UNIVERSIDAD DE JAÉN

FACULTAD DE HUMANIDADES Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS

TESIS DOCTORAL

•

LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA DIVISIBILIDAD EN ÁLGEBRA SUPERIOR MEDIADA POR UN ENTORNO INFORMÁTICO

PRESENTADA POR:
CARMEN ORDÓÑEZ CAÑADA

DIRIGIDA POR:
Dr. ÁNGEL CONTRERAS DE LA FUENTE
Dra. LOURDES ORDÓÑEZ CAÑADA

JAÉN, 16 de julio de 2018

ISBN

A mi familia

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero expresar mi agradecimiento a mis directores: Dr. Ángel Contreras de la Fuente y Dra. Lourdes Ordóñez Cañada, por la generosidad mostrada al aceptar la dirección de esta tesis doctoral, en un tema nuevo como la Didáctica del Álgebra Superior, y que les ha supuesto un reto, a la vez que un esfuerzo adicional, en tanto que han tenido que profundizar en una teoría que parecía olvidada en sus años universitarios y que relacionaba DI, DFU, DIP, DE. Su sabiduría y pasión por la Didáctica de las Matemáticas, junto con la capacidad de trabajo que han mostrado, me han permitido realizar el paso desde el Álgebra a la Didáctica, de una forma progresiva y muy gratificante.

También, agradecer al Dr. Ángel Contreras de la Fuente, su tutorización en estos estudios de doctorado pues su "saber hacer" en la Universidad, fruto de su experiencia y trabajo, me ha facilitado todo y guiado, de forma eficiente, a lo largo del tercer ciclo.

Muy especial, mi reconocimiento a la Dra. Lourdes Ordóñez, quien confió en mí y me ofreció este programa de doctorado, en un momento difícil de mi vida. Gracias por su paciencia e implicación: por entrar en mis clases de prácticas para indagar en el programa Mathematica, por corregirme una y otra vez, y por escuchar mis ideas, ilusionarse y transformarlas en algo válido en Didáctica. No menos relevante, ha sido saber mantener la línea entre doctoranda–hermana y esas "tomas falsas" de esta tesis doctoral, tan importantes para mí.

Al departamento de Didáctica de las Ciencias y, en particular, a todos los que participaron en los cursos de doctorado y seminarios de investigación impartidos por el departamento. Gracias por acogerme y enseñarme a brindar por la Didáctica.

Al departamento de Matemáticas y, en particular, a mis compañeras del pasillo B3-002, por su ánimo y por mostrar su valía como matemáticas. También, a mis compañeros del área de Álgebra, por su disponibilidad en la recogida de muestras en los estudios empíricos y aportaciones sobre los cuestionarios.

No puedo olvidar a mis padres, que hoy estarían muy orgullosos de sus hijas. Ellos me inculcaron el amor por el estudio y el trabajo, bien hechos, y me dieron más de lo que tenían.

Y sobre todo agradecer a Juan de Dios, por acompañarme y quererme en casi toda la vida y compartir conmigo todo lo que ha venido, sin dejarme atrás. Gracias a él, y a mis hijas, que siempre me han animado y me alientan a seguir. A Carmen, por ser mi inspiración y mostrarme, en esta etapa, cómo y cuánto se estudia. A Teresa, por ser mi fuerza y no abandonarme. A Clara, por su cariño y valoración.

Por supuesto, gracias a Dios y a todas las personas que pone en mi camino para que sea feliz.

RESUMEN

La Didáctica de la divisibilidad en Álgebra Superior "mediada por entornos informáticos" es un campo poco explorado pero interesante por razones ecológicas y por el alto grado de generalización requerido en los estudiantes.

El objetivo general es describir y analizar la influencia del uso de recursos informáticos en la enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad, para Grado en Ingeniería Informática, identificando fenómenos didácticos y conflictos de significado, utilizando para ello las herramientas que propone el Enfoque Ontosemiótico.

Se establecen dos tipos de hipótesis: unas encaminadas a caracterizar el significado institucional pretendido del máximo común divisor, mostrado en manuales de la asignatura de Matemática Discreta, poniendo de manifiesto la influencia del uso de los recursos informáticos y el tratamiento de las aplicaciones, en la enseñanza; y otras, dirigidas al análisis del aprendizaje de los estudiantes, sus dificultades y conflictos semióticos.

Palabras clave: Álgebra Superior, divisibilidad, demostración, Informática, enfoque ontosemiótico

ABSTRACT

The teaching of divisibility in Higher Algebra "mediated by computer technology" is a little-explored field, but interesting for ecological reasons in addition to the high degree of generalisation required in students.

The general aim is to describe and analyse how the use of computer resources influences the teaching and learning of divisibility, for a degree in Computer Engineering, identifying didactic phenomena and conflicts of meaning, using the tools proposed for this by the onto-semiotic approach.

Two types of hypothesis are established: those aimed at characterising the intended institutional meaning of the greatest common divisor, shown in manuals on Discrete Mathematics, highlighting how the use of computer resources and the treatment of applications influences the teaching; and those directed towards the analysis of the students' learning, their difficulties, and semiotic conflicts.

Keywords: Higher Algebra, divisibility, proof, Computer, onto-semiotic approach

ÍNDICE

Introducción

La enseñanza y aprendizaje del Álgebra Superior está dotada de unas características didácticas especiales consecuencia, fundamentalmente, del alto grado de generalización requerido para su estudio lo que provoca en el estudiante universitario un cambio importante, respecto de las etapas educativas anteriores.

En el primer curso de las titulaciones de grado, el uso del lenguaje simbólico es frecuente y mucho más formal. Las definiciones, proposiciones y procedimientos suelen establecerse en estructuras algebraicas abstractas donde es necesario construir relaciones entre los distintos objetos matemáticos intervinientes y realizar continuos procesos de generalización–particularización en la instrucción, tanto para conectar con lo aprendido en años anteriores como para realizar aplicaciones o trabajar en ejemplos, en ocasiones, nada triviales.

Característico, también, en el estudio del Álgebra en la Universidad, es el desarrollo de la fluencia argumentativa, no sólo en lo que se refiere a las demostraciones de teoremas o resultados sino, de forma más amplia, en el discurso y discernimiento dentro de las situaciones, así como en el establecimiento de conclusiones en la resolución de problemas.

En el Grado en Ingeniería Informática aparecen dos nuevas componentes en relación con la enseñanza y aprendizaje del Álgebra: por un lado, el uso de los recursos informáticos, establecido en sus directrices curriculares, y por otro lado, la importancia de las aplicaciones en la ingeniería, de forma que su desarrollo debe contribuir en la formación socio–profesional de este estudiante.

Son muy relevantes las aplicaciones de la divisibilidad a las ciencias de la computación y sus relaciones con otros temas y asignaturas de su plan de estudios como la Criptografía y Seguridad informáticas. Entre dichas aplicaciones podemos subrayar: la representación de un número en los distintos sistemas de numeración y sus operaciones (el sistema binario es la base de la aritmética computacional y son también muy utilizados el octal y el hexadecimal), la asignación de posiciones de memoria a ficheros de un or denador a través de las funciones de dispersión, la generación de números pseudoaleatorios y los sistemas de cifrado basados en la aritmética modular, de entre los que cabe destacar la criptografía de clave pública. Todo ello hace que esta temática y, en particular, el estudio de los números primos y el máximo común divisor sea imprescindible en este grado, desde el punto de vista ecológico.

En Didáctica de las Matemáticas, la transposición informática (Balacheff, 1994), es una noción que ha sido contrastada en múltiples investigaciones En esta tesis doctoral nos proponemos analizarla en relación con la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad para el Grado en Ingeniería Informática. Concretamente, queremos analizar la influencia del uso de los recursos informáticos en la instrucción de la divisibilidad, para los estudiantes de esta titulación. En primer lugar, planteamos el problema de investigación (capítulo 1) y los antecedentes de este trabajo (capítulo 2), donde surgirán distintas preguntas encaminadas hacia la investigación.

Para determinar cómo analizar la actividad matemática, se requiere usar un marco teórico que disponga de herramientas para abarcar los distintos aspectos de esta actividad. Consideramos que el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2017) proporciona los constructos para fundamentar la investigación. Los exponemos, de forma breve, en el capítulo 3 de esta memoria junto con la metodología general, concluyendo con las preguntas de investigación, hipótesis y objetivos.

Estableceremos dos tipos de hipótesis: las primeras relacionadas con la descripción de las características del significado institucional del máximo común divisor y otras, dirigidas al análisis del aprendizaje de los estudiantes, sus dificultades y conflictos semióticos.

Así, en el capítulo 4, comenzaremos por determinar el significado institucional de referencia del máximo común divisor, constituido por las diferentes configuraciones epistémicas que han sido identificadas a través de dominios del Álgebra Abstracta (DI, DFU, DIP y DE). A ellos hemos llegado tras el estudio del desarrollo histórico–epistemológico de la divisibilidad y su relación con el nacimiento del Álgebra moderna.

Basándonos en estas CE, en el capítulo 5, hemos podido construir una herramienta para el análisis de manuales, que salva la gran variedad curricular propia de la etapa educativa universitaria y que proviene, también, de profundizar en las clasificaciones establecidas en las distintas entidades primarias. Asimismo, hemos podido caracterizar el significado institucional pretendido del máximo común divisor en manuales para el Grado en Ingeniería Informática estableciendo una comparativa con el significado institucional de referencia. Para ello hemos seleccionado ocho manuales universitarios, cuatro de ellos que consideramos representativos del Grado en Ingeniería Informática, por la metodología empleada para la selección de la muestra. La última sección del capítulo 5 corresponde a la discusión de los resultados más significativos encontrados en el análisis de los libros de texto, haciendo hincapié en la observación de los procesos de generalización– particularización que se muestran en cada manual y en la valoración y comparativa de las idoneidades didácticas de todos ellos.

El capítulo 6 está dedicado al análisis de los significados personales de los estudiantes. Se investiga sobre la influencia del uso de un software científico, como Mathematica, en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad, a través del análisis de prácticas informáticas (sección 6.2.) y, también, de su comparación con pruebas escritas, para una misma situación (sección 6.3.). En los dos estudios empíricos mostrados en el capítulo se ha trabajado en el contexto de aritmética modular, tanto para el estudio de una demostración, como de las consideraciones de los estudiantes sobre las hipótesis, o en el estudio de la propiedad conmutativa dentro de la estructura de grupo. Las muestras utilizadas en ambos estudios han sido amplias: de 132 estudiantes para la investigación en la sección 6.2. y de 204 pruebas analizadas (61 estudiantes en la prueba escrita y 143 en el laboratorio) en la sección 6.3.

En el capítulo 7 de esta tesis doctoral se recogen las conclusiones obtenidas de la investigación, relacionándolas con las hipótesis y objetivos. Se destacan las principales aportaciones del trabajo junto con algunas propuestas e implicaciones para la enseñanza. Por último, un resumen de los trabajos desarrollados hasta el momento y aquellos en vías de realización, junto con las líneas abiertas de esta investigación.

Capítulo 1. Problema de investigación

1.1. Introducción

La Didáctica del Álgebra Superior en el área de las ingenierías, es un campo poco explorado pero que despierta el interés del investigador por diversos motivos. En primer lugar, a lo largo de años de experiencia como docente en el área de Álgebra, tanto en carreras de ingeniería como de matemáticas, he constatado la dificultad que encuentra este alumnado en el aprendizaje de la materia motivada, fundamentalmente, por el alto nivel de abstracción requerido y que debe desarrollar al ingresar en la universidad (Dubinsky & Yiparaki, 2000; Harel & Sowder, 2007; Lacués, 2011; Distéfano, Pochulu y Font, 2015). Godino et al. (2015) afirman

> La identificación de los rasgos característicos del razonamiento algebraico es un tema que ha atraído la atención de diversos investigadores en el campo de la educación matemática, ya que es n ecesaria para promover dicho razonamiento en los distintos niveles de Educación Primaria y Secundaria (Chevallard & Bosch, 2012; Filloy, Puig & Rojano, 2008; Kieran, 2007; Ruiz-Munzón, Bosch & Gascón, 2011). (p. 118)

y propone una caracterización del razonamiento algebraico en Educación Primaria y Secundaria basada en seis niveles de algebrización. Sin embargo, no se ha categorizado aún a nivel universitario. La investigación que presentamos en la memoria, profundiza en este sentido.

Como medida de la abstracción, tienen especial interés, en esta tesis, el estudio sobre el grado de generalidad y la identificación de los procesos duales de generalización-particularización existentes en las prácticas matemáticas a nivel universitario. Como se expone nuevamente:

> Los niveles de algebrización son básicamente grados de generalidad, combinada con el uso de diversos registros de representación semiótica (RRS), sus transformaciones y conversiones (Duval, 1995), los cuales son indicativos de fases en el proceso de reificación de los objetos intensivos intervinientes. Consideramos que para la descripción del carácter algebraico de las prácticas matemáticas es útil fijar la atención en los objetos resultantes de los procesos de generalización, y del proceso dual de particularización. (ibíd. p.130)

Relacionado con todo ello, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, poseen un pa pel destacado el uso del lenguaje simbólico y el estudio de las demostraciones. En ambos aspectos hay algunas investigaciones acerca de los conflictos de los estudiantes, en este nivel educativo:

- Respecto de los símbolos presentes en el lenguaje matemático, Distéfano et al. (2015) explican: “Estos símbolos no son de uso frecuente en la escuela media pero son indispensables en el desarrollo de asignaturas de Matemática impartidas a nivel universitario” (p.203) y presentan dificultades entorno a distintos símbolos.
- Por otra parte, la demostración es un tema transversal en todas las etapas de la enseñanza de las matemáticas y es fundamental en el desarrollo del razonamiento lógico deductivo. En el caso de la demostración en Álgebra Superior, Dubinsky & Yiparaki (2000) han detectado que los alumnos universitarios de varios niveles, incluyendo algunos alumnos avanzados matriculados en asignaturas de Álgebra Abstracta, tienen importantes dificultades en temas relativos a la demostración matemática.

En segundo lugar, el alumnado del Grado en Ingeniería Informática es un colectivo en auge debido al amplio desarrollo de las ciencias de la computación en los últimos años. La procedencia de los estudiantes es variada. En su mayoría, provienen de Bachillerato o del ciclo formativo de grado superior, por lo que el nivel en matemáticas es diverso. Además, el carácter aplicado de las ingenierías parece también cuestionar acerca del grado de generalidad utilizado en la enseñanza de la Matemática para estos estudiantes.

Es frecuente que la instrucción, en esta titulación, esté mediada por el uso del ordenador, lo que le concede unas características didácticas especiales. Artigue (2015) afirma: “Siempre se han considerado las tecnologías informáticas como una manera de mejorar las prácticas de enseñanza y aprendizaje en matemática, haciéndolas más constructivas y experimentales” (p.17).

En esta misma línea, Harel & Sowder (2007) afirman: "queda patente la necesidad del uso de las nuevas tecnologías, especialmente en educación", aunque dejan abierta la pregunta acerca de "la influencia de las nuevas tecnologías en el aprendizaje o desarrollo de una noción avanzada de demostración matemática"; estos autores se preguntan, "en vista del auge de las tecnologías electrónicas en educación, especialmente en sistemas informáticos de álgebra (…)", cuestionándose "el papel del álgebra simbólica en la reconceptualización de las matemáticas en general" (p.824).

Respecto de las "nuevas" tecnologías, Balacheff (1993) define el término de trasposición informática y subraya que "el desarrollo de las tecnologías informáticas, su introducción en la escuela y lugares de formación, se acompaña de fenómenos nuevos del mismo orden que los de la transposición didáctica" (p.364).

Por último, es necesario señalar la importancia de la investigación en Didáctica de la Teoría de Números para estos estudiantes por razones ecológicas, esto es, su relación con otros temas curriculares y aplicaciones prácticas. El estudio de los números primos y el máximo común divisor (en adelante mcd), son esenciales en la construcción de códigos, claves de dominio público y, en general, en disciplinas tan importantes como la Criptografía y Seguridad informáticas, siendo así muy relevantes sus aplicaciones. Así, en la enseñanza de la divisibilidad para estudiantes del Grado en Ingeniería Informática, tendrá un lugar destacado el estudio de las aplicaciones.

En resumen, encontramos, por un lado, alto nivel de abstracción en una temática básica para el estudiante; el uso del ordenador y su influencia en la enseñanza y aprendizaje en el estudio de la divisibilidad. De estas consideraciones, surgirá el problema de investigación.

