UPEL Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" Maracay

LA INTEGRAL EN UNA VARIABLE REAL EN LA FORMACIÓN TÉCNICA UNIVERSITARIA: DIMENSIONES PRESENTES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

Autor: Luis Capace.
Tutor: Dr. Mario Arrieche

Maracay, julio 2008

APROBACIÓN DEL TUTOR

En mi carácter de Tutor de la de la Tesis: *LA INTEGRAL EN UNA VARIABLE REAL EN LA FORMACIÓN DE LAS CARRERAS TÉCNICAS UNIVERSITARIAS*, presentada por el ciudadano: *Luis Ernesto Capace Pérez*, para optar al Grado de Doctor en Educación, considero que dicha Tesis reúne los requisitos y méritos suficientes para ser sometida a la presentación pública y evaluación por parte del jurado examinador que se designe:

En la ciudad de Maracay, a los 20 días del mes de agosto del año dos mil ocho.

Dr. Mario Arrieche
CI: 7.276.704

Dedicatoria:
A la memoria de Miguel Capace Asal,
quién además de ser mi mejor amigo fue mi Padre.

AGRADECIMIENTOS

- A Dios quien me hizo el mejor de los regalos, la vida y durante ella siempre se ha portado como un padre cariñoso concediéndome el logro de las metas propuestas.
- A mi Madre Néria por haberme dado la vida y además del cuidado y guía en los primeros años de mi vida.
- A mi esposa Olga por su apoyo constante y consistente en el logro de este trabajo.
- A mi hijo Arturo por ser siempre motivo para la consecución de nuevas metas.
- Al Dr. Mario Arrieche, que además de ser un amigo, supo orientar este trabajo con su análisis profundo de todas sus instancias. Además pudo lograr con sus orientaciones, que el trabajo se concluyera en el tiempo previsto.
- Al Dr. Fredy González por sus orientaciones durante varios seminarios.
- Al doctorado: Profesores, Coordinadores, Personal Administrativo y de Mantenimiento por su atención y cordialidad que siempre mostraron.
- A la UPEL Núcleo Maracay, mi casa de estudio de siempre y todos mis Colegas del área de Matemática, por sus estímulos y orientaciones acertadas.

ÍNDICE GENERAL

LISTA DE CUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABLAS

TABLAS

PP.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA EXPERIMENTAL LIBERTADOR
INSTITUTO PEDAGÓGICO “RAFAEL ALBERTO ESCOBAR LARA”
DOCTORADO EN EDUCACIÓN

LA INTEGRAL EN UNA VARIABLE REAL EN LA FORMACIÓN TÉCNICA UNIVERSITARIA: DIMENSIONES PRESENTES EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

Tesis Doctoral

Autor: Luis E. Capace P.
Tutor: Dr. Mario Arrieche
Fecha: junio 2008

RESUMEN

La integral en una variable real, es un tópico del cálculo infinitesimal que tiene variadas aplicaciones en el quehacer tecnológico, de allí que esté presente en la formación técnica universitaria. Sin embargo, los estudiantes presentan dificultades para comprender y aplicar este objeto matemático. Es por ello que esta investigación indagó de forma profunda y sistemática en esta problemática. Se asumió como marco teórico el enfoque Ontológico-semiótico de la cognición e instrucción de la matemática (Godino, 2003), ya que éste nos proporciona herramientas para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática desde las dimensiones epistemológica, cognitiva e instruccional, puestos en juego en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. La metodología de investigación, se conformó por enfoques cualitativos y cuantitativos, pero con predominio de lo cualitativo. Se desarrolló un análisis epistémico con el que además de profundizar en los significados institucionales de referencia (pretendidos, implementados y evaluados) sobre la integral en una variable real, se determinaron seis configuraciones epistémicas (Godino, 2003). Al valorar el proceso de estudio para la enseñanza de la integral definida, desarrollado con un grupo de estudiantes de la carrera informática del IUET- La Victoria, se pudo comprobar en primer lugar que los criterios para valorar la idoneidad didáctica nos permiten ir perfeccionado el proceso. En atención a ellos se puede resaltar algunas conclusiones: a) Es necesario armonizar los aspectos geométricos y analíticos presentes en el concepto de integral, b) el uso de un software matemático permite simular procesos de cuadraturas lo que mejora la capacidad de abstracción en asuntos geométricos e infinitos, c) si los estudiantes tienen claro los conceptos, teoremas e interpretaciones geométricas de la integral en una variable real, pueden resolver problemas con el uso del computador aun teniendo deficiencias en el cálculo y d) las dificultades de los estudiantes en el cálculo integral están determinadas por las deficiencias en operaciones elementales del álgebra y la aritmética.

Descriptores: La integral en una variable real, enfoque ontológico-semiótico, significados personales, significados institucionales, trayectoria didáctica, idoneidad didáctica y configuración epistémica.

INTRODUCCIÓN

La comprensión del cálculo integral por parte de los estudiantes de las carreras técnicas, como ingeniería y Técnico Superior Universitario (TSU), es fundamental por las variadas aplicaciones que tiene este tema en diferentes asignaturas de acuerdo a cada especialidad. Sin embargo, la realidad evidencia dificultades por parte de los alumnos al desarrollar ejercicios y resolver problemas. En los primeros cursos universitarios de Matemática se estudia el cálculo diferencial e integral y sus aplicaciones en problemas afines a cada carrera, pero al aplicar estos conocimientos, los estudiantes presentan lagunas conceptuales en lo aprendido que no les permiten modelar y resolver eficientemente la situación problemática.

Esta investigación indagó sobre aspectos teóricos que condicionan la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en las carreras técnicas universitarias. Para poder llevar a cabo este estudio sistemático y riguroso se asumió el enfoque Onto-semiótico para la cognición e instrucción de la matemática (EOS) y está enmarcada en la línea: *Perspectivas del enfoque semiótico-antropológico para la didáctica de la matemática* Arrieche (2003) (Adherida al Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” (NIEM)) vinculada a la de *Teoría y métodos de investigación en Educación Matemática* del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que dirige el Dr. Juan Díaz Godino. En ellas se abordan la problemática de la cognición e instrucción desde tres dimensiones: epistémica, cognitiva e instruccional presentes en todo proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. La dimensión instruccional está compuesta por las sub-dimensiones: docente, discente, mediacional y emocional (Godino, 2003) con las cuales se espera obtener abundante información sobre la problemática escolar del cálculo integral en las carreras antes mencionadas. También este enfoque es rico para determinar los significados institucionales y personales de un objeto matemático en estudio.

La naturaleza compleja que se presenta en la enseñanza y aprendizaje de este tópico del cálculo infinitesimal, conduce a que el diseño de investigación combine enfoques cualitativos y cuantitativos, con un mayor predominio de lo cualitativo. La primera etapa se centró en el análisis epistémico de la integral en una variable real y en el estudio del currículo de las carreras técnicas, con la finalidad de determinar lo que se requiere enseñar sobre este tema. El análisis consta de una revisión documental sobre el origen, desarrollo y evolución de este contenido, así como los problemas, motivaciones y obstáculos que se presentaron en su desarrollo. En este estudio que ocupó todo el capítulo IV se pudo determinar seis configuraciones epistémicas, es decir los diferentes sistemas de objetos matemáticos y sus funciones semióticas que se establecen al resolver un problema (Godino, 2003), ellas se definieron como: La de los orígenes, la de los problemas originarios del cálculo integral, la impulsada por Newton, la impulsada por los trabajos de Leibniz, la impulsada por el desarrollo teórico para la integral a partir de siglo XVIII y por último la impulsada por el desarrollo de la Teoría de la Medida. Por otra parte en el capítulo V y también en esta etapa se determinaron coincidencias y discrepancias entre los programas (Matemática II, Cálculo II, Análisis) que contienen el tema de la integral en una variable real de dos universidades nacionales, la Universidad Central de Venezuela (UCV) y la Universidad de Carabobo (UC) y el Instituto Universitario Experimental de Tecnología de La Victoria (IUET-LV).

En la segunda etapa de la investigación, capítulo VI, se diseñó una trayectoria didáctica propia a la enseñanza de este tópico para las carreras técnicas universitarias en base a las informaciones obtenidas en la primera etapa (capítulos IV y V). En la tercera etapa se implementó la trayectoria didáctica en un curso de Matemática II de la carrera informática del *Instituto Universitario Experimental de Tecnología de La Victoria* (IUET- LV), donde el investigador es el profesor. Esta trayectoria tuvo una duración de nueve sesiones de clase equivalente a dieciocho horas de clase. Tanto la clase (el proceso de enseñanza) como las actividades de los estudiantes (proceso de aprendizaje) se apoyaron en el uso del software matemático MAPLE Versión 8 de acuerdo al contenido y a los conocimientos de entradas de los estudiantes. Simultáneamente se hicieron grabaciones y tomaron apuntes de las nueve sesiones de clase y en alguna de ellas si hicieron observaciones sin participación del investigador. Al final se aplicó una evaluación escrita en la cual los estudiantes podían hacer uso del computador para resolver y responder los diferentes planteamientos.

En la cuarta etapa, capítulos VII y VIII, se hizo el análisis de la idoneidad didáctica del proceso de estudio implementado sobre la integral en una variable real. Para la idoneidad didáctica del proceso de estudio se aplicó el *Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio de la Matemática.* Consistente en la aplicación de los criterios teóricos del enfoque ontológico-semiótico para la valoración didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Godino, Contreras y Font (2006) estiman seis criterios, a saber: *Idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva*, *idoneidad interaccional*, *idoneidad mediacional*, *idoneidad emocional* y *idoneidad ecológica*. Estos elementos teóricos permitieron llegar a conclusiones teóricas sobre el proceso implementado para el estudio de la integral definida. Se utilizó la técnica del “análisis semiótico” (Godino, 2003; Godino y Arrieche, 2001) para el análisis del texto de las respuestas dadas por los estudiantes a la prueba final lo que permitió determinar conflictos semiótico (desajustes entre los significados institucionales y personales).

Por último, en la quinta etapa se establecen las conclusiones generales, En ella se sintetizan los aspectos teóricos referidos a todas las etapas y capítulos de la investigación: las conclusiones del estudio epistemológico que es el objetivo específico 1 , las del estudio comparativo sobre los currículos de las carreras de Ingeniería y Técnico Superior Universitario en el capítulo V y correspondiente al objetivo específico 2. Las conclusiones de los capítulos VII y VIII relacionadas con los objetivos específicos 3 y E4, la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio y el significado construido por los estudiantes sobre la integral en una variable real. Todos son aportes que de alguna forma pueden contribuir al mejoramiento de la enseñanza del cálculo en las carreras técnica universitarias, y a la enseñanza de la matemática en general.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

Planteamiento del problema

Introducción

La Enseñanza de la Matemática en el contexto de las carreras técnicas universitarias, debe permitir a los estudiantes el desarrollo de razonamientos lógicos y las destrezas operatorias necesarias para resolver problemas inherentes a su especialidad. Por otra parte, les provee de los cimientos requeridos para continuar su formación en el manejo de nuevas tecnologías. Sin embargo, los alumnos han evidenciado dificultades en la comprensión y en las destrezas operatorias (el manejo de las propiedades esenciales y de las nuevas operaciones que introduce el cálculo integral) al aplicar el cálculo diferencial e integral, cuando se enfrenta a ejercicios y problemas. En este capítulo se exponen aspectos de la problemática que presenta la enseñanza del cálculo integral en las carreras técnicas como ingeniería y técnico superior universitario, se formularon las interrogantes de la investigación y los objetivos: General y específicos y por último, se destaca la importancia que tiene la investigación para la Educación Matemática.

El Problema

En relación a las dificultades que tienen los alumnos al aplicar el cálculo diferencial e integral, Catsigera (2006) señala como fuente de dificultades la formalidad con que se presenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por su parte Labrañas (2001) las atañe a determinadas carencias teóricas y Lara (1997) las atribuye al tránsito por los diferentes sistemas semióticos de representación y menciona del gráfico al numérico; del numérico al algebraico; del algebraico al gráfico; del verbal al gráfico;…etc.

Cabe señalar que el investigador, durante el tiempo que fungió como profesor de Matemática I y Matemática II[5] en el Instituto Universitario Experimental de Tecnología de La Victoria (IUTE-LV)[6]; y en la jefatura del departamento de Ciencias Básicas recibió referencias verbales y escritas de los profesores del Ciclo Profesional[7], sobre las dificultades que presentan los estudiantes al aplicar los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas técnicos relacionados con las carreras que ofrece esta institución[8]. Entre esas dificultades se destacan tres:

1. La identificación del modelo matemático que rige la situación problemática.
2. La selección de las herramientas matemáticas adecuadas al modelo.
3. La poca destreza en el manejo de las herramientas matemáticas.

La enseñanza y aprendizaje de la Matemática a nivel mundial se presenta como una actividad compleja dentro de cada ámbito social y cultural. Esta afirmación es evidenciada por las problemáticas detectadas por las actividades de investigación que se han desarrollado en los últimos años. En relación a esto Alonso y Martínez (2003) indican que la enseñanza y aprendizaje de la Matemática ha generado preocupación por el estudio de sus procesos de comunicación y transmisión y comprensión y ha motivado a una amplia y multidisciplinaria comunidad científica que desde hace años investiga en este campo. A pesar de los avances que como disciplina científica ha experimentado la investigación en Educación Matemática, sin

[5] El contenido de estas asignaturas es *Cálculo Diferencial e Integral* y sus aplicaciones.
[6] Además ejerció la jefatura del Departamento de Ciencias Básicas de ese Instituto.
[7] El Ciclo Profesional comienza en el tercer semestre y en él se profundiza en las teorías y prácticas necesarias para el desempeño profesional de acuerdo a cada carrera.
[8] Las carreras son Técnico Superior Universitario en: Electricidad, Mecánica, Informática y Administración.

embargo, se sigue presentando una problemática muy dinámica, siendo una de las principales, el poco éxito que presentan los estudiantes en el abordaje y resolución de problemas. La resolución de problemas en general ha sido uno de los asuntos más estudiados en las investigaciones en Educación Matemática, "los seguidores de Polya, buscan cómo lograr que los estudiantes adquieran habilidades satisfactorias en la resolución de problemas, pero a pesar de los esfuerzos, la mayoría de los estudiantes siguen teniendo dificultades para poder resolver problemas" (Blanco, 2005, p.6).

González (1997) presenta un resumen de los principales hallazgos de los estudios acerca del rendimiento estudiantil universitario en Venezuela durante dos décadas. Los clasifica de acuerdo a dos tipos de indicadores: cuantitativos y cualitativos. Lo específico a la problemática del rendimiento en Matemática está sintetizado en el siguiente cuadro:

Cuadro No. 1

Principales hallazgos de los estudios en rendimiento estudiantil. (González, 1997)

Cuantitativo	Cualitativo
Matemática y sus asignaturas afines, presentan: 1. Las más altas tasas de alumnos reprobados. 2. Los porcentajes de repitencia más elevados. 3. La calificación promedio más baja. 4. Excesivo número de estudiantes por sección. 5. Aversión hacia la asignatura. 6. Lenta prosecución.	**En cuanto a Matemática Los estudiantes:** 1. Tienen dificultades para hacer abstracciones y establecer relaciones. 2. Presentan carencias significativas de experticia en el manejo de herramientas académicas. 3. Exhiben insuficiencia en las operaciones básicas y elementales del cálculo matemático.

Las deficiencias académicas en Matemática que exhiben los estudiantes de Educación Superior en Venezuela, es preocupación desde hace varias décadas. En los últimos años, la problemática lejos de superarse, ha persistido con mayor gravedad. En el caso particular de las carreras técnicas, estas deficiencias tienen un impacto en aquellas asignaturas del currículo para las cuales Matemática es un prerrequisito.

Con más precisión, como señala Carlos (2000), la Matemática alcanzará los objetivos propuestos en el currículo de las carreras técnicas, si logra convertirse en: a) una herramienta de cálculo, b) una herramienta para modelar y resolver problemas técnicos, c) un lenguaje universal capaz de contribuir al desarrollo de otras disciplinas propias del perfil profesional, d) una herramienta para el desarrollo del pensamiento lógico, la capacidad de razonar, de enfrentar situaciones nuevas.

Es por ello que la pregunta que da origen a esta investigación es: ¿Cómo hacer más efectivo los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en las carreras técnicas universitarias? Para efecto de la delimitación del proceso de estudio, el tema seleccionado es la integral en una variable real que es un objetivo del currículo. El problema de fondo que plantea la interrogante anterior, Tiene que ver con la Didáctica de la Matemática en asuntos como: el saber matemático, el aprendizaje de los estudiantes y la manera como se desarrollen los procesos de enseñanza y aprendizaje. En base a este planteamiento se considera necesario su abordaje desde las dimensiones epistemológicas, cognitivas e instruccionales puestas en juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, propuestas por Godino (2003) y aplicadas por Arrieche (2002) y Meléndez (2005). Esta decisión se justifica por la posibilidad que se tiene de estudiar la problemática de manera más amplia. Al respecto, Cordero (2005) considera que a pesar de los resultados de las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, todavía se tiene un énfasis significativo de sus aspectos formales en los programas curriculares, que dejan de lado las dimensiones epistemológicas y cognitivas.

En relación a los aspectos epistemológicos, se debe tomar en cuenta, al proceso histórico de creación y consolidación del *Cálculo* basado en la necesidad de estudiar los diferentes fenómenos del mundo real y considerando que en la actualidad existe una nueva problemática generada por los adelantos tecnológicos que ha producido cambios en todos los aspectos de la vida del hombre; se pueden plantear las siguientes preguntas: ¿Qué tipos de problema dieron origen a la integral en una variable real? ¿Cómo fue el proceso de consolidación de la integral en una variable real? ¿Qué relación guarda la integral con otros tópicos del cálculo? ¿Cuáles son las aplicaciones clásicas de la integral en la resolución de problemas generados por la tecnología? La enseñanza y aprendizaje del cálculo presenta muchas dificultades que se reflejan en el alto índice de aplazados en los primeros semestres de Educación Superior, en particular en las carreras técnicas como ingeniería y técnico superior universitario.

La búsqueda de soluciones a la problemática cognitiva del *Cálculo,* se han generado a partir de las últimas décadas investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje del cálculo. En este sentido Azcárate y Camacho (2003) indican que en estos estudios también se consideran los procesos asociados a las definiciones, pruebas y demostraciones que han enriquecido los modelos que sirven para describir los procesos cognitivos del aprendizaje en los estudiantes. En el contexto de todos estos trabajos surge otra pregunta rectora para esta investigación ¿qué dificultades se le presentan a los alumnos al aplicar la Integral en una variable en la resolución de problemas? En el análisis de los aspectos instruccionales de la problemática de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, pueden ser de gran utilidad las dimensiones planteada por Godino (1999a), Godino (2003). Estas son la *mediacional* relativa a los recursos instruccionales, tales como el currículo, programas, textos, calculadoras, computadoras, software,...etc. La dimensión *docente* relativa a la función del docente, la *discente* relativa al alumno y sus actividades y la *emocional,* afectos y valores implicados en el estudio de los contenidos de un tópico matemático. En esta investigación, se considerarán estas dimensiones con la finalidad de ahondar en la problemática instruccional.

Como punto de partida podemos señalar que en la ciudad de Québec en 1992 se reunieron los integrantes del grupo de trabajo ICME 7 denominado “Las dificultades de los estudiantes en el Cálculo” tenían el objetivo de dar respuesta a algunas preguntas agrupadas en tres aspectos (Azcárate y Camacho, 2003, p.142):

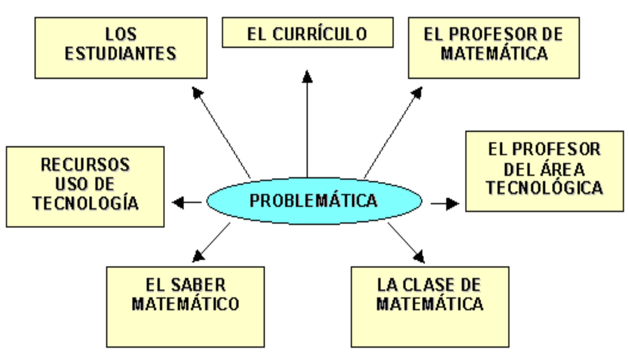
1. *Objetivos y contenidos*: ¿Cuáles son los objetivos de un curso de Cálculo? ¿Cuál es su papel en el currículo de matemática? ¿Cuáles son las relaciones entre los aspectos conceptuales y los aspectos técnicos de un curso de Cálculo?
2. *Dificultades de enseñanza y aprendizaje*: ¿Cuáles son las dificultades comunes a todos los aspectos del Cálculo? ¿Cuáles son las razones de tales dificultades?
3. *Concepciones del cálculo y su enseñanza que subyacen en las distintas experiencias:* ¿Qué problemas surgen a la hora de implementar secuencias de enseñanza? ¿Cuáles han sido los resultados esperados? ¿Están de acuerdo los resultados obtenidos con los resultados esperados? ¿Es posible explicar la divergencia entre los resultados esperados y los conseguidos?

Aun cuando ha transcurrido más de una década de esta reunión, para Azcárate y Camacho (2003) muchas de esas preguntas permanecen abiertas y son muy utilizadas en diferentes investigaciones. La presente investigación espera contribuir a dar respuesta a algunas de ellas.

En el caso particular de esta investigación, la problemática de la enseñanza de la integral en una variable real en las carreras técnicas universitarias, presenta 7 aspectos que tienen que ver con las dimensiones:

epistemológica, cognitiva e instruccional (ver figura 1). En la figura existen siete aspectos que tienen relación directa en la problemática seleccionada y que a continuación explicaremos cada uno de ellos. El currículo de las carreras técnicas universitarias, muchas veces no expresan de forma clara el papel que tiene la Matemática en relación con las demás asignaturas. La Matemática que se cursa en los primeros semestres muchas veces aparece como descontextualizada de la formación técnica, por lo que se requiere la construcción de modelos didácticos diseñados para estas carreras. El investigador, como profesor de Matemática en el IUET-LV, distingue dos visiones que sobre la enseñanza de la Matemática están presentes en esta institución. La de los profesores de matemática y la de los profesores del Ciclo Profesional. Los primeros consideran que se debe conocer con cierta profundidad los tópicos matemáticos para poderlos aplicar como una herramienta para modelar y resolver problemas. Por lo que, ahondan en demostraciones, comprobaciones e interpretaciones geométricas con la finalidad de que los estudiantes se sumerjan en el lenguaje y pensamiento matemático. Mientras que los profesores del Ciclo Profesional de las carreras Mecánica, Electricidad, Informática y Administración, creen que es suficiente que el estudiante aprenda los algoritmos y destrezas operatorias necesarias para resolver los problemas propios de su carrera.

FIGURA 1



Los siete aspectos más relevantes que tienen que ver con la problemática descrita.

El saber matemático evidentemente forma parte de la problemática. En los aspectos cognitivos se plantearon situaciones relacionadas con la comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo infinitesimal y que deben ser tomados en cuenta al elaborar currículos y planear actividades instruccionales. Los estudiantes, por supuesto, están inmersos en la problemática, con su carga particular de saberes matemáticos que le dan significados propios a los nuevos objetos matemáticos que luego deben aplicar en la resolución de problemas. Conociendo el significado que los estudiantes dan a la integral en una variable real, es posible estudiar las dificultades que presentan al resolver problemas. Es necesario considerar en el análisis que del estudiante se haga dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, sus afectos o desafectos y el valor que para él tiene la Integral en una variable real. Es por todos conocida la antigua frase "deriva quién sabe e integra quién puede", presente aún en nuestros estudiantes y que de alguna manera demuestra la actitud preconcebida hacia este concepto.

La clase de matemática, es otro aspecto, ella es el escenario que sirve a los diferentes actores para comunicar sus experiencias y problemáticas en torno a la enseñanza y aprendizaje de un tópico matemático. Del tipo de actividad que se planifique y de los recursos que se empleen dependerá en gran parte la efectividad de la enseñanza que redundará en el aprendizaje. Se requiere diseñar modelos de enseñanza y aprendizaje del cálculo adecuado a las carreras técnicas; que les permita a los estudiantes adquirir las competencias matemáticas para su desempeño profesional en la carrera de su elección. Una actividad que en la práctica ha venido emergiendo, es el desarrollar las prácticas de aplicaciones del cálculo en la resolución de problemas con la asistencia de un software matemático (Maple, Derive, Matlab...etc.), incluso en reuniones informales de profesores de matemática se ha planteado la posibilidad de enseñar los conceptos del cálculo infinitesimal, sus aplicaciones y que los cálculos se realicen en el computador o la calculadora. A juicios de estos profesores, los estudiantes tendrán más efectividad al aplicar los conocimientos en la resolución de problemas. Concentrarían su atención en modelar el problema, determinar las herramientas matemáticas necesarias para determinar los valores que satisfacen el modelo, ya que los cálculos los realizará con el computador o la calculadora.

De acuerdo con lo expuesto en los párrafos anteriores se plantean las siguientes interrogantes:

Epistemológicas

1. ¿Cómo fue la génesis del Cálculo Integral?
2. ¿Qué tipos de problema dieron origen a la integral?
3. ¿Cómo fue su desarrollo y consolidación?
4. ¿Cuáles son las aplicaciones clásicas de la integral ?
5. ¿Cuáles son las configuraciones epistémicas que se presentaron durante la génesis, desarrollo y consolidación del Cálculo Integral?
6. ¿Qué relación tiene la integral en una variable real con las demás áreas del saber presentes en los currículos de las carreras técnicas universitarias

Cognitivas

1. ¿Qué dificultades se les presentan a los alumnos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral en una variable real?
2. ¿Qué significados le otorgan los alumnos a la integral en una variable real, tras un proceso de enseñanza y aprendizaje?

Instruccionales

3. ¿Qué se pretende enseñar sobre la integral en una variable real en un curso de Cálculo en las carreras técnicas universitarias?

4. ¿Qué actividades de enseñanza y aprendizaje de la integral en una variable, mediadas por el computador, se pueden diseñar?

Para encontrarle respuestas a estas preguntas el estudio se enmarcará en el *Enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática* (Godino, 2003; Godino y Batanero, 1994; Arrieche, 2002; Arrieche, 2003; Godino y Arrieche, 2001; Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006. Con base en esta teoría esta investigación se propone los siguientes objetivos.

Objetivos de la Investigación

Objetivo General

La integral en una variable real es aplicada en diferentes áreas del saber que conforman el currículo de las carreras técnicas universitarias. Por esta razón se quiere indagar en la problemática que existe en torno a su enseñanza y aprendizaje, considerando las bases teóricas del enfoque ontológico-semiótico de la instrucción y cognición matemática. En este sentido se formula el siguiente objetivo general.

OG Estudiar la integral en una variable real dentro del contexto de las carreras técnicas universitarias. Considerando la dimensiones epistemológicas, cognitivas e instruccionales, puestas en juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Objetivos Específicos

Un aspecto inicial para esta investigación dentro del marco teórico que representa el enfoque ontológico-semiótico, es caracterizar los significados institucionales de la integral en una variable real en la formación de las carreras técnicas universitarias. Para el logro de esta meta, se plantean los siguientes objetivos:

OE1 Desarrollar un estudio epistémico sobre la integral en una variable real, con la finalidad de profundizar en su origen, evolución, desarrollo y las aplicaciones más relevantes y establecer las diferentes configuraciones epistémicas de cada etapa.

OE2 Hacer un estudio comparativo de naturaleza curricular de las carreras técnicas universitarias, para establecer las relaciones que tiene la integral en una variable real con las diferentes áreas del saber presentes en la formación.

Una vez caracterizados los significados institucionales de la integral en una variable real, se requiere caracterizar la idoneidad didáctica de un proceso de estudio de la integral en una variable real con un grupo de estudiantes de una carrera técnica universitaria. Para tal fin se plantean los siguientes objetivos.

OE3 Caracterizar la idoneidad didáctica tras Implementar un proceso de estudio sobre la enseñanza y aprendizaje de la integral en una variable real, con un grupo de estudiantes de la carrera informática del IUET-LV.

OE4 Caracterizar los significados personales que sobre la integral en una variable real construyan los alumnos, con lo que se profundizará en la idoneidad cognitiva del proceso de estudio.

Importancia de la investigación

Una de las aspiraciones de la comunidad de investigadores en Educación Matemática, es el poder dar respuesta a cada uno de las problemáticas que se detectan en el aprendizaje de los estudiantes, con la finalidad de diseñar nuevas alternativas de enseñanza y aprendizaje en las que se puedan solventar. Una mejor comprensión de la integral en una variable real, por parte de los alumnos de las carreras técnicas y científicas es una preocupación de muchos de los profesores que se desempeñan en los primeros cursos de las mencionadas carreras.

La integral en una variable real, es uno de los temas del cálculo infinitesimal donde los estudiantes manifiestan muchas deficiencias, sin embargo las razones de éstas son múltiples, lo que dificulta indagar sobre ellas. Así, el abordaje de esta problemática estará enmarcado en el enfoque ontológico-semiótico de la instrucción y cognición de la matemática, con lo cual se espera que este estudio profundice de forma sistemática y rigurosa en la enseñanza y aprendizaje de este tema.

Por otra parte, se espera que al diseñar y evaluar una trayectoria didáctica, con sus sistemas de prácticas en base a este enfoque y ser específicas para las carreras técnicas universitarias, se contribuya a generar teoría dentro de la Educación Matemática. También esta investigación es relevante porque profundizará en la problemática de la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral. La integral en una variable real en las carreras de ingeniería y TSU, además de las aplicaciones clásicas del área y volumen, es de utilidad en temas como: Mecánica de los sólidos, Termodinámica, Circuitos Eléctricos y Electrónicos, Ciencia y Tecnología de Materiales, Informática, Señales en Telecomunicaciones y por supuesto en Física. De aquí la importancia de la comprensión de este tópico por los estudiantes en su respectivas carreras. Ellos deben aprender lo que representa este objeto matemático y las situaciones problemáticas que con él pueden resolverse.

Se espera también, que los resultados de esta investigación puedan aportar aspectos didácticos importantes para ser considerados al diseñar e implementar nuevas formas de enseñanza de este tema en el marco de las carreras técnicas universitarias.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

Introducción

En el planteamiento del problema presentado en el capítulo anterior, se perfila la necesidad de implementar un estudio riguroso y sistemático que permita indagar a profundidad en la problemática que aborda la Didáctica de la Matemática en asuntos relacionados con el saber matemático, el aprendizaje de los estudiantes y la manera como se desarrollen los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por tal motivo el investigador consideró la utilización del enfoque ontológico-semiótico (EOS) para la cognición e instrucción de la matemática (Godino, 2003), útil en el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática vistos como un sistema didáctico. En este capítulo se explicita los aspectos teóricos relacionado con este enfoque y otros relacionados con el desarrollo de la investigación. También se presentan investigaciones previas que son antecedentes a ésta.

Aspectos teóricos

Godino (2003) en el EOS propone seis dimensiones o facetas presentes en todo proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática: *epistémica* (relativa a los significados institucional), *cognitiva* (significados personales) ,*mediacional* (recursos tecnológicos y temporales), *emocional* (actitudes afectos , emociones), *interaccional* (interacción docente-discente) y *ecológica* (relaciones intra e interdisciplinares y sociales).

El objeto principal de esta investigación es netamente didáctico, ya que pretende analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral en una variable real, en el contexto de las carreras técnicas universitarias, con la finalidad de determinar factores que condicionan el aprendizaje de los estudiantes en relación a este tópico del cálculo infinitesimal.

En este estudio se espera determinar el significado[5] que tiene la integral en una variable real en la formación de las carreras técnicas Universitarias. El punto inicial es el análisis epistémico-curricular que permitirá establecer el saber institucional pretendido, en el cual se fundamentará el análisis de los significados que los estudiantes le den al saber apropiado mediante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

A continuación se describen las nociones teóricas que se pondrán en funcionamiento en el desarrollo de esta investigación y que están contenidas en el enfoque *ontológico-semiótico* de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002, 2003).

Los "significados institucionales y personales de un objeto matemático" son nociones medulares dentro de esta teoría (Godino y Batanero, 1994; Godino, 1999a, 2002, 2003; Arrieche, 2002) y que se deriva de la noción de *sistemas de prácticas* (operativas y discursivas) implementadas por una persona (o institución) al resolver un tipo de problema matemático. En este contexto un *objeto matemático* es "todo aquello que pueda ser indicado, todo lo que pueda señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas" (Godino, 2001, p.6).

[5] El significado desde el punto de vista amplio como los concibe Godino y colaboradores en el EOS.

Significados institucionales y personales

En el análisis de los significados institucionales de un objeto matemático interesa distinguir cuatro tipos: de referencia, pretendido, implementado y evaluado (Godino, 2003, p.138).

Significado de referencia: Es lo que representa el objeto para las instituciones matemáticas y didácticas. Son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto matemático que se fija como objeto institucional y que es el producto de las orientaciones de los expertos y del análisis de los currículos.

Significado pretendido: Es el sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso de instrucción.

Significado implementado: Es el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que efectivamente tiene lugar en la clase de matemática, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes.

Significado institucional evaluado: Son las tareas o cuestiones que incluyen las pruebas de evaluación y pautas de observaciones de los aprendizajes.

En cuanto al significado personal (el del estudiante) es posible hablar de significado global, declarado y logrado (Godino, 2003, p.139).

Significado global: Es la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno para resolver un campo de problemas.

Significado declarado: Da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo los aciertos y los desaciertos desde la perspectiva institucional.

Significado personal logrado: Se corresponde con las prácticas manifestadas y que son conformes con la pauta institucional establecida. El significado declarado en desacuerdo con el establecido institucionalmente es lo que usualmente se denominan *errores de aprendizaje.*

Funciones Semióticas

La definición de *función signo* propuesta por Hjelmslev (1943) es aceptada bajo la denominación de *función semiótica* que le asignó Eco (1979). Esto va a permitir identificar tipos básicos de significados elementales considerando la naturaleza diversa del contenido de la función semiótica. Se puede señalar que cada función semiótica implica un acto de semiosis por parte del sujeto que la interpreta, es decir; es un acto de conocimiento y hablar de conocimiento es hablar de significado y así de funciones semióticas. Arrieche (2002) aclara esta noción de la siguiente manera:

> Finalmente la noción de *función semiótica* pretende tener en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de la actividad matemática y de los procesos de difusión del conocimiento matemático. Se dice que se establece una función semiótica entre dos entidades (ostensivas o no ostensivas) cuando entre ambos se establece una dependencia representacional o instrumental, esto es, una de ellas se "pone en lugar de la otra", o una de ellas "es usada por la otra": Esta noción permite formular en términos semióticos, y de una manera general y flexible el conocimiento matemático y explicar en términos de *conflictos semióticos* las dificultades y errores de los estudiantes. (p.38)

Las funciones semióticas (FS) se clasifican en dos grandes tipos: *referenciales* y *operativas* que aportan puntos de vista complementarios y que responden a los dos tipos de teorías semióticas y que tratan de articular ambas maneras de ver el lenguaje en la actividad y pensamiento matemático.

Tipos de funciones semióticas

El objeto inicial y final de una FS puede constituirse por varios elementos primarios. Estas entidades primarias pueden ejercer de expresión o contenido en las funciones semióticas, lo que origina diferentes tipos de FS, algunas de las cuales pueden ser interpretadas como procesos cognitivos específicos. Godino (2003) de acuerdo con los contenidos (significados), presenta la siguiente tipología:

1. *Significado lingüístico:* Cuando el objeto final, o contenido de la misma, es un término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico.
2. *Significado situacional:* Cuando el objeto final es una situación problema.
3. *Significado conceptual:* Diremos que una correspondencia semiótica es del tipo conceptual, cuando su contenido es un concepto-definición.
4. *Significado proposicional:* Cuando el contenido es una propiedad o atributo del objeto.
5. *Significado actuativo:* Cuando su contenido es una actuación u operación tal como un algoritmo o procedimiento. En cualquier proceso de cálculo se establecen dependencias entre distintas partes de la secuencia, que son de naturaleza actuativa u operatoria.
6. *Significado argumentativo:* Cuando el contenido de la función semiótica es un argumento.

Las FS son una herramienta para determinar significados, por lo cual permitirá determinar los significados dependiendo del tipo de entidad primaria del contenido analizado. Esto resulta ser muy atractivo ya que al determinar los significados sobre la integral en una variable real puestos en juego en las actividades de resolución de problemas, se presenta esta variedad de entidades primarias, con lo que es posible visualizar de acuerdo a su función semiótica que tipos de significados son generalmente atribuidos a este objeto matemático.

Las FS propician el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, lo que dentro de esta teoría se denomina *análisis epistémico de un proceso de instrucción* (Godino, 2003, p.184). Para ello se descompone el proceso de instrucción en unidades primarias de análisis, con el fin de caracterizar el tipo de actividad matemática y explicar los diferentes objetos que describen la actividad matemática y los resultados que se obtienen de ésta. En la teoría citada se distinguen seis categorías de entidades primarias como constituyentes del sistema de prácticas:

E1: *Situacional*: se enuncia un ejemplar de cierto tipo de problemas.

E2: *Actuativo*: se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver problemas.

E3: *Lingüístico*: se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc.

E4: *Conceptual*: se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego.

E5: *Preposicional*: se enuncian e interpretan propiedades.

E6: *Argumentativo*: se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

Estas categorías se suceden durante todo el proceso de instrucción de un tema o contenido matemático.

En esta investigación, una vez que se haya determinado el significado institucional pretendido sobre la integral en una variable real, mediante el análisis epistémico curricular, se iniciará un proceso de modelización de la instrucción para este objeto matemático. Para tal fin se implementará una *trayectoria didáctica,* que en lo posible permita que los significados que los estudiantes le den al mencionado objeto, no discrepe del significado institucional pretendido. En el EOS se define *trayectoria muestral* como la que describe la secuencia particular de cada función que ha tenido lugar en el tiempo y especifica seis de estas funciones (Godino, 2003, pp.180 -181):

Trayectoria epistémica es la distribución a lo largo del tiempo de enseñanza de los componentes del significado institucional implementados. Estos componentes se refieren a problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades y argumentos se van sucediendo en cierto orden en el proceso de instrucción.

Trayectoria docente es la distribución en el tiempo de instrucción de las funciones, tareas y acciones correspondientes al docente.

Trayectoria discente es la distribución de las funciones y acciones que desempeñan los estudiantes (una para cada estudiante).

Trayectoria mediacional representa la distribución de los recursos tecnológicos usados durante la instrucción, tales como: libros, apuntes, manipulativos, software, etc.

Trayectoria cognitiva es la *cronogénesis* de los significados personales de los estudiantes.

Trayectoria emocional es la distribución temporal de los estados emocionales, valores, afectos y sentimientos de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y el proceso seguido.

Cada una de estas trayectorias es una realización de un proceso estocástico, puesto que el proceso de instrucción tiene característica no determinista. Estas trayectorias una vez implementadas, pueden ser valoradas en su *idoneidad*[6] *didáctica* mediante los criterios que presentan Godino, Contreras y Font (2006) y que seguidamente presentamos.

Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio de la Matemática

En este apartado describiremos brevemente los criterios teóricos existentes en el enfoque ontológico-semiótico para la valoración didáctica de

[6] Según el diccionario de la RAE, idóneo, quiere decir adecuado y apropiado para algo. En este caso se refiere al grado en que un proceso de estudio matemático (o una parte del mismo) permite el logro de los fines pretendidos.

un proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Godino, Contreras y Font (2006) estiman seis criterios que se describen a continuación.

Idoneidad epistémica: Es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados durante un proceso de enseñanza y aprendizaje, respecto a los significados de referencia.

Idoneidad cognitiva: Con ella se valora en qué medida los significados implementados están en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes (Vygostski, 1934) , así también valora el grado de cercanía de los significados personales alcanzados por los estudiantes de acuerdo a los pretendidos o implementados.

Idoneidad interaccional: Valora el grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten: a) Determinar posibles conflictos semióticos y b) resolver los conflictos que se presentan durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, con la aplicación de la negociación de significados.

Idoneidad mediacional: Con este criterio se valora la disponibilidad y adecuación de recursos materiales y temporales fundamentales para el desarrollo del proceso de instrucción y cognición.

Idoneidad emocional: Este criterio sirve para valorar el interés y motivación del alumnado por el proceso de estudio y los objetos matemáticos puestos en juego.

Idoneidad ecológica: El grado de adaptación que tiene el proceso de estudio al proyecto educativo de la universidad, las orientaciones curriculares, las condiciones del entorno social, etc.

Estos tipos de idoneidad deben ser integrados como plantean Godino, Bencomo, Font y Wihemi (2006):

> “Como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados y los significados institucionales pretendidos / logrado” (p.5).

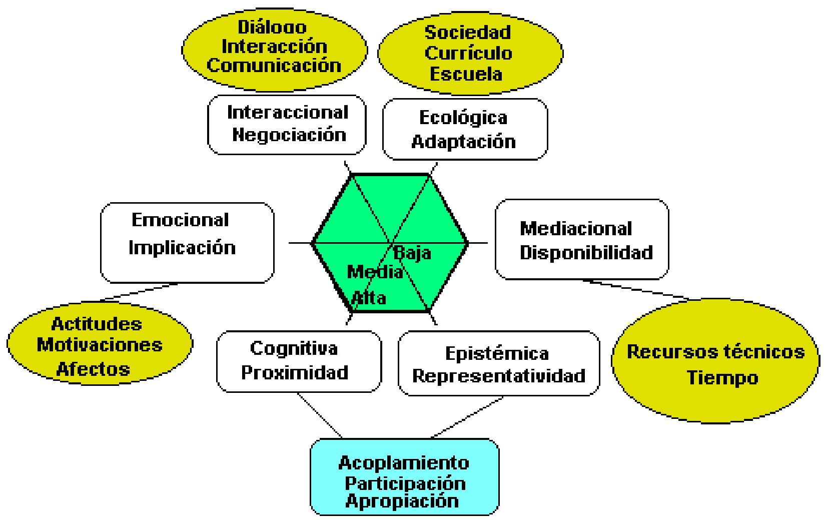
También Godino, Bencomo, Font y Wihemi (2006) sintetizan los componentes de idoneidad didáctica de un proceso de estudio de la matemática (ver figura 2). El hexágono regular representa la idoneidad de un proceso de estudio pretendido, lo cual supone una alta idoneidad en cada criterio. El hexágono irregular de la parte interna representa el grado de idoneidad que efectivamente se alcanzó en la implementación del proceso.

Como se señaló anteriormente las idoneidades epistémica y cognitiva que tienen que ver con la representatividad de los significados pretendidos (o implementados) y la adaptación de estos significados con respecto a los significados personales iniciales que respectivamente están planteadas en función a la noción de significado de acuerdo a EOS Godino (2003), se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas (institucionales y personales) y que se hacen operativas mediante la configuración epistémica[7] y configuración cognitivas[8].

[7] Secuencia interactiva de lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones como las acciones requeridas para llevar a cabo una tarea, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidos entre ambos.

[8] El sistema de prácticas operativas y discursivas en que un sujeto pone de manifiesto su concepción sobre un objeto matemático y que es relativo a una circunstancia, y a un momento dado y que se describe mediante la red de objetos y relaciones que se ponen en juego.

FIGURA 2

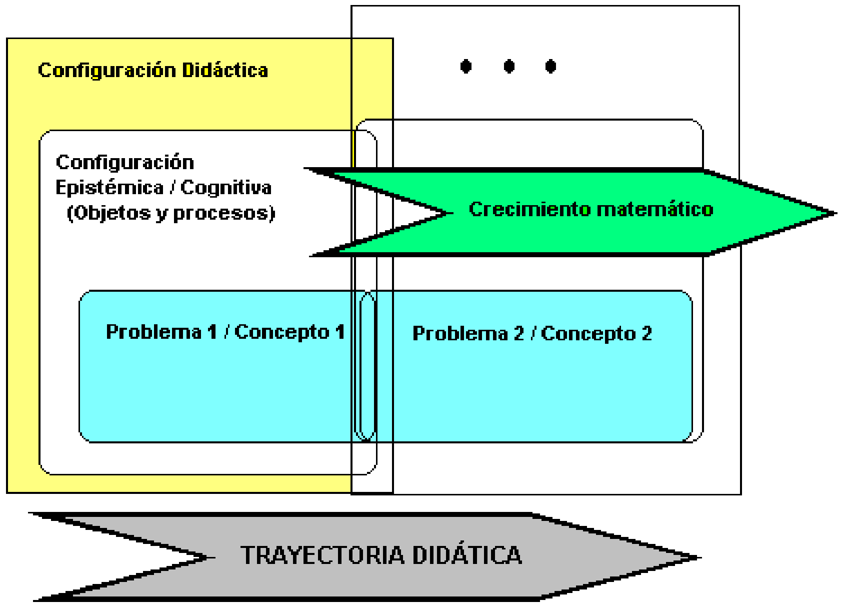


Componentes de la idoneidad didáctica Godino, Bencomo, Font y Wihemi (2006)

Godino, Bencomo , Font y Wilhemi (2006) señalan que "...el núcleo de dichas configuraciones son las situaciones problemas seleccionadas para contextualizar y personalizar los significados" (p.7). Por otra parte indican que el análisis didáctico se debe centrar en el progreso que se tenga desde esta situación problema hasta las configuraciones epistémicas/cognitivas y de éstas hacia la configuración didáctica[9] que además de incluir el saber y los sujetos, incluye el profesor, los recursos mediacionales y las interacciones entre todos los componentes. La continua secuencia de configuraciones didácticas debe conducir al *crecimiento matemático* el cual se describe en la siguiente figura como un proceso interactivo que conduce continuamente al mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje.

[9] La secuencia interactiva de estados de las trayectorias que tiene lugar a propósito de una situación problema (o tarea). Se explica como una realidad organizacional, como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de las trayectorias didácticas de las que forman parte.

FIGURA 3



Centro de la atención del análisis didáctico. Godino, Bencomo, Font y Wihemi (2006)

Es indudable que el análisis de valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio de la matemática, aplicado iteradamente de acuerdo a los resultados obtenidos, tiende a la "perfección" de la didáctica de un determinado proceso planificado para la enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático.

Se considera oportuno en el estudio de la *trayectoria muestral*[10] del proceso de instrucción de la integral de una variable real en el contexto de las carreras técnicas universitarias, ya que la intención es modelizar una trayectoria didáctica que genere las condiciones apropiadas para que los estudiantes le otorguen significados que no estén en conflicto con los significados institucionales pretendidos, en esta tarea hay que definir de forma clara las seis trayectorias antes mencionadas, ellas requieren para su desarrollo del tiempo didáctico que para Godino (2003) se conciben como "un

[10] Describe la secuencia particular de cada trayectoria que ha tenido lugar en el tiempo.

vector cuyas componentes son los valores de las duraciones temporales de las diversas actividades docentes y discentes que tienen lugar en un proceso de estudio" (pp.180-182).

En los últimos años, a raíz de la revolución de la informática, se ha hecho cada vez más común el uso de este avance tecnológico en las experiencias de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Existen diferentes estudios sobre las bondades del uso de software matemáticos, tales como: Maple, Derive, Matlab, etc. en las actividades educativas. El uso de la tecnología permite al docente generar actividades de aprendizaje más dinámicas, donde el estudiante tiene una mayor participación. El alumno tiene la posibilidad de experimentar, visualizar, comprobar, calcular y representar el objeto matemático en estudio. Con estas experiencias es probable una mejor construcción de los significados personales.

En el enfoque Ontológico-semiótico la dimensión mediacional tiene que ver con el uso de los recursos para el aprendizaje. En este estudio al diseñar la trayectoria didáctica se considerará la utilización del software Maple.

Algunos aspectos didácticos del computador

En cuanto al uso del computador como apoyo a la enseñanza, se pueden distinguir entre lo que significa *aprender desde el computador* y *aprender con el computador*. Salomón, Perkins y Globerson (1991) los diferencia de la siguiente manera: *Aprender desde el computador* se remite a los efectos del computador en el usuario, sin necesidad que éste participe en el proceso; *aprender con el computador* requiere que el usuario participe activamente, los efectos se producen sobre el usuario a propósito de su interacción intelectual con el computador. En la actividades de clase, cuando se aprende con el computador, se produce un estimulo al pensamiento y por ende se facilita el aprendizaje en los estudiantes, el computador se convierte en un amigo intelectual.

En esta investigación se utilizará el computador en diferentes actividades de enseñanza y aprendizaje de la integral en una variable real. Existen diversos estudios e investigaciones que evidencian las ventajas del uso del computador en la enseñanza y aprendizaje, a manera de ejemplo citaremos dos de las de mayor envergadura y que las presenta Cerda (2002) en su ensayo. El primero se refiere al metanálisis de Kulik realizado en 1994, soportado en más de 500 investigaciones de enseñanzas apoyadas por el computador y en las cuales se llegó a la conclusión, que se evidencia que el uso del computador redujo el tiempo para lograr el aprendizaje y en una actitud más positiva en el aula. El segundo estudio, el de Sivinkachala en 1998, en el que se consideraron 219 investigaciones sobre el uso del computador en la enseñanza entre los años 1990 y 1997 y en el cual se obtuvo como resultado que los estudiantes insertos en ambientes ricos tecnológicamente, mostraron avances en las principales áreas del saber, incluyendo a los que presentaban problemas de aprendizaje.

Sin embargo a pesar que el uso del computador y sus diversas herramientas y aplicaciones, es en la actualidad usual en muchas instituciones educativas y en la vida de muchos estudiantes y profesores, su potencial pedagógico todavía ha sido poco aprovechado, es necesario que se utilice de manera que potencie el aprendizaje. Una de las dimensiones planteadas por Godino (2003) es la mediacional y tiene que ver con los recursos instruccionales como el currículo, programas, textos, calculadoras, computadores, software,..etc. Aun cuando son seis dimensiones independientes, ellas interactúan en cualquier proceso de instrucción y cognición de la Matemática. El investigador considera que al implementar una trayectoria didáctica para la enseñanza de la integral en una variable real con el apoyo del computador, éste tendrá un uso más pedagógico, debido a que se usará con base en el objeto matemático en estudio (dimensión epistémica), a los requerimientos de la interacción docente-discente (dimensión interaccional), de apoyo a la construcción del significado personal de los alumnos (dimensión cognitiva) y por último en base a los afectos y sentimientos generados por los estudiantes hacia el tema en estudio, el computador puede servir para mejorar la motivación por el estudio de aquellos objetos matemáticos que producen desafectos y sentimientos negativos en el alumno (dimensión emocional).

Zona de desarrollo potencial

Para Vygotsky (1978) La zona de desarrollo próximo (ZDP) está referida al espacio o diferencia entre las habilidades que ya posee el estudiante y lo que puede llegar a aprender a través del proceso de enseñanza y aprendizaje. El concepto de la ZDP se basa en la relación entre habilidades actuales del alumno y su potencial. Un primer nivel, el desempeño actual del estudiante es cuando puede trabajar y resolver tareas o problemas sin la ayuda de otro. Sería este nivel basal lo que comúnmente es evaluado en las escuelas. El *nivel de desarrollo potencial* es el nivel de competencia que un alumno puede alcanzar cuando es guiado y apoyado por otras personas. La diferencia o brecha entre esos dos niveles de competencia es lo que se llama ZDP.

Investigaciones previas de referencias

A continuación describiremos brevemente algunas investigaciones previas que han servido de punto de referencia a esta investigación. En este aspecto nos centraremos en revisar algunos trabajos previos en los que se pone de manifiesto la problemática presente en la enseñanza del *Cálculo.*

Aspectos epistemológicos

Para Álvarez (2003) se puede decir que la génesis de lo que hoy denominamos *Cálculo* se puede ubicar en los trabajos de Arquímedes (287-212 A de JC) al hallar el centro de gravedad de un paralelogramo, un triángulo y un trapecio además del cálculo de áreas y volúmenes que realizó. Sin embargo ya para los griegos existía el infinito de dos maneras diferentes: lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, perceptible en la paradoja de Zenón presente en Aquiles y la tortuga. Pero fue necesario esperar 2000 años para que Eudoxio discípulo de Aristóteles señalara el siguiente postulado "Toda cantidad finita puede ser agotada mediante la sustracción de una cantidad determinada". Eudoxio de alguna manera toma la idea del famoso principio de Arquímedes prohibido por Aristóteles. La idea original de Arquímedes fue considerar las áreas como una colección infinita de segmentos.

De acuerdo a lo que señala Álvarez (2003), es en el siglo XVII cuando los matemáticos Kleper y Cavalieri rompieron el misterio que los griegos habían creado en torno al infinito. Este hecho fue tan significativo que medio siglo después se descubriría el *Cálculo Infinitesimal*. Cavalieri consideró las áreas constituidas por segmentos y los volúmenes formados por pedazos de áreas planas, con ello se comienzan las bases del método mecánico desconocido para ese momento. Otros que contribuyeron a la creación de lo que hoy conocemos como *Cálculo* fueron Fermat y Barrow; Fermat desarrolló un nuevo método para calcular tangentes, el método de las desigualdades, que además era útil para calcular los máximos y mínimos de una curva. Barrow por su parte demuestra su versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo.

Arrieta (2002) refiere que realmente son Newton y Leibniz los que en la última parte del siglo XVII construyeron lo que hoy se denomina *Cálculo*. Se sabe que de forma independiente pudieron hilvanar todos esos métodos infinitesimales manejados por sus antecesores, enfocado en los dos conceptos que hoy se denominan *la derivada* y *la integral*.

Posteriormente, el desarrollo del cálculo continuó con los aportes de Euler, Cauchy, Laplace, Poincaré entre otros y movidos por la solución de los numerosos problemas del mundo real como el movimiento de masas sujetas a ciertas fuerzas, el diseño de lentes para telescopios, la elaboración de relojes de precisión y otros retos que enfrentaba la comunidad científica en los siglos XVII y XVIII y que propiciaron la consolidación del *Cálculo Diferencial e Integral*. El desarrollo de las ecuaciones diferenciales se dio de forma paralela al cálculo diferencial, ambos con la finalidad de entender los fenómenos del mundo real, ya sean físicos, económicos, biológicos y de diversas índoles.

Grijalva (2008) señala que en el desarrollo histórico-epistemológico de la integral de una función se muestra cómo los significados presentes en el momento de desarrollar su trabajo (su contexto), llevaron a los matemáticos a construir formas específicas de este objeto. Además en cada etapa se pueden identificar: a) Los objetos emergentes de los sistemas de prácticas, b) las componentes del significado construido y c) las interrelaciones entre ellas, lo que genera una visión global del significado de la integral.

Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2005) reconstruyen el significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. En este trabajo establecen siete configuraciones epistémicas para este tópico de acuerdo a las situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentaciones que se utilizaron en las diferentes épocas, desde sus orígenes hasta su consolidación. A continuación las presentamos en el siguiente cuadro.

CUADRO 2

Configuraciones epistémicas de la integral definida Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2005)

	Situaciones	Acciones	Lenguaje	Conceptos	Propiedades	Argumentos
Generalizada	Generalización de la integral	Integración funciones medibles	Analítico Notaciones conjuntitas	Suma superior e inferior Integral definida Conjunto Función medible	Teorema del valor medio Teorema fundamental del cálculo	Deducción
Analítica	Fundamentación del cálculo	Cálculo de la integral definida como límite de una suma	Analítico Algebraico	Función Límite Derivada Diferencial Integral	Condiciones de existencia de la integral	Deductiva
Sumatoria	Relación inversa entre integración y derivación	Suma de rectángulos infinitesimales Método formal de cálculo de suma y diferencia de infinitésimos	Simbólico numérico	Secuencias de diferencias curvaturas	Fórmulas del cálculo de derivadas	Deductiva
Primitiva	Relación inversa entre integración y derivación	Desarrollo binomial	Fluentes Fluxiones rotaciones	Fluentes Fluxiones	Teorema fundamental del cálculo	Deductivo
Infinita	Situaciones expresadas en tipos de funciones algebraicas y transcendentes	Integración numérica	Indivisible	Infinitésimo Serie Triángulo característico	teorema de Cavalieri	Exhausción sin doble reducción
Intuitiva	Estudio del cambio del movimiento	Tendencias a procesos numéricos	Geométrico y aritmético	Tasa de cambio	Ley de Bradwardine y de Swineshead	Argumentaciones intuitivas para mejoras del método exhaustivo
Finita	Cuadratura Cubatura	Método de exhausción	Geométrico ordinario	Área Volumen Medida	Axioma de Arquímedes; fórmulas, áreas y volúmenes.	Doble reducción al absurdo

Entre sus conclusiones manifiestan que estas configuraciones pueden ser reagrupadas y descompuestas dando origen a nuevas configuraciones o sub-configuraciones que pueden ser adaptadas a las necesidades de cada investigación. La red formada por estas configuraciones constituye la concreción del significado global de la integral definida, el cual se entiende en el EOS como sistema de prácticas y que da respuesta a la pregunta epistemológica ¿Qué es la integral definida?

Por otra parte señalan que esta reconstrucción global de la integral definida es un punto de partida para abordar nuevas investigaciones, como por ejemplo: "¿Qué criterios serían necesarios tener en cuenta para valorar la idoneidad socio-profesional de una propuesta curricular sobre la integral para la formación de profesores de educación secundaria?" (Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino, 2005, p.164).

Aspectos cognitivos

Las investigaciones cognitivas han dedicado tiempo en el estudio de los procesos relacionados con el aprendizaje de conceptos matemáticos, en este sentido Azcárate y Camacho (2003) señalan: que es fundamental tomar en cuenta la forma en que se aprende: "la forma en que se aprende no suele coincidir con la manera lógica formal de presentar un concepto matemático ante la comunidad matemática; se puede incluso afirmar que con frecuencia dicha presentación lógica trae consigo obstáculos cognitivos al estudiante" (p.137). Estos autores consideran que no siempre el presentar los contenidos matemáticos a enseñar en el mismo orden lógico del desarrollo teórico de la Matemática, es lo más adecuado. En algunos tópicos del cálculo, esto puede convertirse en un obstáculo en los estudiantes para la comprensión y aprendizaje del tema en estudio.

Tall (1991); Azcárate y otros (1996) en sus investigaciones sobre pensamiento matemático avanzado indican que en los cursos de matemática superior tienen mucha importancia los procesos cognitivos como: abstraer, analizar, clasificar, conjeturar, representar, conceptuar, inducir, visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar. La esencia de estos procesos es de origen psicológico. Así para que la enseñanza del Cálculo sea más efectiva, se requiere programar situaciones didácticas donde los estudiantes puedan desarrollar estos procesos psicológicos e ir construyendo el pensamiento matemático útil para resolver problemas propios de su carrera.

Turégano (1998) con base en la problemática de sus estudiantes para aprender los conceptos básicos del Cálculo, encontró que éstos antes de estudiar Cálculo Infinitesimal no se les habla del infinito y de la idea de límite. La investigación se desarrolló en dos fases; en la primera, la atención se centró en entender en forma profunda los conceptos fundamentales, en particular el concepto de área y su relación con la integral. Para tal fin se realizó un estudio de fuentes primarias y de historiadores, el análisis de manuales, tratados y textos de estudios y el currículo con la finalidad de elaborar y proponer un modelo para la construcción conceptual de la Integral Definida, como una continuación de la noción de área conocida por los estudiantes en sus primeros años de escuela. La segunda fase es experimental, en ella se implementó y evaluó el modelo. Se analizó el impacto en el aprendizaje de los conceptos y destrezas necesarias para la comprensión de la Integral definida.

A manera de reflexión final de su estudio, Turégano (1998) señala que la introducción de la Integral Definida mediante su definición geométrica permite establecer una relación integral-medida que favorece la transferencia a otros contextos. Es importante la imagen visual que permite al estudiante ver que los cambios que se presentan entre dos magnitudes relacionadas por una función y las áreas bajo los gráficos son matemáticamente iguales.

Orton (1983ª) en su estudio realizado para indagar la compresión de la integral, concluye que los cuatro ítems que en su test se referían sobre la comprensión de la integración como el límite de una suma, resultaron ser las de mayor dificultad para la mayoría de los estudiantes. Quizás esto se deba en primer lugar a que se les dificulta establecer relaciones entre el área de una región con el proceso de suma de infinitas cantidades *infinitamente pequeñas* y en segundo lugar al no poderle dar significado a un *infinitésimo.*

Llorens y Santoja (1997) por su parte destacan que generalmente, los estudiantes identifican *Integral* con *primitiva*. La integral para ellos no se basa en un proceso de convergencia ni en algún aspecto geométrico. Esto origina que el estudiante considere a la integral como un ente puramente algebraico. Así el alumno puede conocer todos los métodos de integración pero, no será capaz de aplicarlos al cálculo de áreas e ignora por completo las sumas de Riemann.

El estudio de Meléndez (2005), basado en el modelo semiótico-antropológico propuesto por Godino y Batanero (1994 y 1998), hace uso de las dimensiones epistemológicas, cognitivas e instruccionales para indaga sobre los significados personales de la derivada en estudiantes de ingeniería. Emplea una metodología mixta, es decir; utiliza un enfoque cualitativo en las fases epistemológicas e instruccional y esquemas cuantitativos para el análisis de los datos obtenidos en la fase cognitiva. El análisis epistemológico le permitió una visión profunda acerca del desarrollo del significado institucional de la derivada y sus aplicaciones. El estudio en general le permitió la sistematización de los diferentes tipos de errores que cometen los estudiantes de ingeniería en relación a la derivada y que son útiles para planificar nuevas estrategias para la enseñanza y aprendizaje.

Los errores se caracterizaron en cinco tipos, que los presentamos de acuerdo a la frecuencia de ocurrencia. En primer lugar están los *errores conceptuales*; desconoce o aplicó mal el concepto de derivada. De segundo lugar se tienen los *errores en fórmulas,* el estudiante conoce o interpreta bien la propiedad, pero se equivoca al aplicarla. Los *errores de procedimiento*; conoce el concepto de derivada y sus propiedades, pero los aplica mal. En cuarto lugar se presentan los *errores de notación*; no usa o hace mal uso de las notaciones y/o nomenclatura y por último los *errores de operaciones elementales*; el estudiante declara desconocimiento o inadecuada interpretación de las operaciones básicas.

Aspectos instruccionales

Los aspectos instruccionales se componen de las dimensiones: docente, discente, mediacional y la emocional. Al respecto, Pulido (1998) señala que es notorio que la enseñanza de los principios fundamentales del cálculo es una problemática. Se puede enseñar a los estudiantes de forma mecánica el cálculo de derivadas y primitivas y a resolver problemas clásicos, pero éstos no podrán alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos del pensamiento que son la médula de este campo de la Matemática. Para este autor, existen señales pocas alentadoras sobre la "*Reforma del Cálculo"* que se vienen implementando en Estados Unidos desde hace más de diez años, porque éstas se han concentrado en el modo de enseñar y al cambio de rol del profesor y del alumno (resolución de problemas, proyectos, etc.), dejando de lado, el qué se enseña y el significado que el estudiante le otorga.

