Las funciones que tienen relación con los aspectos sintáctico y semántico, pero en un grado de dificultad intermedio, aparecen en los grupos medios de las particiones, nunca en los primeros y nunca en el último. Estas funciones semióticas corresponden a la tarea de escribir una expresión sintácticamente correcta, ya sea generada por el propio sujeto o a través de la conversión de una expresión dada (F2-Ejem y F_{cs}, respectivamente), y a la tarea de determinar el valor de verdad, nuevamente de una expresión simbólica generada por el propio sujeto o a través de la conversión de una expresión dada (F3-Ejem y F3-v/f, respectivamente). Estas funciones semióticas caracterizarían un manejo intermedio de los aspectos sintáctico y semántico, y pueden agruparse constituyendo un segundo nivel.

Finalmente, deben considerarse las funciones semióticas correspondientes a tareas ligadas a lo sintáctico y a lo semántico, pero de mayor nivel de dificultad. Éstas son las asociadas a la detección de errores sintácticos en una expresión simbólica, con su correspondiente reformulación, y la transformación de una expresión coloquial obtenida símbolo a símbolo en una que exprese la idea global que representa una expresión simbólica dada (F2-Dif y F_t, respectivamente). Estas funciones semióticas se observan como manifestadas en el último grupo de cada una de las particiones efectuadas. Por lo que pueden caracterizar un tercer nivel.

En la Figura 5.17 se presenta un esquema de la forma en que se considera agrupar las funciones semióticas definidas en la investigación, para dar lugar a la definición de niveles en el proceso de construcción de significado de los símbolos matemáticos en estudio. En dicha Figura, las funciones semióticas aparecen encolumnadas según la secuenciación que se describió en la Sección anterior.

- F1
- F2-Fác
- Fsc

NIVEL 1

- Fcs
- F2-Ejem
- F3-Ejem
- F3-v/f

NIVEL 2

- F2-Dif
- F_t

NIVEL 3

Figura 5.17. Definición de niveles en el proceso de construcción de significado de los símbolos en estudio a partir de las funciones semióticas

Las funciones semióticas que se agrupan en cada nivel le confieren a éste su caracterización. Debe tenerse presente que estos niveles son particulares a cada símbolo y no relativos a un proceso de simbolización general. Esto se debe a que el proceso que se describe para cada símbolo no necesariamente es sincrónico para todos los símbolos. Más aún, la construcción de significado de algunos símbolos requiere la construcción previa de otros, como por ejemplo los cuantificadores que requieren tener construido el significado del símbolo de pertenencia. Además, la evolución en la construcción de significado estará ligada a cantidad y variedad de prácticas matemáticas que se desarrollen con relación a ese símbolo, que no necesariamente tiene que ser idéntico para todos los símbolos. Por ejemplo, en secciones anteriores a este Capítulo se ha manifestado que el símbolo de inclusión es el menos conocido por la mayoría de los estudiantes de las distintas carreras. Esto se condice con el hecho de que, entre los símbolos en estudio, es el de menor aparición en los materiales didácticos utilizados por las cátedras, pues no se desarrollan demasiados contenidos en lo que aparezca la necesidad de uso del mismo. Por lo tanto, las prácticas matemáticas que se realizan con relación a este símbolo son escasas y en consecuencia, la construcción de su significado es menos evolucionada que la de otros símbolos estudiados.

Los estudiantes que se encuentren el *Nivel 1* tienen construido un significado parcial básico del símbolo, pues demuestran un manejo elemental. Lo conocen, pero el uso que hacen del mismo es semejante a un proceso de codificación y decodificación. El reconocimiento de la adecuación de una expresión correctamente formulada no aporta demasiada información, al menos en la forma en que está planteado el Ejercicio 2 del instrumento; la presencia de este tipo de expresiones es necesaria para darle sentido a las que no están correctamente formuladas, como se explicó en el Capítulo 4. Por lo tanto, no podría afirmarse que estos estudiantes presenten habilidades en relación a la sintaxis del símbolo.

En el *Nivel 2* ya se manifiestan construidos aspectos sintácticos y semánticos del significado del símbolo. Los estudiantes que se ubican en este nivel son capaces de realizan tareas de escritura de expresiones simbólicas con una adecuada sintaxis, ya sea a partir de una expresión coloquial dada o una expresión generada por ellos mismos. También pueden establecer el valor de verdad, de una expresión propia o de una dada, justificando en este último caso su decisión.

Los estudiantes que se ubican en el *Nivel 3* presentan un mejor manejo tanto de los aspectos sintácticos como de los semánticos, con relación al símbolo. Manifiestan la habilidad de reconocer errores sintácticos y la de hacer las modificaciones necesarias para que una expresión resulte bien formada. También presentan una mejor comprensión semántica, pues son capaces de expresar el contenido matemático de una expresión simbólica a través de una oración coloquial que, por ejemplo, podría utilizarse para comunicar dicho contenido a otra persona.

5.7.2. DISTRIBUCIÓN DE LOS ESTUDIANTES EN CADA NIVEL

Para determinar en qué nivel se ubica un estudiante, en cada uno de los símbolos en estudio, se consideró que manifestara al menos el 70% de las funciones semióticas que constituyen el nivel. Caso contrario, el estudiante no tiene consolidado el nivel.

Para cada estudiante se realizó el cálculo del porcentaje de funciones semióticas manifestadas correspondientes a cada uno de los niveles, clasificándolo en el nivel más alto logrado. Por ejemplo, si un estudiante muestra consolidados el nivel 1 y el nivel 2 (esto es, al menos el 70% de las funciones semióticas de cada nivel) pero no el nivel 3, se lo clasifica en el nivel 2, para ese símbolo.

Esta clasificación se realizó a través de una planilla de cálculo de *Excel*, y los resultados obtenidos por los 90 estudiantes de la muestra se exponen en el Anexo 6. Como resumen de estos datos, en la Tabla 5.37 se presentan los porcentajes totales de estudiantes en cada nivel, para cada uno de los símbolos. En la Tabla se considera un nivel 0, que corresponde a los casos en los que el estudiante no manifiesta ni siquiera el 70% de las funciones semióticas del nivel 1, con lo que podría decirse que prácticamente no conoce el símbolo en cuestión.

Tabla 5.37. Porcentajes totales de la distribución de estudiantes en cada nivel para cada uno de los símbolos.

Símbolo / Nivel	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$
Nivel 0	0	37	7	3	2	3
Nivel 1	5	23	42	44	60	71
Nivel 2	43	10	30	27	27	17
Nivel 3	52	30	21	26	11	9

Realizando una lectura a las columnas de la Tabla 5.37, es decir por símbolo, pueden establecerse algunas similitudes o diferencias entre ellos.

El símbolo de pertenencia es el que aparece con mayor grado de construcción de significado por parte de los estudiantes que componen la muestra, pues más de la mitad se encuentra en el nivel 3 y, en general, la gran mayoría se ubica entre los niveles 2 y 3. El caso opuesto es el del símbolo de inclusión, para el que se observa que más de la tercera parte no llega ni siquiera al nivel de conocer el símbolo.

Los dos cuantificadores tienen una distribución similar de los porcentajes en cada nivel, donde poco más de la mitad de los estudiantes se encuentra entre los dos niveles superiores. No obstante, debe hacerse la salvedad de que no necesariamente coinciden los estudiantes que se ubican en cada nivel. A partir de los datos del Anexo 6, se registró que el 38% de los estudiantes no se encuentra en el mismo nivel de construcción de significado para ambos cuantificadores. Esto abona la idea, ya observada en secciones anteriores, de que la construcción de significado de cada cuantificador se realiza por separado, por lo que serían independientes entre sí y, a su vez, revoca la suposición que podría postularse a priori, en relación a que la similitud entre la sintaxis de ambos cuantificadores como así también la semejanza en la necesidad de uso de cada uno de ellos, conducirían a una construcción de significado conjunta.

Finalmente, los símbolos correspondientes a la conjunción y a la disyunción también presentan una distribución de porcentajes similares en todos los niveles considerados. En este caso se observa que, si bien no aparecen como símbolos desconocidos por los estudiantes, la mayoría de ellos tiene construido un significado elemental de estos símbolos, pues son altos los porcentajes de estudiantes que se ubican en el nivel 1. Para estos dos símbolos también se calculó el porcentaje de estudiantes que no se ubican en el mismo nivel para cada uno de estos ellos y, nuevamente, es el 38%. Es decir que la construcción de significado de estos dos símbolos también podría considerarse como independiente.

Si se efectúa una lectura por fila de la Tabla 5.37, se observa que en cada nivel los porcentajes son muy disímiles entre los distintos símbolos. Esto ratifica la idea de que no podría darse una categorización general del nivel de construcción de significado de símbolos.

En la Tabla 5.38 se presenta la distribución de estudiantes discriminados por carrera, para cada nivel de los seis símbolos. Los porcentajes fueron calculados sobre el total de estudiantes de la carrera que componen la muestra y están vertidos en la Tabla 5.38, mostrando las características generales mencionadas a partir de lo registrado en general en la Tabla 5.37. No obstante, la discriminación de los porcentajes por carrera permite la detección de algunos detalles particulares a cada carrera.

Debe considerarse que, dado que la proporción de estudiantes de cada carrera que componen la muestra no es la misma en todos los casos, las observaciones que se realizan a partir de los porcentajes calculados no llevan a una generalización. Por consiguiente, los análisis que se detallan a continuación sólo tienen alcance sobre los datos relevados.