1.2. La divisibilidad en el currículo del Grado en Ingeniería Informática

Los estudios de Grado en Ingeniería Informática, en España, vienen regulados por el Ministerio de Educación. En el Boletín Oficial del Estado (BOE) número 187, de 4 de agosto de 2009, se incorpora la Resolución 12977, de 8 de junio de 2009, de la Secretaría General de Universidades, por la que se da publicidad al Acuerdo del Consejo de Universidades, por el que se establecen recomendaciones para la propuesta por las universidades de memorias de solicitud de títulos oficiales en los ámbitos de la Ingeniería Informática. En ella se expresa:

> El Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales, en sus artículos 12.9 y

> 15.4, relativos a las condiciones para el diseño de títulos de Graduado y de Máster Universitario respectivamente, indica: «Cuando se trate de títulos que habiliten para el ejercicio de actividades profesionales reguladas en España, el Gobierno establecerá las condiciones a las que deberán adecuarse los correspondientes planes de estudios, que además deberán ajustarse, en su caso, a la normativa europea aplicable. Estos planes de estudios deberán, en todo caso, diseñarse de forma que permitan obtener las competencias necesarias para ejercer esa profesión. A tales efectos la Universidad justificará la adecuación del plan de estudios a dichas condiciones» (BOE 187, sec. III, p. 666999)

En el Anexo II se establecen “recomendaciones respecto a determinados apartados del anexo I del Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales, relativo a la memoria para la solicitud de verificación de títulos oficiales de la profesión de Ingeniero en Informática” (íbid. p.66702). En dicho anexo, aparecen las competencias que los estudiantes deben adquirir para la obtención Grado en Ingeniería Informática. Relacionadas con las matemáticas se definen, dentro del módulo de formación básica:

> Capacidad para la resolución de los problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería. Aptitud para aplicar los conocimientos sobre: álgebra lineal; cálculo diferencial e integral; métodos numéricos; algorítmicos numéricos; estadísticos y optimización.
>
> Capacidad para comprender y dominar los conceptos básicos de matemática discreta, lógica, algorítmica y complejidad computacional, y su aplicación para la resolución de problemas propios de la ingeniería (ibíd. p. 66704)

Según estas recomendaciones, cada universidad solicita la verificación de la memoria de Grado, en este caso, en Ingeniería Informática que debe aprobarse, a través de cada comunidad autónoma. En ella se exponen: el número de créditos, las competencias (básicas, generales, transversales y específicas) y la normativa de la universidad. También se describe el plan de estudios, las actividades formativas, metodologías docentes y sistemas de evaluación.

Dentro del plan de estudios, en dichas memorias de los grados verificadas (memorias RUTC), cada universidad determina las asignaturas, y en ellas, los contenidos, bibliografía, competencias, resultados de aprendizaje, etc. Cada curso académico, los distintos departamentos proponen las guías docentes o guías académicas de las asignaturas que tienen asignadas para que sean aprobadas por la universidad. Toda esta información aparece publicada en las páginas web, dentro de los distintos grados ofertados. Así, para el Grado en Ingeniería Informática, los contenidos relativos a la divisibilidad pueden abordarse en distintas asignaturas (Matemática Discreta, Estructuras algebraicas, Algebra I,…), implantadas en distintos semestres o cursos, según la titulación o universidad (Ordóñez, Ordóñez y Contreras, 2015). Todo esto proporciona una gran variabilidad que dificulta el estudio de la divisibilidad, como problema en Didáctica de la Matemática, a nivel universitario.

La relevancia y el sentido educativo de estas nociones se pone también de manifiesto en el hecho de aparecer en los currículos de todos los Grados en Ingeniería Informática y Dobles Grados en Informática y Matemáticas, en España, bajo descriptores como Matemática Discreta, Algorítmica Numérica o Aritmética entera y modular y sus aplicaciones a la Informática, según la normativa vigente.

La divisibilidad también se incluye en la educación para un ingeniero informático en el ámbito internacional. Muestra de ello son libros de texto recomendados por distintas universidades españolas que incluyen esta temática, con autores como Norman Biggs (Biggs, 1994), profesor de la Universidad de Londres o Kenneth, H. Rosen (Rosen, 2004), profesor de Monmouth University y que ha tenido una larga carrera como miembro distinguido del equipo técnico de AT&T Laboratories[1] en Monmouth, New Jersey, EEUU.

En la Universidad de Jaén, para el Grado en Ingeniería Informática, encontramos la temática de la divisibilidad en dos asignaturas:

- Por un lado, se estudia la divisibilidad en los números enteros, en la asignatura Matemática Discreta, impartida en el primer semestre del curso primero, dentro del tema 4, titulado "Introducción a la teoría de números: aritmética modular". También se trabajan algunos algoritmos de divisibilidad en el tema 5, titulado Nociones de complejidad computacional.
- Por otro lado se estudia la divisibilidad y factorización en el anillo de polinomios, dentro del tema 1 de la asignatura Álgebra, impartida en el segundo semestre del primer curso.

Para ambas asignaturas, los 6 créditos asignados, se dividen entre 3 créditos teóricos y 3 créditos prácticos. Estos últimos se imparten en las aulas de informática donde se pone de manifiesto cómo es posible la utilización de un software científico, como Mathematica, para resolver cuestiones de Álgebra y Matemática Discreta relacionadas con la asignatura.

La decisión de impartir los créditos de prácticas en el laboratorio, surgió de la competencia descrita en la resolución anteriormente comentada:

[1] Laboratorios punteros en investigación en campos como la informática y las comunicaciones

> Capacidad para la integración de tecnologías, aplicaciones, servicios y sistemas propios de la Ingeniería Informática, con carácter generalista, y en contextos más amplios y multidisciplinares (ibíd., Sec.III., p.66701)

y que nos increpaba a la utilización de recursos informáticos para la enseñanza y aprendizaje en este área. Conscientes de la necesidad de materiales, los profesores del área de Álgebra que impartíamos clase para estudiantes de Ingeniería Informática, elaboramos un manual para las prácticas, que actualmente utilizamos en las asignaturas Matemática Discreta y Álgebra (Garcia-Muñoz, Ordóñez y Ruiz, 2006), titulado "Métodos Computacionales en Álgebra para Informáticos. Matemática Discreta y Lógica" y que fue editado en 2006 por el Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén. Este libro de texto contiene programas originales en Mathematica, para todos los capítulos que componen la asignatura y, en particular, las secciones 11, 12 y 13 tratan la divisibilidad para los números enteros y polinomios, respectivamente. También se adjunta un CD-ROM con los códigos de dichos programas y los ejemplos desarrollados en el manual, para que el estudiante pueda utilizarlos de forma eficaz, tanto en el aula de prácticas como en su trabajo personal. Para ello se incorporan, además, ejercicios resueltos y propuestos, y ejercicios de autoevaluación.

1.3. Justificación y objetivo general de la investigación

La divisibilidad es una temática que está presente en los currículos de todas las etapas educativas por lo que el trabajo del profesor tendrá unas características didácticas diferenciadas en cada una de ellas: aparece en Educación Primaria (Real decreto 126/2014 de 28 de febrero por el que se establece el currículo básico de Educación Primaria, bloque de números, estándares de aprendizaje evaluables: 8.8 y 8.9) y en Educación Secundaria y Bachillerato (Real decreto 1105/2014 de 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato) donde se aborda para números naturales (en 1º y 2º de ESO) y factorización de polinomios en (3º y 4º de ESO de Matemáticas Académicas así como en 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales). El estudio se inicia sobre conjuntos sencillos, como son los números naturales, y posteriormente se amplía abordando la factorización de polinomios.

La divisibilidad en Álgebra Superior se caracteriza por la ampliación de estos dominios a otros más amplios. Para un estudiante de Ingeniería Informática, la divisibilidad en los números enteros es esencial por sus múltiples aplicaciones en este campo. Entre estas podemos subrayar la representación de un número en los distintos sistemas de numeración y sus operaciones (el sistema binario es la base de la aritmética computacional y son también muy utilizados el octal y el hexadecimal). Asimismo, son muy importantes las aplicaciones de las congruencias para: asignar posiciones de memoria a ficheros de un or denador a través de las funciones de dispersión, la generación de números pseudoaleatorios y los sistemas de cifrado basados en la aritmética modular, de entre los que cabe destacar la criptografía de clave pública.

Hay bastantes algoritmos relacionados con la divisibilidad en números enteros y uno de los más utilizados es el algoritmo de Euclides, que permite calcular el máximo común divisor de dos números enteros no nulos, de una forma más eficiente que a partir de la factorización en números primos. Sus aplicaciones son numerosas y facilitan el cálculo del inverso modulo n, la resolución de sistemas de congruencias a través del algoritmo chino del resto, o el estudio de las soluciones de ecuaciones diofánticas.

Si consideramos la divisibilidad dentro del anillo de polinomios, debemos tener en cuenta las aplicaciones de la factorización de polinomios en temas relacionados con la Informática, como son la teoría de grafos (el teorema del número de caminos utiliza potencias de matrices simétricas, y por tanto diagonalizables) o el tratamiento de imágenes (donde se aplica la diagonalización en valores singulares). En ambos casos el cálculo de raíces, se aplica para el cálculo de autovalores.

La motivación inicial para seleccionar la divisibilidad como temática de la investigación en Didáctica, nace de la relevancia de sus aplicaciones en Informática, ampliamente expuestas. Por otro lado, mi extensa experiencia docente en el área de Álgebra, en las Universidades de Granada y Jaén, tanto en los estudios de matemáticas como en ingenierías, me ha permitido tener un conocimiento profundo de la materia y de las características de los estudiantes del Grado en Ingeniería Informática (25 años trabajando en la enseñanza de estas nociones, en la Universidad de Jaén).

Todo ello, junto con la formación obtenida en el tercer ciclo, me capacita para abordar la investigación en Didáctica de esta temática, con objeto de analizar, de forma científica, aquello que experimento en el aula a diario, así como poner de manifiesto aquellos fenómenos didácticos que se producen en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad. El trabajo en todos estos años en el aula de ordenadores, junto con la autoría del manual de prácticas (García-Muñoz, Ordóñez y Ruiz, 2006), me ha permitido conjeturar sobre la influencia de un software científico, como Mathematica, en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad para estudiantes del Grado en Ingeniería Informática.

A nivel de investigación, con el programa Mathematica, he realizado algunos trabajos relacionados con esta memoria, como “Comprobación computacional de conjeturas en estructuras finitas” (García-Muñoz, Ordóñez y Ruíz, 2007) presentado en el V Encuentro Andaluz de Matemática Discreta, "Estructuras algebraicas finitas. Implementación de las estructuras de retículos y álgebras de Boole finitas con Mathematica" (García-Muñoz, Ordóñez y Ruíz, 2009) dentro del III Congreso de Mathematica en España. Asimismo, también he trabajado con distintos recursos web como se expone en "Una herramienta colaborativa en el proceso de aprendizaje-enseñanza de las matemáticas universitarias". (García-Muñoz et al., 2012) presentado en las III Jornadas sobre Innovación docente y adaptación al EEES en las titulaciones técnicas.

El problema de investigación surge, de forma espontánea, de estas consideraciones y pretende describir y analizar la influencia del uso de los recursos informáticos en temas de divisibilidad en Álgebra Superior, identificando características de la enseñanza y conflictos de este alumnado en el aprendizaje de esta materia. Para ello, esta memoria abordará dos facetas: por un l ado, examinando lo referido al significado institucional pretendido, a través del análisis de manuales; y por otro lado, la faceta personal, analizando y describiendo dificultades de los estudiantes y fenómenos didácticos que aparezcan.

Para determinar previamente cómo analizar la actividad matemática presente en el estudio de la divisibilidad, se requiere usar un m arco teórico que disponga de herramientas capaces de abarcar los distintos aspectos de esta actividad. Consideramos que el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos con los constructos de significado personal, conflicto semiótico, configuración epistémica, significado institucional de referencia, significado institucional pretendido, entre otros, puede permitirnos obtener resultados acerca de lo anterior (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino et al., 2015; Godino, 2017).

Teniendo en cuenta el párrafo anterior, reformulamos el problema de investigación en forma de objetivo general:

El objetivo general del proyecto es describir y analizar la influencia del uso de recursos informáticos en la enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad, para el Grado en Ingeniería Informática, identificando fenómenos didácticos y conflictos de significado, utilizando para ello las herramientas que propone el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos

.

Capítulo 2. Antecedentes

2.1. Introducción

La enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad mediada por un entorno informático, a nivel universitario, es un tema novedoso y, poco explorado aún en Didáctica de la Matemática. Sin embargo, podemos encontrar algunas investigaciones, relacionadas con aspectos destacados de esta temática.

Con objeto de centrar el trabajo, dentro del contexto de los resultados obtenidos hasta el momento, se ha realizado una clasificación de los artículos, comunicaciones o monografías que han aportado ideas y matices relevantes para el desarrollo de esta tesis doctoral.

Las facetas institucional–personal están muy presentes en la investigación educativa y, en particular, en esta memoria, si bien el entorno informático será un eje transversal en todo el desarrollo.

También los procesos de generalización–particularización son sustanciales en el Álgebra Superior. Font & Contreras (2008) afirman

> La investigación en Didáctica de la Matemática ha mostrado la importancia de lo particular y su relación con lo general en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, así como la complejidad de los factores asociados en ellos. (p.1)

Por tanto, el estudio de la dualidad particular–general constituirá una parte importante en nuestra investigación, tanto en la faceta personal como en la institucional.

De esta forma, categorizamos los resultados considerados como antecedentes en:

1. Investigaciones didácticas relacionadas con el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra.
2. Investigaciones didácticas relacionadas con el análisis de manuales.
3. Investigaciones didácticas relacionadas la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Superior. Dentro de la abstracción matemática tienen un papel destacado:
    3.1. La enseñanza y aprendizaje de la demostración
    3.2. El uso del lenguaje simbólico

Esta clasificación está en consonancia con la organización de la tesis doctoral, basada, en primer lugar, en el estudio del significado institucional en temas de divisibilidad para el Grado en Ingeniería Informática y, posteriormente, en el análisis de los significados personales de los estudiantes en la enseñanza y aprendizaje de la demostración, en el contexto de aritmética modular.

Es obvio que la tipología anterior no proporciona categorías en compartimentos estancos sino que están relacionadas entre sí, como se muestra en la siguiente figura:

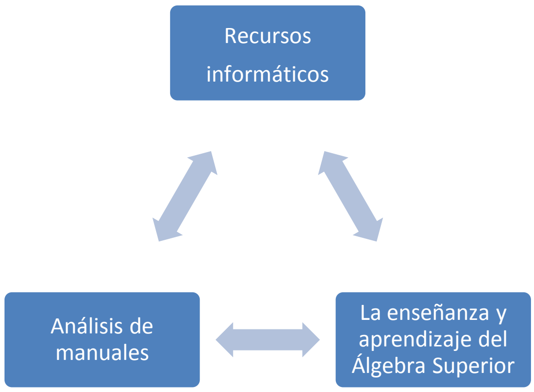


Figura 2.1.1. Relación en la tipología de antecedentes

Esto es, (si partimos de la parte superior de la figura 2.1.1) el uso de los recursos informáticos será un aspecto relevante, tanto en el estudio del significado pretendido en manuales, como en la caracterización de los significados personales de los estudiantes en temas de Álgebra Superior (donde otorgamos un papel destacado a la enseñanza y aprendizaje de la demostración y al uso del lenguaje simbólico). O también, (si partimos de la parte derecha en la figura 2.1.1) el análisis de las demostraciones y de los elementos lingüísticos, así como el tratamiento de las aplicaciones informáticas, estarán muy presentes en el estudio de libros de texto.

En todo lo anterior y, según la tipología de antecedentes descrita, incluiremos investigaciones didácticas realizadas con el marco teórico del enfoque ontosemiótico

(EOS). También señalaremos preguntas relacionadas con la investigación que nos surgen a través del estudio y reflexión sobre los antecedentes. Por último, mostraremos los trabajos previos a esta memoria, ya publicados dentro de cada categoría, y que hemos realizado en torno a esta investigación. Cabe decir que algunos antecedentes podrían introducirse en distintos apartados de la clasificación, pero que se encuadrarán en el espacio que creamos más relevante, respecto de su implicación con este trabajo de tesis doctoral.

2.2. Investigaciones sobre el uso de recursos informáticos en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra

El auge de las nuevas tecnologías en nuestro siglo tiene, sin duda, una fuerte influencia en todos los aspectos de nuestra sociedad, incluida la educación. Como afirma Artigue (2015)

> Desde la emergencia de las tecnologías informáticas, es claro que existió la ambición de utilizar estas tecnologías para mejorar la enseñanza de las matemáticas, en particular, haciendo más accesible una visión constructiva de las matemáticas y de su aprendizaje, buscando un mejor equilibrio entre las dimensiones deductiva y experimental de esta disciplina en su enseñanza (…). Asistimos hoy en día a una aceleración dramática de esta evolución de las tecnologías con la irrupción de las tabletas, Smartphones y pantallas táctiles, la influencia de las redes sociales que impactan cada vez más en nuestras vidas personales, sociales y profesionales, la aparición de nuevas prácticas educativas, tales como los MOOC[2], la pedagogía “inversa” (...). (pp.17-18)

Esta irrupción de la tecnología en la Educación Matemática ha propiciado el interés de muchos investigadores en Didáctica. Muestra de ello son las numerosas publicaciones existentes relacionadas con el uso de recursos computacionales en todos los niveles educativos, junto con la organización de encuentros o congresos, tanto a nivel nacional como internacional, que están emergiendo en torno a esta única temática. Por ejemplo, The 6th International Workshop on Learning Technology for Education Challenges (LTEC 2017) celebrado en agosto de 2017, en Beijing (China), examina la forma en que estas tecnologías están cambiando la enseñanza y aprendizaje a través de cuatro bloques temáticos: tecnologías de aprendizaje, entornos y herramientas de aprendizaje, aprendizaje en línea y MOOCs, resolución de problemas y transferencia de conocimiento. En marzo de este año, en España, ha tenido lugar el 1er workshop sobre

[2] MOOC (massive open online course), aprendizaje a través de la nube

Entornos Tecnológicos en Educación Matemática, organizado por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València, con el apoyo y soporte de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), quien propone la formación de un grupo de trabajo centrado en los entornos tecnológicos en Educación Matemática.