Ladraña (2001), evalúa el significado del cálculo integral en estudiantes del Ciclo Obligatorio Universitario (COU) y en bachillerato, con la finalidad de contribuir al análisis de su problemática didáctica. Para ello diseña un instrumento para explorar el significado que sobre integración tienen los estudiantes de los niveles del sistema educativo español antes mencionados. Entre las conclusiones dadas por este autor se mencionan las de mayor relevancia.

1. Los aspectos teóricos relacionados al cálculo integral, tal como aparecen en los libros de textos, resultan sumamente complicados para muchos estudiantes, que además no comprenden la razón por la que se presentan así.
2. La mayoría de los estudiantes identifican integración con el cálculo de áreas, pero para calcular el área no se guían por la representación geométrica, lo que origina que le asignan un valor numérico producto de simples cálculos aritméticos
3. La reciprocidad integral-derivada, que proporciona el Teorema Fundamental del Cálculo Integral o el cálculo de primitivas.
4. El estudio de las técnicas de integración tiene un lugar preponderante, relegando al concepto de la integral a el recuerdo del concepto.
5. La mayoría de los estudiantes carecen de criterios para reconocer cuando un problema es resoluble por integración, incluso muchos no reconocen la presencia de la integral.
6. La integración es percibida por muchos estudiantes como una técnica afortunada y no como un procedimiento analítico.

Estos resultados obtenidos por Ladraña (2001) son importantes para ser profundizados en este estudio, con la aplicación del enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática planteada en Godino (2003).

Muñoz, G. (2006) al revisar algunos textos de Cálculo integral con la finalidad de estudiar los efectos del discurso matemático escolar vigente en los profesores y estudiantes encontró:

a) Primacía de algoritmo sobre lo conceptual, se han concentrado en las dificultades algebraicas del cálculo de primitivas y de la sumatoria de Riemann.

b) Primacía de lo conceptual sobre lo algorítmico. Esto se puede apreciar en los textos: Tucker (1991), Artigue (1995) y Bishop (1999).
c) Una especie de relación dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico.

Una de las principales conclusiones y en base a ella construye su propuesta, es la separación entre lo conceptual y lo algorítmico, a los estudiantes se les enseñan procedimientos para calcular integrales con los llamados métodos de integración, sólo a través de ejercicios repetitivos de una manera separada de la parte conceptual y hasta se abordan las llamadas aplicaciones cuando se estudian aspectos de las nociones de la integral. En algunos textos se reduce la parte conceptual a las definiciones de integral dadas por Cauchy y Riemann.

En Artigue (1995) se consideran los planteamientos didácticos de Poincaré en su conferencia sobre las definiciones matemáticas (Poincaré, 1904) a propósito de la reforma de 1902 y la introducción del cálculo en los Liceos en las secciones científicas y técnicas. En cuanto al cálculo integral él señaló con relación al estudiante: "... no sabrá nunca qué es una integral si no se le ha mostrado con anterioridad lo que es."(p.101). Por otra parte asevera que el estudiante comprenderá lo que es una superficie hasta que conozca bien lo que significa el cálculo integral. Más adelante afirma:

> "Lo único que queda por hacer es muy simple: definir la integral como el área comprendida entre el eje x, dos ordenadas[11] y la curva, y mostrar que cuando una de las ordenadas se desplaza, la derivada de esa área es precisamente la ordenada en sí. Este fue el razona miento de Newton, fue así como surgió el cálculo integral" (p.101).

[11] La ordenada para Poincaré significa una recta paralela al eje y.

Los aspectos teóricos de estas investigaciones relativas a los asuntos instruccionales de la integral, fueron de mucha utilidad para diseñar un proceso de enseñanza y aprendizaje para este tópico, apoyado por un software matemático donde el estudiante pudo en base a actividades, explorar y hacer conjeturas sobre la integral definida antes de formalizar su parte conceptual.

Todas estas investigaciones revisadas con anterioridad y clasificadas en: epistemológicas, cognitivas e instruccionales marcaron en gran parte el rumbo del trabajo que se presenta en los siguientes capítulos.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

Introducción

En este capítulo se presenta la estructura del esquema metodológico que se seguirá para el logro de los objetivos propuestos. El marco teórico expuesto en el capítulo II (el enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática) permite combinar aspectos cualitativos y cuantitativos de acuerdo a las dimensiones básicas planteadas en este enfoque: *epistémica*, *cognitiva*, *mediacional*, *emocional*, *interaccional* y *ecológica*. Así que la metodología a seguir, según lo expuesto en (Goetz y Lecompte, 1988) va ha ser mixta, ya que combinan enfoques cualitativos y cuantitativos, con predominio de lo cualitativo. Cabe destacar que nuestra investigación se ha situado en un enfoque epistemológico (Gascon, 1998), puesto que elegimos como punto de entrada y central para indagar los problemas didácticos, el propio conocimiento matemático, además que el tema propuesto en esta tesis es de naturaleza curricular sobre “ La integral en una variable real en la formación técnica universitaria” entendiéndose el currículo matemático según Rico y Sierra (1997) como el diseño, desarrollo, evaluaciones de planes de formación matemática y su realización práctica. En relación al currículo, Rico (1998) señala “El profesor de matemática necesita conocimientos sólidos sobre los fundamentos teóricos del currículo y sobre los principios para el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas de matemáticas” (p. 25). Esta cita resalta la importancia del estudio curricular de las carreras técnicas universitarias en lo relativo a la integral en una variable real, para planificar una trayectoria didáctica de este tópico y que sea propia para los requerimientos del área de la tecnología.

Tipo de Investigación

De acuerdo con la naturaleza del problema en estudio, la metodología a utilizar es la combinación de diversas técnicas y enfoques según las dimensiones o facetas y de las cuestiones consideradas en cada etapa de la investigación. Razón por la que en la faceta epistémica (donde se determinarán los significados institucionales de la integral en una variable real) se combinará el estudio documental con esquemas cualitativos. Blaxter, Hughes y Tight (2002) señalan que "Los documentos no se limitan a reflejar la realidad social, también la construyen y ponen de manifiesto las diferentes versiones de los hechos" (p. 250). Indican además que la significación e interés de los documentos radica cuando éstos se relacionan con otros. Así que es propicio este tipo de estudio en esta faceta.

En la faceta instruccional (caracterización de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio sobre la integral en una variable real) se desarrollará un estudio de casos sobre las experiencias diseñadas de acuerdo a los criterios de idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) previamente establecidos. Para Yin (1993) "El estudio de casos es el método de elección cuando el fenómeno que se examina no se distingue fácilmente de su condado" (p.3). En este tipo de estudio la observación es su principal herramienta, de allí que se apoyará en enfoques cualitativos.

Finalmente en la faceta cognitiva (significados personales de los estudiantes) se combinan enfoques cualitativos con enfoques cuantitativos. "Dado que los métodos cuantitativos indican las tendencias existentes, pero no muestran toda la riqueza de la variabilidad individual ni explica el porque de la misma, se deberá complementar con técnicas del tipo cualitativo" (Arrieche, 2002, p. 43).

Etapas de la Investigación y su Metodología

En la primera etapa se realizó el estudio epistémico curricular para determinar los significados institucionales de referencia para la integral en una variable real. Esta etapa tiene que ver con los objetivos específicos OE1 y OE2. Las actividades que se desarrollaron fueron: la revisión documental de textos y artículos referentes al desarrollo histórico de la integral en una variable real y de los currículos de las carreras técnica como Ingeniería y Técnico Superior Universitario.

El espacio correspondiente a la segunda etapa se dedicó a caracterizar la idoneidad didáctica de un proceso de estudio sobre la integral en una variable real. Los objetivos específicos a desarrollar son el OE3 y el OE4. Para el OE3, de acuerdo a los significados institucionales de referencia obtenidos en la primera etapa, se caracterizó e implementó una trayectoria didáctica para la integral en una variable real con un grupo de estudiantes del IUET-LV. Esta trayectoria estuvo compuesta por las sub-trayectorias: epistémica, interaccional, cognitiva, mediacional y emocional.

En el desarrollo del objetivo OE4, se caracterizaron los significados personales que los estudiantes construyeron con las actividades realizadas durante el proceso de estudio. Para tal fin se hizo: La evaluación cuantitativa de la prueba de conocimiento (ver anexo A) y el análisis cualitativo de las respuestas dadas por los estudiantes (una muestra seleccionada al azar) a cada uno de los ítems de la misma prueba.

Para el estudio epistémico-curricular se seleccionaron tres instituciones de Educación Superior (dos universidades y un Instituto Universitario de Tecnología).

En cuanto al a proceso de estudio que se implementó en el IUET-La Victoria, el un grupo de estudiantes de Matemática II, se seleccionó en las secciones donde el investigador desarrolla sus actividades profesionales.

Cómo es un estudio predominantemente cualitativo. El grupo de estudio fue el obtenido mediante el suministró a cada alumno de las tres secciones de Matemática II para la carrera Informática del IUET- La Victoria una encuesta (ver anexo B) donde se les ofrecía la oportunidad de continuar recibiendo las clases en un nuevo grupo en el cual las clases, las prácticas y las evaluaciones se desarrollarían con el apoyo de un software matemático. La única condición era que su disponibilidad de horario se correspondiera con el ofrecido. Posteriormente se seleccionaron aquellos estudiantes que ofrecían alternativas de horario que coincidieran co la disponibilidad del Laboratorio (ver anexo C). Los estudiantes seleccionados a partir de ese momento abandonaron su sección asignada por control de estudio y se incorporaron al nuevo grupo que recibían clases en el Laboratorio de informática.

Técnicas e instrumentos de recolección de información

Puesto que el objetivo general del estudio es Estudiar la integral en una variable real en el contexto de las carreras técnicas universitarias, es necesario utilizar varias técnicas e instrumentos que permitan recabar toda la información posible que le permita al investigador abordar el problema. A continuación se explican las técnicas e instrumentos a ser utilizados:

La revisión documental: Para Ary, Jacobs y Razarich (1990) el análisis documental es útil y valioso por la información que se obtiene examinando y revisando archivos y documentos. Es comúnmente llamado *análisis de contenido* y es apropiado para estudiar la evolución de la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral, analizando el devenir del currículo y otros documentos que reflejen la enseñanza y aprendizaje de este tópico en las carreras técnicas universitarias.

La observación no participante: La observación no participante se utilizará durante las observaciones que el investigador hará a algunas clases de Matemática II donde se desarrolle el tema de la integral en una variable real, con la finalidad de determinar los elementos de significados puestos en juego por el profesor. Para Hurtado y Toro (1999) en este tipo de observación "El observador estudia la situación o el grupo permaneciendo fuera de ellos" (p.60).

La observación participante: Como el investigador, a la vez será profesor del grupo seleccionado para el estudio, esto trae consigo que durante el desarrollo de la trayectoria didáctica implementadas, tendrá que hacer uso de la observación participante. Carballo (2001) señala que "En esta técnica de trabajo de campo el investigador se involucra en los escenarios cotidianos de los informantes para extraer información de lo observado" (p.2). El investigador que a su vez es el profesor usará este tipo de observación en la reconstrucción de las clases.

Una prueba para evaluar conocimientos: Para Ruiz (2002), "Las pruebas tienen por objeto hacer una estimación cuantitativa del comportamiento de una persona con respecto a un rasgo, atributo o característica, para los cuales los sujetos son expuestos a determinadas tareas con el propósito de originar reacciones registrables" (p.28).

Técnica de análisis Onto-semiótico

El EOS ha desarrollado una técnica propia para determinar significados en cualquier texto (libros, notas de clase, evaluaciones de los estudiantes) producto de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Esta técnica fue de mucha utilidad para el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a la pruebas. Así que más que una técnica de recolección de datos es una herramienta de análisis.

La técnica de análisis semiótico (Godino y Arrieche, 2001) es una herramienta que permite "caracterizar tanto los significados sistémicos (o praxeológicos) de un objeto matemático como los significados puestos en juego en un acto de comunicación matemática" (p.1). Es decir; con esta técnica es posible determinar conflictos semióticos entre los significados de dos instituciones o entre los significados personales y los institucionales de un objeto matemático en estudio.

> “Dichos conflictos se refieren a toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas” (Arrieche, 2002, p. 45).

Este análisis se puede aplicar a las respuestas dadas a una prueba, a las notas de clase de un profesor, a un libro de textos y a los apuntes de clase de un estudiante, en fin a todo texto que refleje un acto de comunicación de la Matemática.

Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio de la Matemática

Es la aplicación de los criterios teóricos existentes en el enfoque ontológico-semiótico para la valoración didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Godino, Contreras y Font (2006) estiman seis criterios, a saber: *Idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva*, *idoneidad interaccional*, *idoneidad mediacional*, *idoneidad emocional* y *idoneidad ecológica*.

Plan de trabajo seguido

Para el logro de los objetivos propuestos en esta investigación se siguió un plan de trabajo el cual estuvo dividido por etapas, las cuales describiremos a continuación:

Primera etapa: En base a la revisión documental se desarrolló un estudio epistemológico sobre la integral en una variable real, se profundizó en sus orígenes, problemas presentados en su desarrollo y consolidación. Finalmente y siguiendo con los aspectos teóricos del EOS se pudo determinar seis configuraciones epistémicas: La de los orígenes, la de los problemas originarios del cálculo integral, la impulsada por Newton, la impulsada por los trabajo de Leibniz, la impulsada por el desarrollo teórico para la integral a partir de siglo XVIII y por último la impulsada por el desarrollo de la Teoría de la Medida. También en esta etapa se determinaron coincidencias y discrepancias entres los programas (Matemática II, Cálculo II, Análisis) que contienen el tema de la integral en una variable real de dos universidades nacionales (la Universidad Central de Venezuela y la Universidad de Carabobo) y el Instituto Universitario Experimental de Tecnología de La Victoria.

Segunda etapa: En base a la información obtenida en la primera etapa se diseñó una trayectoria didáctica propia a la enseñanza de este tópico para las carreras técnicas universitarias.

Tercera etapa: La implementación de la trayectoria didáctica diseñada para un curso de Matemática II para la carrera de informática del IUET- La Victoria donde el investigador es el profesor. Esta trayectoria se apoya en el uso de un software matemático tanto para la enseñanza como para el aprendizaje. Simultáneamente se hicieron grabaciones y tomaron apuntes de la nueve sesiones de clases y en alguna de ellas si hizo observación no participante. Al final se aplicó una evaluación escrita en la cual los estudiantes podían hacer uso de un computador para resolver y responder los diferentes planteamientos.

Cuarta etapa: En esta etapa se hizo el análisis de la idoneidad didáctica del proceso de estudio implementado sobre la integral en una variable real, en base a los apuntes de clase, las grabaciones, la observación no participante y de las respuestas dadas por los estudiantes a la prueba final.

Quinta etapa: Se establecen las conclusiones de acuerdo a los objetivos propuestos y se elaboró el informe final.

CAPÍTULO IV

Análisis Epistemológico del cálculo integral

Introducción

En este capítulo se presenta un análisis epistemológico del cálculo integral con la finalidad de profundizar en el origen, desarrollo y de la integral en una variable real aplicaciones más relevantes. Para Godino y Batanero (1994), este análisis es útil para clasificar la naturaleza del objeto matemático en estudio y caracterizar los diversos significados que tiene para las instituciones de acuerdo a sus contextos; permitirá conocer aquellos problemas que sirvieron de motivación a su creación y posterior desarrollo, con la finalidad de elaborar procesos didácticos que permitan a los estudiantes una mejor comprensión de la integral.

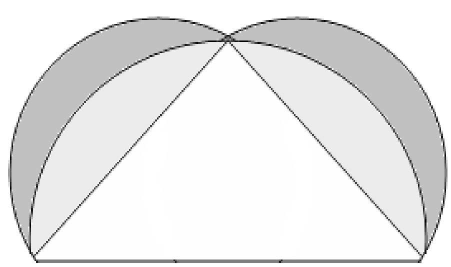
El análisis epistemológico forma parte del significado de referencia de la integral de una variable real que pretendemos caracterizar en los capítulos IV, V y VI. El significado de referencia se analiza de acuerdo a los siguientes factores: a) el desarrollo histórico del objeto en estudio (análisis epistémico), b) el significado que tiene el objeto en las instituciones universitarias, c) las orientaciones curriculares y d) los diferentes textos y materiales didácticos que la institución suele usar en el desarrollo de sus prácticas educativas (Arrieche, 2007; Godino, 2003). En este capítulo se presentan los significados institucionales (Godino y Batanero, 1994) que ha tenido el objeto que hoy se conoce como integral, desde el año 450 AC cuando Hipócrates realizó la primera solución de una cuadratura que se conoce, hasta la integral de Lebesgue basada en la teoría de la medida y que se considera como la generalización de la integral de Riemann. Lo importante de este estudio, basado en consideraciones teóricas obtenidas por la revisión documental de textos, trabajos de investigación, artículos y tesis relacionados con el tema objeto de investigación, conformándose así los diferentes significados institucionales que ha soportado este objeto matemático a lo largo de su proceso de consolidación y que son de gran valor para el diseño de estrategias didácticas para este tópico de cálculo infinitesimal.

Los orígenes del cálculo integral

En esta sección se hará una descripción detallada del planteamiento y solución de algunos problemas desarrollados por pensadores y matemáticos que de alguna manera sentaron las bases de lo que hoy se conoce como Cálculo Integral. Consideremos en primera instancia a Hipócrates (450 AC) en la búsqueda de cuadrar el círculo, "dibujó dos figuras en forma de luna, la sumas de sus áreas es igual a la de un triángulo rectángulo (figura 4) con sus tres semicírculos descritos sobre los lados del triángulo" (Newman, 1980, p.19, Vol. 1). Es el primer ejemplo que se conoce de una solución de cuadraturas; es decir, el problema de construir un área rectilínea igual a un área limitada por una o más curvas. Con la secuencia de intentos de este tipo

se obtiene a la postre la creación del Cálculo Integral con la importancia que aún mantiene en la actualidad.

FIGURA 4

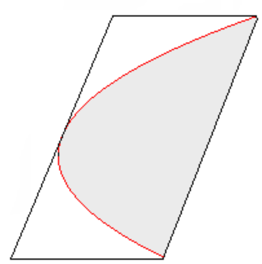


Las lúnulas de Hipócrates o la cuadratura del círculo. Newman (1980).

Arquímedes (287-212 AC) un siglo después en la determinación geométrica no mecánica de la cuadratura de la parábola[12]. Newman (1980) señala que Arquímedes en su libro del *Método de Arquímedes*[13] , revela de forma confidencial como alcanzó algunos de sus resultados. En este caso pesó la parábola para hallar el área de un segmento y este experimento le sugirió el teorema: El área de la parábola es un tercio del área del paralelogramo circunscrito (figura 5). Él admite este hallazgo experimental y luego evidentemente, para ser una verdad matemática, debe ser demostrada. Para tal fin asocia el teorema y el método de exhaución de Eudoxo y los vincula con los postulados de la continuidad, en un proceso riguroso, obtiene resultados muy similares a los que hoy se logran con el Cálculo Infinitesimal, es por ello que se le considera el precursor del método infinitesimal.

No hay duda de las muchas aplicaciones que los griegos hicieron de métodos exhaustivos para el cálculo de áreas y volúmenes relativamente sencillos, sin embargo se requería de mucho ingenio ya que el método carecía de generalidad. García (2005) señala que “fue con los trabajos de Arquímedes con los que se volvió a despertar en Europa el interés por determinar longitudes, áreas, volúmenes y centros de gravedad.

FIGURA 5



El área de la parábola se refirió a su paralelogramo circunscrito. Newman (1980).

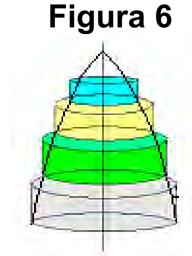
[12] La parábola descubierta por Menecmo (350 a.C) en un intento por duplicar el círculo.

[13] Libro perdido de Arquímedes y descubierto por Heiberg en 1906.

El método exhaustivo se modificó primero gradualmente, y después radicalmente por la invención del cálculo" (p. 1).

Más adelante de acuerdo a lo presentado por Rey y Babini (2000), Stevin, en1586 determinó el centro de gravedad de un paraboloide de revolución (figura 6), circunscribiendo a este sólido un número de cilindros de igual altura que van duplicando, comprobando que el centro de gravedad de esos cilindros se acercan infinitamente a un punto fijo que es el centro buscado. Existe similitud con el método utilizado por Arquímedes en la demostración no mecánica de la cuadratura de la parábola, ya que ambos obtienen por resultado el valor límite de una sucesión convergente. Pero la diferencia de estos trabajos radica en que Stevin hace su demostración en base a los cuatro primeros términos de una sucesión cuyo límite es cero; por su parte, Arquímedes trabaja sobre la base del valor de la suma de un número finito de términos de una progresión geométrica de razón menor a la unidad y llega al resultado de forma muy rigurosa aplicando el método de exhaución. Estos mismos autores nos relatan que en el año 1604, Luca Valerio modifica el razonamiento de Stevin con un teorema más general, de acuerdo al cual si se inscribe o circunscribe una figura en forma de escalera (escaloides) constituida por polígonos, prismas o cilindros a una figura plana o sólida, la diferencia entre los escalones inscritos y los circunscritos puede ser tan pequeña como se quiera (figura 7). Sin demostración y sólo en base a razonamientos geométricos intuitivos, Luca concluye que la diferencia entre la escalera y la figura dada también será tan pequeña como se quiere.

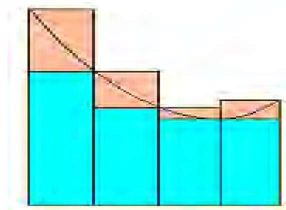
Figura 6



Determinación del centro de gravedad por Stevin. Elaboración propia

Si se observa bien esta conclusión, en ella aparece tímidamente el concepto de infinitésimo.

Figura 7



Inscribe o circunscribe una figura en forma escaloides. Elaboración propia.

Aquí en este punto podemos establecer una primera configuración epistémica para los orígenes.

Configuración epistémica de los orígenes del cálculo integral

Situaciones: Lo que se conoce hasta ahora es que los problemas se centraban en cuadraturas de figuras y regiones de áreas no conocidas para la época, ejemplos: el círculo, una región limitada por una parábola, etc. También el cubicar (cubaturas) de sólidos como toneles para vino. por medio de mediciones indirectas de magnitudes.

Acciones: Se determinaba por el método de exhausción las mejores aproximaciones numéricas que representen áreas y volúmenes.

Leguaje: Básicamente geométrico, también aritmético.

Conceptos: Los conceptos básicos de Medida, área y volumen, es decir cuadraturas y cubaturas. Nociones de continuo, infinito.

Propiedades: Las fórmulas de áreas y volúmenes conocidas para la época y los axiomas de Arquímedes. Método de exhausción de Eudoxio y propiedades de las razones

Argumentos: La doble reducción al absurdo utilizada por Arquímedes.

Nota: Cuando Arquímedes quería demostrar que el área de una región (A) era de magnitud Q usando el método de exhausción, probaba que A<Q y Q<A era absurdo y por lo tanto A=Q. El método de Stevin planteaba que si la diferencia entre A y Q se puede hacer menor que cualquier cantidad infinitamente pequeña, entonces A=Q.

Problemas que dieron origen al cálculo integral

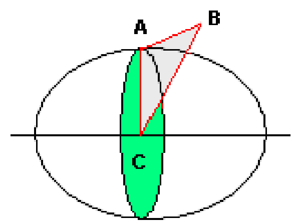
De acuerdo a García (2005) para el siglo XVII existían cuatro tipos de problemas que ocupaban la atención de los matemáticos de esa época, ellos son:

1. Dada la fórmula de la distancia que un cuerpo recorre como función del tiempo, obtener la velocidad y la aceleración en cada instante; y al revés, dada la fórmula de la aceleración de un cuerpo como función del tiempo, obtener la velocidad y la distancia recorrida. Esta problemática surge del estudio del movimiento de los cuerpos.
2. Obtener la tangente a una curva, como consecuencia de las aplicaciones de la óptica y el estudio del movimiento.
3. Obtener el valor máximo o mínimo de una función para aplicarlo al problema del tiro parabólico y en el estudio del movimiento de los planetas.
4. Obtener longitudes de curvas, áreas acotadas por curvas, volúmenes acotados por superficies, centros de gravedad y la atracción gravitatoria entre cuerpos extensos.

Aun no se tiene claro, si estaban conscientes de la estrecha relación que guardan los cuatro problemas. El interés de este estudio girará en torno a cómo a través del tiempo se buscó solución al cuarto problema. Continuando en ese camino, Kepler (1571-1630) en base a los trabajos de Arquímedes en su obra *Nova Stereometria Doliorum Vina Rio Rum* del año 1615 incluye consideraciones de índole infinitesimal. En un año de abundante cosecha de uvas, se dedica a comparar la capacidad de toneles para almacenar el vino, para definir las dimensiones más indicadas en función de la utilización mínima de material. Para tal fin estudió la curvatura de numerosos cuerpos de rotación, "haciendo girar circunferencias, elipses o arcos de estas curvas o de otras cónicas, alrededor de ejes de paralelos a los ejes de aquellas" (Rey y Babini, 2000, p.64. Vol. 2). En un principio utilizó las curvaturas o cubaturas de Arquímedes pero, sin utilizar el método de exhaución. Él introduce expresiones de carácter infinitesimal, supone las figuras compuestas de infinitas figuras más pequeñas de áreas o volúmenes conocidos. "Así supone que el círculo o la esfera están compuesto de pequeños triángulos o conos, respectivamente de vértices en el centro y de base una pequeña porción del círculo o de la esfera" (Rey y babini, 2000, p.65. Vol. 2). Concluye que el círculo es equivalente a un triángulo de altura igual al radio y de base la longitud de la circunferencia y la esfera a un cono de altura igual al radio y de base la superficie de la esfera. Vale decir que muchas veces no era posible hallar con éxito el volumen.

Kepler determinó el volumen del sólido generado por la rotación de un segmento circular, menor a un semicírculo, alrededor de su cuerda (figura 8), a este sólido Kepler le llamó "Limón". Construyó en cada punto *A* del segmento un triángulo rectángulo en *A*, de catetos la distancia *AB* igual a la semicuerda, y la normal *AC* al plano del segmento, de longitud la circunferencia rectificada de radio *AB.* El triángulo *ABC* es equivalente al círculo que describe el punto *A* en la rotación, de manera que el volumen buscado será el sólido descrito por el triángulo.

FIGURA 8



El “limón” de Kepler. Elaboración propia.

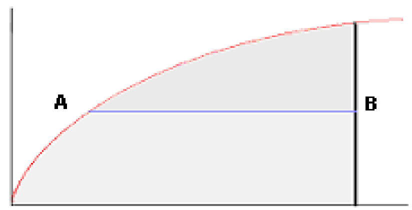
Blaise Pascal (1623-1662) con el Método de lo Indivisible[14] protagonizó un acontecimiento muy importante en el desarrollo del cálculo integral. Este método surge del problema referido a la curva llamada *Cicloide*, esta curva puede ser descrita por la rotación de una rueda sobre un eje fijo, un punto describe un círculo; pero si la rueda gira a lo largo de una línea el punto describirá un cicloide. Matemáticos como Galileo, Descarte y otros estudiaron esta curva, pero Pascal con su nuevo instrumento los aventajó y escribió el segundo capítulo del cálculo integral, ya que el primero fue escrito por Arquímedes. Pascal tomando en cuenta algunos problemas sobre el cicloide, pudo calcular áreas de segmentos de la curva generada por el cicloide cuando ésta es cortada por una recta paralela a su base, el centroide del segmento y los volúmenes de los sólidos generados por esos segmentos al girar alrededor de sus base (AB en la figura 9) o de una recta vertical. Pascal proponía problemas que había resuelto como reto para otros matemáticos, posteriormente publicaba las soluciones bajo el pseudónimo de Dettonville.

García (2005) señala que Roberval en el año 1634 utilizó el método de lo indivisible para calcular el área encerrada bajo un arco de cicloide. Este problema había interesado a Mersenne (1588-1648) en 1629. “Denominó a

[14] Método que fue posteriormente inventado por cavalieri (1598–1647)

su método *Método de las infinidades* , aunque utilizó como título de su trabajo el de *Traité des Indivisibles*" (p.3).

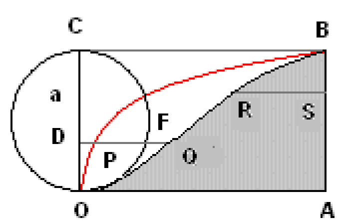
FIGURA 9



El área del segmento de la curva generada por un cicloide cuando ésta es cortada por una recta paralela a su base. Elaboración propia.

Una ilustración sobre el trabajo de Roberval, es la siguiente: Sea *OABP* el área situada bajo la mitad de un arco de cicloide (figura 10). El diámetro de la circunferencia generatriz en *OC* y *P* es un punto cualquiera del arco. *PQ=DF* , la curva descrita por *Q* se denomina curva asociada al cicloide. La curva *OQB* divide al rectángulo *OABC* en dos partes iguales, ya que a cada línea *DQ* en *OQBC* le corresponde una línea igual *RS* en *OABQ*. Entonces se puede aplicar el principio de Cavalieri. El rectángulo *OABC* tienen sus bases y alturas iguales, respectivamente, a la semicircunferencia y diámetro de la circunferencia generatriz. Por otra parte entre *OPB* y *OQB* es igual al área del semicírculo *OFC* porque la misma definición de *Q* se tiene que *DF=PQ* , de modo que estas dos áreas tienen la misma anchura en todas sus partes. Finalmente se concluye que el área debajo de semiarco es una vez y media el área de la circunferencia generatriz.

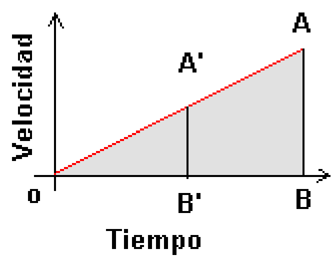
FIGURA 10



OABP el área bajo la mitad del arco del cicloide. García (2005).

Por otra parte García (2005) señala que Galileo (1564-1642), tiene una concepción del área muy parecida a la de Kepler, al tratar el problema del movimiento uniforme acelerado. Él presentó un razonamiento para mostrar que el área determinada por la curva tiempo-velocidad es la distancia (figura 11). La conclusión la obtuvo suponiendo que como *A'B'* es la distancia infinitesimal recorrida hasta un instante, entonces el área *OAB*, conformada por todos los segmentos *A'B'* debería ser la distancia total recorrida. Labraña,(2001), Álvarez (2003) y García (2005) coinciden en que Bonaventura Cavalieri (1598 -1647) influido por Kepler y Galileo contribuyó

Figura 11



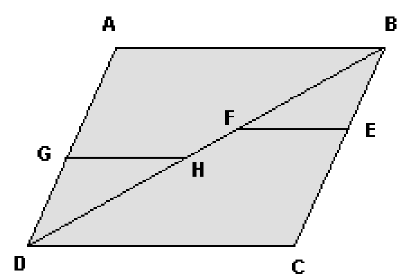
El área OAB está conformada por todos los segmentos A'B'. García (2005).

en gran medida en el desarrollo del cálculo integral. Cavalieri es el autor del método de "integración" fundado en lo "indivisible". En Rey y Babini (2000) se plantea que este método "ocupa un lugar intermedio entre las rigurosas demostraciones de Arquímedes y los métodos infinitesimales que surgirán en la segunda mitad del siglo XVII. Sin definir términos Cavalieri adopta lo indivisible de la filosofía escolástica" (p.66). Supone los puntos indivisible de las líneas, las líneas lo son de las figuras planas, en conclusión, para él; lo indivisible le permite referirse a los elementos de dos figuras en comparación y con el uso de ciertas técnicas algebraicas se pueden calcular áreas y volúmenes.

Cavalieri expone su método en Geometría Indivisible *Continuorum Nova Quanda Ratione Promota* (1635)[15], sin embargo una mejor explicación aparece en *Exercitaciones Geométrica Sex* (1647). Él demuestra aplicando su método los teoremas de *Pappus*, que tienen que ver con el área y el volumen de los cuerpos de rotación, que hoy se conoce como teorema de *Guldin,* para los cuales sólo se había establecido un razonamiento de orden metafísico.

García (2005) presenta una ilustración del método o principio de Cavalieri, en la demostración de que el área de paralelogramo *ABCD* (figura 12) es el doble de cualquiera de los triángulos *ABC* o *BCD***.** Se basa en que cuando *GD=BE*, se tiene que *GH=FE*.

FIGURA 12



ABCD es el doble de cualquiera de los triángulos ABC o BCD. García (2005).

Por lo que se deduce que los triángulos *ABC* y *BCD* están constituidos por igual número de líneas iguales como GH y EF y así deben tener la misma área.

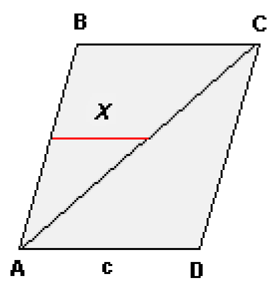
En los libros de geometría del espacio, se puede estudiar el teorema de Cavalieri, en el cual está presente este principio o método. Con su método logró integrar las tres primeras potencias de la variable, con lo que hallaba el

[15] Segunda edición modificada, póstuma en el año 1653

área acotada por la funciones. Más tarde logra integrar la cuarta potencia, con lo que lo que extiende su resultado a cualquier potencia natural. Con estos hallazgos, pudo resolver viejos problemas algunos propuestos por Kepler. De acuerdo a lo señalado por García (2005), Rey y Babini (2000), Newman (1980), Brunschvice (1945)., para su "integral" , Cavalieri consideró el paralelogramo *ABCD* de base *AD=c* y el triángulo *ABC*, además indicó con *x* los segmentos variables paralelos a la base *c* (figura 13). En el método de lo indivisible *n* segmentos *x* llenan el triángulo *ABC* y *n* segmentos *c* llenan el paralelogramo *ABCD.*

Por ser el triángulo *ABC* la mitad del paralelogramo *ABCD*, se tiene que : $\sum_{1}^{n} x = \frac{1}{2} nc$

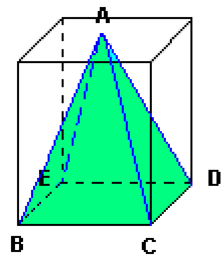
FIGURA 13



n segmentos *x* llenan el triángulo *ABC.* Elaboración propia.

De igual forma, si se compara la pirámide de vértice *A* y base el cuadrado de lado *BC,* con el prisma de igual base y altura cuyo volumen es el triple de la pirámide (figura 14), resultará $\sum_{1}^{n} x^2 = \frac{1}{3} nc^2$

FIGURA 14



El volumen del prisma es tres veces el de la pirámide. Elaboración propia.

En su afán de continuar con los exponentes 3 y 4, Cavalieri aplica el álgebra, biseca el paralelogramo mediante la paralela *MN* a *AB* y denomina *y* y *z* a los segmentos paralelos a la base de los triángulos *ACD* y *ONC* , *O* es el centro de paralelogramo (figura 15). Así $x = \frac{1}{2}c + z$ e ; $y = \frac{1}{2}c - z$. Cavalieri afirma que los *n* indivisibles del triángulo *ABC* pueden descomponerse por mitades en los triángulos *ABC* y *ADC* , de donde:

$$\sum_1^n x^3 = \sum_1^{1/2 n} \left(x^3 + y^3\right) = \sum_1^{1/2 n} \left[\left(\frac{1}{2}c + z\right) + \left(\frac{1}{2}c - z\right)\right] =$$

$$= \sum_1^{1/2 n} 2\left[\left(\frac{1}{2}c\right)^3 + 3.\frac{1}{2}cz^2\right] = 2.\frac{1}{8}c^3.\frac{1}{2}n + 3n\sum_1^{1/2 n} z^2$$

Como los triángulos *NOC* y *ABC* son semejantes de las dos mitades, los $1/2\, n$ indivisibles iguales a z^2 equivalen a la mitad de los *n* indivisibles iguales a $\left(1/2\, x\right)^2$ y en definitiva, teniendo en cuenta el resultado para el exponente 2:

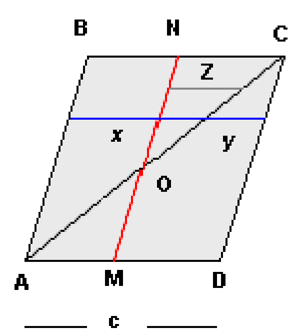
$$\sum_{1}^{n} x^3 = \frac{1}{8}nc^3 + 3c\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$= \frac{1}{8}nc^3 + 3c\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c\right)^2\frac{n}{3}$$

$$= \frac{nc^3}{4}$$

De forma similar demuestra que $\sum_{1}^{n} x^4 = \frac{nc^3}{5}$ y lo extiende de forma general de la siguiente forma: $\sum_{1}^{n} x^p = \frac{nc^p}{p+1}$ que en términos del método de lo indivisible quiere decir que la suma de los *n* indivisible de x^p, cuando x va de O a c, es la suma de *n* indivisibles iguales a c^p como 1 es a $p+1$. Si a la igualdad de Cavalieri se le multiplica ambos miembros por el incremento c/n y se pasa a límite para $n \to \infty$ se consigue la integral definida: $\int_{O}^{1} u^p du = \frac{c^{p+1}}{p+1}$

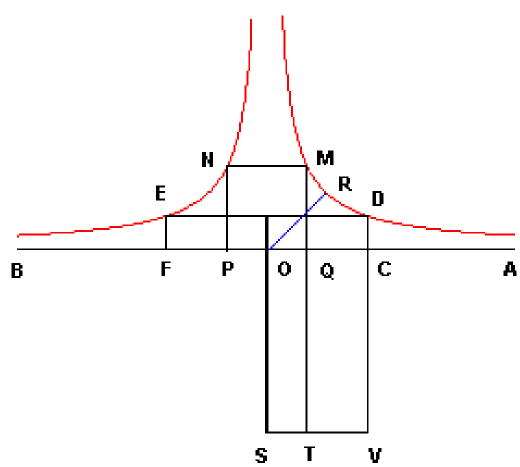
FIGURA 15



Los *n* indivisibles del triángulo *ABC* se pueden descomponer por mitades en los triángulos *ABC* y *ADC.* Elaboración propia.

Para Rey y Babini (2000), Labraña,(2001), Álvarez (2003) y García (2005) Evangelista Torricelli se ocupó también de asuntos infinitesimales en su obra *Opera Geométrica* de 1644. Él trata entre otras cuestiones problemas relacionados con tangentes, cuadraturas y cubaturas, donde se hacen aplicaciones del método de lo "indivisible" y aportó para la época un hecho contradictorio; una figura infinita de volumen finito. Torricelli demuestra que si *OA* Y *OB* son las asíntotas de la hipérbola equilátera *MD,* el sólido infinito que se obtiene al rotar el segmento *DC* y la rama infinita *DM* alrededor de la asíntota *OB* es equivalente al cilindro de altura *OC* y base el círculo de diámetro *OS*, doble de la distancia *OR* del centro *O* a la hipérbola (figura 16). Para tal fin, considera como "indivisible" del sólido las superficies laterales del cilindro de altura *MQ* y base el círculo de radio *OQ* y como "indivisible" del cilindro de altura *OC* los círculos paralelos a la base de diámetro *QT*. La deducción se presenta sencilla, utilizó las propiedades de la hipérbola, con las cuales se puede ver que el cilindro y el círculo son equivalentes, ya que $2.OQ.OM = OR^2 = \frac{1}{4}QT^2$.

FIGURA 16



El sólido infinito que se obtiene al rotar el segmento *DC* y la rama infinita *DM* alrededor de la asíntota *OB* es equivalente al cilindro de altura *OC* y base el círculo de diámetro *OS*, doble de la distancia *OR* del centro *O* a la hipérbola. Rey y Babini (2000).

Es importante señalar que el cálculo integral posteriormente se desarrollará partiendo de la obra de Cavalieri y sus sucesores más importantes como Roberval (1602-1675), Blaise Pascal (1623-1662) y John Wallis (1616-1703). En lo fundamental consistió en la elaboración de una notación convenientemente sugestiva para el método expuesto. La invención del cálculo infinitesimal quedó completada por el descubrimiento de que el problema inverso del cálculo de áreas de figuras cerradas por curvas, era el problema de trazar tangentes a esas curvas, para el cual también se elaboró una notación adecuada y al cual se convino en llamar cálculo diferencial.

Para Hogben (1941), John Wallis maestro de Newton, fue uno de los primeros en aplicar métodos analíticos en el cálculo de áreas. Se dedicó a calcular mediante integración, el área encerrada entre la curva $y = x^m$, el eje x y cualquier ordenada $x = h$. Wallis demostró que la relación entre esta área y el paralelogramo de igual base y altura es $1/_{m+1}$. Asumió que también sería cierto para la curva $y = ax^m$, donde a es una constante y m cualquier número positivo o negativo. Sólo demostró esta última aseveración para $m = 2$ (la parábola) y en $m = -1$ (la hipérbola). La interpretación de la segunda fue errónea. Mostró que se podían esperar resultados similares para cualquier curva de la forma $y = \sum_m ax^m$ con lo que concluye que puede hallarse el área de cualquier ordenada y que esté representada por una potencia de x, decir; para $y = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots$ su área será $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$. También aplicó este razonamiento a la integración de las curvas $y=\left(x-x^2\right)^0$, $y=\left(x-x^2\right)^1$, $y=\left(x-x^2\right)^2$;... entre $x=0$ y $x=1$ y demostró que las áreas eran: $1, \frac{1}{16}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \cdots$.

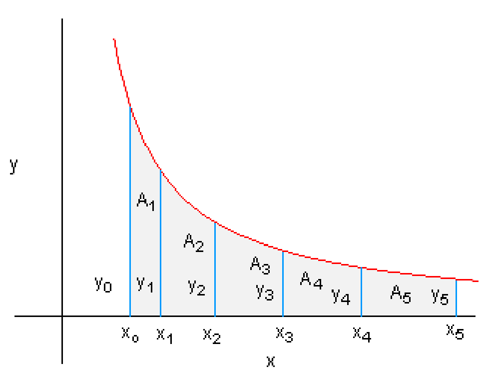
Estudió las curvas del tipo $y=x^{1/m}$ y formuló que el área comprendida entre esas curvas y las abscisas $x=0$ y $x=1$ es igual al área del rectángulo de la misma base y la altura como $m:m+1$

En su determinación de querer calcular analíticamente el área del círculo, a partir del método que usaban los japoneses y que wallis utilizó para desarrollar el número π en serie. No pudo calcular el área del círculo porque no pudo expresar su ecuación $y=\sqrt{x-x^2}$ en forma de potencia de x , pero nos dejó el principio de interpolación y la ordenada del círculo $y=\sqrt{x-x^2}$, es la media geométrica de las ordenadas de las curvas $y=\left(x-x^2\right)^0$, $y=\left(x-x^2\right)^1$, supuso que, como una aproximación el área del semicírculo $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$, que es $\frac{1}{8}\pi$, puede tomarse como la media geométrica entre los valores de $\int_0^1 \left(x\text{-}x^2\right)^0 dx$ y $\int_0^1 \left(x\text{-}x^2\right)^1 dx$ lo que es, 1 y $\frac{1}{6}$; que equivale a tomar como valor de π: $4\sqrt{\frac{2}{3}}$ ó $3{,}26\ldots$. puesto que en la serie $1, \frac{1}{16}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \ldots$, se puede hacer que el término interpolado entre $1 \text{ y } {}^{1}\!/_{6}$ se ajuste a esta serie. Mediante complicados razonamientos posteriormente se llegó a un valor para el término interpolado equivalente a $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2.2.4.4.6.6.8.8...}{1.3.3.5.5.7.7.9...}$ (conocido como el producto de Wallis).

De acuerdo a Scriba (1970), en 1659 wallis publica un tratado con las soluciones a problemas propuestos por Blaise Pascal sobre las Cicloides y además explica cómo los principios aportados en su *Aritmética Infinitorum*, de 1655 pueden ser aplicados para la rectificación (es decir calcular la longitud) de una curva algebraica y presenta una solución al problema de rectificar la parábola semicúbica $x^3 = ay^2$.

García (2005) y Rey y Babini (2000) relatan que el jesuita belga Gregorio de San Vicent estudioso de las series geométricas convergentes, ya utilizadas por Fermat en sus cuadraturas, las presenta en su obra *Opus Geometricum* de 1647, en ella proporcionó las bases para la importante conexión entre la hipérbola rectangular y la función logaritmo. Demostró empleando el método exhaustivo, que si para la curva ${}^{1}\!/_{x}$ las x_i ,*i*=1,2,4,... se eligen de modo que las áreas $A_1, A_2, A_3, A_4,...$ son iguales, entonces las y_i , *i*=1,2,3,4,... están en progresión geométrica (figura 17).

FIGURA 17



Elaboración propia. Relación entre la hipérbola rectangular y la función logaritmo.

Esto significa que la suma de las áreas desde x_0 hasta x_i están en progresión geométrica y es proporcional al logaritmo de los valores de las y_i, en la notación actual esto $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = k \log y$ es:

En realidad la interpretación de que las áreas son proporcionales al logaritmo de y se le atribuye al también jesuita belga Alfonso de sarasa (1687-1667) en su *Solutio Problematis a Mercenno propositi* de 1649 quien fue discípulo de Vicent (García, 2005. p.6).

Configuración epistémica de acuerdo a la solución de los problemas que dieron origen al cálculo integral

Situaciones: Los problemas se plantean en base a determinar áreas y volúmenes de regiones y sólidos generados por funciones del tipo algebraicas y algunas funciones transcendentes.
Acciones: Las integraciones se hacen de forma numérica. Es decir por aproximaciones numéricas con las cuales se determinan cuadraturas de parábolas, hipérbolas, cicloides, elipses y círculos. También se asume que una superficie o un sólido pueden estar compuestos por infinitos elementos infinitesimales de iguales dimensiones. Empleo de progresiones para determinar cuadraturas.
Lenguaje: Todo el que se desprende del método de lo indivisible. Es decir geométrico, aritmético y algebraico.
Conceptos: Se manejan los conceptos de: Infinitésimo, series, cuadratura, cubatura, centro de gravedad, arcos, series infinitas, infinitésimo, indivisible, infinitamente pequeño.

Propiedades: Series infinitas, método de exhausción, sin doble reducción al absurdo. El método inductivo aplicado por Wallis para su integración. Lo infinitamente pequeño.

Argumentos: Las argumentaciones del método de exhausción y las del método deductivo.

Evolución, desarrollo y consolidación del cálculo integral

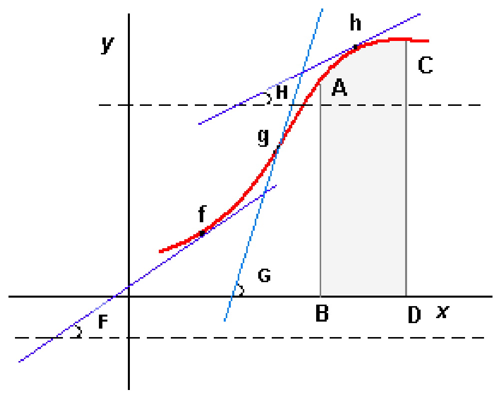
El trabajo de los precursores y predecesores de Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Wihelm von Leibniz (1646-1716) prepararon el camino para que ellos, con su empeño, fundaran una rama autónoma de la matemática; el cálculo infinitesimal. Sin embargo tuvo que pasar mucho tiempo para que fuese considerada con el prestigio que tiene en la actualidad. Rey y Babini (2000) reseñan que durante mucho tiempo siguió siendo en realidad el cálculo, un conjunto de reglas de gran utilidad y eficacia, pero no más que eso desde el punto de vista matemático.

El nacimiento del cálculo, ubicado en el siglo XVII y atribuido a Newton y Leibniz, permite señalar que ellos son considerados los inventores del cálculo, ya que dieron a los procedimientos infinitesimales de sus predecesores Barrow y Fermat la algorítmica y precisión necesaria para ser considerado como un método novedoso y con la generalidad que permitió su posterior desarrollo. Los procedimientos de Barrow y Fermat estuvieron elaborados en base a los trabajos de Torricelli, Cavalieri y Galileo; o Kepler, Valerio y Stevin. Los alcances infinitesimales que éstos lograron, fueron también consecuencia de las contribuciones de Oresme, Calculator, Arquímedes y Eudoxo. Finalmente los trabajos de estos últimos fueron influenciados por los problemas matemáticos y filosóficos planteados por Aristóteles, Platón, Zenón y Pitágoras. Así sin el trabajo previo de estos hombres no hubiese existido el cálculo infinitesimal.

En cuanto al cálculo integral los precursores y predecesores se empeñaron en la determinación de cuadraturas y cubaturas, rectificaciones, centros de gravedad; y de algoritmos infinitos al ocuparse de series de productos infinitos y de fracciones continuas. El desarrollo de los conceptos principales del cálculo, la integral y la derivada, tuvieron una larga evolución; en una primera instancia llegaron a constituirse como operaciones inversas y posteriormente se fortalecieron en sus fundamentos hasta, su elaboración final como abstracciones matemáticas en términos de la lógica formal, con el uso de la idea de límite de una serie infinita. Hogben (1941) explica que si bien el cálculo integral tiene que ver con determinar el área comprendida entre el segmento de la curva *AC*, los segmentos de restas *AB* y *CD* paralelas al eje y el trozo del eje *x* comprendido entre *B* y *D* (ver figura 18). Lo que se denomina una integral es sencillamente una fórmula para hallar el área cuando se conocen las abscisas *OB* y *OD* de los puntos *A* y *C.* Y señala que el "cálculo diferencial y el cálculo integral emplean métodos semejantes, porque el área comprendida entre dos ordenadas de una porción de curva depende del declive de este trozo de la línea que cierra" (Hogben, 1941, p. 627). La derivada y la integral están en el análisis matemático moderno definidas en base a consideraciones ordinales, y no en términos de las consideraciones de variación física y cantidades geométricamente continuas que la originaron.

Brunschvicg (1945) asevera que la relación esencial en la construcción del cálculo infinitesimal, que se le atribuye a Newton y Leibniz, es la que se presentaba entre lo que será el cálculo diferencial y lo que será el cálculo integral y que está señalada por la búsqueda de una "conversión" de las reglas de la tangente. Y así a pesar de que las operaciones equivalentes a la integración hubiesen sido practicadas en la antigüedad, la trayectoria que va de la diferenciación a la integración es la que se reconoció primero.

FIGURA 18



Pendiente de una curva y área de la figura limitada por ella.[16] Hogben (1941).

La labor matemática de Newton, vinculada con sus investigaciones en filosofía natural, no se limitó a asuntos infinitesimales, sino que abarca segmentos del álgebra y de la geometría. Labraña (2001) relata que Newton utilizó métodos geométricos en muchos de sus descubrimientos y con ello también probó otros resultados que luego adoptaba analíticamente, al igual que Barrow fundamentaba sus resultados en forma geométrica. Por otra parte señala que la obra esencial de Newton está desarrollada en series de potencias, ya que éstas le permitieron expresar curvas complicadas como la suma de curvas sencillas. Para él las series suponían sumas infinitas de términos, que es básicamente la misma idea que regula el cálculo de primitivas que se realiza en los ambientes escolares.

Newton establece un método para obtener una función a partir de un área. Para ello considera un punto genérico que describe una curva de tiempo, pero no en el sentido de magnitud física, sino tiempo como soporte

[16] En f, la curva tiene un declive relativamente pequeño. Hacia la mitad, en g, al crecer, la x la curva se hace más escarpada. Finalmente en h se presenta más achatada. El declive, en cualquier punto, viene dado por la abertura del ángulo que la tangente a la curva en ese punto forma con el eje de las *x* , o con una recta paralela a éste.

psicológico que permite secuenciar el proceso. Asegura Labraña (2001) que "esto es fundamental para comprender las problemáticas existentes en la enseñanza de la integración: un problema de área es un problema estático y global, mientras que los problemas de velocidad son de variaciones locales" (p.37).

El término "fluxiones" en su obra *Methodus Fluxionum et Serierum infinitarum* de 1671[17] y que aparece de forma más rigurosa en su obra *De Quadratura Curvarum* publicada en 1704, allí lo presenta en términos de razones primeras y últimas o límite. Notación empleada:

Si fluente x, y entonces fluxiones $\dot{x}, \dot{y}$; Si fluente $\dot{x}, \dot{y}$ entonces fluxiones $\ddot{x}, \ddot{y}$

Si fluente x, y entonces fluxiones x', y'; Si fluente x', y' entonces fluxiones x'', y''

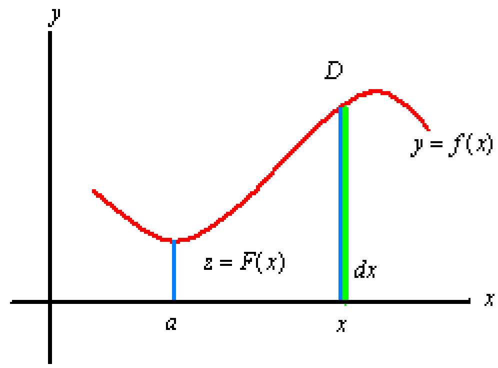
Así al retomar de nuevo la idea del punto genérico que describe una curva, el punto, la imagen y el área barrida varían simultáneamente y las denomina fluentes y a sus velocidades de cambio o ritmo con que fluyen, les denomina fluxiones. Sin embargo, Newton en su monografía *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas* no explícita la notación de fluxiones, pero utiliza lo infinitamente pequeño, tanto en lo geométrico como en lo analítico de manera similar a los procedimientos de Barrow y Fermat y los desarrolla a través del uso del teorema del binomio. Así Newton emplea la idea de un pequeño rectángulo indefinido o momento de área y encuentra la cuadratura de las curvas.

Boyer (1991) presenta un ejemplo siguiendo la notación james Gregory. Aquí lo vamos a desarrollar con la notación actual. Para una función $y = f(x)$ queremos hallar el área entre el eje de ordenadas y la gráfica de la función. Fijamos un punto a y denotamos $z = F(x)$ como el

[17] Publicada en 1736

área bajo la función $f(x)$ entre a y y. La función $f(x)$ es la derivada de $F(x)$ (Ver figura 19)

FIGURA 19



Relación entre la derivada y el área de la región

Newton afirmaba que el segmento xD se movía bajo la función $y = f(x)$, consecuentemente, si x incrementa una cantidad Δx entonces, el área incrementa como: $\Delta z = F(x + \Delta x) - F(x)$ Cuando Δx tiende a cero tenemos: $dz = f(x)dx$ y $\frac{dz}{dx} = f(x)$

De esta manera queda demostrada la inversibilidad de la derivada y la integral. Newton introduce inicialmente la integración en la teoría de fluxiones de forma similar a lo que hoy conocemos como integral indefinida. Villalba (2007) con relación a este trabajo de Newton, señala que mientras que las cuadraturas de los predecesores habían sido halladas mediante procesos equivalentes a la integral definida como el límite de una suma, él determina la primera razón de cambio del área y desde ésta, encuentra la propia área a través de lo que ahora se llama Integral Indefinida de una función. Aquí debemos resaltar dos significados institucionales diferentes (Godino y Batanero ,1994) para la cuadratura de un área: a) como el límite de una sumatoria, b) mediante la razón de cambio del área.

Newton abordó dos tipos de problemas que se refieren a ecuaciones diferenciales y a la construcción de la tabla de integrales: a) Dadas las fluentes y sus relaciones determinar las fluxiones, b) dadas las fluxiones y sus relaciones determinar las fluentes.

Entre los problemas del tipo (b), de acuerdo a Rey y Babini (2000), Newton resolvió:

1. Determina la fluente, dadas dos fluxiones y una sola fluente, es una cuadratura que la resuelve por el desarrollo de serie de potencias.
2. Determina la relación entre las fluentes, dadas dos fluxiones y dos fluentes. En la actualidad son las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, las cuales resuelve por desarrollos en series y de ser necesario aplica el método de los coeficientes indeterminados.
3. Determina la relación entre las fluentes, si se dan varias fluxiones y fluentes. Se corresponde en la actualidad con las ecuaciones con derivadas parciales que resuelve considerando integrales particulares, aceptando la presencia de funciones arbitrarias.

Un ejemplo que presenta Rey y Babini (2000) en notación newtoniana es:

> "Determinar las fluentes tales que $\dot{y}:\dot{x} = 2 + 3x + x^2 - y(2 - x^2)$. Para resolver la cuestión Newton desarrolla y en serie con coeficientes indeterminados. Sustituye esa serie y su fluxión en la ecuación y determina los coeficientes mediante igualación. Dando al primer coeficiente un valor determinado (nuestra constante de integración) obtiene una solución particular desarrollada en serie" (p. 93).

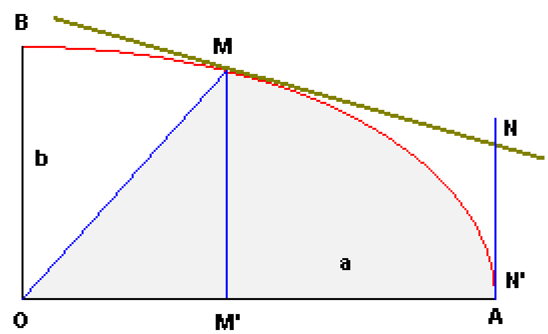
Como ya se señaló la obra de Newton fue la de un *filósofo natural*; la de Leibniz por su parte además de ser la de un filósofo, también se comportó como un *algorítmico*. Es decir, además de su filosofía se preocupó por clarificar los conceptos y la formalidad matemática, publicó todas las reglas de operaciones, desde las más simples y las presentó como reglas del álgebra. Por otra parte creó la simbología adecuada a los nuevos algoritmos. Al igual que Newton, Leibniz establece sus reglas operativas para sus principales elementos y que combina haciendo notar su propiedad inversa. Así como Newton estableció sus elementos *Fluxión* y su propiedad inversa *Fluente,* Leibniz planteó la *Diferencia* y su propiedad inversa *Suma*. Sin embargo para ambos creadores del cálculo, la Diferenciación es la propiedad fundamental; la Integración la consideran como la inversa de ella, este punto de vista prevalece en el cálculo elemental actual.

Leibniz obtiene las actuales series del arco tangente circular y del arco tangente hiperbólico a través de sectores elípticos e hiperbólicos desarrollados en serie. Al referirnos al caso elíptico (Rey y Babini ,2000, p.93) lo presenta así: Leibniz consideró una elipse de centro *o*, semiejes a y b y del sector AOM, uno de cuyos lados es el semieje, del cual toma tangentes en los extremos AN y MN (figura 20). Toma como parámetro el valor t tal que $AN = bt$ y demuestra en virtud de las propiedades de la elipse, que $AM' = 2at^2 : \left(1+t^2\right)$ y que el cuadrilátero $OANM$ es abt. Para calcular el área de la figura mixtilínea ANM considera los triángulos MNN' de altura AM' y base $NN' = bt_1$ de área $abt_1t^2 : \left(1+t^2\right)$; desarrollada en serie la función en t y variando éste desde A hasta N obtiene como área de ANM el valor $ab\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} - \ldots\right)$ que, al distinguirla del área $OANM$, da finalmente como área del sector elíptico

$$OAM = ab\left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \ldots\right)$$

que para $t=1$ se corresponde al cuarto del círculo, apareciendo el desarrollo de π que ya había dado en forma independiente Gregory: $\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

FIGURA 20

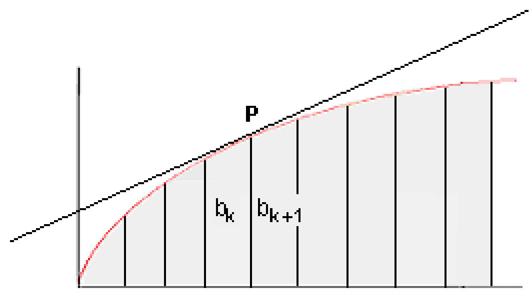


Cálculo hecho por Leibniz del área de un sector elíptico. Rey y Babini (2000).

Los estudios de Leibniz sobre series numéricas lo condujeron a series de diferencias que podrían sumarse fácilmente. Así Ladraña (2001) describe que dada la sucesión $\{a_n\}$ y la sucesión de diferencias primarias asociada a ella $b_n = a_{n+1} - a_n$, se tiene que $\sum_1^n b_n = a_{n+1} - a_1$ en términos geométricos Leibniz aproxima tomando intervalos de la unidad y aproxima el área bajo la curva por la suma de las ordenadas, mientras que la diferencia entre dos ordenadas consecutivas aproxima a la pendiente de la tangente $m = \frac{b_{k+1} - b_k}{1}$ (figura 21).

Mientras más pequeña sea la unidad elegida; mejor será la aproximación. Así Leibniz concluye que los problemas de tangente y cuadratura son inversos y se corresponden con la diferencia y la suma respectiva. En este trabajo de Leibniz, se intuye la forma natural de la terminología que posteriormente es adoptada: Integral, en el sentido de reunir, sumar y diferencial, en el sentido de diferencia, resta.

FIGURA 21



Leibniz, aproxima el área bajo la curva por la suma de las ordenadas Labraña (2001)

A pesar que los métodos infinitesimales de Newton y Leibniz se hicieron conocer a finales del siglo XVII, la difusión de estas nuevas ideas fue lenta. Entre los pocos matemáticos, que para esa época, estaban en capacidad de aplicar estos nuevos conocimientos se encontraban Johann y Jacob Bernoulli. La familia Bernoulli proporcionó una docena de matemáticos durante los siglos XVII, XVIII y XIX. Al respecto Klein (1927), Rey y Babini (2000) y Labraña (2001) coinciden en que Johann Bernoulli había asimilado con una sorprendente rapidez las ideas de leibniz y publicó el primer Tratado de Cálculo integral[18] y que dictó clases al frances L'Hopital. En las notas de Bernoulli se percibe los cambios que marcarían el rumbo definitivo a la relación entre integral y diferencial, decía: La integral no proviene de sumar cantidades infinitamente pequeñas, sino de diferencias de dichas magnitudes; el problema radica en cómo expresar estos elementos de diferencias para una vez que se consigan, invertir la operación de

[18] Publicado en alemán por Kowalewski, en colección de clásicos de Ostwald, núm. 194.

diferenciación. Para tal fin propone el método inverso de las tangentes con el cual determina la ecuación de una curva a partir de ciertas propiedades de sus tangentes. Labraña (2001) indica que con este método lo que hacía Bernoulli era construir ecuaciones diferenciales, esto es dada una magnitud toma de ella un elemento diferencial; no se pregunta cómo construir la magnitud sino como descomponerla, la posterior recomposición será otro problema. Bernoulli considera una región dada descompuesta en partes infinitamente pequeñas, donde cada parte es un diferencial del área, tan numerosa cómo se quiera y aplica la misma serie de Leibniz (una sucesión de diferencias primarias) $\mathrm{b}_n = \mathrm{A_n} - \mathrm{A_{n\text{-}1}}$ asociada a una sucesión de áreas A_n y una suma de términos $\sum_1^n \mathrm{b}_n = \mathrm{A}_n - \mathrm{A}_0$ con la cual se tiene una mejor visión de la regla de Barrow.