Tabla 5.38. Porcentajes de la distribución de estudiantes por niveles discriminados por carreras, para cada uno de los símbolos

Símbolo	***Nivel***	**Ingeniería**	**Biología**	**Matemática**	**Bioquímica**	**Características observadas**
$\in$	*0*	0	0	0	0	Este símbolo es el único que se presenta como conocido por todos los estudiantes. La gran mayoría de los estudiantes manifiesta construido el significado de este símbolo en un nivel medio o alto, destacándose el muy alto porcentaje de estudiantes de la carrera de Matemática que se encuentran en el nivel 3.
	1	5	10	6	0	
	2	58	70	6	29	
	3	37	20	88	71	
$\subset$	*0*	51	60	12	14	La mayoría de los estudiantes de Ingeniería se ubica entre no conocer el símbolo o tener un significado elemental construido. Esta misma situación se repite para la totalidad de los estudiantes del profesorado en Biología. En cambio, casi las tres cuartas partes de los estudiantes del profesorado en Matemática se ubica en el nivel 3 y más del 60% de los estudiantes de Bioquímica también tiene construido un nivel medio-alto para este símbolo, ubicándose en los niveles 2 y 3.
	1	21	40	19	24	
	2	12	0	0	19	
	3	16	0	69	43	
$\forall$	*0*	7	10	0	10	Entre estos dos símbolos la situación es similar, para las cuatro carreras. Los estudiantes de Ingeniería se distribuyen de manera semejante entre los distintos niveles, sin observarse una polarización. En cambio, la mayoría de los estudiantes de Biología y de Bioquímica se encuentran en un nivel básico de construcción de significado. Por su parte, las tres cuartas partes de los estudiantes de Matemática se ubican entre los niveles 2 y 3, mostrando una construcción de significado media-alta de este símbolo.
	1	35	70	25	57	
	2	30	10	56	19	
	3	28	10	19	14	
$\exists$	*0*	5	10	0	0	
	1	40	70	25	57	
	2	30	0	31	29	
	3	26	20	44	14	
$\wedge$	*0*	2	10	0	0	Para estos símbolos, la distribución de los porcentajes es similar entre ambos, para las cuatro carreras. La mayoría de los estudiantes de están aglutinados en el nivel 1. En el caso de los estudiantes de Matemática, son los de menor porcentaje en el nivel 1, y la mitad restante se ubica entre los niveles 2 y 3, aunque son los de mayor porcentaje en el nivel 3. El resto de las carreras ubica, en la mayoría de los casos, a una quinta parte de los estudiantes en el nivel 2.
	1	63	70	50	57	
	2	23	20	31	33	
	3	12	0	19	10	
$\vee$	*0*	0	10	0	10	
	1	74	70	56	76	
	2	21	20	19	5	
	3	5	0	25	10	

El porcentaje correspondiente a los estudiantes del Profesorado en Matemática es, para todos los símbolos, el más alto en el nivel 3. Además, salvo en el caso del símbolo de inclusión, no se observan estudiantes que estén en el nivel 0, lo que indica que no desconocen por completo el símbolo. En síntesis, son los que tienen, en general, el mayor nivel de construcción de significado, lo cual es esperable dado la especificad de la carrera.

En el extremo opuesto se encuentran los estudiantes de Biología, los cuales son los que muestran, para la mayoría de los símbolos estudiados, una construcción de significado apenas básica, concentrando la mayoría de los estudiantes en el nivel 1. Esto también podría ser considerado como previsible por el hecho de que, de entre las carreras en las que se relevaron datos, el contexto de los estudiantes de Biología hace que sean los que menos materias de Matemática cursan, y por consiguiente tienen menos ocasiones de llevar a cabo las prácticas matemáticas ligadas a la construcción de símbolos.

Los estudiantes de Ingeniería y de Bioquímica se encuentran en una posición intermedia. Tienen, para la mayoría de los símbolos, una mayor concentración de estudiantes en el nivel 1, aunque en todos los casos hay estudiantes que se ubican en los niveles 2 y 3.

5.8. CONSIDERACIONES FINALES DEL CAPÍTULO

En este Capítulo se presentaron los resultados de los datos relevados con cada una de las tres versiones del instrumento, los cuales fueron acompañados de los respectivos análisis.

Para la versión piloto, los análisis estuvieron centrados en los aspectos del instrumento que impusieron su modificación para la obtención de la segunda versión. Para esta última, se efectuó el análisis de la complejidad semiótica de los distintos ítems que componen el instrumento. Esto permitió el estudio de los errores que los estudiantes presentaron en cada caso, lo que también aporta a la comprensión del proceso de significación que los estudiantes llevan a cabo con los símbolos en estudio. También forma parte del estudio de esa construcción el análisis de las voces de los estudiantes, a través de las entrevistas efectuadas, lo que permitió conocer un poco más la interpretación que ellos hacen de distintos aspectos vinculados a los símbolos que se estudiaron. El análisis de los distintos ítems utilizando conjuntamente las configuraciones espitémicas/cognitivas y funciones semióticas permitió, no sólo dar cuenta de la complejidad semiótica que hasta la más simple de las tareas propuestas tiene, sino también observar regularidades en la participación de las distintas funciones semióticas consideradas. Esto último condujo a la construcción de un esquema que representa una trama general de funciones semióticas presente en las distintas tareas con expresiones simbólicas, el cual se presenta en el próximo capítulo.

Finalmente, para la versión 3 del instrumento se obtuvieron resultados cuantitativos, lo cuales resultaron muy similares a los obtenidos para la versión 2. Se realizó un estudio sistematizado de la manifestación de las funciones semióticas en los estudiantes para cada símbolo, lo que permitió hallar una secuencia en la que dichas funciones se presentan como establecidas. Se observó que la secuencia se reitera para cada uno de los símbolos estudiados. Esto permitió la definición y caracterización de niveles en el proceso de construcción de significado de los símbolos, y el análisis de la distribución de estudiantes en cada uno de ellos.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

6.1. CONSIDERACIONES GENERALES

A lo largo de esta investigación se siguieron diferentes procedimientos para lograr el objetivo de describir el proceso que realizan los estudiantes, ingresantes a carreras universitarias, para construir el significado de algunos símbolos matemáticos de uso habitual en las asignaturas del área Álgebra. En este Capítulo se presentan las conclusiones a las que se arribó luego de efectuar tres líneas de análisis. Las mismas comprenden el análisis de las respuestas que brindaron los estudiantes a tres versiones del instrumento, la interpretación de las entrevistas realizadas y el análisis semiótico de las expresiones simbólicas utilizadas.

Los análisis efectuados permitieron determinar que la construcción del significado de los símbolos estudiados no se realiza en forma conjunta ni simultánea, sino que se desarrolla de manera independiente para cada símbolo, aunque siguiendo un mismo patrón. Se describen en la Sección 6.2.

El análisis semiótico efectuado, utilizando conjuntamente las configuraciones de objetos primarios y las funciones semióticas definidas, permitió establecer una trama general de funciones semióticas presente en distintas tareas efectuadas con expresiones simbólicas. Esta trama se presenta en la Sección 6.3, con la descripción de la forma en que se vinculan los objetos primarios a través de las funciones semióticas.

Por otra parte, se describió la actividad cognitiva de conversión, en ambos sentidos entre el registro coloquial y el simbólico-algebraico, como una composición de funciones semióticas. Este análisis se sintetiza en la Sección 6.4, vinculando nociones de las dos teorías utilizadas como marco teórico.

El estudio detallado de la manifestación implícita de las funciones semióticas, por parte de los estudiantes en las resoluciones de las tareas que proponía el instrumento, permitió identificar una secuencia en la que éstas aparecen como establecidas para cada uno de los símbolos en estudio. La comparación de las secuencias permitió obtener la descripción de una secuenciación general de la manifestación de las funciones semióticas que están involucradas en la construcción del significado de un símbolo, la cual se detalla en la Sección 6.5.

En la Sección 6.6 se resumen las características de los niveles definidos como descriptores del proceso de construcción de significado de los símbolos que se estudiaron.

Finalmente, en las Secciones 6.7 y 6.8 se describen las dificultades a las que se enfrentó esta investigación y las perspectivas futuras, respectivamente.

6.2. LA CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DE CADA SÍMBOLO

A través de los análisis efectuados sobre los datos relevados con el instrumento y en las entrevistas, se observó que la evolución de la construcción de significado de cada uno de los símbolos estudiados es independiente de las respectivas construcciones de los restantes símbolos. Si bien todas guardan similitudes, también se han observado particularidades que se reúnen, a modo de conclusión, en esta sección.

El símbolo de *pertenencia* es, claramente, el más conocido por los estudiantes, tanto en su lectura como en su sintaxis y en la compresión de su contenido semántico, manifestado a través de la determinación del valor de verdad de expresiones que lo contienen. Esto podría deberse a que la simplicidad de su estructura sintáctica, a lo intuitivo de la idea que transmite y a que, en algunos casos, la construcción de su significado ya se había iniciado durante la escuela secundaria, tal como manifestaron algunos estudiantes durante las entrevistas. La idea intuitiva que prevalece en los estudiantes, con relación a este símbolo, es la de un 'objeto' como parte de una 'colección', que se infiere a través de las prácticas discursivas de los estudiantes en las entrevistas.

En el análisis semiótico de las expresiones atómicas que contienen este símbolo, se observa que las tareas de lectura y escritura de las expresiones no requieren de numerosas funciones semióticas auxiliares debido, precisamente, a la simplicidad de su estructura sintáctica.

Probablemente, estas sean las razones por las que no se detectaron errores recurrentes relacionados con la sintaxis del símbolo, salvo la confusión con el símbolo de inclusión que se presentó en algunas prácticas operativas y discursivas de algunos estudiantes. Además, las falencias que se observan en la determinación del valor de verdad no están vinculadas al símbolo de pertenencia en sí mismo, sino que provienen de la incorrecta construcción de significado de algunos conjuntos numéricos.

También se observó que todos los estudiantes asocian el símbolo de pertenencia con alguna forma del verbo 'ser', que es de uso frecuente en el lenguaje oral. Por ejemplo, todos los alumnos pudieron convertir la expresión '*4 es un número natural*' dada en el registro coloquial a la expresión simbólica '$4 \in N$'. Esta asociación no es tan frecuente en el sentido contrario de la conversión, salvo en los casos en los que el estudiante aplica un tratamiento posterior. Más allá de estas distinciones, todos los estudiantes habían identificado el símbolo con el vocablo 'pertenece' al solicitarles que indicaran cómo se lee. Estas observaciones conducen a formular un interrogante que queda abierto, con relación a la posibilidad de que el estudiante tenga establecida una segunda versión de la función semiótica F1, la cual utiliza según el caso, o bien se produce porque efectúa antes de la conversión un tratamiento en el registro coloquial que transforma la forma del verbo 'ser' en 'pertenece'.

El símbolo de *inclusión* es, en contraposición con el de pertenencia, el menos conocido por los estudiantes, y su significado es el que se observa como de construcción más deficiente. Esto podría deberse a que, de todos los símbolos estudiados para esta investigación, es el que tiene un menor uso en las asignaturas que cursan los estudiantes de las distintas carreras que conformaron la muestra.