Acerca del uso de software para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Kumar & Kumaresan (2008) afirman:

> Los sistemas de álgebra computarizada (CAS) como Mathematica, Maple, MuPAD, MathCAD, Derive, Maxima tienen el potencial de facilitar un enfoque activo para el aprendizaje, para permitir que los estudiantes se involucren en el descubrimiento y para consolidar su propio conocimiento, desarrollando así la comprensión conceptual y geométrica y un enfoque más profundo para el aprendizaje. La emergencia de tales herramientas matemáticas (…) no puede ser ignorada por los educadores de matemáticas. (p.373)

Posteriormente exponen que "Un sistema de álgebra computacional es una herramienta, no un paquete de aprendizaje autónomo o enciclopedia de conocimiento matemático" (ibíd., p.385), subrayando también, que últimamente se enfatiza mucho en el aprendizaje centrado en el estudiante y menos en la enseñanza, pero que ambos, enseñanza y aprendizaje son igualmente importantes. En este trabajo, presentado en the International Congress on Mathematical Education (ICME 11) se realiza una investigación con la idea de dar una introducción a los sistemas de álgebra computacional, sus ventajas y desventajas en la enseñanza de las matemáticas. Para ello, se intentó incluir prácticas basadas en CAS en el último año de un curso de matemáticas de posgrado (Mumbai University, India) y analizan algunas de las razones por las cuales este experimento no funcionó. Estos autores concluyen acerca de la necesidad de desarrollar una metodología y nuevas estrategias en la enseñanza de las matemáticas usando CAS, y también de la necesidad de "mucha investigación" acerca del aprendizaje de las matemáticas usando CAS (ibíd., p.386).

En relación a la influencia del uso de los recursos informáticos en Álgebra Superior, Harel & Sowder (2007) se cuestionan:

> El papel del Álgebra simbólica en la reconceptualizacion de las matemáticas en general y de la demostración, en particular, suscita una pregunta crucial sobre el papel de las habilidades de manipulación simbólica en el desarrollo conceptual de los estudiantes en matemáticas, en general, y en los esquemas de demostración, en particular. ¿Pueden desarrollar los alumnos una noción moderna de la demostración sin poseer fluidez computacional? Y en vista del auge del uso de las tecnologías electrónicas en educación, especialmente

> sistemas informáticos del álgebra, uno debería preguntarse igualmente: ¿Podrían estas herramientas privar, o por el contrario, proporcionar, a los estudiantes la oportunidad de desarrollar habilidades de manipulación algebraica que pueden ser necesarias para el desarrollo de una noción avanzada de demostración? (p.824)

La investigación que presentamos en esta memoria está directamente relacionada con el planteamiento de estas preguntas. En el apartado 2.3. volveremos a indagar en ellas, relacionándolas con la demostración.

Existen recientes investigaciones didácticas en estudiantes del Grado en Ingeniería Informática; por ejemplo, Codes (2015) analiza la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia utilizando un entorno computacional. En ella se explora acerca del impacto de una herramienta como Maple en la comprensión de estos conceptos y los distintos resultados y dificultades que se han obtenido en la investigación con dicho alumnado. Obtiene que "la herramienta de cálculo simbólico se muestra como facilitadora de la construcción del conocimiento" (p. 227) pero que en ocasiones, debido al uso que hacen los estudiantes, se convierte en un simple "entorno para la experimentación a ciegas".

Otros trabajos respecto la enseñanza y aprendizaje con el recurso tecnológico Mathematica para estudiantes universitarios de primer año son: Contreras, A. et al. (2005) o Contreras, A. y Ortega, M. (2009). En el primero se evalúan estrategias metodológicas para la formación inicial en matemáticas, de los estudiantes de primer año de la licenciatura en Administración y Dirección de Empresas de la Universidad de Jaén (UJA), haciendo uso de las posibilidades ofrecidas por los entornos informáticos. En el segundo, se realiza la exploración de prácticas con Mathematica, en estudiantes de la diplomatura de Ciencias Empresariales de la UJA. Las dos investigaciones se enmarcan dentro del estudio del límite y la derivada y utilizan las herramientas que propone el EOS. En ellas se analizaron, entre otros, los tipos de conflictos de significado que mostraron los estudiantes debido al uso de la tecnología en sus prácticas.

En el marco de las investigaciones sobre el uso de recursos informáticos en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática y, en concreto, en temas de divisibilidad para estudiantes del Grado en Ingeniería Informática (objeto de estudio de esta memoria), hemos realizado diversas investigaciones, tales como: Ordóñez, Ordóñez y Contreras (2013, 2104, 2015 y s.f.); Ordóñez, Ordóñez, Contreras y Ruíz (2017); Ordóñez, Ordóñez, Contreras, García-Muñoz y Ruíz (s.f.). En ellas se abordan cuestiones relacionadas con el estudio de los significados personales de los estudiantes (utilizando Mathematica) y del significado institucional pretendido en manuales universitarios, utilizando para ello los constructos proporcionados por el EOS. Abordaremos su contenido en los apartados 2.3. y 2.4.

2.3. Investigaciones sobre análisis de manuales

El análisis de manuales es una herramienta utilizada frecuentemente en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. La importancia de analizar los libros de texto radica en que, no sólo aportan información sobre las prácticas educativas en el aula, sino también sobre el conocimiento matemático que la sociedad considera pertinente (Conejo, Arce & Ortega, 2015, p.2).

Los cambios que se están produciendo en nuestra era debido a Internet y al uso de las nuevas tecnologías, afectan a todos los aspectos de la sociedad y, en particular, tienen una influencia sobre el saber implementado en los libros de texto. Maz- Machado y Rico (2015) afirman

> Hasta hace pocas décadas la documentación escrita era prácticamente el medio usual elegido para mantener la memoria histórica de una sociedad, siendo los libros uno de sus exponentes más utilizado. La irrupción de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación han potenciado otros medios visuales e informáticos, lo cual ha hecho que los libros impresos disminuyan su anterior protagonismo y deban competir con Internet, con documentos y libros electrónicos, con las bases de datos y otros registros cuya función es la de conservar la memoria cultural y científica de la sociedad.
>
> Los libros reflejan los hábitos y costumbres, la organización de las ideas, la actividad intelectual, las relaciones públicas de apropiación y exclusión del saber y, en muchos casos, las modas y tendencias imperantes de una época determinada. (pp.50-51)

Y aseguran, respecto de los libros de texto, que “estos influyen en lo que los maestros enseñan, cómo lo enseñan y en las tareas que dan a sus alumnos” (ibíd., p.73).

Basándonos en ello, analizar la influencia del uso de las nuevas tecnologías, así como las tendencias observadas en manuales, es una tarea importante para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, y en particular del Álgebra. En relación con todo esto, y centrándonos en temas de divisibilidad, podemos formularnos diversas preguntas: *¿cuáles son las características específicas de la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en el Grado en Ingeniería Informática?; ¿a través de qué elementos u objetos, representativos, implicados en dicha enseñanza y aprendizaje podemos identificarlos?; ¿qué impacto tiene el uso de recursos informáticos y el tratamiento de las aplicaciones que corresponden a esta titulación, en* *la enseñanza de la divisibilidad?; ¿qué tendencias se ponen de manifiesto en los manuales que abordan esta temática?*

La concepción del manual de matemáticas, en la etapa universitaria, es distinta del papel que tiene en etapas educativas anteriores. En Educación Primaria o Secundaria, la instrucción se realiza a través de un único manual seleccionado por el profesor o el centro. Sin embargo, en la universidad, es difícil que el profesor siga un único libro en el desarrollo de la asignatura o de un tema. Por otra parte, los actuales créditos ECTS[3] se basan en el trabajo personal del estudiante, en todas las actividades de su proceso de aprendizaje (horas lectivas, horas de estudio y elaboración de trabajos y prácticas). Este trabajo del estudiante debe llevarse a cabo a través del material proporcionado por el profesor como: relaciones de problemas, prácticas para la asignatura, etc. Hay que destacar, en este punto, la importancia de la consulta bibliográfica propuesta en las guías docentes de las asignaturas. De ahí, que en dichas guías, se reflejen los libros considerados como esenciales, y que forman parte de la bibliografía básica o fundamental, y aquellos que se consideran como bibliografía complementaria.

En relación a lo anterior, Crisóstomo (2012) afirma

> El libro de texto generalmente ocupa una posición central en la enseñanza universitaria convirtiéndose en un documento de trabajo que define los significados planificados y de referencia de los procesos de estudio. En dicho nivel de enseñanza, la adquisición de los significados pretendidos se asocia al importante trabajo desarrollado de manera personal y autónoma por los estudiantes. (p.187)

En su trabajo de tesis doctoral, realiza un análisis a dos libros de texto usados en la licenciatura de Matemáticas, en Brasil, sobre temas de Cálculo Integral, utilizando herramientas del marco teórico EOS como las configuraciones epistémicas, presentes también en nuestra investigación. Su análisis comienza con un "esquema general del texto", desarrollando el análisis en relación con la dimensión epistémica: global, intermedia o puntual (ibíd., p.188).

Contreras, Ordóñez y Whilhemi (2010) describen las configuraciones epistémicas de referencia asociadas a la integral definida y muestran cómo se presenta esta noción en una muestra de libros de texto de 2º de Bachillerato.

[3] ECTS (European Credit Transfer System). Son el estándar adoptado por todas las universidades del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) para garantizar la convergencia de los diferentes sistemas europeos de educación

Ordóñez (2011), en su trabajo de tesis doctoral, determina el significado global de la integral definida, a través de un estudio histórico‒epistemológico de este objeto matemático:

> consideramos que la determinación del significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución de nuestro objeto de estudio. De esta manera será posible detectar las situaciones que dieron origen al concepto, las dificultades que fue necesario superar y cómo se superaron hasta llegar a la situación actual, lo que nos informará sobre puntos conflictivos, conflictos semióticos potenciales, situaciones motivadoras, los diversos campos de aplicación, etc. (p.71)

Posteriormente, le será posible analizar y caracterizar los significados personales de los estudiantes y mostrar los vacíos de significado y las dificultades que presentan los estudiantes de 2º de Bachillerato.

Este trabajo ha sido inspirador para el desarrollo de la faceta institucional en nuestra investigación. A partir de su estudio y, tras la consecuente reflexión, nos formulamos las siguientes preguntas: *¿cuáles son los cambios significativos en el desarrollo histórico‒epistemológico sobre cuestiones de divisibilidad, y, en concreto, del estudio del máximo común divisor? y ¿a través de qué elementos u objetos, representativos, implicados en dicha enseñanza y aprendizaje podemos identificarlos?*

En relación a las herramientas propuestas por el EOS y el análisis de manuales, Contreras y Ordóñez (2006) afirman

> Hay que tener en cuenta que entre el saber científico y el saber del alumno hay todo un complicado proceso de transposición didáctica que tiene diversas fases (programaciones ministeriales, programaciones de centro, de área, de aula…). En ellas sobresale, por su especial incidencia en la enseñanza, el papel que juegan los manuales en tal proceso de transposición didáctica. (p.67)

y utilizan la técnica del análisis ontosemiótico que se desarrolla en el EOS para el análisis de manuales. “Consideramos que dicha técnica permite un estudio pormenorizado de la actividad matemática, aportando una explicación a fenómenos didácticos que suelen darse en el aula y que se han puesto de manifiesto desde diferentes marcos teóricos.” (ibíd., p.68).

Investigaciones, respecto del análisis de manuales, que utilizan también el EOS, son: Parra-Urrea y Pino-Fan (2017); Del Pino-Ruiz y Estepa (2017); Contreras y Ordóñez (2005); Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2014); Gea (2014) y Gea, Lopez-Martin & Roa (2015), en las cuales se hacen operativas las entidades primarias, propuestas en dicho marco teórico, para el estudio de manuales.

Las investigaciones previas: Ordóñez, Ordóñez y Contreras (2015 y s.f.) relacionadas con la faceta institucional y enmarcadas en este trabajo de tesis doctoral, han indagado acerca de las características del significado institucional pretendido del máximo común divisor para el Grado en Ingeniería Informática.

En Ordóñez, Ordóñez y Contreras (2015) establecimos la metodología, que desarrollaremos en el capítulo 5, para la selección de manuales y seleccionamos siete manuales recomendados para los estudios de Ingeniería Informática y pertenecientes a la bibliografía fundamental y complementaria de asignaturas con contenidos de divisibilidad del curso 2014-15. Se realizó un análisis didáctico, utilizando el marco teórico del EOS, acerca del concepto de máximo común divisor, algoritmos de cálculo y sus aplicaciones a la Informática. Concretamente, nos centramos en las entidades primarias lenguaje y situaciones-problemas, y concluimos que existe una evolución en el tratamiento que realizan los textos hacia una menor abstracción, más aplicaciones y mayor presencia del lenguaje de programación.

En Ordóñez, Ordóñez y Contreras (s.f., artículo en revisión) se aborda parte de la temática desarrollada en el capítulo 4 de esta memoria, encaminada a establecer el significado institucional de referencia del máximo común divisor para estudiantes del Grado en Ingeniería Informática, a través de un estudio histórico-epistemológico. Esto nos permitió esbozar la herramienta de análisis didáctico que posibilita el estudio de las características del significado pretendido en manuales y que forma parte del capítulo 5. En este artículo, la comparativa entre dos manuales muestra una importante diferencia entre un texto que trabaja en entornos computacionales; frente a otro, en el que se realizan fuertes procesos de generalización, pero no se consideran aplicaciones.

2.4. Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Superior

“El álgebra abstracta ha sido uno de los campos más favorecidos de la matemática del siglo XX, y hoy sus dominios son muy extensos” (Kline, 2012, p.1500). La enseñanza y aprendizaje de la misma se realiza básicamente, a nivel universitario, pues la única estructura que se aborda en Bachillerato es la de espacio vectorial.

Para etapas no universitarias, Godino et al. (2015) establece una caracterización del razonamiento algebraico en Educación Primaria y Secundaria basada en la distinción de seis niveles de algebrización. “Tales niveles se definen teniendo en cuenta los tipos de representaciones usadas, los procesos de generalización implicados y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente" (p.117). En relación a la Educación Secundaria expresa:

> Estos niveles están basados en la consideración de 1) el uso y tratamiento de parámetros para representar familias de ecuaciones y funciones; 2) estudio de las estructuras algebraicas en sí mismas, sus definiciones y propiedades. (ibíd., p.117)

Y "analizan las concordancias y complementariedades de este modelos con las tres etapas del proceso de algebrización propuestas en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico" (ibíd. p.117).

Es en el nivel 6 del EOS, donde se comienza a estudiar estructuras algebraicas, sus definiciones y propiedades y se aclara que "el nivel 6 del EOS propuesto no se corresponde de manera explícita con un nivel en el modelo basado en la TAD" (ibíd., p.136).

> Los niveles podrían ser usados como potenciales explicaciones de algunos conflictos en el aprendizaje del álgebra escolar y ofrecer criterios para el diseño curricular e instruccional. (…)
> El reconocimiento de los niveles de algebrización de la actividad matemática puede ayudar a tomar conciencia de brechas o discontinuidades en la secuencia de configuraciones que componen las trayectorias epistémicas de los correspondientes procesos de estudio matemático (Godino, Contreras & Font, 2006). Tales brechas se refieren al uso de distintos registros de representación semiótica, su tratamiento y conversión, así como a la intervención y puesta en relación de objetos conceptuales, proposicionales, procedimentales y argumentativos de mayor grado de generalidad. (ibíd., p.137)

Utilizando el marco teórico de la TAD, distintos investigadores han realizado, recientemente, trabajos en torno al estudio de distintas estructuras algebraicas, fundamentalmente, para estudiantes universitarios de Matemáticas.

Bosh, Gascon & Nicolás (2018) realizan una investigación didáctica en el contexto de la Teoría de Grupos y afirman que es uno de los primeros temas abstractos que los estudiantes aprenden, y que la dificultad de esta temática es debida a la "abstracción matemática y la demostración formal". También ponen de manifiesto las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje dentro del marco de la Teoría de Grupos, así como la existencia de distintas investigaciones que desarrollan propuestas para ayudar a los alumnos.

Hausberger (2018) realiza una investigación conducida desde el marco teórico de la TAD, para estudiantes de Matemáticas. En ella pone de manifiesto

> las dificultades relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Abstracta en la universidad (las teorías de las estructuras algebraicas, en particular, las teorías de grupos, anillos y cuerpos) son reconocidas por muchos autores. (p.75)

En este artículo se introduce la noción de praxeología estructuralista para la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Abstracta y expone un ejemplo de este tipo de praxeología en el caso de la Teoría de Anillos. Explica cómo la generalización de la aritmética en $\mathbb{Z}$ fue, históricamente, una de las principales fuentes en la construcción de la Teoría de Anillos y del nacimiento de clases de anillos como los dominios euclídeos, dominios de ideales principales o dominios de factorización única (ibíd., pp.79-80). Afirma que la aritmética de los polinomios ha contribuido también en este desarrollo y destaca los ejemplos de los enteros de Gauss o el anillo de polinomios K[x] (K cuerpo) dentro de esta teoría.