A Johann Bernoulli se le reconocen muchas contribuciones matemáticas, entre ellas, es especialmente conocida la teoría de series y las aplicaciones de ésta al calculo integral y a las ecuaciones diferenciales. En especial se le debe la cuadratura de funciones de la forma x^x y los métodos de factor integrante y de la separación de variables en las integración de ecuaciones diferenciales. En 1694 ideó un método de cuadratura por serie que es un caso particular de las serie de Taylor, presentadas veinte años después. En el siguiente ejemplo se utilizará la notación actual y no la utilizada por Bernoulli, esto es $d^2y; d^3y$ por $ddy; dddy$ respectivamente. Así se tiene:

$$ydx = ydx + xdy - xdy - \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx} - \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^2} - \ldots =$$

$= d(xy) - d\left(\frac{x^2}{1.2}\frac{dy}{dx}\right) + d\left(\frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \ldots$, que integrando entre 0 y x, se obtiene: $\int ydx = xy - \frac{x^2}{1.2}\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^2y}{dx^2} - \ldots$, con esta serie se puede hacer cuadraturas, si conocemos la función y sus diferenciales sucesivas, si usamos la notación $y = f(x)$ se tiene: $\int_0^x ydu = f(x) - f(0)$ y así que es la serie de Taylor $f(x+h) = f(x) + hf(x) + \frac{h^2}{2}f'(x) - \ldots$, para $h = -x$.

Un acontecimiento que contribuye notablemente al desarrollo del cálculo integral, ocurre en el siglo XIX, cuando Fourier (1768-1830) adopta el término de *funciones arbitrarias*. En este término subyace el concepto de aplicación. Klein (1927) señala:

> "La obra de éste ha causado, por decirlo así, una revolución en la matemática, pues para los matemáticos de esa época tenía que ser algo sorprendente el hecho de que pudieran representarse por medio de series de funciones analíticas, funciones algebraicas formadas por leyes distintas en diferentes intervalos parciales de la variable dependiente" (p.308).

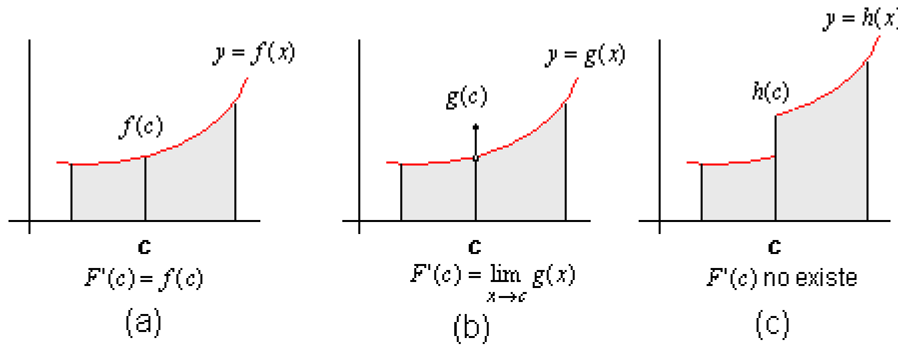
Louis Cauchy (1789 -1857) publica su *Anályse Algebraique* en 1822 y en él escribe: "He tratado de dar a los métodos todo el rigor que se exige en la geometría, sin acudir jamás a los argumentos de la generalidad del álgebra" (Rey y Babini, 2000, Vol. 1, p.155). Es decir retoma el rigor clásico de la geometría y en estas nuevas condiciones Cauchy funda el análisis sobre las bases sólidas de sus antecesores. Retoma el concepto geométrico de la integral; como una suma y no como la operación inversa de la diferencial. Labraña (2001) relata que Cauchy trabajó en las sucesiones de particiones de intervalos, con la finalidad de profundizar en las irregularidades presentes en la relación derivada – integral (los puntos angulosos y las discontinuidades evitables, una función no es derivable, pero si integrable). Retoma el concepto de integral, como el límite de una suma de rectángulos y da su propio significado al concepto.

Considera $S=\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ y prueba que para f continua se pueden hacer dos sumas S y S' que difieran en muchas cantidades arbitrariamente pequeñas, con tal que las longitudes de los subintervalos sean suficientemente pequeña que permitan definir en un intervalo $[a,b]$ $\int_a^b f(x)dx$ como el $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ la cual se puede comparar con la posterior condición de Riemann (1826-1866); dirigida a funciones discontinuas y toma todas las sumas relativas a la partición P con $\|P\|<\delta$, para $\delta>0$ y que difiere de un cierto número que será la integral. Por lo tanto

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|P\|\to 0} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i) \quad \xi_i \in [x_i,x_{i+1}]$$

Piskunov (1991) plantea la clásica pregunta en torno a la primitiva o antiderivada y la integral indefinida: "Naturalmente surge una cuestión: ¿toda $f(x)$ tiene función primitiva (y, por consiguiente, integral indefinida)?" (p. 395). Más adelante responde negativamente y asegura que toda función continua en $[a,b]$ tiene primitiva y por tanto, integral indefinida. La confusión radica entre ser integrable, tener primitiva y ser continua en un intervalo. Así, si existe $\int_a^b f(x)dx$, la función $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ definida para todo $x\in[a,b]$ y derivable en cualquier punto $c \in [a,b]$ por lo que f será continúa y $F'(c) = f(c)$ (figura 22-a)

FIGURA 22



Inspirado en Labraña (2001)

Siguiendo con las posibilidades, si existe $\int_a^b g(x)dx$ y g tiene discontinuidad evitable en c, entonces $F'(c) = \lim_{x \to c} g(x)$ (figura 22-b). Por último si $\int_a^b h(x)dx$ y h tiene en c una discontinuidad no evitable (un salto), entonces no existe $F'(c)$ (figura 22-c).

Labraña (2001) presenta un ejemplo de una función discontinua y que sin embargo, tiene primitiva y por tanto integral indefinida:

Para la función $f(x) = \begin{cases} 2xsen\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$ es una primitiva

$$F(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right), \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Cauchy desarrolla muchas pruebas en base a su concepto de integral, al principio sobre funciones continuas, para él una integral tiene valor único y finito, siempre que los límites de la variable siendo cantidades finitas, la función bajo el signo $\int$ sean también finitas y continuas en todo intervalo comprendido entre esos límites. Este concepto es lo que después se conocerá como *continuidad uniforme.* Llegado el momento extiende su noción de integral definida más allá del dominio de las funciones continuas. Brunschvicg (1945) indica que Cauchy denomina integral definida singular a

> "una integral tomada con respecto a una o varias variables entre límites infinitamente próximos, de ciertos valores atribuidos a esa mismas variables, a saber de los valores infinitamente grandes o de valores para los cuales la función bajo el signo $\int$ deviene infinita o indeterminada" (p.366).

Luego si f es una función continua en un intervalo (a,b) excepto en un punto c, podemos formar las siguientes integrales: $\int_a^{c-h} f(x)dx$ y $\int_{c+h}^{b} f(x)dx$. Si las dos integrales tienden hacia límites determinados, cuando h tiende a cero, la suma de ellos representa la integral $\int_a^b f(x)dx$, esto es:

$\int_a^b f(x) = \lim_{h\to 0}\left[\int_a^{c-h} f(x)dx + \int_{c+h}^{b} f(x)dx\right]$ esta integral que se obtiene en el intervalo (a,b), pero en realidad hay varios puntos de discontinuidad y se divide (a,b) en intervalos parciales, de manera que cada uno de ellos no exista más que un punto singular.

La conjetura de Fourier sobre el desarrollo de funciones en serie, lleva a Dirichlet (1805-1859) a revisar la integral de Cauchy y la define como la suma de integrales y no en la suma de intervalos en los que la función si era continua. Afirma que si se precisan las discontinuidades en intervalos de longitudes despreciables, se tiene una idea más difícil pero de mayor alcance. ¿Pero ésta se podría extender a cualquier función? Dirichlet plantea el siguiente contraejemplo:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x \text{ racional}\\ 1, & \text{si } x \text{ irracional}\end{cases}$$

Esta función carece de límite en cualquier $c \in \Re$. Si se toman particiones arbitrariamente pequeñas con todos los extremos de los subintervalos racionales, esto da lugar a sumas de Cauchy de valor cero, pero también se pueden hacer con todos los extremos irracionales para los cuales la suma se aproximará a uno por causa del primer intervalo. Así por lo tanto no hay límite que se aproxime a las dos sumas: 0 y 1. Pero Dirichlet supone que puede existir la integral para funciones con un número infinito de discontinuidades, por ejemplo: Para todo $x \in [0,1]$ se tiene la función:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{si } \exists n \in \mathrm{N} / x = 1/2^n\\ 2, & \text{si } \forall n \in \mathrm{N}\ \ x \neq 1/2^n\end{cases}$$

y conjetura que existe la integral, si entre dos puntos de discontinuidad cualquiera del intervalo, es posible tomar un subintervalo en el que la función sea continua y lo denomina *conjunto diseminado*. Esta idea se refiere a que todos los puntos de discontinuidad se pueden recubrir con un número finito de intervalos de longitudes arbitrariamente pequeñas. Cantor (1845-1918) posteriormente demostraría que de ser posible el recubrimiento señalado, el conjunto diseminado no sería equivalente a la integral.

Con Riemann (1826-1866) que pudo tomar las enseñanzas de Dirichlet y Lejeune, la integral va a tomar una extensión todavía mayor Lebesgue (1903), (citado por Brunschvicg, 1945) en cuanto a Riemann dice:

> "Riemann, dice Lebesgue cuya exposición hemos seguido aquí, lleva su atención sobre el procedimiento operatorio que permite, en el caso de funciones continuas, calcular su integral con las aproximaciones que se quiera, y se pregunta en qué caso ese procedimiento aplicado a funciones discontinuas da un número determinado" (p.367).

Si se considera una función determinada y limitada en un intervalo dado, ella tiene un límite superior L, y un límite inferior l. Se divide el intervalo en una serie de intervalos parciales, esto es:

$$(a, x_1)(x_1, x_2)\ldots(x_{n-1,b}); \quad x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{n-1}$$

En cada intervalo la función tiene un límite superior $\left(L_1, L_2, L_3, \ldots L_{n-1}\right)$ y un límite inferior $\left(l_1, l_2, l_3, \ldots l_{n-1}\right)$ y se obtienen las sumas:

$$S_n = (x_1 - a)L_1 + (x_2 - x_1)L_2 + (x_3 - x_2)L_3 + \ldots + (b - x_{n-1})L_n$$

$$s_n = (x_1 - a)l_1 + (x_2 - x_1)l_2 + (x_3 - x_2)l_3 + \ldots + (b - x_{n-1})l_n$$

Con estas sumas se conforman los conceptos de un *límite superior* y un *límite inferior* de la función en (a, b) y de allí los conceptos de integral por *exceso* e integral por *defecto*, de acuerdo a Darboux (1842 -1917). Si estos dos límites tienen el mismo valor, ese valor común será el valor de la integral.

Esto lleva a Riemann a extender la integral a funciones acotadas con un número infinito de discontinuidades en un intervalo cualquiera. Se basa en la idea de Cauchy pero genera una noción más general de *suma* y define la integral, si existe, de la siguiente manera:

$$\lim_{Max\{(x_{i+1}-x_i)\}\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \ \xi_i \in \left[x_i, x_{i+1}\right]$$

Labraña (2001) señala que Riemann no manejaba la ideas formal de medida, a pesar de esto él da una caracterización para la integral, analizando los saltos que se producen en unas discontinuidades. Esta caracterización apuntan al posterior concepto de *oscilación* y abrió el camino para que en el futuro se trabajara sobre el eje de las ordenadas: Una función es acotada e integrable si y sólo sí para todo $\sigma > 0$ la suma de las longitudes de los intervalos para los cuales el $Sup\{f(x)\} - Inf\{f(x)\} > \sigma$ se puede hacer tan pequeña como se quiera, si se toman las particiones lo suficientemente finas.

De la generalización de Darboux surge la relación que hoy conocemos como la *Regla de Barrow* que ya fue probada por Cauchy para derivadas continuas y contribuyó en la consolidación de la integral de Riemann, ya que demostraba su existencia: Si f tiene una derivada f' acotada e integrable (en el sentido de Riemann) en el intervalo $[a,b]$, entonces: $\forall x \in [a,b]\ \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$.

Labraña (2001) indica que asumir que la integral de Riemann es la operación inversa de la derivación, genera desajustes académicos. Si f tiene derivada f' que se anula en un conjunto denso de puntos del intervalo $[a,b]$, y la función f no es constante, entonces $\int_a^b f'$ no existe ya que en las sumas de Riemann siempre podemos elegir puntos en los que la función es cero, por lo que la integral sería cero, pero de acuerdo al teorema anterior f es constante, esto es:

$$\forall x \in [a,b]\ \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) = 0; \text{ luego } f(x) = f(a)$$

La integral de Darboux es equivalente a la integral de Riemann, en el sentido que una función es integrable según Darboux si y sólo sí es integrable según Riemann. Si las dos integrales existen tendrán el mismo valor. La integral de Darboux tiene la ventaja que se define más fácil, veamos su definición: Sea $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ una partición del intervalo $[a,b]$, cada $[x_{i-1}, x_i]$ es un subintervalo de la partición. Un refinamiento de la partición $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ será la partición $y_o, y_1, y_2, \ldots, y_n$ tales que existe en un entero $r(i)$ tal que $x_i = y_{r_{(i)}}$ para $0 \le i \le n$. El refinamiento consiste en subdividir los subintervalos en subintervalos más pequeños, considerando los puntos de corte.

Luego sea $f:[a,b] \to \Re$ una función y $P = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ la partición de $[a,b]$, para la cual se define:

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{y} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

La suma superior de Darboux de f con respecto a P es: $U_{f,P} = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ y la suma inferior es: $L_{f,P} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$.

La integral superior de Darboux para f está dada por:

$$U_f = Inf\{U_{f,P} / P \text{ es una partición de } [a,b]\}$$

La integral inferior de Darboux para f es:

$$L_f = Sup\{L_{f,P} / P \text{ es una partición de } [a,b]\}$$

Si U_f es igual a L_f, entonces se dice que f es Darboux – integrable y la integral será ese valor común.

La idea de Darboux es ver a la integral superior y a la integral inferior como conjuntos medibles y no necesariamente como intervalos.

Labraña (2001) se refiere a la limitación de la integral de Riemann en que en ésta no se conserva el paso o límite, esto es:

Si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión convergente de funciones Riemann-integrables en el intervalo $[a,b]$ y $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, entonces no necesariamente se cumplirá que exista $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$ y si se cumple es cuando la convergencia es uniforme, ya Cauchy había probado que era cierto para funciones continuas, pero implícitamente estaba presentando la noción de convergencia uniforme aún no conocida.

La teoría de la *medida* fue creada para hacer un análisis detallado de la noción de longitud de subconjuntos de línea y de forma más amplia para determinar el área verdadera y el volumen de los sub-espacios de los espacios euclidianos (Devinatz, 1968).

De acuerdo a Labraña (2001) y Devinatz (1968) el desarrollo de la teoría de la medida, extendió las ideas de Darboux, así se define el contenido de un conjunto en $\Re$ a partir de las longitudes de los intervalos I_k. El contenido interior es $C_i(X)=\underset{I_k\subseteq X}{Sup}\ I(I_k)$ (disjuntos dos a dos) y el contenido exterior: $C_e(X)=\underset{I_k\cap X=\phi}{Inf}\ I(I_k)$ cuando ambos valores coinciden, se dice que X es medible y su medida contiene a ese valor.

La integral de Lebesgue (1875-1941) es una construcción que extiende el concepto de integral a una clase más amplia de funciones. Por otra parte amplía el dominio en las cuales éstas están definidas. Se basa en la teoría general de la integración de funciones con respecto a una medida general, esto permite la integración de funciones definidas en un dominio secundario con respecto al verdadero, de acuerdo a la medida de Lebesgue, de hecho en la integral de Riemann se utiliza la noción de longitud de manera implícita; ya que el elemento de integración que utilizó es el rectángulo cuya área se calcula como el producto de la longitud de la base, por la longitud de la altura.

Para Labraña (2001) y Devinatz (1968), en su integral Lebesgue se basa en μ que es la medida no negativa de a en una $\sigma-$álgebra$X$ de subconjuntos del espacio E, E puede ser $\Re^n$ o cualquier cierto subconjunto mesurable de Lebesgue. X será la σ-álgebra de todos los conjuntos mesurables de Lebesgue[19] en E y μ será la medida de Lebesgue. En teoría de la probabilidad, μ será una medida de probabilidad en el espacio E de las probabilidades.

Esta integral se limita a las funciones mesurables. Una función f es mesurable si $f^{-1}[a,b]\in X$, lo cual es equivalente a decir que la preimagen de cualquier subconjunto de Borel de $\Re$ esté en X. El sistema de funciones es cerrado bajo operaciones algebraicas, pero las clases más importantes son las cerradas bajo límites secuenciales de un punto conveniente:

$$\lim_{k\in \mathrm{N}} Inf(f_k); \quad \lim_{k\in \mathrm{N}} Sup(f_k)$$

serán mesurables si la secuencia original $\{f_k\}$, donde $k\in \mathrm{N}$ está formada por funciones mesurables, la acumulación es la integral

$$\int_k f d\mu$$

[19] Extiende la medida de Jordan basándose en Borel quien resolvería el problema de medida de Cantor, en el cual se podía dar que las uniones de dos conjuntos disjuntos, tuviesen menor medida que la suma de las medidas de ellos. Define medida exterior admitiendo la colección de intervalos numerables; Para el caso de $X\subset[0,1]$ sería: $m_e(X)=\underset{I_k\cap X=\phi}{Inf}\; I(I_k), k\in \mathrm{N}$ y la medida interior es: $m_i(X)=1-m_e(X^c)$ Cuando las dos medidas coinciden se dice que X es medible y su medida es ese valor común.

para las funciones reales definidas en E y que fueron evaluadas como mesurables.

Con esta teoría Lebesgue definitivamente da garantía a la integral de Riemann. Riemann planteaba que puede ser posible asumir que funciones con conjunto no nulos de discontinuidades, sean integrables (R-integrables). Lebesgue supera las limitaciones:

Si f tiene derivada f' acotada en el intervalo $[a,b]$, $\int_a^b f'(x)dx$ existe en el sentido de Lebesgue, si $\forall x \in [a,b]$ $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$ esta nueva integración si conserva el paso o límite. Luego si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión uniformemente acotada de funciones Lebesgue-integrables en un intervalo $[a,b]$, y $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ entonces necesariamente existe:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Devinatz (1968) presenta el siguiente teorema que formaliza la vinculación entre estas tres integrales:

Supongamos que f es una función real con dominio acotado en el intervalo cerrado I. La función f es Riemann-Darboux integrable si y sólo sí el conjunto de discontinuidades de f tiene medida cero según Lebesgue (p. 371).

Configuraciones epistémicas que se deducen del período de evolución, desarrollo y consolidación del cálculo integral.

En este punto existen coincidencias con las configuraciones epistémicas obtenidas por Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2005).

<u>La impulsada por los trabajos de Newton y que tiene que ver con la relación inversa entre diferenciación e integración</u>.

Situaciones: Problemas que requerían de un mayor número de elementos matemáticos para su solución, como los planteados por Newton: Fluentes y fluxiones y de ellos los problemas:

1. Determina la fluente, dadas dos fluxiones y una sola fluente.
2. Determina la relación entre las fluentes, dadas dos fluxiones y dos fluentes.
3. Determina la relación entre las fluentes, si se dan varias fluxiones y fluentes.

Acciones: Expresar funciones como series infinitas de potencias y calcular el área como la inversa de la diferenciación. Utilizar las series infinitas de potencias como una técnica de integración.

Lenguaje: Geométrico, simbólico, notaciones y gráficos

Conceptos: Series de potencias , cuadraturas, curvaturas, tangentes, fluentes fluxiones, cantidades infinitamente pequeñas.

Propiedades: Utilizaba la recién conocida relación inversa entre los problemas de tangente y los de cuadratura. Desarrollos binomiales.

Argumentos: La integración como una suma infinita. Por otra parte usaba rigurosamente el método deductivo con el cual se permitía hacer generalizaciones.

La impulsada por los trabajos de Leibniz y que tiene que ver con el concepto de integral visto como una suma de elementos infinitesimales.

Situaciones: Se quiere generalizar la integral a un grupo más amplio de problemas y elaborar símbolos, notaciones y lenguaje para éstos.

Acciones: Emplear la sumatoria como la operación inversa a la diferenciación. Las cuadraturas como la suma de infinitos rectángulos. Se estableció el teorema Fundamental del cálculo y con él que la cuadratura es el problema inverso al de la tangente. Se estudian series infinitas.

Lenguaje: Simbólico y numérico.

Conceptos: Series infinitas, secuencias de diferencias, cuadraturas, curvaturas, tangente y proceso infinitos.

Propiedades: Para obtener el valor del área de una región cerrada, basta con sumar el área de los rectángulos, porque los triángulos son infinitamente pequeños.

Argumentos: Por otra parte usaba rigurosamente el método deductivo con el cual se permitía hacer generalizaciones.

La impulsada por el desarrollo teórico para la integral a partir de siglo XVIII

Situaciones: Las situaciones problemáticas que motivaban a los matemáticos de esta etapa, era la fundamentación de los conceptos fundamentales del cálculo integral. Las aplicaciones pasaron a un segundo lugar y el rigor matemático de la demostración como medio de garantía teórica. Se llega a la integración de Cauchy-Riemann.

Acciones: Las acciones más destacadas fueron: a) Incluir procesos aritméticos en la integración, b) generalizar la integral de Cauchy a un número más amplio de tipos de funciones, c) los conceptos de límites e infinitésimos, d) la definición de la integral como el límite de una suma y e) la integración de funciones que no tiene primitiva en todo el intervalo de integración.

Lenguaje: El que se deriva del análisis funcional y de las interpretaciones geométricas.

Conceptos: Función, límite, infinitésimo, continuidad y discontinuidad, series convergentes, derivada, diferencial e integral definida.

Propiedades: Son las que se presentan en la actualidad en los programas escolares y los libros de texto, ellas son: El Teorema Fundamental de Cálculo, Teorema del Valor Medio, relaciones entre la existencias del límite de una suma y el límite de las funciones arbitrarias de Fourier.

Argumentos: Los propios de rigor matemático de las demostraciones.

<u>La impulsada por el desarrollo de la Teoría de la Medida</u>

Situaciones: Generalizar de forma más amplia el concepto de integral con la aplicación de la Teoría de la Medida, la cual fue creada para hacer un análisis más detallado basado en la noción de línea, la cual permite determinar el área verdadera y el volumen verdadero de los sub-espacios de los espacios euclidianos.

Acciones: a) Se demuestra la condición necesaria y suficiente de Riemann para la unicidad de las sumas integrables, b) una demostración más amplia de los teoremas: El Teorema fundamental del Cálculo y el Teorema del Valor medio y c) Se extiende la medida de Jordan (de la definición de integral de Riemann) basándose en las ideas de medida de Borel (quien resolvería el problema de medida de Cantor, en el cual se podía dar que las uniones de dos conjuntos disjuntos, tuviesen menor medida que la suma de las medidas de ellos) como sustento para definir la integral (concepto de supremo e ínfimo).

Lenguaje: El propio del análisis, pero en términos conjuntistas y topológicos.

Conceptos: Integral, conjuntos medible, función medible, sumas superiores y sumas inferiores

Propiedades: Las propias de la teoría de la medida y la integral de Lebesgue.

Argumentos: Una deducción rigurosa fundamentadas en la integral definida y en base a la teoría de Borel.

Síntesis y conclusiones

Después de revisar los problemas planteados y las resoluciones por parte de los precursores del cálculo integral, podemos observar que a pesar del predominio de visiones meramente geométricas en las acciones emprendidas para la cuadratura y cubatura de regiones limitadas por funciones, los planteamientos infinitesimales y algebraicos están presentes en muchos de ellos. Eudoxo presenta soluciones geométricas con su *método de exhaución*, el cual permite expandir sucesivamente áreas conocidas, de tal manera que éstas den cuenta (exhausten) del área requerida. Este método cobra importancia como curso para desarrollar demostraciones en geometría.

Por otra parte Arquímedes, su primera avanzada fue mostrar que el área de un segmento de parábola es $4/3$ del área de un triángulo con la misma base y vértice, y $2/3$ del área del paralelogramo circunscrito, es el primer caso de adición de una serie infinita. Con el método de exhaución, halló aproximaciones al área del círculo y entre otras "integrales" calculó el volumen y el área de una esfera, volumen y el área de un cono, el área de una elipse y el volumen de cualquier paraboloide o hiperboloide de revolución. Johannes Kepler, en sus trabajos sobre el movimiento planetario, hizo aplicaciones geométricas cuando determinó áreas de sectores de una elipse como una suma de líneas. En forma similar calculó en forma exacta y aproximada el volumen de más de noventa sólidos de revolución al considerar a éstos compuestos de infinitos cuerpos infinitesimales de volúmenes conocidos.

Por su parte Galileo, con procedimientos parecidos al de Kepler, trata el problema del movimiento uniformemente acelerado, presentó un razonamiento para mostrar que el área de la curva tiempo-velocidad es la distancia. Cavalieri con su *método de lo indivisible* compara proporcionalmente lo indivisible de volúmenes o áreas de cuerpos cuyas áreas o volúmenes se conocen, lo generalizó con su método de “Suma de potencias de líneas”, aún sin el rigor matemático pudo obtener un resultado correcto $\sum_{A}^{B} x^k \text{ con } k = 1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Roberval calculó tangentes como vectores de “velocidad instantánea” y en relación al *cicloide* concluyó que su área es tres veces mayor a la del círculo que la genera. También Pascal determinó el área de cualquier segmento de esta curva cuando es cortada por una recta paralela a la base, el centroide del segmento y los volúmenes de los sólidos generados por éstos segmentos al girar alrededor de la base o de una recta vertical.

Para Hogben (1941), John Wallis fue uno de los primeros en introducir métodos analíticos en el cálculo, con ello abordó, por primera vez, la cuadratura de las curvas $y = x^k$ donde k no es necesariamente un entero positivo de forma sistemática. Sus trabajos fueron fuente de decisión para los desarrollos matemáticos de Newton.

Hogben (1941) señala que Isaac Barrow (1630-1677), fue maestro de Newton, en sus *Lectiones Geométriae* publicadas en 1670 describe los procedimientos infinitesimales conocidos por él. La mayoría de los problemas presentados versan sobre el trazado de tangentes y cuadraturas desde el punto de vista geométrico, es decir, no desarrolla razonamientos analíticos.

En su obra presenta el Teorema Fundamental del Cálculo, en el sentido de presentar el carácter inverso entre los problemas de la tangente y los problemas de áreas, siempre en un sentido geométrico.

Estos procesos de integración se diferencian de los actuales, en que no utilizaban de manera formal el concepto de límite, sin embargo en los argumentos que justificaban dichos métodos se basan en una idea intuitiva de este concepto.

En este análisis realizado sobre el cálculo integral, basado en la revisión documental de diversas fuentes como: textos de Historia de la Matemática, tesis doctorales y artículos corolarios de éstas se puede notar, cómo ya a principio del siglo XVII persistían dos problemas, que en definitiva, la búsqueda de sus soluciones consolidarían lo que hoy conocemos como cálculo diferencial e integral. Estos problemas son: a) Obtener la tangente a una curva y b) obtener longitudes de curvas; las áreas acotadas por curvas y los volúmenes acotados por superficies. Desde la antigüedad se ensayaron soluciones, pero por separado y sin estar conscientes de la relación existentes entre los dos problemas. La construcción del calculo diferencial e integral se le atribuye a Newton y Leibniz al establecer esta relación, pero a pesar de que las operaciones equivalentes a lo que hoy se conoce como cálculo integral, se practicaban desde la antigüedad; la trayectoria que va de la diferenciación a la integración es la que se reconoció primero (Brunschvicg, 1945).

Como este análisis se realiza en el marco de una tesis doctoral en didáctica de la matemática y dentro de la línea de investigación: *Perspectivas del enfoque semiótico-antropológico para la didáctica de la matemática* Arrieche (2003) es interesante el haber indagado sobre los diferentes significados institucionales de referencia, que se le ha dado a la integral a través del tiempo, desde su origen hasta su consolidación. Lo cual cobra interés cuando está previsto el diseño de un proceso de enseñanza y aprendizaje sobre este objeto matemático.

Los griegos ya hacían intentos para calcular áreas y volúmenes, el primer ejemplo conocido de una solución a una cuadratura lo protagonizó Hipócrates con la cuadratura del círculo. En base a conocimientos geométricos establece que el área del círculo es equivalente a la de un triángulo cuya área ya era conocida. Esta forma de integración, si se quiere, tiene un significado netamente geométrico, El problema era construir un área rectilínea igual a un área limitada por curvas. Arquímedes también en base a aplicaciones geométricas, plantea teoremas que luego demuestra de forma matemática. Él aseguró que el área de una parábola es un tercio del paralelogramo circunscrito, pero le da otra orientación diferente al geométrico, al aplicar el método de exhaución de Eudoxo y los postulados de continuidad para su demostración. Arquímedes obtuvo resultados similares a los que hoy se obtienen con los métodos infinitesimales, por eso se considera el precursor del cálculo infinitesimal, obtiene la mayoría de sus resultados a partir del valor límite de una sucesión convergente. Posteriormente en 1586 Stevin en su determinación del centro de gravedad de un paraboloide de revolución también lo obtiene en base a los cuatro primeros términos de una sucesión cuyo límite es cero.

En 1604 Luca Valerio modifica el razonamiento de Stevin con un teorema más general en el que ya se despunta el concepto de infinitésimo, a una figura plana si se le inscribe o circunscribe una figura en forma de escalera que puede estar formada por polígonos, prismas o cilindros, la diferencia entre los escalones inscritos y los circunscritos pueden ser tan pequeñas como se quiera. De igual forma Kepler utiliza consideraciones de orden infinitesimal para determinar volúmenes de sólidos. A partir de éstos últimos trabajos se asoma un nuevo significado para la integral diferente al de buscar un área rectilínea equivalente, ahora se considera al área conformada por infinitas figuras más pequeñas de áreas conocidas.

El método de lo indivisible originalmente utilizado por Pascal y posteriormente inventado por Cavalieri, ocupa un espacio intermedio entre la rigurosidad de las demostraciones de Arquímedes y los métodos infinitesimales que surgirán en la segunda mitad del siglo XVII. Este método da otra perspectiva al calculo integral, ya que lo indivisible permite referirse a los elementos de dos figuras en comparación, posteriormente con el apoyo de las técnicas del álgebra puede determinarse en valor del área o volumen que se quiere hallar.

Después de la obra de Cavalieri y sus sucesores más importantes como Pascal y Wallis, es que se desarrolla el concepto de integral. Para Hogben (1941) Wallis maestro de Newton fue uno de los primeros en aplicar métodos analíticos en el cálculo de áreas. Newton y Leibniz son considerados los inventores del cálculo, porque le dieron a los procedimientos infinitesimales de sus predecesores: Barrow, Fermat, Torricelli y Cavelieri la algorítmica y precisión necesaria y en definitiva establecen la relación entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Hogben (1941) señala que el cálculo integral y el cálculo diferencial emplean métodos semejantes, porque el área comprendida entre dos ordenadas de una porción de curva, depende del declive del trozo de la curva que la encierra. Newton desarrolla su obra esencial basada en series de potencias, ya que con ellas puede expresar curvas complicadas como la suma de curvas sencillas. Él supone las series como sumas de infinitos términos, que es básicamente la misma idea del cálculo de primitivas. Por otra parte establece el método para obtener funciones a partir de un área y mantiene la utilización de lo infinitamente pequeño, tanto en lo geométrico como en lo analítico, de forma similar a los procedimientos de Barrow y Fermat. Para Villanueva (2007) mientras los predecesores utilizaron procedimientos equivalentes a la integral definida, Newton usó la razón de cambio del área y a partir de esta encuentra el área, que es lo que en la actualidad se conoce como integral indefinida.

Leibniz por su parte se preocupó por clarificar los conceptos y darle la formalidad matemática requerida a los nuevos algoritmos. Elaboró la simbología, entre ellas la del signo $\int$ e introdujo su elemento *diferencia* y su operación inversa llamada *suma* comparable a los elementos *fluente* y *fluxión* respectivamente, creados por newton. Para Leibniz la propiedad fundamental es la diferenciación y la integración la considera inversa a ésta.

Después de Newton y Leibniz, Johann Bernoulli asegura que la integral no proviene de sumar cantidades infinitamente pequeñas, sino de la diferencias de dichas magnitudes y el problema consiste en cómo expresar estos elementos de diferencias, es decir invertir la operación de diferencia. En el siglo XIX Fourier revolucionó el desarrollo del cálculo integral con la introducción de su concepto de funciones arbitrarias, en el cual subyace el concepto de aplicación. Cauchy fundamenta su análisis sobre el concepto geométrico de la integral como una suma y no como la inversa de la diferenciación, da todo el rigor requerido en la geometría, pero sin acudir a los argumentos generales del álgebra. Profundiza en las irregularidades de la relación derivada-integral (los puntos angulosos, las discontinuidades evitables, una función no es derivable, pero si es integrable) y retoma el concepto de la integral como el límite de una suma de rectángulos y da su propio concepto a la integral, del cual se desprende el concepto que posteriormente se denominará *continuidad uniforme*.

En base al desarrollo de funciones en series de Fourier , Dirichlet revisa la integral de Cauchy y la define cómo la suma de integrales y no en la suma de los intervalos donde la función es continua. Riemann basándose en Dirichlet amplia la idea de Cauchy y extiende la integral a funciones acotadas con un número infinito de discontinuidades en un intervalo cualquiera. Ideó una noción más general de la suma con la que se permitió definir su integral. Darboux generaliza la integral de Riemann y de el surge lo que hoy se conoce como la regla de Barrow. La integral de Darboux es equivalente a la de Riemann en el sentido que una integral es integrable según Darboux si y sólo sí es integrable según Riemann, si las dos integrales existen tendrán el mismo valor. Darboux profundiza su integral en base al concepto de conjunto medible, que está implícito en la integral de Riemann, porque el área de un rectángulo es el producto de la longitud de la base por la longitud de la altura.

La integral de Lebesgue, también basada en la teoría de la medida, definitivamente viene a generalizar la integral de Riemann. Existía la limitación planteada por Riemann al señalar que puede ser posible asumir qué funciones con conjuntos no nulos de discontinuidades, sean Riemann integrables, la integral de Lebesgue supera esta limitación.

Es importante todas estas consideraciones teóricas sobre la integral, en ellas se observan diferentes configuraciones epistémicas que son valiosas para diseñar la trayectoria matemática y la trayectoria didáctica sobre la integral en una variable real prevista en este estudio. Sin embargo, se requiere conocer el significado institucional de referencia que tiene este objeto matemático en las instituciones de educación superior que ofrecen carreras técnicas como, ingeniería y técnico superior. En el capítulo V se analizarán los currículos de estas instituciones y también se indagará sobre las diferentes aplicaciones que tiene la integral en la formación técnica.

En los siguientes cuadros se presenta un resumen de las diferentes configuraciones epistémicas:

CUADRO 3

Configuración epistémica de los orígenes.

Situaciones	***Acciones***	***Leguaje***	***Conceptos***	***Propiedades***	***Argumentos***
Cuadraturas Cubaturas	Por el método de exhausción las mejores aproximaciones numéricas que representen áreas y volúmenes	Básicamente geométrico, también aritmético	Conceptos básicos de medida, área y volumen, es decir cuadraturas y cubaturas. Nociones de continuo, infinito	Fórmulas de áreas y volúmenes, los axiomas de Arquímedes. Método de exhausción y propiedades de las razones	La doble reducción al absurdo utilizada por Arquímedes.

CUADRO 4

Configuración epistémica de acuerdo a la resolución de los problemas originarios del cálculo integral.

Situaciones	***Acciones***	***Leguaje***	***Conceptos***	***Propiedades***	***Argumentos***
Los problemas se plantean en base a determinar áreas y volúmenes de regiones y sólidos generados por funciones del tipo algebraicas y algunas funciones transcendentes.	Las integraciones se hacen de forma numérica. Es decir por aproximaciones numéricas.	Geométrico, aritmético y algebraico.	Infinitésimo, series, cuadratura, cubatura, centro de gravedad, arcos, series infinitas, infinitésimo, indivisible, infinitamente pequeño.	Series infinitas, método de exhausción, sin doble reducción al absurdo. El método inductivo aplicado por Wallis para su integración.	método de exhausción y el método deductivo.

Configuraciones epistémicas del período de evolución, desarrollo y consolidación del cálculo integral

CUADRO 5

Configuración epistémica impulsada por Newton y que tiene que ver con la relación inversa entre diferenciación e integración.

Situaciones	***Acciones***	***Leguaje***	***Conceptos***	***Propiedades***	***Argumentos***
Problemas que requerían de un mayor número de elementos matemáticos para su solución, como los planteados por Newton: Fluentes y fluxiones y de ellos los problemas	Expresar funciones como series infinitas de potencias y calcular el área como la inversa de la diferenciación. Utilizar las series infinitas de potencias como una técnica de integración.	Geométrico, simbólico, notaciones y gráficos.	Series de potencias, cuadraturas, curvaturas, tangentes, fluentes fluxiones, cantidades infinitamente pequeñas.	Utilizaba la recién conocida relación inversa entre los problemas de tangente y los de cuadratura. Desarrollos binomiales.	La integración como una suma infinita. Por otra parte usaba rigurosamente el método deductivo con el cual se permitía hacer generalizaciones.

CUADRO 6

Configuración epistémica impulsada por los trabajos de Leibniz y que tiene que ver con el concepto de integral visto como una suma de elementos infinitesimales.

Situaciones	***Acciones***	***Leguaje***	***Conceptos***	***Propiedades***	***Argumentos***
Se quiere generalizar la integral a un grupo más amplio de problemas y elaborar	La sumatoria como la inversa de la diferenciación. Cuadraturas como suma de infinitos	Simbólico y numérico.	Series infinitas, secuencias de diferencias, cuadraturas, curvaturas,	Para obtener el valor del área de una región cerrada, basta con sumar el	Se usaba rigurosamente el método deductivo con el cual se permitía hacer generalizaciones.

símbolos, notaciones y lenguaje para éstos.	rectángulos. Se estableció el Teorema Fundamental del Cálculo. La cuadratura es el problema inverso a la tangente. Se estudian series infinitas.		tangente y proceso infinitos.	área de los rectángulos, porque los triángulos son infinitamente pequeños.	

CUADRO 7

Configuración epistémica impulsada por el desarrollo teórico para la integral a partir de siglo XVIII.

Situaciones	***Acciones***	***Leguaje***	***Conceptos***	***Propiedades***	***Argumentos***
El fundamento de los conceptos fundamentales del cálculo integral, el rigor matemático de la demostración como medio de garantía teórica. Se llega a la integración de Cauchy-Riemann.	Incluir la aritmética en la integración, generalizar la integral de Cauchy. Los conceptos de límites e infinitésimos, La integral como el límite de una suma. Integración de funciones en la primitiva no existe en todo el intervalo.	El de el Análisis Funcional, El de la Geometría	Función, límite, infinitésimo, continuidad y discontinuidad, series convergentes, derivada, diferencial e integral definida.	El Teorema Fundamental de Cálculo, Teorema del Valor Medio, relaciones entre la existencias del límite de una suma y el límite de las funciones arbitrarias de Fourier.	Los propios de rigor matemático de las demostraciones.

CUADRO 8

Configuración epistémica impulsada por el desarrollo de la Teoría de la Medida.

Situaciones	***Acciones***	***Leguaje***	***Conceptos***	***Propiedades***	***Argumentos***
Generalizar de forma más amplia el concepto de integral con la	La condición necesaria y suficiente de Riemann, para la unicidad de las sumas	El de el análisis, pero en términos conjuntista y topológico.	Integral, conjuntos medible, función medible, sumas	Las propias de la teoría de la medida y la integral de Lebesgue.	Una deducción rigurosa fundamentada en la integral definida y en

aplicación de la Teoría de la Medida.	integrables. Demostraciones más amplias de: El Teorema fundamental del Cálculo y el Teorema del Valor medio.		superiores y sumas inferiores.		base a la teoría de Borel.

CAPÍTULO V

La integral en una variable real en los currículos de las carreras técnicas: Estudio comparativo

Introducción

En las carreras técnicas como ingeniería y técnico superior universitario los currículos incluyen las asignaturas Análisis Matemático II, Matemática II o Cálculo II. Aún cuando el programa de éstas puede variar de una institución a otra, el cálculo integral y sus diversas aplicaciones clásicas[20] es una constante en ellas. En Venezuela a excepción de los estudiantes de las Escuelas Técnicas el primer encuentro con este concepto se tiene en el segundo semestre de las carreras universitarias[21]. A lo anterior también se le suma el hecho, no menos importante, que la noción de infinito sólo se menciona en Educación Media. Si bien es cierto que en estas carreras, estas asignaturas suele referirse en gran parte al cálculo integral y sus aplicaciones, por otro lado la comprensión de este concepto es fundamental para resolver problemas propios de cada área.

Para una mejor visión de la problemática de la enseñanza de la integral en una variable real en las carreras técnicas, en este capítulo se hará una revisión de los currículos de ingeniería de dos universidades de dilatada trayectoria como son la Universidad Central de Venezuela (UCV) y la Universidad de Carabobo (UC) y el Instituto Universitario de Tecnología de La Victoria (IUTE-LV), siempre en lo relativo a los cursos de Matemática II,

[20] Problemas geométricos, físicos, económicos, etc.
[21] Son estudiantes de 17 o más años de edad.

Análisis Matemático II y Cálculo II considerando las orientaciones que se le da a la enseñanza de este tema.

Es importante conocer lo que es el currículo. Grundy (1991) lo define de la siguiente manera:

> "No es un concepto, sino una construcción cultural. Esto es, no se trata de un concepto abstracto que tenga algún tipo de existencia fuera y previamente a la existencia humana. Más bien es un modo de organizar una serie de prácticas educativas" (p.19).

Así el currículo es la orientación que se la da a las actividades educativas, con el fin del logro del aprendizaje sistemático. De ahí que se espera que con este estudio se pueda tener suficiente información sobre la orientación que se le da a la integral en una variable real dentro del proceso de formación técnica universitaria y la manera como ésta se enseña, lo cual puede darnos pistas de los orígenes de los conflictos que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático.

Estudio curricular

La LOE en su artículo 28 señala que son institutos de educación superior, la universidades y colegios universitarios entre otros. Para delimitar el ámbito de este estudio y continuar con las demás instancias de la investigación el estudio curricular se hará a tres instituciones de Educación Superior de reconocida trayectoria en la formación técnica, como son: La UCV creada en 1721, comienza a formar ingenieros en 1874[33], es la universidad más antigua de Venezuela. La UC se creó en 1892 con el nombre de Universidad de Valencia, también con una amplia tradición en la formación de ingenieros. La Facultad de Ingeniería de la

[33] Cuando se creó la Facultad de Ciencias Exactas, que comprendió como modalidades adicionales Ingeniería Agronómica y Arquitectura.

UC inicia sus actividades en 1958 junto con la reapertura de la universidad formando los ingenieros industriales que requería la nación para cubrir las necesidades del pujante desarrollo industrial de esa época. Con el paso de los años esta facultad además de la escuela de ingeniería industrial apertura las escuelas de Mecánica, Electricidad, Civil y otras. El IUTE-La Victoria, el Ministerio de Educación aprobó la creación de este instituto el 14 de septiembre de 1976 con la finalidad de formar personal técnico calificado que demandaba la industria nacional. Inicia sus actividades en 1978 con las carreras de Mecánica y Electricidad, en 1990 se apertura la carrera en la especialidad de Informática y en 1993 Administración de costo.

La reseña histórica sobre la carrera de ingeniería eléctrica de la página web de la UCV[34], señala que hasta 1943 las escuelas de ingeniería del país sólo otorgaban el título de Ingeniero Civil, es a partir de 1944 cuando en la UCV se inicia un proceso de reformas tendientes a diversificar las opciones y modernizar el currículo con la incorporación de nuevos cursos, este trabajo dio como frutos la creación de nuevas escuelas de ingeniería en las diferentes universidades nacionales como: Metalurgia, de Computación, de Sistemas, Química, Forestal, de Materiales, en Petróleo, etc. con lo que se abarca un gran segmento de las actividades técnicas de nuestro país.

También la LOE en su artículo 27 señala que la Educación Superior tendrá los siguientes objetivos:

1. Continuar con el proceso de formación integral del hombre, formar profesionales y especialistas y promover su actualización y mejoramiento conforme a las necesidades del desarrollo nacional y del progreso científico.

---

[34] Tomado de la página: http://neutron.ing.ucv.ve/historia/HISTORIA.HTM

2. Fomentar la investigación de nuevos conocimientos e impulsar el progreso de la ciencia, tecnología, las letras, las artes y demás manifestaciones creadoras del espíritu humano en beneficio del bienestar del ser humano, de la sociedad y del desarrollo independiente de la nación.
3. Difundir los conocimientos para elevar el nivel cultural y ponerlos al servicio de la sociedad y del desarrollo integral del hombre.

En consideración a este artículo, en la siguiente tabla se hace una comparación de la Misión y Visión que tienen cada una de las instituciones consideradas en el siguiente estudio.

CUADRO 9

Comparación de la Misión y Visión de las tres instituciones.

UCV[35] **Ingeniería**	**UC[36]** **Ingeniería**	**IUTE-LV[37]**
Misión: La siguiente es la misión cardinal que nos encomiendan cumplir y la asumimos como propia: Nuestra nación: La formación de talento humano altamente calificado y comprometido con la sociedad y el ambiente, capaces de liderar el desarrollo tecnológico sustentable al que se aspira.	**Misión:** Formar ingenieros a nivel de Pregrado y Postgrado, altamente capacitados y dotados de conocimientos científicos y tecnológicos, de valores y actitudes que les permita un ejercicio profesional apropiado a las exigencias actuales, que satisfagan los requerimientos de la sociedad para el desarrollo de la nación y del país	**Misión:** Formar íntegramente profesionales universitarios a nivel de Pregrado y Postgrado, a través de la Docencia, Investigación, Extensión y Postgrado con criterios de competitividad, adaptados a las necesidades cambiantes del entorno.

35 Tomado de la página http://www.ing.ucv.ve/

36 Tomado de la página http://www.uc.edu.ve/

37 Tomado de la página http://iutlv.edu.ve/

Entes públicos y privados: Contribuir con la calidad de sus productos y servicios y fortalecer una competitividad por medio de la generación de una apropiada e innovadora transferencia de soluciones tecnológicas. Las comunidades: Contribuir con el desarrollo vía nuestro más significativo aporte a la resolución de los problemas de ingeniería más sentidos por ellas. La Universidad: Afianzar nuestra facultad como centro de referencia nacional e internacional en el área de ingeniería.		
Visión: La UCV centro de referencia nacional con proyección internacional en sus áreas de competencias, será reconocida por su capacidad para liderar el desarrollo tecnológico sustentable de la nación. Esto en base al desarrollo, optimización y modernización de su infraestructura y organización, todo ello	**Visión:** Ser una facultad de reconocida pertinencia y prestigio a nivel regional, nacional e internacional. Producto de lo destacado de sus investigaciones, la excelencia de sus egresados y su contribución al desarrollo científico y tecnológico; una organización flexible como consecuencia del estudio constante del medio y de la	**Visión:** Ser una institución de Educación Superior en la búsqueda constante de la excelencia, a través de la Docencia, Investigación, Extensión y Postgrado, orientados al logro de la competitividad y a la autogestión que nos permita consolidar un liderazgo social pertinente y necesario para impulsar el crecimiento integral del individuo y el

fundamentado en su modelo de facultad antes los retos del siglo XXI con los que podrá acometer sus objetivos tanto de excelencia académica, como de investigación y desarrollo. Así estará no sólo en condiciones de diversificar y fortalecer sus alianzas internas, nacionales e internacionales, sino también destacar en ciertas áreas tecnológicas estratégicas, realizar aportes significativos al conocimiento universal y proveer soluciones tecnológicas innovadoras, contribuyendo a fortalecer la competitividad industria cliente.	Autoevaluación permanente de sus operaciones y desempeño.	desarrollo de la nación.

Es notorio que la misión y visión de las tres instituciones, están comprometidas y en consonancia con el artículo 27 de la LOE. En cuanto a la misión**,** las tres instituciones están entregadas a la formación integral de profesionales universitarios en carreras técnicas, a través de sus niveles de Pregrado y Postgrado, capacitados en conocimientos científicos y tecnológicos, además de valores y actitudes que les permitan un ejercicio profesional apropiado a las exigencias actuales. En cuanto a la visión, las tres coinciden en ser instituciones de Educación Superior en la búsqueda constante de la excelencia mediante la Docencia, la Investigación, la Extensión y el Postgrado, el reconocimiento de sus egresados y su contribución del desarrollo científico y tecnológico del país.

A manera de conclusión y enfocándolo hacia el ámbito de la Educación Matemática, se tiene que ésta tiene un gran espacio en la búsqueda de la excelencia de las instituciones con el mejoramiento constante de la formación científica y tecnológica y con el diseño e implementación de asuntos tendientes a hacer más efectivo el proceso de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Para apuntalar esta conclusión nos referimos a lo señalado por Arrieche y Ortiz (1999). "El currículo de Matemática debe favorecer el planteamiento que señala a las matemáticas como una cuestión de ideas que un estudiante construye en su mente" (p.4). Más adelante y en la misma página afirman que el currículo es el elemento principal para el logro de los objetivos generales del área matemática y presentan los siguientes:

1. Utilizar el conocimiento matemático para organizar, interpretar e intervenir en diversas situaciones de la "realidad".
2. Comprender e interpretar distintas formas de expresión matemática e incorporarlas al lenguaje y a los modos de argumentaciones habituales.
3. Reconocer y plantear situaciones en las que existan problemas susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, resolverlos y analizar los resultados utilizando recursos apropiados.
4. Reflexionar sobre las propias estrategias utilizadas en la actividad matemática.
5. Incorporar hábitos y actitudes propias de la actividad matemática.

Comparación de los objetivos programáticos relativos al Cálculo Integral

En base a lo anterior revisamos los objetivos generales de las asignaturas Cálculo II, Análisis Matemático II y Matemática II en las tres instituciones objeto de estudio.

CUADRO 10

Comparación de los objetivos relativos al Cálculo integral en las tres instituciones.

UCV **Ingeniería**[38] **Cálculo II (0252)**	**UC** **Ingeniería**[39] **Análisis Matemática II (MA2B03)**
Objetivo General: Aplicar el Cálculo integral y series para modelar y resolver problemas propios de la ingeniería. Objetivos específicos: 1. **Valorar la importancia del conocimiento y uso de las integrales en la carrera de ingeniería.** 2. Calcular integrales indefinidas y definidas utilizando el método más apropiado para su resolución. 3. Aplicar la integración para resolver problemas de cálculo de áreas de figuras planas, volúmenes, sólidos de revolución, problemas aplicados a la física (masa, centro de masa, trabajo, etc.) 4. Aplicar las series en la resolución de	Objetivo General: Aplicar los conocimientos de cálculo integral para resolver problemas analíticos, geométricos y físicos de aplicación frecuente en el campo de ingeniería. Manejar el lenguaje del cálculo integral y series, en forma clara, precisa y ordenada. Desarrollar el hábito del razonamiento lógico estimulando la creatividad y el sentido crítico. Comprender y usar los conceptos matemáticos necesarios en el aprendizaje de conocimientos posteriores. Constatar la aplicabilidad de la asignatura en los sucesos de la vida cotidiana.

[38] Ingeniería en las especialidades: civil, eléctrica, geología, minas, mecánica, metalúrgica, ciencias de los materiales, química y petróleo.
[39] Ingeniería en las especialidades: civil, eléctrica, industrial, mecánica y química.

problemas propios a la ingeniería.	
IUTE-LV	
Matemática II (MAE205) **Carrera Electricidad. Opciones: Electrotecnia, Instrumentación y control y Telecomunicaciones**	**Matemática II (MAM205)** **Carrera Mecánica.**
Objetivo General: Utilizar el cálculo integral en la resolución de problemas propios a la carrera. Resolver ecuaciones diferenciales. Aplicar las ecuaciones diferenciales en la resolución de problemas propios a la carrera. Aplicar la transformada de Laplace en la resolución de problemas propios a la carrera.	Objetivo General: Analizar problemas técnicos enmarcados en el campo de la mecánica, dentro de una perspectiva de correlación con otras áreas de la especialidad, utilizando la metodología adecuadas y herramientas tales como: El cálculo integral, la resolución de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden con coeficientes constante, la transformada de Laplace y la integral doble, que permitan el abordaje de situación complejas en el contexto futuro de desempeño.
Matemática II (MAA204) **Carrera Administración mención costo.**	**Matemática II (MAI203)** **Carrera informática.**
Objetivo General: Aplicar el cálculo integral en la resolución de problemas relacionados con la administración. Aplicar el cálculo matricial en la resolución de problemas relacionados con la administración.	Objetivo General: Aplicar el cálculo integral en la resolución de problemas de áreas, volúmenes, longitud de arco, modelos de crecimientos, problemas asociados a la economía y problemas varios de la vida cotidiana.

En la tabla anterior se puede observar que en los objetivos generales y específicos de Cálculo II, Análisis Matemático II y Matemática II en las instituciones mencionadas, existen aspectos comunes algunos de forma explícita y otros que van implícito en lo que se espera, estos son:

1. Se persigue que los estudiantes apliquen los conocimientos adquiridos sobre el cálculo integral en la resolución de problemas.
2. El desarrollo de la capacidad analítica propicia para el futuro ingeniero o técnicos superior universitario.

3. El manejo del lenguaje matemático (integrales, series, etc.) en forma clara y precisa.
4. La valoración del cálculo integral como herramienta analítica para resolver problemas propios del área.
5. Modelar y resolver problemas cuya solución conduce a la aplicación del cálculo integral.
6. El cálculo integral es necesario para la comprensión y aprendizaje de conocimientos posteriores.

Comparación del contenido programático relativo al Cálculo Integral en las carreras de Ingeniería y Técnico Superior Universitario

Estos aspectos delinean la intencionalidad que tiene la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en las carreras técnicas universitarias. En los cursos de Matemática II, Cálculo II y Análisis II de estas carreras se le brinda al estudiante la oportunidad de apropiarse del cálculo integral como una forma de pensamiento matemático que le permite resolver problemas asociados a la realidad de su carrera. Esto resume en gran parte la importancia que tiene la integral en una variable real en los currículos de las instituciones seleccionadas para este estudio.

En la continuación del análisis, ahora revisaremos el contenido sinóptico de estas asignaturas y el orden como se presentan. Se ha tratado de obtener información sobre los cambios que han presentado éstos programas a lo largo de los años, pero ha sido inútil, aparentemente los contenidos se han mantenido en el tiempo, veamos el cuadro 11.

CUADRO 11

Comparación de los contenidos programáticos de las tres instituciones.

UCV – Ingeniería **Cálculo II (0252)**	**UC-Ingeniería** **Análisis Matemático II (MA2B03)**
Contenidos: Tema 1: La integral indefinida o antiderivada. Tema 2: La integral definida. Tema 3: Aplicaciones de la integral definida. Tema 5: Series numéricas. (Ver anexos D)	**Contenidos:** Unidad I: Tema 1: Integral indefinida. Tema 2: Métodos de integración. Tema 3: Aplicaciones de la integral indefinida: Problemas geométricos y físicos. Unidad II: Tema 1: Integral definida. Tema 2: Integrales impropias. Tema 3: Aplicaciones de la integral definida: cálculo de áreas planas. Coordenadas cartesianas. Coordenadas paramétricas. Coordenadas polares. Unidad III: Tema 1: Series numéricas. Tema 2: Series de potencias. (Ver anexos D)
IUTE-LA VICTORIA	
Matemática II (MAE205) **Carrera Electricidad**	**Matemática II (MAM205)** ***Carrera Mecánica***
Contenidos: Unidad I: Integrales Tema 1: Integral indefinida. **Tema 2: Integral definida.** Tema 3: Métodos de integración. Tema 4: Aplicaciones del cálculo integral. Unidad II: Ecuaciones Diferenciales Tema 1: Ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden con coeficientes constantes. Tema 2: Aplicaciones de las ED en la resolución de problemas de circuitos RCL en serie, paralelo y serie paralelo. Unidad III: Transformada de Laplace. Tema 1: Definición, teoremas: fórmulas elementales, transformada inversa. Tema 2: Aplicaciones de la transformada a problemas de valor inicial. (Ver anexos D)	**Contenidos:** Unidad I: Cálculo integral y sus aplicaciones Tema 1: Definición de primitiva. Integral indefinida. Tema 2: Integral definida. Tema 3: Métodos de integración. Tema 4: Aplicaciones de la integral: Área, longitud de arco de una función real, volúmenes de sólidos de revolución, áreas de superficies de revolución, trabajo efectuado por una fuerza, momento de inercia, centro de masa, centroide. Tema 5: Integrales impropias. Unidad II: Ecuaciones diferenciales Tema1: Ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden con coeficientes constantes. Tema 2: Problemas que conducen a resolver una ecuación diferencial de primer o segundo orden con coeficientes constantes y que rigen el estado de un sistema mecánico. Unidad III: Transformada de Laplace. Tema 1: Definición, teoremas: fórmulas

<table>
<tr><td></td><td>elementales, transformada inversa.
Tema 2: Aplicaciones de la transformada a problemas de valor inicial y calcula la función de transferencia de un sistema mecánico.

<u>Unidad IV</u>: Cálculo en varias variables.
Tema 1: Funciones en dos o mas variables.
Tema 2: Límite, derivadas parciales, gradiente, derivada direccional y integral doble.
Tema 3: Aplicar la integral doble en cálculo de volúmenes, momentos de inercias, centros de masa.
(Ver anexos D)</td></tr>
<tr><td>Matemática II (MAA204)
Carrera Administración</td><td>Matemática II (MAI203)
Carrera Informática</td></tr>
<tr><td>Contenidos:
<u>Unidad I</u>: Integrales
Tema 1: Primitiva e integral indefinida.
Tema 2: Integral definida.
Tema 3: Métodos de integración.
Tema 4: Integral definida.
Tema 5: Aplicaciones de la integral en el cálculo de áreas limitadas por funciones continuas, volúmenes de sólidos de revolución, área de superficies de revolución, valor medio de una función y aplicaciones a la administración.
Tema 6: Integrales impropias.

<u>Unidad II</u>: Álgebra matricial
Tema 1:Definición de matriz, elementos y notación. Tipos de matrices.
Tema 2: Operaciones con matrices.
Tema 3: Aplicaciones.

<u>Unidad III</u>: Sistemas de ecuaciones lineales
Tema 1: Definición. Sistemas compatible e incompatibles.
Tema 2: Métodos de resolución. Gauss-Jordan.
Tema 3: Aplicaciones.

<u>Unidad IV</u>: Determinantes
Tema 1: Definición y propiedades.
Tema 2: Métodos
Tema 3: Inversa de una matriz por Gauss-Jordan
Tema 4: Regla de Cramer para resolver</td><td>Contenidos:
<u>Unidad I</u>:
Tema 1: Primitiva e integral indefinida.
Tema 2: Métodos de integración.

<u>Unidad II</u>:
Tema 1: Integral definida. Teorema fundamental del cálculo integral.
Tema 2: Aplicaciones de la integral en el cálculo de áreas limitadas por funciones continuas, volúmenes de sólidos de revolución, área de superficies de revolución, valor medio de una función y aplicaciones económicas, a modelos de crecimiento de población y modelos varios.
Tema 3: Integrales impropias.

<u>Unidad III</u>:
Tema 1: Integración numérica o aproximada. Métodos de Newton, Trapezoidal, parabólico o de Simpson.
Tema 2: Errores de aproximación.
Tema 3: Aplicaciones de la integración numérica en la resolución de problemas varios.
(Ver anexos D)</td></tr>
</table>

sistemas de n ecuaciones con n incógnitas. (Ver anexos D)	

Como ya se dijo anteriormente, se evidencia en los contenidos sinópticos presentados, en Venezuela a excepción de las escuelas técnicas, los estudiantes tienen su primer contacto con el cálculo integral en el segundo semestre de su formación técnica universitaria. Por otra parte se pone de manifiesto una secuencia en el apartado del cálculo integral de la siguiente manera:

1. El cálculo de primitiva.
2. Métodos de integración.
3. La integral definida. Regla de Barrow.
4. Aplicaciones de la integral: Cálculo de áreas y volúmenes, problemas físicos y problemas varios de economía, crecimiento de población, etc.

En los últimos años se ha venido incorporando los métodos aproximados, es decir; la integración numérica como el caso de las carreras vinculadas a la informática y la mecánica.

Para Llorens y Santoja (1997), el mayor énfasis se hace en el primer y segundo punto, “ello responde a que el objetivo que se persigue es adiestrar al estudiante en el cálculo de primitivas y ello a base de repetir muchos ejercicios, exigiendo un considerable y progresivo nivel de destrezas por lo que se facilitan incluso; trucos y recetas” (p. 65), con la finalidad de contribuir a que los estudiantes sean más efectivos en la obtención de resultados, esto a costa de sacrificar la interpretación de lo que significa el cálculo integral.

Cordero (2005) señala que los programas curriculares dejan de un lado las dimensiones epistemológicas y cognitivas de los conceptos del cálculo diferencial e integral. Por lo general se concibe el cálculo como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes a los cuales posteriormente se le conseguirán algunas aplicaciones. Más adelante los mismos autores afirman:

> "Esa concepción, en el mejor de los casos provoca un buen desarrollo de los procedimientos analíticos de los conceptos y logra matizarlos en el dominio de las funciones; sin embargo, muchas veces se cree que aquellos procedimientos sustituyen cualquier otro tipo de procedimientos, como los intuitivos y los visuales" (p. 269).

Esta posición favorece a que se consideren los conceptos matemáticos como objetos ya hechos, sin considerar que pueden ser construidos por los estudiantes en función de diferentes clases de situaciones.

Consideramos que deben ensayarse alternativas de enseñanza y aprendizaje del cálculo, donde se equilibren los conocimientos teóricos del cálculo integral, la adquisición de destrezas para calcular integrales y las aplicaciones en la modelización y resolución de problemas. Se espera que este trabajo contribuya a diseñar y evaluar procesos de estudio sobre la integral en una variable real, con equidad sobre los aspectos mencionados. Para ellos se diseñaran sistemas de práctica que contemplen las seis dimensiones planteadas por Godino (2003), a saber: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica.

La importancia que tiene el Cálculo Integral en la formación de las carreras técnicas universitarias

Nos mueve también conocer qué consecuencias tiene para el estudiante, en relación a su formación en una carrera técnica, aprender la integración de funciones en una variable real. Por ello es de interés revisar para qué asignaturas es requisito, Cálculo II, Análisis Matemático II y Matemática II, Veamos el cuadro 12:

CUADRO 12

Comparación de las prelaciones que tienen Matemática II, Cálculo II y Análisis II en las tres instituciones.