Es notable que casi la mitad de los alumnos no conoce la denominación coloquial. Se observó que algunos estudiantes leen este símbolo como 'incluye', atribuyéndole la denominación coloquial del símbolo invertido (⊃). Este último no es utilizado en las asignaturas que cursan los alumnos, por lo que la incorrecta asignación de la función semiótica nominal podría deberse a alguna lectura hecha en sentido inverso (de derecha a izquierda) expresada en prácticas discursivas docentes durante las clases. La lectura invertida no sólo es posible de ser efectuada sino que pudo haber sido utilizada al momento de describir el símbolo, como una característica de la 'reversibilidad' que admite en su lectura, proveniente del tipo de relación que representa. Por ejemplo, ante la expresión 'N⊂Z', algún docente o estudiante podría haber expresado que está indicando que '*N "está incluido" en Z*' y por consiguiente que '*Z "incluye" a N*'.

Los estudiantes que leen el símbolo de esta manera, construyen ejemplos de uso del símbolo donde se advierten fallas en el valor de verdad y no en la sintaxis. Por esta razón, la incorrecta construcción de la función semiótica nominal estaría incidiendo directamente sobre la función semiótica relativa al contenido semántico y no sobre la sintaxis. Esto último también se debe a la simetría de la sintaxis que corresponde al símbolo, pues es precedido y sucedido por un objeto que debe ser un conjunto.

Con relación al análisis semiótico de las expresiones atómicas que involucran al símbolo, tampoco se presenta una gran cantidad de funciones auxiliares que deban ser establecidas previamente. No obstante, la argumentación necesaria para establecer el valor de verdad implica un proceso de generalización que, en el caso de conjuntos infinitos, requiere de un grado de abstracción mayor. Esto lo ubica, en relación con el símbolo de pertenencia, en un símbolo de mayor complejidad en tanto su construcción de significado demanda de otros procesos cognitivos.

En las descripciones que los estudiantes efectuaron durante las entrevistas, con relación al modo en que lo explicarían a personas que desconocen el símbolo, ninguno de ellos acudió a alguna forma que refiera a la definición de inclusión de conjuntos, sino que dan una explicación de la manera en que debe utilizarse o a la situación en que debe emplearse.

En varios casos se ha observado la confusión que los estudiantes manifiestan entre el símbolo de pertenencia y el de inclusión. Como se ha planteado anteriormente, esta confusión podría provenir de la semejanza que las expresiones "pertenecer" y "estar incluido" poseen en el lenguaje coloquial, en el sentido de formar parte de algo. La similitud coloquial entre ambas expresiones es lo que prevalece por sobre la sintaxis específica de cada símbolo que determina las condiciones de sus respectivos usos. Otra explicación a esta confusión, también con origen en el lenguaje coloquial, es la que refieren Klimovsky y Boido (2005), quienes la adjudican al uso de la palabra “es” para expresar coloquialmente ambos símbolos, siendo la polisemia del vocablo “es” lo que provoca la distorsión en el significado de estos símbolos:

> Cabe señalar que el lenguaje ordinario puede llevar a confusiones, porque la relación entre un individuo y el conjunto al que pertenece se expresa con frecuencia por medio de la partícula *es* y entonces se dice: “Sócrates es griego”. Con ello se quiere señalar que Sócrates (el individuo s) tiene la propiedad de ser griego, y que por consiguiente es un elemento del conjunto de los griegos (G). Se trata de la relación de pertenencia $s \in G$. Pero cuando decimos genéricamente “el tucumano es mortal”, lo que estamos afirmando es algo distinto: que el conjunto de los tucumanos (T) es *parte* del conjunto de los mortales (M); se trata de una relación de inclusión: $T \subset M$. La partícula *es* del lenguaje ordinario tiene una cierta polisemia, y es necesario distinguir el significado de *es* como pertenencia de un individuo a un conjunto y de *es* como relación de inclusión entre conjuntos. (Klimovsky y Boido, 2005, p. 197)

Con relación a los *cuantificadores*, también puede decirse que son símbolos ampliamente conocidos por los estudiantes, tanto en su denominación coloquial como en la situación en que corresponde utilizarlos. Durante las entrevistas, los estudiantes manifestaron conocer la situación de uso de cada cuantificador. Sin embargo, se observan numerosas dificultades en la construcción de su sintaxis. Si se considera la complejidad semiótica de las tareas que los involucran, éstas aparecen como de un nivel más elevado, puesto que requieren de diversas funciones semióticas auxiliares que deben estar previamente establecidas.

Otro factor que parece incidir en esta dificultad de construir su aspecto sintáctico es el abuso notacional que se realiza con su uso. En relación con el cuantificador universal, la aceptación en el ámbito de la Matemática de su uso tácito, como así también de su ubicación posterior a la función proposicional. Esta última forma de notación, en la que se invierte el orden entre la función proposicional y la cuantificación, parece “romper” la unidad de la expresión como un todo. La situación no se observa en el cuantificador existencial, pues no es utilizado colocándolo después de la función proposicional. Esto provoca que algunos alumnos consideren como completas y verdaderas expresiones del tipo ‘ $\forall x \in R$’

En el caso del cuantificador existencial, es frecuente observar su uso como mero reemplazo de la palabra “existe”. Por ejemplo, cuando en Cálculo o Análisis Matemático se lo utiliza para afirmar la existencia del límite funcional o de la derivada de una función y se formulan expresiones del tipo '$\exists \lim_{x \to c} f(x)$'. Esto termina generando en los estudiantes el hábito de un uso coloquial del símbolo.

Algunos de los estudiantes entrevistados manifiestan expresamente conocer la estructura sintáctica, aludiendo a la función proposicional como 'la regla' o 'la condición'.

Las similitudes entre las estructuras sintácticas de ambos símbolos como así también en la necesidad de su uso podrían llevar a suponer que la construcción de su significado podría ser simultánea y producirse conjuntamente. Sin embargo, el análisis de los datos relevados ha mostrado que esto no es así, pues algunos estudiantes manifiestan haber construido el significado del cuantificador universal pero no del existencial, y otros la situación inversa. Tampoco puede suponerse que la construcción de significado de uno de ellos es necesariamente previa a la del otro.

Tanto de las prácticas operativas como de las discursivas de los estudiantes se relevaron datos que permitieron efectuar algunas observaciones en las respuestas dadas a expresiones cuantificadas que son formuladas según el uso habitual en Matemática ('$\forall x \in A\ P(x)$' y '$\exists x \in A /\ P(x)$') o siguiendo las reglas de la Lógica formal ('$\forall x\ (x \in A \Rightarrow P(x))$' y '$\exists x\ (x \in A \wedge P(x))$'). Con relación a las interpretaciones que los estudiantes realizan de estas dos formas de escritura, puede decirse que la cantidad de resoluciones correctas en conversiones de las expresiones dadas según la forma de la Lógica es levemente menor que las registradas como correctas según el uso habitual en Matemática.

Son pocos los estudiantes que realizan tratamientos en el lenguaje coloquial con posterioridad a la conversión. También es menor la cantidad de estudiantes que lo hace para las expresiones formuladas según las reglas de la lógica formal. Esta dificultad se confirma durante las entrevistas, donde más de un tercio de los estudiantes entrevistados admitió desconocer la forma de escritura o no la reconocían como equivalente a la forma de uso habitual en Matemática. Sin embargo, estos estudiantes efectuaron una conversión SaS en sus prácticas operativas ante las tareas que proponía el instrumento. Esto conduce a pensar que la conversión la habían realizado como una simple decodificación, sin comprender el contenido de la expresión. Una vez más se observa que los modos de uso que se emplean en el aula para estos símbolos, parecen prevalecer en la construcción de significado que realizan los estudiantes por sobre los formalismos que pueden observarse, por ejemplo, en la bibliografía.

Con respecto al uso tácito del cuantificador universal, sólo la mitad de los estudiantes entrevistados lo interpretaron como una generalización. Los demás consideran que la ausencia de cuantificador es simplemente un error o que equivale a un cuantificador existencial. Esta forma difundida de uso entre los estudiantes lleva a pensar que podría inducir a una mala interpretación de los enunciados. La arbitrariedad en el uso del cuantificador, proveniente de una convención, debería ser explicitada a los estudiantes. Sin embargo, también se observó que esta situación es menos conflictiva en enunciados formulados de manera coloquial, en los que hay una idea tácita que generaliza la expresión, como por ejemplo 'Los números naturales son positivos'. En los casos estudiados, prácticamente la totalidad de los estudiantes asocia un cuantificador universal con la simbolización de este tipo de expresiones. Es decir, el proceso cognitivo de generalización implicado resulta más evidente en el registro coloquial y luego es trasladado el registro simbólico.

Para ambos cuantificadores, ante una expresión simbólica dada, todos los estudiantes entrevistados reconocieron como equivalente, la expresión coloquial resultante de su conversión SaS, aunque la misma no es la forma utilizada en las prácticas discursivas. Esto conduce a pensar que es el modo que les resulta más natural o al menos la primera que aparece en los estudiantes. La observación se condice con el hecho de que las funciones semióticas ligadas al tratamiento en el registro coloquial aparecen manifiestas después que las correspondientes a las conversiones del registro simbólico-algebraico al coloquial.

Durante las entrevistas, también se percibió que la forma de conversión SaS es la que aparece en la primera intención de la mayoría de los estudiantes, aún al realizar la formulación coloquial de manera oral. Sólo un tercio de los estudiantes entrevistados pudo formular una expresión global o mixta, en el medio oral, en los intentos posteriores. Algunos de ellos, no logran suponer una expresión oral que un docente podría haber formulado al escribir una determinada expresión simbólica cuantificada, y sólo permanecen en la conversión SaS en los sucesivos intentos. Casi todos los estudiantes admiten que los docentes no hablan así, es decir, diciendo cada símbolo por separado (conversión SaS), pero aceptan su propia imposibilidad de manifestarlo de otra manera. Las prácticas discursivas en el medio oral no difirieron de las del medio escrito. Tanto los estudiantes que oralmente lograron expresarse con una oración global como los que no pudieron salir de las expresiones SaS, mantuvieron la forma de realizar este tipo de conversiones, efectuadas anteriormente por escrito.