También proporciona una lista de clases de tareas encontradas en manuales como: determinar si un anillo dado es un dominio de integridad (o DFU, DIP, DE[4]), determinar las unidades del anillo, determinar los elementos irreducibles y la descomposición de los elementos en irreducibles, calcular el máximo común divisor de dos elementos (ibíd., pp. 80-81) y afirma:

> Es importante señalar que el dominio matemático en juego se caracteriza por una estructura ecológica particular en forma de una cadena de inclusiones de las diferentes clases de anillos (…) lo que afecta a los tipos de tareas y las técnicas correspondientes. Delinear estas clases, y por lo tanto la extensión de los conceptos, es una parte importante de las tareas asignadas a los estudiantes. (ibíd., p.81)

Nuestra investigación está directamente relacionada con esta temática, pero desde una óptica distinta y bien diferenciada; en primer lugar, porque la enseñanza y aprendizaje están dirigidos al estudiante del Grado en Ingeniería Informática, y mediada por el uso de los recursos informáticos; en segundo lugar, debido a que el estudio de estas estructuras algebraicas abstractas no pertenece al currículo de esta ingeniería. Sin embargo, “delinear estas clases de anillos” será una tarea importante en cuanto a la caracterización del significado institucional de referencia del máximo común divisor.

Ordóñez, Ordóñez y Contreras (s.f.) profundizan en el desarrollo histórico-epistemológico del máximo común divisor y su relación con estas clases de anillos del Álgebra Abstracta. En esta tesis, en el capítulo 4, lo abordaremos a través de las configuraciones epistémicas, constructos proporcionados por el marco teórico del EOS.

[4] DI (dominio de integridad), DFU(dominio de factorización única), DIP (dominio de ideales principales), DE (dominio euclídeo)

Describiremos las “cadenas de inclusiones” entre dominios, para el Grado en Ingeniería Informática. Observaremos cómo se ponen en juego algunas tareas que coinciden con las que describe Hausberger (2018): cálculo de las unidades, de irreducibles, etc. y cómo cada dominio proporciona un método de cálculo para el máximo común divisor. Asimismo, el anillo de los enteros y los polinomios tendrán un papel destacado. Posteriormente, en el capítulo 5 de esta memoria, ampliaremos el análisis de manuales realizado en este artículo con objeto de extraer carencias de significado y explicar conflictos que se pueden producir en el aprendizaje del máximo común divisor, poniendo una especial atención a los procesos de generalización-particularización presentes en manuales y cómo afecta el entorno informático en el tratamiento de la divisibilidad.

Utilizando distintos marcos teóricos han sido clarificadoras para esta tesis doctoral otras investigaciones como: Puig & Rojano (2004); Filloy, Puig & Rojano (2007), quienes han indagado sobre la historia del Álgebra en Educación Matemática. También, en relación a la didáctica del Álgebra Superior, las investigaciones de Dubinsky & Yiparaki (2000); Harel & Sowder (2007) han tenido una influencia notable en esta investigación. Las trataremos en los subapartados siguientes.

Como se ha puesto de manifiesto, temas clave en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Superior son la abstracción matemática (y por tanto el lenguaje simbólico) y las demostraciones formales. A continuación, mostramos brevemente algunos antecedentes sobre estas temáticas.

2.4.1. La enseñanza y aprendizaje de la demostración

La demostración es un tema transversal en todas las etapas de la enseñanza de las matemáticas y es fundamental en el desarrollo del razonamiento lógico deductivo. Para los estudiantes del Grado en Ingeniería Informática en la asignatura de Matemática Discreta, de primer curso, es importante el uso de recursos informáticos. Así, la enseñanza y aprendizaje de la demostración adquiere unas características especiales y diferenciadas por la influencia de las nuevas tecnologías y del lenguaje algorítmico propio de la Informática.

La investigación didáctica acerca de la demostración tiene numerosas aportaciones, lo que muestra el interés de este campo; sin embargo, muy pocas se han centrado en estudiarla en alumnos cuya instrucción está mediada por el uso de recursos informáticos.

Hanna, G., de Villiers, M., & International Program Committee (2008) afirman

> Los educadores de matemáticas se enfrentan a una tarea importante al lograr que los estudiantes comprendan los roles del razonamiento y la demostración en matemáticas. Este desafío ahora ha ganado aún más importancia ya que a la prueba se le ha asignado un lugar más prominente en el plan de estudios de matemáticas en todos los niveles. (p.329)

Y trasladando esto a la Educación Matemática de estudiantes de Ingeniería Informática, nos preguntamos *¿Cuál es el papel que se otorga a la demostración en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad para el Grado en Ingeniería Informática?*

Conejo (2015) muestra, en su trabajo de tesis doctoral, un análisis histórico de las demostraciones en libros de texto de Educación Secundaria sobre los teoremas de límite y continuidad. Ella se pregunta en relación a estas demostraciones:

> ¿qué importancia conceden los LT[5] a las demostraciones matemáticas? Cuando no se demuestra, ¿qué tipo de justificaciones aparecen? ¿Qué función tienen las demostraciones en los LT? ¿Cómo ha evolucionado la demostración con los sucesivos cambios recientes de legislación? (p.2)

Estas cuestiones y la formulada anteriormente, estarán íntimamente ligadas con las preguntas de investigación en torno a la faceta institucional desarrollada en esta tesis doctoral.

Respecto de los conflictos de significado de los estudiantes en temas de demostración, diversos investigadores han mostrado que es un tema difícil para el alumno en todos los niveles educativos, también en la etapa universitaria:

Balacheff (1991) ha mostrado que los alumnos "tienen cierta conciencia de la necesidad de demostración y cierta capacidad lógica" (p.176) y aun así tienen dificultades con la demostración.

En Recio (1999), que utiliza el EOS en su investigación, se describe una investigación, centrada en el análisis epistemológico y didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática donde se concluye que los estudiantes universitarios tienen importantes dificultades en el desarrollo de la demostración matemática de carácter deductivo. Y además, el estudio de Recio y Godino (2001) indica que el rendimiento en actividades de demostración de gran parte de los alumnos universitarios de primer curso es decepcionantemente bajo.

Camacho, Sánchez y Zubieta (2014) en su investigación con estudiantes de nivel avanzado de matemáticas y computación, sobre la lectura de la prueba matemática, analizan las justificaciones de estos alumnos al leer demostraciones y obtienen que sus

[5] LT(libros de texto)

habilidades para realizar esta tarea resultan muy pobres. La mayoría de las respuestas apelan sólo al contenido y no al esqueleto lógico, lo cual consideran insuficiente.

Dubinsky & Yiparaki (2000) han detectado que los alumnos universitarios de varios niveles, incluyendo algunos alumnos avanzados matriculados en asignaturas de Álgebra Abstracta, tienen importantes dificultades en temas relativos a la demostración matemática.

Por otra parte, el estudio de las hipótesis en los teoremas de matemáticas es esencial para cualquier estudiante, pero más aún para un informático que debe trasladar al ordenador los procedimientos estudiados. Las condiciones necesarias para que dichos procedimientos puedan ejecutarse, se explicitan en las hipótesis.

Alvarado y González (2010 y 2013) realizan exploraciones con objeto de estudiar las dificultades que tienen los estudiantes universitarios en torno a la demostración matemática. En el primer trabajo, comprueban "el mal uso de las implicaciones matemáticas por la confusión entre hipótesis y demostración" (p. 81) y afirman que los estudiantes "se suelen centrar más en el significado de la proposición, mientras que les resulta más difícil fijarse en los aspectos relativos al estado (hipótesis, conclusión, etc)" (ibíd., p.74). En el segundo trabajo ponen de manifiesto las dificultades de los estudiantes universitarios en relación a la demostración y manifiestan la necesidad de que realicen actividades de construcción de definiciones y proposiciones (Alvarado y González, 2013, p.61)

Diferentes cuestiones didácticas surgen en la enseñanza y aprendizaje de la demostración cuando ésta se desarrolla en el entorno de un software científico como Mathematica. Harel & Sowder (2007) dejan patente la necesidad del uso de recursos informáticos en educación, aunque dejan abierta la pregunta acerca de "la influencia de las nuevas tecnologías en el aprendizaje o desarrollo de una noción avanzada de demostración matemática" (p.824).

Teniendo en cuenta todo lo anterior, respecto a los significados personales de los estudiantes, nos formulamos las siguientes preguntas: *¿qué impacto tiene el uso de las tecnologías en el aprendizaje de la demostración matemática, para alumnos del Grado en Ingeniería Informática?; ¿Cuál es el papel que el alumno otorga a las hipótesis en el aprendizaje de la demostración matemática para alumnos de dicho Grado?; ¿qué impacto tiene el uso de las tecnologías en la consideración de dichas hipótesis?; ¿qué tipos de dificultades muestran y cuales permite superar el uso de un software científico?*

Investigaciones previas como Ordóñez, Ordóñez y Contreras (2013 y 2014); Ordóñez, Ordóñez, Contreras y Ruíz (2017) a través del programa Mathematica responden, parcialmente, a estas cuestiones que se abordarán en el capítulo 6 de esta memoria.

En el primer trabajo (Ordóñez et al. 2013), se muestra una investigación didáctica acerca de la enseñanza y aprendizaje de una demostración que forma parte del temario de la asignatura de Matemática Discreta. En ella se analiza la influencia de un software científico, como Mathematica, en el estudio de esta demostración

Ordóñez et al. (2014), determinan el uso que hacen los estudiantes de las hipótesis del teorema cuya demostración fue objeto del estudio anterior, cuando el trabajo se realiza con el ordenador.

En los dos trabajos anteriores, utilizando el marco teórico del enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática, se pudieron caracterizar los significados personales de los estudiantes y determinar fenómenos didácticos que se producen.

Sin embargo en la tercera investigación (Ordóñez et al., 2017), se realiza una exploración con estudiantes del Grado en Ingeniería Informática de la Universidad de Jaén, que consta de dos pruebas: una escrita y otra con ordenador. Se muestra la forma en que han abordado la resolución de las mismas debido a la influencia del entorno computacional. La dualidad particular–general tiene un rol fundamental en este estudio.

2.4.2. El uso del lenguaje simbólico

La relación del lenguaje simbólico en "lo algebraico" se pone de manifiesto en Puig & Rojano (2004):

> Los aspectos de la historia de las ideas algebraicas que hemos examinado en esta sección nos permite reformular estas características de "lo algebraico" de la siguiente manera:
> El uso de un sistema de signos para resolver problemas que nos permite expresar el contenido de la declaración del problema relevante para su solución (su "estructura"), separado de lo que no es relevante para su solución (…). (p.198)

Distintos investigadores han constatado las dificultades de los estudiantes con el lenguaje simbólico:

Harel & Sowder (2007) afirman que, incluso alumnos avanzados, tienen dificultades con el lenguaje simbólico y argumentan en torno a la disyunción:

> Un punto importante es que el uso cotidiano de las expresiones lógicas puede diferir considerablemente del uso preciso de las matemáticas.(…). Por

> ejemplo "o" en el uso cotidiano tiene un sentido exclusivo (Llevaré sandalias o zapatillas de deporte), a diferencia del sentido inclusivo habitual en matemáticas. (p.838)

A continuación, comentan otras dificultades respecto al lenguaje matemático como la diferencia de una proposición "si-entonces cotidiana" y su confusión con "el si-y sólo-si" en matemáticas", etc.

Dubinsky & Yiparaki (2000) analizaron conflictos de significado de estudiantes universitarios de varios niveles en relación a proposiciones, cuantificadas doblemente, en las que intervienen los cuantificadores universal y existencial.

Lacués (2011) estudia estas dificultades en una experiencia de enseñanza de sistemas matemáticos de símbolos, en alumnos que ingresan en carreras de Ingeniería.

Distéfano, Pochulu y Font (2015) investigan acerca del uso de algunos símbolos matemáticos (entre ellos $\forall$ o $\exists$) en alumnos que acceden a carreras universitarias y cursan matemáticas en su plan de estudios. También explican:

> Estos símbolos no son de uso frecuente en la escuela media pero son indispensables en el desarrollo de asignaturas de Matemática impartidas a nivel universitario. (p.203).

Posteriormente, Distéfano (2017) afirma

> En la práctica docente, particularmente en el nivel universitario, es frecuente observar las dificultades que los alumnos presentan al efectuar tareas que requieren la lectura y escritura de expresiones formuladas en el registro simbólico-algebraico. Esto genera obstáculos en la comprensión durante las clases teóricas, en la resolución de los ejercicios en las clases prácticas y en la lectura de la bibliografía específica, puesto que las representaciones externas juegan un rol fundamental en la adquisición de conocimiento dentro de la Matemática. (p.xiii)

En su trabajo de tesis doctoral se presenta una investigación con objeto de describir y caracterizar el proceso de construcción de significados de símbolos algebraicos (los cuantificadores universal y existencial, los símbolos de pertenencia e inclusión y la conjunción y disyunción) en estudiantes universitarios, utilizando como marco teórico el EOS.

Todo lo expuesto anteriormente, nos lleva a plantearnos: *¿qué dificultades encuentran los estudiantes del Grado en Ingeniería Informática en el empleo de los cuantificadores existencial y universal?; ¿qué impacto tiene el uso de recursos informáticos en la comprensión de dichos cuantificadores?*

La investigación Ordóñez et al. (2017) indaga en estas cuestiones a través del análisis de una exploración acerca de la propiedad conmutativa, en el contexto de la aritmética modular. Se han obtenido resultados relacionados con una mejor comprensión y uso de los cuantificadores, debido a la influencia del entorno informático, al potenciar la faceta particular frente a la general. Esto formará parte del capítulo 6 de esta tesis doctoral.

Capítulo 3. Fundamentos de la investigación

En el capítulo 1 de esta memoria, se ha justificado el interés de la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en Álgebra Superior y, se han extraído del currículo oficial del Grado en Ingeniería Informática, las características de una instrucción mediada por un e ntorno computacional, que analizamos en esta tesis doctoral, desde el punto de vista didáctico. En el capítulo 2, se ha expuesto una clasificación sobre los diferentes trabajos, considerados como antecedentes, y que han dado lugar al planteamiento de distintas cuestiones relacionadas con el problema de investigación.

A continuación, trataremos la fundamentación de este trabajo, para lo que tratamos, brevemente, las componentes del marco teórico conceptual que intervienen en la memoria, lo que permitirá concretar las preguntas, hipótesis y objetivos de esta investigación. La última parte corresponde a la metodología general empleada.

3.1. Marco teórico

En el objetivo general del proyecto se pretende describir y analizar la influencia del uso de recursos informáticos en la enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad. Adoptamos como marco teórico el enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos, cuyas componentes y constructos se adaptan al estudio de los fenómenos y procesos que intervienen en la educación matemática sobre esta temática.

Como expresan Godino, Batanero y Font (2008)

> El fin específico de la Didáctica de las Matemáticas, como campo de investigación, es el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas de mejora de dichos procesos. (…)
> Para lograr este objetivo, la Didáctica de las Matemáticas debe considerar las contribuciones de diversas disciplinas como la psicología, pedagogía, filosofía, o la sociología. Además, debe tener en cuenta y basarse en un análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos, su desarrollo cultural y personal, particularmente en el seno de las instituciones escolares. Este análisis ontológico y epistemológico es esencial para la Didáctica de las Matemáticas ya que difícilmente podría estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos o indefinidos. (pp.7-8)

La investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y en particular, del Álgebra Superior, requiere aplicar las "herramientas teóricas y metodológicas que ayuden a describir, explicar y tomar decisiones instruccionales fundamentadas" (Godino, 2017, p.1).

En el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, 2002; Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, 2017) se consideran los significados de los objetos matemáticos como emergentes de los sistemas de prácticas. Si las prácticas las realiza una persona, hablaremos de significados personales, y si son compartidas en el seno de una institución, trataremos significados institucionales (Godino y Batanero, 1994, p.334) . Este marco teórico propone una tipología básica de significados atendiendo a su utilización en el análisis didáctico y que mostramos, a modo de síntesis, en la figura 3.1.1.

Figura 3.1.1. Significados sistémicos (Godino, 2014, p.13)

Para los *significados institucionales* se proponen:

- Referencial o de referencia: orienta el análisis sistemático de la literatura hacia la identificación de los diversos significados contextuales de los objetos y su articulación en un significado global u holístico.

> Cuando el investigador fija el significado que tendrá en cuenta del objeto matemático, se genera el significado institucional de referencia. Para ello, se vale del saber científico (e incluso del desarrollo histórico) y del análisis de las orientaciones curriculares, delimitando con ello las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto que se tomarán como referencia en su trabajo. (Gea, 2014, pp.34-35)

- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio; se puede considerar como el propuesto a los estudiantes, en el que el profesor basa su enseñanza.

- Implementado: sistema de prácticas implementadas por el profesor en un proceso de estudio.

- Evaluado: subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

En esta tesis doctoral analizamos el significado institucional del máximo común divisor a través del análisis de manuales (capítulo 5 de esta memoria) que es parte importante del significado pretendido. Previamente será necesario determinar el significado de referencia (Godino, Batanero & Font, 2007, p.51) lo que se abordará en el capítulo 4.

Para los *significados personales* se proponen:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de desempeñar el estudiante, relativas a un objeto matemático.

- Declarado: prácticas que el alumno realiza en una tarea propuesta, y que son manifestadas en la evaluación o la investigación.

- Logrado: prácticas manifestadas que son correctas con la pauta institucional establecida.