UCV – Ingeniería **Cálculo II (0252)**	**UC – Ingeniería** **Análisis Matemático II (MA2B03)**
Es requisito para: Cálculo III (0253) Ecuaciones diferenciales ordinarias (0255) Mecánica aplicada (0602) Programación (0760)	Es requisito para: Física II (FI3B02) Funciones vectoriales (MA3B05) Ecuaciones diferenciales (MA3B06) Química General (QM3B02)
IUTE-LV	
Carrera Electricidad, Telecomunicaciones, Electrotecnia e instrumentación y control **Matemática II (MAE205)**	**Carrera Mecánica** **(MAM205)**
Es requisito para: Matemática III (MAE335) Programación y procesamiento de datos (PRE301) Análisis de circuitos eléctricos II (ACE303) Teoría de control (TCE324) Física aplicada a la Instrumentación (FAE323) Informática aplicada a los sistemas eléctricos (ISE313)	Es requisito para: Programación (PRM302) Mecánica de fluidos (MFM304) Termodinámica (TEM304) Electrotecnia (ELM403)
Carrera Administración **Matemática II (MAA204)**	**Carrera Informática** **Matemática II (MAI203)**
Es requisito para: **Estadística Probabilística (EPA403)**	Es requisito para: Cálculo Matricial (CMI303) Estadística Probabilística (EPI403)

En el caso del Cálculo II en la UCV y el Análisis Matemático II de la UC básicamente son prelación para: Cálculo III, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Física II; Funciones Vectoriales y Ecuaciones diferenciales respectivamente. Pero al continuar revisando el árbol de prelaciones, éstas últimas son requisitos para cursar una gran cantidad de asignaturas propias a especialidad de ingeniería.

En cuanto al IUTE-LV es notorio la incidencia que tiene Matemática II[40] en asignaturas claves a mecánica, electricidad, informática y administración como son: Matemática III, Programación y Procesamiento de Datos, Análisis de Circuitos Eléctricos II, Teoría de Control, Física Aplicada a la Instrumentación, Informática aplicada a los sistemas eléctricos, Programación, Mecánica de Fluidos, Termodinámica, Electrotecnia, Estadística probabilística y Cálculo matricial.

Síntesis y conclusiones

En función de toda la revisión que se efectuó a los currículos de estas tres instituciones de Educación Superior con amplia trayectoria en la formación técnica universitaria se pueden establecer las siguientes conclusiones que sintetizan la revisión hecha:

1. Las tres instituciones están comprometidas con el artículo 27 de la LOE en su capítulo V destinado a la Educación Superior, por lo que forma de manera integral, profesionales universitarios en carreras técnicas, a través de sus niveles de Pregrado y Postgrado capacitados en conocimientos científicos y tecnológicos, además de valores y actitudes que les permitan un ejercicio profesional apropiado a las exigencias actuales.

[40] Varía de acuerdo a la carrera, lo básico es el cálculo integral, pero puede contener también ecuaciones diferenciales, transformadas de Laplace y cálculo es más de dos variables.

2. Como escriben Useche y Orta (2000).” El campo del currículo es el espacio y tiempo del hecho educativo en el que a través del proceso de enseñanza y aprendizaje se perfila la formación interactiva de una persona, un ciudadano y un profesional” (p.9). Así se tiene que la Matemática tiene un gran espacio dentro de formación tecnológica, ya que esta se basa en una formación científica como la Matemática y la Física. En las estructuras curriculares de estas carreras: ingeniería o técnico superior universitario, se puede ver una amplia formación matemática y donde la integración tiene un sin números de aplicaciones en los procesos tecnológicos.
3. Los objetivos generales de los cursos de Cálculo II, Análisis matemático II y Matemática II del segundo semestre de estas carreras (estudiantes de 17 o más años) persiguen que los discentes puedan aplicar en cálculo integral a problemas geométricos y físicos de forma clara, precisa y ordenada. En el contexto de estas carreras, la matemática juega un papel de herramienta para el manejo de situaciones y asuntos vinculados con la tecnología, pero además se estima que ésta contribuye a: a) El desarrollo de la capacidad analítica, b) el manejo del lenguaje matemático como base del lenguaje científico, c) modelar y resolver problemas y d) apreciar la importancia de la matemática en el aprendizaje de conocimientos futuros.
4. En la revisión de los contenidos de los programas de Cálculo II y Matemática II se nota una misma secuencia para el apartado del cálculo integral esta es: a) Cálculo de la Primitiva, b) métodos de integración, c) la integral indefinida, la regla de Barrow y d) aplicaciones de la integral. Se hace énfasis en los aspectos a y b, ya que se persigue adiestrar al estudiante en el cálculo de primitivas, con

la realización de muchos ejercicios en los cuales deben hacer uso de múltiples destrezas y artificios.

5. Si bien la secuencia de los contenidos se presentan en el orden que se señalan en el numeral anterior, con énfasis en el cálculo de primitivas y los métodos de integración, no se indican estrategias que contribuyan a armonizar el tránsito por los diferentes sistemas semióticos de representación. Lara (1997) menciona del gráfico al numérico; del numérico al algebraico; del algebraico al gráfico; del verbal al gráfico;…etc. En el capítulo anterior se establecieron seis configuraciones epistémicas: La de los orígenes, la de los problemas originarios del cálculo integral, la impulsada por Newton, la impulsada por los trabajos de Leibniz, la impulsada por el desarrollo teórico para la integral a partir de siglo XVIII y por último la impulsada por el desarrollo de la Teoría de la Medida. En todas ellas se armonizan diferentes representaciones semióticas de forma natural. Estimamos necesario que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la integral, es beneficioso armonizar: conceptos, situaciones y problemas, procedimientos e interpretaciones geométricas de las diferentes configuraciones.
6. Al revisar los árboles de prelaciones del currículo de estas carreras, se puede establecer que la comprensión del cálculo integral es preponderante para comprender los tópicos matemáticos siguientes en la cadena de formación como: Ecuaciones diferenciales, cálculo vectorial, funciones de varias variables, estadística probabilística, entre otras; que a su vez son requisitos indispensables para otras materias propias a su formación técnica.

CAPÍTULO VI

Proceso de modelización de una trayectoria didáctica para la integral definida en la formación técnica universitaria

Introducción

En este capítulo se establecerá una trayectoria didáctica pretendida para desarrollar un proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida y sus diferentes aplicaciones con un grupo de estudiantes de la carrera Informática del IUET-LV. De acuerdo a Godino (2003) el proceso de instrucción comprende seis dimensiones interconectadas (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional y emocional), cada una de ellas se puede modelizar como un proceso estocástico. En estas dimensiones se pueden identificar un conjunto de elementos, (funciones, tareas, acciones, etc.) las cuales se suceden en el tiempo de forma secuencial. En cada experiencia particular de enseñanza y aprendizaje de un tópico matemático se produce una trayectoria muestral del proceso y que describe las funciones o componentes que han tenido lugar a lo largo del tiempo. Se distinguen seis tipos de procesos y sus correspondientes trayectorias muéstrales que ya fueron definidas en el capítulo II.

Se estima conveniente para el proceso de estudio que se va desarrollar diseñar una trayectoria para cada una de las seis dimensiones, esto es; diseñar las trayectorias: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica para las diez sesiones de clase en la que se cumplirá el estudio. Por otra parte, este diseño nos permitirá a priori establecer algunos criterios de idoneidad didáctica útiles para el posterior análisis de valoración de las diferentes trayectorias implementadas. La trayectoria didáctica se basará en el programa de Matemática II para la carrera Informática del IUET- La Victoria (ver anexo D).

Trayectoria epistémica (TE)

Para definir la secuencia en el tiempo de los significados institucionales implementados (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades y argumentos) debemos establecer la configuración epistémica a seguir. De acuerdo al estudio epistemológico del capítulo IV y el análisis de los currículos en el capítulo V, lo más natural es la configuración impulsada por el desarrollo teórico para la integral a partir de siglo XVIII (ver capítulo IV) y que coincide en gran parte con la configuración *Analítica* planteada por Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2005). A continuación se presenta un resumen:

CUADRO 13

Configuración epistémica impulsada por el desarrollo teórico para la integral a partir de siglo XVIII.

Situaciones	***Acciones***	***Leguaje***	***Conceptos***	***Propiedades***	***Argumentos***
Fundamentar los conceptos básicos del cálculo integral, el rigor matemático de la demostración como medio de garantía teórica. Se llega a la integración de Cauchy-Riemann.	Incluir la aritmética en la integración, generalizar la integral de Cauchy. Los conceptos de límites e infinitésimos, La integral como el límite de una suma. Integración de funciones en la que la primitiva no existe en todo el intervalo.	El del Análisis Funcional, El de la Geometría	Función, límite, infinitésimo, continuidad y discontinuidad, series convergentes, derivada, diferencial e integral definida.	El Teorema Fundamental de Cálculo, Teorema del Valor Medio, relaciones entre la existencia del límite de una suma y el límite de las funciones arbitrarias de Fourier.	Los propios del rigor matemático de las demostraciones.

Pero como en el desarrollo teórico de la integral inciden aspectos geométricos, analíticos, algebraicos y otros como la teoría de conjunto que se pone de manifiesto al realizar particiones de intervalos en sub-intervalos, se hace necesario armonizar con otras configuraciones también presentadas en el capítulo IV, se cree que será muy beneficioso para el aprendizaje ilustrar algunos problemas originarios de cálculo integral, es decir ejemplificar cuadraturas y cubaturas que representen el lenguaje, los conceptos, propiedades y argumentos propios a la configuración epistémica de los problemas originarios que presentamos a continuación.

CUADRO 14

Configuración epistémica de acuerdo a la resolución de los problemas originarios del cálculo integral.

Situaciones	***Acciones***	***Leguaje***	***Conceptos***	***Propiedades***	***Argumentos***
Los problemas se plantean en base a determinar áreas y volúmenes de regiones y sólidos generados por funciones del tipo algebraicas y algunas funciones transcendentes.	Las integraciones se hacen de forma numérica. Es decir por aproximaciones numéricas.	Geométrico, aritmético y algebraico.	Infinitésimo, series, cuadratura, cubatura, centro de gravedad, arcos, series infinitas, infinitésimo, indivisible, infinitamente pequeño.	Series infinitas, método de exhausción, sin doble reducción al absurdo. El método inductivo aplicado por Wallis para su integración.	método de exhausción y el método deductivo.

Trayectoria Cognitiva (TC)

En el curso del semestre anterior Matemática I, los estudiantes estudiaron las funciones, límite de una función, derivada y aplicaciones de la derivada. Las primeras unidades de Matemática II tienen que ver con la primitiva, la integral indefinida y los diferentes métodos de integración. Por lo tanto y por experiencias anteriores, los contenidos de esta trayectoria pueden ser asimilados en base a los conocimientos y destrezas ya adquiridas.

Trayectoria interaccional (TI)

La interacción entre el profesor y el alumno es fundamental para identificar y resolver situaciones conflictivas del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, por esta razón las funciones, acciones y tareas que desarrollará el docente son variadas. Tomará los roles de: Facilitador, orientador, expositor, combinados con diferentes tareas que desarrollará en cada sesión de clase. El estudiante es copartícipe de la interacción entre el profesor y el alumno, para éste se prevé, en cada sesión de clase, actividades y tareas que lo motiven a tener un rol más activo y protagonista de su aprendizaje. Por otra parte se prevén situaciones de interacciones entre estudiantes y entre el estudiante y el computador.

Trayectoria mediacional (TM)

Durante cada una de las sesiones se utilizarán varios recursos: El software Maple, guías de apoyo, texto, etc. de forma secuencial y de acuerdo a las necesidades epistemológicas y didácticas.

Trayectoria emocional (TEM)

Sabemos por tradición, que el cálculo integral genera emociones adversas en los estudiantes. Además los aspectos epistemológicos (conceptos, teoremas y métodos) que por naturaleza no generan motivación en los estudiantes. Por eso en cada sesión de clase se estructuraran situaciones y se utilizaran recursos que probablemente generen en los estudiantes afectos y motivación que contribuyan al proceso de aprendizaje.

Trayectoria ecológica (TEC)

El proceso de estudio planificado para la integral en una variable real, considera los aspectos particulares de la institución (IUET-LV), de la carrera y los lineamientos del Ministerio de Educación Superior para estas instituciones. Por otra parte se tomaron en cuenta las limitaciones y el contexto social y profesional (es decir que está en sintonía a los requerimientos de la carrera).

Descripción de las trayectorias epistémicas para cada una de las sesiones de clase

Primera sesión de clase (dos horas)

Los contenidos que se estudiaron en esta sesión fueron: El concepto de *integral definida,* la cual se enfocó como el límite de la sumatoria del área de los rectángulos originados por la partición del intervalo de integración, cuando el número de éstos tiende a infinito. La notación de Newton y Leibniz para la integral definida. El teorema fundamental del cálculo integral, el teorema del valor medio para integrales y las propiedades que cumple la integral definida.

1. **Situaciones:** Se comenzó la sesión con ejemplos de cuadraturas. Ejemplos de como determinar el área de la región limitada por la función $y = \sqrt{3 + x^2}$ el eje x entre $x = -1$ y $x = 4$ haciendo uso del software Maple, se simula cómo al aumentar el número de rectángulos de la partición, la suma del área de éstos se aproxima al área de la región. Posteriormente se hizo una reseña del procedimiento utilizado por Riemann para calcular integrales hasta concluir que la integral es igual al límite de una sumatoria. Se Ejemplificó el procedimiento con el

cálculo de la integral $\int_{-2}^{1} x^2 dx$. Se explicaron las propiedades de la integral definida, Se motivó a las interpretaciones de los Teoremas: Fundamental del cálculo (TFC) y del Valor Medio para integrales (TVMI).

2. **Lenguaje:** Se usó el usual del álgebra, la geometría y el análisis: Sumatoria, partición de un intervalo, rectángulos, área de un rectángulo, función, representación de una función, función continua, límite de una función, infinitésimos, derivada, diferencial, antiderivada o primitiva, integral indefinida, integral definida, límites de integración y los signos y notaciones propias a todos estos conceptos.
3. **Conceptos:** Función, representación de una función, función continua, límite de una función, infinitésimos, derivada, diferencial, antiderivada o primitiva, partición, sumatoria, rectángulo, área de un rectángulo, integral indefinida, integral definida, límites de integración.
4. **Acciones:** Se calcularon integrales definidas tanto por el límite de una sumatoria, como aplicando el teorema fundamental del cálculo.
5. **Propiedades:** El teorema fundamental del cálculo, el teorema del valor medio para integrales y la propiedades de la integral definida.
6. **Argumentaciones:** Las deducciones justifican los teoremas y las propiedades.

Segunda sesión de clase (dos horas)

En esta sesión de clase se utilizó para calcular integrales indefinidas, mediante el teorema fundamental del cálculo integral. Se calcularon integrales definidas mediante los métodos: Sustitución, por parte y sustituciones trigonométricas.

1. **Situaciones:** Se comenzó la sesión con ejemplos como: $\int_1^3 \frac{2x}{(x^2+1)^3}dx$, $\int_1^e \frac{(1+\ln(x))^2}{x}dx$, $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ entre otras. Al final de la clase se le asignaron ejercicios a cada estudiante los cuales los podían resolver haciendo uso del computador.
2. **Lenguaje:** El usual del álgebra y el análisis, los signos y notaciones propias a los métodos de integración.
3. **Conceptos:** La integral definida, y en general cualquier concepto de matemática básica que se requiera.
4. **Acciones:** Se Calcularon la integrales definidas aplicando el teorema fundamental del cálculo y los métodos de integración.
5. **Propiedades:** El teorema fundamental del cálculo, las propiedades de la integral definida, los métodos de integración e identidades, teoremas y propiedades en general de acuerdo a lo requerido por cada ejercicio.
6. **Argumentaciones:** Las deducciones justifican la utilización de un método de integración.

Tercera sesión de clase (dos horas)

En esta sesión se aplicará la integral definida en el cálculo de regiones limitadas por funciones.

1. **Situaciones:** Se comenzó la sesión con ejemplos como:
   - *Ejemplo 1: Determina el área de la región limitada por $f(x)=4-x^2$, el eje x, entre las rectas $x=-2$ y $x=1$.*
   - *Ejemplo 2: Sea $g(x)=x^2-7x+6$ una función. Halle el área de la región limitada por la gráfica de ella y el eje x.*

- *Ejemplo 3: Encuentre el área de la región limitada por* $h(x)=x^3-6x^2+8x$*, el eje x entre* $x=1$ *y* $x=3$.

2. **Lenguaje:** El usual del álgebra y el análisis, los signos y notaciones propias a los métodos de integración, gráfico al bosquejar las gráficas de funciones.
3. **Conceptos:** El de función, La integral definida, y en general cualquier concepto de matemática básica que se requiera.
4. **Acciones:** Se Calculó el área de regiones limitada por una función con algunos de los ejes del sistema cartesiano.
5. **Propiedades:** El teorema fundamental del cálculo, las propiedades de la integral definida, los métodos de integración e identidades, teoremas y propiedades en general de acuerdo a lo requerido por cada ejercicio.
6. **Argumentaciones:** Las deducciones que obtiene de la gráfica para establecer la o las integrales que representan el área de la región.

Cuarta sesión de clase (dos horas)

En esta sesión de clase se continuará con el contenido iniciado en la sesión anterior, ahora se determinaran áreas de regiones determinadas, por dos o más funciones.

1. **Situaciones:** Se comenzó deduciendo la expresión: $A(región)=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$, para ello se utilizaron ejemplos como los siguientes:
    - *Determina el área de la región limitada por* $m(x)=x^2-3$ *y* $n(x)=x-1$.

- *Encuentre el área de la región limitada por* $x = 3 - y^2$ *y* $y = x - 1\,(x = 1 + y)$.
- *Determina el área de la región limitada por* $k(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ *e* $i(x) = x^2 - 4x$.

2. **Lenguaje:** El del álgebra y el análisis, los signos y notaciones propias a los métodos de integración, gráfico al bosquejar las gráfica de funciones.
3. **Conceptos:** El de función, La integral definida, y en general cualquier concepto de matemática básica que se requiera.
4. **Acciones:** Se calculó el área de regiones limitada por dos o más funciones.
5. **Propiedades:** El teorema fundamental del cálculo, las propiedades de la integral definida, los métodos de integración e identidades, teoremas y propiedades en general de acuerdo a lo requerido por cada ejercicio.
6. **Argumentaciones:** Las deducciones que obtiene de la gráfica para establecer la o las integrales que representan el área de la región.

Quinta sesión de clase (dos horas)

En esta sesión de clase la temática fue el volumen de sólidos de revolución. Método del disco.

1. **Situaciones:** Se plantearon situaciones donde se rotan regiones en torno a un eje que bien pueden ser x o y, visualizar el sólido que se obtiene, definir la integral en base a el disco originado por un corte perpendicular al sólido y calcular el volumen. Es decir se deducirán :

   Si el sólido S se encuentra a lo largo de $[a,b]$ *en el eje x, tiene una función área de las secciones transversales* $A(x)$*, entonces:*

$$V=\int_{a}^{b} A(x)dx$$

Si S se encuentra a lo largo de $[c,d]$*en el eje y,* $A(y)$ *es la función área de cada sección transversal, entonces:*

$$V=\int_{c}^{d} A(y)dy$$

Y el método del disco $V=\int_{a}^{b}\pi[f(x)]^{2}dx$**,** se utilizaron ejemplos para el método del disco, como los siguientes:

- *Determine el volumen del sólido generado por la rotación del área del primer cuadrante limitada por la parábola* $y^2=8x$ *y la recta* $x=2$*, en torno al eje* x.
- *Con esa misma función pero, rotando en torno a la recta* $x=2$ *la región limitada por* $y^2=8x$ y $x=2$.

2. **Lenguaje:** El del álgebra, el análisis y la geometría: sólido, sólido de revolución, discos, volumen de un disco, área de la cara de un disco los signos y notaciones propias a los métodos de integración, gráfico al bosquejar las gráfica de funciones.
3. **Conceptos:** sólido de revolución, volumen de un disco, método del disco, la integral definida y en general cualquier concepto de matemática básica que se requiera.
4. **Acciones:** Calcular el volumen de un sólido de revolución.
5. **Propiedades:** El método del disco, El teorema fundamental del cálculo, las propiedades de la integral definida, los métodos de

integración e identidades, teoremas y propiedades en general de acuerdo a lo requerido por cada ejercicio.

6. **Argumentaciones:** Las deducciones para llegar a la integral que define el volumen de un sólido de secciones transversales conocidas y para un sólido de revolución (el método del disco).

Sexta sesión de clase (dos horas)

En esta sesión de clase la temática es el volumen de sólidos de revolución. Método del anillo o arandela.

1. **Situaciones:** Se plantearon situaciones donde se rotan regiones en torno a un eje que bien pueden ser x o y, visualizar el sólido que se obtiene, definir la integral en base a el anillo originado por un corte perpendicular al sólido y calcular el volumen. Es decir se deducir :

$$V=\int_a^b \pi\left[f(x)^2-g(x)^2\right]dx$$

Y se calcularan los volúmenes de los siguientes sólidos de revolución:

- *Encuentre el volumen del sólido generado al rotar en torno al eje x la región limitada por* $y^2=x$ y $y=x^3$.
- Un segundo ejemplo que vamos a hacer es rotar esa misma región pero ahora en torno al eje y.
- *La misma región pero ahora se rotará en torno a la recta x=-1.*

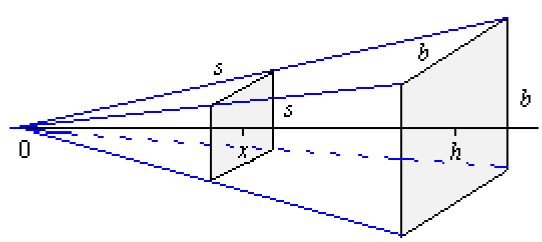
2. **Lenguaje:** El del álgebra, el análisis y la geometría: sólido, sólido de revolución, anillo volumen de un anillo, área de un anillo, los signos y notaciones propias a los métodos de integración, gráfico al bosquejar las gráficas de funciones.

3. **Conceptos:** sólido de revolución, volumen de un anillo, método del anillo, la integral definida y en general cualquier concepto de matemática básica que se requiera.
4. **Acciones:** Calcular el volumen de un sólido de revolución utilizando el método del anillo o arandela.
5. **Propiedades:** El método del anillo, El teorema fundamental del cálculo, las propiedades de la integral definida, los métodos de integración e identidades, teoremas y propiedades en general de acuerdo a lo requerido por cada ejercicio.
6. **Argumentaciones:** Las deducciones para llegar a la integral que define el volumen de un sólido de revolución por el método del anillo.

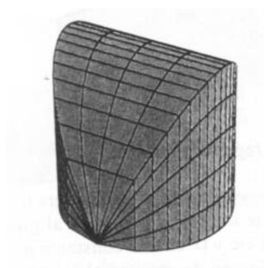
Séptima sesión de clase (dos horas)

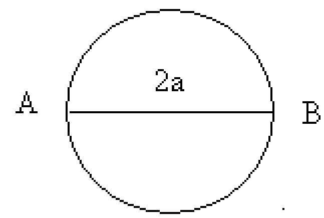
En esta sesión de clase la temática fue el volumen de sólidos de sección transversal conocida y también las longitudes de arcos suaves.

1. **Situaciones:** Se plantearon situaciones donde se tenía que determinar el volumen de un sólido de sección transversal conocida, se trabajaron ejemplos como los siguientes:
   - *La siguiente figura muestra una pirámide de base cuadrada orientada de forma que su altura* h *corresponde con el intervalo* $[0,h]$ *en el eje* x*, su base es un cuadrado de lado b y cada sección transversal al eje* x *también lo es. Determine el volumen.*



- *Un observatorio tiene la forma de un sólido cuya base es un disco circular con diámetro A, Be y de longitud dos a. determine el volumen de este sólido si cada sección transversal perpendicular a A, Be es un cuadrado. Determine el volumen.*





También se deducirá las integrales que permiten determinar la longitud de un arco suave:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(r_i)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(r_i)]^2}\,dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

Se ejemplificaron con los siguientes ejemplos:

- *Determinar la longitud de arco de la llamada parábola semi-cúbica (aunque no es realmente una parábola)* $y = x^{3/2}$ en $[0,5]$

- ***Determina la longitud S de la curva*** $x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y}$; $0 \le y \le 2$

2. **Lenguaje:** El del álgebra, el análisis y la geometría, los signos y notaciones propias a los métodos de integración, gráfico al bosquejar las gráfica de funciones y sólidos.

3. **Conceptos:** sólido, volumen, longitud de arco, derivada, la integral definida y en general cualquier concepto de matemática básica que se requiera.
4. **Acciones:** Calcular el volumen de un sólido de sección transversal conocida. Calcular la longitud de arcos suaves,
5. **Propiedades:** El teorema fundamental del cálculo, las propiedades de la integral definida, los métodos de integración e identidades para calcular longitudes de arcos, teoremas y propiedades en general de acuerdo a lo requerido por cada ejercicio.
6. **Argumentaciones:** Las deducciones para llegar a la integral que define la longitud de un arco suave.

Octava sesión de clase (dos horas)

En esta sesión de clase la temática fue la integración aproximada: Método trapezoidal y Método parabólico o de Simpson, valor promedio de una función.

Situaciones: Se plantearon situaciones de integrales que no se pueden calcular por los métodos analíticos estudiados y se plantearon ejemplos como el siguiente:

Calcula la integral $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$**,** con lo cual da pie para deducir los métodos:

Trapezoidal

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right];\ h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right];\ h = \frac{b-a}{n}$$

$n\ par$

También se deducirá la expresión que permite hallar el promedio de una función en un intervalo y se ejemplificará.

1. **Lenguaje:** El del álgebra, el análisis y la geometría, los signos y notaciones propias a los métodos de integración, gráfico al bosquejar las gráficas de funciones y sólidos.
2. **Conceptos:** La integral definida, métodos de los trapecios y de Simpson y en general cualquier concepto de matemática básica que se requiera.
3. **Acciones:** Se calculó el valor aproximado de una integral utilizando los métodos del trapecio y de Simpson, y calcular el valor promedio de una función en un intervalo.
4. **Propiedades:** Los métodos del trapecio y de Simpson, el teorema fundamental del cálculo, y el teorema del valor promedio de una función en un intervalo.
5. **Argumentaciones:** Las deducciones para llegar a los métodos de integración de los trapecios y de Simpson y el valor promedio de una función en un intervalo.

Novena sesión de clase (dos horas)

En esta sesión de clase será muy práctica ya que se dedicará dar respuestas a planteamientos teóricos y a resolver ejercicios y problemas de aplicación de la integral contenidas en un material de apoyo entregado con anterioridad y denominado *Batería de ejercicios y problemas* (ver anexo E).

1. **Situaciones:** Se plantearan situaciones como las siguientes:
    - Calcula el área de la región comprendida por la gráfica de la curva $f(x) = \cos x$, el x en el intervalo $[0, \pi]$.
    - Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ con $f(x) = -g(x)$ en todo el intervalo. ¿Cómo son las áreas de las regiones que ellas encierran con respecto al eje x entre a y b?

- Se tiene una parcela rectangular de 20x50 metros. Se quiere cubrir con baldosas un área de 800 m^2 y el resto dejarlo como un jardín. La región que se va a cubrir con baldosas tiene forma de parábola como lo indica la figura. ¿Qué parábola debemos trazar?

2. **Lenguaje:** El del álgebra, el análisis y la geometría, los signos y notaciones propias a los métodos de integración, gráfico al bosquejar las gráfica de funciones y sólidos.
3. **Conceptos:** La integral definida y en general cualquier concepto de matemática básica que se requiera.
4. **Acciones:** Responder planteamientos teóricos y resolver ejercicios y TIE relacionados con la integral definida.
5. **Propiedades:** Los teoremas, propiedades y métodos vistos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida y cualquiera otra que se requiera y que el estudiante aprendió en su formación anterior.
6. **Argumentaciones:** Las deducciones para llegar a la respuestas de las preguntas y la resolución de las TIE. Argumentaciones que van de lo gráfico a lo analítico y viceversa.

Descripción de las trayectorias cognitivas para cada una de las sesiones de clase

Primera y segunda sesión de clase (dos horas)

En las unidades anteriores se estudió la integral indefinida y los diferentes métodos de integración, con las actividades previstas y los recursos de mediación que se emplearon, los estudiantes debían comprender la integral definida y podían utilizar los conocimientos y destrezas adquiridas en la determinación de integrales indefinidas para calcular integrales definidas.

Tercera y cuarta sesión de clase (dos horas)

En las clases anteriores se estudió la integral definida y los diferentes métodos de integración, con las actividades previstas y los recursos de mediación que se emplearon, los estudiantes podían determinar el área de las diferentes regiones solicitadas. Claro está que tradicionalmente los alumnos en este tópico presentan deficiencias para bosquejar gráficas de funciones lo que puede ser un obstáculo para alcanzar los nuevos conocimientos.

Quinta sesión de clase (dos horas)

En las clases anteriores se estudió la integral definida y los diferentes métodos de integración y el cálculo del área de regiones limitadas por funciones. Con las actividades previstas y los recursos de mediación que se emplearon, los estudiantes pueden determinar el volumen de sólidos de revolución utilizando el método del disco. Claro está que tradicionalmente los alumnos en este tópico presentan deficiencias para bosquejar gráficas de funciones imaginar el sólido generado por una rotación lo que puede ser un obstáculo para alcanzar los nuevos conocimientos.

Sexta sesión de clase (dos horas)

En las clases anteriores se estudió la integral definida y los diferentes métodos de integración, el cálculo del área de regiones limitadas por funciones y el volumen de un sólido de revolución por el método del disco. Con las actividades previstas y los recursos de mediación que se emplearon, los estudiantes pueden determinar el volumen de sólidos de revolución utilizando el método del anillo. Claro está que tradicionalmente los alumnos en este tópico presentan deficiencias para bosquejar gráficas de funciones imaginar el sólido generado por una rotación lo que puede ser un obstáculo para alcanzar los nuevos conocimientos.

Octava y novena sesión de clase (dos horas)

Los contenidos estudiados y practicados en las clases anteriores, las actividades previstas en esta sesión de clase y los recursos de mediación que se emplearon, son la base para que los estudiantes puedan determinar el valor aproximado de una integral, determinar el valor promedio de una función y puedan responder planteamientos teóricos y problemas de aplicaciones de la integral en una variable real.

Descripción de las trayectorias interacciónales para cada una de las sesiones de clase

La interacción para todas las sesiones, se planifico siguiendo la misma esquema, por eso la describiremos de forma general. Para que se dé la interacción Docente-Alumno, Alumno-Alumno y Alumno-Computador, el docente en cada sesión de clase, las cuales se desarrollaron en el laboratorio de informática, tomó diferentes roles y ejecutó varias acciones durante la clase. La finalidad del docente, además de propiciar las experiencias de aprendizaje y la clase en general, fue la de motivar la participación de los estudiantes en su aprendizaje y el de sus compañeros. Para ello:

1. Presentó diversos problemas propicios para la introducción a cada uno de los temas correspondientes a la integral definida. Expuso los temas haciendo planteamientos y preguntas abriendo la posibilidad de participación a todos.

2. En el laboratorio de informática fue un facilitador, de manera que los estudiantes hagan representaciones, cálculos, simulen y valoren situaciones que les permitan hacer conjeturas sobre la integral definida, su definición, teoremas y propiedades y las diversas aplicación.
3. El profesor expone la parte analítica y algebraica que le dan consistencia a los significados construidos por los estudiantes con las experiencias desarrolladas, siempre dando participación a éstos y favoreciendo el consenso.
4. El profesor hizo uso de los diferentes recursos, retóricos, informáticos, argumentativos, etc. para captar siempre el interés del alumno.

Por otra parte, la participación del estudiante. El estudiante en cada sesión debió desarrollar con responsabilidad las tareas asignadas ya que estas le ayudan a construir sus significados sobre la integral definida y sus aplicaciones. Así el discente debió desarrollar las siguientes acciones:

1. Tomar un rol activo, tanto en la interacción con el docente, como con sus compañeros de clase. Es importante que desarrolle todas las prácticas o actividades planificadas para la clase y apoyadas en el computador.
2. Debe asumir con compromiso las tareas asignadas y el análisis de los resultados obtenidos y compartirlos con sus compañeros.
3. Debe explorar hacer conjeturas, formular preguntas y validar aspectos teóricos y prácticos sobre el tema en estudio.

Descripción de las trayectorias mediacionales para cada una de las sesiones de clase

Primera sesión de clase (dos horas)

Los recursos que se utilizaron en esta sección: el software Maple con el cual los estudiantes pueden incrementar su poder de abstracción para comprender el proceso de cuadratura del área de una región limitada por una función continua, el eje x, entre dos puntos de su dominio; guías de apoyo tanto del uso del software como del contenido propio de tópico matemático (ver anexo E) y los recursos usuales tales como pizarra y marcadores. Todos estos recursos se alternarán de acuerdo a las necesidades de los contenidos y de los estudiantes.

Segunda sesión de clase (dos horas)

Los recursos utilizados en esta sección: el software Maple con el cual los estudiantes pueden incrementar sus destrezas operatorias y reforzar los conocimientos previos al calcular integrales definidas. Guías de apoyo tanto del uso del software como del contenido propio de tópico matemático (ver anexo D) y los recursos usuales tales como pizarra y marcadores. Todos estos recursos se alternarán de acuerdo a las necesidades de los contenidos y de los estudiantes.

Tercera y cuarta sesión de clase (dos horas)

Se utilizaron en esta sección los recursos: el software Maple con el cual los estudiantes pueden incrementar sus destrezas operatorias y reforzar los conocimientos previos al calcular el área de regiones limitadas por funciones. Guías de apoyo tanto del uso del software como del contenido propio de tópico matemático (ver anexo D) y los recursos usuales tales como pizarra y marcadores. Todos estos recursos se alternarán de acuerdo a las necesidades de los contenidos y de los estudiantes.

Quinta y sexta sesión de clase (dos horas)

Los recursos utilizados en esta sección: el software Maple con el cual los estudiantes pueden incrementar sus destrezas operatorias y reforzar los conocimientos previos al calcular el volumen de sólidos. Guías de apoyo tanto del uso del software como del contenido propio de tópico matemático (ver anexo D) y los recursos usuales tales como pizarra y marcadores. Todos estos recursos se alternarán de acuerdo a las necesidades de los contenidos y de los estudiantes.

Séptima sesión de clase (dos horas)

Los recursos que se utilizaron en esta sección: el software Maple con el cual los estudiantes pueden incrementar sus destrezas operatorias y reforzar los conocimientos previos al calcular el volumen de un sólido y el cálculo de longitudes de arcos. Guías de apoyo tanto del uso del software como del contenido propio de tópico matemático (ver anexo D) y los recursos usuales tales como pizarra y marcadores. Todos estos recursos se alternarán de acuerdo a las necesidades de los contenidos y de los estudiantes.

Octava sesión de clase (dos horas)

Los recursos utilizados en esta sección: el software Maple con el cual los estudiantes pueden incrementar sus destrezas operatorias y reforzar los conocimientos previos al calcular el valor aproximado de una integral y el valor promedio de una función, además de material de apoyo como guías tanto del uso del software como del contenido propio de tópico matemático (ver anexo D) y los recursos usuales tales como pizarra y marcadores. Todos estos recursos se alternarán de acuerdo a las necesidades de los contenidos y de los estudiantes.

Novena sesión de clase

Los recursos a utilizar en esta sección son: el software Maple con el cual los estudiantes pueden incrementar sus destrezas operatorias y reforzar los conocimientos previos al responder planteamientos teóricos y resolver problemas, además del material de apoyo como guías tanto del uso del software como del contenido propio de tópico matemático (ver anexo D) y los recursos usuales tales como pizarra y marcadores. Todos estos recursos se alternarán de acuerdo a las necesidades de los contenidos y de los estudiantes.

Descripción de las trayectorias emocionales para cada una de las sesiones de clase

Al igual que en la trayectoria interaccional, en la trayectoria emocional, en cada sesión de clase se presentaron las situaciones en base a recursos (el software matemático y otros) con la finalidad de generar en los estudiantes afectos y motivaciones que contribuyan al proceso de aprendizaje de la integral definida. Se estimó un tiempo para cada una de las actividades didácticas en cada clase pero, en definitiva el tiempo didáctico está sometido a diferentes situaciones y contingencias que se pueden presentar y resolver. En las actividades en el computador, por ejemplo, cada estudiante tiene su ritmo y diferencias que se trataron de considerar en la medida de las posibilidades.

Descripción de las trayectorias ecológicas para cada una de las sesiones de clase

Se puede decir que más que una trayectoria la ecología es un componente presente en la planificación y diseño de cada una de las trayectorias anteriores. Las trayectorias diseñadas (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional y emocional) para cada una de las sesiones de clase se ajustaron, en primer lugar, a los significados institucionales que tiene la integral en una variable real en el IUET-LV. En esta institución, como también ocurre en las carreras de ingeniería, la finalidad del estudio y comprensión de este tópico es para ser una herramienta que permita resolver problemas. Es la razón por la cual la enseñanza de los contenidos se centró en la comprensión e interpretación de los conceptos y teoremas, en la adquisición de las destrezas necesarias para el cálculo de integrales y la aplicación en diferentes situaciones problemáticas.

Por otra parte el nivel se ajustó a los conocimientos previos de los alumnos, a los recursos disponibles, a la motivación por el tema y orientado a las necesidades de cálculo que a futuro se les presentaran a los estudiantes en otros cursos y asignaturas del currículo de la carrera informática.

Síntesis y conclusiones

Este proceso de modelización para la enseñanza y aprendizaje de la integral definida y sus aplicaciones, se diseñaron trayectorias didácticas a cada clase, con la finalidad de considerar la actuación de los actores del proceso (docente, discentes, etc.) y lo diferentes elementos (contenidos, recursos, evaluaciones, etc.). Es así como en la *trayectoria epistémica*, se distribuyeron en el tiempo los contenidos: a) Cuadraturas de regiones, b) suma de Riemann, c) la integral definida y su interpretación geométrica, d) el teorema fundamental del cálculo, el teorema del valor medio para integrales y las propiedades de la integral definida, e) el cálculo de integrales definidas, f) la integración numérica o aproximada, g) el valor promedio de una función y h) aplicaciones varias, siempre referidas a la configuración epistémica seleccionada como significados institucionales y en base a las orientaciones curriculares del IUET-LV.

La *trayectoria cognitiva* sirvió para planificar los contenidos y prácticas educativas coherentes con los conocimientos previos de los estudiantes, con el objetivo de que estén en la zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1934), es decir que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida permitía que los alumnos construyeran sus significados y que éstos estén en sintonía con los implementados. Con la *trayectoria interaccional* se definieron las actividades del docente y de los discentes de manera que se dieran las interacciones necesarias para un escenario de clase: Docente – Alumno, Alumno – Alumno y Alumno – computador, ya que este último fue un recurso importante en el desarrollo del proceso de estudio.

La *trayectoria mediacional* marcó la utilización de los recursos de acuerdo a los contenidos desarrollados, las necesidades de los estudiantes y como medio para dinamizar y motivar las actividades de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo: el software Maple, las clases en el laboratorio, los materiales de apoyo (guías y folletos) y demás recursos siempre en el marco de la clase magistral, las prácticas de los estudiantes, la resolución de ejercicios y problemas y las evaluaciones. La *trayectoria emocional* permitió tomar en cuenta aspectos que motivaran al estudiante por el estudio de un tema que tradicionalmente es desmotivador por los diversos algoritmos y operaciones que se pueden presentar en el calculo de integrales y en el cálculo de áreas y volúmenes, sin embargo el uso de la tecnología es una fuente de motivación en los procesos del cálculo, graficación y simulación.

Por último la *trayectoria ecológica* Se puede decir que más que una trayectoria fue un componente presente en la planificación y diseño de cada una de las trayectorias anteriores, en cada una de las sesiones de clase se ajustaron, en primer lugar, a los significados institucionales que tiene la integral en una variable real en el IUET-LV. Es la razón por la cual la enseñanza de los contenidos se centró en la comprensión e interpretación de los conceptos y teoremas, en la adquisición de las destrezas necesarias para el cálculo de integrales y la aplicación en diferentes situaciones problemáticas. Por otra parte el nivel se ajustó a los conocimientos previos de los alumnos, a los recursos disponibles, a la motivación por el tema y orientados a las necesidades de cálculo que a futuro se les presentaran a los estudiantes en otros cursos y asignaturas del currículo de la carrera informática.

CAPÍTULO VII

Análisis de la idoneidad didáctica del proceso de estudio implementado para la integral definida.

Introducción

Godino, Bencomo, Font y Wilhemi (2006) señalan que el análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio es sumamente complejo ya que involucra diversas dimensiones pertenecientes a los componentes que estructuran el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por otra parte el objeto de estudio *La integral definida* históricamente se ha presentado con muchos conflictos en su enseñanza y aprendizaje.

En cada sesión de clase implementada se realizó un análisis de su idoneidad, para lo cual se tomaron los segmentos más relevantes de éstas, lo cual permitió establecer algunos conflictos semióticos y operativos que se presentaron y que tienen que ver con las diferentes dimensiones (epistemológica, cognitiva, mediacional, emotiva, interaccional y ecológica) que condicionaron el proceso de enseñanza y aprendizaje con un grupo de estudiantes de Matemática II de la carrera Informática en el IUET-LV a propósito del tema de la integral definida y sus aplicaciones.

Para el análisis de la idoneidad se tomaron como base los componentes y descriptores planteados por Godino, Bencomo, Font y Wilhemi (2007) y que se centran a valorar la *representatividad* de la idoneidad epistémica, la *proximidad* en la idoneidad cognitiva, la *negociación* para la idoneidad interaccional, la *implicación* de la idoneidad emotiva, la *disponibilidad* de la idoneidad mediacional y por último la *adaptación* para la idoneidad ecológica. En el siguiente cuadro se resumen los componentes y descriptores de la idoneidad didáctica empleados en la presente investigación.

CUADRO 15

Epistémico
Representatividad de las configuraciones epistémicas seleccionadas

Componentes	Descriptores
Situaciones	Situaciones contextualizadas para ejercicios y problemas.
Lenguaje	Verbal, gráfico, simbólico... propios al nivel educativo. Interpretaciones de lo geométrico a lo analítico y viceversa.
Formalidad	La formalidad Matemática propia a los significados institucionales (de referencia y del currículo).
Argumentos	Validaciones y demostraciones requeridas para el nivel educativo y la carrera profesional.
Armonía	La relación armónica de los diferentes objetos matemáticos de las distintas configuraciones epistémicas

Cognitiva
Zona de desarrollo próximo

Componentes	Descriptores
Conocimientos	Los conocimientos previos de los alumnos son los requeridos. Los significados pretendidos son alcanzables
Diferencias	Actividades de refuerzo y mejoramiento.
Aprendizaje	Las formas y modo de evaluación permiten monitorear el aprendizaje.

Mediacional
Recursos materiales

Componentes	Descriptores
Recursos	Adaptación de diversos recursos a las situaciones.
Condiciones	Condiciones ambientales.
Tiempo	Tiempo adecuado para las actividades de acuerdo a sus requerimientos y dificultad.

Interaccional
Uso y aplicación de las diversas interacciones

Componentes	Descriptores
Docente alumno	Es planificada y dinámica capaz de negociar y hacer posible la solución de los diferentes conflictos de significados.
Entre alumnos	Debe ser inclusiva y capaz de favorecer el compartir de experiencias de aprendizaje.
Independencia	Se favorece en determinados momentos el crecimiento independiente y la responsabilidad del estudiante.
Evaluación formativa	Se favorece la utilización de diversas formas de evaluación formativa que permita a todos los participantes y al docente los progresos de los alumnos.

Emocional
Interés y motivación

Componentes	Descriptores
Interés y necesidad	Tareas de interés para el alumno y que reflejen el valor de la Matemática en su carrera.
Actitudes	Actividades que favorezcan la responsabilidad y perseverancia, así como la necesidad de argumentar y comprobar por cuenta propia sus procedimientos y cálculos
Emociones	Promoción de la identificación de cualidades personales hacia la Matemática, como una manera de mejorar la autoestima, evitando el rechazo por la asignatura

Ecológica
Adaptación curricular

Componentes	Descriptores
Adaptación curricular	Los significados implementados y evaluados están dentro de los lineamientos del currículo.
Innovaciones didácticas	Innovaciones producto de la práctica reflexiva. Uso de nuevas tecnologías.
Socioprofesionalismo y cultura.	Los significados son los necesarios para la formación profesional.
Conexiones	Se relaciona el contenido con las disciplinas propias a la carrera y otras afines.

Componentes y descriptores de la idoneidad didáctica. Elaboración propia inspirado en Godino, Bencomo, Font y Wilhemi (2007).

Al final del análisis de idoneidad de cada sesión de clase se presentan unas reflexiones a manera de conclusión donde se plantean aspectos teóricos que se derivan del proceso de estudio. También se bosqueja un gráfico de la idoneidad didáctica de cada clase y el cual se elaboró de acuerdo a como se valoró la idoneidad didáctica: baja, media y alta en cada una de las dimensiones: Epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, emocional y ecológica propuestas por el EOS para la valoración de la idoneidad didáctica.

Idoneidad de la primera sesión de clase

Idoneidad epistémica

La idoneidad epistémica es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos, respecto de un significado de referencia) (Godino, Bencomo, Font y Wilhemi , 2006, p. 4). En esta primera sesión de clases el profesor comienza estableciendo la situación problemática de determinar el área de una región curvilínea. Hace un recuento de como desde tiempos remotos se hicieron muchos intentos de cuadrar regiones curvilíneas (cuadraturas) y determinar el volumen de sólido (cubaturas). Explica que desde la antigüedad existían dos problemas relacionados con lo que hoy conocemos como la derivada y la integral. Se estudiaron de forma independiente hasta mediados de este siglo XVII cuando se estableció la relación que existe entre ellos.

En el desarrollo de esta sesión de clase predominan los aspectos geométricos de la integral de Riemann y el proceso analítico del método. Sin embargo y aún cuando se utilizó el software matemático que permitió visualizar el crecimiento del número de rectángulos circunscritos e inscritos en la región, el profesor se apoyó en la densidad de la recta real como una similitud de lo que ocurre con los rectángulos a medida que se aumenta el número de subintervalos de la partición. Una simple observación de la reconstrucción de la clase permite ver que es difícil, para los fines didácticos, vincular los aspectos geométricos con los analíticos, están presente dos configuraciones epistémicas: La que se obtuvo de acuerdo a la resolución de los problemas originarios del cálculo integral y la impulsada por el desarrollo teórico para la integral a partir de siglo XVIII (Ver Capítulo IV pp. 95-97).

El lenguaje es el propio de la configuración epistémica seleccionada para la enseñanza y se desarrolla de forma adecuada para los estudiantes del segundo semestre de una carrera técnica universitaria. Se apoyó en la explicación, en el software matemático (Maple Versión 8) en el cual los alumnos fueron previamente instruidos en el uso de sus comandos, entradas y salidas. Se requirió de gráficos y símbolos para facilitar la enseñanza y comprensión de la integral definida.

El proceso de enseñanza de la integral definida (Integral de Riemann, la integral como el límite de una sumatoria) estuvo regulado por la configuración impulsada por el desarrollo teórico para la integral a partir de siglo XVIII. Para ello se hizo una reseña de esta integral basado en la suma de Riemann y en la cual se combinaron procedimientos geométricos y analíticos. Más que demostraciones se utilizaron comprobaciones tanto geométricas como analíticas.

Conflicto Semiótico

El conflicto de tipo epistémico que se percibe, tiene que ver con el proceso de la integral de Riemann que se debate entre los argumentos geométricos y los analíticos funcionales, ambos basados en infinitésimos. Para un buen proceso de estudio se debe armonizar entre las dos configuraciones epistémicas: La generada por los problemas originarios y la impulsada por el desarrollo posterior a siglo XVII. Deben crearse suficientes situaciones previas, en la que los estudiantes visualicen los procesos de cuadraturas y cubaturas (hoy día afortunadamente con el desarrollo de la informática esto se facilita). En este sentido Hershkowitz, Parzzysz y Van Dermolen (1996) señalan que "...visualización es la transferencias de objetos, concepto, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa"(p.163). Por otra parte se debe trabajar para la compresión de los infinitésimos, creo que el profesor debió profundizar en ellos, sobre todo en nuestro país donde los estudiantes tienen su primer contacto con este objeto en el primer curso de Matemática a nivel superior (Matemática I o Cálculo I). Por último se debe tener actividades tendientes a producir una mayor comprensión de los aspectos analíticos como: Sumatorias, sumas infinitas, límites, teoría de conjunto, etc. En esta clase se hizo una problematización adecuada para los aspectos geométricos e infinitos, pero no así en lo analítico, por lo que se ve menos participación de los estudiantes en ese segmento de clase, la explicación se torna muy abstracta aún cuando el lenguaje fue adecuado al nivel educativo.

Idoneidad cognitiva

De acuerdo al Enfoque Ontológico semiótico (EOS) el significado personal se asume como los sistemas de prácticas operativas y discursivas que pueden manifestar los estudiantes en función a un tipo de problema. Por otra parte la idoneidad cognitiva de una configuración didáctica se produce en la medida que el contenido de estudio está en la *zona del desarrollo potencial* (Vigotsky, 1934) de los estudiantes, es decir; que los significados personales iníciales permitan el logro de los significados institucionales implementados, tomando en cuenta las restricciones cognitivas y las que tienen que ver con los recursos humanos y materiales (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

Para valorar la idoneidad cognitiva del proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida en la primera sesión de clase, contamos sólo con las grabaciones, los apuntes de la clase y las observaciones de éstas. A continuación mostramos segmentos de clases representativos para valorar la idoneidad:

Durante la práctica con el MAPLE

P: Con el comando rightbox después que se realiza la partición se construyen rectángulos por el lado derecho es decir; el extremo superior de cada subintervalo. Con el comando leftbox los rectángulos se construyen por el extremo menor o izquierdo y con el middlebox se construye de acuerdo a un valor intermedio. Se pueden construir todos los rectángulos que se quieran: 4, 25, 100...

P: Cómo ven ustedes los primeros rectángulos con relación a la curva? por ejemplo en el primero cuando eran cuatro.

A1: Sobran pedazos de rectángulos sobre la curva.

P: ¿Qué pasa cuando construimos 25 rectángulos?

A2: Sobra menos...?

P: ¡Aja! Y cómo queda cuando se construyeron 100 rectángulos?

A3: Casi se ajustan.

P: Que conclusión podemos obtener.

A2: Mientras más rectángulos se ajustan mejor.

P: Entonces a medida que se aumenta el número de rectángulos, la suma del área de éstos se aproxima al área de la región limitada por la curva, el eje x entre $x = -1$ y $x = 4$.

P: Con el left ¿qué pasa?

A1: faltan pedazos para llegar a la curva

P: pasa lo mismo en cuanto a mayor número de rectángulos, éstos se ajustan mejor a la curva. De igual forma ocurre con Middlebox.

P: Conclusión, qué conclusión podemos obtener de ahí.

A2: Mientras mayor número de rectángulos pareciera estar a la altura de la data.

P: ¿Qué es la data?

A2: El área de la curva.

P: La suma de los rectángulos se aproxima al área de la curva, de todas formas eso lo vamos a comprobar ahora.

P: Esa es una primera conclusión:

Escribe en la pizarra:

1) A medida que se aumenta el número de rectángulos, la suma del área de éstos se aproximan al área de la región limitada por la curva, el eje x entre

$x = -1$ y $x = 4$.

P: A medida que se aumenta el número de rectángulos... la suma del área de éstos se aproxima al área de la región limitada por la curva, el eje x entre $x = -1$ y $x = 4$.

P: Que otra conclusión podemos obtener... recuerden que la base de los rectángulos son los subintervalos en que se dividió el intervalo [-1,4] ...qué se puede decir.

P: Qué pasa con la medida de la base cuando se aumenta el número de rectángulos.

A2: Va tendiendo a cero.

P: Va tendiendo a cero, entonces ¿qué quiere decir?

Escribe en la pizarra mientras lo dice:

2) A medida que se aumenta el número de rectángulos las bases de éstos tiende a cero.

En esta secuencia con A1, A2 y A3 se puede notar como los estudiantes con el apoyo del computador (software Maple versión 8) y la planificación de las actividades de clase van adquiriendo el significado del proceso de cuadratura de una región curvilínea (limitada por una curva) y el concepto de infinitésimo con bastante aproximación a los significados institucionales de referencia y a los implementados. Esto se puede interpretar, que en los aspectos geométricos desarrollados gráficamente con el apoyo del computador están en el desarrollo potencial de los estudiantes, en la secuencia de A1, A2 y A3 se nota como sus observaciones y respuestas están en sintonía con lo que se espera que los alumnos interpreten. Ahora durante el desarrollo analítico de la integral de Riemann que se fue escribiendo en el pizarrón es muy poco lo que se puede percibir sobre el significado personal, los estudiantes apenas participan dando respuestas puntuales durante la explicación del profesor. Veamos el siguiente segmento.

P: Riemann hizo lo siguiente: El espacio entre a y b lo particionó es decir lo dividió en subintervalos, no importa que no sean iguales los subintervalos. Por ejemplo el colocó aquí un punto x_1, un punto x_2, un punto x_3, ... x_{n-1}, así sucesivamente hasta x_n, al primero lo llamó x_0 y al último x_n. Una partición no importa los pedazos que tenga.

P: Ahora fíjense él llamó delta equis sub-uno a la distancia entre equis sub-uno y equis sub-cero. Cómo se calcula la distancia: equis sub-uno menos equis sub-cero, delta de equis sub-dos menos equis sub-uno, así sucesivamente, mientras escribe:

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= x_1 - x_0 \\
\Delta x_2 &= x_2 - x_1 \\
\Delta x_3 &= x_3 - x_2 \\
&\vdots \\
\Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \\
&\vdots \\
\Delta x_n &= x_n - x_{n-1}
\end{aligned}$$

P: ¿Qué está definiendo él ahí o qué definió ?....

P: La base de los rectángulos.

P: Otra cosa es que en cada base Δx_i él seleccionó un r_i . Así en cada Δx_i seleccionó r_i de tal forma que es un valor intermedio, por ejemplo:

Escribe en la pizarra y dice: erre sub-uno tal que es mayor que equis sub-cero y menor que equis sub-uno, erre sub-dos mayor que equis sub-sub –uno y menor que equis subdos y así sucesivamente.

En cada Δx_i selecciono un r_i

$$\begin{aligned}
&r_1 \; tal \; que \; x_o < r_1 < x_1 \\
&r_2 \; tal \; que \; x_1 < r_2 < x_2 \\
&r_3 \; tal \; que \; x_2 < r_3 < x_3 \\
&\vdots \\
&r_i \; tal \; que \; x_{i-1} < r_i < x_i \\
&\vdots \\
&r_n \; tal \; que \; x_{n-1} < r_n < x_n
\end{aligned}$$

P: Una cosa que le iba a decir...¡ajá! Una de las conclusiones que ustedes sacaron de las actividades con la computadora era: que al aumentar el número de rectángulos ¿qué pasaba alguien dijo por ahí?

A2: Tiende a cero...

P: Tienden a cero entonces, si ellos tienden a cero, en particular el mayor de ellos que es la norma va a tender también a...'

A3: a cero.

P: Ahora ¿qué significa que el mayor de los subintervalos tienda a cero? Que el número de rectángulos tiende a infinito. Así al decir que la norma tiende a cero es lo mismo que decir que “ene” tiende a infinito, es decir; que el número de rectángulos tiende a infinito.

P: Ahora cuando trabajamos las actividades en el computador pudimos observar que a medida que se aumenta el número de rectángulos, éstos se ajustaban mejor al área de la región. Entonces con esta idea Riemann. Claro que no estamos demostrando, sólo estamos reseñando, pasa con el límite de la relación de aproximado a la relación de igualdad mientras escribía en la pizarra:

$$Area(\text{de la región}) \approx \Delta x_1 f(r_1) + \Delta x_2 f(r_2) + \Delta x_1 f(r_1) + \Delta x_3 f(r_3) + \ldots + \Delta x_n f(r_n) \ (\text{suma de Riemann})$$

$$Area(\text{de la región}) \approx \sum_{1}^{n} \Delta x_i f(r_i)$$

P: Al mayor de los sub intervalos le llamaremos la norma y lo denotaremos por:
Escribe en la pizarra:

$$\|\Delta x\|$$

P: Él dijo que el límite, es decir; que el área de la región es igual al límite cuando la norma de delta x tiende a cero de la sumatoria desde i igual uno hasta ene de los productos de los delta equis sub-i por lo efe de erre sub-i. Y esto a su vez, aunque yo no le diga ahora mismo cómo lo van a calcular, y escribe

$$Area(\text{de la región}) \approx \sum_{1}^{n} \Delta x_i f(r_i) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

P: es igual a la integral entre a y b de efe de equis diferencial de equis. Ahora nos falta establecer un vínculo... de la integral como nosotros la venimos calculando hasta el momento la integral indefinida y la integral definida. Nosotros lo que vamos a hacer mañana con los que vienen mañana y el viernes con los que vienen el viernes...y, es que vamos a calcular una integral como lo hacía Riemann haciendo la partición y todo, pero después vamos a ver herramientas, como el Teorema Fundamental del Cálculo que nos van a permitir calcular la integral con lo que ya venimos utilizando desde el inicio del semestre.

Lo que yo quería que ustedes vieran en esta clase es el aspecto geométrico de la integral definida. Así cuando vieron derivada se hizo hincapié en la interpretación geométrica de lo que es la derivada, recuerden que los aspectos geométricos o gráficos son los que más rápido se fijan en la mente.

Se tiene que en este segmento de clase sólo la participación de dos alumnos A2 y A3. El profesor a medida que explicaba hacía muchas preguntas que los estudiantes no respondían, estos dos alumnos responden ante la pregunta aumentar el número de rectángulos ¿qué pasaba alguien dijo por ahí? El estudiante A2 respondió: Tiende a cero... Luego el profesor señala: Tienden a cero entonces, si ellos tienden a cero, en particular el mayor de ellos que es la norma va a tender también a... El estudiante A3 responde a cero. Estas respuestas las únicas de este segmento son el resultado de las actividades de visualización implementadas con el computador y que ahora en los desarrollos analíticos se refuerzan. Si en estas preguntas el docente pretendía evaluar la comprensión y apropiación de los estudiantes, entonces pudo percibir que en los aspectos analíticos, fue media por no decir media-baja, ya que se carece hasta el momento de otras evaluaciones.

Idoneidad interaccional

En el caso de la idoneidad interaccional citamos de nuevo a Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006)

> "Diremos que un proceso de estudio tiene una idoneidad interaccional alta, en la medida en que las configuraciones didácticas profesor y los alumnos identifiquen conflictos semióticos potenciales (a Priori), efectivos (durante el proceso de instrucción) y residuales (a posteriori) y resolver dichos conflictos mediante la negociación de significados" (p. 17).

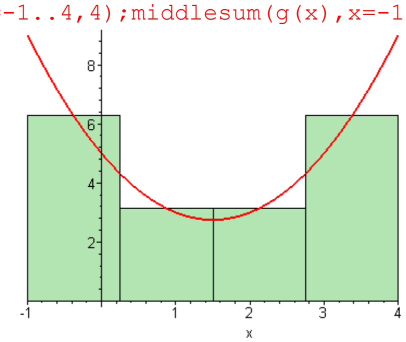
En esta primera sesión de clase (ver anexo G) se puede observar una interacción que podría considerarse media, en la primera parte en la introducción y durante la práctica con el computador. El profesor preguntaba y los estudiantes respondían, lo que permitía la corrección y afirmación de significado. En la segunda parte de la clase se puede decir que no hubo interacción. El profesor no interrogaba y con la misma frecuencia ni los estudiantes respondían las preguntas. Quizás tanto el profesor como los estudiantes están conscientes de lo abstracto de la integral de Riemann en relación a los aspectos analíticos.

Idoneidad mediacional

En Godino, Contreras y Font (2006) se define la idoneidad mediacional como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje. En esta sección de clase el profesor hizo uso de diversos materiales que distribuyó durante toda la sesión: a) Un material de apoyo para las práctica a desarrollar con el software Maple (ver anexo E), b) el laboratorio de informática, ésta y todas las sesiones se desarrollaron en el laboratorio y c) la pizarra y marcadores de colores. El pizarrón también se utilizó de diferentes maneras de acuerdo a la dinámica generada: Clase magistral, lluvia de ideas y discusión, para aclarar preguntas y recordar conceptos, operaciones y teoremas necesarios para la comprensión de la integral definida. Todos estos recursos se utilizaron adecuadamente en el transcurso de la sesión. Por ejemplo para la comprensión del proceso de cuadratura de la región limitada por la función $f(x)=\sqrt{3+x^2}$ el eje x entre las rectas $x=-1$ y $x=4$ fue muy apropiado el apoyo gráfico del Maple (versión 8), los comandos *rightbox,* ,l*eftbox* y *middlebox* permiten cuadrar con rectángulos la región anterior y los comandos *rightsum, leftsum* y *middlesum* valorar las suma del área de los rectángulos. A continuación se presenta la práctica número dos que consistió en ver cómo se puede aproximar el área de la región señalada anteriormente:

Descripción de la actividad 2 utilizando el Software Maple versión 8

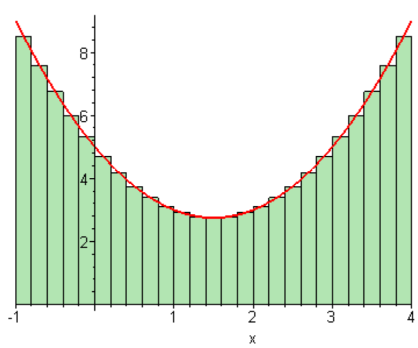
```
> with(student):
> g:=x->x^2-3*x+5;
> plot(g(x),x=-5..5,y=-3..15,thickness=2);
> middlebox(g(x),x=-1..4,4);middlesum(g(x),x=-1..4,4);evalf(%);
```



$$\frac{5}{4}\left(\sum_{i=0}^{3}\left(\left(-\frac{3}{8}+\frac{5}{4}i\right)^2+\frac{49}{8}-\frac{15}{4}i\right)\right)$$

$$23.51562500$$

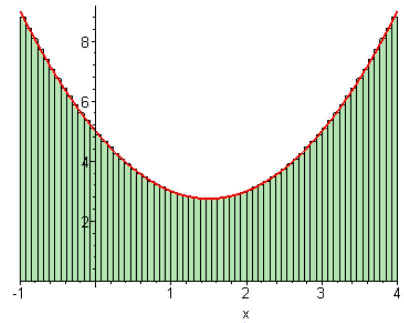
```
> middlebox(g(x),x=-1..4,25);middlesum(g(x),x=-1..4,25);evalf(%);
```



$$\frac{1}{5}\left(\sum_{i=0}^{24}\left(\left(-\frac{9}{10}+\frac{1}{5}i\right)^2+\frac{77}{10}-\frac{3}{5}i\right)\right)$$

$$24.15000000$$

```
> middlebox(g(x),x=-1..4,65);middlesum(g(x),x=-1..4,65);evalf(%);
```



$$\frac{1}{13}\left(\sum_{i=0}^{64}\left(\left(-\frac{25}{26}+\frac{1}{13}\,i\right)^{2}+\frac{205}{26}-\frac{3}{13}\,i\right)\right)$$

$$24.16420118$$

Idoneidad emocional

Un proceso de estudio tiene idoneidad emocional alta en la medida que las configuraciones didácticas motiven la acción y participación a los alumnos. La utilización de un software matemático, con el cual se puede simular la construcción de rectángulos de acuerdo a una partición de un segmento del eje x bien sea por el extremo inferior o superior o de un valor intermedio para cuadrar la región limitada por una curva, el eje x, entre dos valores de éste, es acertado para introducir al estudiante al estudio de la integral definida. En las observaciones de clase el observador señala “Los alumnos se interesan por la actividad, se consultan entre sí y comparten sus hallazgos” (Ver anexo F, p.1). Claro está que para esta actividad el tiempo planificado por lo general no se cumple debido a las diferencias individuales de los alumnos, lo que produce retrasos en la clase, en oportunidades como fue el caso de esta sesión no se pudo cumplir con los contenidos previstos, postergándolos para la clase siguiente. Lo importante es que la actividad rindió sus frutos.