Todas estas observaciones conducen a repensar sobre lo que comprenden los estudiantes de las notas que han tomado en clase cuando copian del pizarrón o al leer la bibliografía de la asignatura, dado que sólo pueden realizar una lectura SaS de las expresiones. Como consecuencia de estas observaciones, aparece por un lado la necesidad de formar a los estudiantes de manera específica en la manipulación de símbolos, de modo que la construcción de significado que incluye todas estas prácticas, se realice de una manera apropiada al momento de utilizarlos para la representación de los objetos matemáticos propios de la Matemática. Por otro lado, es necesario que los docentes tomen conciencia de las dificultades que ocasiona que los alumnos comprendan el significado de los objetos matemáticos, si los mismos tienen un fuerte anclaje en representaciones simbólicas.

Uno de los errores más frecuentes que se observa en la formulación de expresiones cuantificadas es la ausencia del conjunto de referencia. Esta omisión se detecta en la formulación de una expresión como ejemplo de uso y también en las conversiones que van del registro coloquial al registro simbólico-algebraico. La mayoría de los estudiantes entrevistados no mencionan el conjunto en el que toma valores la variable cuando explican el uso de los cuantificadores a otro sujeto que no los conoce. Sin embargo, la totalidad de estos estudiantes determinó que no eran equivalentes dos expresiones cuantificadas, aparentemente similares entre sí, donde en una de ellas se había eliminado el conjunto de referencia. Es indica que, si bien la mayoría de los estudiantes reconoce la necesidad de explicitar el conjunto en que toma valores la variable, no todos lo consideran como indispensable para que la expresión esté correctamente formulada. La omisión podría provenir de otra costumbre notacional que tiene lugar durante las clases de Matemática, la cual lleva a no aclarar el conjunto de referencia pues se considera que está dado por el contexto, con lo cual se sobreentiende en qué conjunto toma valores la variable. Puede ser que en los estudiantes se haya fijado esa costumbre y que no les resulte "incompleta" una expresión cuantificada que no posea un conjunto de referencia.

El uso del cuantificador universal al final de una proposición, como suele verse en algunas prácticas operativas habituales de Matemática, "rompe" la unidad de la expresión en la percepción que los estudiantes tienen de ella y podría ser la causa de que consideren que una expresión cuantificada bien formada es aquella en la que sólo aparece el cuantificador, la variable y el conjunto de referencia. Esto no se observa con el cuantificador existencial pues no es costumbre utilizarlo en esta forma. La mayoría de los estudiantes entrevistados reconoció como equivalentes dos expresiones que contienen el cuantificador universal y en las que se había invertido el orden, colocándolo ya sea al principio o al final de la función proposicional. Sin embargo, esto no indicaría que están percibiendo a cada una de ellas como una unidad. Los pocos estudiantes que no consideraron estas expresiones como equivalentes argumentaron razones de uso, explicando que nunca habían visto esta forma de escritura. Esto conduce, una vez más, a la idea de que las prácticas desarrolladas en el aula, con relación a los símbolos, son la fuente primaria y casi única en algunos casos, de la construcción del significado de los símbolos.

Para los símbolos de *conjunción* y de *disyunción* se observó que sus respectivas denominaciones en el lenguaje coloquial son conocidas por la mayoría de los estudiantes. Sin embargo, no sucede lo mismo con la sintaxis y la determinación del valor de verdad de expresiones que los contienen. Muchos de los estudiantes entrevistados refieren haber tenido formación específica con relación a la asignación del valor de verdad de expresiones que los involucran, pues dicen recordar que en las clases se trabajó con las tablas de verdad, aunque no las recuerdan. Es decir, que resultó ser un contenido del que no se produjo un aprendizaje real, pues quedó anclado a ese momento de enseñanza y no lo pueden extrapolar a otras situaciones ni tampoco recordarlo con precisión.

En otros estudiantes la situación es más desfavorable, pues recuerdan la existencia de las tablas de verdad pero consideran que el uso de uno u otro símbolo está en dependencia del valor de verdad de las proposiciones intervinientes. Esto se observa, por ejemplo, en los estudiantes que manifestaron durante las entrevistas que si las dos proposiciones son verdaderas "corresponde" utilizar la conjunción mientras que si una es verdadera y la otra falsa, entonces "corresponde" usar la disyunción. Tal es la fuerza de esta creencia que incide en la construcción de la función semiótica de la sintaxis, pues consideran que una disyunción de dos proposiciones verdaderas no es sintácticamente correcta. Esta apreciación se confirmó a partir de la modificación introducida en el instrumento para determinar si una expresión dada es sintácticamente correcta, pues se propuso una conjunción de dos proposiciones verdaderas donde la mitad de los estudiantes determinaron que la expresión no está correctamente formulada y la reescribieron utilizando una conjunción.

Otra cuestión frecuentemente observada con relación a estos símbolos es el uso que le dan los estudiantes en prácticas discursivas cuando utilizan los operadores lógicos como un simple reemplazo de los vocablos ‘y’ y ‘o’.

6.3. DESCRIPCIÓN DE CONVERSIONES EN TÉRMINOS DE FUNCIONES SEMIÓTICAS

En el Capítulo 4 se describieron las conversiones entre los registros simbólico-algebraico y coloquial como la composición de funciones semióticas, lo cual es un producto relevante que aporta esta investigación, pues establece una vinculación entre los dos marcos teóricos utilizados (Enfoque Ontosemiótico, de Godino y colaboradores, y Teoría de Registros Semióticos, de Duval) y permite explicar procesos que acontecen en un sujeto cuando opera con algunos símbolos.

Las conversiones que tienen al registro simbólico-algebraico como registro de partida fueron descritas como la composición de las funciones semióticas nominales (F1) de cada uno de los símbolos que forman parte de la expresión simbólica. Esa composición da lugar a una conversión de las que se ha denominado SaS, en las que se expresa en lenguaje coloquial la secuencia de símbolos que constituyen la expresión a transformar. Para obtener una expresión que tenga la forma de una expresión en lenguaje oral, con la que se manifieste la idea global del contenido semántico de la expresión simbólica de partida, es necesario aplicar una segunda transformación. Esta transformación es un tratamiento en el registro coloquial, que se describe mediante una función semiótica que asocia dos expresiones coloquiales.

Para describir las conversiones en el sentido contrario (aquellas que tienen como registro de partida al registro coloquial) es necesario utilizar dos tipos de funciones semióticas de las definidas en esta investigación. En principio, intervendrían las funciones semióticas nominales (F1) –las cuales fueron definidas como biunívocas, con lo cual tiene sentido aplicarlas en ambos sentidos de la asociación entre el símbolo y el vocablo asociado– para transformar en símbolos algunos de los vocablos de la expresión coloquial. Luego, interviene la función semiótica relativa a la sintaxis (F2) correspondiente a los símbolos participantes, para obtener una expresión bien formada en el registro simbólico-algebraico.

Es conocido que las conversiones entre los mismos registros pero en sentidos inversos no siempre poseen el mismo grado de dificultad (Duval, 2004). En esta investigación se ha observado que las conversiones que van del registro coloquial al simbólico-algebraico son las que presentan mayores dificultades para los estudiantes. Este mayor grado de complejidad podría ser explicado, en este caso, a través de las funciones semióticas que participan en cada una de las conversiones.

Las conversiones que tienen al registro simbólico-algebraico como registro de llegada requieren de la función semiótica correspondiente a la sintaxis que se manifiesta como establecida después que la función nominal. Además, la representación simbólica obtenida en la conversión resulta, en general, no congruente con la representación coloquial, lo que le confiere un mayor grado de dificultad, según Duval (2004, 2006). En cambio, la conversión hacia el registro coloquial, particularmente si se realiza símbolo a símbolo, puede ser efectuada sólo con la decodificación de cada símbolo, aunque no garantiza la comprensión del contenido semántico de la expresión.

6.4. LA TRAMA GENERAL DE FUNCIONES SEMIÓTICAS

En las Secciones 5.3.1 y 5.3.2 se presentó el análisis semiótico de la resolución de las tareas propuestas en los Ejercicios 1 y 2 del instrumento, utilizando en forma conjunta configuraciones de objetos de primer orden y funciones semióticas. De estas últimas, se incluyeron representaron las funciones semióticas *principales* y algunas de las consideradas como auxiliares, pues no están directamente relacionadas con el símbolo en estudio pero que inciden en algún aspecto de la tarea a realizar.

La observación de los esquemas resultantes de esta combinación de herramientas de análisis permitió detectar características invariantes en cada uno de ellos, aún para el estudio de símbolos distintos.

Así, por ejemplo, si la situación problema está constituida por la lectura de una expresión simbólica, las funciones semióticas que participan en esta tarea son, en principio, las que permiten la asociación de cada símbolo con su vocablo. Luego, la observación de la ubicación de cada símbolo en la expresión, con el correspondiente rol que juega en la misma, permitiría construir una expresión coloquial que se corresponda con la expresión simbólica, a través de una conversión y, eventualmente, un tratamiento. Si la lectura es efectuada para detectar la adecuación de la sintaxis, a la asociación de los vocablos a los símbolos y la observación de su disposición en la expresión, con los correspondientes roles, se le agrega la constatación de la regla de sintaxis para detectar o descartar posible.

Si la situación problema es la escritura de una expresión simbólica, ya sea a partir de una expresión coloquial dada o de una que genera mentalmente el sujeto, las funciones semióticas que participan son las que corresponden a la asociación de los vocablos con los símbolos y la regla o reglas de sintaxis correspondientes a los símbolos que intervienen, además de las funciones semióticas ligadas a la argumentación, necesarias para obtener una expresión simbólica bien formada.

Si la situación problema es la determinación del valor de verdad de una proposición simbólica, participan las funciones semióticas correspondientes a la identificación de los símbolos que conforman la expresión, la función semiótica que permite asociar el valor de verdad y las correspondientes a la argumentación que fundamente la decisión del valor de verdad otorgado.

La generalización de esas características, que se reiteran en el estudio de la complejidad semiótica de cada símbolo, condujo a la obtención de una trama general de las funciones semióticas intervinientes en las distintas tareas con expresiones simbólicas, la cual está representada en el esquema de la Figura 6.1.

La obtención de esta trama da cuenta de una aplicación concreta del este concepto planteado en el marco del EOS (Godino, 2003; Font, Godino y D'Amore, 2007; Godino 2015), en la que se pone de manifiesto los tipos de vinculaciones que intervienen en el proceso de construcción de significado de los símbolos matemáticos estudiados, y es otro aporte que realiza la investigación llevada a cabo.