En el capítulo 6 de esta tesis doctoral, analizaremos los significados personales declarados de los estudiantes a determinadas prácticas propuestas. Una forma de caracterizarlos será analizar las dificultades y errores en términos de *conflictos semióticos* que, según Godino (2002), se definen como “toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.” (p.258). Así, en este capítulo se presenta una investigación de caracterización de significados.

Para una mejor descripción y análisis de la actividad matemática y de sus procesos de comunicación, el EOS considera una primera clasificación de los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática en entidades elementales o primarias: *situaciones-problemas* (tareas, ejercicios, aplicaciones extra-matemáticas, etc.), *lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., y en sus diversos registros como el escrito, oral,…), *conceptos* (definiciones o d escripciones), *proposiciones* (enunciados sobre conceptos), *procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.) y *argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos). El lenguaje es una entidad que desempeña un pa pel representacional pero también instrumental (Godino, 2002, pp.245-246). Las entidades primarias se representan en la figura 3.1.2.

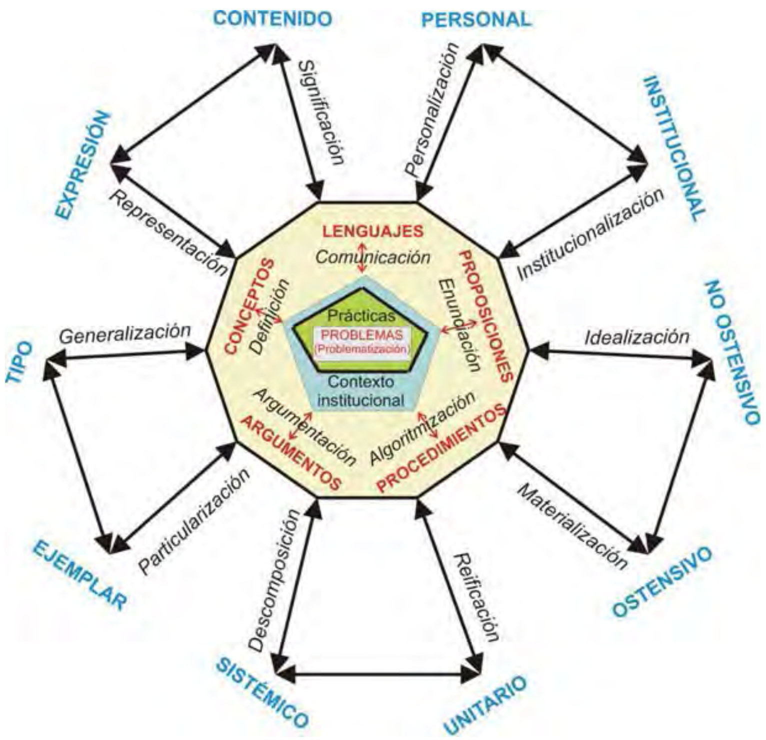


Figura 3.1.2. Configuración ontosemiótica (Godino, 2014, p.23)

Estas entidades, a su vez se unen y organizan dando lugar a configuraciones ontosemióticas (Giacomone, 2017): *configuraciones epistémicas* (CE), referidas a significados institucionales, o *cognitivas*, referidas a los significados personales. Cada cambio significativo en algún elemento del significado producirá un n uevo tipo de tareas que activarán una parte del significado y, por tanto, una nueva CE. Todas estas configuraciones y sus relaciones darán lugar al significado global.

En esta tesis doctoral el estudio de las entidades primarias, nos permitirá establecer configuraciones epistémicas según dominios de definición, obtenidos a través de un estudio histórico-epistemológico del máximo común divisor (capítulo 4 de esta memoria). También, formarán parte fundamental de la herramienta didáctica desarrollada para el análisis de manuales (capítulo 5) y constituirán un medio esencial para la caracterización de significados personales de los estudiantes (capítulo 6).

Por otra parte, los objetos matemáticos se pueden considerar desde dimensiones o facetas duales dependiendo del juego de lenguaje en que participan (Godino, Batanero y Font, 2009). Asimismo, podemos hablar de procesos (cognitivos o epistémicos) implícitos en cada una de las facetas duales anteriores. Ambos, facetas y procesos, vienen representados en la figura 3.1.2. y los resumimos en la tabla 3.1.1.

Tabla 3.1.1. *Facetas duales y procesos*.

Facetas duales:	**Procesos:**
• Expresión–contenido: antecedentes–consecuentes de una función semiótica	• Representación–significación
• Personal–institucional: relativos a sujetos personales–compartidos en una institución	• Personalización–institucionalización
• Ostensivo–no ostensivo: materiales o perceptibles–inmateriales o abstractos	• Materialización– idealización (o concreción– abstracción)
• Unitario–sistémico: objetos considerados globalmente como un todo–considerados como sistemas formados por componentes estructurales	• Reificación–descomposición (o síntesis–análisis)
• Ejemplar–tipo (o extensivo–intensivo): particular–general	• Particularización–generalización

La *faceta particular–general* tiene una consideración especial en esta investigación pues, podíamos decir que es inherente a la educación matemática (Font & Contreras, 2008) y, en particular, al Álgebra Abstracta. Muy relacionados con esta faceta están los niveles de algebrización (Godino et al., 2015) que, como ya comentamos, no se han categorizado aún para la etapa universitaria.

> Los niveles de algebrización son básicamente grados de generalidad, combinada con el uso de diversos registros de representación semiótica (RRS), sus transformaciones y conversiones (Duval, 1995), los cuales son indicativos de fases en el proceso de reificación de los objetos intensivos intervinientes. Consideramos que para la descripción del carácter algebraico de las prácticas matemáticas es útil fijar la atención en los objetos resultantes de los procesos de generalización, y del proceso dual de particularización. (ibíd., p.130)

Por lo tanto, la dimensión particular–general ocupará un lugar destacado, tanto en el análisis de los significados institucionales como de los personales. En el capítulo 5, para el análisis de manuales, será muy relevante la observación de estos procesos de generalización y particularización, en diferentes sentidos: desde lo particular a lo general y el sentido inverso, desde lo general a lo particular, pues nos informan acerca de los procesos de enseñanza implementados en los libros de texto. También será importante examinar esta dualidad en relación a los significados personales de los estudiantes.

Por otra parte, este marco teórico propone una metodología de *análisis de la actividad matemática* basada en cinco niveles (Font y Rubio, 2017):

Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas.
Nivel 2. Identificación de objetos y procesos matemáticos.
Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos.
Nivel 4. Identificación de normas.
Nivel 5. Valoración de la idoneidad interaccional del proceso de instrucción.

Por un lado, en esta tesis doctoral, nos centramos en los dos primeros niveles de análisis que se refieren al análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas desde la ontología propia, y a la elaboración de configuraciones de objetos que permitan describir la complejidad ontosemiótica y posibles conflictos semióticos.

También será útil (nivel 5 del análisis) la noción de *idoneidad didáctica* (Godino, Contreras y Font, 2006), herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica normativa; esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención en el aula (Godino, 2013, p.115).

> La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). (Godino, 2017, p.13)

La idoneidad, como criterio de adecuación de un proceso de instrucción al proyecto de enseñanza, puede aplicarse en Didáctica de las Matemáticas a distintos campos. Godino (2013) manifiesta:

> La noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o "incidentes didácticos" puntuales. (p.118)

En esta investigación, aplicaremos la idoneidad didáctica para evaluar el significado pretendido del máximo común divisor en manuales para el Grado en Ingeniería Informática. El análisis de estos manuales, así como la valoración de la idoneidad didáctica de cada uno de ellos, forma parte del capítulo 5 de esta tesis.

Según Godino (2013), la idoneidad didáctica se obtiene a través de la articulación de las seis componentes, que esquematiza la figura 3.1.3.

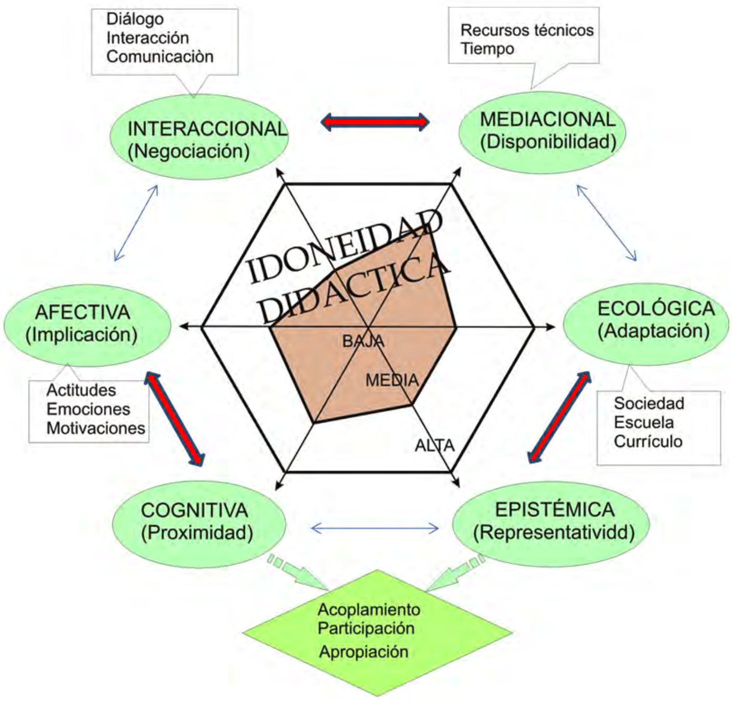


Figura 3.1.3. Idoneidad didáctica (Godino, 2013, p.116)

A continuación, resumimos las componentes e indicadores de la idoneidad según Godino (2013). Debido a que la noción de idoneidad didáctica puede aplicarse a procesos de estudio puntuales (sesión de clase, desarrollo de una unidad didáctica, etc.), globales (desarrollo de un curso, una propuesta curricular, etc.) o aspectos parciales (un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, etc.), se ha realizado la pertinente adaptación en dichos indicadores, para el análisis de manuales del Grado en Ingeniería Informática.

- Idoneidad epistémica: se refiere a la representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
  - *Situaciones-problemas*: Si hay en cada manual una muestra representativa y articulada de situaciones (elementos introductorios, ejemplos, ejercicios para adquirir destrezas). Las aplicaciones de la divisibilidad a la informática son importantes, por lo que la existencia de situaciones de aplicación se observará en este indicador.
  - *Lenguaje*: Uso de distintos tipos de lenguajes, su traducción y conversiones. Fijaremos la atención en el uso excesivo del lenguaje simbólico o muy formal de la Matemática, como indicativo de la falta de adecuación al nivel educativo de estos estudiantes de primer curso universitario.
  - *Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)*: Las definiciones y procedimientos deben ser claros y correctos, y adaptados a este nivel educativo. También veremos si se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales en la temática de divisibilidad.
  - *Argumentos*: Indicaremos si las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen. Resaltaremos el papel de la demostración en el texto y el tipo de demostración utilizada, como indicativo del grado de abstracción o formalidad.
  - *Relaciones*: Observaremos si, en el manual, los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. También es importante si se identifican y articulan los diversos significados de los objetos.
- Idoneidad cognitiva: expresa la relación existente entre los significados personales previos a la instrucción y los significados pretendidos/ implementados; esto es el grado en que los contenidos implementados son adecuados para los estudiantes.
  - *Conocimientos previos*: Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios o el manual los proporciona. También si los contenidos pretendidos tienen una dificultad manejable en sus diversas componentes.
  - *Aprendizaje*: Si el manual promueve la comprensión de conceptos y proposiciones, desarrolla la competencia comunicativa (a través del uso de un lenguaje adecuado) y argumentativa, así como la fluencia procedimental.

- Idoneidad interaccional: En relación al proceso de enseñanza–aprendizaje, permite identificar conflictos semióticos potenciales y resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
  - *Interacción manual-estudiante*: Si el texto hace una presentación clara y bien organizada, enfatizando las cuestiones claves del tema y abordando conflictos semióticos potenciales. También será de interés, si se utilizan diversos recursos retóricos y argumentativos.
  - *Autonomía*: Respecto del estudiante, si el manual es facilitador de la autonomía en el aprendizaje.
  - *Evaluación formativa*: Si en el manual se proponen actividades o ejercicios de autoevaluación.
- Idoneidad mediacional: expresa la disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza–aprendizaje.
  - *Recursos materiales*: Se utilizan recursos informáticos, se proporcionan códigos o pseudocódigos para introducir y tratar situaciones adecuadas al contenido pretendido.
  - *Tiempo de aprendizaje*: Si se establece una distribución en capítulos o secciones que facilitan la comprensión de los contenidos con mayor dificultad o más importantes.
- Idoneidad afectiva: grado de implicación (interés, motivación, predisposición…) del estudiante y si enfatiza las conexiones de las matemáticas con la realidad.
  - *Intereses y necesidades*: Las tareas tienen interés para los estudiantes permitiéndoles la utilidad de las matemáticas tanto en la vida cotidiana como en la vida profesional.
  - *Emociones*: La presentación del manual o la estética del mismo evitan el rechazo.
- Idoneidad ecológica: Se refiere al grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.
  - *Adaptación al currículo*: Los contenidos expuestos en el manual se corresponden con las directrices curriculares.

- *Apertura hacia la innovación didáctica*: Se integran las nuevas tecnologías (tanto recursos web o audiovisuales, como si se propone el uso de un software informático).
- *Adaptación socio-profesional y cultural*: Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
- *Conexiones intra e interdisciplinares*: Existen estas conexiones entre los contenidos.

En la figura 3.1.3. observamos que las idoneidades epistémica y cognitiva se sitúan en la base pues se considera que el proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de unos conocimientos específicos.

Por otro lado, respecto a la evaluación de la idoneidad, Godino et al. (2014) afirman:

> El juicio sobre la idoneidad didáctica del proceso de estudio tiene un carácter ordinal, y se aplica a cada faceta. Se valora como alta, media, baja, según la presencia o ausencia de un conjunto de indicadores empíricos de idoneidad incluidos en una pauta o guía elaborada en trabajos previos (Godino, 2011), lo cual permite atribuir una cierta objetividad a la valoración. Tales indicadores reflejan "principios didáctico-matemáticos" sobre los cuales existe un cierto consenso en la comunidad de educación matemática. La valoración ordinal de la idoneidad didáctica no es relevante. Lo importante es la identificación de aspectos específicos del diseño o de la implementación que podrían ser cambiados de una manera fundamentada en próximos ciclos de estudio realizados en circunstancias similares. (p.194)

Así, para establecer la idoneidad didáctica de cada manual en el capítulo 5, hablaremos de idoneidad alta, media o baja en cada faceta, según los indicadores anteriormente expuestos.

3.2. Preguntas de investigación, hipótesis y objetivos

En el capítulo 1 de esta memoria, expusimos el problema de la investigación, concluyendo con el objetivo general en esta tesis doctoral y que recordamos:

El objetivo general es describir y analizar la influencia del uso de recursos informáticos en la enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad, para el Grado en Ingeniería Informática, identificando fenómenos didácticos y conflictos de significado, *utilizando las herramientas que propone el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

Según la faceta institucional–personal propuesta en el enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática (Godino, 2002) y que se aborda en este trabajo, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación (algunas surgidas de la reflexión sobre los antecedentes) junto con las hipótesis establecidas a partir de ellas. Por último, los objetivos marcados en la investigación:

Respecto al significado institucional de la divisibilidad para estudiantes del Grado en Ingeniería Informática, nos preguntamos ¿cuáles son los cambios significativos en el desarrollo histórico–epistemológico sobre cuestiones de divisibilidad, y, en concreto, del estudio del máximo común divisor? y ¿a través de qué elementos u obj etos, representativos, implicados en dicha enseñanza y aprendizaje podemos identificarlos? Con estas preguntas, realizamos la siguiente hipótesis:

H1. Existen elementos diferenciadores en las épocas griega y moderna, respecto del máximo común divisor, que permiten, utilizando las herramientas del enfoque ontosemiótico, establecer configuraciones epistémicas según distintos dominios de definición que se describieron en la época moderna, donde la dualidad particular–general es uno de los elementos diferenciadores fundamentales.

Asociado a ello, nos planteamos el objetivo:

***O1**. Analizar el desarrollo epistemológico-evolutivo del máximo común divisor, identificando elementos diferenciadores entre la época griega y la moderna, para establecer configuraciones epistémicas según los distintos dominios de definición, con objeto de caracterizar el significado institucional de referencia del máximo común divisor.*

Teniendo en cuenta la transposición informática (Balacheff, 1994), nos preguntamos; ¿cuáles son las características específicas de la enseñanza y aprendizaje del máximo común divisor en el Grado en Ingeniería Informática?; ¿qué impacto tiene el uso de recursos informáticos y el tratamiento de las aplicaciones que corresponden a esta titulación, en la enseñanza del máximo común divisor? En concreto, ¿qué configuraciones epistémicas están presentes en los manuales y qué tendencias se ponen de manifiesto respecto de la dualidad particular–general? Estas preguntas nos conducen a la siguiente hipótesis:

H2. El uso de recursos informáticos y el tratamiento de las aplicaciones que corresponden a esta titulación, está provocando unos cambios en la enseñanza del máximo común divisor que muestra una tendencia hacia la preeminencia de lo particular frente a lo general.