Idoneidad ecológica

La idoneidad ecológica es el grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo de centro. La integral indefinida es un tópico del cálculo integral de mucha importancia en las carreras técnicas e ingeniería. En el capítulo V se analizó la importancia que tiene este tema en las carreras como Ingeniería y Técnico Superior Universitario y los significados institucionales de este tema. Por ello se planificó una trayectoria didáctica para la integral definida donde se quiere que el estudiante comprenda, interprete y aplique la integral definida. Sin la necesidad de profundizar en demostraciones de teoremas que son propios del análisis de los estudios de *ciencias puras*. En este sentido la implementación del proceso de estudio se adaptó a los significados institucionales pretendidos en el currículo del IUTE-La Victoria. Esta es una institución de Educación Superior de amplia trayectoria en la formación de Técnicos Superiores Universitarios en Electricidad (tres opciones: Telecomunicaciones, instrumentación y control y electrotecnia), Mecánica, Informática y Administración. Una de las características de este profesional universitario es su formación matemática, la cual le permite abordar problemas propios a la tecnología.

Reflexiones sobre la idoneidad de la primera sesión de clase

Sobre la idoneidad epistémica

El conflicto de tipo epistémico que se percibe, tiene que ver con el proceso de la integral de Riemann que se debate entre los argumentos geométricos y los analíticos funcionales, ambos basados en infinitésimos. Para un buen proceso de estudio se debe armonizar entre las dos configuraciones epistémicas: La generada por los problemas originarios y la impulsada por el desarrollo posterior a siglo XVII. En esta clase se hizo una problematización adecuada para los aspectos geométricos e infinitos, los estudiantes visualizaron los procesos de cuadraturas y cubaturas. En este sentido Hershkowitz, Parzzysz y Van Dermolen (1996) señalan que "...visualización es la transferencias de objetos, concepto, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa"(p.163). pero no sucedió lo mismo con los aspectos analíticos de la integral de Riemann, por lo que se ve menos participación de los estudiantes en ese segmento de clase, la explicación se torna muy abstracta aún cuando el lenguaje fue adecuado al nivel educativo.

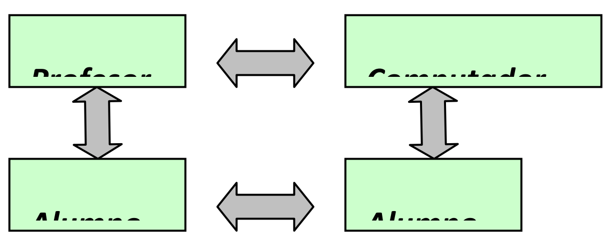
Sobre la idoneidad cognitiva

Se percibe que en esta sesión de clase en donde se utilizó un software matemático para la simulación geométrica de cuadraturas, permitió ubicar este proceso en la *zona de desarrollo potencial* de los estudiantes, superando las limitaciones de la graficación y las deficiencias geométricas se puede notar como los estudiantes con el apoyo del computador (software Maple versión 8) y la planificación de las actividades de clase van adquiriendo el significado del proceso de cuadratura de una región curvilínea (limitada por una curva) y el concepto de infinitésimo con bastante aproximación a los significados institucionales de referencia y a los implementados. Esto se puede interpretar, que el hecho geométrico desarrollado gráficamente con el apoyo del computador está en el desarrollo potencial de los estudiantes a pesar de las deficiencias que en este sentido puedan tener los estudiantes. Sin embargo en el segundo segmento de clase presentado sólo participan dos alumnos. El profesor a medida que explicaba hacía muchas preguntas que los estudiantes no respondían, estos dos alumnos responden porque las preguntas tienen que ver con las actividades de visualización implementadas con el computador y que ahora en los desarrollos analíticos se refuerzan. Si las preguntas del docente durante la clase, pretendía evaluar la comprensión y apropiación de los estudiantes, entonces pudo percibir que en los aspectos analíticos, la comprensión fue media por no decir media-baja ya que se carece hasta el momento de otras evaluaciones.

Sobre la idoneidad interaccional

Como es conocido la enseñanza y aprendizaje del concepto de la integral definida, es un tópico neurálgico, sin embargo con la trayectoria didáctica de esta primera clase y el uso del computador, se notó las siguientes interacciones: Profesor-Alumno, Alumno-Computador, Profesor-Computador y Alumno-Alumno. Estas relaciones favorecieron en muchos momentos la negociación para solventar conflictos en los significados personales que se presentaron durante la explicaciones sobre la integral definida; en sus nociones iníciales y en su definición formal basada en el proceso de Riemann.

FIGURA 23



Elaboración Propia: Modelo de interacción generado en esta sesión

Sobre la idoneidad mediacional

En esta sección de clase el profesor hizo uso de diversos materiales que distribuyó durante toda la sesión: a) Un material de apoyo para las práctica a desarrollar con el software Maple, b)el laboratorio de informática, ésta y todas las sesiones se desarrollaron en el laboratorio y c) la pizarra y marcadores de colores. Todos estos recursos se utilizaron de acuerdo a una planificación que lo adecuo al contenido de estudio y a las actividades que se desarrollaron en el trascurso de la sesión.

Sobre la idoneidad emocional

La utilización de un software matemático, con el cual se puede simular la construcción de rectángulos de acuerdo a una partición de un segmento del eje x bien sea por el extremo inferior o superior o de un valor intermedio para cuadrar la región limitada por una curva, el eje x, entre dos valores de éste, es acertado para motivar al estudiante por el estudio de la integral definida. En las observaciones de clase el observador señala "Los alumnos se interesan por la actividad, se consultan entre sí y comparten sus hallazgos" (ver anexo F).

Sobre la idoneidad ecológica

Se planificó una trayectoria didáctica para la integral definida donde se quiere que el estudiante comprenda, interprete y aplique la integral definida. Sin la necesidad de profundizar en demostraciones de teoremas que son propios del análisis. En este sentido la implementación del proceso de estudio se adaptó a los significados institucionales pretendidos en el currículo del IUTE-LV.

Gráfico de la estimación de la idoneidad didáctica de la primera sesión de clase

Se ha diseñado una forma para valorar, es decir; asignar un número que represente la idoneidad epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, emotiva y ecológica de acuerdo al análisis realizado a esta sesión de clase.

Con estos valores podemos elaborar un gráfico que ilustre la idoneidad de la clase.

TABLA 1

Los intervalos de valoración se presentan a continuación:

Valores Intervalos	Idoneidad
[0, 1]	Baja
(1,2]	Media
(2,3]	Alta

TABLA 2

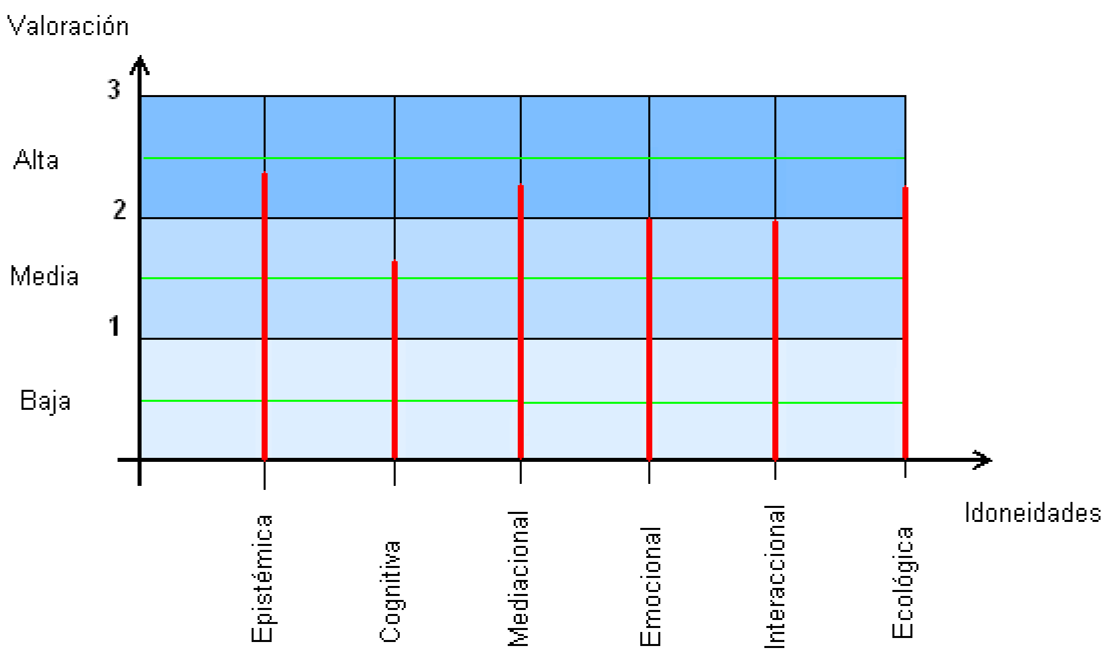
Tabla de estimación de la idoneidad didáctica de la primera sesión de clase.

Epistémica	Baja (1)	Media (2)	Alta (3)
Situaciones			x
Lenguaje			x
Formalidad		x	
Argumentos		x	
Armonía		x	
Total: $\frac{12}{5}=2,4$		$\frac{3}{5}.2$	$\frac{2}{5}.3$
Cognitiva	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Conocimientos previos	x		
Diferencias		x	
Aprendizaje		x	
Total: $\frac{5}{3}=1,6$	$\frac{1}{3}.1$	$\frac{2}{3}.2$	

Cognitiva	Baja (1)	Media (2)	Alta (3)
Conocimientos previos	x		
Diferencias		x	
Aprendizaje		x	
Total: $\frac{5}{3}=1{,}6$	$\frac{1}{3}.1$	$\frac{2}{3}.2$	
Mediacional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Recursos			X
Condiciones			X
Tiempo		X	
Total: $\frac{7}{3}=2{,}33$		$\frac{1}{3}.2$	$\frac{2}{3}.3$
Emocional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Interés y necesidad		x	
Actitudes		x	
Emociones		x	
Total: 2		2	
Interaccional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Docente-alumnos		x	
Entre alumnos		x	
Independencia		x	
Evaluación formativa		x	
Total: 2		**2**	
Ecológica	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Adaptación al currículo			x
Innovación didáctica			x
Socio profesionalismo y cultura.		x	
Conexiones	x		
Total: $\frac{9}{4}=2{,}25$	$\frac{1}{4}.1$	$\frac{1}{4}.2$	$\frac{2}{4}.3$

GRÁFICO 1

Idoneidad didáctica de la primera sesión de clase



Idoneidad de la segunda sesión de clase

Idoneidad epistémica

Esta sesión es continuación de la anterior, por ello se ejemplifica el proceso seguido por Riemann para el cálculo de integrales definidas. El profesor utiliza como ejemplo la integral $\int_{-2}^{1} x^2 dx$, tomando una partición del intervalo $[-2,1]$ y desarrolla todo el procedimiento. Los estudiantes saben calcular la integral indefinida de esa función con facilidad.

La intención del profesor es ejemplificar el procedimiento y luego establecer el Teorema Fundamental de cálculo (TFC), pero en definitiva el estudiante no le encuentra sentido a estudiar un procedimiento tan engorroso para en definitiva, utilizar el mismo procedimiento que viene utilizando para calcular integrales indefinidas. Así que esta decisión del profesor se percibe como un conflicto epistémico.

Se puede considerar un conflicto epistémico ya que se presenta un procedimiento (La integral de Riemann) geométrico (utiliza segmentos, particiones que vienen de la teoría de conjuntos) y analíticos (sumatorias, límite, infinitésimos,...etc.) que en definitiva no se va a utilizar para calcular integrales definidas. Por otra parte el profesor no demostró el TFC por lo que los alumnos no ven vinculación entre los dos procedimientos: la integral indefinida y la definida. El siguiente segmento de la clase pone de manifiesto el conflicto.

> **P:** Esa es la integral formal de Riemann, el hecho de hacerlo así es para que ustedes vean la relación que tiene la integral con los aspectos geométricos.
>
> **P:** ayer estuvimos viendo los aspectos geométricos más crudos para realizar cuadraturas. Hoy vemos aspectos geométricos que tienen que ver con segmentos y particiones, que están asociados al formalismo matemático, la partición viene de la teoría de conjuntos. Pero nosotros no lo vamos hacer así, nosotros vamos a utilizar los métodos de integración.

El estudiante puede percibir que no tiene importancia estudiar la integral de Riemann y es hasta perder el tiempo si lo que interesa es calcular la integral y lo puede hacer de una forma más fácil utilizando TFC.

El lenguaje es el propio de la configuración epistémica seleccionada para la enseñanza y se desarrolla de forma adecuada para los estudiantes del segundo semestre de una carrera técnica universitaria. Se requirió de gráficos y símbolos para facilitar la enseñanza y comprensión de la integral definida.

Idoneidad cognitiva

El profesor trata de aclarar todas las dudas que presentan los alumnos en lo relativo a recordar aspectos de tópicos vistos anteriormente y que no recuerdan, de manera que no sean una perturbación para el desarrollo del material de estudio. Veamos el siguiente segmento:

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{n}\right)\left(4-\frac{12}{n}i+\frac{9}{n^2}i^2\right)$$

P: Al elevar al cuadrado quedaría: el cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado de segundo esto es:
Cuatro menos doce sobre ene por *i* , más nueve sobre ene al cuadrado por *i* al cuadrado.

P: ¿Está claro o no?

A1: No

P: ¿Dónde está la duda?

A1: Ahí

P: ¿En este desarrollo?

A1: ¡Aja!

P: Bueno, una diferencia al cuadrado: El cuadrado del primero, menos...

A1: ¡Aja!

P: ...el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Según Vigotsky (1978) un proceso de instrucción sólo es bueno, cuando va por delante del desarrollo, cuando despierta y trae a la vida aquellas funciones que está en el proceso de maduración o en la zona de desarrollo próximo. El investigador por su experiencia docente a nivel superior, conoce la preparación deficiente que en Venezuela presentan muchos estudiantes que ingresan a Educación Superior y que interfiere en que el material de estudio no pueda estar en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes.

Así continuando con el análisis de la clase para el ejemplo que se desarrolló aplicando el proceso de Riemann (la integral como el límite de una sumatoria) se requirió utilizar la suma de los ene primeros números enteros positivos $1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ y la suma de los ene primeros números enteros positivos al cuadrado $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

se necesita que el estudiante tenga la certeza de esas expresiones, pero esas demostraciones se logran por el método de inducción completa que no está en los contenidos programáticos de secundaría y superior. La comprobación de estas igualdades con el software Maple, permitió, a pesar de que no se desarrolló la demostración, que el estudiante relacionara su bagaje matemático con la nueva información. En este sentido Ríos (1999) hizo una propuesta de constructivismo como sigue:

> "Es una explicación acerca de cómo llegamos a conocer en el cual se concibe al sujeto como un participante activo que, con el apoyo de agentes mediadores, establece relaciones entre su *bagaje cultural* y la nueva *información* para lograr la reestructuraciones cognitivas que permitan atribuirle significado a las situaciones que se le presentan" (pp. 22)

El profesor toma la decisión de comprobar las igualdades anteriores con el Maple por el desconocimiento que los estudiantes presentan sobre estas expresiones, veamos el siguiente segmento de clase:

P: ¿Nunca habían trabajado o deducido la expresión de la suma de los ene primeros números naturales?

A2: No.

P: Estas dos expresiones son la próxima actividad con Maple, con esa actividad se espera ver su veracidad. El comando sum de la librería les da la expresión que rige la suma de los k primeros términos, veamos…

Descripción de la actividad 3:

```
> with(student):
> Sum('k','k'=1..n)=sum('k','k'=1..n);
```

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$

```
> factor(%);
```

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n\,(n+1)$$

```
> Sum('k^2','k'=1..n)=sum('k^2','k'=1..n);
```

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}n + \frac{1}{6}$$

```
> factor(%);
```

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n\,(n+1)\,(2n+1)$$

Existen otros segmentos donde se puede notar el sistema de prácticas operativas y discursivas que van construyendo los estudiantes. En la propiedad de la integral definida que dice: *Si* f y g *son funciones integrables en* $[a,b]$ *y* $f \geq g$ *para todo* $x \in [a,b]$, *entonces,* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. Para lo cual se utiliza la siguiente actividad con el Maple:

```
> f:=x->x^2+1;g:=x->-x^2+3;
```

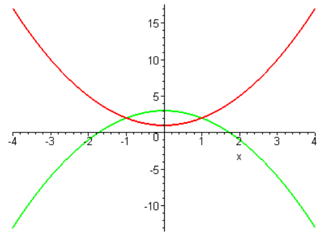
$$f := x \to x^2 + 1$$

$$g := x \to -x^2 + 3$$

```
> solve(f(x)=g(x));
```

$$1, -1$$

```
> plot({f(x),g(x)},x=-4..4,thickness=2);
```




```
> Int(f(x),x=-1..1)=int(f(x),x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^{1} x^2 + 1 \, dx = \frac{8}{3}$$

```
> Int(g(x),x=-1..1)=int(g(x),x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^{1} -x^2 + 3 \, dx = \frac{16}{3}$$

P: ¿Qué pasó con las gráficas del ejemplo? ¿Cuál toma valores mayores? ¿Lo han hecho?. ¿la efe o la ge?

A4: La verde.

P: ¿Cuál es la función de la gráfica verde?

A4: La que tiene el menos.

P: Muy bien la parábola que tiene negativo el coeficiente del término de equis cuadrado, es decir la ge. Ahora calculemos la integral.

P: No sé qué les pasa les falta rapidez en el computador, ustedes son estudiantes de informática.

A2: La ge que es la verde.

P: Es claro la ge alcanza valores mayores por eso el área bajo su gráfica es mayor que la de la función efe.

Vemos que el significado personal está en sintonía con el institucional, mientras mayor sea la región el valor de la integral que representa el área será mayor. En este otro segmento los estudiantes con la ayuda del software resuelven una integral definida y después el profesor establece una interacción con ellos para resolverla en el pizarrón:

Los estudiantes comienzan a trabajar con el computador en la siguiente experiencia:

```
> with(student):
> e:=Int((1+ln(x))^2/x,x=1..exp(1)):e;
```

$$\int_{1}^{e} \frac{(1+\ln(x))^2}{x}\,dx$$

```
> changevar(1+ln(x)=u,e,u);
```

$$\int_{1}^{2} u^2\,du$$

```
> value(%);
```

$$\frac{7}{3}$$

P: Entonces ¿Cómo lo harían?

A2: Estamos trabajando.

A3: Por cambio de variable, el mismo que hicimos con el Maple. Uno más logaritmo neperiano de equis.

P: Bien y de de u.

A5: equis de de equis.

P: De de equis entre equis ya que cuál es la derivada de uno más logaritmo neperiano de equis.

A5: De de equis entre equis.

El profesor escribe en la pizarra:

$$\int_{1}^{e} \frac{(1+\ln(x))^2}{x}dx = \int_{1}^{2} u^2 du$$

P: Pero tenemos que cambiar los límites de integración, para equis igual a uno, u es uno más logaritmo neperiano de uno. ¿Cuánto da eso?

A5: Uno.

P: ¿por qué?

A5: Uno más cero.

P: Claro logaritmo de uno es cero y para equis igual a e, u es igual a uno más logaritmo neperiano de e. ¿Cuánto vale eso?

A2: Debe ser dos, logaritmo de e debe ser uno.

P: ¿Por qué?

A2: Bueno profesor el Maple dice que es dos y como es uno más el logaritmo de e.

P: Fíjense que aunque eso lo debían recordar, el Maple le hizo deducir que logaritmo neperiano de e es uno.

A2: Más fácil profesor.

P: No, pero tienen que tener los conocimientos teóricos para hacer un buen uso de él. Sólo con él no van a hacer nada.

A2: Tiene razón.

P: Ustedes cursaron Matemática uno. Las función logarítmica es la inversa de la exponencial y viceversa. Cuando se compone una función con su inversa. ¿Qué se obtiene?

A1: La identidad.

P: ¿Cuánto da la integral de u cuadrado sobre dos?

A5: u a la tres sobre tres.

P: ¿Por qué?

A5: Ehhh...

P: Acuérdense que pueden usar el Maple, pero el cálculo deben entregarlo escrito en la hoja de examen. Si esto da u a la tres sobre tres evaluado entre uno y dos.

Escribe en la pizarra.

$$= \left.\frac{u^3}{3}\right|_1^2$$

P: ¿Cómo se evalúa?

A3: Dos a la tres sobre tres menos uno a la tres sobre tres.

El profesor escribe:

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{7}{3}$$

En el diálogo se puede observar cómo los estudiantes tienden al mecanicismo, quizás producto de sus etapas anteriores de aprendizaje. En la secuencia el profesor pregunta ¿Cuánto da la integral de u cuadrado? Un estudiante responde: u a la tres sobre tres y el profesor le pregunta ¿Por qué? Y no puede responder. Por otra parte parece que al calcular integrales de dos formas: a) Primero a *mano* y luego haciendo uso del computador y b) primero con el computador y después a *mano*, podría generar algunos conflictos operativos y semióticos pero; que a juicio del investigador son de utilidad para vencer el mecanicismo y abre oportunidades para que el estudiante profundice en su aprendizaje. Esto se puede ejemplificar cuando el estudiante a pesar de que no recuerda que $\ln(e) = 1$, lo deduce de los cálculos hechos en el Maple.

Idoneidad interaccional

De nuevo se dio una interacción: Profesor-alumno, profesor-computador, alumno-computador y alumno-alumno. Sin embargo siempre se puede esperar una mayor interacción profesor-alumno en el desarrollo de las explicaciones. Cuando los estudiantes trabajaban en el computador, que el profesor rotaba por cada alumno se notaba mayor interacción. El observador en este sentido señala: "los alumnos interactúan con el profesor sobre el trabajo que realizan en el computador, atiende sus dudas, les pide explicaciones y hace aclaratorias" (ver anexo F). Sin embargo algunos estudiantes que no logran terminar la actividad una vez finalizado el tiempo continuaban trabajando, no prestando atención al profesor que ya había comenzado con otras explicaciones”. Esto genera problemas pedagógicos ya que esos estudiantes no siguieron el ritmo de la clase y luego se les dificulta seguir las explicaciones.

Idoneidad mediacional

Se alternaron de forma variada la pizarra con la clase magistral, la pizarra con el diálogo y discusión entre profesor-alumnos, alumno-alumno. Las actividades con el computador y en su cuaderno. Las guías de trabajo tanto para trabajar en el computador y a *mano.* Quizás algunos tiempos didácticos no se adaptaron a las necesidades de los estudiantes por lo cual algunas actividades se hicieron con rapidez y otras tuvieron que trasladarse a la clase siguiente.

Idoneidad emocional

Sigue siendo en esta segunda clase el computador una fuente de interés por el estudio del tema de la integral definida, sus propiedades y teoremas. Se cree que con las actividades desarrolladas con el software alternado con las otras propias de la clase como la discusión de la teoría y los ejemplos, así como la resolución de las guías de apoyo contribuyeron en parte mejorar la participación y responsabilidad durante la clase.

Idoneidad ecológica

Los contenidos están en sintonía con los significados institucionales, la integral definida, sus propiedades y los teoremas más importantes forman parte del currículo de las carreras técnica universitarias como, ingeniería y técnico superior universitario. En esta sesión el tema se abordó en base a la apertura hacia la innovación didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhemi, 2006) en su descriptor de integración de nueva tecnología.

Reflexiones sobre la idoneidad de la Segunda sesión de clase

Sobre la idoneidad epistémica

1. La manera como se ejemplificó la integral de Riemann puede generar conflictos epistémicos, ya que se utilizaron las nociones de partición proveniente de la teoría de conjuntos, sumatorias, límite de una sumatoria e infinitésimos para calcular $\int_{-2}^{1} x^2 dx$. Un proceso complicado y muy diferente al que venía utilizando para calcular integrales indefinidas.
2. El profesor no demostró, ni hizo ningún comentario sobre la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) por lo que produce un conflicto epistémico cuando lo presenta como la vinculación entre la integral definida y la indefinida. En definitiva este conflicto influye en lo cognitivo, ya que el estudiante no ve la necesidad de estudiar la integral de Riemann, si en la práctica aplica el TFC.
3. Utiliza el lenguaje propio para estudiantes del segundo semestre de una carrera técnica universitaria que ya han cursado y aprobado el curso de *Cálculo Diferencial*, sin embargo el profesor requirió de diversos tipos de lenguaje como: Gráficos y símbolos, así como las conversiones entre ellos para facilitar la enseñanza y comprensión del tema en estudio.
4. Se sigue percibiendo la necesidad de armonizar los aspectos geométricos con los analíticos, presentes en la configuración epistémica utilizada (La generada por los problemas originarios y la impulsada por el desarrollo posterior a siglo XVII) (Ver Capítulo IV).

Sobre la idoneidad cognitiva

1. El profesor, en la medida de las posibilidades, aclara dudas a los alumnos en lo relativo a recordar aspectos teóricos vistos anteriormente y que no recuerdan y que generan perturbaciones en el desarrollo del material de estudio. Por ejemplo al utilizar el Maple para comprobar las igualdades de las siguientes expresiones: $1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, $1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. que los estudiantes no conocían sobre su demostración (Inducción completa) y tampoco las recordaban. Con el apoyo de agentes mediadores, señala Ríos (1999), el estudiante relaciona su bagaje cultural con la nueva información y puede así darle significado a las situaciones de aprendizaje.
2. En el diálogo entre profesor y alumno, se notó en varios segmentos de la clase como los alumnos tienden al mecanicismo. Una buena estrategia parece ser de acuerdo a lo observado, el calcular integrales definidas de dos maneras: a) Primero a *mano* y luego usando el computador y b) primero con el computador y después a *mano* podría, minimizar el mecanismo pero, es posible que generen algunos conflictos operativos y semióticos.

Sobre la idoneidad interaccional

Se dieron durante el desarrollo de esta sesión diferentes interacciones: Profesor-alumno, alumno-alumno, alumno-computador. Sin embargo debió haber existido una mayor interacción entre el profesor y el alumno, sobre todo durante las explicaciones teóricas y la presentación de los ejemplos. Se percibe un aumento de esta interacción cuando los estudiantes trabajaban en el computador y el profesor pasaba por cada sitio atendiendo dudas y pidiéndoles explicaciones.

Sobre la idoneidad mediacional

1. Se alternaron de acuerdo a los contenidos los recursos: Pizarra en clase magistral, la pizarra en diálogo y discusión entre profesor y alumno, y entre alumno y alumno. El computador en sus respectivas actividades y las guías y material de apoyo.
2. Quizás algunos tiempos didácticos, no se adaptaron a las necesidades de los estudiantes, por eso algunas actividades fueron postergada para la clase siguientes y otra se hicieron con rapidez.

Sobre la idoneidad emocional

Sigue siendo en esta segunda clase el computador una fuente de interés en el aula durante el estudio del tema de la integral definida, sus propiedades y teoremas, Se cree que con las actividades desarrolladas con el software alternado con las otras propias de la clase como la discusión de la teoría y los ejemplos, así como la resolución de las guías de apoyo contribuyeron en parte mejorar la participación y responsabilidad durante la clase.

Sobre la idoneidad ecológica

Los contenidos están en sintonía con los significados institucionales, la integral definida, sus propiedades y los teoremas más importantes forman parte del currículo de las carreras técnica universitarias como, ingeniería y técnico superior universitario. En esta sesión el tema se abordó en base a la apertura hacia la innovación didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhemi, 2006) en su descriptor de integración de nueva tecnología.

TABLA 3

Tabla de estimación de la idoneidad didáctica de la segunda sesión de clase

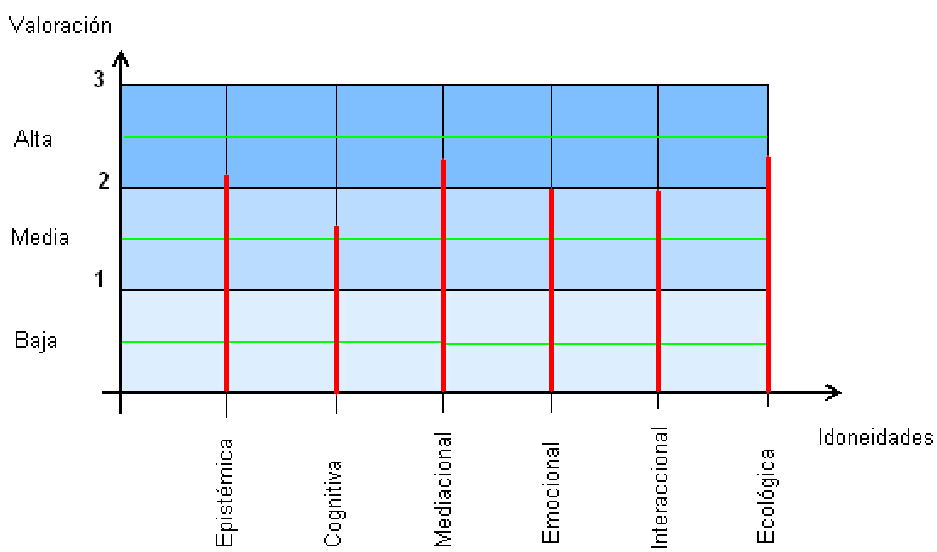
Epistémica	Baja (1)	Media (2)	Alta (3)
Situaciones-Problemas		x	
Lenguaje			x

Formalidad		x	
Argumentos		x	
Armonía		x	
Total: $\frac{11}{5} = 2,2$		$\frac{4}{5}.2$	$\frac{1}{5}.3$
Cognitiva	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Conocimientos previos	x		
Diferencias		x	
Aprendizaje		x	
Total: $\frac{5}{3} = 1,6$	$\frac{1}{3}.1$	$\frac{2}{3}.2$	
Emocional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Interés y necesidad		x	
Actitudes		x	
Emociones		x	
Total: 2		**2**	
Mediacional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Recursos			x
Condiciones			x
Tiempo		x	
Total: $\frac{7}{3} = 2,33$		$\frac{1}{3}.2$	$\frac{2}{3}.3$
Interaccional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Docente alumno		X	
Entre alumnos		X	
Independencia		X	
Evaluación formativa		X	
Total: 2		**2**	

Ecológica	Baja (1)	Media (2)	Alta (3)
Adaptación al currículo			X
Innovación didáctica			X
Socio profesionalismo y cultura		X	
Conexiones	X		
Total: $\frac{9}{4}=2{,}25$	$\frac{1}{4}.1$	$\frac{1}{4}.2$	$\frac{2}{4}.3$

GRÁFICO 2

Idoneidad didáctica de la segunda sesión de clase



Idoneidad de la tercera sesión de clase

En esta sesión de clase se enunció el teorema del valor medio para integrales, se ejemplificó con situaciones representativas y se comenzó con la aplicación de la integral definida al cálculo de áreas de regiones limitadas por funciones continuas.

Idoneidad epistémica

El profesor antes de enunciar el teorema del valor medio para integrales (TVMI), recuerda el teorema del valor medio para la derivada (TVMD) y hace su interpretación geométrica y después señala:

> **P:** ese es el teorema del valor medio para la derivada. El teorema del valor medio para integrales dice algo similar, pero tiene que ver con lo que significa la integral. Fíjense lo que dice este teorema: Si una función es continua en un intervalo cerrado, podemos determinar un alfa perteneciente a ese intervalo para el cual se verifica esta igualdad.

Habla mientras escribe en la pizarra:

> *Si* f *es continua en* $[a,b]$ *entonces, existe* $\alpha \in [a,b]$ *tal que se cumpla la siguiente igualdad* $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\alpha)$
>
> **P:** ¿Qué significa esta igualdad?
>
> **P:** La expresión be menos a por efe de alfa. ¿Qué les recuerda?
>
> **A2:** los rectángulos.
>
> **P:** En la integral definida, be menos a es la base y efe de alfa es la altura.

Conflicto

El profesor quiere establecer la diferencia que existe entre TVMD y TVMI, por eso antes de enunciar el segundo repasa el primero, pero agrega: "El teorema del valor medio para integrales dice algo similar, pero tiene que ver con lo que significa la integral". Este señalamiento del profesor puede ser generadora de un conflicto semiótico ¿Por qué lo que dice el TVMI es similar a lo que dice el TVMD? Por otra parte como él no desarrolló ni comentó la demostración del TVMI, lo cual no permite a los estudiantes conocer a profundidad el teorema. Sin embargo los estudiantes antes la pregunta ¿están claro? La mayoría respondieron que sí.

Idoneidad cognitiva

En esta sesión de clases, además de la teoría se realizaron varios ejemplos, que para evitar la tradicional discusión si son ejercicios o problemas. Con ellos el profesor promueve el diálogo y la discusión de entre él y los alumnos y entre los alumnos que a su vez pueden interactuar con el computador. Veamos el siguiente segmento de clase:

Ejemplo 2: Sea $g(x) = x^2 - 7x + 6$ *una función. Halle el área de la región limitada por la gráfica de ella y el eje x.*

P: ¿Qué ven ustedes de diferente al anterior?

A7: Que no dan los intervalos de las rectas.

P: El intervalo de integración ¿Qué les hace suponer eso?

A7: Que tenemos que calcularlo.

P: ¿Cómo lo calculamos?

A7: Eh..???

P: Se debe entender que la gráfica de ge corta al eje equis en dos puntos por lo que determina una región. Entonces, tenemos que hallar primero...¿Qué tenemos que hallar primero?

A3: Los puntos de corte.

P: Exactamente los puntos de corte.

Escribe en la pizarra:

Puntos de corte con el eje x

P: Entonces igualo a cero esto es equis cuadrado menos siete equis más seis igual a cero.

Escribe en la pizarra:

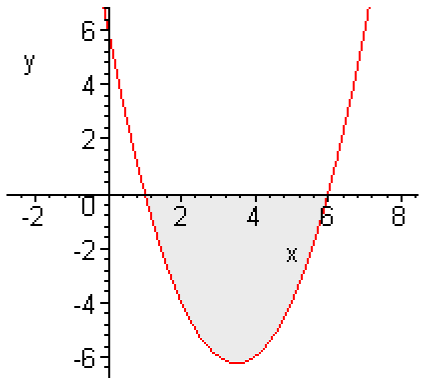
$$x^2 - 7x + 6 = 0$$
$$(x-1)(x-6) = 0$$
$$x_1 = 1; x_2 = 6$$

P: Qué otra cosa debemos hacer para tener claro el problema.

A2: La gráfica.

P: Claro porque no sabemos si la gráfica está por debajo del eje equis, es decir; la función toma valores negativos. Bosquejemos su gráfica, el problema de ustedes es que mañana vienen otra vez igualito a como vinieron hoy, el marco de la puerta tiene algo que cuando pasan por ahí se les olvida todo. Vamos a graficar:

Escribe y bosqueja en la pizarra:



$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$abcisa\ del\ v\acute{e}rtice = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2}$$

$$g\left(-\frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 7\left(-\frac{7}{2}\right) + 6 = \frac{45}{4}$$

Los cálculos para la gráfica los hizo el profesor conjuntamente con los alumnos, éstos mostraron poca destrezas en ello.

P: Ahora fíjense, la función en ese intervalo toma valores negativos, si yo calculo la integral me dará negativo. Por eso es necesario al calcular el área de la región, colocarle un signo menos y así se obtiene el área positiva.

P: Así el área de la región es igual a menos el integral entre uno y seis de equis al cuadrado menos siete equis más seis.

Escribe en la pizarra:

$$A(R) = -\int_1^6 \left(x^2 - 7x + 6\right)dx$$

$$= -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_1^6$$

$$= \frac{125}{6}$$

A3: Profe, el menos se coloca cuando la región es negativa.

P: Sí, cuando la región está por debajo del eje equis, es decir; la función toma valores negativos del eje ye.

P: Así la integral da ciento veinticinco sobre seis. Ya veo que la están calculando en el computador, el procedimiento es el mismo: se define la función, hallan los puntos de corte con el eje equis, grafican y por último integran en relación con los puntos de corte.

P: Miren, a veces... ocurre que la región a calcular el área en una parte la función toma valores positivos y en otra valores negativos. Entonces, tenemos que calcular dos o más integrales y ese es el caso del ejemplo que vamos a hacer ahora.

Se puede observar como el profesor tiene que tomar la iniciativa en cuanto a determinar los puntos de corte de la gráfica con el eje x, y en el bosquejo de la gráfica ya que los estudiantes presentan muchas deficiencias en los conocimientos previos, sin embargo la dificultad que presenta el tema de estudio se puede manejar. En una de las notas del observador de esta clase dice: “Se observan grandes deficiencias en conocimientos matemáticos básicos” (ver anexo F). El docente seleccionó actividades apropiadas para los contenidos matemáticos considerando las diferencias individuales y trató en la medida de las posibilidades que los alumnos, como señala D’Amore (2006) se sintieran libre de usar sus propios recursos mentales, independientemente de sus conocimientos previos.

En cuanto a la evaluación a continuación veremos dos de las evaluaciones cortas que se hicieron al final de la clase y que podían responder haciendo uso del computador. Eran asignaciones individuales y diferentes a cada estudiante, en la siguiente se pedía calcular el área de la región limitada por $y = 3(x^3 - x)$, el eje x, entre $x = -1$ y $x = 1$. Se observa que esta estudiante prácticamente resolvió el problema. La gráfica la obtuvo del computador, pero se nota que se ha apropiado de los conocimientos, al dividir en dos áreas y escribir las integrales correspondientes a cada región. Lo que se les planteó es que calculen lo pedido, en este caso si por razones de tiempo no podía calcular el valor del área podía hacerlo con el Maple y escribirlo siempre que se presente el razonamiento como ella lo hizo. Veamos:

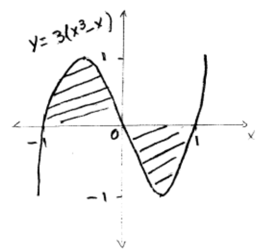
Marwins Mora 19468862 31 01 08

$$Ak \int_{-1}^{0} 3(x^3-x)\,dx - \int_{0}^{1} 3(x^3-x)\,dx$$

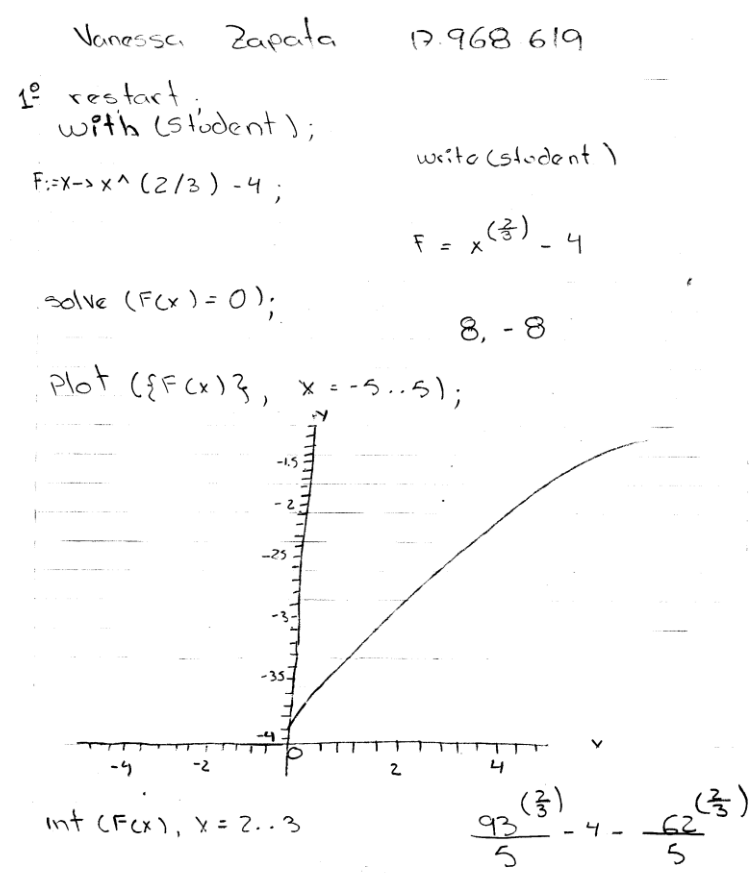
$$\int_{-1}^{0} (3x^3-3x)\,dx - \int_{0}^{1} (3x^3-3x)\,dx$$

$$\left(\frac{3x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right)\Big/_{-1}^{0} - \left(\frac{3x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right)\Big/_{0}^{1}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x(x^2-1)=0 \\ 3x(x-1)(x+1)=0 \\ 3x^3-3x \\ 0,\ 1,\ -1 \end{array}\right\} \text{Puntos de Corte}$$



El conocimiento de un software matemático debe ir acompañado de la comprensión del tema de estudio y de la adquisición de las destrezas necesarias para poder afrontar ejercicios y problemas. La siguiente evaluación pertenece a una estudiante que aprendió los comandos del software Maple pero no tiene claro el tema en estudio. Se le pidió hallar el área de la región limitada por $y = x^{2/3} - 4$, el eje x entre $x = 2$ y $x = 3$.



La estudiante buscó la solución con el computador y no planteó un razonamiento formal. Sin embargo siguió los pasos: Definió la función, la graficó incluso presentó el resultado de la integral lo trascribió mal igual que la gráfica, el resultado presentado por el software sin reducirlo es:

$$\frac{9}{5}3^{(2/3)} - 4 - \frac{6}{5}2^{(2/3)}$$

Idoneidad mediacional

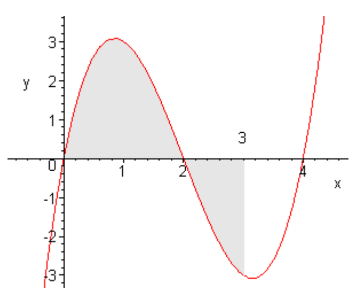
En esta clase se comenzó con las aplicaciones de la integral definida; el cálculo del área de una región limitadas por curvas. La experiencia como docente e investigador me indica que el bosquejo de la gráfica de una función o de varias funciones en el plano requiere de un período de ejercitación pero, es precisamente lo que los estudiantes no hacen, lo que podría ser una actividad motivadora y que además permite mejorar su capacidad de abstracción y aplicar conocimientos previamente aprendidos, se convierte en un obstáculo cognitivo. La utilización del software durante toda la clase contribuyó a que esto no sea un problema manejable y se pudo avanzar con la clase. Se pudo graficar un mayor número de funciones y definir la región a la cual se le calculó el área. Veamos este segmento de la trascripción de esta tercera sesión.

> **P:** Hagamos la gráfica, como ya hemos hecho otros ejemplos y estamos corto de tiempo, vamos a hacerla con el Maple. Para mayor rapidez le voy a escribir los comandos:

Escribe en la pizarra:

```
> plot(x^3-6*x^2+8*x,x=-1..6,y=-4..4);
```

> **P:** Pueden hacer eso.
>
> **P:** Se dan cuenta como es la gráfica, pueden ver que en uno vale tres, en equis sub-uno igual a cero vale cero, en equis sub-dos igual a dos vale cero y en equis sub tres igual cuatro vale cero y en tres vale menos tres.
>
> Reproduce la gráfica realizada con el Maple en la pizarra.



El profesor utilizó también la pizarra con marcadores de diferentes colores y material de apoyo para las prácticas con el computador y guías de ejercicios y problemas. La clase se desarrolló en el laboratorio, cada estudiante tenía una computadora para sí, la podía utilizar de apoyo en todo momento.

Idoneidad emocional

Las tareas diseñadas para esta sesión de clase, apuntan a despertar el interés de los discentes. La clase se desarrolló en el laboratorio, cada estudiante tenía una computadora para sí, la podía utilizar de apoyo en todo momento. Aunada a esta motivación el docente se facilita la comprobación por cuenta propia y la responsabilidad, ya que con ese apoyo se sentían comprometido a entregar las tareas individuales asignadas. El observador señala que mientras el profesor daba ciertas recomendaciones para la asignación ya los estudiantes estaban trabajando en ellas mediante el computador (ver anexo F).

Idoneidad Interaccional

Se dieron durante el desarrollo de esta sesión diferentes interacciones: Profesor-alumno, alumno-alumno, alumno-computador. Sin embargo debió haber existido una mayor interacción entre el profesor y el alumno, sobre todo durante las explicaciones teóricas. En la presentación de los ejemplos. Se percibió un aumento de esta interacción cuando los estudiantes trabajaban en el computador y realizaban las gráficas de las funciones para determinar la región a integrar.

Idoneidad ecológica

El contenido está adaptado al currículo de la institución, se puede ver en las descripciones de las clases la innovación tecnológica que permite a los estudiantes construir sus significados en base a la resolución de ejercicios y problemas con el apoyo del computador. Quizás en esta clase se hubiese podido utilizar algunos ejercicios del entorno social de los estudiantes y vinculados con su carrera (Informática). Esto habría sido muy útil para hacer notar la importancia que tiene la matemática en su carrera y desarrollo profesional.

Reflexiones sobre la idoneidad de la tercera sesión de clase

Sobre la idoneidad epistémica

1. El profesor antes de enunciar el teorema del valor medio para integrales (TVMI), recuerda el teorema del valor medio para la derivada (TVMD) y hace su interpretación geométrica y después señala "El teorema del valor medio para integrales dice algo similar, pero tiene que ver con lo que significa la integral" Lo cual pude generar un conflicto epistémico cuando en el estudiante que quizás se pregunte ¿Por qué lo que dice el TVMI es similar a lo que dice el TVMI? Por otra parte él no desarrolló ni comentó la demostración del TVMI, lo cual no permite a los estudiantes conocer a profundidad el teorema.
2. Las situaciones se presentaron de forma tradicional: El cálculo del área de una región limitada por una curva.
3. Se utilizó un lenguaje variado: gráfico verbal y simbólico.
4. Se cumplió con la formalidad matemática.
5. No se desarrollaron validaciones y comprobaciones de manera matemática, los estudiantes hacían comprobaciones haciendo uso del computador.
6. Se trabajó con la configuración epistémica que se originó del desarrollo del cálculo integral después del siglo XVII que se centra en el análisis funcional. Al graficar una función el alumno debe poner en juego conocimientos como gráfica, indeterminaciones, imágenes negativas y positivas, indeterminaciones, puntos de corte con los ejes, etc.

Sobre la idoneidad cognitiva

1. Los estudiantes presentan muchas deficiencias en los conocimientos previos, sin embargo la dificultad que presenta el tema de estudio se puede manejar.

2. El docente seleccionó actividades apropiadas para los contenidos matemáticos considerando la diferencias individuales y trato en la medida de las posibilidades que los alumnos, como señala D'Amore (2006) se sintieran libre de usar sus propios recursos mentales, independientemente de sus conocimientos previos.
3. En las evaluaciones individuales que hacían los estudiantes con el apoyo del computador se pudo notar diferentes en las formas de abordar las actividades, esto se ejemplificó con dos pruebas en la primera la gráfica la obtuvo del computador, pero se nota que se ha apropiado de los conocimientos, al dividir en dos áreas y escribir las integrales correspondientes a cada región de forma correcta. No llegó a calcular las integrales pero las dejó indicadas, aunque pudo dar el resultado con el software. En la segunda prueba se percibe que el estudiante se aprendió los comandos del software Maple pero no tiene claro el tema en estudio, buscó la solución con el computador y no planteó un razonamiento formal. Sin embargo siguió los pasos: Definió la función, la graficó incluso presentó el resultado de la integral pero lo trascribió mal de igual forma pasó con la gráfica. Es decir; que es posible que el estudiante haya pensado que con conocer los comandos del Maple podía resolver la asignación.

Sobre la idoneidad mediacional

1. La gráfica de una función o de varias funciones en el plano requiere de un período de ejercitación pero, es precisamente lo que los estudiantes no hacen. Graficar podría ser una actividad motivadora y que además permite mejorar su capacidad de abstracción y reforzar los conocimientos previos, Pero esto se convierte en un obstáculo cognitivo. La utilización del software durante toda la clase contribuyó a que esto sea un problema manejable y poder avanzar con la clase.

2. También se utilizó la pizarra con marcadores de diferentes colores y material de apoyo para las prácticas con el computador y guías de ejercicios y problemas. La clase se desarrolló en el laboratorio, cada estudiante tenía una computadora para sí, la podía utilizar de apoyo en todo momento.

Sobre la idoneidad emocional

1. Las tareas diseñadas apuntan a despertar el interés de los discentes.
2. La clase se desarrolló en el laboratorio, cada estudiante tenía una computadora para sí, la podía utilizar de apoyo en todo momento.
3. Con las actividades en el computador se promueve la comprobación por cuenta propia y la responsabilidad, ya que con ese apoyo los estudiantes se sentían comprometido a entregar las tareas individuales asignadas. El observador señala que mientras el profesor daba ciertas recomendaciones para la asignación ya los estudiantes estaban trabajando en ellas mediante el computador. Esto indica que quizás los estudiantes se sintieron en capacidad de afrontar la asignación, esto puede indicar que el discente puede haber mejorado su autoestima en relación a la Matemática.

Sobre la idoneidad interaccional

1. Se dieron durante el desarrollo de esta sesión diferentes interacciones: Profesor-alumno, alumno-alumno, alumno-computador. Sin embargo debió haber existido una mayor interacción entre el profesor y el alumno, sobre todo durante las explicaciones teóricas. En la presentación de los ejemplos. Se percibió un aumento de esta interacción cuando los estudiantes trabajaban en el computador y realizaban las gráficas de las funciones para determinar la región a integrar.

2. Existía independencia, pues muchas veces mientras el profesor hacía comentarios sobre las asignaciones ya ellos la estaban trabajando.

Sobre la idoneidad ecológica

1. El contenido está adaptado al currículo de la institución.
2. Se puede ver en las descripciones de las clases la innovación tecnológica que permite a los estudiantes construir sus significados en base a la resolución de ejercicios y problemas con el apoyo del computador.
3. Quizás en esta clase se hubiese podido utilizar algunos ejercicios del entorno social de los estudiantes y vinculados con su carrera (Informática). Esto habría sido muy útil para hacer notar la importancia que tiene la matemática en su carrera y desarrollo profesional.

TABLA 4

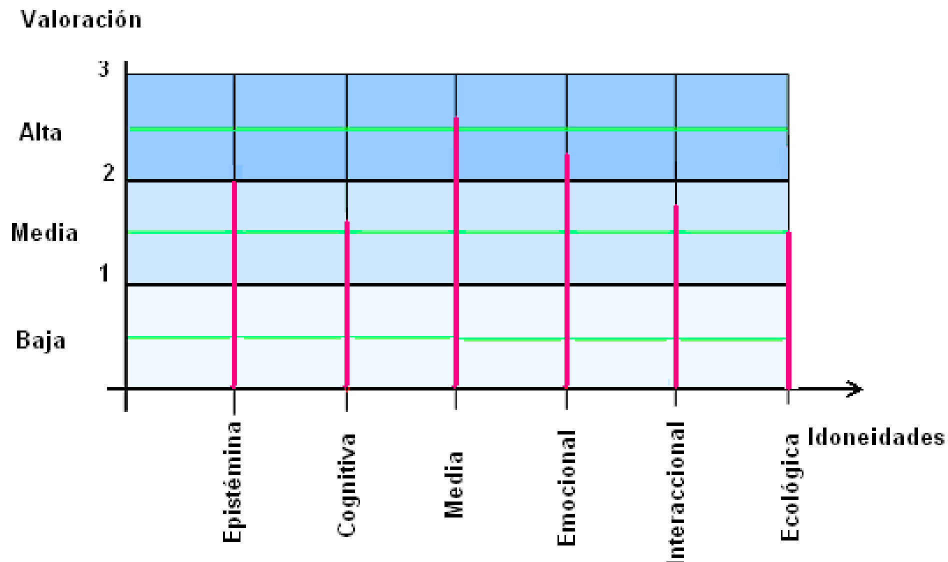
Tabla de estimación de la idoneidad didáctica de la tercera sesión de clase

Epistémica	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Situaciones		x	
Lenguaje			x
Formalidad		x	
Argumentos	x		
Armonía		x	
Total: $\frac{10}{5} = 2$	$\frac{1}{5}.1$	$\frac{3}{5}.2$	$\frac{1}{5}.3$
Cognitiva	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Conocimientos previos	x		
Diferencias		x	
Aprendizaje		x	

Total: $\frac{5}{3}=1{,}6$	$\frac{1}{3}.1$	$\frac{2}{3}.2$	
Mediacional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Recursos			x
Condiciones			x
Tiempo		x	
Total: $\frac{8}{3}=2{,}6$		$\frac{1}{3}.2$	$\frac{2}{3}.3$
Emocional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Interés y necesidad			x
Actitudes		x	
Emociones	x		
Total: $\frac{7}{3}=2{,}3$	$\frac{1}{3}.1$	$\frac{1}{3}.2$	$\frac{1}{3}.3$
Interaccional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Docente alumnos		x	
Entre alumnos		x	
Independencia		x	
Evaluación formativa	x		
Total: $\frac{7}{4}=1{,}75$	$\frac{1}{4}.1$	$\frac{3}{4}.2$	
Ecológica	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Adaptación al currículo			X
Innovación didáctica			X
Socio profesionalismo y cultura	X		
Conexiones	X		
Total: $\frac{3}{2}=1{,}5$	$\frac{2}{4}.1$		$\frac{2}{4}.2$

GRÁFICO 3

Idoneidad didáctica de la tercera sesión de clase



Idoneidad de la cuarta sesión de clase

En esta cuarta sesión de clase se continúo con el cálculo de áreas de regiones limitadas por dos o más funciones. Hasta el momento se ha observado que como en la mayoría de las clases, el tiempo previsto para las actividades que realiza el estudiante de acuerdo a la trayectoria didáctica se extiende, por lo que muchas veces se requiere continuar en la próxima clase.

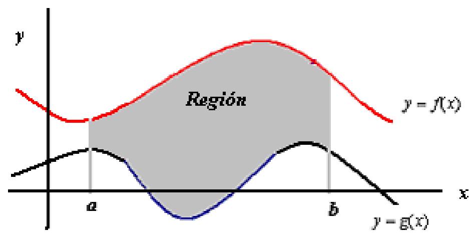
Para resumir un poco este análisis, nos centraremos en aquellos segmentos de clase más representativos de esta sesión de clase. Comencemos con el siguiente:

> **P:** ¡Buenos días! Hoy comenzamos con los ejemplos que nos faltaron en la clase anterior y después les voy a asignar unos ejercicios y problemas para que los trabajen, siempre con la ayuda del computador.

P: ¿Qué decíamos al terminar la clase de ayer? ¿Cómo podíamos hallar el área de una región que está comprendida entre dos curvas? ¿Cuál es el procedimiento?

P: Fíjense, yo tengo dos funciones...

Bosqueja en la pizarra:



P: ¿Cómo determino esa área?

A1: Con la integral entre a y b.

P: Sí, pero cómo es la integral.

A2: La integral de efe de equis menos ge de equis.

P: ¿Por qué de efe de equis menos ge de equis?

P: ¿por qué?... porque siempre a la que toma valores mayores le restamos la de que toma valores menores. En este caso podemos ver en el bosquejo que la curva roja es la mayor, es decir; efe de equis como lo dijo ella.

Escribe en la pizarra:

$$A(región) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

P: ¿está claro?

A1: Sí.

A2: Sí.

Idoneidad epistémica

En relación al segmento anterior, el profesor aborda el tema del cálculo de una región limitada por dos funciones de una manera muy simple y con muy poca formalidad matemática (la propia para este nivel). Habla que el integrando es la diferencia de la función que toma mayores valores (f), menos la otra (g), desperdicia la oportunidad para establecer relación con la parte formal de la integral de Riemann (la cuadratura con rectángulos) con lo cual reforzaría los aspectos teóricos de la integral definida y haría más clara la aplicación como una forma de comprobación de la teoría. La explicación carece de argumentos, debió haber establecido que la diferencia $f(x)-g(x)$ es la altura de cada uno de los rectángulos de la partición. En este segmento de clase no se contribuye a minimizar los conflictos epistémicos, sino más bien puede producirlos y generar obstáculos cognitivos de acuerdo por lo planteado por Azcarate y Camacho (2003).

Continuando haremos el análisis al siguiente segmento:

Determina el área de la región limitada por $k(x)=x^3-6x^2+8x$ *e* $i(x)=x^2-4x$.

P: Son dos curvas, una es una parábola ¿Qué debemos hacer?

A3: Buscar los puntos de corte.

P: Exacto buscar los puntos de corte.

Escribe en la pizarra:

Puntos de corte $x^3-6x+8x=x^2-4x$

P: Si quieren a la par que lo hagamos en la pizarra, también lo hacen con el computador, aprovechen ese recurso.

Escribe en la pizarra:

```
> restart:
> k:=x->x^3-6*x^2+8*x;i:=x->x^2-4*x;
> solve(k(x)=i(x));
> plot({k(x),i(x)},x=-1..6,y=-10..10);
```

P: Hagan eso para que después tengamos más claridad cuando lo calculemos en la pizarra.

P: ¿Qué puntos de corte obtuvieron?

A5: Cero, cuatro y tres.

P: Okey cero cuatro y tres, ahora hagámoslo analíticamente. ¿Cómo encontramos esos valores en la igualdad que está en el pizarrón?

A5: Factorizando.

P: Primero tenemos que...

A5: Agrupar.

P: Agrupar términos semejantes... ¿Cómo queda?

A5: Equis a la tres, menos siete equis al cuadrado más cuatro equis.

El profesor escribe en la pizarra:

$$x^3 - 7x^2 + 4x = 0$$

P: ¿Qué podemos hacer?

A5: Sacar factor común.

El profesor escribe en la pizarra:

$$x\left(x^2 - 7x + 4\right) = 0$$

P: ¿Cómo puedo escribir lo que está dentro del paréntesis?

A2: Como hicimos en el anterior buscando dos números...

P: ¿Cuáles son?

A5: Que sumado den menos siete...

P: Es que aquí hay un error, no es cuatro equis, sino doce equis por eso no pueden hallarlos.

Corrige en la pizarra:

$$x^3 - 7x^2 - 12x = 0$$
$$x\left(x^2 - 7x - 12\right) = 0$$

P: ¿Cuáles son?

A5: tres y cuatro

P: Menos tres y menos cuatro.

Escribe en la pizarra:

$$x(x-3)(x-4) = 0$$

P: Vemos que los valores que anulan la expresión son: cero, tres y cuatro.

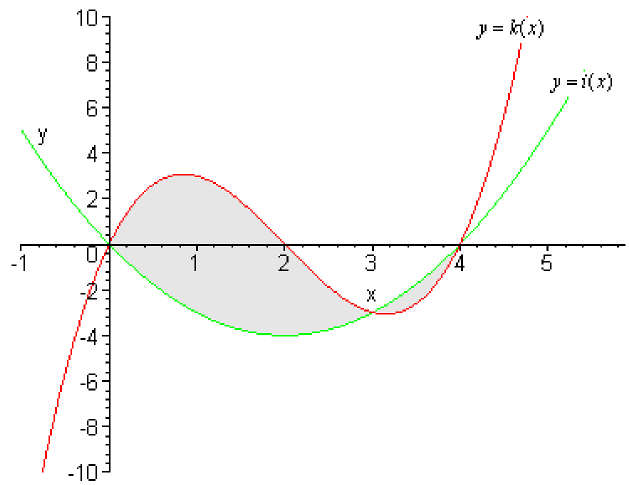
P: Hagan la gráfica, usen el computador.

P: La graficaron, les pido que la hagan primero en el computador porque no es sencilla.

A4: Sí.

P: Si vemos la gráfica pasa por cero. Yo la voy a bosquejar rápido en la pizarra:

Bosqueja:



P: Fíjense que podemos hacer la gráfica paso por paso y además tenemos la ayuda de Maple.

P: Ahora cómo hacemos para definir la integral o las integrales de acuerdo a la gráfica. Recuerden la función que está más arriba menos la que está más abajo.

A7: Equis al cubo menos seis equis al cuadrado más ocho equis.

P: ¿Está por encima?

A7: En cero tres.

P: Entonces hay que formar dos integrales una para cada región. A esta región la vamos a llamar uno y escribe en el gráfico de la pizarra y a esta dos y vuelve a escribir en la pizarra.

P: ¿Qué pasa en la región uno? ¿Quién está por encima? ¿Ka o i?

A4: Ka.

P: Y por debajo está i. ¿Qué pasa con la otra región?

A4: Está i.

P: i y por debajo está ka, es decir ocurre lo contrario, entonces ¿Con una sola integral podemos calcular el área?

A3: Hay que hacer dos.

P: ¿por qué?... por la forma como ellas encierran las regiones.

P: ¿Cómo pueden ser las integrales? Ayer vimos una propiedad de la integral definida donde se puede separar, es decir; que si yo tengo la integral entre a y be, pero ce es un valor intermedio, entonces ésta e igual a la integral entre a y ce más la integral entre ce y be.

P: Escribe en la pizarra:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

P: ¿Cómo serían las integrales a calcular?

A1: Entre cero y tres.

P: Muy bien...

Escribe en la pizarra:

$$A(\text{Re}\,gión) = \int_0^3$$

P: ¿Cómo es el integrando?

A5: A ka le restamos i.

P: ¿Quién es ka?.

A5: Equis al cubo, menos seis equis al cuadrado más ocho equis.

P: Bien, y a eso le vamos a restar: equis cuadrado menos cuatro equis, más la otra integral ¿Cuál es la otra integral?

A3: Entre tres y cuatro.

P: ¿Cómo queda?