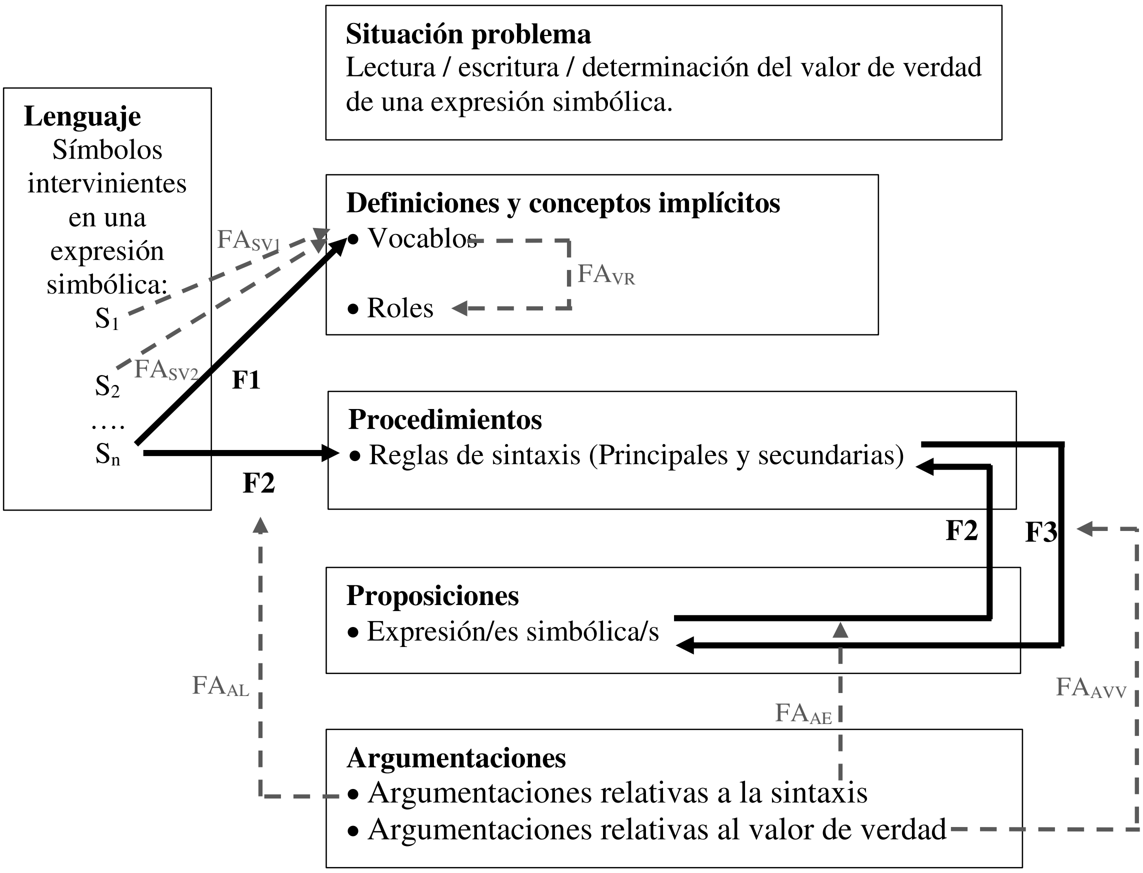


Figura 6.1. Trama general de funciones semióticas intervinientes en tareas con expresiones simbólicas

La trama general de funciones semióticas planteada muestra de qué manera se vinculan las funciones semióticas entre sí y cómo se establecen las relaciones entre los objetos primarios que conforman la configuración de tareas que involucran expresiones simbólicas. Esas relaciones entre los objetos primarios están en consonancia con lo planteado por el EOS, en forma teórica y general, y tal como se representa en la Figura 2.2 del Capítulo 2.

Las tareas concernientes a expresiones simbólicas, que se esquematizan de manera conjunta en la Figura 6.1, son la lectura, la escritura y/o la determinación del valor de verdad, que se constituyen en la *Situación problema*.

En el *Lenguaje* se consideran todos los símbolos (S_1, S_2, … , S_n) que intervienen en la expresión simbólica con la que se realiza la tarea. Cada uno de esos símbolos está vinculado a través de una función semiótica con su correspondiente vocablo en el lenguaje coloquial. Esas funciones semióticas son representadas por la función F1 (en el caso de los símbolos en estudio) y denominada FA_{SV} (Función semiótica Auxiliar de Símbolo a Vocablo) en el esquema. Estas últimas serían las equivalentes de la función F1 para cada uno de los restantes símbolo de la expresión. Este conjunto de funciones semióticas, que vinculan el *Lenguaje* con las *Definiciones y conceptos implícitos*, son las que hacen efectiva la relación que en el esquema de la Figura 2.2 está indicada como 'Expresa y soporta', en la flecha que se dirige del *Lenguaje* al conjunto de Reglas.

Dentro del objeto primario *Definiciones y conceptos implícitos* se establece una serie de funciones semióticas auxiliares, las cuales han sido generalizadas en el esquema como FA_{VR} (Función semiótica Auxiliar de Vocablo a Rol), que vinculan al vocablo correspondiente a cada símbolo con el rol que el símbolo desempeña en la expresión dada. El establecimiento de estas funciones semióticas auxiliares tiene incidencia sobre la función semiótica F2, correspondiente a la sintaxis, tanto en tareas de lectura como de escritura. Esto es así porque el rol que juega cada símbolo dentro de la expresión incide en su ubicación o posición dentro de la expresión, de acuerdo con la sintaxis correspondiente a los símbolos que forman parte de la misma.

La función semiótica F2 ligada a una tarea de lectura (particularmente en la que la lectura está destinada a la posterior determinación de la adecuación, o no, de la sintaxis), vincula al símbolo que pueda considerarse como principal con la regla de sintaxis que le corresponde. En los casos de expresiones de mayor complejidad, como por ejemplo aquellas que contienen un cuantificador, también estarían participando en esta tarea las funciones semióticas ligadas a la sintaxis de los restantes símbolos que intervienen en la expresión, aunque no se han marcado explícitamente en este esquema por una cuestión de otorgarle mayor legibilidad. Estas funciones semióticas vinculadas a la sintaxis en una tarea de lectura, también forman parte de la manera en que el *Lenguaje* 'Expresa y soporta' al conjunto de las *Reglas* representadas en el esquema de la Figura 2.2, en este caso vinculado con los *Procedimientos*.

La función semiótica F2 también participa en la tarea de escritura de una expresión simbólica, en este caso vinculando al símbolo –presente en la proposición simbólica formulada– con su correspondiente regla de sintaxis. Esto es necesario para obtener una expresión bien formada. En este caso, se establece una relación interna a la *Reglas*, las *Proposiciones* están vinculadas con los *Procedimientos*.

Por su parte, los *Procedimientos* están vinculados con las *Proposiciones* a través de la función semiótica F3, en la tarea de determinar el valor de verdad de una proposición, vinculando la sintaxis con el valor de verdad. Esta relación entre los objetos primarios también es interna a las *Reglas*, de acuerdo con el esquema de la Figura 2.2.

Finalmente, en las *Argumentaciones* se establecen las justificaciones correspondientes a la sintaxis y al valor de verdad. Dichas justificaciones constituyen el antecedente de las funciones semióticas auxiliares que fundamentan la adecuación de la sintaxis, en tareas de lectura o escritura, y la determinación del valor de verdad. Las argumentaciones relativas a la sintaxis constituyen el antecedente de las funciones denominadas en el esquema como FA_{AL} (Función semiótica Auxiliar de Argumentación en Lectura) y FA_{AE} (Función semiótica Auxiliar de Argumentación en Escritura). Las argumentaciones que fundamentan el valor de verdad conforman el antecedente de la función que aparece en el esquema como FA_{AVV} (Función semiótica Auxiliar de Argumentación a Valor de Verdad). Estas funciones semióticas auxiliares inciden directamente sobre las funciones semióticas principales F2 y F3, y constituyen las Justificaciones que en la Figura 2.2 se señalan en la flecha que va desde los *Argumentos* hacia la *Reglas*.

6.5. LA SECUENCIACIÓN DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS

Del análisis realizado a partir de los datos relevados se obtuvo una secuenciación en la manifestación de las funciones semióticas que intervienen en las tareas propuestas en los distintos ejercicios del instrumento. Esa secuencia se presenta, con cierta similitud, para todos los símbolos estudiados, lo que condujo a pensar que podría representar un orden en el establecimiento de las funciones semióticas que intervienen en el proceso de construcción de significado de los símbolos matemáticos. Dicha secuenciación u orden constituye una caracterización en el proceso de significación de estos símbolos y podría dar lugar a considerar niveles o etapas en la construcción de significado.

La secuenciación observada se presenta en la Tabla 6.1, con las características de cada una de las funciones intervinientes.

Tabla 6.1. Secuenciación de las funciones semióticas involucradas en la construcción de significado de un símbolo matemático.

Tipo de función semiótica	Características
Nominal, asociación biunívoca entre el símbolo y el vocablo (F1)	Es la más sencilla de todas las funciones y la primera en manifestarse en todos los casos. Esta característica podría llevar a considerarla como necesaria para la construcción de las restantes funciones semióticas ligadas al símbolo. No se observó ningún caso en el que el estudiante desconociera el vocablo con el que se denota al símbolo pero sí que fuera capaz de utilizarlo correctamente en alguna de las restantes tareas, manifestando tener construida otra función semiótica relativa a ese símbolo.
Reconocimiento de la adecuación de la sintaxis en una expresión que está correctamente formulada (F2-Fác)	Aparece a la par de la anterior o inmediatamente después. No requiere que el estudiante posea mucha seguridad en la estructura sintáctica pues la expresión está correctamente formulada. Esta sería la causa de su muy temprana manifestación. Como se anticipó al momento de definir esta tarea, la inclusión de expresiones correctamente formuladas no aporta demasiada información (al menos en la forma en que fue diseñado el correspondiente ejercicio en el instrumento) pero su presencia es necesaria para darle sentido a las expresiones que no están correctamente formuladas y cuya reescritura sí aporta información a esta investigación.
Conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial (Fsc)	Estas funciones semióticas requieren, básicamente, del efectivo establecimiento de las funciones semióticas nominales de cada uno de los símbolos intervinientes. Se la consideró como establecida aún en los casos en los que fuera realizada en la forma SaS. Los escasos requerimientos que presenta esta función semiótica, ligada a la actividad cognitiva de conversión, pueden ser la razón de su temprana aparición en la secuencia.
Conversión del registro coloquial al registro simbólico-algebraico (Fcs)	Las conversiones en este sentido aparecen manifestadas después que las conversiones en el sentido contrario. Esto podría deberse a que en este caso, además de las funciones nominales correspondientes a cada uno de los símbolos involucrados, intervienen funciones semióticas que corresponden a la sintaxis de los símbolos que participan de la expresión en el registro de llegada. El hecho de que tenga injerencia la sintaxis en el registro simbólico-algebraico le otorga a estas conversiones un grado de dificultad más alto. Sin embargo, esta función semiótica se manifiesta como construida antes que aquella en la que la expresión simbólica debe ser totalmente elaborada por el estudiante, partiendo de una idea que le es propia. Esto podría deberse a que el hecho de tener una expresión coloquial, ya dada, guía al estudiante en la formulación de la expresión simbólica. En