Lo cual nos lleva a plantearnos los siguientes objetivos:

O2.1. *Determinar características del significado institucional pretendido del máximo común divisor, mostrado en manuales para el Grado en Ingeniería Informática, utilizando las herramientas del EOS.*

02.2. *Poner de manifiesto en qué forma afecta a la enseñanza, el uso de recursos informáticos y el tratamiento de las aplicaciones que corresponden a esta titulación, así como identificar fenómenos didácticos y mostrar tendencias en la dualidad particular−general.*

En relación con los significados personales de los estudiantes, nos planteamos los siguientes interrogantes: ¿qué impacto tiene el uso de las tecnologías en el aprendizaje de la demostración matemática, en el contexto de aritmética modular, para alumnos del Grado en Ingeniería Informática?; ¿Cuál es el papel que el alumno otorga a las hipótesis en el aprendizaje de la demostración matemática para alumnos del Grado en Ingeniería Informática en dicho contexto?; ¿qué impacto tiene el uso de las tecnologías en la consideración de dichas hipótesis?; ¿qué tipos de conflictos semióticos muestran y cuales permite superar el uso del programa Mathematica? Todo ello nos lleva a formular las siguientes hipótesis:

H3. El uso de recursos informáticos está provocando unos cambios en el aprendizaje de la demostración, en el contexto de aritmética modular, en el Grado en Ingeniería Informática.

De donde plantemos el siguiente objetivo:

O3. *Extraer y analizar los significados personales construidos por los estudiantes universitarios de primer curso del Grado en Ingeniería Informática, mediante el análisis de sus respuestas a prácticas informáticas, con el software Mathematica, y utilizando las herramientas del enfoque ontosemiótico, en el contexto de aritmética modular, como aplicación relevante de la divisibilidad en esta titulación.*

Más específicamente, este objetivo está compuesto de los siguientes sub−objetivos, ligados, a su vez, a sub−hipótesis:

H3.1. Los significados personales de los estudiantes se ven afectados por las prácticas informáticas, con el programa Mathematica, produciéndose fenómenos didácticos. Nos lleva a establecer:

O3.1. *Extraer y analizar los significados personales de estos estudiantes acerca de una demostración, en el contexto de aritmética modular, en una práctica con Mathematica, utilizando las herramientas del EOS.*

H3.2. Las prácticas informáticas con el programa Mathematica influyen en el papel que los estudiantes de esta titulación otorgan a las hipótesis, en el aprendizaje de una demostración matemática, en el contexto de aritmética modular. Nos lleva a considerar:

O3.2. *Determinar el uso que hacen los estudiantes de las hipótesis de un teorema sobre aritmética modular, cuando la enseñanza y aprendizaje están mediados por el trabajo con Mathematica, utilizando como marco teórico el EOS.*

H4. Los esquemas de demostración axiomático–modernos, se enriquecen cuando se utilizan los recursos informáticos pues permiten trabajar, de forma empírica, en demostraciones de Álgebra Abstracta. Para ello planteamos:

O4. *Analizar el cambio de los esquemas de demostración (abstracta a empírica*[6]*) en las respuestas relativas a demostraciones en un axioma en el contexto de aritmética modular, mediada por un entorno informático; así como la clasificación de diversos conflictos semióticos y las relaciones entre dichos esquemas de demostración.*

Relativo al uso del lenguaje simbólico en un entorno informático, nos planteamos: ¿qué dificultades encuentran los estudiantes del Grado en Ingeniería Informática en el empleo de los cuantificadores existencial y universal?; ¿qué impacto tiene el uso de recursos informáticos sobre estas dificultades en los cuantificadores?

H5. A través de las prácticas informáticas con el programa Mathematica los cuantificadores universal y existencial han tomado un nuevo sentido, al potenciar la particularización frente al proceso de generalización, lo que ha mejorado su comprensión y uso. Nos lleva al objetivo:

O5. *Analizar el sentido más concreto que toman algunos cuantificadores lógicos abstractos, que se utilizan en la demostración matemática, como son el universal y el existencial, con el uso del programa Mathematica.*

3.3. Metodología general

El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos presenta unas características metodológicas propias (Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2013; Godino, 2017) y

[6] En el sentido de Harel & Sowder (2007)

proporciona una serie de herramientas que nos permite analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en Álgebra Superior cuando está mediada por un entorno informático.

Este marco teórico propone una metodología de análisis de la actividad matemática basada en cinco niveles (Font y Rubio, 2017). En esta tesis doctoral nos centramos en los dos primeros niveles de análisis (referidos al análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas) y al quinto nivel (idoneidad didáctica).

En Didáctica de las Matemáticas, el estudio de cualquier proceso de instrucción es complejo y se puede considerar desde distintas dimensiones. Nuestro estudio se centra en las dimensiones epistemológica y cognitiva, principalmente, pues son la base para cualquier programa de estudio. La dimensión instruccional estará también presente pues la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se realizan en el seno de una institución.

Las hipótesis y objetivos de esta investigación se han fijado según la faceta institucional–personal propuesta en el EOS. Por tanto, esta memoria tiene dos fases interdependientes pero bien diferenciadas ya que se estudian distintos componentes del sistema didáctico. Cada una de estas partes posee un fin en sí misma y tendrá unas características metodológicas específicas. A continuación, resumimos, de forma muy breve, la metodología general empleada, en cada fase, para los estudios empíricos realizados. Todo ello se expone, con más amplitud, en los capítulos 4, 5 y 6 de esta tesis doctoral.

La primera fase se corresponde con la faceta institucional y se dividirá, a su vez, en dos bloques:

- En primer lugar, se realiza un estudio epistemológico basándose en los distintos dominios de definición, en los que se obtienen resultados relativos a cuestiones de divisibilidad, prestando especial atención al cálculo del mcd y conectándolo con el desarrollo histórico del Álgebra Abstracta. De este estudio emerge el significado institucional de referencia, entendido como CE. Todo ello se aborda en el capítulo 4.
- Posteriormente, se realiza un estudio cualitativo-cuantitativo de ocho manuales que se utilizan en universidades representativas en el Grado en Ingeniería Informática (capítulo 5 de esta tesis doctoral), teniendo en cuenta los estudios sobre análisis de libros basados en el enfoque ontosemiótico realizados por Contreras y Ordóñez (2005), Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) y Ordóñez (2011), lo cual nos permite documentar sistemáticamente el significado institucional pretendido que emana de ellos.

Para ello ha sido necesario elaborar una herramienta de análisis didáctico (Ordóñez, 2011), que permita unificar el estudio del mcd que desarrolle cualquier manual, salvando la gran variabilidad existente. La muestra de libros para el análisis es intencional, aunque elegida de forma que represente, adecuadamente, los libros de texto para estudiantes del Grado en Ingeniería Informática, en España. La metodología empleada para la selección de estos ocho manuales se establece siguiendo investigaciones previas a esta tesis doctoral (Ordóñez et al., 2015) y que expondremos con detalle en el capítulo 5. La reflexión y comparación de los resultados obtenidos, nos permite obtener características del significado institucional pretendido y, en particular, pondrá de manifiesto la adaptación del conocimiento matemático en esta temática cuando la enseñanza está mediada por la utilización de los recursos informáticos y las aplicaciones propias de esta titulación.

Una vez determinado el significado institucional pretendido, nos proponemos analizar la influencia del uso del programa Mathematica en la enseñanza–aprendizaje de la demostración dentro del contexto de aritmética modular. Para ello escogeremos los estudiantes que estudian temas de divisibilidad y sus aplicaciones, en el Grado en Ingeniería Informática, y que están matriculados en las asignaturas de Matemática Discreta y Álgebra. Por tanto, la muestra coincide con la población. Es evidente que el carácter de la investigación es exploratorio, se espera que en investigaciones posteriores, los resultados puedan ser contrastados.

Para la evaluación de los significados personales, se analizarán las prácticas de los estudiantes, a través de un manual de prácticas que se les facilita, y las respuestas a determinadas actividades matemáticas propuestas. Esta fase de la investigación se presenta en el capítulo 6 de esta tesis doctoral y se organiza en dos estudios empíricos:

- El primer estudio empírico (sección 6.2 del capítulo 6) muestra una investigación didáctica acerca de la enseñanza y aprendizaje de una demostración que forma parte del temario de la asignatura de Matemática Discreta. Analizamos la influencia de Mathematica, en el estudio de esta demostración, utilizando el EOS. La exploración, sobre una muestra formada por 132 a lumnos de la Universidad de Jaén, se realiza *exclusivamente en el laboratorio de prácticas* y consta de cuatro ítems.

  En los dos primeros ítems (sección 6.2.2.), tras un análisis a priori de las prácticas propuestas, se clasifican y cuantifican los conflictos semióticos manifestados por dichos estudiantes, lo que nos permite caracterizar sus significados personales y determinar fenómenos didácticos que se producen en el estudio de esta demostración mediado por recursos informáticos.

En los dos últimos ítems (sección 6.2.3.) se realiza una investigación didáctica para determinar el uso que hacen los estudiantes de las hipótesis del teorema cuya demostración se ha analizado anteriormente. Las respuestas de los estudiantes a las prácticas diseñadas han sido clasificadas y cuantificadas atendiendo tanto a los conflictos semióticos manifestados, como a la influencia que tiene dicho software científico en la enseñanza y aprendizaje de estos estudiantes.

- El segundo estudio empírico, relativo a la faceta personal de la investigación, se analiza la influencia de Mathematica en la enseñanza y aprendizaje de la propiedad conmutativa, en un entorno de aritmética modular, apoyada por el uso de los recursos informáticos. Para llevarlo a cabo, se ha realizado una exploración con estudiantes del Grado de Ingeniería Informática de la Universidad de Jaén, que consta de *dos pruebas: una escrita y otra con ordenador* (con 61 y 144 estudiantes presentados, respectivamente). Mostramos la forma en que han abordado la resolución de las mismas extrayendo dificultades y errores y, buscando tendencias en el método de trabajo elegido por los estudiantes para esta actividad matemática, en relación a la dualidad particular–general, por la influencia del entorno computacional usado en la instrucción.

En esta fase, la corrección y codificación de las respuestas de los estudiantes se hará siguiendo el método de otras investigaciones (Ordóñez, 2011) lo que hará posible cuantificar variables y así obtener resultados numéricos y regularidades que nos permitan constituir el índice de ocurrencia de un fenómeno y establecerlo como una característica de las configuraciones cognitivas de los estudiantes de estos grupos.

Así, la investigación reúne las condiciones de una investigación epistémica, al estudiarse significados institucionales; es cognitiva, en el sentido de cognición individual, al tratar con significados personales; y, por último, es instruccional al tratar de establecerse las interacciones entre significados institucionales y personales. Esto es, fijándonos en el fin perseguido, podemos decir que se trata de una investigación de carácter semiométrico o de caracterización de significados, puesto que se caracterizan significados institucionales y personales. Es también una investigación de tipo ecológico, al buscarse relaciones entre significados y de tipo interaccional al observar cómo influye un determinado programa de cálculo científico y simbólico como es Mathematica, en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad para estudiantes del Grado en Ingeniería Informática.

En resumen, la investigación tiene un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004), ya que considera variables cualitativas (tipo de resolución de problemas propuestos por los alumnos, tipos de demostraciones y entidades primarias en los libros de texto universitarios, dificultades y errores, etc.) y de carácter cuantitativo en tanto que ponderamos y buscamos regularidades a fin de establecer variaciones en una configuración epistémica y fenómenos didácticos en la enseñanza–aprendizaje de la divisibilidad en Álgebra Superior.

Capítulo 4. Significado institucional de referencia

El análisis de la faceta institucional en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad, para el Grado en Ingeniería Informática, se inicia en este capítulo. El objeto de la investigación es caracterizar el significado institucional de referencia del máximo común divisor y los distintos objetos matemáticos de la divisibilidad relacionados con él, en Álgebra Superior, lo que nos permitirá poder establecer comparaciones con los distintos significados (institucionales o personales) e identificar, así, características, ausencias de significado y conflictos semióticos entre estos agentes (Godino, 2002).

4.1. Dominios y divisibilidad en Álgebra Superior

En las preguntas de investigación nos interrogábamos sobre las características específicas de la enseñanza y aprendizaje del mcd en el Grado en Ingeniería Informática y los elementos u objetos representativos, implicados en la instrucción, que nos pueden mostrárnoslas.

Según el enfoque ontosemiótico, el significado institucional de referencia está conformado por las distintas configuraciones epistémicas que emergen en el objeto matemático estudiado, en nuestro caso el máximo común divisor, descritas a través de las entidades primarias propuestas por el marco teórico. Identificadas éstas, podremos analizar el significado pretendido de la divisibilidad en manuales universitarios.

> En el currículum de algunos países los tipos de "objetos matemáticos" que se consideran son sólo dos: conceptos y procedimientos. Se trata de una "ontología" demasiado simplista para analizar los objetos matemáticos que componen un texto matemático, y en general la actividad matemática sea profesional o escolar. En nuestra opinión, es necesario contemplar una ontología más amplia formada por los siguientes elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones-problema, 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas,…, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc. y 6) argumentaciones. Estos seis tipos de objetos se articulan formando configuraciones epistémicas (Figura 1) cuyo análisis nos informa de la "anatomía de un texto matemático". (Font y Godino, 2006, p.68)

Pero ¿a través de qué elementos podremos establecer dichas configuraciones ontosemióticas?

Como señalan Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006)

> En una institución de enseñanza concreta el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico –epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto". (p.230)

Esta observación provoca que debamos preguntarnos:

- ¿cuál es el origen y la evolución histórica del máximo común divisor?
- ¿en qué contextos se pone en juego su uso y su cálculo?

El estudio de la divisibilidad y, concretamente del cálculo del máximo común divisor de números enteros positivos fue tratado ya por la matemática griega. Concretamente Euclides (alrededor del año 300 a.C.), en los libros VII, VIII y IX de los Elementos, trató acerca de teoría de números.

Si bien él representaba los números enteros como segmentos de recta y el producto de dos de ellos como rectángulo, sus argumentaciones no dependían de la geometría. Respecto de las argumentaciones, Kline (2012) afirma, refiriéndose a esta época de la historia que "Los asertos y pruebas son verbales, frente a la forma simbólica actual" (p.114).

En los Elementos, Euclides estableció los objetos matemáticos principales puestos en juego en la divisibilidad, dentro del conjunto de los números naturales; esto es, los conceptos de divisor y múltiplo, la noción de primo, los distintos métodos para el cálculo del mcd, tanto a través del teorema fundamental de la aritmética como del algoritmo de Euclides.

Como expresan Dorronso y Hernández (1996)

> El libro VII comienza definiendo los números pares, los impares, los primos, los compuestos, los planos (su descomposición en primos tiene dos factores), los sólidos (su descomposición en primos tiene tres factores) y los números perfectos (los que la suma de sus divisores menores que él da como resultado el número: por ejemplo 6=1+2+3). Para Euclides los números se asociaban con segmentos, y así un número con segmento AB divide a otro segmento CD si este último puede medirse con la medida AB. (p.49)

En el libro IX demostró que el conjunto de los primos es infinito. La proposición 20 afirma “lo números primos son más que cualquier multitud dada de ellos”.

Posteriormente, en el álgebra greco−alejandrina, Diofanto (alrededor del año 300 d.C.) demuestra teoremas pertenecientes a los libros VII, VIII y IX de los Elementos con el método inductivo y estos se encuentran en el tratado: Sobre los Números Poligonales. Su obra más importante, titulada Arithmética, está formada por 13 libros (sólo se conservan 6) y en ella aparece, por primera vez, la notación simbólica en el Álgebra para describir incógnitas y expresiones polinómicas. Él no se limita sólo a buscar soluciones enteras, sino que también amplía el dominio de sus soluciones a los números racionales.

El impulso de Fermat (1601−1665) en el siglo XVII a la teoría de números fue muy notable. Kline (2012) asegura

> En el siglo XVIII, la teoría de números aparecía como una serie de resultados desconectados. Los trabajos más importantes en la materia fueron el *Anleitung zur Algebra* (*Guía del Álgebra*, edición alemana, 1770) de Euler y el *Essai sur la théorie des nombres* (*Ensayo sobre la teoría de números*, 1798) de Legendre. (p.804)

Hasta Gauss (1777-1855), había muchos resultados en teoría de números pero fue él quien los sistematizó. Escribió Disquisitiones Arithmeticae, que fue un texto de referencia en esta teoría en el siglo XIX. En este texto se incluye la teoría de las congruencias, cuyas aplicaciones a la informática han sido muy relevantes.

Sin embargo, la aparición del Álgebra Abstracta a lo largo del siglo XIX, y su desarrollo en el XX, permitió obtener una nueva perspectiva que enriqueció esta teoría. Respecto de la forma en que surgieron las distintas estructuras algebraicas, Kline (2012) expone

> diversas clases de objetos se distinguieron y se clasificaron de acuerdo con las propiedades de las operaciones definidas sobre ellas, y ya hemos visto que se introdujeron nociones tales como las de grupo, anillo, ideal y cuerpo,

> (…) para identificar conjuntos concretos de propiedades. (…) Solamente durante las últimas décadas del siglo se dieron cuenta los matemáticos de que podían ascender a un nivel de eficacia nuevo integrando juntas muchas álgebras hasta entonces dispersas, por abstracción de su contenido común. (…) Así surgió el álgebra abstracta como el estudio explícitamente consciente de clases de álgebras, las cuales, individualmente consideradas, no sólo eran sistemas concretos sino que servían para fines también concretos en áreas específicas de la matemática. (pp.1499-1500)

Este proceso de generalización o abstracción: desde lo concreto a la estructura algebraica (lo general), que se produjo históricamente con el nacimiento del Álgebra Abstracta, está muy presente en la instrucción en Algebra Superior. En el análisis didáctico de la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad, en el nivel educativo universitario, sobre el que se indaga en esta memoria, pondremos el foco de nuestra atención en los procesos de generalización y también de particularización.