A5: Por encima está i y por debajo ka.

P: Entonces i menos ka.

Mientras se da esta discusión el profesor fue escribiendo en la pizarra:

$$A(\text{Re}\,gión) = \int_0^3 \left[x^3 - 6x^2 + 8x - \left(x^2 - 4x\right)\right]dx + \int_3^4 \left[x^2 - 4x - \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)\right]dx$$

P: Todos trajeron el material anterior, el que les di de integral definida. Estas integrales las pueden hacer con el Maple, pero ahora cuando hagamos la práctica. Ahora vamos a terminar el ejercicio.

P: ¿Cómo quedaría la integral?

A3: Equis al cubo.

P: Al reducir términos. ¿Qué más?

A2: Menos siete equis al cuadrado más doce equis.

P: Y la otra.

P: Quedan los mismos términos pero con signos contrarios.

Escribe en la pizarra:

$$= \int_0^3 \left(x^3 - 7x^2 + 12x\right)dx + \int_3^4 \left(-x^3 + 7x^2 - 12x\right)dx$$

P: Como me interesa ganar tiempo para el trabajo que va realizar ahora, esas integrales ustedes las pueden concluir, pero fíjense al calcular las integrales, evaluarla y sumar los valores obtenidos esos les va a dar setenta y una sobre seis.

Idoneidad cognitiva

En esta secuencia de interacción entre el profesor P y los alumnos A2, A3, A4, A5 y A7 se puede notar que a pesar de que los alumnos tienen un bajo nivel de entrada, pueden alcanzar los significados pretendidos con una dificultad manejable. Una vez que con las actividades han reforzado su nivel de conocimiento en los primeros ejemplos, tienen una mayor y fluida participación al calcular áreas de regiones limitadas por funciones. Esto se destaca en el siguiente segmento:

P: Si quieren a la par que lo hagamos en la pizarra, también lo hacen con el computador, aprovechen ese recurso.

Escribe en la pizarra:

```
> restart:
> k:=x->x^3-6*x^2+8*x;i:=x->x^2-4*x;
> solve(k(x)=i(x));
> plot({k(x),i(x)},x=-1..6,y=-10..10);
```

P: Hagan eso para que después tengamos más claridad cuando lo calculemos en la pizarra.

P: ¿Qué puntos de corte obtuvieron?

A5: Cero, cuatro y tres.

P: Okey cero cuatro y tres, ahora hagámoslo analíticamente. ¿Cómo encontramos esos valores en la igualdad que está en el pizarrón?

A5: Factorizando.

P: Primero tenemos que...

A5: Agrupar.

P: Agrupar términos semejantes... ¿Cómo queda?

A5: Equis a la tres, menos siete equis al cuadrado más cuatro equis.

El profesor escribe en la pizarra:

$$x^3 - 7x^2 + 4x = 0$$

P: ¿Qué podemos hacer?

A5: Sacar factor común.

También podemos ver como el conocimiento nuevo va adquiriendo significado para los estudiantes. Una vez bosquejada la gráfica, ellos pudieron definir las integrales que definen el áreas de las dos regiones que determinaban las dos funciones, En el siguiente segmento se pone de manifiesto lo antes dicho.

P: ¿Cómo serían las integrales a calcular?

A1: Entre cero y tres.

P: Muy bien...

Escribe en la pizarra:

$$A(\text{Re}\,gión) = \int_0^3$$

P: ¿Cómo es el integrando?

A5: A ka le restamos i.

P: ¿Quién es ka?

A5: Equis al cubo, menos seis equis al cuadrado más ocho equis.

P: Bien, y a eso le vamos a restar: equis cuadrado menos cuatro equis, más la otra integral ¿Cuál es la otra integral?

A3: Entre tres y cuatro.

P: ¿Cómo queda?

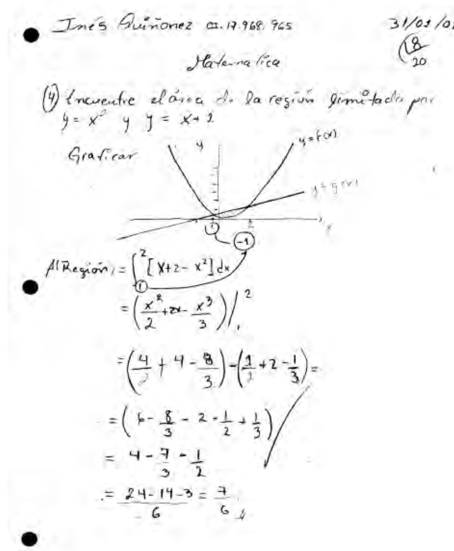
A5: Por encima está i y por debajo ka.

P: Entonces i menos ka.

Mientras se da esta discusión el profesor fue escribiendo en la pizarra:

$$A(\mathrm{Re}\,gi\acute{o}n) = \int_0^3 \left[x^3 - 6x^2 + 8x - \left(x^2 - 4x\right)\right]dx + \int_3^4 \left[x^2 - 4x - \left(x^3 - 6x^2 + 8x\right)\right]dx$$

Para tener una idea más clara del aprendizaje, a continuación se presentan unas evaluaciones cortas realizadas en esta sesión de clase. Era una asignación individual la cual los estudiantes podían apoyarse en el computador para resolver problemas. Las dos hojas de respuesta pertenecen a dos alumnos diferentes, sentados a distancias y a los cuales se les dio la misma situación: *Encuentre el área de la región limitada por* $y = x^2$ y $y = x + 2$. Se nota que a pesar del error cometido por la estudiante en la primera prueba, le dio el significado que coincide en gran parte con los implementados por el profesor. De acuerdo a la forma muy algorítmica en la cual el profesor presentó los ejemplos para calcular el área de una región limitada por funciones, así también los estudiantes en su mayoría lo hicieron: Graficar, determinar los puntos de cortes si es necesario, establecer la integral o integrales y calcularlas. El trabajo fue realizado por los alumnos al final de la clase de forma individual y con el apoyo del computador. Primera evaluación:



Inés Quiñonez C.I. 17.968.965 31/01/08

18/20

Matemática

(4) Encuentre el área de la región limitada por $y = x^2$ y $y = x+2$

Graficar

$A(\text{Región}) = \int_{1}^{2} [x+2-x^2]\,dx$

$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1}^{2}$

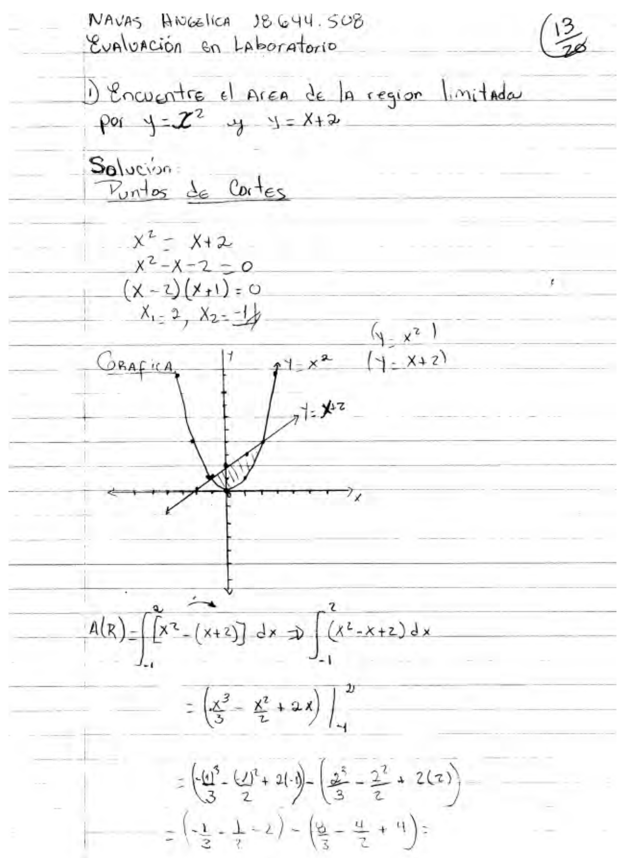
$= \left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3}\right) =$

$= \left(6 - \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

$= 4 - \frac{7}{3} - \frac{1}{2}$

$= \frac{24-14-3}{6} = \frac{7}{6}$

Segunda evaluación:



NAVAS ANGELICA 18.644.508

Evaluación en Laboratorio

13/20

1) Encuentre el área de la región limitada por $y = x^2$ y $y = x+2$

Solución:

Puntos de Cortes

$x^2 = x+2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x_1 = 2,\ x_2 = -1$

$(y = x^2)$

$(y = x+2)$

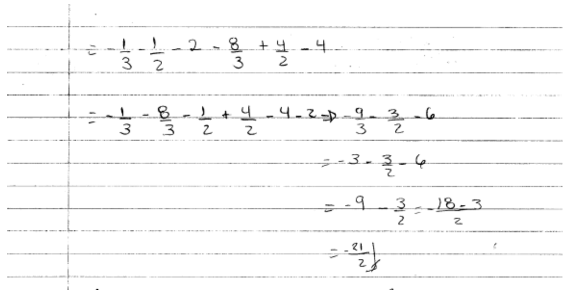
Gráfica

$A(R) = \int_{-1}^{2} [x^2 - (x+2)]\,dx \Rightarrow \int_{-1}^{2} (x^2 - x + 2)\,dx$

$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1}^{2}$

$= \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2} + 2(-1)\right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 2(2)\right)$

$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 4\right) =$



En esta segunda evaluación la alumna siguió también de forma algorítmica la resolución de la asignación, pero aparentemente no tiene claro, cómo constituir el integrando con las dos funciones. Es probable que se derive de que el profesor no aclaró ni profundizó que la diferencia de las dos funciones es la altura de los rectángulos de la cuadratura. Lo importante en todo caso es que las evaluaciones de esta sesión permitieron evaluar el aprendizaje de los estudiantes y en gran parte el proceso de enseñanza.

Idoneidad mediacional

Se aplicaron como en las otras sesiones de clase diferentes recursos materiales como: Computador, guías de apoyo y la pizarra. El ambiente de estudio fue el apropiado, el laboratorio de computación en donde cada estudiante tenía a su disposición un equipo. Las actividades se desarrollaron de acuerdo al tiempo previsto en la trayectoria didáctica.

Idoneidad emocional

Las tareas diseñadas para esta sesión de clase, apuntan a despertar el interés de los discentes. La clase se desarrolló en el laboratorio, cada estudiante tenía una computadora para sí, la podía utilizar de apoyo en todo momento. Aunada a esta motivación el docente se facilita la comprobación por cuenta propia y la responsabilidad, ya que con ese apoyo se sentían comprometido a entregar las tareas individuales asignadas.

Idoneidad interaccional

Se dieron durante el desarrollo de esta sesión diferentes interacciones: Profesor-alumno, alumno-alumno, alumno-computador.

Idoneidad ecológica

El contenido está adaptado al currículo de la institución, se puede ver en las descripciones de las clases la innovación tecnológica que permite a los estudiantes construir sus significados en base a la resolución de ejercicios y problemas con el apoyo del computador. Quizás en esta clase se hubiese podido utilizar algunos ejercicios del entorno social de los estudiantes y propios a su carrera.

Reflexiones sobre la idoneidad de la cuarta sesión de clase

Sobre la idoneidad epistémica

1. Se aborda la explicación del cálculo de regiones limitadas por dos funciones sin la formalidad matemática requerida para el nivel educativo (segundo semestre de una carrera técnica universitaria) y los significados institucionales de referencia (la integral definida vista como el límite de una sumatoria derivada del proceso de cuadratura de una región con rectángulos) de los diferentes currículos de las carreras técnicas universitarias.
2. Hubiese sido oportuno en esta aplicación de la integral definida, establecer relación con la parte formal de la integral de Riemann y relacionar las dos funciones con la altura de los rectángulos de la cuadratura.
3. Hay carencias en la explicación de argumentos, demostración y validación. Sólo se define el integrando como $f(x)-g(x)$ sin el apoyo

de la teoría anterior $f(x)-g(x)$ son las alturas de los rectángulos de la cuadratura. Esto no propicia la armonía entre los diferentes objetos matemáticos de la configuración que se manejó.

4. Las situaciones presentadas son las clásicas, adaptadas al nivel educativo. Se pudo haber presentado situaciones problemáticas propias al entorno sociocultural del estudiante y al perfil de su carrera.
5. Se utilizó un lenguaje apropiado: verbal, gráfico y simbólico en la resolución de problemas

Sobre la idoneidad cognitiva

1. Bajo nivel de los estudiantes en los conocimientos previos: Graficar funciones, determinar puntos de cortes entre las gráficas de éstas y los ejes cartesianos y pocas destrezas operatorias. En función a estas carencias se desarrollaron actividades apoyadas en el computador, que permitieron ir reforzando los conocimientos y que con una dificultad manejable los alumnos pudieran ir dando significados a los nuevos conocimientos. Después de la mitad de la sesión de clase se notó una mayor y significativa participación de los estudiantes en la resolución de cada situación.
2. Las evaluaciones en esta clase permitieron evaluar el aprendizaje de los estudiantes y en gran parte la del proceso de enseñanza: Una conclusión que se desprende de las dos pruebas observadas, es la forma muy algorítmica con que los estudiantes resolvieron el problema, es posible que se deriva a que el profesor presentó los ejemplos de una manera muy esquemática.

Sobre la idoneidad mediacional

Se aplicaron como en las otras sesiones de clase diferentes recursos materiales como: Computador, guías de apoyo y la pizarra. El ambiente de estudio fue el apropiado, el laboratorio de computación en donde cada estudiante tenía a su disposición un equipo. Las actividades se desarrollaron de acuerdo al tiempo previsto en la trayectoria didáctica.

Sobre la idoneidad emocional

Las tareas diseñadas para esta sesión de clase, apuntan a despertar el interés de los discentes. La clase se desarrolló en el laboratorio, cada estudiante tenía una computadora para sí, la podía utilizar de apoyo en todo momento. Aunada a esta motivación el docente se facilita la comprobación por cuenta propia y la responsabilidad, ya que con ese apoyo se sentían comprometido a entregar las tareas individuales asignadas.

Sobre la idoneidad interaccional

Se dieron durante el desarrollo de esta sesión diferentes interacciones: Profesor-alumno, alumno-alumno, alumno-computador. De acuerdo a las observaciones participantes del investigador, Los estudiantes han ido asimilando la necesidad de estas interacciones.

Sobre la idoneidad ecológica

El contenido está adaptado al currículo de la institución, se puede ver en las descripciones de las clases la innovación tecnológica que permite a los estudiantes construir sus significados en base a la resolución de ejercicios y problemas con el apoyo del computador. Quizás en esta clase se hubiese podido utilizar algunos ejercicios del entorno social de los estudiantes y propios a su carrera.

TABLA 5

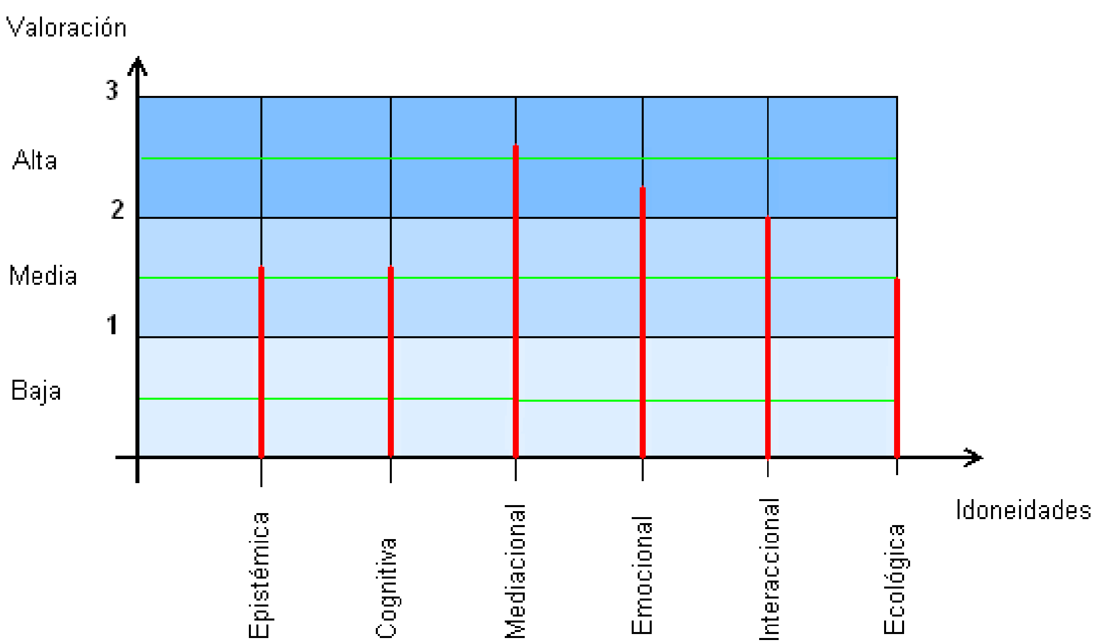
Tabla de estimación de la idoneidad didáctica de la cuarta sesión de clase

Epistémica	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Situaciones		x	
Lenguaje			x
Formalidad	x		
Argumentos	x		
Armonía	x		
Total: $\frac{8}{5}=1,6$	$\frac{3}{5}.1$	$\frac{1}{5}.2$	$\frac{1}{5}.3$
Cognitiva	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Conocimientos previos	x		
Diferencias		x	
Aprendizaje		x	
Total: $\frac{5}{3}=1,6$	$\frac{1}{3}.1$	$\frac{2}{3}.2$	
Mediacional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Recursos			x
Condiciones			x
Tiempo		x	
Total: $\frac{8}{3}=2,6$		$\frac{1}{3}.2$	$\frac{2}{3}.3$
Emocional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Interés y necesidad			X
Actitudes		X	
Emociones	X		
Total: $\frac{7}{3}=2,3$	$\frac{1}{3}.1$	$\frac{1}{3}.2$	$\frac{1}{3}.3$

Interaccional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Docente alumnos		x	
Entre alumnos		x	
Independencia		x	
Evaluación formativa		x	
Total: 2		$\frac{4}{4}.2$	
Ecológica	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Adaptación al currículo			X
Innovación didáctica			X
Socio profesionalismo y cultura	X		
Conexiones	X		
Total: $\frac{3}{2}=1{,}5$	$\frac{2}{4}.1$		$\frac{2}{4}.2$

GRÁFICO 4

Idoneidad didáctica de la cuarta sesión de clase



Idoneidad didáctica en la novena sesión de clase

En esta sesión de clase se resolvieron ejercicios y problemas propuestos en las diferentes guías de apoyo que se suministraron en cada clase. Esta actividad se desarrolló de forma tranquila, lo cual les permitió a los estudiantes, hacer y hablar de forma libre. La utilización del computador le favoreció la fluidez y la interacción durante toda la faena que transcurrió durante toda la mañana. Analizamos la idoneidad didáctica durante la resolución de tres situaciones. Veamos la primera de ellas:

P: ¿Qué ejercicio o problema quieren resolver?

A1: El primero.

P: Léanlo primero

El ejercicio dice: Calcula el área de la región comprendida por la gráfica de la curva $f(x) = \cos x$, el x en el intervalo $[0, \pi]$

P: ¿Qué se puede hacer primero?

A1: La gráfica.

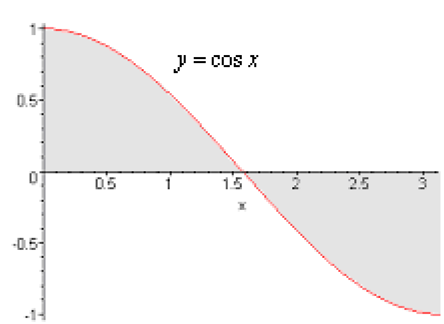
P: Hagan la gráfica

A2: Una parte está en la parte positiva del eje ye y otra toma valores negativos.

P: ¿Entonces?

A3: Hay que hacer dos integrales una entre cero y pi medio y la otra con un signo menos delante entre pi medio y pi.

El profesor bosqueja en la pizarra:



P: ¿Cómo es la integral o las integrales?

A4: Entre cero y pi medio de coseno de equis menos entre pi medio y pi también de coseno de equis.

P: Bien y escribe en la pizarra:

$$A = \int_{0}^{\pi/2} \cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx$$

P: Calculen esas integrales. ¿Cuál es la integral del coseno?

A1: seno.

A2: **Menos seno.**

P: No es seno.

Escribe en la pizarra.

$$\begin{aligned} A &= senx \Big|_{0}^{\pi/2} - senx \Big|_{\pi/2}^{\pi} \\ &= sen\left(\pi/2\right) - sen(0) - \left[sen(\pi) - sen\left(\pi/2\right)\right] \\ &= 1 - 0 - \left[0 - 1\right] \\ &= 2 \end{aligned}$$

P: Veo que muchos ya lo habían hecho con el Maple. Vamos a resolver otro problema

En cuanto a la *idoneidad epistémica* de este segmento, se puede decir que la situación es representativa del tema de estudio, es la aplicación clásica de la integral definida; el cálculo del área de una región limitada por una función. Se usó el lenguaje apropiado, sobre todo los estudiantes quienes tuvieron una mayor participación. No se aprovechó las circunstancias para reforzar la teoría, si bien los estudiantes que participaron están claro en qué se debe utilizar la siguiente propiedad de la integral definida: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad a < c < b$ no sabemos si el resto de los estudiantes lo tiene claro. Las argumentaciones se circunscribieron a validaciones y comprobaciones por parte de los estudiantes con el computador: La gráfica, el resultado de las integrales, etc.

En referencia a la *idoneidad cognitiva* la mayoría de los estudiantes bosquejó la gráfica con el computador, ya que no han desarrollado hasta el momento las competencias necesarias para bosquejar gráficas de funciones, sin embargo con el uso de la tecnología la gran mayoría fue capaz de resolver la situación y determinar el valor del área de la región solicitada. La participación da cuenta de que los estudiantes le han dado significados a los nuevos conocimientos, a pesar de las deficiencias de conocimientos anteriores.

Se considera que la *Idoneidad mediacional* se cumplió en niveles altos hubo recursos: guías, el computador para cada estudiante en un laboratorio amplio y fresco y se dispuso de toda la mañana de 8:00 AM a 12:00 M con receso.

Se dieron las interacciones previstas Profesor-Alumno, Alumno-alumno, Alumno-computador y una actitud reflexiva como base para la evaluación formativa, por ejemplo:

P: Hagan la gráfica

A2: Una parte está en la parte positiva del eje ye y otra toma valores negativos.

P: ¿Entonces?

A3: Hay que hacer dos integrales una entre cero y pi medio y la otra con un signo menos delante entre pi medio y pi.

Por otra parte se fomentó la independencia y que se puede desprender de lo señalado por el profesor:

P: Veo que muchos ya lo habían hecho con el Maple. Vamos a resolver otro problema.

Veamos otro segmento de la clase donde se le dio respuesta a otro planteamiento propuesto en las guía de ejercitación.

P: Veo que muchos ya lo habían hecho con el Maple. Vamos a resolver otro problema. ¿Cuál quieren hacer?

A2: El siete.

P: El siete es una pregunta teórica léanla y analicen, también pueden construir en el Maple dos funciones con esas características, las grafican y saquen sus conclusiones. La pregunta siete dice: *Sean* f y g *dos funciones continuas en* $[a,b]$ *con* $f(x) = -g(x)$ *en todo el intervalo. ¿Cómo son las áreas de las regiones que ellas encierran con respecto al eje* x *entre a y b?*

A3: ¿Si ge de equis es equis al cuadrado, entonces efe de equis es menos equis cuadrado?

P: Exacto si quiere defínelas con el Maple y las gráficas.

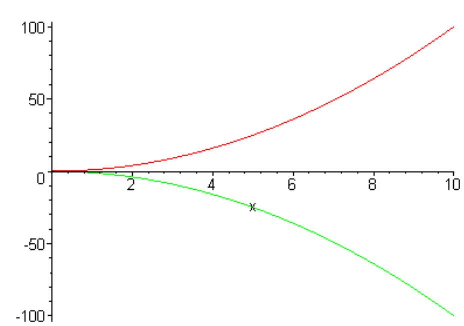
El estudiante hace lo siguiente y muchos otros también lo hacen:

```
> g:=x->x^2;f:=x->-x^2;
```

$$g := x \to x^2$$

$$f := x \to -x^2$$

```
> plot({f(x),g(x)},x=0..10);
```



P: De acuerdo a lo que hicieron ¿Cómo son las áreas?

A3: Iguales.

A2: Iguales.

P: El valor numérico del área de las dos regiones es el mismo y eso pasará con cualquier par de funciones con esas características.

En la secuencia de interacciones de P, A2 y A3 se pueden descubrir aspectos interesantes para evaluar la idoneidad didáctica. El profesor toma la iniciativa y orienta a los estudiantes a que más que un problema en una pregunta muy vinculada a la teoría, es decir; lo que representa la Integral definida. En esta oportunidad la argumentación (validación o comprobación) surgió espontáneamente de un estudiante y que el profesor aprovecho para que todos trabajaran esa experiencia y así llegaran a la conclusión. Así en cuanto a la *idoneidad epistémica* tenemos, una situación representativa de los contenidos implementados y una buena argumentación por parte de los estudiantes con el apoyo del computador.

En cuanto a la *idoneidad cognitiva* se notó una mayor madurez, a pesar del bajo nivel de los conocimientos previos de los estudiantes. La actividad permitió valorar el aprendizaje de los estudiantes incluso la rapidez con que A3 particularizó lo planteado con un ejemplo. Se aprovechó el aporte A3 y la utilización del Maple, para atender a las diferencias individuales que en relación a la pregunta se pudieron presentar.

Los recursos mediacionales siguen siendo los mismos señalados en la primera actividad y como se percibe, se utilizan de acuerdo a las necesidades y circunstancias tanto del profesor como de cada estudiante.

Ahora analicemos el último planteamiento:

P: Quiero que hagamos ahora el diez. ¡Léanlo!

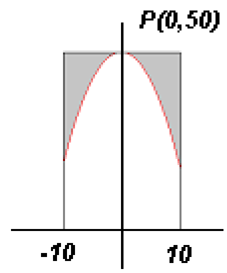
A5: Se tiene una parcela rectangular de 20x50 metros. Se quiere cubrir con baldosas un área de 800 m^2 y el resto dejarlo como un jardín. La región que se va a cubrir con baldosas tiene forma de parábola como lo indica la figura. ¿Qué parábola debemos trazar?

P: ¿Cómo lo podemos resolver?

A2: Por el método de Riemann.

P: No la integral la vamos a resolver utilizando el Teorema Fundamental de Cálculo.

Dibuja en la pizarra la figura que aparece en la guía:



P: Pero el punto Pe de abscisa cero y ordenada cincuenta es el vértice de la parábola. Sabemos que una parábola se puede escribir como a, equis al cuadrado, más be, equis más ce y el vértice se puede escribir en término de los coeficientes.

Escribe en la pizarra:

$$y = ax^2 + bx + c \text{ \textit{Su vértice es:} } V(\ , \ )$$

P: ¿El vértice a qué es igual?

A7: A, a y b.

A2: a y c.

P: ¿Cuál es el vértice?

Escribe en la pizarra:

$$V(0{,}50) \Rightarrow b = 0 \wedge c = 50$$

P:¿Entonces la parábola es?...recuerden que tenemos que determinar la parábola. ¿Qué parábola debemos trazar para colocar las baldosas como nos piden? Conocemos b y c ¿Cómo nos quedaría la ecuación?

A2: Ye igual a, a por equis cuadrado más... no.

A1: Ye igual a, a por equis cuadrado más cincuenta.

P: Bien.

Escribe en la pizarra:

$$y = ax^2 + 50$$

P: Esa es la parábola, pero falta conocer el valor de a. ¿Cómo determinamos a? ¿Qué otro dato conocemos?

A3: El área que es ochocientos

P: ¿Cómo puedo vincular ese dato para hallar a?

A4: La integral entre cero y cincuenta.

P: Estamos trabajando en función del eje x

A3: La integral entre cero y diez de a por equis cuadrado más cincuenta es igual a ochocientos.

P: ¿Por qué?

A3: La integral representa el área de la región que ya sabemos que es ochocientos.

P: Muy bien, entonces calculamos la integral y despejamos a.

Escribe en la pizarra:

$$\int_{-10}^{10} \left(ax^2 + 50\right) dx = 800$$

P: ¿Cómo lo despejamos?

A5: A equis al cubo sobre tres, más cincuenta equis igual a ochocientos. A petición del profesor A5 escribe en la pizarra:

$$a\frac{x^3}{3} + 50x \Big|_{-10}^{10} = 800$$

P: Lo evaluamos.

A5: Continúa y escribe en la pizarra:

$$\left(a\frac{1000}{3} + 500\right) - \left(-a\frac{1000}{3} - 500\right) = 800$$

$$\frac{2000}{3}a + 1000 = 800$$

$$\frac{2000a + 3000}{3} = 800$$

$$2000a + 30000 = 2400$$

$$2000a = -600$$

$$a = -\frac{3}{10}$$

P: esto quiere decir que la parábola que debemos trazar es...

A5: Ye igual a menos tres sobre diez por equis cuadrado más cincuenta.

El profesor escribe en la pizarra:

$$y = -\frac{3}{10}x^2 + 50$$

En la secuencia anterior de P, A1, A2, A3, A4 ,A5 y A7 se tiene la discusión para buscar solución al problema número diez del material denominado *Batería de ejercicios y problemas* (ver Anexo). Es una situación que además de ser representativa de los significados institucionales de referencia es un problema de modelización de una situación problemática que se les puede presentar a los estudiantes en su entorno social y profesional. Para Blum, Galbranith, Henn y Niss (2006) el problema de aplicar el término modelización es que éste admite una variedad de interpretaciones y énfasis. A veces se usa para denotar los procesos que están involucrados en la resolución de un problema real. En este sentido el término modelado se refiere al uso de elementos estratégicos que están necesariamente involucrados en el proceso de búsqueda de la solución. Así se nota como se lograron armonizar los diferentes objetos matemáticos: Parábola, ecuación, vértice, área y la integral definida para modelar el problema y darle solución. En cuanto al lenguaje y la formalidad matemática se utilizó lenguaje verbal, simbólico y gráfico. Se reforzaron conceptos teoremas y procedimientos. Se puede decir que se manejo la parte epistemológica con una idoneidad de media hacia alta.

En relación a la idoneidad cognitiva, se sigue apreciando bajo nivel en los conocimientos previos. Los estudiantes no recordaron cómo se puede expresar el vértice de una parábola en término de sus coeficientes, por lo que el profesor tuvo que reforzar esa debilidad. Se puede percibir durante la solución del problema los significados que le van dando los estudiantes a los nuevos conocimientos sobre todos en estos dos segmentos:

P: Esa es la parábola, pero falta conocer el valor de a. ¿Cómo determinamos a? ¿Qué otro dato conocemos?
A3: El área que es ochocientos

A3: La integral entre cero y diez de a por equis cuadrado más cincuenta es igual a ochocientos.
P: ¿Por qué?
A3: La integral representa el área de la región que ya sabemos que es ochocientos.
P: Muy bien, entonces calculamos la integral y despejamos a.

Los recursos mediacionales siguen siendo los mismos señalados en la primera actividad y como se percibe, se utilizan de acuerdo a las necesidades y circunstancias tanto del profesor como de cada estudiante.

Reflexiones sobre la idoneidad de la novena sesión de clase

Sobre la idoneidad epistémica

1. Las situaciones presentadas son representativas de los significados institucionales implementados. La primera es una aplicación clásica, la segunda es una pregunta de aplicación directa de la teoría y la última es problema donde se modela una situación de la vida cotidiana.
2. Se usó el lenguaje apropiado, sobre todo los estudiantes quienes tuvieron una mayor participación.
3. A excepción de la primera situación en las otras dos se aprovechó cada oportunidad para reforzar los conocimientos teóricos de la integral definida y los conocimientos previos.
4. Las argumentaciones se circunscribieron a validaciones y comprobaciones por parte de los estudiantes con el computador: La gráfica, el resultado de las integrales, etc.

5. se nota como se lograron armonizar los diferentes objetos matemáticos, sobre todo en la última evaluación donde se armonizaron los conceptos: Parábola, ecuación, vértice, área y la integral definida para modelar el problema y darle solución.

Sobre la idoneidad cognitiva

1. Hay deficiencias en los conocimientos previos, sin embargo con el uso de la tecnología la gran mayoría fue capaz de resolver las situaciones y determinar el valor del área de la región solicitada. La participación da cuenta de que los estudiantes le han dado significados a los nuevos conocimientos, a pesar de las deficiencias de conocimientos anteriores.
2. Se aprovechó el aporte de los estudiantes que participaban en las resoluciones de los planteamientos y la utilización del Maple, para atender a las diferencias individuales que en relación a la pregunta se pudieron presentar.

Sobre la idoneidad mediacional

Se aplicaron como en las otras sesiones de clase diferentes recursos materiales como: Computador, guías de apoyo y la pizarra. El ambiente de estudio fue el apropiado, el laboratorio de computación en donde cada estudiante tenía a su disposición un equipo. Las actividades se desarrollaron de acuerdo al tiempo previsto en la trayectoria didáctica.

Sobre la idoneidad emocional

Las tareas diseñadas para esta sesión de clase, apuntan a despertar el interés de los discentes. La clase se desarrolló en el laboratorio, cada estudiante tenía una computadora para sí, la podía utilizar de apoyo en todo momento. Aunada a esta motivación el docente se facilita la comprobación por cuenta propia y la responsabilidad, ya que con ese apoyo se sentían comprometido a entregar las tareas individuales asignadas.

Sobre la idoneidad interaccional

Se dieron durante el desarrollo de esta sesión diferentes interacciones: Profesor-alumno, alumno-alumno, alumno-computador. En esta sesión de clase donde se resolvieron ejercicios y problemas se notó un aumento de en todas las interacciones

Sobre la idoneidad ecológica

El contenido está adaptado al currículo de la institución, se puede ver en las descripciones de las clases la innovación tecnológica que permite a los estudiantes construir sus significados en base a la resolución de ejercicios y problemas con el apoyo del computador. Quizás en esta clase se hubiese podido utilizar algunos ejercicios del entorno social de los estudiantes y propios a su carrera.

TABLA 6

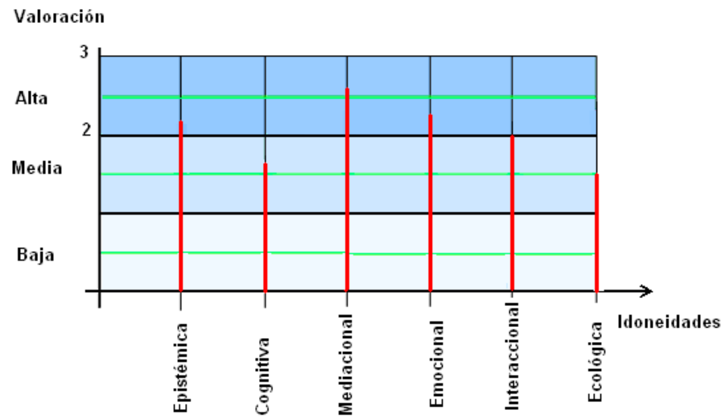
Tabla de estimación de la idoneidad didáctica de la novena sesión de clase

Epistémica	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Situaciones			x
Lenguaje		x	
Formalidad		x	
Argumentos		x	
Armonía		x	
Total: $\frac{11}{5} = 2,2$		$\frac{4}{5}.2$	$\frac{1}{5}.3$
Cognitiva	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Conocimientos previos	x		

Diferencias		x	
Aprendizaje		x	
Total: $\frac{5}{3}=1{,}6$	$\frac{1}{3}.1$	$\frac{2}{3}.2$	
Mediacional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Recursos			X
Condiciones			X
Tiempo		X	
Total: $\frac{8}{3}=2{,}6$		$\frac{1}{3}.2$	$\frac{2}{3}.3$
Emocional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Interés y necesidad			x
Actitudes		x	
Emociones	x		
Total: $\frac{7}{3}=2{,}3$	$\frac{1}{3}.1$		$\frac{1}{3}.3$
Interaccional	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Docente alumnos		x	
Entre alumnos		x	
Independencia		x	
Evaluación formativa		x	
Total: 2		$\frac{4}{4}.2$	
Ecológica	**Baja (1)**	**Media (2)**	**Alta (3)**
Adaptación al currículo			x
Innovación didáctica			x
Socio profesionalismo y cultura	x		
Conexiones	x		
Total: $\frac{3}{2}=1{,}5$	$\frac{2}{4}.1$		$\frac{2}{4}.2$

GRÁFICO 5

Idoneidad didáctica de la novena sesión de clase



Síntesis y conclusiones

Para evaluar la idoneidad didáctica del proceso de estudio, se analizaron cinco sesiones de clases, considerando los aspectos más relevantes de cada una de ellas. A manera de conclusión se presenta a continuación una síntesis,

En cuanto a la *idoneidad epistémica*, el grado de representatividad de los contenidos matemáticos: Situaciones, lenguaje, formalidad, argumento y armonía, se pueden establecer las siguientes conclusiones.

1. Uno de los conflictos de tipo epistémico que se percibe, tiene que ver con el proceso de la integral de Riemann que se debate entre los argumentos geométricos y los analíticos funcionales, ambos basados en infinitésimos. Para un buen proceso de estudio se debe armonizar entre dos configuraciones epistémicas: La generada por los problemas originarios y la impulsada por el desarrollo posterior a siglo XVII. En la clase se hizo una problematización adecuada para los aspectos geométricos e infinitos, los estudiantes visualizaron los procesos de cuadraturas. En este sentido Hershkowitz, Parzzysz y Van Dermolen (1996) señalan que “...visualización es la transferencia de objetos,

conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa" (p.163). En cambio en los aspectos analítico de la integral de Riemann, la explicación se torna muy abstracta aún cuando el lenguaje fue adecuado al nivel educativo.

2. La manera como se ejemplificó la integral de Riemann puede generar conflictos epistémicos, ya que se utilizaron las nociones de partición proveniente de la teoría de conjuntos, sumatorias, límite de una sumatoria e infinitésimos para calcular $\int_{-2}^{1} x^2 dx$. Un proceso complicado y muy diferente al que venía utilizando para calcular integrales indefinidas y quizás los estudiantes nunca lo han estudiado. Se debió desarrollar actividades previas tendientes a nivelar los requerimientos previos.
3. El profesor no demostró, ni hizo ningún comentario sobre la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) por lo que se puede generar un conflicto epistémico, cuando lo presenta como la vinculación entre la integral definida y la indefinida. En definitiva este conflicto influye en lo cognitivo, ya que el estudiante no ve la necesidad de estudiar la integral de Riemann, si en la práctica aplica el TFC.
4. Utiliza el lenguaje propio para estudiantes del segundo semestre de una carrera técnica universitaria que ya han cursado y aprobado el curso de *Cálculo Diferencial*, sin embargo el profesor requirió de diversos tipos de lenguaje como: Gráficos y símbolos, así como las conversiones entre ellos para facilitar la enseñanza y comprensión del tema en estudio.

5. El profesor antes de enunciar el teorema del valor medio para integrales (TVMI), recuerda el teorema del valor medio para la derivada (TVMD) y hace su interpretación geométrica, después señala "El teorema del valor medio para integrales dice algo similar, pero tiene que ver con lo que significa la integral" Lo cual pude generar un conflicto epistémico cuando el estudiante no percibe la similitud y se pregunta ¿Por qué dice: el TVMI es similar a lo que dice el TVMI? Por otra parte él no desarrolló ni comentó la demostración del TVMI, lo cual no permite a los alumnos conocer a profundidad el teorema.
6. No se desarrollaron validaciones y comprobaciones de manera matemática, los estudiantes hacían comprobaciones haciendo uso del computador.
7. En la sesión cuarta se aborda la explicación del cálculo de regiones limitadas por dos funciones sin la formalidad matemática requerida para el nivel educativo (segundo semestre de una carrera técnica universitaria) y los significados institucionales de referencia (la integral definida vista como el límite de una sumatoria derivada del proceso de cuadratura de una región con rectángulos.
8. Hubiese sido oportuno en las aplicaciones de la integral definida, establecer relación entre la explicación de cómo calcular el área de una región limitada por dos funciones con la parte formal de la integral de Riemann, la diferencia de las dos funciones representa la altura de los rectángulos de la cuadratura.
9. Hay carencias en la explicación de argumentos y demostraciones. Por ejemplo sólo se define el integrando como $f(x)-g(x)$ si f toma valores mayores que g en el intervalo de integración, sin el apoyo de la teoría anterior, es decir; explicar la relación de esa diferencia con

las alturas de los rectángulos. Esto no propicia la armonía entre los diferentes objetos matemáticos de la configuración que se manejó.

10. Las situaciones presentadas en la cuarta sesión son las clásicas, adaptadas al nivel educativo. Se pudo haber presentado situaciones problemáticas propias al entorno sociocultural del estudiante y al perfil de su carrera.
11. Se utilizó un lenguaje apropiado: verbal gráfico y simbólico en la resolución de problemas.
12. Las situaciones problemáticas presentadas en la novena sesión, son representativas de los significados institucionales implementados. La primera es una aplicación clásica, la segunda es una pregunta de aplicación directa de la teoría y la última es un problema donde se modela una situación de la vida cotidiana.
13. Los estudiantes hicieron uso adecuado del software Maple, durante su participación en la resolución de problemas.
14. En la novena sesión de clase a excepción de la primera situación planteada, en las otras dos se aprovecho cada oportunidad para reforzar los conocimientos teóricos de la integral definida y los conocimientos previos.
15. Las argumentaciones se circunscribieron a validaciones y comprobaciones por parte de los estudiantes con el computador: Las gráficas, el cálculo de las integrales, etc.
16. Se percibe en esta novena sesión de clase como se logró armonizar los diferentes objetos matemáticos, sobre todo en el último planteamiento donde se armonizaron los conceptos: Parábola, ecuación, vértice, área y la integral definida para modelar el problema y darle solución.

La *idoneidad cognitiva* es proximidad y sus componentes son: Conocimiento, diferencia y evaluación. Se establecen las siguientes conclusiones:

1. Se percibe que en la primera sesión de clase donde se utilizó el software matemático para la simulación geométrica de cuadraturas, éste permitió ubicar este proceso en la *zona de desarrollo potencial* de los estudiantes, superando las limitaciones de la graficación y las deficiencias geométricas. Se percibió como los estudiantes con el apoyo del computador (software Maple versión 8) y la planificación de las actividades de clase fueron adquiriendo el significado del proceso de cuadratura de una región curvilínea (limitada por una curva) y el concepto de infinitésimo con bastante aproximación a los significados institucionales implementados. Esto se puede interpretar, que el hecho geométrico desarrollado gráficamente con el apoyo del computador está en el desarrollo potencial de los estudiantes a pesar de las deficiencias que en este sentido puedan tener los estudiantes. Sin embargo en el segundo segmento de clase presentado, sólo participan dos alumnos. El profesor a medida que explicaba hacía muchas preguntas que los estudiantes no respondían, estos dos alumnos responden porque las preguntas tienen que ver con las actividades de visualización implementadas con el computador y que en el desarrollo analíticos se refuerzan. Si las preguntas del docente durante la clase, pretendía evaluar la comprensión y apropiación de los estudiantes, entonces pudo percibir que en los aspectos analíticos, la comprensión fue media por no decir media-baja, ya que se carece hasta el momento de otras evaluaciones.
2. El profesor, en esta segunda sesión de clase y en la medida de las posibilidades, aclara dudas a los alumnos en lo relativo a recordar aspectos teóricos vistos anteriormente que no recuerdan y que

generan perturbaciones en el desarrollo del material de estudio. Por ejemplo al utilizar el Maple para comprobar las igualdades de las siguientes expresiones: $1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$, $1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. que los estudiantes no conocían sobre su demostración (Inducción completa) y tampoco las recordaban. Con el apoyo de agentes mediadores, señala Ríos (1999), el estudiante relaciona su bagaje cultural con la nueva información y puede así darle significado a las situaciones de aprendizaje.

3. En el diálogo entre profesor y alumno, se notó en varios segmentos de la clase como los alumnos tienden al mecanicismo. Una buena estrategia pareció ser de acuerdo a lo observado, el calcular integrales definidas de dos maneras: a) Primero a *mano* y luego usando el computador y b) primero con el computador y después a *mano* podría, minimizar el mecanismo pero, es posible que generen algunos conflictos operativos y semióticos.
4. El docente seleccionó actividades apropiadas para los contenidos matemáticos considerando la diferencias individuales y trato en la medida de las posibilidades que los alumnos, como señala D'Amore (2006) se sintieran libre de usar sus propios recursos mentales, independientemente de sus conocimientos previos.
5. En las evaluaciones individuales que hacían los estudiantes con el apoyo del computador se pudo notar diferentes formas de abordar la actividad. La Primera, algunos alumnos graficaron con el computador, pero se percibe que se ha apropiado de los conocimientos, al dividir en dos áreas y escribir las integrales correspondientes a cada región de forma correcta. La segunda, los estudiantes se aprendieron los

comandos del software Maple pero no tienen claro el tema en estudio, buscaron la solución con el computador y no plantearon un razonamiento formal. Sin embargo siguieron los pasos: Definieron la función, la graficaron incluso presentaron el resultado de la integral . Es decir; que es posible que algunos estudiantes hayan pensado que con conocer los comandos del Maple podía resolver la asignación.

6. Bajo nivel que presentaban los estudiantes en los conocimientos previos como: Graficar funciones, determinar puntos de cortes entre las gráficas de éstas y los ejes cartesianos y las pocas destrezas operatorias en álgebra elemental y aritmética. En función a estas carencias se desarrollaron actividades apoyadas en el computador, que permitieron ir reforzando los conocimientos y que con una dificultad manejable los alumnos pudieran ir dando significados a los nuevos conocimientos. Después de la mitad de la sesión de clase se notó una mayor y significativa participación de los estudiantes en la resolución de cada situación.
7. Las pruebas en general permitieron evaluar el aprendizaje de los estudiantes y en gran parte la del proceso de enseñanza: Una conclusión que se desprende de las pruebas realizadas al final de algunas de las sesiones de clase, es que la forma muy algorítmica con que los estudiantes resolvieron problemas, se puede conjeturar que se deriva de la forma, también algorítmica como el profesor presentó los ejemplos.
8. El aumento de la participación de los estudiantes en las últimas sesiones de clase analizadas, dan cuenta que éstos le han dado significados a los nuevos conocimientos, a pesar de las deficiencias que presentan en conocimientos previos.
9. Se aprovechó el aporte de los estudiantes que participaban en las resoluciones de los planteamientos y la utilización del Maple, para

atender a las diferencias individuales que en relación a la pregunta se pudieron presentar.

En cuanto a la *idoneidad mediacional* los recursos materiales y cuyos componentes son: Recursos, condiciones y tiempo se puede concluir:

En clase el profesor hizo uso de diversos materiales que distribuyó durante cada sesión: a) Material de apoyo tanto para las práctica a desarrollar con el software Maple, como de apoyo al contenido en general, b) el laboratorio de informática, todas las sesiones se desarrollaron en él y c) la pizarra y marcadores de colores. Todos estos recursos se utilizaron de acuerdo a una planificación que los adecuó al contenido de estudio y a las actividades que se desarrollaron en el trascurso de cada sesión. Unas de las componentes en la que se presentó mayor problema fueron con el tiempo para el desarrollo de las prácticas en el computador, debido a las diferencias individuales en el desempeño con éste.

La *idoneidad interaccional* se midió en base a los componentes: Docente-alumno, alumno-alumno, independencia y evaluación formativa. Se estableció la siguiente conclusión:

En todas las sesiones de clase y de manera más o menos constante se dieron las siguientes interacciones: Profesor-alumno, alumno-alumno, profesor-computador y alumno-computador.

Como es conocido la enseñanza y aprendizaje del concepto de la integral definida, es un tópico neurálgico o complicado, sin embargo con la trayectoria didáctica diseñada y el uso del computador, se presentaron las siguientes interacciones: Profesor-Alumno, Alumno-Computador, Profesor-Computador y Alumno-Alumno. Estas relaciones favorecieron en muchos momentos la negociación para solventar conflictos en los significados personales que se presentaron durante las explicaciones sobre la integral definida; en sus nociones iníciales, en su definición formal basada en el proceso de Riemann. Y en sus aplicaciones.

En cuanto a la *idoneidad emocional* se midieron los componentes: interés y necesidad, actitudes y emociones. La conclusión obtenida es:

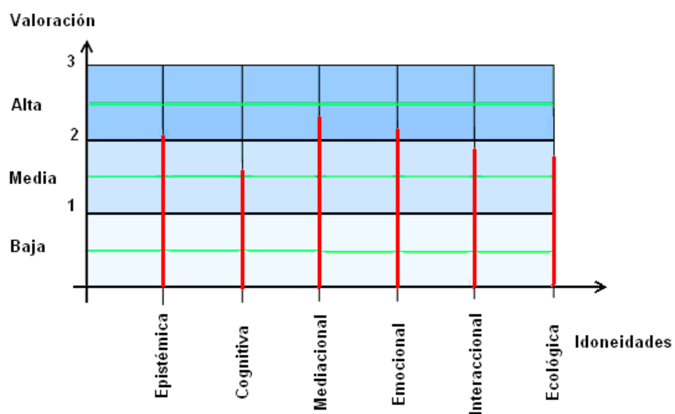
La utilización de un software matemático, con el cual se puede simular la construcción de rectángulos de acuerdo a una partición de un segmento del eje x bien sea por el extremo inferior o superior o de un valor intermedio para cuadrar la región limitada por una curva, el eje x, entre dos valores de éste, para graficar funciones, hallar puntos de cortes entre gráficas y calcular integrales paso a paso. Fue acertado para motivar al estudiante por el estudio de la integral definida. En las observaciones de clase el observador señala "Los alumnos se interesan por la actividad, se consultan entre sí y comparten sus hallazgos" (ver anexo F). Las tareas diseñadas para las clases, apuntan a despertar el interés de los discentes. La clase se desarrolló en el laboratorio, cada estudiante tenía una computadora para sí, la podía utilizar de apoyo en todo momento. Aunada a esta motivación el docente facilita la comprobación por cuenta propia y la responsabilidad, ya que con ese apoyo se sentían comprometido a entregar las tareas individuales asignadas.

Por último la *idoneidad ecológica* la cual se midió a través de los componentes: Adaptación curricular, innovación didáctica, socio-profesionalismo y las conexiones. Las conclusiones para esta idoneidad s

Se planificó una trayectoria didáctica para la integral definida donde se quería que el estudiante comprenda, interprete y aplique la integral definida sin la necesidad de profundizar en demostraciones de teoremas que son propios del análisis. La implementación del proceso de estudio se adaptó a los significados institucionales pretendidos en el currículo del IUTE-LV. Los contenidos están en sintonía con los significados institucionales de referencia, la integral definida sus propiedades y los teoremas más importantes forman parte del currículo de las carreras técnicas universitarias como, ingeniería y técnico superior universitario. Los temas se abordó en base a la apertura hacia la innovación didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhemi, 2006) en su descriptor de integración de nueva tecnología. Quizás se hubiese podido utilizar ejercicios más cercanos al ambiente social de los estudiantes y propios a su carrera.

Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio en base a las valoraciones hechas a las clases analizadas.

GRÁFICO 6



La estimación anterior indica que este proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral debe ser mejorado ya que en promedio tiene una idoneidad media. Lo que demuestra que el EOS nos permite hacer una valoración constante de nuestra labor educativa en vía de la perfectibilidad de los procesos didácticos.

CAPÍTULO VIII

Análisis de los resultados obtenidos en la prueba final correspondiente a la integral definida y sus aplicaciones

Introducción

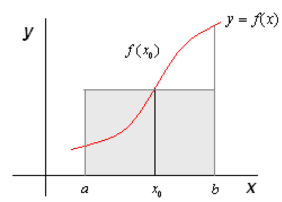
Es esta sección se presenta el análisis que se realizó a la prueba que se aplicó una vez finalizado en proceso de enseñanza y aprendizaje. La prueba consta de 11 ítems diseñados con la finalidad de determinar lo aprendido, los errores y dificultades presentadas por los estudiantes en la comprensión de los contenidos. Los ítems son de dos tipos: Unos teóricos, es decir vinculados directamente con la teoría y otros de cálculo de integrales definidas y aplicaciones de éstas a situaciones problemáticas (ver anexo A).

En las preguntas se hizo énfasis en el concepto de integral definida, los teoremas, propiedades y sobre todo en la aplicación de este tópico en la resolución de problemas. Los estudiantes presentaron la evaluación en el laboratorio de informática donde se desarrollaron las clases y podía hacer uso del computador para responder las preguntas.

A continuación presentamos los propósitos y el análisis de contenidos de los ítems de la prueba.

Primer ítem:

El teorema de valor medio para integrales plantea: Si f *es una función continua en el intervalo* $[a,b]$, *entonces existe* $x_0 \in [a,b]$ *tal que* $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0)$



Interprete geométricamente, explique.

El propósito de este ítem es evaluar la comprensión del teorema, sabemos que el TVMI se debate entre los aspectos geométrico y analítico, es así que su interpretación geométrica permite evaluar el significado que el alumno le atribuye al teorema y al concepto de integral definida.

Se considera que la respuesta es correcta cuando el estudiante señale que: *Si la función* f *cumple las condiciones señaladas, siempre es posible hallar al menos un* $x_o \in [a,b]$*, para el cual el rectángulo* $(b-a)f(x_o)$ *es igual al área de la región determinada por* f *el eje* x *entre* $x=a$ *y* $x=b$.

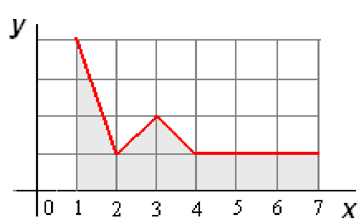
Segundo ítem:

¿Qué teorema garantiza que si $F(x)$ *es una primitiva de* $f(x)$ *continua en* $[a,b]$*, entonces* $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$*? Explique.*

El propósito de este ítem es determinar si el estudiante conoce y maneja en TFC. Se considera correcta si señala al Teorema Fundamental del Cálculo.

Tercer ítem:

De acuerdo a la siguiente gráfica ¿Cuál es el valor promedio de $f(x)$ en $[1,7]$? Justifica tu respuesta.



La finalidad del ítem es determinar el significado que el estudiante le otorga a los conceptos de Integral Definida y Valor Promedio de una función. La respuesta estará correcta si realiza la siguiente operación: $\overline{f(x)}_{[1,7]} = \dfrac{8{,}5}{6} \approx 1{,}4166667$

Cuarto ítem: *Calcule:* $\int_0^1 \dfrac{x}{1+5x^2}dx$

Con este ítem se quiere evaluar al estudiante en la aplicación de los métodos de integración y en el cálculo de integrales definidas. Estará correcta si el alumno responde como sigue:

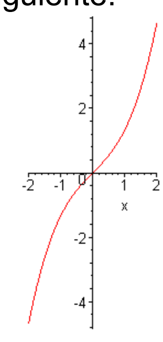
$$\int_o^1 \frac{x}{1+5x^2}dx = \int_1^6 \frac{\frac{du}{10}}{u} \qquad \text{para}\, u = 1+5x^2$$
$$= \frac{1}{10}\int_1^6 \frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{10}\ln u \Big|_1^6$$
$$= \frac{1}{10}(\ln 6 - \ln 1)$$
$$= \frac{\ln 6}{10}$$

Quinto ítem:

Bosqueje la gráfica de una función que exprese en cada punto del intervalo $[-3,3]$ *el área, el área bajo la curva* $y = x^2 + 1$.

La finalidad del ítem es evaluar el concepto de integral en función a la primitiva, es decir; que el estudiante grafique la función original antes de ser derivada. De alguna manera es indagar sobre el significado dado a la relación derivada - integral. Se considera correcta, si se hace lo siguiente:

$\int (x^2+1)dx = \frac{x^3}{3} + x + C$ Si se grafica para $C = 0$ se tiene:



Sexto ítem.

La población P, de China (en miles de millones de habitantes) la cual se puede calcular con la función $p(t) = 1{,}15(1{,}014)^t$. *Si* t *es el número de años* *desde el inicio del 2003. ¿Cuál es el valor promedio de la población China entre 2003 y 2007?*

Este ítem tiene el propósito de evaluar la aplicación de los conceptos de Integral Definida y Valor promedio de una función en un modelo de crecimiento poblacional. Estará correcta cuando defina la integral, aplique la definición de promedio de una función y calcule correctamente la integral: La respuesta correcta es así:

$$\begin{aligned}
\overline{P} &= \frac{1}{7-3}\int_3^7 1{,}15(1{,}014)^t\,dt \\
&= \frac{1{,}15}{4}\int_3^7 (1{,}014)^t\,dt \\
&= 0{,}2875\left[\frac{(1{,}014)^7}{\ln(1{,}014)} - \frac{(1{,}014)^3}{\ln(1{,}014)}\right] \\
&= (0{,}2875)(4{,}288502843) \\
&= 1.232944567
\end{aligned}$$

La población promedio es de 1,232944567 miles de millones de habitante

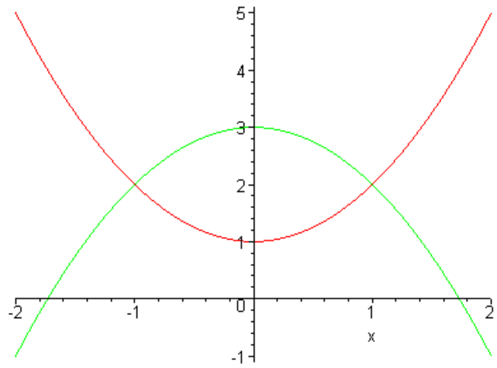
Séptimo ítem:

Determine el área de la región limitada por $f(x) = x^2 + 1$ *y* $g(x) = 3 - x^2$*.*

El ítem tiene la finalidad de evaluar la aplicación de la Integral Definida en el cálculo del área de regiones limitadas por funciones. Para estar correcta debe determinar la integral que representa el área de la región solicitada y calcularla. La respuesta debe ser así:

Una primera actividad es determinar las gráficas de las funciones, para ello primero calculemos los puntos donde las dos gráficas se cortan:

Al resolver $x^2 + 1 = 3 - x^2$ se obtiene $x = \pm 1$ así que las gráficas se cortan en 1 y -1. Ahora se bosquejan las gráficas:



$y = x^2 + 1$

$y = 3 - x^2$

Por último se define y calcula la integral:

$$A(región) = \int_{-1}^{1} \left[3 - x^2 - \left(x^2 + 1\right)\right] dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(-2x^2 + 2\right) dx$$
$$= 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$
$$= \frac{8}{3}$$

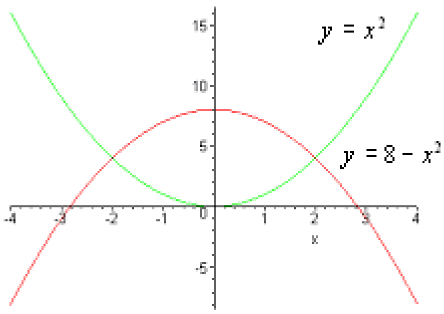
Así el área de la región es igual a 8/3 unidades al cuadrado.

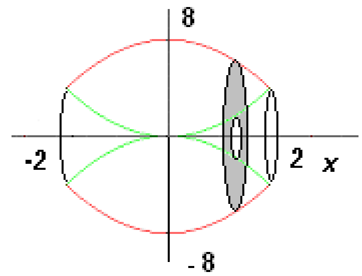
Octavo ítem:

Encuentre el volumen del sólido generado al rotar en torno al eje x *la región limitada por* $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$.

Este ítem tiene la finalidad de evaluar la aplicación de la Integral Definida en el cálculo del volumen de un sólido de revolución generado al rotar en torno al eje de las x una región limitada por funciones. Para estar correcta debe determinar la integral que representa el volumen del sólido y calcularla. La respuesta debe ser así:

Se grafican las funciones para determinar la región a rotar, esto es:





Se define y calcula la integral que representa el volumen del sólido de revolución, en este caso se utiliza el método del anillo. La integral es:

$$V = \int_{-2}^{2} \pi\left[\left(8 - x^2\right) - \left(x^2\right)^2\right]dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(64 - 16x^2\right)dx$$

$$= 2\pi\left(64x - \frac{16}{3}x^3\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{512}{3}\pi$$

Así el volumen es igual a $\frac{512}{3}\pi$ unidades cúbicas

Noveno ítem:

Se inyecta cinco miligramos de colorante en una vena que llega al corazón. La concentración de colorante en la Aorta, una arteria que sale del corazón, se determina cada 2 segundos durante 22 segundos (véase la tabla). Sea c(t) la concentración en la aorta de t *segundos. Aplique la regla trapezoidal para estimar* $\int_{0}^{22} c(t)dt$

Segundos después de la inyección	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Concentración (mg/litros)	0	0	0,6	1,4	2,7	3,7	4,1	3,8	2,9	1,5	0,9	0,5

El propósito de este ítem es determinar el significado que el alumno le otorgó a la integración numérica o aproximada, para ello se presenta un problema de aplicación. La respuesta será correcta si aplica bien el método y hace bien los cálculos. Veamos la resolución:

La concentración es:

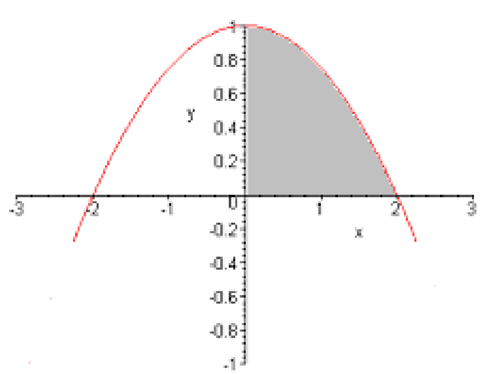
$$C(t) \approx \left(\frac{2}{2}\right)\left[0 + 2.0 + 2.(0{,}6) + 2.(1{,}4) + 2.(2{,}7) + 2.(3{,}7) + 2.(4{,}1) + 2.(3{,}8) + 2.(2{,}9) + 2.(1{,}5) + 2.(0{,}9) + 0{,}5\right]$$
$$= 43{,}7 \text{ mg/litro}$$

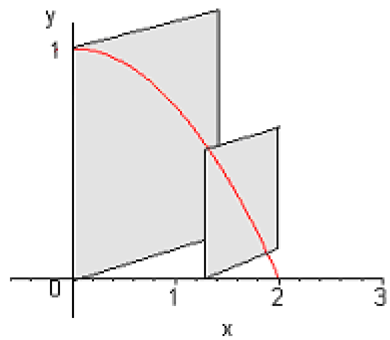
Décimo ítem:

La base de un sólido es la región plana del primer cuadrante limitada por $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ *el eje de las* x *y el eje de las* y. *Supongamos que las secciones transversales perpendiculares al eje* x *son cuadradas. Calcule el volumen del sólido.*

Este ítem tiene por finalidad evaluar la compresión y de la aplicación de la integral definida en el cálculo del volumen de un sólido de secciones transversales de área conocida. Estará correcta si bosqueja el sólido, define la integral que rige su volumen y la calcula con exactitud. Esto es:

Primero se grafica la función





El sólido está formado por secciones cuadras de lado $f(x)$ para $x \in [0,2]$ y de espesor Δ_x. Así la integral es:

$$V = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 dx$$

$$= \frac{16}{15}$$

Es decir que el volumen del sólido es $\frac{16}{15}$ Unidades cúbicas

Undécimo ítem:

Aproxima la integral $\int_0^4 (x^2 + 5)dx$ mediante sumas por la derecha, tome h=0,5.