	este sentido, aunque la conversión no sea congruente, la expresión coloquial podría guiarlo en la selección de símbolos a utilizar.
Adecuación de la sintaxis de una expresión generada por el estudiante (F2-Ejem)	La formulación de una expresión simbólica por parte del estudiante se presenta como de un grado de dificultad mayor. Como en la función semiótica anterior, la cuestión sintáctica tiene una participación central. Sin embargo, en este caso el aumento de la dificultad podría deberse a que es el propio estudiante el que debe construir la expresión en el registro coloquial (probablemente en forma mental) y posteriormente efectuar también una conversión partiendo de la expresión coloquial que haya pensado, decidiendo qué símbolos requiere la expresión (dimensión pragmática) y la adecuación de la sintaxis con la que los combine en la expresión que escriba (dimensión sintáctica). Esta situación es la que se presenta cuando el estudiante escribe la resolución de un ejercicio. Si se piensa en una clase de álgebra, una de las primeras tareas que se le demanda al estudiante, es que resuelva ejercicios que implican escribir expresiones simbólicas, tales como son las demostraciones. Pero dado que las funciones semióticas que se requieren, como lo es ésta, se construyen de manera tardía en el proceso de significación, esas tareas resultan de gran dificultad para los estudiantes y podría ser la razón por la que cometen tantos errores al expresar sus ideas en las resoluciones.
Determinación del valor de verdad de una expresión generada por el estudiante (F3-Ejem)	Esta función semiótica se manifiesta al mismo tiempo que la correspondiente a la sintaxis o inmediatamente después. Esto podría deberse a que no es posible analizar la manifestación de la determinación del valor de verdad de una expresión que no está correctamente formulada. Esa también podría ser la razón por la que se manifiesta después que la función semiótica correspondiente a la determinación del valor de verdad de una expresión ya dada. Es decir que en este caso, la aparición más tardía no tendría directa relación con el hecho de que se realiza sobre una expresión formulada por el propio estudiante sin que queda ligada al previo establecimiento de la función semiótica relativa a la sintaxis.
Determinación del valor de verdad de una expresión simbólica dada (F3-v/f)	Esta función semiótica, ligada a una de las funciones semióticas definidas para esta investigación, se manifiesta antes que aquellas en las que interviene fuertemente la sintaxis y también antes que la correspondiente a la determinación del valor de verdad de una expresión formulada por el propio estudiante. Esto estaría mostrando que la comprensión del contenido semántico de una expresión dada se lograría antes que la habilidad ligada a la sintaxis, al menos para expresiones dadas. Esto podría estar

	indicando que se lograría antes la comprensión en la lectura de expresiones simbólicas que la habilidad de la escritura de estas expresiones, que implican el manejo de la sintaxis.
Reconocimiento de errores sintácticos en una expresión simbólica y su reformulación (F2-Dif)	Esta función semiótica se encuentra posicionada en los últimos lugares, por lo que se presenta entre las de mayor dificultad. En ella participa fuertemente la sintaxis, pues la detección del error requiere de un muy buen manejo de la estructura sintáctica de los símbolos que intervienen en la expresión, como así también para la correcta reformulación que subsane el error.
Tratamiento en el registro coloquial (F_t)	Esta función semiótica se presenta entre las últimas en ser establecidas. En parte, esto puede deberse a que es necesariamente posterior a la conversión del registro simbólico-algebraico al registro coloquial. Si bien corresponde a un tratamiento interno al registro coloquial, es muy importante su establecimiento para las tareas de lectura, pues está directamente relacionada con la comprensión del contenido semántico de la expresión simbólica a la que se le haya efectuado la conversión. Su participación es fundamental en el momento en que el estudiante lee la bibliografía, o lee lo que haya copiado del pizarrón durante una clase.

Si se consideran las funciones semióticas en las que participan las cuestiones sintácticas o en las que de alguna manera tiene injerencia la función semiótica F2, también puede observarse que aparece una especie de orden o secuencia en su manifestación. En primer lugar aparece el reconocimiento de la adecuación de la sintaxis de una expresión que está correctamente formulada, luego la formulación de una expresión simbólica como resultado de la conversión a partir de una expresión coloquial dada, le sigue la formulación de una expresión simbólica creada por el estudiante y finalmente, la detección de errores sintácticos en expresiones dadas.

6.6. NIVELES EN EL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE LOS SÍMBOLOS ESTUDIADOS

El análisis detallado de la secuenciación de manifestación de las funciones semióticas consideradas dio lugar a la definición de tres niveles en la evolución del proceso de construcción de significado, que son comunes a todos los símbolos en estudio. Esta semejanza conduce a la idea de que los mismos niveles podrían ser válidos para describir el proceso de construcción de significado de otros símbolos matemáticos. No obstante, es necesario señalar que estos niveles no corresponden a un proceso general de simbolización, pues la construcción de significado de cada símbolo es independiente y no necesariamente se produce de manera sincrónica. Más aún, pudo observarse que símbolos con características similares de uso y de sintaxis, como son los dos cuantificadores, se presentan como independientes al momento de la construcción de su significado.

El nivel de construcción del significado de cada símbolo que logre el estudiante dependerá de las prácticas desarrolladas en relación con ese símbolo, el uso que se haga del mismo en las clases teóricas, la frecuencia de su aparición en los materiales didácticos y bibliográficos, etc.

El primero de los niveles definidos está caracterizado por una construcción de significado elemental, en la que básicamente el estudiante identifica al símbolo con el vocablo coloquial, y esto le permite realizar conversiones símbolo a símbolo a partir de una expresión simbólica. En las entrevistas realizadas, se constató que algunos de los estudiantes que realiza este tipo de conversiones no comprende el contenido matemático que está representado en la expresión simbólica de partida. Esto conduce a la idea de que estos estudiantes se enfrentan a serias dificultades al momento de leer material didáctico de la cátedra o la bibliografía de Matemática, o incluso los propios apuntes, si es que copia del pizarrón confiado en que conoce, uno a uno, a todos los símbolos que está transcribiendo.

En el segundo de los niveles definidos, los estudiantes manifiestan habilidades relativas a los aspectos sintáctico y semántico. En general, pueden formular expresiones simbólicas bien formadas a partir de una oración coloquial dada y/o a partir de una idea propia. Esto último tiene relación con la dimensión pragmática del símbolo pues, al formular un ejemplo, estos estudiantes no sólo son capaces de hacerlo correctamente desde el punto de vista sintáctico sino que demuestran conocer en qué situaciones es apropiado utilizarlo. Los estudiantes que se ubican en este nivel también se muestran capaces de establecer el valor de verdad de una expresión simbólica, justificando su decisión y dado así muestras de haber comprendido el contenido semántico de la expresión. La manifestación de estas habilidades conduce a pensar que estos estudiantes pueden efectuar, de una manera aceptable, actividades de lectura y escritura empleando símbolos. Esto conlleva a que podrían leer bibliografía y otros materiales didácticos que incluyen expresiones simbólicas y también lograrían expresar correctamente sus ideas, desde el punto de vista simbólico, al momento de resolver un ejercicio o de realizar una demostración.

El tercer nivel agrupa a aquellos estudiantes que presentan un mejor dominio de la sintaxis y la semántica, por lo que estarían más evolucionados en el proceso de construcción de significado del símbolo en cuestión. Los estudiantes que se sitúen en este nivel serían capaces de reconocer errores sintácticos en una expresión simbólica que contiene al símbolo y repararlos reformulando correctamente la expresión. También serían capaces de expresar mediante una expresión coloquial la idea global que corresponde al contenido matemático representado por la expresión simbólica. Esto indicaría que ante la necesidad de leer una expresión simbólica con ese símbolo, estarían en condiciones de hacerlo de una manera comprensiva, utilizando oraciones coloquiales semejantes a las utilizadas en el lenguaje oral y, de esta manera, también serían capaces de comunicar a otros el contenido matemático representado.

La determinación de estos niveles de construcción de significado en los estudiantes permite la toma de conciencia, por parte del docente, de la dificultad que conlleva la construcción de significado de un símbolo y le da la posibilidad de abordar aspectos que los estudiantes no tengan construidos, para poder facilitarle el acceso al siguiente nivel. A diferencia de lo que sucede en la escuela secundaria, en la universidad el uso apropiado de las representaciones simbólicas es indispensable, y esto ubica al estudiante en la necesidad de aprender el manejo de los símbolos subsidiariamente, pues no son enseñados de manera específica. Queda en evidencia que, aunque el estudiante haya cursado contenidos de Lógica y de Álgebra, no necesariamente se ubica en los niveles más altos de construcción del significado. La mera repetición de definiciones dadas puede hacer que el docente suponga que el estudiante ha alcanzado la comprensión de ciertos objetos matemáticos, e incluso quede con la certeza de que el alumno tiene comprendidas cuestiones referidas a los símbolos, cuando esto quizás no es así.

6.7. DIFICULTADES Y LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Una de las primeras dificultades que se hallaron en esta investigación fue el recorte de símbolos sobre los cuales se realizarían los estudios. La necesidad de acotar la cantidad de símbolos, con la condición de seleccionar aquellos que pudieran proporcionar suficiente información, resultó un desafío. Un recorrido detallado por los materiales de cátedra y la bibliografía recomendada en las asignaturas de las distintas carreras, condujeron a la decisión. Por distintas razones, quedaron fuera de la investigación el símbolo de la implicación y los de las operaciones de unión e intersección, que son otros de los símbolos que aparecen con mucha frecuencia en la bibliografía de Matemática.