La primera estructura abstracta que se introdujo fue la de grupo y el primero que introdujo la palabra anillo fue Hilbert (1862−1943). Por tanto, la teoría de anillos, en el Álgebra Abstracta, es producto del siglo XX. Fue la matemática alemana Noether (1882−1935) quien sistematizó todos los resultados conocidos hasta el momento sobre anillos e ideales.

En relación a la divisibilidad, los resultados obtenidos por Euclides, en la matemática griega, para los números naturales se generalizaron para los enteros, los polinomios y, en el Álgebra Abstracta, aparecieron anillos más amplios como son: los dominios de integridad, DI (en ellos se establecieron las definiciones más generales de divisor, mcd, elemento primo, irreducible), dominios de factorización única, DFU (en los que se profundizó sobre el cálculo del mcd a través de la factorización en irreducibles), dominios de ideales principales, DIP (Noether consiguió enlazar la factorización con las cadenas de ideales) y los dominios euclídeos, DE (donde se generalizaron el algoritmo de la división, el algoritmo de Euclides y se obtuvieron procedimientos de cálculo para la identidad de Bezout). Cada uno de ellos aporta unas características propias al estudio del mcd; por ejemplo, en los DE obtenemos los procedimientos de cálculo de mcd más eficientes o, en DI, se estudia la unicidad del mcd. Todo ello se establecerá en cada una de las configuraciones epistémicas que emergen en cada dominio.

Así, estos dominios del Álgebra Abstracta, son la respuesta a las cuestiones que nos habíamos planteado:

- ¿cuál es el origen y la evolución histórica del máximo común divisor?
- ¿en qué contextos se pone en juego su uso y su cálculo?

Como hemos visto en el breve desarrollo histórico realizado, la generalización de los resultados de Euclides en relación a la divisibilidad, y en concreto al cálculo del mcd, está íntimamente relacionada con el nacimiento de los anillos del Álgebra Superior como DI, DFU, DIP y DE y las configuraciones epistémicas que surgen en cada uno permitirá reconstruir el significado de referencia del mcd.

En la clasificación comenzaremos desde el dominio más general (DI), estableciendo definiciones, propiedades, etc., en la forma más genérica, para luego observar los cambios que se producen en ellos y, que a través de diferentes restricciones, darán lugar a las CE. El gráfico de la figura 4.1.1. muestra, de forma intuitiva, la relación existente entre ellos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que en la enseñanza del mcd se realiza el proceso inverso. El estudio en ambientes más generales permite una mayor comprensión de lo que sucede en ambientes más restrictivos, lo que confiere a los primeros una gran relevancia (para comprender y distinguir los conceptos de primo e irreducible necesitamos establecerlos en DI donde ambos son distintos).

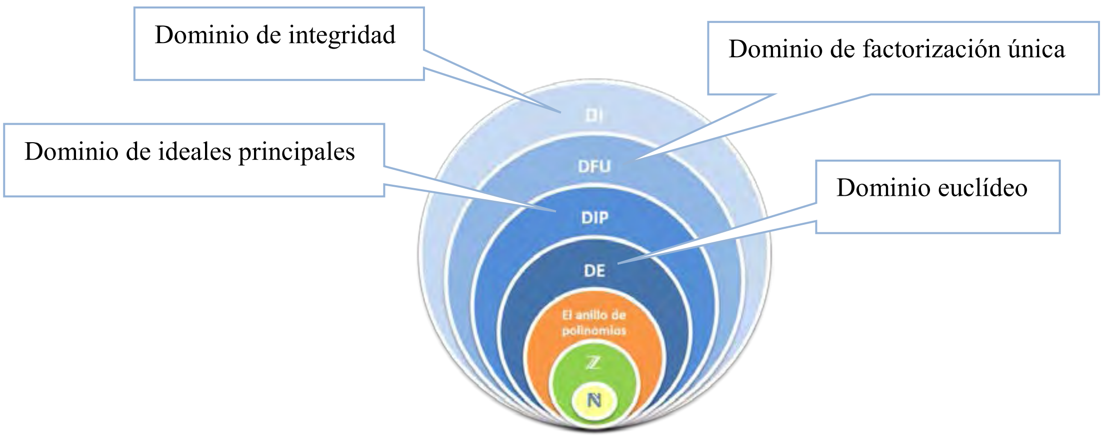


Figura 4.1.1. Relación entre dominios

4.2. Significado institucional de referencia: Configuraciones Epistémicas

La divisibilidad y, en particular, la enseñanza y aprendizaje del mcd está presente en los currículos de todas las etapas educativas por lo que el trabajo del profesor tendrá unas características didácticas diferenciadas en cada una de ellas: aparece en el tercer ciclo de educación Primaria y en el primer ciclo de Secundaria (calculando mcd de números naturales), y posteriormente, en primer curso de Bachillerato (trabajando sobre la factorización de polinomios), de ahí que en la figura anterior hayamos incluido el conjunto de los naturales como punto de partida en esta temática (de color amarillo en la figura 4.1.1.). Lo denominamos configuración epistémica inicial (CE_Inicial). Básicamente, se trabaja en el conjunto de los naturales y, podríamos decir que fue "la postulada" por la matemática griega, con Euclides.

Tal y como afirma Gea (2014)

> En un análisis dirigido al estudio de los cambios producidos por la enseñanza, interesará también tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen. En los puntos en que el significado declarado no se ajuste al significado de referencia, serán manifestados los errores de aprendizaje. Las relaciones dialécticas que surgen en el proceso de enseñanza y aprendizaje (…) propician el ajuste entre los significados personales e institucionales. (pp.35-36)

Por tanto, en cada CE (según el dominio) que definiremos en los siguientes apartados, buscaremos las relaciones con la CE_Inicial y, posibles conflictos semióticos que se producen debido al desajuste con el significado de referencia.

A nivel universitario, el cálculo del mcd aparece tanto en las memorias de los grados de Matemáticas (donde se trabaja en profundidad en los dominios representados en tonalidades de azul en la figura 4.1.1.) como en Ingeniería Informática, objeto de investigación en este trabajo, quedando en esta última restringido su estudio al anillo de los enteros o el anillo de polinomios (coloreados en verde y naranja en la figura 4.1.1.). Sin embargo, el estudio del mcd en cada dominio de definición más abstracto, aporta unas características propias respecto al significado institucional de referencia; por ejemplo, tenemos definiciones generales en DI, argumentaciones muy elegantes matemáticamente en DIP, o procedimientos en DFU y DE (los más eficientes).

Estas cuestiones emergerán con el establecimiento de las distintas configuraciones epistémicas. Así, en cada una de ellas señalaremos las componentes de la actividad matemática más destacadas, que resumimos en tablas. Según las entidades primarias (Godino, 2002), distinguiremos:

1. Situaciones–problemas: Tipos de situaciones, atendiendo a si son: numéricas, procedimentales o para adquirir destrezas, abstractas (en el sentido de que se trabaja con lenguaje algebraico), o sobre propiedades generales y de aplicación.
2. Lenguajes: En el estudio de los tipos de lenguaje, distinguimos entre el lenguaje propio de las matemáticas y el lenguaje de la programación. Presentamos a continuación una clasificación dentro de cada categoría:

2.1. El lenguaje de las matemáticas

2.1.1. *Natural–vernáculo (oral o escrito)*: es el lenguaje común, con el que hablamos habitualmente.

2.1.2. *Numérico*: Es aquel en el que se manejan números. En este tema de divisibilidad aparecerá frecuentemente en ejemplos, ejercicios, etc.

2.1.3. *Tabular*: En ocasiones se recogen datos, de forma ordenada, en una tabla. Es sabido que su lectura, para un estudiante, no está exenta de dificultades. A veces se utilizan tablas para recoger los cálculos de los algoritmos.

2.1.4. *Gráfico*: Corresponde con la utilización e interpretación de un gráfico o dibujos.

2.1.5. *Formal, algebraico o simbólico*: Se utilizan los símbolos de la Matemática, variables, etc. Frecuentemente se usa para notaciones. Es el lenguaje formal de las matemáticas y propio del nivel educativo universitario, por lo que es muy habitual en Álgebra Superior.

2.1.5.1. *Recurrente*: Corresponde con la forma de expresión propia de la recurrencia o inducción. Es especialmente significativo en esta investigación pues permite el traslado al lenguaje informático (uso de bucles y procesos iterativos, etc.).

2.2. El lenguaje de programación

2.2.1. *Código:* Conjunto de instrucciones o texto desarrollado en lenguaje: C, Pascal, Matlab o lenguaje de Mathematica, entre otros. Son las órdenes que sabe leer el ordenador para poder ejecutar lo que queremos.

2.2.2. *Pseudocódigo:* Conjunto de instrucciones de alto nivel para describir un programa o algoritmo. Se le llama también en computación falso lenguaje y utiliza las convenciones estructurales de un lenguaje de programación pero está diseñado para la lectura humana en lugar de la lectura mediante una máquina.

En esta investigación analizamos la influencia de los recursos informáticos en el estudio del Álgebra Superior. En las ciencias de la computación, los procedimientos algorítmicos son muy relevantes pues permiten el traslado de los procedimientos matemáticos, al lenguaje de programación. Un algoritmo consta de una sucesión finita de instrucciones, precisas, que se utiliza para realizar un cálculo o resolver una situación. Como afirma Biggs (1994)

> Con el desarrollo de los ordenadores, muchos de los algoritmos se diseñan para ser utilizados por una máquina y no por seres humanos. Por este motivo solemos describir los algoritmos en una especie de taquigrafía, mezclando lenguajes de programación, lenguaje común y la notación matemática. (p.153)

Esto es, el algoritmo utiliza una forma de expresión característica, descrita en pasos o etapas, bien definidos y marcados, donde las instrucciones vienen determinadas de forma "taquigráfica". Es fácilmente reconocible y muy utilizado por el estudiante de informática. Esta forma de expresión, en nuestra investigación, trasciende el hecho de ser simplemente un procedimiento y puede ser considerado, como un "dialecto" común a las matemáticas y la informática, que posibilita la transferencia entre ambas áreas. Lo llamamos *lenguaje algorítmico*.

En la tabla 4.2.1. mostramos distintos tipos de lenguajes para el cálculo del mcd a través del algoritmo de Euclides.

Tabla 4.2.1. *Tipos de lenguajes en el cálculo del mcd.*

Natural-vernáculo (escrito)	Numérico	Gráfico	Tabular
Último resto no nulo de las divisiones sucesivas	$\begin{array}{rl} 198 = & 74 \cdot 2 + 50 \\ 74 = & 50 \cdot 1 + 24 \\ 50 = & 24 \cdot 2 + \mathbf{2} \\ 24 = & 2 \cdot 12 + 0 \end{array}$	$\begin{array}{l\|l} 198 & 74 \\ \hline 50 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{l\|l} 74 & 50 \\ \hline 24 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{l\|l} 50 & 24 \\ \hline \mathbf{2} & 2 \end{array}$ $\begin{array}{l\|l} 24 & \mathbf{2} \\ \hline 0 & 12 \end{array}$	$\begin{array}{r\|r\|r\|r\|r} & 2 & 1 & 2 & 12 \\ \hline 198 & 74 & 50 & 24 & 2 \\ \hline 50 & 24 & 2 & 0 & \end{array}$

Recurrente	Algorítmico	Programación (Mathematica)
$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1\,; & 0 \le r_1 < \|b\| \\ b = r_1 q_2 + r_2\,; & r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3\,; & r_3 < r_2 \\ \vdots & \vdots \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_n + \mathbf{r_n}\,; & r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_n q_{n+1}\,; & \end{array}$ $(a, b) = \mathbf{r_n}$	<u>Paso 1.</u> Se divide a entre b para calcular cociente y resto <u>Paso 2.</u> • Si r=0, (a,b)=b. • Si r≠0, se divide divisor entre resto (del paso anterior) <u>Paso 3.</u>Se repite el proceso anterior hasta encontrar un resto cero <u>Paso 4</u>. Mcd: último resto no nulo	**PROGRAMA** n1= NÚMERO PARA APLICARLE EL ALGORITMO; n2= NÚMERO PARA APLICARLE EL ALGORITMO; a=Abs[n1];b=Abs[n2]; If [a<b,a=b;b=Abs[n1];]; m=1; While[m>0, m=Mod[a,b]; a=b; b=m;]; Print["m.c.d.(",n1,",",n2,")=",a] Print["m.c.m.(",n1,",",n2,")=",Abs[(n1*n2)/a]]

3. Conceptos: señalamos las nociones matemáticas o definiciones que intervienen en cada configuración. También hemos observado el tipo de definición, distinguiendo entre:

3.1. *Definición intuitiva*: Se hace uso de la intuición para describir un concepto.

3.2. *Definición formal*: Es la propia de la Matemática. Dentro de estas destacaremos, por la relación con esta investigación:

3.2.1. *Definición por recurrencia o inducción*: Se utiliza utilizando el método inductivo: se define para n=1, y, supuesto n−1, se define para n (o sus variantes). Es el caso de la definición del factorial de un número natural o del determinante de una matriz. En nuestra investigación se suele utilizar para definir el mcd de un número finito de elementos.

3.2.2. *Definición axiomática*: Es una definición formal, donde se describen axiomas y que señalamos, especialmente, porque interviene en la definición de las estructuras algebraicas. Por ejemplo, en la estructura de grupo se verifican las propiedades: asociativa, existencia de elemento neutro y simétricos. En la definición de estos axiomas aparecen los cuantificadores (existencial y universal) y en un orden determinado, lo que conlleva una dificultad añadida para el estudiante, tanto respecto de la comprensión como de su uso. Por ejemplo, en la propiedad del neutro: existe un elemento, el neutro, para todos los del grupo. Sin embargo, el elemento simétrico se enuncia: para cada elemento de G, existe su simétrico, de forma que, cada elemento y su simétrico, aparecen por parejas.

3.2.3. *Definición a través del contrario*: Son definiciones que se establecen utilizando la negación. Por ejemplo, en Álgebra Lineal, "un conjunto de vectores es linealmente independiente, si no es dependiente" o en Lógica, una "argumentación es inválida si no es válida". En ocasiones estas definiciones, implican el uso de la lógica matemática en el lenguaje, de forma que, para que negar "para todo" utilizamos "existe", etc. Este tipo de definiciones, tienen una dificultad especial por el uso de la negación, lo que no es nada trivial en los primeros cursos universitarios.

4. Proposiciones: en esta entidad destacamos aquellos resultados y propiedades que corresponden a cada CE.

5. Procedimientos: se han analizado los procedimientos para el cálculo del mcd, primos, etc. que se establecen en cada CE.

6. Argumentaciones: se señalan las demostraciones que aparecen en cada CE, y su tipología, distinguiendo entre:

6.1. *Argumentos deductivos*: Son los que se realizan, de forma directa: parte de las hipótesis hasta llegar a la tesis, a través de un proceso deductivo.

6.2. *Argumentos mediante el contra–recíproco*: Son los que se realizan partiendo de la negación de la tesis hasta llegar a la negación de la hipótesis.

6.3. *Argumentos por reducción al absurdo*: Son los que se realizan partiendo de la negación de la tesis hasta llegar a una contradicción.

6.4. *Argumentos recurrentes o inductivos*: Son los que se realizan utilizando alguno de los principios de inducción.

6.5. *Argumentos constructivos*: Son aquellas demostraciones que proporcionan un procedimiento para calcular la solución de una situación.

6.6. *Argumentos por ensayo–error*: Son muy frecuentes en el trabajo con ordenador. Para argumentar, se prueba y se va ajustando a partir del error, hasta que se obtiene el resultado.

Tras cada CE en los dominios abstractos, indicaremos también cómo se relaciona ésta con CE_Inicial; esto es, qué aporta cada una de ellas con respecto a lo aprendido en etapas anteriores, similitudes y diferencias.

Por último, también discernimos acerca del uso de la faceta dual particular – general que interviene en cada configuración, lo cual proporciona "una medida" del grado de abstracción utilizado en los procesos de enseñanza y aprendizaje algebraicos. En ambientes demasiados abstractos, con predominancia de la faceta intensiva, no va a ser posible implementar algoritmos para el cálculo del mcd ya que necesita elementos concretos (números, polinomios,…) para trasladarlos al ordenador.

A continuación, se irán desarrollando las distintas CE respecto al mcd, según el dominio que se utilice, desde la más general a la que se le imponen más restricciones. La teoría de anillos tiene una terminología específica muy amplia. Incluiremos las definiciones que consideremos más importantes o esenciales para el desarrollo de cada CE.

4.2.1. Configuración epistémica de dominios de integridad

Entenderemos por dominio de integridad (DI) a todo anillo conmutativo, D, sin divisores de cero; es decir, verificando que si $ab=0$ entonces $a=0$ o $b=0$.