La intención del ítem es determinar el significado otorgado a la integral de Riemann. Estará correcta si aplica y calcula la suma por la derecha de Riemann. Veamos:

$$\int_0^4 \left(x^2+5\right)dx \approx 0{,}5f(0{,}5)+0{,}5f(1)+0{,}5f(1{,}5)+0{,}5f(2)+0{,}5f(2{,}5)+0{,}5f(3)+0{,}5f(3{,}5)+0{,}5f(4)$$

$$=(0{,}5)(5{,}25+6+7{,}25+9+11{,}25+14+17{,}25+21)$$

$$=(0{,}5).(91)$$

$$=45{,}5$$

Justificación de la validez de contenido del cuestionario.

La prueba es un cuestionario, para Arrieche (2002) un cuestionario es un método de medición para evaluar un constructo (los conocimientos de los alumnos que son los significados personales) mediante un conjunto de indicadores empíricos (las respuestas de los alumnos). Todo cuestionario debe tener validez de contenido y se refiere a la relación que tiene el instrumento con el constructo, en este caso con la integral en una variable real. Para Ruiz (2002), "A través de la validez de contenido se trata de determinar hasta dónde los ítemes del instrumento son representativos del dominio o universo de contenido de la propiedad que se desea medir" (p. 75). En la siguiente tabla se muestra los contenidos evaluados en cada ítems

TABLA 7

Contenidos de los ítems de la prueba

Contenidos / ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Concepto de integral definida			x		x						x
Teorema Fundamental del Cálculo		x									
Teorema de Valor Medio	x										
Métodos de integración				x	x	x	x	x		x	
Aplicación al cálculo de áreas							x				
Aplicación al cálculo de volumen								x		x	
Valor promedio de una función			x			x					
Integración numérica									x		

En el proceso de estudio se trataba de evaluar el aprendizaje de los alumnos sobre los conceptos, teoremas, métodos de integración, valor promedio de una función, integración numérica y aplicaciones al cálculo de área, volúmenes y otras que han sido estudiadas. En la tabla 7 se muestra el contenido evaluado por el instrumento. Como se puede observar, el contenido cumple suficientemente los contenidos de este proceso de estudio descrito en el capítulo VI. Además los estudiantes para resolver la prueba tienen que definir, argumentar, calcular, graficar, comprobar y resolver problemas. En consecuencia se considera que el instrumento tiene validez de contenido para evaluar los conocimientos de los alumnos sobre la integral en una variable real.

Análisis de los datos. Discusión de resultados

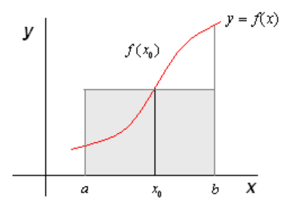
Con el propósito de describir las características de los significados personales de la integral en una variable real de los estudiantes del segundo semestre de la carrera informática que participaron del proceso de estudio, se presentan a continuación los resultados globales de las respuestas dadas a los ítems de la prueba. Para tal fin se clasificaron las respuestas en correctas (si se corresponden en todo con las presentadas en la sección anterior), parcialmente correctas, incorrectas. Una vez conocidas las respuestas correctas en esta sección se darán ejemplos de respuestas parcialmente correctas e incorrectas.

Resultados globales de la prueba

A continuación presentamos los resultados de cada uno de los ítems que conforman la prueba, con ejemplos de respuestas parcialmente correctas e incorrectas y sus respectivas interpretaciones fundamentadas en la clasificación elaborada.

Primer ítem:

El teorema de valor medio para integrales plantea: Si f *es una función continua en el intervalo* $[a,b]$, *entonces existe* $x_0 \in [a,b]$ *tal que* $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0)$



Interprete geométricamente, explique.

Las respuestas *parcialmente correctas* (PC) son aquellas donde el estudiante utiliza términos inadecuados o escribe enunciados incompletos. Por otra parte, las respuestas son *incorrectas* (I) si el alumno presenta desconocimiento de los conceptos, teoremas o algoritmos requeridos para responder el ítem o no responde. Los e*rrores conceptuales, s*on el producto de un claro desconocimiento de las definiciones, conceptos, teoremas y propiedades.

El alumno 1 responde: "*Geométricamente: existe un* x_0 *el cual el área del rectángulo es igual al área bajo la curva".* Es parcialmente correcta porque aunque es cierto lo que dice no especifica que el rectángulo $(b-a)f(x_0)$ es igual al área de la región limitada por la curva, el eje x entre a y b.

El alumno 2 responde: *"El área bajo la curva* $y = f(x)$ *es igual a la base del rectángulo* $x_0 = [a,b]$". Sin discusión es incorrecta, vincula el área de la región limitada por la curva y el eje x entre a y b con la base del rectángulo. Este estudiante manifiesta desconocimiento del teorema y del concepto de integral, es decir presenta graves errores conceptuales

El alumno 3 responde: "*Como la integral lo plantea la base y la altura son iguales".* Es una respuesta incorrecta, presenta un claro desconocimiento del teorema y del concepto de integral. También su error es conceptual.

El alumno 4 responde: "*La integral es igual al área de la curva y el área del rectángulo es también igual al área bajo la curva ".* Es una respuesta parcialmente correcta., No expresó bien la idea y el lenguaje empleado es inadecuado.

El alumno 7 responde: "*Las integrales que nacen de esta gráfica son todas iguales*". Es incorrecta presenta errores conceptuales, puesto que tiene desconocimiento del teorema y del concepto de integral.

Quizás la mayor fuente de la falta de comprensión tanto del concepto de integral como del Teorema del Valor Medio, es que en el se conjugan aspectos geométricos y analíticos que requieren de procesos didácticos que promueva la capacidad de abstracción del alumno.

TABLA 8

Descripción estadística de las respuestas al ítem 1

	Correctas	**Parcialmente correctas**	**Incorrectas**
Porcentaje	**0%**	**27%**	**73%**

En la tabla 8 podemos ver que el número de respuestas incorrectas, que incluye las respuestas en blanco o que no son suficientes para determinar el conocimiento del estudiante, es muy superior a las respuestas parcialmente correctas. Además no hubo respuestas correctas. Esto evidencia que este ítem resultó difícil para los alumnos y éstos presentan carencias en la interpretación geométrica del TVM, los errores se pueden clasificar como conceptuales.

Segundo ítem:

¿Qué teorema garantiza que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ continua en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$? Explique.

De igual forma a como se hizo en el ítem 1 se define cuando una respuesta es parcialmente correcta o incorrecta.

El alumno 2 responde: " El Teorema del Cálculo, porque $F(x)$ *es continua entre* $F(b) - F(a)$. Es incorrecta, manifiesta desconocimiento del teorema, es decir es un error conceptual.

El alumno 6 responde: "*El Teorema fundamental del Cálculo: Sea* $f(x)$ *una función continua en* $[a,b]$ *y* $F(x)$ *una primitiva a* $f(x)$ *en* $[a,b]$*.* Respuesta parcialmente correcta, muestra conocimientos sobre el teorema, pero no concluye la idea, se puede suponer que fue por descuido..

El alumno 11 responde: "*El Teorema del Cálculo, porque* $F(x)$ *es continua en* $[a,b]$ *y a su vez es la primitiva.* Es incorrecta, presente conocimientos vagos sobre el teorema, pero no manifiesta su comprensión.

TABLA 9

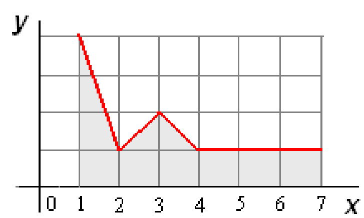
Descripción estadística de las respuestas al ítem 2

	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas
Porcentaje	18,1%	36,4%	45,5%

La tabla nueve presenta los porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas. El 54,5% corresponde a respuestas correctas y parcialmente correctas. Lo que indica que más de la mitad de los estudiantes tienen conocimientos sobre el Teorema Fundamental de cálculo, tanto en su enunciado como en su finalidad.

Tercer ítem:

De acuerdo a la siguiente gráfica ¿Cuál es el valor promedio de $f(x)$ en $[1,7]$? Justifica tu respuesta.



Las respuestas *parcialmente correctas* son aquellas donde el estudiante utiliza términos inadecuados o comete errores de cálculo. Las respuestas son *incorrectas* si el alumno presenta desconocimiento de los conceptos, teoremas o algoritmos requeridos para responder el ítem o no responde.

A esta pregunta casi la totalidad de los estudiantes respondieron de forma correcta. No hubo respuestas parcialmente correctas en la cual se puedan establecer algunos errores y las incorrectas sólo fueron preguntas dejadas en blanco

TABLA 10

Descripción estadística de las respuestas al ítem 3

	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas
Porcentaje	**82%**	**0%**	**18%**

Esta pregunta resultó fácil a la mayoría de los estudiantes, lo que ponen de manifiesto la comprensión del concepto de la Integral Definida y valor promedio de una función.

Cuarto ítem:

Calcule: $\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}dx$

Las respuestas son parcialmente correctas si se presentan errores leves en algunas operaciones de cálculo, pero el algoritmo seguido es correcto. Y será incorrecta si se cometen errores conceptuales y de cálculo en cualquier aspecto matemático, utilizan fórmulas de integración inadecuada o incorrecta o simplemente no responden.

El alumno 1 presenta una respuesta incorrecta; a pesar de que hace una buena selección de *u,* deduce mal a *du* no consigue hacer bien el cambio y resuelve mal la integral. Presenta el resultado correcto, esto puede ser que lo obtuvo con el software:

$$"\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}dx = \frac{1}{10}\ln(2) + \frac{1}{10}\ln(3)$$

$$u = 1+5x^2$$

$$du = \frac{dx}{x}$$

$$Calculo\ x = 1$$

$$1+5(1)^2 = 6$$

$$Calculo\ x = 0$$

$$1+5(0)^2 = 1$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}dx = \int_1^6 \frac{1}{10u}du$$

$$= \int_1^6 \frac{1}{10\text{u}}\frac{dx}{x}$$

$$= \int \frac{1}{10\left(1+5x^2\right)}\ln|x|\Big|_1^6$$

$$= \frac{1}{10}\ln(2) + \frac{1}{10}\ln(3)"$$

El alumno 3 responde:

$$"\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}dx \quad \Rightarrow \int_1^6 \frac{\frac{du}{10}}{u}$$

$$u = 1+5x^2 \quad \Rightarrow \frac{1}{10}\int_1^6 \frac{du}{u}$$

$$du = 10xdx \quad \Rightarrow \frac{1}{10}\ln(u)\Big|_1^6$$

$$\frac{du}{10} = xdx \quad \Rightarrow \frac{1}{10}\ln(2) + \frac{1}{10}\ln(3)"$$

Es parcialmente correcta. Aun cuando resolvió la integral no explica cómo obtuvo el resultado

El alumno 8 responde:

$$"\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}dx = \int_1^6 \frac{1}{10}du = \frac{1}{10}\ln(2) + \frac{1}{10}\ln(3)"$$

Escribe además que lo hizo sin el apoyo del software Maple y que utilizó un cambio de variable. Se considera incorrecta, ya que no brinda la suficiente información para determinar los conocimientos del estudiante.

TABLA 11

Descripción estadística de las respuestas al ítem 4

	Correctas	**Parcialmente correctas**	**Incorrectas**
Porcentaje	**27%**	**55%**	**18%**

En la tabla 11 se puede interpretar que la pregunta resultó difícil sólo al 18% de los estudiantes, el 55% de los alumnos manifiestan tener conocimientos y destrezas para calcular la integral, pero cometieron errores leves que impidieron completar el ejercicio. El 27% calculó correctamente la integral por el método de cambio de variable.

Quinto ítem:

Bosqueje la gráfica de una función que exprese en cada punto del intervalo $[-3,3]$ *el área, el área bajo la curva* $y = x^2 + 1$.

Las respuestas *parcialmente correctas* son aquellas donde el estudiante manifiesta claridad en los conceptos pero utiliza términos inadecuados o comete errores leves en algunas operaciones de cálculo o graficación. Las respuestas son *incorrectas* si el alumno presenta un desconocimiento de los conceptos, teoremas o algoritmos requeridos para responder el ítem o no responde.

El alumno 8 presenta una respuesta incorrecta, él calcula la integral

"$y = x^2 + 1$ en $[-3,3]$ $\quad A = \int_{-3}^{3} \left(x^2 + 1\right) dx$

$x^2 + 1 = 0$

$(x-1)(x-1) = 0$

$x_1 = 1, x = 1$

$$= \frac{x^3}{3} + x \Big|_{-3}^{3}$$

$$= \left(\frac{(-3)^3}{3} + (-3) \right) - \left(\frac{(3)^3}{3} + (3) \right)$$

$$= \left(-\frac{27}{3} - 3 \right) - \left(\frac{27}{3} + 3 \right) = \frac{-24}{3} + \frac{30}{3}$$

$$= \frac{54}{6} u^2$$"

No diferencia los dos conceptos Integral Indefinida e Integral Definida y aparentemente no maneja la relación derivada – integral, en este caso se puede afirmar que existen errores conceptuales graves. Aunque no era necesario, pretende calcular los puntos de corte de la gráfica de la función integrando ($y = x^2 + 1$), pero lo hace de forma incorrecta. Por otra parte aplica mal el procedimiento para el cálculo de la integral (usa mal la regla de Barrow o el TFC) y finalmente presenta errores en la suma de números enteros y racionales.

Se podrían definir dos tipos más de errores:

Errores en cálculos elementales: Son errores en despejes, resolución de ecuaciones, factorización, operaciones algebraicas, etc. Cualquier operación ya vista en educación básica o media.

Ejemplo: El alumno 8 factorizó y resolvió:

$$"x^2+1=0$$
$$(x-1)(x-1)=0 \qquad \text{Y sumó: } "\frac{-24}{3}+\frac{30}{3}=\frac{54}{6}"$$
$$x_1=1, x=1"$$

Errores en el procedimiento: Son aquellos errores que tienen que ver con la aplicación inadecuada de reglas, algoritmos, teoremas y propiedades.

Ejemplo: El alumno 8 hizo un mal uso de la regla de Barrow, presente en el TFC:

$$"=\frac{x^3}{3}+x\Big|_{-3}^{3}$$
$$=\left(\frac{(-3)^3}{3}+(-3)\right)-\left(\frac{(3)^3}{3}+(3)\right)"$$

El alumno 7 hizo uso del software para resolver el problema, no podemos determinar sus destrezas de cálculo, lo resolvió con el software, pero si tiene claro los conceptos; calculó la integral y graficó la función primitiva obtenida. Como respuesta escribió:

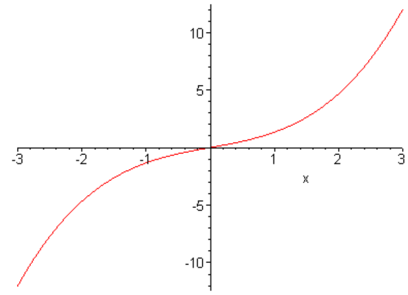
```
“> int(x^2+1,x);
```

$$\frac{1}{3}x^3+x$$

```
> F:=x->x^3/3+x;
```

$$F := x \to \frac{1}{3}x^3 + x$$

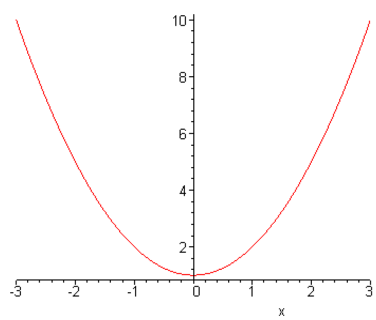
```
> plot(F(x),x=-3..3);    Gráfica                ”
```



Esta respuesta se considera parcialmente correctamente, ya que el estudiante no escribió los cálculos y la gráfica de forma explícita, pero como podía utilizar el software, hizo uso de él. Para usar adecuadamente el software el alumno tiene que tener claro los conocimientos sobre el objeto de estudio. Este estudiante demostró claridad en la relación derivada – integral y la diferencia entre integral definida e integral indefinida. Sin embargo él debía presentar los procedimientos en la hoja de respuestas y no los comandos del software.

El alumno 6 respondió:

“ > **plot(x^2+1, x=-3..3);**



La gráfica expresa una función de un integral de las áreas bajo la curva de los arcos.”

La respuesta es incorrecta, en este caso el estudiante usa el software, pero no tiene claro la pregunta y los conceptos y procedimientos involucrados en respuesta. La función que se pide graficar es la primitiva de $y = x^2 + 1$, es decir: $y = \frac{x^3}{3} + x$.

TABLA 12

Descripción estadística de las respuestas al ítem 5

	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas
Porcentaje	**36%**	**0%**	**64%**

La tabla 12 muestra que una mayoría de los estudiantes (64%) respondió incorrectamente o no respondió esta pregunta, sin embargo si se considera que para dar una respuesta correcta se requiere claridad en los conceptos: integral indefinida y la relación derivada-integral es importante que un 36% haya respondido correctamente.

Sexto ítem.

La población P, de China (en miles de millones de habitantes) la cual se puede calcular con la función $p(t) = 1{,}15(1{,}014)^t$*. Si* t *es el número de años desde el inicio del 2003. ¿Cuál es el valor promedio de la población China entre 2003 y 2007?*

Las respuestas *parcialmente correctas* son aquellas donde el estudiante manifiesta claridad en los conceptos pero utiliza términos inadecuados o comete errores en cálculos elementales. Las respuestas son *incorrectas* si el alumno presenta desconocimiento de los conceptos, teoremas o algoritmos requeridos para responder el ítem o no responde.

El alumno 7 respondió de forma parcialmente correcta, planteó la integral que define el promedio de la población en los años previstos, pero no calculó el valor, veamos:

$$"\frac{1}{7-3}\int_3^7 1{,}15(1{,}014)^t dt = \frac{1{,}15}{4}\int_3^7 (1{,}014)^t dt \qquad a = 1{,}014$$

$$\int_3^7 a^x dx = \left.\frac{a^x}{\ln a}\right|_3^7 \Rightarrow \frac{1{,}15}{4}\left(\frac{a^7}{\ln a} - \frac{a^3}{\ln a}\right)"$$

Señala que $\dfrac{a^7}{\ln a}$ es la población de la china en el 2007 y $\dfrac{a^3}{\ln a}$ es la población del 2003. Hay un error en el procedimiento al aplicar la fórmula de la integral de la exponencial.

El alumno 3 también presenta una respuesta parcialmente correcta. Cuando calcula la integral escribe:

$$"\frac{1{,}15}{4}\int_3^7 (1{,}014)^t dt = \frac{1{,}15}{4}\left(\frac{(1{,}014)^7}{\ln(7)} - \frac{(1{,}014)^3}{\ln(3)}\right)"$$

Es decir hace un mal uso de la fórmula de integración correspondiente debería ser en el denominador ln(1,014). Se puede decir que es un error en el procedimiento.

TABLA 13

Descripción estadística de las respuestas al ítem 6

	Correctas	**Parcialmente correctas**	**Incorrectas**
Porcentaje	**36%**	**46%**	**18%**

El 82% de los alumnos respondieron entre correcta y parcialmente correcta, el resto simplemente no respondió. Esto se puede considerar muy positivo ya que era un problema de aplicación de la integral definida.

Séptimo ítem:

Determine el área de la región limitada por $f(x)=x^2+1$ *y* $g(x)=3-x^2$.

En este ítem las respuestas *parcialmente correctas* son aquellas donde el estudiante manifiesta claridad en los conceptos pero utiliza términos inadecuados o comete errores leves en algunas operaciones de cálculo o graficación. Las respuestas son *incorrectas* si el alumno presenta un claro desconocimiento de los conceptos, teoremas o algoritmos requeridos para responder el ítem o no responde.

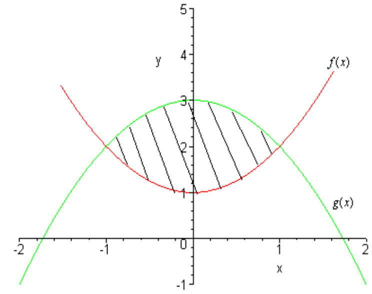
El alumno 9 presenta una respuesta parcialmente correcta, él tiene confusión con en el proceso de cuadratura de al región limitada por las dos funciones, en el problema la alturas de los rectángulos está dada por $g(x)-f(x)$. Él busca correctamente los puntos donde las gráficas de la funciones se cortan y grafica las funciones. Al plantear la integral escribe $f(x)-g(x)$ la calcula bien, pero obtiene con esa definición del integrando el valor del área negativo $-\frac{8}{3}$. Veamos:

"*Solución*:

Puntos de corte:

$$f(x)=x^2+1 \qquad g(x)=3-x^2$$

$$x^2+1=3-x^2$$
$$x^2+1-3+x^2=0$$
$$2x^2-2=0$$
$$(x+1)(x-1)=0$$
$$x_1=-1, x_2=1$$



$$A(R)=\int_{-1}^{1}\left[x^2+1-\left(3-x^2\right)\right]dx$$
$$=\int_{-1}^{1}x^2+1-3+x^2dx$$
$$=\int_{-1}^{1}2x^2-2dx$$
$$=\frac{2x^3}{3}-2x\Big|_{-1}^{1}$$
$$=\left(\frac{2}{3}-2\right)-\left(-\frac{2}{3}+2\right)$$
$$=\frac{2-6}{3}-\left(\frac{-2+6}{3}\right)$$
$$=\frac{-4}{3}-\frac{4}{3}$$
$$=\frac{-4-4}{3}\Rightarrow A(R)=-\frac{8}{3}"$$

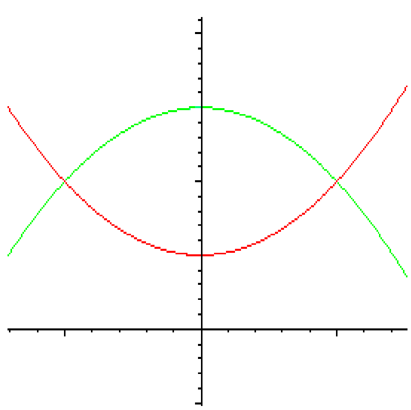
Es un error en el procedimiento al calcular área de regiones limitadas por funciones, no se debe olvidar el proceso de cuadratura con rectángulos. La altura de los rectángulos viene dada por la diferencia de la función que toma un mayor valor en relación al eje y, menos la de menor valor. Esto no lo consideró este estudiante.

El alumno 3 respondió:

"$f(x)=x^2+1$ y $g(x)=3-x^2$

$$3-x^2=x^2+1$$
$$x^2+x^2=1-3$$
$$2x^2=-2$$
$$x^2=\frac{-2}{2}$$

$x_1=1; x_2=-1$

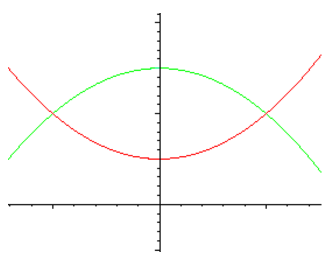


$$A(R)=\int_{1}^{-1}\left[3-x^2-\left(x^2+1\right)\right]dx$$
$$\int_{1}^{-1}\left(3-x^2-x^2-1\right)dx$$
$$\int_{1}^{-1}\left(-2x^2+2\right)dx$$
$$-\frac{2x^3}{3}+2x\Big|_{1}^{-1}\Rightarrow$$
$$\left(-2\frac{(-1)^3}{3}+2(-1)\right)-\left(-\frac{2(1)^3}{3}+2(1)\right)$$
$$\frac{2}{3}-2+\frac{2}{3}-2\Rightarrow\frac{4}{3}-4=\frac{4-12}{3}\Rightarrow\frac{-8}{3}"$$

También cometió un error que produjo que su resultado sea negativo, escribió: $A\,\mathrm{Re}\,gión = \int_{1}^{-1}\left[3 - x^2 - \left(x^2 + 1\right)\right]dx$. Por lo tanto su respuesta es parcialmente correcta. Es un error en el procedimiento ya que en una integral definida el límite superior de integración se coloca en la parte superior, de lo contrario hay que colocar un signo negativo a la integral. También presenta errores en cálculos elementales reflejados en la notación; falta de paréntesis e igualdades, sustitución de igualdades por el signo de implicación.

El alumno 8. Veamos su respuesta:

“Gráfica:



$$A = \int_{-1}^{1}\left(3 - x^2\right) - \left(x^2 + 1\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(3 - x^2 - x^2 - 1\right)dx$$

$$A = \left(-2x^2 + 2\right)dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(-\frac{2.1^3}{3} + 2x\right) - \left(-\frac{2x^3}{3} + 2x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(-\frac{2.1^3}{3} + 2.1\right) - \left(-\frac{2(-1)^3}{3} + 2(-1)\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3} + 2\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{2}{6} - \frac{2}{6} = -\frac{4}{6}"$$

Es una respuesta parcialmente correcta. Tiene claridad en casi todos los aspectos pero comete errores en cálculos elementales, por ejemplo: "$\frac{2}{6}-\frac{2}{6}=-\frac{4}{6}$" entre otros.

El alumno 2 también dio una respuesta parcialmente correcta, resolvió el problema con el Maple, Es decir tiene los conocimientos, pero no sabemos cómo está en las habilidades de cálculo, pero también tomo mal el integrando, escribió $g(x)-f(x)$, esto es un error en el procedimiento. Veamos:

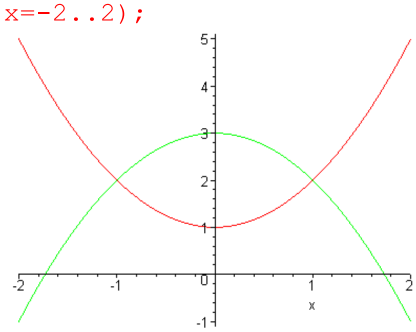
```
“ > f:=x->x^2+1;g:=x->3-x^2;
```

$$f := x \to x^2+1 \quad g := x \to 3-x^2$$

```
> solve(f(x)=g(x));
```

1, -1

```
> plot({f(x),g(x)},x=-2..2);
```




```
> int(f(x)-g(x),x=-1..1);        ”
```

$$\frac{-8}{3}$$

TABLA 14

Descripción estadística de las respuestas al ítem 7

	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas
Porcentaje	9%	82%	9%

En la tabla 14 se puede ver que el mayor número de respuestas son parcialmente correctas. Los ejemplos que se presentaron dicen de errores en el procedimiento al determinar el integrando, errores elementales de cálculo al evaluar la integral. Pero se puede decir que los alumnos construyeron sus significados al proceso para determinar el área de una región limitada por funciones, en correspondencia con el institucional.

Octavo ítem:

Encuentre el volumen del sólido generado al rotar en torno al eje x la región limitada por $y=x^2$ y $y=8-x^2$.

Se definen respuestas parcialmente correctas e incorrectas de la misma manera del ítem 7.

El alumno1 responde de forma parcialmente correcta. Calcula los puntos de corte de las gráficas de las funciones, grafica las funciones, bosqueja el sólidos de revolución y los radios del anillo, pero escribe mal el integrando. Escribe mal la diferencia de los radios al cuadrado:

"$V=\int_{-2}^{2}\pi\left[\left(x^2\right)^2-\left(8-x^2\right)^2\right]dx$" Es un error en el procedimiento

El alumno 3 hizo todos los pasos bien, demostrando conocer los conceptos y propiedades, pero al final cometió errores en la suma algebraica al valorar la primitiva, errores en cálculos elementales. Su respuesta es parcialmente correcta. Está fue:

"$y = x^2$ y $y = 8 - x^2$

$x^2 = 8 - x^2$

$x^2 + x^2 = 8$

$2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{2} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$$V = 4\int_{-2}^{2} \pi\left[\left(8 - x^2\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right]dx$$

$$\pi \int_{-2}^{2}\left(64 - 16x^2 + x^4 - x^4\right)dx$$

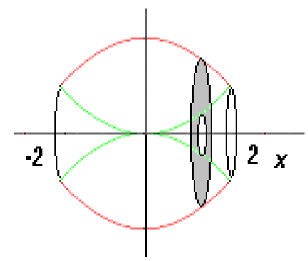
$$\pi \int_{-2}^{2}\left(64 - 16x^2\right)dx$$

$$\pi\left(64 - 16x^2\right)\Big|_{2}^{-2}$$

$$\pi\left(64(2) - \frac{16(2)^3}{3}\right) - \left(64(-2) - \frac{16(-2)^3}{3}\right)$$

$$\pi(128 - 16 + 128 + 16)dx \Rightarrow \pi 256$$

$$\Rightarrow 804{,}24u^3"$$



El alumno 5 cometió dos errores: el primero es conceptual de método de anillo, al cuadrado del radio mayor se le resta el cuadrado del radio menor y el otro es un error en el procedimiento, la respuesta es parcialmente correcta, veamos:

$$"V = \int_{-2}^{2} \pi\left[\left(8 - x^2\right)^2 + \left(x^2\right)^2\right]dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2}\left[\left(64 - x^4\right) + x^4\right]dx"$$

TABLA 15

Descripción estadística de las respuestas al ítem 8

	Correctas	**Parcialmente correctas**	**Incorrectas**
Porcentaje	**18%**	**73%**	**9%**

A pesar de ser un problema de aplicación de la integral al cálculo del volumen de un sólido de revolución, el 91% de las respuestas están entre correcta y parcialmente correcta, lo que indica este ítems no se puede considerar de mucha dificultad para los estudiantes, sin embargo sólo el 18% pudo responder sin cometer errores de cálculo elemental o en el procedimiento.

Noveno ítem:
Se inyecta cinco miligramos de colorante en una vena que llega al corazón. La concentración de colorante en la Aorta, una arteria que sale del corazón, se determina cada 2 segundos durante 22 segundos (véase la tabla). Sea c(t) la concentración en la aorta de t *segundos. Aplique la regla trapezoidal para estimar* $\int_0^{22} c(t)dt$

Segundos después de la inyección	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Concentración (mg/litros)	0	0	0,6	1,4	2,7	3,7	4,1	3,8	2,9	1,5	0,9	0,5

Las respuestas *parcialmente correctas* son aquellas donde el estudiante utiliza términos inadecuados o comete errores de cálculo. Las respuestas son *incorrectas* si el alumno presenta desconocimiento de los conceptos, teoremas o algoritmos requeridos para responder el ítem o no responde.

El alumno 8 respondió de forma parcialmente correcta, el método trapezoidal señala que todas las imágenes de los elementos de la partición, menos la primera y la última, deben multiplicarse por 2. Este estudiante multiplicó el último valor (0,5) también por 2, así cometió un error de procedimiento. Veamos:

$$"\left(\frac{2}{2}\right)\left[0+2.0+2(0{,}6)+2(1{,}4)+2(2{,}7)+2(3{,}7)+2(4{,}1)+2(3{,}8)+2(2{,}9)+2(1{,}5)+2(0{,}9)+2(0{,}5)\right]$$

Esto da como resultado que la concentración da 44,2”

Todas las demás preguntas incorrectas tienen errores similares a la anterior. Por otra parte las respuestas catalogadas como incorrectas fueron las dejaron sin responder.

TABLA 16

Descripción estadística de las respuestas al ítem 9

	Correctas	**Parcialmente correctas**	**Incorrectas**
Porcentaje	**36%**	**28%**	**36%**

De acuerdo a la tabla 16 hubo un 64% de respuestas entre correctas y parcialmente correctas, lo que hace suponer que los estudiantes comprendieron en su mayoría los métodos de integración numérica y lo pueden aplicar en la resolución de problemas.

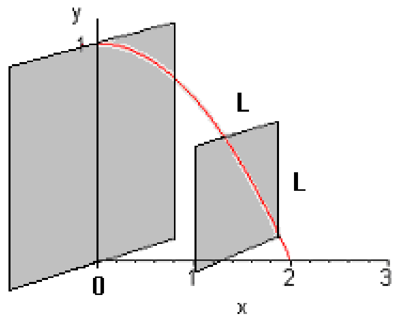
Décimo ítem:

La base de un sólido es la región plana del primer cuadrante limitada por $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ *el eje de las* x *y el eje de las* y. *Supongamos que las secciones transversales perpendiculares al eje* x *son cuadradas. Calcule el volumen del sólido.*

En este ítem las respuestas *parcialmente correctas* son aquellas donde el estudiante manifiesta claridad en los conceptos pero utiliza términos inadecuados o comete errores de cálculo o graficación. Las respuestas son *incorrectas* si el alumno presenta desconocimiento de los conceptos, teoremas o algoritmos requeridos para responder el ítem o no responde**.**

El alumno 3 respondió parcialmente correcta la pregunta: Bosquejó bien el sólido y planteó la integral, pero no llegó al resultado correcto por errores al sumar fracciones errores elementales de cálculos, veamos:

“



$$L = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$b = L^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right)$$

$$\int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right) dx$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{80}\Big|_0^2 \Rightarrow \left(2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{80} - 0\right) dx$$

$$2 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} \Rightarrow 2 - \frac{20+12}{15} \Rightarrow 2 - \frac{8}{15} \Rightarrow \frac{30-8}{15}$$

$$\frac{22}{15}\text{”}$$

Se puede notar que una vez que calcula la primitiva y va a evaluar la integral sigue escribiendo el diferencial de x. Esto es un error en el procedimiento. No utiliza la simbología matemática apropiada sobre todo la igualdad.

La mayoría de los estudiantes no respondieron esta pregunta y los que las respondieron parcialmente correcta tuvieron errores de cálculo parecidos al ejemplo presentado.

TABLA 17

Descripción estadística de las respuestas al ítem 10

	Correctas	**Parcialmente correctas**	**Incorrectas**
Porcentaje	**0%**	**36%**	**64%**

Como se puede ver en la tabla 17, este ítem se le hizo difícil a la mayoría de los estudiantes, el 64% no respondió y los 36% restantes presentaron errores con lo que sus respuestas fueron catalogadas de parcialmente correctas. Sin embargo, los errores fueron en operaciones básicas y no en el bosquejo de sólido, ni en la definición de la integral.

Undécimo ítem:

Aproxima la integral $\int_0^4 (x^2+5)dx$ mediante sumas por la derecha, tome h=0,5.

Las respuestas *parcialmente correctas* son aquellas donde el estudiante manifiesta claridad en los conceptos pero utiliza términos inadecuados o comete errores de cálculo. Las respuestas son *incorrectas* si el alumno presenta desconocimiento de los conceptos, teoremas o algoritmos requeridos para responder el ítem o no responde.

Las respuestas a estas preguntas dan cuenta de que 82% de los estudiantes respondieron correctamente este ítem (ver tabla 18) lo que significa que comprenden la suma de Riemann y la pueden aplicar para hallar un valor aproximado a una integral. El 18% restante simplemente no respondió.

TABLA 18

Descripción estadística de las respuestas al ítem 11

	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas
Porcentaje	82%	0%	18%

A continuación se presenta una tabla de resumen con el porcentaje de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas a cada ítem y el gráfico que dará la visualización del rendimiento en la prueba.

TABLA 19

Descripción estadística de las respuestas a todos los ítems de la prueba

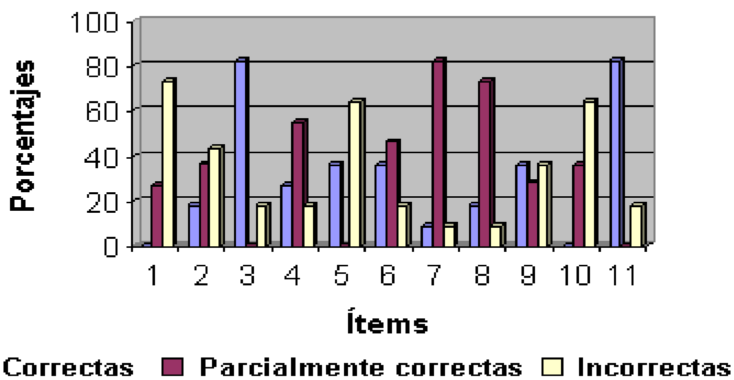
ÍTEMS / RESPUESTAS	CORRECTAS %	PARCIALMENTE CORRECTAS %	INCORRECTAS %
1	0	27	73
2	18,1	36,4	43,5
3	82	0	18
4	27	55	18
5	36	0	64
6	36	46	18
7	9	82	9
8	18	73	9
9	36	28	36
10	0	36	64
11	82	0	18

En la tabla anterior (tabla 19) como en el siguiente gráfico (Ver gráfico 7) se puede ver que las preguntas con mayor porcentaje de respuestas correctas son la tres, cinco, seis, nueve y once donde se debía tener claros el concepto de integral y su interpretación geométrica. Esto nos lleva a suponer que una mayoría de los estudiantes del curso comprendieron el tópico.

En los ítems cuatro, seis, siete y ocho se concentraron el mayor número de respuestas parcialmente correctas que una vez realizado el análisis se sabe que abundaron los errores de cálculos, muchos de ellos en operaciones algebraicas sencillas y operaciones aritméticas, las cuales forman parte de sus conocimientos previos. Los ítems uno, dos, cinco y diez tuvieron un alto porcentajes de respuestas incorrectas, en las dos primeras la mayoría de los alumnos no pudieron argumentar en términos matemáticos claros las interpretaciones el TVMI y el TFC. En la pregunta cinco se puso de manifiesto la incomprensión de la relación derivada – integral y finalmente en la décima pregunta incidió las deficiencias geométricas de los estudiantes para la construcción del sólido.

GRÁFICO 7

Resumen del porcentaje de respuestas



Análisis de confiabilidad de la prueba

En este apartado se realizará el análisis de fiabilidad de la prueba, basado en los resultados obtenidos. Con la finalidad de evaluar la utilización del instrumento en otras muestras. La confiabilidad como la define Ruiz (2002), es la exactitud que tiene el instrumento para medir lo que se pretende medir. De acuerdo a las características de esta investigación se analizará la confiabilidad de consistencia interna o de homogeneidad. Este tipo de confiabilidad permite determinar el grado en que los ítems de la prueba están correlacionados entre sí. Un alto índice de confiabilidad interna no sólo da información del desempeño de un estudiante en un ítem sino predecir su actuación en los demás.

Se seleccionó para la estimación de la confiabilidad, el procedimiento de las dos mitades usando el método de Rulon. Ruiz (2002) señala que consiste en dividir los ítems de la prueba en dos partes iguales, se calcula la diferencia de varianza de las dos mitades para cada sujeto, se divide por la varianza de los puntajes totales y se resta esta proporción de la unidad.

Es decir: $r_{tt} = 1 - \frac{S_d{}^2}{S_t{}^2}$, donde:

r_{tt} Es el coeficiente de confiabilidad,

$S_d{}^2$ Es la diferencia de la variable en las dos mitades y $S_t{}^2$ es la varianza total de la prueba.

Se dará una ponderación numérica a cada respuesta, así: Correcta (C): 3, parcialmente correcta (PC): 2 e incorrecta (I): 1

Es importante señalar que como la prueba tiene 11 ítems, para dividirla en dos mitades se eliminó el ítems 3, ya que su respuesta requiere solamente definir el TFC.

A continuación se presenta la matriz de ítems por sujeto en base a la escala definida anteriormente: C = 3, PC =2 e I = 1 para las respuestas dadas por los estudiante a la prueba final del proceso de estudio de la integral definida.

CUADRO 16

Matriz de ítems sobre los resultados de la prueba

Sujetos	Ítems										Total	Total	Total
	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11		1 al 6	7 al 11
1	2	3	1	1	2	2	2	2	1	3	19	9	10
2	1	3	3	3	2	2	3	3	1	3	24	12	12
3	1	3	2	1	2	2	2	2	2	3	20	9	11
4	2	3	2	1	3	2	2	2	2	3	22	11	11
5	1	3	2	1	3	2	2	2	2	3	21	10	11
6	1	3	2	1	3	2	2	2	1	3	20	10	10
7	1	3	3	3	2	2	3	3	1	3	24	12	12
8	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	11	5	6
9	2	3	2	1	3	2	2	2	1	1	19	11	8
10	1	1	3	3	2	3	2	2	1	3	21	10	11
11	1	3	2	3	1	2	2	2	1	3	20	10	10

Los cálculos se hicieron con el software SPSS versión 7.5 se obtuvo los siguientes resultados:

CUADRO 17

Navegador de resultados del SPSS

```
****** Method 1 (space saver) will be used for this analysis
******
  R E L I A B I L I T Y   A N A L Y S I S   -   S C A L E
  (S P L I T)



Reliability Coefficients

N of Cases =     11,0                    N of Items =  2

Correlation between forms =    ,7662     Equal-length Spearman-
Brown =     ,8676

Guttman Split-half =           ,8662     Unequal-length
Spearman-Brown =   ,8676

  1 Items in part 1                        1 Items in part 2
```

Como se puede observa el coeficiente de confiabilidad es de 0,8662 que se considera muy alto en función de la siguiente escala tomada de Ruiz (2002) (ver cuadro 18):

CUADRO 18

Escala de valores según el rtt

Rangos	Magnitud
0,81 a 1,00	Muy alta
0,61 a 0,80	Alta
0,41 a 0,60	Moderada
0,21 a 0,40	baja
0,01 a 0,20	Muy baja

De la valoración anterior se puede interpretar que el instrumento tiene un nivel alto de confiabilidad para medir los conocimientos implementados en proceso de estudio.

Análisis Onto-semiótico de dos pruebas seleccionadas al azar

La técnica de *análisis ontológico-semiótico para determinar significados* (Godino, 2003; Godino y Arrieche, 2001), permite caracterizar los significados elementales y sistémicos o praxeológicos de un objeto matemático, presentes en cualquier acto de comunicación matemática. Por otra parte, proporciona herramientas útiles para identificar situaciones que pudieran generar conflictos semióticos en la interpretación de un texto empleado en un proceso de estudio o durante la interacción didáctica.

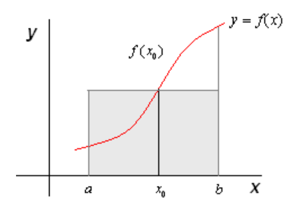
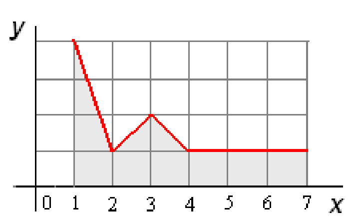
Las diferentes dimensiones en que se presentan las entidades emergentes de la actividad matemática, se pueden resumir en: *Lenguaje* (escrito, oral, gráficos), *situaciones-problema* (tareas, ejemplos, y técnicas), *conceptos* (definiciones), *propiedades* (proposiciones) y *argumentos* (justificaciones y validaciones). Estas dimensiones pueden asumirse desde las siguientes facetas: *Persona* (lo cognitivo) e *institucional*, *ostensiva* (perceptible) y *no ostensiva* (mental /gramatical), *extensiva* (ejemplo) e *intensiva* (concreto – abstracto), *elemental* (unitaria) y *sistémica* (compuesta) y *expresión* (significante) y *contenido* (significado).

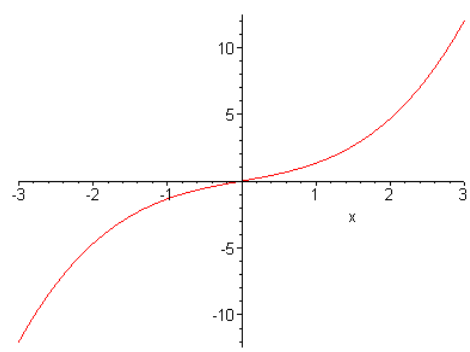
Las dos pruebas que se analizaron en este estudio fueron seleccionadas al azar, el propósito de este análisis es complementar la caracterización de los significados personales obtenidos con la clasificación de los errores y respuestas acertadas. El primer paso para realizar el análisis semiótico es dividir el texto en unidades primarias. En esta oportunidad el texto son las respuestas dadas por el alumno A1 a cada una de las preguntas que contenía la prueba final de la unidad de integración definida y sus aplicaciones (ver anexo A).

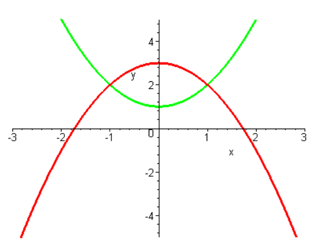
Análisis onto-semiótico de la prueba del primer estudiante A1

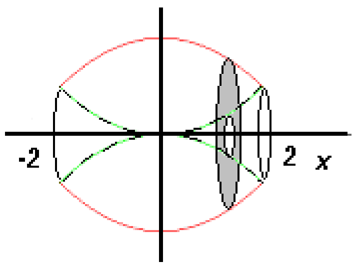
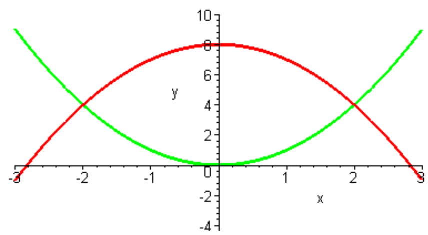
CUADRO 19

Unidades primarias de texto de las respuestas dadas a la prueba por A1

Í T E M 1	*El teorema de valor medio para integrales plantea: Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces existe $x_0 \in [a,b]$ tal que* $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0)$  Interprete geométricamente, explique.
U_1	La integral es igual al área de la curva y el área del rectángulo es también igual al área bajo la curva.
Í T E M 2	*¿Qué teorema garantiza que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$, entonces* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ *? Explique*
U_2	El teorema fundamental de cálculo porque sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ también $[a,b]$ así $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
Í T E M 3	*De acuerdo a la siguiente gráfica ¿Cuál es el valor promedio de $f(x)$ en $[1,7]$? Justifica tu respuesta.* 
U_3	$P = \frac{1}{7-1}\int_1^2 f(x)dx \quad = \frac{1}{6}.8{,}5 = \frac{8{,}5}{6} = 1{,}416$ El valor promedio es 1,416

ÍTEM 4	*Calcule:* $\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}dx$ $\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2} = u = \int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}dx = \int_1^6 \frac{1}{10v}dv = \frac{1}{10}\ln(2) + \frac{1}{10}\ln(3)$
U_4	$v = 1+5x^2$ Para (0) $v = 1+5(0)^2 = 1$ Para (x)=1 $v = 1+5(1)^2 = 6$ $dv = 10xdx$
ÍTEM 5	*Bosqueje la gráfica de una función que exprese en cada punto del intervalo el área* $[-3,3]$ *el área bajo la curva* $y = x^2 + 1$
U_5	$y = x^2 + 1 \quad en\ [-3,3]$ $x^2 + 1 = 0$ $(x-1)(x-1) = 0$ $x_1 = 1\ x = 1$  $A = \int_{-3}^{3}(x^2+1)dx$ $= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big\|_{-3}^{3}$ $= \left(\frac{(-3)^3}{3} + (-3)\right) - \left(\frac{(3)^3}{3} + (3)\right)$

	$=\left(-\frac{27}{3}-3\right)-\left(\frac{27}{3}+3\right)=-\frac{24}{3}+\frac{30}{3}$ $=\frac{54}{6}u^{2}$
ÍTEM6	*La población P, de China (en miles de millones de habitantes) la cual se puede calcular con la función $p(t)=1{,}15(1{,}014)^{t}$. Si t es el número de años desde el inicio del 2003. ¿Cuál es el valor promedio de la población China entre 2003 y 2007?*
U₆	$P=\frac{1}{7-3}\int_{3}^{5}1{,}15(1{,}014)^{t}\,dt=\left(\frac{1{,}014}{\ln 1{,}014}\right)\Big\vert_{3}^{7}$ $=\frac{1{,}15}{4}\left[\frac{(1{,}014)^{7}}{\ln(1{,}014)}-\frac{(1{,}014)^{3}}{\ln(1{,}014)}\right]$ $=1{,}232944641$ **Miles de millones de habitantes en 4 años.**
ÍTEM7	*Determine el área de la región limitada por* $f(x)=x^{2}+1 \quad y \quad g(x)=3-x^{2}$
U₇	$A=\int_{-1}^{1}\left(3-x^{2}\right)-\left(x^{2}+1\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(3-x^{2}-x^{2}-1\right)$ $A=\int_{-1}^{1}\left(-2x^{2}+2\right)dx=\left(-\frac{2x^{3}}{3}+2x\right)\Big\vert_{-1}^{1}$ $y=x^{2}+1$  $y=3-x^{2}$

U₈	$=\left(-\frac{2.1^3}{3}+2.1\right)-\left(-\frac{2(-1)^3}{3}+2.(-1)\right)$ $=\left(\frac{2}{3}+2\right)-\left(\frac{2}{3}-2\right)=\frac{2}{6}-\frac{2}{6}=-\frac{4}{6}$
Í T E M 8	*Encuentre el volumen del sólido generado al rotar entorno al eje x la región limitada por* $y=x^2$ y $y=8-x^2$.
U₉	$y=x^2$ y $y=8-x^2$ los puntos de corte (2,-2) $f=x^2$ $g=8-x^2$   $y=x^2$ $y=8-x^2$
U₁₀	Puntos de corte –2 y 2. Se rotó entorno al eje x $r_1=8-x^2$ $r_2=x^2$ $v=\int_{-2}^{2}\pi[f(x)+g(x)]dx$ $V=\int_{-2}^{2}\pi\left[8-x^2+x^2\right]dx=\pi\int_{-2}^{2}\left[(8-x^2)^2+(x^2)^2\right]dx$ $=\pi\int_{-2}^{2}\left[64-x^4+x^4\right]dx=v=\pi\left(64x-\frac{x^5}{5}\right)\Big\|_{-2}^{2}$ $=\left[\left(128-\frac{32}{5}\right)\frac{32}{5}\right]=\pi\,\frac{20}{5}+\frac{32}{5}=\frac{52}{5}u^3$ Representa el volumen del sólido

ÍTEM 9

Se inyecta cinco miligramos de colorante en una vena que llega al corazón. La concentración de colorante en la Aorta, una arteria que sale del corazón, se determina cada 2 segundos durante 22 segundos (véase la tabla). Sea c(t) la concentración en la aorta de t segundos

Segundos después de la inyección	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Concentración (mg/litros)	0	0	0,6	1,4	2,7	3,7	4,1	3,8	2,9	1,5	0,9	0,5

Aplique la regla trapezoidal para estimar $\int_0^{22} c(t)dt$

U₁₁

$$(2/2)=[0+2.0+2.0,6+2.1,4+2.2,71+2.41+2.3,8+2.2,9+2.1,5+2.0,9+2.0,5]$$

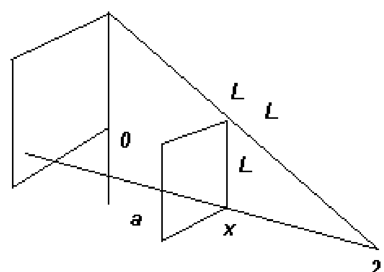
La concentración es de 44,2

ÍTEM 10

La base de un sólido es la región plana del primer cuadrante limitada por $y=1-\frac{x^2}{4}$ *el eje de las* x *y el eje de las* y*. Supongamos que las secciones transversales perpendiculares al eje* x *son cuadradas. Calcule el volumen del sólido.*

U_{12} Gráfica

$$L=1-\frac{x^2}{4} \quad b=L^2=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}\right)$$



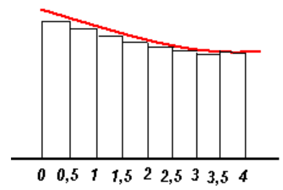
U_{13}

$$\int_0^2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{16}\right)dx=\left(1-\frac{(2)^2}{2}+\frac{0^4}{16}\right)=\left(1-\frac{4}{2}+\frac{0}{16}\right)=0,09$$

Este es el volumen del sólido

ÍTEM 11

Calcula la integral $\int_0^4 (x^2+5)dx$ *mediante sumas de por la derecha, tome h=0,5*

U₁₄	$\int_0^4 (x^2+5)dx$ 
U₁₅	$A = 0{,}5.f(0{,}5) + 0{,}5.f(1) + 0{,}5.f(1{,}5) + 0{,}5.f(2) + 0{,}5.f(2{,}5) + 0{,}5.f(3) + 0{,}5.f(3{,}5) + 0{,}5.f(4);$ El resultado de toda la suma es 45,500

CUADRO 20

Entidades matemáticas (unidades elementales) de las respuestas de A1

Praxis	Lenguaje	Logos
Situaciones: Planteamientos que se argumentan con el TVMI y el TFC. Aplicación de la Suma de Riemann para aproximar el valor de una integral Aplicaciones varias de la integral definida: Cálculo de áreas, volúmenes, valores promedios de poblaciones e integración numérica	**Términos y expresiones:** Teorema del valor medio para integrales. Teorema fundamental del cálculo. Área de una región limitada por funciones continúas. Volúmenes de sólidos de revolución y sólidos de base conocidas Valor promedio de una función. Método trapezoidal para aproximar numéricamente una integral. **Notaciones:** La propia de la integral definida $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ $= F(x)\Big\|_a^b$ **Gráficos:** Los de las preguntas: 1, 3 y el de las unidades: U_5, U_7, U_9, U_{12}, y U_{14}.	**Conceptos:** Integral definida. Área. Volumen. Valor promedio de una función. Cuadratura y cubatura. Sólido. Base. Sólido de revolución **Propiedades:** Métodos de integración. Propiedades de la integral definida. Del Álgebra básica De la geometría. **Argumentaciones:** Las referidas al TFC y el TVMI

Unidad 1: En esta unidad el estudiante tiene claro que el valor x_0 determina un rectángulo y que el área de ese rectángulo es igual al área de la región determinada por la función $f(x)$ el eje x entre a y b. No utiliza un lenguaje matemático apropiado a nivel de curso y a la manera en que se efectuó la pregunta. Se observa que este estudiante le dio un significado a la interpretación geométrica al TVMI es concordante con los significados institucionales implementados.

Unidad 2: En esta unidad A1 no duda en señalar que para que se pueda aplicar el TFC, la función debe ser continua en $[a,b]$. Quizás sea porque se aprendió el teorema como un concepto, pero no tenemos elementos para dudar que tenga claro la necesidad de que f sea continua. Lo cierto es que la respuesta dada es la esperada.

Unidad 3: La respuesta está en concordancia con los significados de referencia implementados en el proceso de enseñanza (la integral definida y el valor promedio de una función). Emplea la formalidad matemática requerida, sólo al final comenta que ese es el valor promedio de la función.

Unidad 4: Se percibe por la forma como A1 expresó su respuesta, que utilizó el software Maple para calcular la integral, esto era válido en el contrato didáctico. Con el software los estudiantes pueden hacer cambios de variables e ir paso a paso como si lo estuviese haciendo en forma manual. Esto hizo que A1 omitiera algunos pasos al escribir su procedimiento, por ejemplo no *sacó* el $1/10$ de la integral y el resultado que escribió fue la salida que da el Maple que presentó $\ln(6) = \ln(2) + \ln(3)$. Pero se considera que el

A1 al realizar paso a paso con el software el cálculo, demuestra conocimiento en el método de integración utilizado y de la integral definida.

Unidad 5: En esta unidad A1 da respuesta a la pregunta cinco. El estudiante demostró con esta respuesta tener significados personales (geométricos y analíticos) muy claros. Demuestra conocimientos en lo relacionado con la primitiva de una función y su relación con el área que determina una función. Al principio busca los puntos de corte con el eje x de $y = x^2 + 1$, lo cual no es necesario y además lo hace mal. Después, determina la primitiva general que es la función buscada, y bosqueja su gráfica. Con ello da la respuesta deseada a la pregunta sin hacer ningún comentario escrito.

Unidad 6: La respuesta al ítem 6 dada por **A1** es impecable, en el modelaje de la situación problemática y de su cálculo, por su puesto que utilizó el software. Pero demuestra significados personales en consonancia con los significados institucionales implementados. Lo demuestra la forma como escribe la integral que representa el modelo referido al promedio de la población y los pasos para calcularla. Concluye especificando a qué se refiere en valor hallado (miles de millones de habitantes en 4 años)

Unidad 7: A1 comienza graficando las funciones, hace uso del Maple, la dibuja en la prueba como la presenta el Maple. A pesar que la mayoría de los estudiantes presentan muchas deficiencias al graficar funciones, la utilización de software les permite dar solución a situaciones planteadas. Muchas veces y por cuenta propia graficaban primero con el software y después lo hacían manual.

Unidad 8: No buscó los puntos de corte de las dos curvas (parábolas) por que los consiguió con la gráfica. La integral define el área de la región, así

A1 demuestra claridad en su procedimiento, más no así en el cálculo. El área es $8/3$ lo que significa que no utilizó el Maple para calcular la integral a pesar que si lo usó para graficar. De esto último se puede inferir que el estudiante se apoya en el software en aquellas situaciones en que no se siente apto o competente. Esto puede ser contraproducente, ya que él no ve la necesidad de fortalecerse en aquellos aspectos donde presenta debilidad.

Unidad 9: En la respuesta al ítem 8, las gráficas de la funciones las hace con el Maple y en base a ella bosqueja la rotación del sólido y señala los dos radios del anillo. A1 presenta una muy buena abstracción espacial que es uno de los significados personales que históricamente son más difíciles de alcanzar.

Unidad 10: Tiene equivocación en la expresión $\int_{-2}^{2} \pi\left[\left(8-x^2\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]dx$, puede ser por distraído o no tiene claro el método del anillo para el cálculo del volumen de sólidos de revolución.

Unidad 11: Presenta confusión al aplicar el método trapezoidal, multiplicó $f(x_n)$ por 2, es decir el primero y el último valor de la tabla no se multiplica por 2. El alumno no recordó con exactitud el la fórmula de método trapezoidal.

Unidad 12: En la figura bosqueja a la función $y=1-x^2/4$ como una línea recta, en los demás aspectos la figura es bastante representativa de la situación planteada y define bien el lado genérico de la base del sólido.
Unidad 13: Presenta confusión en el cálculo de la integral.

Unidad 14: Es muy gráfico, hace uso de una función cualquiera y hace la partición correspondiente para desarrollar la suma superior de Riemann. Pone de manifiesto claridad en este objeto matemático que por lo general se hace complicado por la partición del intervalo y el proceso de cuadratura. Quizás esto sea producto del tratamiento que se le dio a este tema al inicio y la utilización del computador para visualizar las cuadraturas.

Unidad 15: Calcula con exactitud la suma de Riemann haciendo uso de Maple.

```
> f:=x->x^2+5;
```

$$f := x \to x^2 + 5$$

```
> 0.5*(f(0.5)+f(1)+f(1.5)+f(2)+f(2.5)+f(3)+f(3.5)+f(4));
```

$$45.500$$

Síntesis de los conocimientos de A1

A partir del análisis anterior, se puede inferir algunas caracterizaciones de los significados que A1 le atribuye a la integral definida, sus propiedades y aplicaciones.

Situaciones: De acuerdo por lo expresado A1 en su evaluación, él puede resolver situaciones problemáticas cuya solución conlleva a una integral definida. Tiene clara las interpretaciones geométricas del TFC y el TVMI y puede identificar situaciones que se pueden justificar con estos teoremas. Lo mismo ocurre con la integral Riemann, comprende el proceso de cuadratura presentado por Riemann en sus sumas de Riemann.

Lenguaje: A excepción a la respuesta uno donde respondió la interpretación del TVMI, en las demás respuestas uso un lenguaje matemático formal: símbolo y gráfico.

Concepto: Se nota compresión de conceptos como: Primitiva, región, área, sólido de revolución, integral definida, sumas por la derecha, integración aproximada etc.
Propiedades: Demostró conocimiento y buen uso de las propiedades de la integral definida, el TFC y el TVMI. Demostró deficiencia en el método del anillo para el cálculo de sólidos de revolución.

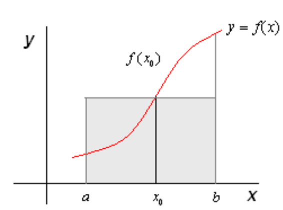
Argumentación: Presentó argumentos en los ítems 1y 2 relacionadas con el TVMI y TFC y argumentos gráficos en los ítems 5, 7, 8, 10 y 11.

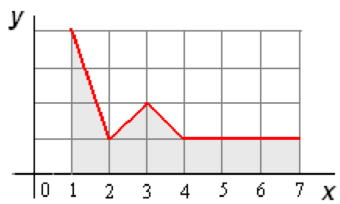
Análisis semiótico de la prueba del segundo estudiante A2

Ahora se analizará el texto de las respuestas dadas por el alumno A2 a cada una de las preguntas que contenía la prueba final de la unidad de integración definida. De igual manera como se desarrolló el análisis de la evaluación de A1**,** lo primero es determinar la unidades primarias del texto (ver anexo H).

CUADRO 21

Unidades primarias de texto de las respuestas dadas a la prueba por A2

Í T E M 1	*El teorema de valor medio para integrales plantea: Si* f *es una función continua en el intervalo* $[a,b]$, *entonces existe* $x_0 \in [a,b]$ *tal que* $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_0)$  Interprete geométricamente. Explique
U₁	Geométricamente: Existe un x_0 el cual el área bajo del rectángulo es igual al área bajo la curva.