Otra dificultad se presentó al comenzar a diseñar el instrumento, pues se tuvo la necesidad de que el contenido matemático representado en las expresiones que se utilizarían en los distintos ítems no resultara un impedimento al momento de indagar sobre las cuestiones simbólicas en sí mismas. Es decir, surgió la inquietud de evitar que alguna dificultad relativa al contenido matemático "contaminara" la respuesta de los estudiantes o impidiera al estudiante la resolución de algún ítem. De no tenerse en cuenta este aspecto, se podría obtener información distorsionada, en relación con los símbolos en estudio, y conducir a conclusiones erróneas. Esta situación fue resuelta con la decisión de considerar que todo el contenido matemático, al que se refirieran las expresiones utilizadas, correspondiera a la escuela secundaria, de modo que todos los estudiantes lo conocieran.

Un aspecto que fue especialmente observado fue la longitud total de instrumento. Se procuró que la presentación impresa del protocolo no excediera a una carilla, para evitar el cansancio y el desinterés de los estudiantes. Esta decisión impactó directamente sobre la cantidad y variedad de ítems que forman parte del protocolo del instrumento. Si bien se procuró que sea lo suficientemente variada y de mayor alcance posible, esto resultó una limitación. Por ejemplo, no se utilizaron conjuntos particulares definidos especialmente para el estudio, sino que la investigación se limitó a universos de discurso ya conocidos, como lo son los conjuntos numéricos habituales.

Debe tenerse en cuenta que las conclusiones a las que se arribó son válidas en el contexto en el cual se encuentran los estudiantes que conformaron la muestra. Asimismo, no se evaluó la idoneidad didáctica de las prácticas de Álgebra que involucraron estos símbolos, las cuales inciden en las respuestas que dieron los estudiantes. Estas consideraciones constituyen otra limitación a la investigación

6.8. PERSPECTIVAS FUTURAS

Las funciones semióticas utilizadas en esta investigación emergieron del estudio de una cantidad y tipo de símbolos matemáticos que fueron seleccionados, bajo determinados criterios, para acotar y viabilizar la investigación. Queda por delante estudiar la adecuación de dichas funciones en la construcción de significado de otros símbolos matemáticos, con características propias que pudieran diferenciarlos del tipo de símbolos que se estudiado aquí.

También podría extenderse la investigación a la construcción de significado ligadas a otras prácticas, como por ejemplo, el estudio de la pertenencia y la inclusión desde un punto de vista geométrico. Esta dimensión no fue considerada en esta investigación por no poderse abordar desde todos los símbolos en torno a los cuales se decidió llevar a cabo el estudio.

Durante el análisis de los resultados obtenidos, surgieron algunas preguntas específicas que no fue posible responder con los datos obtenidos y que quedan abiertas. Tal es el caso de lo observado a partir del análisis de las conversiones propuestas desde el registro coloquial al registro simbólico-algebraico. A través de las respuestas de los estudiantes se advierte que la mayoría de los estudiantes no tiene dificultad en asociar el verbo ‘ser’ con el símbolo de pertenencia, los vocablos como ‘cualquier’, ‘cada’ o ‘todos’ al cuantificador universal, y los vocablos ‘algunos’ y ‘hay’ con el cuantificador existencial. Esto genera la siguiente pregunta: ¿Se establece más de una función semiótica F1 o se efectúa un tratamiento previo (interno) en el lenguaje coloquial? Esto es, si el estudiante tiene construidas distintas funciones semióticas que asocian diferentes vocablos con el símbolo o si previamente asocia alguno de estos vocablos con el que tradicionalmente se utiliza en la lectura ‘aislada’ del símbolo. Sin embargo, en el caso de los cuantificadores, no se observó que los estudiantes utilizaran estos vocablos ‘alternativos’ en el lenguaje coloquial en las conversiones efectuadas en el sentido contrario (del registro simbólico-algebraico al registro coloquial).

Queda pendiente generar la propuesta de una secuencia didáctica destinada a que los estudiantes, que inician una asignatura de Matemática en una carrera universitaria, desarrollen sus habilidades con relación a las distintas prácticas matemáticas que están vinculadas a los símbolos que se utilizan en la asignatura. Los antecedentes en la literatura afirman que destinar un tiempo, por breve que sea, en la formación en el manejo de símbolos, es exitoso (Distéfano, Urquijo y González, 2010; Lacués Apud, 2011, 2014). Esto quiere decir que favorecer en los estudiantes el desarrollo de las prácticas matemáticas que están asociadas a la construcción de significado de los símbolos, puede darles una herramienta básica para desempeñarse satisfactoriamente en tareas como la lectura y la escritura de expresiones simbólicas.

En principio, puede decirse que el material con el que se llevara a cabo esta tarea tendría que contener actividades del tipo a las utilizadas en el instrumento construido para esta investigación, pues en dicho instrumento se abordan las prácticas básicas que constituyen el significado de un símbolo. Obviamente, el contenido matemático de las expresiones utilizadas podría adaptarse a necesidades específicas de la asignatura en cuestión como así también el tipo y variedad de símbolos utilizados.

El material con el que se trabajara en la secuencia didáctica podría contener alguna breve introducción con relación al modo de uso de los símbolos a utilizar y luego diversas tareas en las que se pongan en juego las prácticas matemáticas involucradas, con un incremento sucesivo en el nivel de dificultad. A modo de ejemplo, en la Figura 6.2 se muestra el enunciado de una posible tarea con la que iniciar el trabajo con relación a las conversiones, proponiendo de menor nivel de dificultad que aquellas que aparecen en el instrumento diseñado en esta investigación.

Enunciado: Completar cada expresión para que resulten equivalentes:

En palabras	**En símbolos**
a) Todos los números ....son .... que 1	.... $\in \mathbb{N}$ $n \geq 1$
b) .... son mayores que 0 y menores que 1	$\exists$ $x \in \mathbb{R}$ ....
c) Cada número entero es........................... que su.......................	.... $x < x + 1$
d) Algunos números naturales son.............................	.... $x = 2.k$, $k \in \mathbb{N}$
e) Si se multiplica un número real positivo por uno negativo se obtiene	.... si $x > 0 \wedge$ .... $\Rightarrow x \,.\, y < 0$

Figura 6.2. Ejemplo de tarea para iniciar actividades de conversión

Las tareas de conversión podrían ser consideradas como centrales en la mencionada secuencia didáctica, pues son una de las tareas principales que se efectúan en la lectura de material didáctico y en la formulación de resoluciones. La tarea de detección de errores podría ubicarse entre las últimas, pues son las de mayor nivel de dificultad.

Si se realizara una formación específica para favorecer la construcción de significado atendiendo a las prácticas matemáticas que dicho proceso involucra, podría desarrollarse una investigación que se focalice sobre la vinculación entre la construcción de significado y el desempeño académico de los estudiantes. Es decir, analizar si existe alguna asociación entre el hecho de haber fortalecido en los estudiantes las prácticas matemáticas ligadas a los símbolos matemáticos, favoreciendo tareas básicas como la lectura y escritura de expresiones simbólicas, y el desempeño que dichos estudiantes tienen en los contenidos específicos de la asignatura.

Otro aspecto sobre el cual es posible continuar la investigación es realizar un estudio temporal del desarrollo de la construcción de significado. Esto podría realizarse a través del estudio de casos, en el que se realice el seguimiento de algunos estudiantes en distintos momentos de su avance académico, al inicio de la carrera universitaria, en el transcurso de las materias de formación básica y al encontrarse en una etapa avanzada de la carrera. Una investigación de este estilo permitiría observar si esa construcción avanza, se mantiene o involuciona. Esto último podría suceder en los casos de las carreras en las que las asignaturas del área de Matemática se imparten al inicio de la formación académica y luego el estudiante continúa con materias específicas, como por ejemplo en el caso de las carreras de Ingeniería.

El uso de los símbolos matemáticos, con sus convenciones y especificidades, le agregan al estudio de los contenidos una dificultad que, para algunos estudiantes, es una barrera difícil de superar. Las cuestiones ligadas a los símbolos tienen numerosas aristas que permiten ser abordadas desde distintas perspectivas. Los estudios e investigaciones que puedan realizarse al respecto, con el fin de favorecer las habilidades de los estudiantes con relación a los símbolos, constituyen siempre un aporte a la Didáctica de la Matemática. Es una temática que no está completa ni cerrada sino que muy, por el contrario, sigue vigente y con mucho camino por recorrer aún.

BIBLIOGRAFIA

ALCALÁ, M., (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona, España: Grao.

ARCAVI, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.

ARCAVI, A. (2007). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 44, 59-75.

BALACHEFF, N. (1990). Towards a problematique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(4), 258-272.

BOOTH, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. En A.F. Coxford & A.P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics. Disponible en: http://elementaryalgebra.cmswiki.wikispaces.net/file/view/Childrens+Difficulties+in+Beginning+Algebra.pdf. Recuperado: 12/08/10.

CAMÓS, C. (2013). Un estudio sobre el uso del lenguaje natural y simbólico en la enseñanza y el aprendizaje de Matemática superior. (Tesis de doctorado no publicada). Universidad Nacional de Catamarca, San Fernando del Valle de Catamarca, Argentina.

CAMÓS, C. y RODRÍGUEZ, M. (2009). *Exploración del uso de los lenguajes natural y simbólico en la enseñanza de Matemática superior.* Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VI CIBEM). Puerto Montt, Chile. Disponible en: http://ebookbrowse.com/articulo-camos-rodriguez-texto-completo-pdf-d36067393. Recuperado: 30/06/11.

CERDÁN, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4 (3), 99-110.

COLOMBANO, V., FORMICA, A. y CAMÓS, C. (2012). Enfoque cognitivista. En M. POCHULU y M. RODRÍGUEZ (Comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 115-152). Los Polvorines, Argentina: EDUVIM y Ediciones UNGS.

CONTRERAS DE LA FUENTE, A., y FONT MOLL, V. (2002). *¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?*. XVIII Jornadas del Seminario Inter-universitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Castellón, España. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/castellon_2002/contreras_vicen.doc. Recuperado: 14/04/13.

D'AMORE, B. (2003). *La complejidad de la noética en matemática como causa de la falta de devolución*. Conferencia dictada en el V Simposio de Educación Matemática, 6 de mayo de 2003, Chivilcoy, Argentina. Chivilcoy, Argentina: Emat Editora. Disponible en: http://www.pedagogica.edu.co/storage/ted/articulos/ted11_07arti.pdf. Recuperado: 17/03/06.

D'AMORE, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 35, 90-106.

D'AMORE, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* Ciudad de México, México: Reverté.

DISTÉFANO M. L., URQUIJO, S. y GONZÁLEZ, S. (2010) Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23, 59-71.

DUVAL, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivos del pensamiento. En HITT, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamericano.

DUVAL, R. (1999). *Representation, vision and visualization: Cognitive Funtions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.* Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cuernavaca, México.

DUVAL, R. (2000). *Basic Issues for Research in Mathematics Education*. Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Hiroshima, Japón.

DUVAL, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1), 103-131.

ECO, U. (1986). La *estructura ausente. Introducción a la semiótica*. Barcelona, España: Lumen.

ECO, U. (1991). *Tratado de semiótica general*. Barcelona, España: Lumen.

ESCALANTE VEGA, J. y CUESTA BORGES, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 24 (1), 5-30.

FERNANDEZ MILLAN, E. y MOLINA, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, 34 (1), 53-71.

FILLOY, E., PUIG, L. y ROJANO, T. (2008). El estudio teórico de local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25 (3), 327-342.

FONT, V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, 1-35.

FONT, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*, 7(2), 127-170.

FONT, V. y GODINO, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98.

FONT, V., GODINO, J. D. y D'AMORE, B. (2007). Enfoque Ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática. En M. J. ALDERETE y M. L.

PORCAR (Eds.), *Temas de Didáctica de las Matemáticas* (pp. 1-20). Mendoza, Argentina: Universidad Nacional de Cuyo.

FONT, V., GODINO, J. D. y GALLARDO, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics,* 82, 97–124.

GARRIDO, M. (1979). *Lógica simbólica*. Madrid, España: Tecnos.

GIANELLA, A. (1996). *Lógica simbólica y elementos de metodología de la ciencia*. Buenos Aires, Argentina: El ateneo.

GODINO, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en: http://www.fceia.unr.edu.ar/~sreyes/ funciones_semioticas.pdf. Recuperado: 24/04/13.

GODINO, J. D. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM 13, Recife. Disponible en: www.ugr.es/local/jgodino. Recuperado: 28/05/12.

GODINO, J. D. (2015). La articulación de teorías en educación matemática desde la perspectiva ontosemiótica. En N. Planas (Ed.), *Avances y realidades de la educación matemática* (pp. 189-208). Barcelona, España: Graó.

GODINO J. y BATANERO, C. (1994). Significado personal e institucional de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

GODINO, J. D., BATANERO, C. y FONT, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf. Recuperado: 12/08/11

GODINO, J. D., BENCOMO, D., FONT, V. y WILHELMI, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,* 27 (2), 221-252.

GOLDIN, G. & KAPUT, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. STEFFE, P. NESHER, P. COBB, G. GOLDIN, & B. GREER (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397–430). Hillsdale, U.S.A.: Erlbaum.

GÓMEZ GRANELL, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y la significación. *Comunicación, lenguaje y educación*, 3-4, 5-16.

GONZALEZ TRUJILLO, E. (2012). Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas. (Tesis de doctorado. Universidad Nacional de Colombia). Disponible en: http://www.bdigital.unal.edu.co/8062/1/erikasofiagonzaleztrujillo.2012.pdf. Recuperado: 22/09/14.

HERNANDEZ SAMPIERI, R., FERNANDEZ COLLADO, C. y BAPTISTA LUCIO, P. (1997). *Metodología de la investigación*. Bogotá, Colombia: McGraw-Hill.

HERRERA LOPEZ, H., CUESTA BORGES, A. y ESCALANTE VEGA, J. (2016). El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato. *Educación Matemática*, 28 (3), 217-240.

HIEBERT, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies y Mathematics*, 19, 333-355.

HJEMSLEV, L. (1971). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid, España: Gredós.

JUAREZ LOPEZ, J. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números*, 76, 83-103.

KAPUT, J. (1987). PME XI Algebra papers: A representational Framework. En J. BERGERON, J., HERSCOVICS, N. & KIERAN, C. (Eds.). *Proceedings of the eleventh international conference Psychology of Mathematics Education*, 1, (pp. 345-354). Montreal: PME. Disponible en: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED383532.pdf. Recuperado: 19/09/ 11.

KAPUT, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. VON GLASERSFELD (Ed.), *Redical constructivism in mathematics education*, (pp. 53-74). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. Disponible en: http://www.springerlink.com/content/q6n3h0g5vj122068/fulltext.pdf. Recuperado: 18/06/10.

KIERAN, C. y FILLOY YAGUE, E. (1989) El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229- 240.

KLIMOVSKY, G. y BOIDO, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático. Filosofía de la matemática: una introducción*. Buenos Aires, Argentina: A-Z Editora.

KUTSCHERA, F. von (1975). *Philosophy of language*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

LACUÉS APUD, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los sistemas matemáticos de símbolos. *Didac*, 55-56, 29-35.

LACUÉS APUD, E. (2014). Aprendizaje de Sistemas Matemáticos de Símbolos en Álgebra Lineal y Cálculo. *Bolema*, 28(48), 299-318.

LINCOLN, Y. & GUBA, E. (1985). *Naturalistic inquiry*. Newbury Park, United States: SAGE Publication, Inc.

MAGARIÑOS DE MORETÍN, J. (1983). *El signo. Las fuentes teóricas de la semiología: Saussure, Peirce, Morris*. Buenos Aires, Argentina: Hachete.

MARAFIOTI, R. (2004). *Charles S. Peirce: El éxtasis de los signos*. Buenos Aires, Argentina: Biblos.

MARQUINA QUINTERO, J., MORENO, G. y ACEVEDO BARRIOS, A. (2014). Transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico en educación media general. *Educere*, 18 (59), 119-132.

MOLINA, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME*, 17 (3), 559-579.

MOLINA GONZÁLEZ, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. (Tesis de doctorado, Universidad de La Rioja, España). Disponible en: http://documat.unirioja.es/servlet/ tesis?codigo=1210. Recuperado: 15/02/09

MUÑOZ RAZO, C. (2011). *Cómo elaborar y asesorar una investigación de tesis.* México, México: Pearson Educación.

OGDEN, C.K., & RICHARDS, I.A. (1923). *The meaning of the meaning*. New York, U.S.A.:Harcourt, Brace & World, Inc.

PALAREA MEDINA, M. (1998). *La adquisición del Lenguaje Algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* (Tesis de doctorado, Universidad de La Laguna, España). Disponible en: ftp://tesis.bbtk.ull.es/ccppytec/cp90.pdf . Recuperado el 15/10/12.

PALAREA MEDINA, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, (40), 3-28.

PALENCIA, A. y TALAVERA, R. (2004). Estrategias innovadoras para la comprensión del lenguaje matemático. *Revista ciencias de la educación*, 1 (23), 47-60.

PEIRCE, C. (1974). *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires, Argentina: Nueva Visión.

PIMM, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid, España: Morata.

RADFORD, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237-268.

RADFORD, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12 (1), 1-9.

RODRÍGUEZ-DOMINGO, S. (2015). *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria.* (Tesis de doctorado. Universidad de Granada, España). Disponible en: http://hera.ugr.es/tesisugr/25475368.pdf. Recuperado: 23/03/16.

RODRÍGUEZ-DOMINGO, S. y MOLINA, M. (2013). De lo verbal a lo simbólico: un paso clave en el uso del álgebra como herramienta para la resolución de problemas y la modelización matemática. En L. RICO, M.C. CAÑADAS, J. GUTIERREZ, M. MOLINA e I. SEGOVIA (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp.111-118). Granada, España: Editorial Comares.

RODRÍGUEZ-DOMINGO, S., MOLINA, M., CAÑADAS, M.C. y CASTRO, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA*, 9 (4), 273-293.

RODRÍGUEZ GÓMEZ, G., GIL FLORES, J. y GARCÍA JIMÉNEZ, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga, España: Aljibe.

ROJANO, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las ciencias,* 12 (1), 45-56.

ROJAS GRAZÓN, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos*. (Tesis de doctorado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia). Disponible en: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Rojas%20Garzon/Tesis%20Pedro%20Rojas.pdf. Recuperado: 23/11/14.

RONDERO, C. y FONT, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 29-49.

RUANO, R., SOCAS, M. y PALAREA, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2 (2), 61-74.

SANZ LERMA, I. (2007). Construcción del lenguaje matemático. Cuadros y tablas. *Endoxa*, 14, 199-226.

SAUSSURE, F. (1945). *Curso de lingüística general*. Buenos Aires, Argentina: Losada.

SIERPINSKA, A. (1990). Some remarks on understandig in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10 (3), 24-36.

SOCAS, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En: Camacho, M., Flores P. y Bolea P. (Eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna, España: SEIEM.

SOCAS, M. (2010). Competencia Matemática Formal. Un ejemplo: El álgebra escolar. *Formación del profesorado e investigación en educación matemática*, 10, 9-42.

SOCAS, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. *Números*, 77, 5-34.

SOCAS, M., y PALAREA MEDINA, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, 7-24.

SONEIRA, A. (2007). La “Teoría fundamentada en los datos” (Grounded Theory) de Glaser y Strauss. En: I. VASILACHIS de GIALDINO (Coord.), *Estrategias de investigación cualitativa* (pp. 153-173). Buenos Aires, Argentina: Gedisa.

SONEIRA, C., SOUTO, M.J. y TARRÍO, A.D. (2014). La variable sintáctica en el paso del lenguaje natural al algebraico. En M. T. GONZALEZ, M. CODES, D. ARNAU y T. ORTEGA (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 563-572). Salamanca, España: SEIEM.

TOBÓN FRANCO, R. (2004). *Estrategias comunicativas en la educación: hacia un modelo semiótico-pedagógico.* Medellín, Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

TRIGUEROS, M., URSINI, S. y LOZANO, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática*, 12 (2), 27-48.

ULLMANN, S. (1965). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid, España: Aguilar.

URSINI, S. y TRIGUEROS, M. (2006). ¿Mejora la comprensión de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18 (3), 5-38.

VERGNAUD, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathematiques,* 10, 2, 3, 133-170.

WITTGENSTEIN, L. (1973). *Tractatus logico-philosophicus*. Madrid, España: Alianza Editorial.

WITTGENSTEIN, L. (1999). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona, España: Atalaya.