ÍTEM 2	*¿Qué teorema garantiza que si* $F(x)$ *es una primitiva de* $f(x)$ *en* $[a,b]$*, entonces* $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ *? Explique*
U₂	El teorema fundamental de cálculo: Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y $F(x)$ una primitiva a $f(x)$ también $[a,b]$.
ÍTEM 3	*De acuerdo a la siguiente gráfica ¿Cuál es el valor promedio de* $f(x)$ *en* $[1,7]$*? Justifica tu respuesta.* 
U₃	$P = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad = \frac{1}{7-1}.8{,}5 = \frac{8{,}5}{6} \qquad P = 1{,}416$ El valor promedio de la función es 1,416
ÍTEM 4	*Calcule:* $\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2}dx$
U₄	$\int_0^1 \frac{x}{1+5x^2} = \frac{1}{10}\ln(2) + \frac{1}{10}\ln(3)$ $= \int_0^1 \frac{x}{1+5x^2} = \int_1^6 \frac{1}{10u}du = \int_1^6 \frac{1}{100}\frac{dx}{x}$ $u = 1+5x^2$ $du = \frac{dx}{x}$ $= \int \frac{1}{10(1+5x^2)} \ln\lvert x\rvert \Big\rvert_1^6$ $= \frac{1}{10}\ln(2) + \frac{1}{10}\ln(3)$ $Calculo \quad x = 1$ $1+5(1)^2 = 6$ $Calculo \quad x = 0$ $1+5(0)^2 = 1$
ÍTEM 5	*Bosqueje la gráfica de una función que exprese en cada punto del intervalo el área* $[-3,3]$ *el área bajo la curva* $y = x^2 + 1$

U₅

$$y = x^2 + 1$$

$$Cuando \quad x = -3$$
$$y = (-3)^2 + 1$$
$$y = 10$$

$$Cuando \quad x = -2$$
$$y = (-2)^2 + 1$$
$$y = 5$$

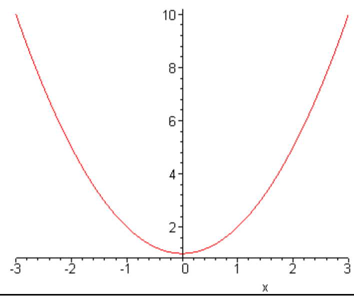
$$Cuando \quad x = -1$$
$$y = (-1)^2 + 1$$
$$y = 1$$

$$Cuando \quad x = 0$$
$$y = (0)^2 + 1$$
$$y = 1$$

$$Cuando \quad x = 1$$
$$y = (1)^2 + 1$$
$$y = 2$$

$$Cuando \quad x = 2$$
$$y = (2)^2 + 1$$
$$y = 5$$

$$Cuando \quad x = 3$$
$$y = (3)^2 + 1$$
$$y = 10$$



Í T E M 6

La población P, de China (en miles de millones de habitantes) la cual se puede calcular con la función $p(t) = 1{,}15(1{,}014)^t$. *Si* t *es el número de años desde el inicio del 2003. ¿Cuál es el valor promedio de la población China entre 2003 y 2007?*

U₆

$$P = \frac{1}{7-3}\int_3^5 1{,}15(1{,}014)^t\,dt$$

$$P = \frac{1}{4}\int_3^5 1{,}15(1{,}014)^t\,dt$$

Calcular la integral: $\int_3^7 1{,}15(1{,}014)^t\,dx$

$$= 1{,}15(1{,}014)^t\,dx$$

$$= 1{,}15\left(\frac{1{,}014}{\ln(1{,}014}\right)\Bigg|_3^7$$

$$= \left[1{,}15\left(\frac{(1{,}014)^7}{\ln(1{,}014}\right)\right] - \left[1{,}15\left(\frac{(1{,}014)^3}{\ln(1{,}014}\right)\right]$$

$$= \left[1{,}15\left(\frac{(1{,}10221)}{\ln(1{,}014}\right)\right] - \left[1{,}15\left(\frac{(1{,}0425)}{\ln(1{,}014}\right)\right]$$

$$= \frac{1{,}15}{4}\left(\frac{0{,}05962}{0{,}0139}\right)$$
$$= \frac{1{,}15}{4}4{,}2885$$
$$= \frac{4{,}9317}{4} = 1{,}23925$$

El valor promedio de la población de la China entre
2003 y 2007 es de 1,232925

Cálculo del valor promedio

$$P = \frac{1}{4}.\frac{0{,}2633}{\ln|1{,}014|} \Rightarrow P = \frac{1}{4}.\frac{0{,}2633}{0{,}0139}$$

$$P = \frac{0{,}2633}{0{,}0566} \Rightarrow P = 4{,}4317$$

ÍTEM 7

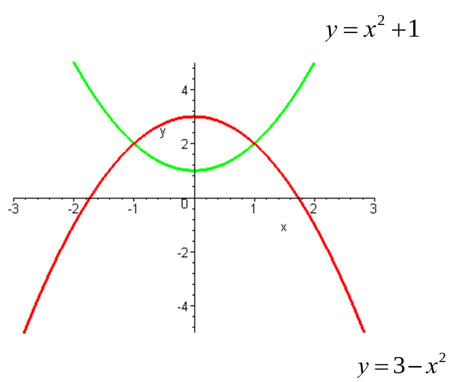
Determine el área de la región limitada por $f(x) = x^2 + 1 \quad y \quad g(x) = 3 - x^2$

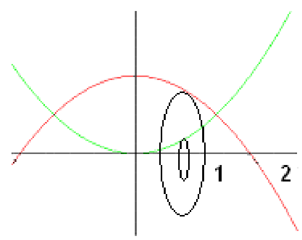
U7

$f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 3 - x^2$

<u>Solución</u>

$$x^2 + 1 = 3 - x^2$$
$$x^2 + 1 - 3 + x^2 = 0$$
$$2x^2 - 2 = 0$$
$$(x+1)(x-1) = 0$$
$$x_1 = -1; x_2 = 1$$



U₈	$A(R)=\int_{-1}^{1}\left[3-x^2-\left(x^2+1\right)\right]dy$ $\int_{-1}^{1} x^2+1-\left(3-x^2\right)\,]dy \qquad = \frac{2-6}{3}-\left(\frac{-2+6}{3}\right)$ $=\int_{-1}^{1} 2x^2 dy \qquad = \frac{-4}{3}-\frac{4}{3}$ $=\frac{2x^3}{3}-2x\Big\vert_{-1}^{1} \qquad = \frac{-4-4}{3}=A(R)=\frac{-8}{3}$ $=\left(\frac{2}{3}-2\right)-\left(-\frac{2}{3}+2\right)$ El área de la región limitada es A= $-\frac{8}{3}$
Í T E M 8	*Encuentre el volumen del sólido generado al rotar entorno al eje* x *la región limitada por* $y=x^2$ y $y=8-x^2$.
U₉	<u>Solución</u> $x^2=8-x^2$ $x^2-8+x^2=0$ $2x^2-8=0$ $(x+2)(x-2)=0$ $x_1=-2; x_2=2$ 
U₁₀	$R_1=x^2; R_2=8-x^2$ $V=\int_{-2}^{2}\pi\left[\left(x^2\right)^2-\left(8-x^2\right)^2\right]dx$ $\pi\int_{-2}^{2}\left[x^4-8+x^4\right]dx$ $\pi\int_{-2}^{2} 2x^4-16dx$ $\pi\frac{2x^5}{5}-16x\Big\vert_{-2}^{2}$ $\pi\left(2\frac{(32)}{5}-32\right)-\left(2\frac{(-32)}{5}-(-32)\right)$ $-\frac{2752}{15}+\frac{64\pi}{5}$

<table>
<tr><td>ÍTEM 9</td><td>Se inyecta cinco miligramos de colorante en una vena que llega al corazón. La concentración de colorante en la Aorta, una arteria que sale del corazón, se determina cada 2 segundos durante 22 segundos (véase la tabla). Sea c(t) la concentración en la aorta de t segundos</td></tr>
<tr><td></td><td>Aplique la regla trapezoidal para estimar $\int_0^{22} c(t)dt$

Segundos después de la inyección	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Concentración (mg/litros)	0	0	0,6	1,4	2,7	3,7	4,1	3,8	2,9	1,5	0,9	0,5
</td></tr>
<tr><td>ÍTEM 10</td><td>La base de un sólido es la región plana del primer cuadrante limitada por $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ el eje de las x y el eje de las y. Supongamos que las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadradas. Calcule el volumen del sólido.</td></tr>
<tr><td>ÍTEM 11</td><td>Calcula la integral $\int_0^4 (x^2+5)dx$ mediante sumas de por la derecha, tome h=0,5</td></tr>
<tr><td>U_{11}</td><td>$A \approx 0{,}5.f(0{,}5)+0{,}5.f(1)+0{,}5.f(1{,}5)+0{,}5.f(2)+0{,}5.f(2{,}5)+0{,}5.f(3)+0{,}5.f(3{,}5)+0{,}5.f(4);$
El resultado de toda la suma es 45,500</td></tr>
</table>

CUADRO 22

Entidades matemáticas (unidades elementales) de las respuestas de A2

Praxis	Lenguaje	Logos
Situaciones: Planteamientos que se argumentan con el TVMI y el TFC. Aplicación de la Suma de Riemann para aproximar el valor de una integral Aplicaciones varias de la integral definida: Cálculo de áreas, volúmenes, valores promedios.	**Términos y expresiones:** Teorema del valor medio para integrales. Teorema fundamental del cálculo. Área de una región limitada por funciones continúas. Volúmenes de sólidos de revolución y sólidos de base conocidas Valor promedio de una función. **Notaciones:** La propia de la integral	**Conceptos:** Integral definida. Área. Volumen. Valor promedio de una función. Cuadratura y cubatura. Sólido. Base. Sólido de revolución **Propiedades:** Métodos de integración. Propiedades de la integral

	definida **Gráficos:** Los de las preguntas: 1, 3 y el de las unidades: U_5, U_7 y U_9.	definida. Del Álgebra básica De la geometría. **Argumentaciones:** Las referidas al TFC y el TVMI.

Unidad 1: En esta unidad el estudiante tiene claro que el valor x_0 determina un rectángulo y que el área de ese rectángulo es igual al área de la región determinada por la función $f(x)$ el eje x entre a y b. Se observa que este estudiante le dio un significado a la interpretación geométrica al TVMI es concordante con los significados institucionales implementados.

Unidad 2: En esta unidad A2 no duda en señalar que para que se pueda aplicar el TFC, la función debe ser continua en $[a,b]$. Especifica las premisas del teorema, con el cual suponemos que está garantizando la igualdad $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Unidad 3: La respuesta está en concordancia con los significados de referencia implementados en el proceso de enseñanza (la integral definida y el valor promedio de una función). Emplea la formalidad matemática requerida, sólo al final comenta que ese es el valor promedio de la función.

Unidad 4: Se sospecha que A2 construyó sus significados respecto al cálculo de integrales definidas en base a los comandos del software Maple. Con el software los estudiantes pueden hacer cambios de variables e ir paso a paso como si lo estuviese haciendo en forma manual. Esto se evidencia por la incoherencia de esta unidad, el diferencial de u está mal pero la integral la presenta bien; incluso cambió correctamente los límites de integración. Posteriormente hay desvaríos en las integrales siguientes y por último presenta el valor exacto de la integral: $\ln(6)=\ln(2)+\ln(3)$. Se considera que el A2 al realizar paso a paso con el software el cálculo, demuestra conocimiento en el método de integración utilizado, pero no es capaz de compaginar la actividad formal en Matemática con lo realizado con el software.

Unidad 5: A2 demuestra que no tiene nada claro lo que le solicita el ítem 5, es probable que tenga conflictos semióticos en significados como: Primitiva o antiderivada, integral definida (definición e interpretación geométrica).

Unidad 6: La respuesta al ítem 6 dada por A2 demuestra nuevamente la falta de claridad de los conceptos y propiedades de la integral definida. Plantea bien la integral, pero no consigue calcular, se apoya en el Maple pero aumenta su confusión. Al final presenta dos resultados para el promedio solicitado, uno de ellos es la salida del software, es probable que hizo los cálculos de la integral en el computador y luego no pudo justificar el procedimiento.

Unidad 7: A2 comienza determinando los puntos del dominio de ambas funciones donde las gráficas de éstas se intersecan. Luego grafica las dos funciones, hace uso del Maple, la dibuja en la prueba como la presenta el Maple. A pesar que la mayoría de los estudiantes presentan muchas deficiencias al graficar funciones, la utilización de software les permite dar solución a situaciones planteadas. El investigador en su rol de observador participante da cuenta que veces y por cuenta propia graficaban primero con el software y después lo hacían manual, esto se podría considerar como madurez en el aprendizaje.

Unidad 8: De nuevo A2 muestra conflicto entre sus significados personales y los institucionales que se implementaron durante el proceso de estudio. Si observamos la primera integral, escribe correctamente la resta de las funciones, pero escribe dy (diferencial de y), este error lo mantiene hasta el final. Seguidamente cambia sin ningún argumento el orden de la resta de las funciones y por supuesto al final no determina el área correcta de la región.

Unidad 9: En la respuesta al ítem 8 determina correctamente los puntos donde las gráficas se intersecan. Grafica las funciones con el Maple y en base a ella bosqueja el anillo que se origina al rotar un segmento perpendicular al eje x y que une dos puntos de cada gráfica, entorno al mismo eje x. A2 presenta una muy buena abstracción espacial, no bosqueja el sólido de revolución.

Unidad 10: Escribe correctamente la integral $\int_{-2}^{2} \pi\left[\left(x^2\right)^2 - \left(8-x^2\right)^2\right]dx$, que representa el volumen de sólido generado, demostrando que construyó significados personales sobre el método del anillo en concordancia con los institucionales. A2 no obtiene el volumen correcto por deficiencia en álgebra elemental, para él $\left(8-x^2\right)^2 = 8-x^4$

Unidad 11: Calcula con exactitud la suma de Riemann haciendo uso de Maple.

```
> f:=x->x^2+5;
```

$$f := x \to x^2 + 5$$

```
> 0.5*(f(0.5)+f(1)+f(1.5)+f(2)+f(2.5)+f(3)+f(3.5)+f(4));
```

$$45.500$$

Síntesis de los conocimientos de A2

A partir del análisis anterior, se puede inferir algunas caracterizaciones de los significados que A2 le atribuye a la integral definida, sus propiedades y aplicaciones.

Situaciones: A2 no pudo resolver en su evaluación la mayoría de las situaciones problemáticas por presentar conflictos en los significados que le otorga a la integral definida. Tiene clara las interpretaciones geométricas del TFC y el TVMI y puede identificar situaciones que se pueden justificar con estos teoremas. Lo mismo ocurre con la integral Riemann, comprende el proceso de cuadratura presentado por Riemann en sus sumas de Riemann. La deficiencia en los conocimientos previos no le permite resolver las situaciones planteadas para aplicar los nuevos conocimientos.

Lenguaje: Presenta incoherencias en el lenguaje simbólico, presenta igualdades que no lo son, utiliza indistintamente dos variables al parecer como si fuesen la misma. De mejor forma maneja el lenguaje gráfico, es probable que haya influido el uso del software, pero demuestra claridad al definir los radios y el anillo del sólido de revolución.

Concepto: Se nota muy poca comprensión de conceptos como: Primitiva, integral definida, integración aproximada etc. Esta situación genera conflictos como el hecho que pueda escribir la integral que define la solución pero no la puede calcular. Nadie puede aplicar lo que no llega a conocer a profundidad. Quizás en un nuevo proceso de estudio se deba ser más formal con el aprendizaje de términos, conceptos, definiciones y teoremas antes que los procedimientos y métodos.

Propiedades: Demostró conocimiento y buen uso de los teoremas: TFC y el TVMI y deficiencias en los aspectos analíticos de la integral definida

Argumentación: Presentó argumentos en los ítems 1y 2 relacionadas con el TVMI y TFC y argumentos gráficos en los ítems 5, 7, y 8.

Síntesis y conclusiones

Este capítulo se dedicó al estudio cognitivo de un grupo de estudiantes del segundo semestre de la carrera informática del Instituto Universitario experimental de tecnología de la Victoria, una vez finalizado un proceso de estudio sobre la integral definida y sus aplicaciones. Para tal efecto se usó la noción de *significados personales* (Godino, 2003; Godino y Batanero, 1994) visto como un sistema de prácticas discursivas y operativas que implementa el alumno al resolver cierto tipo de tareas.

Para caracterizar los significados personales sobre la integral en una variable real, se analizaron las respuestas dadas por los estudiantes a los ítems de la prueba final (un cuestionario) con el fin de evaluar el rendimiento y caracterizar los errores que se presentaron y los tópicos en los cuales hubo mayor dificultad. También se aplico la técnica de *análisis onto-semiótico* Godino (2003); Arrieche y Godino, (2001) a dos pruebas seleccionadas al azar, como un complemento a esta caracterización.

En relación a la prueba

La dificultad de la prueba fue media, ya que los mayores porcentajes de respuestas se concentraron en las respuestas *parcialmente correctas* y *correctas*. Esto tiene mucha importancia si se considera que la mayoría de los 11 (once) ítems era problemas de aplicación de la integral. Sin embargo hubo dos preguntas que no tuvieron respuestas correctas.

El mayor porcentaje de respuestas incorrectas se presentó en las preguntas que tenían que ver con interpretaciones geométricas y argumentaciones de los teoremas del valor medio y el fundamental del cálculo, la relación derivada-integral y el cálculo del volumen de un sólido de secciones transversales conocidas. Las respuestas *parcialmente correctas* tuvieron un mayor porcentaje en los ítems relacionados con el cálculo de integrales, cálculo del área de una región limitada por funciones, el volumen de un sólido de revolución y el valor promedio del crecimiento de una población en un determinado número de años. Por último el mayor porcentaje de respuestas correctas se dio en las preguntas que se relacionaban con el concepto de integral definida y sus interpretaciones geométricas.

Estos significados personales puestos de manifiesto en las respuestas dadas por los estudiantes a los ítems de la prueba, están en sintonía con los significados institucionales que tiene la integral en una variable real en el IUET-LV y en las carreras técnicas universitarias. Es importante recordar que en estas instituciones, el estudio de este tópico tiene la finalidad de ser una herramienta para resolver problemas, de allí que el mayor número de respuestas correctas y parcialmente correctas estén en los ítems vinculados con el concepto e interpretación geométrica de la integral en una variable real y en sus aplicaciones en la resolución de problema.

Los diferentes tipos de errores que cometieron los estudiantes en las respuestas dadas a los ítems de la prueba fueron.

Errores conceptuales:

1. Deficiencias en los conceptos que guardan relación con el teorema del valor medio, el mismo teorema del valor medio y la relación entre los aspectos geométricos y analíticos.
2. Deficiencias en el concepto de integral definida.
3. Incomprensiones de teorema fundamental del cálculo.
4. Confusiones al diferenciar la integral indefinida de la integral definida.

5. Confusión en el proceso de cuadratura de una región limitada por dos funciones. Sobre todo al definir la altura de los rectángulos en relación con las funciones.
6. Incomprensión del volumen de un anillo o arandela.

Errores en el procedimiento:

1. En la aplicación de la regla de Barrow $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$.
2. En la aplicación de las fórmulas de integración.
3. El proceso de cuadratura: A pesar que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ algunos estudiantes escribe: $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$ para determinar el área de la región determinada por las gráficas de las funciones entre a y b.
4. En la aplicación del método del anillo para calcular sólidos de revolución. Al definir la diferencia de los radios al cuadrado; para $f(x) \geq g(x)$ en $[a,b]$, algunos estudiantes escribieron: $v = \int_a^b \pi\left[g(x)^2 - f(x)^2\right]dx$.
5. En la fórmula de integración por el método trapezoidal.

Errores en cálculos elementales: En gran medida la problemática de la deficiencia que presentan los estudiantes en cálculos elementales: Factorización, resolución de ecuaciones, graficación, etc., se solventó con la utilización del software Maple de apoyo a la enseñanza y el aprendizaje. Los estudiantes presentaron errores en:

1. Factorización de polinomios.
2. Resolución de ecuaciones.

3. Graficación de funciones.
4. Operaciones con funciones.
5. Abuso y mal uso de la notación matemática.
6. Operaciones numéricas.

En cuanto al análisis onto-semiótico de las respuestas a los ítems de la prueba por parte de los alumnos A1 y A2

El análisis onto-semiótico que se aplicó a las evaluaciones de dos estudiantes escogidos al azar e integrantes del grupo con el cual se desarrolló el proceso de estudio, da cuenta de los significados personales construidos durante su desarrollo. Las trayectorias didácticas y epistémicas permitieron que los estudiantes les otorgasen significados a aspectos referidos a la integral definida con mucha cercanía a los institucionales, mientras que en otros no sucedió así. Esto también se corresponde con la información obtenida en las reconstrucciones de las clases y las observaciones de ellas

Conclusiones del análisis a las respuestas a las pruebas:

Situaciones: De acuerdo a lo ostensible en las evaluaciones de los dos estudiantes, ellos pueden resolver situaciones problemáticas cuya solución conlleva a una integral definida, en cuanto mejoren sus conocimientos previos. Es posible mejorar esta problemática si se implementan situaciones que refuercen esos conocimientos, con recursos que permitan despertar el interés de los estudiantes. En el caso de bosquejar la gráfica de una función, a pesar de las deficiencias los alumnos encontraron que el software era un aliado para resolver situaciones problemáticas. También con las prácticas de simulaciones previas a la explicación de la integral de Riemann se pudo mejorar la abstracción geométrica a tal punto que se facilitaron las interpretaciones geométricas de la integral definida. Sin embargo los estudiantes no pudieron resolver en su evaluación la mayoría de las situaciones problemáticas por presentar conflictos en los significados que le otorga a la integral definida. Tiene clara las interpretaciones geométricas del TFC y el TVMI y puede identificar situaciones que se pueden justificar con estos teoremas, comprende el proceso de cuadratura presentado por Riemann en sus sumas de Riemann; pero las deficiencias en los conocimientos previos no les permitieron resolver las situaciones planteadas para aplicar los nuevos conocimientos.

Lenguaje: El lenguaje gráfico fue uno en los que los estudiantes alcanzaron un mayor nivel, regiones limitadas por curvas y sólidos fueron modelados gráficamente con bastante representatividad. El lenguaje simbólico fue bastante aceptable al igual que las notaciones.

Conceptos: Se nota comprensión en A1 y conflictos en A2 de los conceptos como: Primitiva, región, área, sólido de revolución, integral definida, sumas por la derecha, integración aproximada etc. Nadie puede aplicar lo que no llega a conocer a profundidad. Quizás en un nuevo proceso de estudio se deba ser más formal con el aprendizaje de términos, conceptos, definiciones y teoremas antes que los procedimientos y métodos.

Propiedades: A1 demostró conocimientos y buen uso de las propiedades de la integral definida, el TFC y el TVMI. Demostró deficiencia en el método del anillo para el cálculo de sólidos de revolución. En A2 se hizo ostensible conocimientos y buen uso de los teoremas: TFC y el TVMI. Y deficiencias en los aspectos analíticos de la integral definida

Argumentos: A2 presentó argumentos en los aspectos relacionados con el TVMI y TFC y argumentos gráficos en el cálculo del área y el volumen. A1 por su parte argumentó los ítems vinculados con el TVMI y TFC y presentó argumentos gráficos en los ítems que tenían que ver con en el cálculo del área y el volumen, y la suma de Riemann.

CONCLUSIONES GENERALES

En cada uno de los capítulos de este informe se han establecido síntesis y conclusiones sobre los hallazgos de la investigación realizada, en función de los objetivos planteados y que permitieron hacer el estudio de la integral en una variable real en el contexto de las carreras técnicas universitarias. Para finalizar establecemos las conclusiones generales de los aportes teóricos obtenidos. También se dejan abiertas muchas cuestiones que pueden ser motivo de estudio de otras investigaciones y que por las limitaciones propias a la investigación no se trataron o se estudiaron con poca profundidad, pero que para el investigador tienen relevancia.

En primer lugar estableceremos las conclusiones obtenidas en relación a los objetivos que tienen que ver con el significado institucional de la integral en una variable real, esto es; el significado que tiene para la matemática y el que le otorgan las instituciones de educación superior en el contexto de las carreras técnicas universitarias.

Objetivo específico 1.

OE1: ***Desarrollar un estudio epistémico sobre la integral en una variable real, con la finalidad de profundizar en su origen, evolución, desarrollo y las aplicaciones más relevantes y establecer las diferentes configuraciones epistémicas de cada etapa***

Como ya se indicó en el objetivo, este estudio permitió profundizar en el origen, evolución, desarrollo y en las aplicaciones más relevantes de la integral en una variable real. También fue útil para identificar algunas configuraciones epistémicas (Godino, 2003), es decir; las situaciones, las acciones, el lenguaje, las propiedades y las argumentaciones puestas en juego en cada una de las etapas del desarrollo y consolidación del cálculo integral.

El análisis epistémico se desarrolla en el capítulo IV, para ello se realizó una revisión documental de diferentes fuentes como: Tesis doctórales , libros de textos sobre historia de la matemática y del cálculo infinitesimal, informe de investigaciones, revistas especializadas, etc. de autores como: Labraña (20019: Álvarez (2003), Brunschvice (1945), Hogben (1941), García (2005), Newman (1980), Rey y Babini (2000), Scriba (1970), Boyer (1991), Villalba, (2007), Klein (1927), Piskunov (1991), Devinatz (1968) y Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2005). y fue suficiente para mostrar que el cálculo integral tiene una identidad propias en el cálculo infinitesimal, junto con el cálculo diferencial. Lo que hoy conocemos como la integral, es el producto de un largo recorrido histórico que aproximadamente se inicia en el año 450 A.C. hasta la integral de Lebesgue al principio del siglo XX.

Así muy anterior al problema de las tangentes a una curva son los intentos de calcular el área de regiones de forma diferente a las ya calculadas y el cálculo de volúmenes de sólidos de formas no conocidas. Para realizar el estudio de la integral en una variable real, se decidió considerar tres etapas: a) Los orígenes del cálculo integral, b) Problemas que dieron origen al cálculo integral y c) la evolución desarrollo y consolidación.

En los orígenes del cálculo integral, se pudo revisar con profundidad como fueron los primeros intentos de realizar cuadraturas[30] y cubaturas[31] y las acciones implementadas, el lenguaje utilizado, las propiedades empleadas y las argumentaciones dadas todo esto dio origen a la primera configuración epistémica: *La de los orígenes del cálculo integral*

---

[30] Proceso para determinar una figura rectilínea de forma conocida y cuya área sea equivalente a la que se quiere calcular.

[31] Determinar sólidos (cubos, cilindros, etc.) de volúmenes conocidos de tal forma que la suma de los volúmenes de éstos sea equivalente al volumen del sólido requerido.

Situaciones	Acciones	Leguaje	Conceptos	Propiedades	Argumentos
Cuadraturas Cubaturas	Por el método de exhausción las mejores aproximaciones numéricas que representen áreas y volúmenes	Básicamente geométrico, también aritmético	Conceptos básicos de medida, área y volumen, es decir cuadraturas y cubaturas. Nociones de continuo, infinito	Fórmulas de áreas y volúmenes, los axiomas de Arquímedes. Método de exhausción y propiedades de las razones	La doble reducción al absurdo utilizada por Arquímedes.

En la segunda etapa, en los problemas que dieron origen al cálculo integral se hizo un análisis de cómo Kepler, Pascal, Roberval, Galileo, Cavalieri, Torricelli, Wallis, etc. en diferentes épocas intentaron "integrar" y resolver diferentes problemas de área y volumen y centros de gravedad. Esto resultó muy interesante y hubo en situaciones que tratar de hacer bosquejos de sus planteamientos para una mejor comprensión. Por otra parte se percibe como se van vinculando las acciones, el lenguaje, las propiedades y argumentaciones en las diferentes resoluciones de diferentes personas. De aquí surge la segunda configuración epistémica: *La de los problemas que dieron origen al cálculo integral:*

Situaciones	Acciones	Leguaje	Conceptos	Propiedades	Argumentos
Los problemas se plantean en base a determinar áreas y volúmenes de regiones y sólidos generados por funciones del tipo algebraicas y algunas funciones transcendentes.	Las integraciones se hacen de forma numérica. Es decir por aproximaciones numéricas.	Geométrico, aritmético y algebraico.	Infinitésimo, series, cuadratura, cubatura, centro de gravedad, arcos, series infinitas, infinitésimo, indivisible, infinitamente pequeño.	Series infinitas, método de exhausción, sin doble reducción al absurdo. El método inductivo aplicado por Wallis para su integración.	método de exhausción y el método deductivo.

En la etapa de evolución desarrollo y consolidación, se pudo analizar como en la construcción del concepto de integral se fueron estableciendo relaciones entre los aspectos geométricos y analíticos cada vez con una mayor vinculación con los procesos infinitos hasta concretarse el hecho de ver a la derivada y a la integral como operaciones inversas y aquí cabe destacar la importancia de Newton y Leibniz como punto culminante. A partir de este momento se consolida la integral y comienza su proceso de generalización del concepto a un número más amplio de funciones al resolver los problemas asociados a la discontinuidad y que culmina con la incorporación de la teoría de la medida. De esta etapa surgen cuatro configuraciones cuyos cuadros resúmenes presentamos a continuación:

Configuración epistémica impulsada por Newton y que tiene que ver con la relación inversa entre diferenciación e integración.

Situaciones	Acciones	Leguaje	Conceptos	Propiedades	Argumentos
Problemas que requerían de un mayor número de elementos matemáticos para su solución, como los planteados por Newton: Fluentes y fluxiones y de ellos los problemas	Expresar funciones como series infinitas de potencias y calcular el área como la inversa de la diferenciación. Utilizar las series infinitas de potencias como una técnica de integración.	Geométrico, simbólico, notaciones y gráficos.	Series de potencias, cuadraturas, curvaturas, tangentes, fluentes fluxiones, cantidades infinitamente pequeñas.	Utilizaba la recién conocida relación inversa entre los problemas de tangente y los de cuadratura. Desarrollos binomiales.	La integración como una suma infinita. Por otra parte usaba rigurosamente el método deductivo con el cual se permitía hacer generalizaciones.

Configuración epistémica impulsada por los trabajos de Leibniz y que tiene que ver con el concepto de integral visto como una suma de elementos infinitesimales.

Situaciones	Acciones	Leguaje	Conceptos	Propiedades	Argumentos
Se quiere generalizar la integral a un grupo más amplio de problemas y elaborar símbolos, notaciones y lenguaje para éstos.	La sumatoria como la inversa de la diferenciación. Cuadraturas como suma de infinitos rectángulos. Se estableció el Teorema Fundamental del Cálculo. La cuadratura es el problema inverso a la tangente. Se estudian series infinitas.	Simbólico y numérico.	Series infinitas, secuencias de diferencias, cuadraturas, curvaturas, tangente y proceso infinitos.	Para obtener el valor del área de una región cerrada, basta con sumar el área de los rectángulos, porque los triángulos son infinitamente pequeños.	Se usaba rigurosamente el método deductivo con el cual se permitía hacer generalizaciones.

Configuración epistémica impulsada por el desarrollo teórico para la integral a partir de siglo XVIII.

Situaciones	Acciones	Leguaje	Conceptos	Propiedades	Argumentos
El fundamento de los conceptos fundamentales del cálculo integral, el rigor matemático de la demostración como medio de garantía teórica. Se llega a la integración de Cauchy-Riemann.	Incluir la aritmética en la integración, generalizar la integral de Cauchy. Los conceptos de límites e infinitésimos, La integral como el límite de una suma. Integración de funciones en la primitiva no existe en todo el intervalo.	El de el Análisis Funcional, El de la Geometría	Función, límite, infinitésimo, continuidad y discontinuidad, series convergentes, derivada, diferencial e integral definida.	El Teorema Fundamental de Cálculo, Teorema del Valor Medio, relaciones entre las existencias del límite de una suma y el límite de las funciones arbitrarias de Fourier.	Los propios de rigor matemático de las demostraciones.

Configuración epistémica impulsada por el desarrollo de la Teoría de la Medida.

Situaciones	Acciones	Leguaje	Conceptos	Propiedades	Argumentos
Generalizar de forma más amplia el concepto de integral con la aplicación de la Teoría de la Medida.	La condición necesaria y suficiente de Riemann, para la unicidad de las sumas integrables. Demostraciones más amplias de: El Teorema fundamental del Cálculo y el Teorema del Valor medio.	El de el análisis, pero en términos conjuntista y topológico.	Integral, conjuntos medible, función medible, sumas superiores y sumas inferiores.	Las propias de la teoría de la medida y la integral de Lebesgue.	Una deducción rigurosa fundamentada en la integral definida y en base a la teoría de Borel.

Este estudio nos permitió incrementar los conocimientos sobre el cálculo integral y además fue de mucha utilidad para planificar experiencias de enseñanza y aprendizaje durante el proceso de estudio.

Objetivo Específico 2.

OE2: Hacer un estudio comparativo de los currículos de las carreras técnicas universitarias, para establecer las relaciones que tiene la integral en una variable real con las diferentes áreas del saber presentes en la formación.

Para el logro de este objetivo, en el capítulo V se desarrolló un estudio comparativo de los currículos y programas de las carreras técnicas universitarias. Se seleccionaron dos universidades nacionales de reconocida trayectoria, y que tienen la carrera de ingeniería, la Universidad Central de Venezuela (UCV) y la Universidad de Carabobo (UC) y, el Instituto universitario de Tecnología de La Victoria (IUTE- LV). Las asignaturas donde se dicta el cálculo integral son: Matemática II, Cálculo II o Análisis II y se obtuvieron las siguientes conclusiones:

7. Las tres instituciones están comprometidas con el artículo 27 de la LOE en su capítulo V destinado a la Educación Superior, por lo que forma de manera integral, profesionales universitarios en carreras técnicas, a través de sus niveles de Pregrado y Postgrado capacitados en conocimientos científicos y tecnológicos, además de valores y actitudes que les permitan un ejercicio profesional apropiado a las exigencias actuales.
8. La Matemática tiene un gran espacio dentro de formación tecnológica, ya que esta se basa en una formación científica como la Matemática y la Física. En las estructuras curriculares de estas carreras: ingeniería o técnico superior universitario, se puede ver una amplia formación matemática y donde el cálculo integral tiene muchas aplicaciones en los procesos tecnológicos.
9. Los objetivos generales de los cursos de Cálculo II o Matemática II del segundo semestre de estas carreras (estudiantes de 17 o más años) persiguen que los discentes puedan aplicar en cálculo integral a problemas geométricos y físicos de forma clara, precisa y ordenada.
10. En el contexto de estas carreras, la matemática juega un papel de herramienta para el manejo de situaciones y asuntos vinculados con la tecnología, pero además se estima que ésta contribuye a: a) El desarrollo de la capacidad analítica, b) el manejo del lenguaje matemático como base del lenguaje científico, c) modelar y resolver problemas y d) apreciar la importancia de la matemática en el aprendizaje de conocimientos futuros.

11. En la revisión de los contenidos de los programas de Cálculo II y Matemática II se nota una misma secuencia para el apartado del cálculo integral esta es: a) Cálculo de la Primitiva, b) métodos de integración, c) la integral indefinida, la regla de Barrow y d) aplicaciones de la integral. Se hace énfasis en los aspectos a y b, ya que se persigue adiestrar al estudiante en el cálculo de integrales
12. Si bien la secuencia de los contenidos se presentan en el orden que se señalan en el numeral anterior, con énfasis en el cálculo de primitivas y los métodos de integración, no se indican estrategias que contribuyan a armonizar el tránsito por los diferentes sistemas semióticos de representación. Lara (1997) menciona del gráfico al numérico; del numérico al algebraico; del algebraico al gráfico; del verbal al gráfico;…etc.
13. Al revisar los árboles de prelaciones del currículo de estas carreras, se puede establecer que la comprensión del cálculo integral es preponderante para comprender los tópicos matemáticos siguientes de la cadena de formación como: Ecuaciones diferenciales, cálculo vectorial, funciones de varias variables, estadística probabilística, entre otras; que a su vez son requisitos indispensables para otras materias propias a su formación técnica.

En función de las coincidencias en cuanto a la forma como se presentan los contenidos del cálculo integral en las carreras e instituciones analizadas, se elaboró la trayectoria didáctica adaptada al programa de Matemática II del IUET-La Victoria.

El tercer objetivo específico se refiere a otro aspecto medular de esta investigación, la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida.

Objetivo específico 3.

OE3: ***Caracterizar la idoneidad didáctica tras Implementar un proceso de estudio sobre la enseñanza y aprendizaje de la integral en una variable real, con un grupo de estudiantes de la carrera informática del IUET-La Victoria.***

Para el logro de este objetivo, se analizó la idoneidad didáctica de cinco sesiones de clases (capítulo V) de un proceso de estudio sobre la integral definida y sus aplicaciones que se implementó con un grupo de estudiantes de la asignatura Matemática II de la carrera Informática del IUET-LV. En estas cinco sesiones se consideraron los aspectos más relevantes de acuerdo a los componentes e indicadores expuestos en el capítulo VII (cuadro 15, p.140). De este análisis podemos establecer las siguientes conclusiones:

La primera conclusión es la importancia que tiene dentro de EOS el *Análisis de la idoneidad didáctica de un proceso de estudio de la matemática*, para hacer perfectibles y dinámicas las didácticas que implementamos en nuestras actividades docentes cuando enseñamos tópicos matemáticos. A continuación se presentan los aspectos más significativos del análisis que son de mucha utilidad para planear un nuevo proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida y sus aplicaciones, en cuanto a:

La *idoneidad epistémica*:

1. La selección y distribución de los contenidos es representativa de los contenidos matemáticos propios al nivel de escolaridad escogida para el estudio.
2. En relación a la integral de Riemann, ésta se debate entre argumentos geométricos y los analíticos, lo cual requiere armonizar entre diferentes configuraciones epistémicas. En el estudio se crearon situaciones muy ricas apoyadas por el computador para la

comprensión y aprendizaje de las acciones geométricas, pero no sucedió lo mismo con aspectos analíticos.

3. Los aspectos vinculados con la teoría de conjuntos, el límite de una sumatoria necesarios para ejemplificar el proceso de integración de Riemann, fueron una fuente de conflictos para su comprensión, se debieron implementar experiencias previas para nivelar las deficiencias en estos temas.
4. Se puede decir que durante el proceso de estudio se utilizó un leguaje apropiado a los estudiantes del segundo semestre de una carrera técnica universitaria.
5. No se demostraron los teoremas (TFC y TVM) y en general no se hicieron validaciones y comprobaciones, los estudiantes hacían comprobación haciendo uso del computador.
6. Se pudieron presentar un mayor número de situaciones problemáticas propias al entorno sociocultural y profesional del estudiante.

La *idoneidad cognitiva*:

1. Se percibió que con la utilización del software matemático (Maple) para las simulaciones geométricas de cuadraturas de regiones limitadas por funciones, permitió ubicar este proceso en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes. Con las actividades apoyadas por el software los estudiantes le otorgaron significados al proceso de cuadratura, al concepto de infinitésimo y a la integral definida con bastante aproximación a los significados institucionales.
2. Con el apoyo del computador el estudiante pudo demostrar expresiones como: $1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ requeridas para el cálculo de una integral por el método de Riemann, a pesar de que no conocen el método de inducción completa.

3. Se consideraron situaciones problemáticas apropiadas para los contenidos, considerando las diferencias individuales y en un ambiente de libertad propicio para que se den las experiencias de aprendizaje.
4. Las pruebas en general permitieron evaluar el aprendizaje de los estudiantes y en gran parte el proceso de enseñanza.
5. En algunas pruebas se refleja la manera muy algorítmica con que los estudiantes resolvieron los problemas que se corresponde como el profesor planteaba los ejemplos.
6. A medida que transcurrían las sesiones de clase se notaba un aumento de la participación de los estudiantes, lo que da cuenta que esto le han dado significados a los nuevos conocimientos.
7. Los estudiantes hicieron buen uso de computador en las sesiones prácticas de resolución de problemas. A veces hacían los cálculos a manos y después lo comprobaban con el computador y en otras actuaban a la inversa.

La *idoneidad interaccional:*

En todas las sesiones de clase y de manera más o menos constante se dieron las siguientes interacciones: Profesor-alumno, alumno-alumno, profesor-computador y alumno-computador. Como es conocido la enseñanza y aprendizaje del concepto de la integral definida, es un tópico neurálgico o complicado, sin embargo con la trayectoria didáctica diseñada y el uso del computador, se presentaron las siguientes interacciones: Profesor-Alumno, Alumno-Computador, Profesor-Computador y Alumno-Alumno. Estas relaciones favorecieron en muchos momentos la negociación para solventar conflictos en los significados personales que se presentaron durante las explicaciones sobre la integral definida; en sus nociones iniciales, en su definición formal basada en el proceso de Riemann. Y en sus aplicaciones

La *idoneidad emocional:*

La utilización de un software matemático, con el cual se puede simular la construcción de rectángulos de acuerdo a una partición de un segmento del eje x bien sea por el extremo inferior o superior o de un valor intermedio para cuadrar la región limitada por una curva, el eje x, entre dos valores de éste, para graficar funciones, hallar puntos de cortes entre gráficas y calcular integrales paso a paso. Fue acertado para motivar al estudiante por el estudio de la integral definida. En las observaciones de clase el observador señala "Los alumnos se interesan por la actividad, se consultan entre sí y comparten sus hallazgos" (ver anexo F). Las tareas diseñadas para las clases, apuntan a despertar el interés de los discentes. La clase se desarrolló en el laboratorio, cada estudiante tenía una computadora para sí, la podía utilizar de apoyo en todo momento. Aunada a esta motivación el docente facilita la comprobación por cuenta propia y la responsabilidad, ya que con ese apoyo se sentían comprometidos a entregar las tareas individuales asignadas.

La *idoneidad ecológica:*

Se planificó una trayectoria didáctica para la integral definida donde se quería que el estudiante comprenda, interprete y aplique la integral definida sin la necesidad de profundizar en demostraciones de teoremas que son propios del análisis. La implementación del proceso de estudio se adaptó a los significados institucionales pretendidos en el currículo del IUTE-LV. Los contenidos están en sintonía con los significados institucionales de referencia, la integral definida sus propiedades y los teoremas más importantes forman parte del currículo de las carreras técnicas universitarias como, ingeniería y técnico superior universitario. Los temas se abordó en base a la apertura hacia la innovación didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhemi, 2006) en su descriptor de integración de nueva tecnología. Quizás

se hubiese podido utilizar ejercicios más cercanos al ambiente social de los estudiantes y propios a su carrera.
Objetivo específico 4.

OE4: Caracterizar los significados personales que sobre la integral en una variable real construyan los alumnos tras el proceso de estudio y evaluar sus aplicaciones en la resolución de problemas.

Síntesis y conclusiones

En relación a la prueba

Una vez analizada la prueba final y de haber establecido cuando un ítem está correcto, parcialmente correcto e incorrecto se pudieron establecer las siguientes conclusiones:

1. Se puede considerar que la dificultad de la prueba fue media, ya que los mayores porcentajes de respuestas se concentró en las respuestas *parcialmente correctas* y *correctas*. Esto tiene mucha importancia si se considera que la mayoría de los 11 (once) ítems era problemas de aplicación de la integral. Sin embargo hubo dos preguntas que no tuvieron respuestas correctas.
2. El mayor porcentaje de respuestas incorrectas se presentó en las preguntas que tenían que ver con interpretaciones geométricas y argumentaciones de los teoremas del valor medio y el fundamental del cálculo, la relación derivada-integral y el cálculo del volumen de un sólido de secciones transversales conocidas.
3. Las respuestas *parcialmente correctas* tuvieron un mayor porcentaje en los ítems relacionados con el cálculo de integrales, cálculo del área de una región limitada por funciones, el volumen de un sólido de revolución y el cálculo del valor promedio de una población en un determinado número de años.

4. El mayor porcentaje de respuestas correctas se dio en las preguntas que se relacionaban con el concepto de integral definida y sus interpretaciones geométricas.

Estos significados personales puestos de manifiesto en las respuestas dadas por los estudiantes a los ítems de la prueba, están en sintonía con los significados institucionales que tiene la integral en una variable real en el IUET-LV y en las carreras técnicas universitarias. Es importante recordar que en estas instituciones, el estudio de este tópico tiene la finalidad de ser una herramienta para resolver problemas, de allí que el mayor número de respuestas correctas y parcialmente correcta estén en los ítems vinculados con el concepto e interpretación geométrica de la integral en una variable real y en sus aplicaciones en la resolución de problema.

A continuación presentaremos los diferentes tipos de errores que cometieron los estudiantes en las respuestas dadas a los ítems de la prueba y que clasificamos en: conceptuales, de procedimiento y en cálculos elementales.

Errores conceptuales:

7. Deficiencias en los conceptos que guardan relación con el teorema del valor medio, el mismo teorema del valor medio y la relación entre los aspectos geométricos y analíticos.
8. Deficiencias en el concepto de integral definida.
9. Incomprensiones de teorema fundamental del cálculo.
10. Confusiones al diferenciar la integral indefinida de la integral definida.
11. Confusión en el proceso de cuadratura de una región limitada por dos funciones. Sobre todo al definir la altura de los rectángulos en relación con las funciones.
12. Incomprensión del volumen de un anillo o arandela.

Errores en el procedimiento:

6. En la aplicación de la regla de Barrow.

7. En la aplicación de las fórmulas de integración.
8. El proceso de cuadratura: A pesar que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ algunos estudiantes escribe: $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$ para determinar el área de la región determinada por las gráficas de las funciones ente a y b.
9. En la aplicación del método del anillo para calcular sólidos de revolución. Al definir la diferencia de los radios al cuadrado.
10. En la fórmula de integración por el método trapezoidal.

Errores en cálculos elementales: En gran medida la problemática de la deficiencia que presentan los estudiantes en cálculos elementales: Factorización, resolución de ecuaciones, graficación, etc., se solventó con la utilización del software Maple de apoyo a la enseñanza y el aprendizaje. Los estudiantes presentaron errores en:

7. Factorización de polinomios.
8. Resolución de ecuaciones.
9. Graficación de funciones.
10. Operaciones con funciones.
11. Abuso y mal uso de la notación matemática.
12. Operaciones numéricas.

En una reflexión final se puede decir que la gran cantidad de errores en cálculos elementales superan con creces a los cometidos en los conceptos y procedimientos relacionados con la integral. Se puede decir que en la resolución de problemas de aplicación de la integral está condicionada en gran medida por las deficiencias en conocimientos y destrezas elementales que presentan los estudiantes y que al parecer no las pueden solventar durante el curso.

En cuanto al análisis onto-semiótico de las respuestas a los ítems de la prueba por parte de los alumnos A1 y A2

El análisis onto-semiótico que se aplicó a las evaluaciones de dos estudiantes escogidos al azar e integrantes del grupo con el cual se desarrolló el proceso de estudio, da cuenta de los significados personales que los estudiantes le otorgaron a la integral en una variable real.

A continuación se presentan a manera de conclusiones una síntesis de los significados de A1 y A2:

Situaciones: De acuerdo a lo ostensible en las evaluaciones de los dos estudiantes, ellos pueden resolver situaciones problemáticas cuya solución conlleva a una integral definida, en cuanto mejoren sus conocimientos previos. Es posible mejorar esta problemática si se implementan situaciones que refuercen esos conocimientos, con recursos que permitan despertar el interés de los estudiantes. En el caso de bosquejar la gráfica de una función, a pesar de las deficiencias los alumnos encontraron que el software era un aliado para resolver situaciones problemáticas. También con las prácticas de simulaciones previas a la explicación de la integral de Riemann se pudo mejorar la abstracción geométrica a tal punto que se facilitaron las interpretaciones geométricas de la integral definida. Sin embargo los dos estudiantes no pudieron resolver en su evaluación la mayoría de las situaciones problemáticas por presentar conflictos en los significados que le otorga a la integral definida. Tienen clara las interpretaciones geométricas del TFC y el TVMI y pueden identificar situaciones que se pueden justificar con estos teoremas, comprender el proceso de cuadratura presentado por Riemann en sus sumas de Riemann; pero Las deficiencias en los conocimientos previos no les permitieron resolver las situaciones planteadas al aplicar los nuevos conocimientos.

Lenguaje: El lenguaje gráfico fue uno en los que los estudiantes alcanzaron un mayor nivel, regiones limitadas por curvas y sólidos fueron modelados gráficamente con bastante representatividad. El lenguaje simbólico fue bastante aceptable al igual que las notaciones.

Conceptos: Se nota comprensión en A1 y conflictos en A2 de los conceptos como: Primitiva, región, área, sólido de revolución, integral definida, sumas por la derecha, integración aproximada etc. Nadie puede aplicar lo que no llega a conocer a profundidad. Quizás en un nuevo proceso de estudio se deba ser más formal con el aprendizaje de términos, conceptos, definiciones y teoremas antes que los procedimientos y métodos.

Propiedades: A1 demostró conocimientos y buen uso de las propiedades de la integral definida, el TFC y el TVMI. Demostró deficiencia en el método del anillo para el cálculo de sólidos de revolución. En A2 se hizo ostensible conocimientos y buen uso de los teoremas: TFC y el TVMI. y deficiencias en los aspectos analíticos de la integral definida

Argumentos: A2 presentó argumentos en los aspectos relacionados con el TVMI y TFC y argumentos gráficos en el cálculo del área y el volumen. A1 por su parte argumentó los ítems vinculados con el TVMI y TFC y presentó argumentos gráficos en los ítems que tenían que ver con en el cálculo del área y el volumen, y la suma de Riemann.

Con el análisis onto-semiótico a estas dos evaluaciones se pone de manifiesto la gran complejidad que presentan los procesos de enseñanza y aprendizaje, es por ello que la didáctica de la matemática en medio de sus limitación constantemente desarrolla investigaciones tendientes a dar aportes para mejorar las situaciones problemáticas en búsqueda de mejores procesos de estudios.

A manera de conclusión final de nuestra investigación se puede decir que es necesario profundizar en los tópicos del cálculo y escudriñar en sus origen, desarrollo y consolidación para encontrar nuevas situaciones de aprendizaje. Abrir un mayor número de posibilidades para abordar tópicos como la integral en una variable real desde perspectivas más atractivas y beneficiosas dentro de las convenciones que rige a la matemática, las instituciones educativas y el entorno social y cultural.

Aportes de la investigación y problemas abiertos.

1. El estudio epistemológico que se desarrolló para el cálculo integral es en nuestra opinión uno de los aportes más significativos. Las seis configuraciones didácticas determinadas de acuerdo a las diferentes etapas: a)Los orígenes del cálculo integral, b)la de los problemas que dieron origen al cálculo integral y c) la evolución desarrollo y consolidación son de mucha utilidad ya que ofrecen situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, proposiciones y argumentaciones que se manejaron en las diferentes épocas y que pueden servir como una guía para que el docente pueda hacer sus propias indagaciones en la búsqueda de situaciones para nuevas experiencias de enseñanza y aprendizaje.
2. Este estudio planificó el proceso de estudio de la integral definida en base a una de las seis configuraciones, en este caso la que más se adaptaba al currículo y los significados institucionales del IUET-LV, sin embargo queda abierta para otras investigación utilizar aspectos relevantes de otra de las configuraciones o de combinaciones de ellas.
3. Otro aporte de esta investigación es la utilización didáctica del software Maple versión 8. Estuvo enmarcado en un proceso didáctico en que era utilizado tanto por el profesor para las actividades de clase y los estudiantes para el proceso de aprendizaje, la resolución de problemas y en las evaluaciones.
4. El análisis de la idoneidad didáctica del proceso de estudio basado en la reconstrucción de las clases basada en la grabaciones de audio, los apuntes de clase y la observación no participante una triangulación que produjo abundante información confiable que permitió establecer en

función de los componentes e indicadores de las diferentes idoneidades (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica) asignar una valor numérico y visualizar la idoneidad de cada sesión de clase analizada. Queda abierto establecer diseñar y validar instrumentos cuantitativos y cualitativos para valorar la idoneidad didáctica de un proceso de estudio.

5. Otro aporte se refiere a la descripción y clasificación de los errores más comunes en los estudiantes tanto en los aspectos teóricos de la integral como en sus aplicaciones en la resolución de problemas. Esta faceta de la investigación nos aportó suficiente información para que el docente implemente situaciones tendientes a que los estudiantes mejores estas deficiencias en una actividad remediar o un nuevo proceso de estudio.
6. Se cree que en una investigación en la misma orientación de la presente, se debe utilizar la técnica de análisis onto-semiótico en un mayor número de situaciones como: En las reconstrucciones de las clases, en los informes que entregan los estudiantes de los problemas y ejercicios resueltos y en un número mayor de evaluaciones.
7. Queda como un problema abierto desarrollar este proceso de enseñanza y aprendizaje para la integral en una variable real, de la manera como se diseñó y con los recursos que se utilizaron y comparar el rendimiento con el que se obtiene en otros procesos de enseñanza y aprendizaje para el mismo tópico.

Referencias

Alonso, I y Martínez, N. (2003). Resolución de problemas matemáticos. Una caracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de la Matemática. *Pedagógica Universitaria*, 8(3), 81-88.

Álvarez, R. (2003). *De cómo se gestó y vino al mundo el Cálculo Infinitesimal. Historia del Cálculo*. [Documento en línea] Disponible en: www.usuarios.tyco.es/juanbeltran/id377.htm. [Consultada 2006, mayo, 5]

Arrieche, M. (2007). Seminario de Formación: Significados institucionales de los números naturales en la formación de profesores de Educación Básica. Seminario presentado en el IX Simposio de Educación Matemática. Chivilcoy-Buenos Aires- Argentina.

Arrieche, M. (2003).Caracterización de los significados personales con respecto a las nociones básicas de teoría de conjuntos en un grupo de maestros de educación primaria en proceso de formación. *Paradigma*, 24(1), 101-116.

Arrieche, M. (2003). Línea de Investigación Perspectivas del Enfoque Semiótico-Antropológico para la Didáctica de la Matemática (LIPESA). *Paradigma*, 24(2), 151-160.

Arrieche, M. (2002). *La Teoría de Conjuntos en la Formación de Maestros. Facetas y factores condicionantes del estudio de una Teoría Matemática*. Tesis Doctoral publicada, Universidad de Granada, España.

Arrieche, M y Ortiz, J. (1999). *Estudio comparativo de los currículos de España y Venezuela.* Material inédito elaborado en la Cátedra de Diseño, desarrollo y evaluación de currículos de Matemática del Doctorado en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. España.

Arrieta, J. (2002). *El Cálculo Integral y la modelización Matemática.* [Documento en línea]. Disponible en: www.mat.ucm.es/˜rrdelrio/documentos/jarrieta.pdf. [Consultada: 2005,mayo 6].

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds): *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* grupo Editorial Iberoamericano. México, pp.97-140.

Ary, O., Jacobs, C. y Razavich, A. (1990). *Investigación Pedagógica.* México: Iberoamericana.

Azcárate, C. y otros (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: síntesis.

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática venezolana*, 10(1) 135-149.

Blanco, R. (2005). *Las investigaciones sobre Didáctica de la Matemática*. [Documento en línea]. Disponible en: http://www.monografias.com/trabajos19/didactica-de-matematica/didactica-de-atematica.html [Consultada: 2005, agosto 17]

Blaxter, L., Hughes, C. y Tight, M. (2002). *Cómo se hace una investigación*. España: Gedisa Editores.

Blum, Galbranith, Henn y Niss (2006). *Modelling and applications in Mathematics Education.* Editorial Springer. New York.

Boyer, C. (1986). Historia de la Matemática. Madrid. Alianza Editorial.

Brunschvicg, L. (1945). Las Etapas de la Filosofía Matemática. Lautaro Buenos Aires.

Carlos, E. (2000). La superación del profesor de matemática en la universidad de hoy. Una experiencia cubana. *Acta latinoamericana de matemática educativa*. Vol. XIII. Mexico.

Carballo, D. (2001).*Estudios antropológicos. Una revolución al entendimiento tradicional del consumidor* [Documento en línea]. Disponible en: http://www.sil.org/capacitar/antro/trabajcampo.pdf. [consultada: 2006, junio, 5].

Catsigeras, E. (2006). Una experiencia de enseñanza semipresencial del cálculo. Alternativas: serie espacio pedagógico. Boletín de Novedades CREDI. Organización de Estados Iberoamericanos Para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Año XI, No. 43

Cerda, C. (2002). *Elementos a considerar para integrar las tecnologías del aprendizaje de manera más eficiente en el proceso de enseñanza aprendizaje* [Documento en línea]. Disponible en: www.mingaonline.uach.cl/scielo.php?script=sci_arttex&pid=S716-50X2002002800011&lng=es&nrm=iso-60k- [Consultada: 2005, febrero, 15]

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 17-54.

Chevallard, Y., Bosch. M. y Gascon, J. (1997). *Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: ICE Universidad de Barcelona y Ed. Horsori.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en la Educación Superior. Una socioepistemología de la integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 8 , No. 3 (pp. 265-286). México.

Crisóstomo, E., Ordoñez, L., Contreras, A. y Godino, J.D. (2005). Recostrucción del Significado Global de la Integral definida desde la Perspectiva de la Didáctica de la Matemática. Investigación presentada en el Primer Congreso Internacional socre Aplicaciones y desarrollos de la teoría de las Funciones semióticas. Pp. 125-166, Servicios de publicaciones de la Universidad de Jaén. España.

D' Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática.* Didáctica del Magisterio. Coperativa Editorial Magisterio. Bogotá.

Devinatz, A. (1968). Advanced Calculus. Holt, Rinehart and Winston. USA.

Eco, U. (1991). *Tratado de semiótica general.* Barcelona: Lumen, 1979.

García, v. (2005). El origen de la integral. [Documento en línea]. Disponible en: WWW.uam.es/personal.pdi/ciencias/ezuazua/inforweb/trabajodehistoria/Elorigendelaintegral.doc [consultada: 2006, noviembre 17]

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de la matemática como disciplina científica. *Recherches en Dídactique des Mathemátiques,* 18/1, (52): 7-33.

Godino, J. D. Bencomo, D. Font, V. y Wihelmi, M. R. (2006). Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de un Proceso de estudio de la Matemática. Versión ampliada de la ponencia invitada en el X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SIEIEM), Huesca (España), 7-9 Septiembre 2006

Godino, J. D., Contrera, A. y Font, V. (2006). Análisis del proceso de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Trabajo de investigación presentado para optar a la cátedra de universidad de Didáctica de la Matemática de la universidad de Granada, Granada.

Godino, J. D. (2001). *Confrontación de herramientas teóricas para el análisis cognitivos en didáctica de la matemática* [Documento en línea]. Ponencia presentada en la XVI reunión del Seminario Interuniversitario de investigación en Didáctica de la Matemática (SIIDM) Huesca. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/si-idm/ [Consultada: 2004, junio, 17]

Godino, J. D. (1999a). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. En T. Sierra (Ed.). *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* (pp. 196-212). Valladolid.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22(2/3), 237-284.

Godino, J. D. y Arrieche, M. (2001, Septiembre). *El análisis semiótico como técnica para determinar significados*. Comunicación presentada en el V Simposio de la SEIEM, Grupo de Trabajo DMDC, Almería.

Goetz, J. y Lecompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educación*. Madrid: Morata.

González, F. (1997). *Procesos Cognitivos y Metacognitivos que activan los estudiantes universitarios venezolanos cuando resuelven problemas matemáticos.* Tesis Doctoral. Universidad de Carabobo. Valencia.

Grijalva, A. (2008). Estudio Histórico-Epistémico de la Integral de una Función (De Leibniz a Riemann) Resumen de la vigésima segunda Reunión latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 22) Ciudad de México del 1 al 4 de junio de 2008. Instituto Politécnico Nacional.

Gruñid, S. (1991). *Producto o praxis del currículo.* Madrid. Morata.

Hershkowitz, Parzzysz y Van Dermolen (1996). Space and Shape. In Bishop & otherds (EDs). International Handbook of Mathematics (Part 1, pp. 161-204) Dordrecht, Netherlannds: Kluwer Academic Plublishers.

Hjemslev, L. (1943). Prolegómenos a una teoría del lenguaje. Madrid: Gredos, 1971.

Hogben, L. (1941). La Matemática en la vida del hombre. Iberia- Joaquín Gil editores. Barcelona.

Hurtado, I y Toro, J. (1999). *Paradigmas y Métodos de Investigación, en tiempo de cambios*. Valencia: Episteme Consultores Asociados.

Kein, F. (1927). Matemática Elemental desde el punto de vista superior. Volumen 1. Biblioteca Matemática. Madrid.

Labraña, P. A. (2001). Avaliación das Concepcións dos alumnos de COU e bacharelato acerca do significado do cálculo integral. Tesis doctoral de la universidad de Santiago de Compostela.

Lara, H. (1997). La enseñanza del los conceptos de límite y continuidad de funciones. Memorias del Seminario Nacional: Calculadoras y Computadoras en Educación Matemática (pp. 127 – 132). Sonora.

Larson, R. Hostetler, R. y Edwards, B. (1999**).** Cálculo. Volumen 1. Sexta Edición. McGrawHill. España.

Ley Orgánica de educación (1980). Gaceta oficial N° 2635. Caracas: Distribuidora Escolar.

Lloren, J. Y Santoja, F. (1997). Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas,* 5(1/2), 61-76.

Newman, J. (1980). El mundo de las Matemáticas. Tomo 1. Ediciones Grijalbo. Barcelona.

Meléndez, A. (2005). *Significados personales de la derivada en estudiantes de ingeniería*. Tesis de Maestría. Universidad Rómulo Gallegos, San Juan de los Morros.

Muñoz, G: (2007). Rediseño del cálculo integral escolar fundamentado en la predicción. En Dolores, C., Martínez, G. Farfán. R., Castillo, C., López, I., Navarro, C. (Eds). Matemática Educativa. *Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula.* Editorial Díaz santos. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Orton, A.(1983ª). Stunents' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

Piskunov, N. (1991). Cálculo diferencial e integral. Grupo Noriega Editores. México.

Publicación del Campus Monterrey del Tecnológico de Monterrey que divulga las actividades de investigación, extensión y postgrado. (1998). *El rediseño de los cursos de Cálculo*. México: Pulido R.

Pulido, R. (1998). El rediseño de los cursos de cálculo. Transferencia. Año 11, octubre 1998. Publicación del Campus Monterrey del Tecnológico de Monterrey que divulgan las actividades de investigación, extensión y postgrado.

Rey, j: y Babini, J. (2000). Historia de la Matemática. Vol. 2. gedisa Editorial. España.

Rico, L. (1998). Complejidad del Currículo de Matemática como Herramienta Profesional. RELIME. Vol. 1 No 1. pp. 22-39.

Rico, L. y Sierra, M. (1997). Antecedentes del currículo de matemática. En L. Rico (Ed). *Bases teóricas del currículo de matemática en educación matemática* (pp. 17-75). Madrid: Síntesis.

Ríos, P. (2000). Concepción de software educativo desde la perspectiva pedagógica. Disponible en: http://www.quadernosdigitales.net/articuloquaderns.asp?idAticle=359 Consultada el 27 de octubre de 2004. 9:40 PM.

Ruiz, C. (2002). *Instrumento de Investigación Educativa.* Procedimientos para su diseño y validación. Barquisimeto:Ediciones CIDEG, c.a.

Salomón, G., Perkins, D.N. y Globerson, T. (1991). Partenrs in cognition: Extending human intelligence with intelligent technologies. *Educational Researcher,* 20(3), 2-9.

Scriba, C. J. (1970). The autobiography of john Wallis, F.R.S. Notes and Records Roy. Soc. London 25, 17-46.

Tall, D. (1991). Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academia Publishers. Dordrecht / Boston / London

Turégano, P. (1998). Del área a la integral: un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(2), 233-249.

Useche, J. y Orta, A. (2000). *Currículum.* Serie Azul. FEDUPEL. Caracas.

Vygotski, L.S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological Processe. Massachusetts: Harvard University Press.*

Vygotski, L.S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores,* 2ª Edición. Barcelona.

Villalba, M. (2007). El Nacimiento del Cálculo. [Documento en línea]. Disponible en: www.fractus.uso.mx/paper/Martha/nacalc.pdf [Consultada: 2006, noviembre 20].

Yin, R. (1993). *Applications of Case Study Research*. Newbury Park, California; sage.