Tabla 4.2.1.1. *Configuración epistémica de DI (CE_DI).*

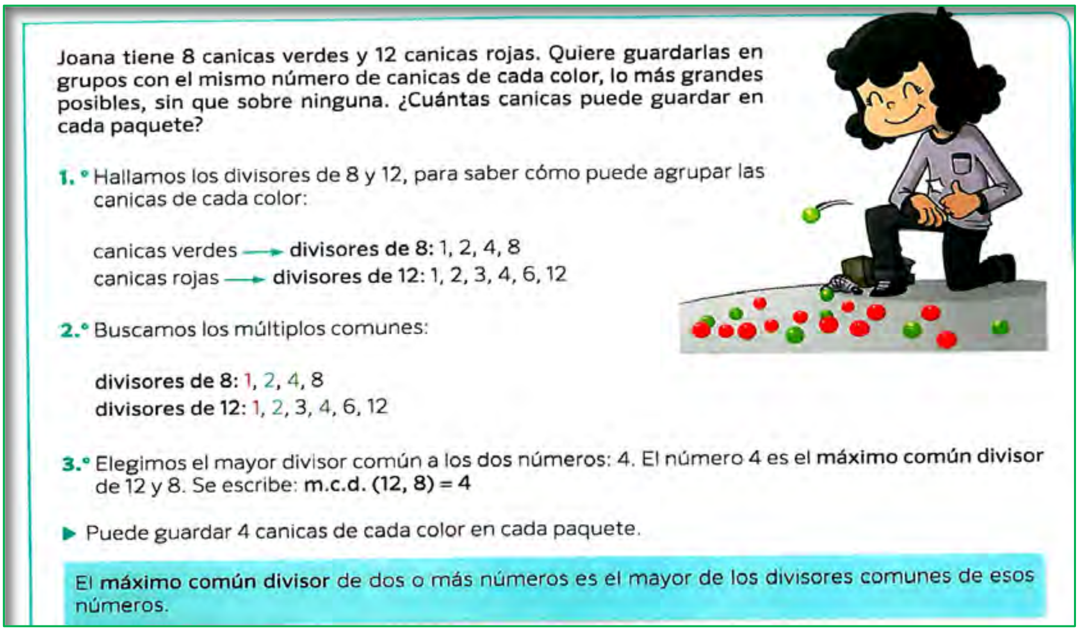
Entidades	Elementos de la configuración
Situaciones-Problemas	-Cálculo del mcd a través del máximo[1] de los divisores comunes. -Situaciones sobre la unicidad del mcd, salvo asociados y el cálculo de asociados en DI particulares. -Diferenciación y relación entre elementos primos e irreducibles. A modo de resumen, observamos que es difícil encontrar, a este nivel, ejemplos para discriminar los conceptos y trabajar según las características propias del dominio. Los procedimientos están poco desarrollados en esta configuración. Son ejercicios poco numéricos, que trabajan las propiedades de forma muy abstracta.
Lenguajes	-Principalmente algebraico o simbólico.
Conceptos	-Asociados: $a \sim b$ sii existe $u \in U(D)$ tal que $a = ub$

	- a divisor de b: $a \mid b$ sii $\exists c \in D$ tal que $b = ac$ -Mcd de a y b: $d \in D$ tal que: *i)* $d \mid a$ y $d \mid b$ *ii)* Si $d' \in D$, $d' \mid a$ y $d' \mid b$, entonces $d' \mid d$ -Primo: $p \in D$, no cero, no unidad y verifica: si $p \mid a\, b$ entonces $p \mid a$ o bien $p \mid b$ -Irreducible: $r \in D$, no cero, no unidad y verifica que: si $r = us$ entonces $u \in U(D)$ o $s \in U(D)$ Tipo de definiciones: definiciones de tipo formal en su mayor parte. También aparecen definiciones axiomáticas (las que corresponden a la estructura de anillo o DI).
Proposiciones	-Teorema de unicidad del mcd: único salvo asociados. -Primo⇒Irreducible y el recíproco no es cierto
Procedimientos	-Cálculo de mcd: divisores de cada elemento, seleccionar los comunes, y buscar el máximo[1].
Argumentos	-Deductivos, muy generales. -No hay argumentaciones constructivas.

[1] respecto de un orden no intuitivo

En estos dominios son importantes: el establecimiento de las principales definiciones que intervienen en divisibilidad (destacadas en la entidad conceptos de la tabla 4.2.1.1.), la diferenciación entre elementos primos e irreducibles y el estudio de la unicidad del mcd (ver proposiciones en la tabla 4.2.1.1.).

La figura 4.2.1.1. muestra la forma en que se propone la definición y el cálculo del mcd, en un libro de texto de 6º de Primaria, utilizando CE_Inicial.



Joana tiene 8 canicas verdes y 12 canicas rojas. Quiere guardarlas en grupos con el mismo número de canicas de cada color, lo más grandes posibles, sin que sobre ninguna. ¿Cuántas canicas puede guardar en cada paquete?

1.º Hallamos los divisores de 8 y 12, para saber cómo puede agrupar las canicas de cada color:

canicas verdes ⟶ **divisores de 8:** 1, 2, 4, 8
canicas rojas ⟶ **divisores de 12:** 1, 2, 3, 4, 6, 12

2.º Buscamos los múltiplos comunes:

divisores de 8: 1, 2, 4, 8
divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12

3.º Elegimos el mayor divisor común a los dos números: 4. El número 4 es el **máximo común divisor** de 12 y 8. Se escribe: **m.c.d. (12, 8) = 4**

▶ Puede guardar 4 canicas de cada color en cada paquete.

El **máximo común divisor** de dos o más números es el mayor de los divisores comunes de esos números.

Figura 4.2.1.1. Cálculo de mcd en CE_Inicial. (Gonzalez et al., 2015, p.30)

Observemos que estos autores han elegido para trabajar en CE_Inicial (figura 4.2.1.1) la definición y procedimiento que, en Álgebra Superior, dieron lugar a los establecidos en CE_DI. Las cuestiones planteadas en la CE_DI se simplifican mucho en CE_Inicial: los conceptos de primo e irreducible coinciden y se mezclan y utilizan de forma indistinta. Debido a que el orden anterior coincide con el de los naturales, hay un solo mcd de dos números positivos, de forma que el cuestionamiento de la unicidad carece de sentido.

En un DI, elementos de gran importancia son los invertibles o unidades del anillo; esto es, aquellos elementos que admiten inverso. Al conjunto de todos ellos lo llamaremos U(D) y juegan un papel esencial respecto de la unicidad del mcd. Así, en DI, el mcd es único salvo asociados. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}$, el máximo común divisor está determinado salvo el signo, y en el anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo, salvo la multiplicación por constantes no nulas, según vemos en el ejemplo que se muestra en la figura 4.2.1.2.:

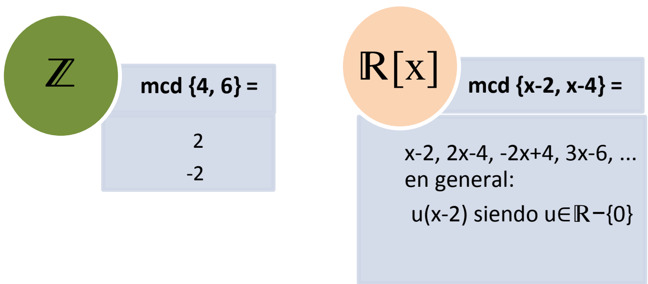


Figura 4.2.1.2. Ejemplos de máximo común divisor

En el Grado en Ingeniería Informática encontramos, al estudiar los enteros, que obtenemos dos mcd (*d* y *-d*) aunque se suele establecer el convenio de escoger el positivo y así “mantener” la unicidad como en la CE_Inicial. En el anillo de polinomios, habrá tantos mcd como unidades, según explicitamos en la figura 4.2.1.2.

El estudiante se encuentra con una ruptura (por la existencia de varios mcd) respecto de CE_Inicial; es decir, se enfrenta a un conflicto semiótico para cuya superación debe asimilar CE_DI, haciendo un cambio significativo respecto a lo estudiado previamente.

En esta configuración epistémica hay una presencia casi exclusiva de la faceta intensiva: gran abstracción y uso del lenguaje simbólico. Las situaciones son poco numéricas y trabajan las propiedades de forma muy abstracta. Los procedimientos están poco desarrollados pues, establecer el orden para la obtención del máximo de los divisores comunes, no es nada trivial (pensemos en el conjunto de los polinomios).

El estudiante del Grado en Ingeniería Informática dispone de ejemplos de dominios que no son DI, como $\mathbb{Z}_n$, cuando n no es primo.

4.2.2. Configuración epistémica de dominios de factorización única

Un dominio de integridad, D, es un dominio de factorización única (DFU) si se verifican las siguientes condiciones:

i. Todo elemento de D, no nulo, no unidad, puede descomponerse como producto finito de elementos irreducibles de D.
ii. Además esta factorización es única, en el sentido de que si $p_1p_2\ldots.p_r$ y $q_1q_2\ldots.q_s$ son dos factorizaciones del mismo elemento de D como producto de irreducibles, entonces $r=s$ y los q_j pueden renumerarse de forma que p_j y q_j sean asociados.

El teorema fundamental de la aritmética, demuestra que $\mathbb{Z}$ es un DFU y, respecto del anillo polinomios, si K es un cuerpo, entonces se obtiene que K[x] es DFU. En este dominio, los ejemplos anteriores suponen una mayor concreción, de forma que la faceta particular tiene más presencia que la general de CE_DI.

En este dominio los conceptos de primo e irreducible coinciden y son importantes los procedimientos para la detección de primos o irreducibles y la factorización a través de ellos, pues permite obtener el mcd como en CE_Inicial; esto es, "comunes elevados al menor exponente". Todo ello se resume en la tabla 4.2.2.1.

Tabla 4.2.2.1 *Configuración epistémica de DFU (CE_DFU).*

Entidades	Elementos de la configuración
Situaciones-Problemas	-Detección de primos o irreducibles (ambos conceptos se identifican). -Obtención de factorizaciones en irreducibles en distintos DFU. -Ejemplos de anillos donde la factorización no es única. -Cálculo del mcd a través de la factorización en irreducibles. Concluimos que en DFU es posible realizar problemas más numéricos, propios de particularizar en los enteros o los polinomios, donde obtendremos procedimientos que se pueden implementar en el ordenador; otras factorizaciones o problemas generales son complicados para este nivel.
Lenguajes	-Principalmente simbólico e inductivo. -En ejemplos, enteros y polinomios, frecuente el lenguaje numérico. -Puede utilizarse el lenguaje tabular o gráfico para disponer los primos (como en la criba de Eratóstenes en los enteros) y su factorización.
Conceptos	-Los mismos que se establecieron en DI.

Proposiciones	-Primo⇔Irreducible. -Teorema de existencia del mcd: “comunes elevados al menor exponente”.
Procedimientos	-Cálculo de divisores: a través de la factorización en irreducibles. -Cálculo de primos o i rreducibles: en su factorización en irreducibles aparecen como producto de ellos mismos por una unidad. -Cálculo de mcd: “comunes elevados al menor exponente”.
Argumentos	-Deductivas, recurrentes (sobre el número de irreducibles). -Hay argumentos constructivos que facilitan procedimientos de cálculo.

Los argumentos para demostrar la unicidad de la factorización en irreducibles exigen un alto nivel de abstracción y en esta configuración aparecen también argumentos inductivos.

Los procedimientos para el cálculo del mcd son eficaces pero no muy eficientes (basta pensar en enteros suficientemente altos y en la dificultad de obtener primos o irreducibles para la factorización). Así, la implementación de ellos en el ordenador tiene importantes restricciones.

Se presentan ejemplos de anillos donde la factorización no es única como $\mathbb{Z}_6[x]$ donde encontramos ejemplos como el siguiente polinomio:

$$x^2 + x = (x-2)(x-3) = x\,(x+1)$$

siendo de grado 2, tiene cuatro raíces pues admite dos factorizaciones en irreducibles. Nuevamente el estudiante se encuentra ante una ruptura con lo aprendido anteriormente, lo que es fuente de conflictos semióticos que deben superarse a t ravés del reconocimiento de CE_DFU.

Los ejemplos de DI que no son DFU, como Z[$\sqrt{-5}$], escapan a los contenidos de divisibilidad que el currículo propone para los estudiantes de Ingeniería Informática.

4.2.3. Configuración epistémica de dominios de ideales principales

Sea A un anillo conmutativo, llamaremos ideal a todo subanillo, I, que verifica que para todo $x \in$ I, y para todo $a \in$ A, $ax \in$ I. Un anillo conmutativo se dice que es un dominio de ideales principales (DIP) si todo ideal I del anillo es principal; es decir, está generado por un s olo elemento, lo que representaremos por I = $<r>$; es decir todo elemento $x \in$ I, puede escribirse como $x = sr$.

Estos dominios nos permiten reinterpretar la factorización en términos de ideales: si I es un i deal principal, entonces todo elemento $x \in$ I, puede escribirse como

$x=sr$. En $\mathbb{Z}$, 6=2·3, por lo que el ideal <6> $\subseteq$ <3> o también <8> $\subseteq$ <4> $\subseteq$ <2>. De esta forma, los DIP aportan un orden a través de las cadenas de ideales y, en ellos, los irreducibles o primos se caracterizan a través de los maximales en dichas cadenas, lo que se expone en la entidad proposiciones de la tabla 4.2.3.1.

Tabla 4.2.3.1. *Configuración epistémica de DIP (CE_DIP).*

Entidades	Elementos de la configuración
Situaciones-Problemas	-Ejercicios teóricos, resultados o propiedades que relacionan las cadenas de ideales con la factorización: • Determinación de generadores para los ideales. • Detección de irreducibles. • Identificación del mcd. • Consecuencias a partir de la identidad de Bezout. -No aparecen ejercicios numéricos en ejemplos de DIP pues en este dominio, se caracterizan elementos y demuestran resultados, pero no hay procedimientos de cálculo. Esta teoría es difícil de conectar con los ejemplos de $\mathbb{Z}$ y el anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo, por lo que es complicado el planteamiento de situaciones-problemas, concretas, en este dominio.
Lenguajes	-Formal o simbólico. -Muy poco lenguaje numérico.
Conceptos	-Los mismos que se establecieron en DI.
Proposiciones	-Irreducible sii el ideal generado por él es maximal. -El ideal generado por dos elementos no nulos es el ideal principal generado por su mcd. -Identidad de Bezout: Si a y b, son dos elementos no nulos, con mcd, d, entonces existen $u,v \in D$ tales que $d = a\,u + b\,v$.
Procedimientos	-No se obtienen procedimientos de cálculo para los irreducibles, mcd o identidad de Bezout.
Argumentos	-Deductivas. Tienen un papel destacado por su simplicidad y elegancia matemática. -No se utilizan argumentos constructivos o algorítmicos que posibiliten nuevos procedimientos para el cálculo.

$\mathbb{Z}$ es un DIP y, respecto del anillo de polinomios, si K es un cuerpo entonces se obtiene que K[x] es también DIP.

Sin embargo, estos estudiantes encuentran un ejemplo, como $\mathbb{Z}$[x], que no es dominio de ideales principales pues el ideal <2,x> no es principal aunque sí es DFU.

4.2.4. Configuración epistémica de dominios euclídeos

Es bien sabido que, en los enteros, la búsqueda de primos altos es difícil y, por tanto, la factorización. Así, es necesario un procedimiento de cálculo del mcd más eficiente que el obtenido en DFU. Se trata del algoritmo de Euclides y como consecuencia el algoritmo extendido de Euclides o identidad de Bezout.

Como herramienta para obtener dichos resultados, necesitaremos una función que nos permita hacer divisiones (en el caso de los enteros, es el valor absoluto y en el caso de los polinomios, el grado). En general, se llama función euclídea (ver la entidad conceptos en la tabla 4.2.4.1.).

Llamaremos dominio euclídeo (DE) a todo dominio de integridad en el que existe una función euclídea. En el caso de los enteros, sabemos que $\mathbb{Z}$ es un DE y, respecto del anillo de polinomios, si K es un cuerpo entonces se obtiene que K[x] es también DE. En la tabla 4.2.4.1. mostramos los elementos más destacados de la configuración epistémica de dominios euclídeos.

Tabla 4.2.4.1 *Configuración epistémica de DE (CE_DE).*

Entidades	Elementos de la configuración
Situaciones-Problemas	-Situaciones relativas a identificar la función euclídea en ejemplos de DE. -Aplicar el algoritmo de la división en $\mathbb{Z}$ o K[x] siendo K= $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Z}_p$ (p primo). -Aplicaciones del algoritmo de la división en los enteros (congruencias, sistemas de numeración). -Cálculo del mcd a través del algoritmo de Euclides en DE particulares. -Obtención de la identidad de Bezout utilizando distintos procedimientos. -Aplicaciones de la identidad de Bezout en los enteros (cálculo de inversos y aritmética modular, ecuaciones diofánticas) Los ejemplos que se obtienen a través de los enteros y los polinomios permiten conectar fácilmente con la teoría, pues se conoce la función euclídea. Son principalmente numéricos y con bastantes e importantes aplicaciones a la informática. En estos casos los procedimientos pueden implementarse en lenguaje de programación..
Lenguajes	-Formal o simbólico. -Lenguaje recurrente en la obtención de fórmulas en la identidad de Bezout y lenguaje tabular para la disposición de los elementos que aparecen en dichas fórmulas. También lenguaje gráfico para representar la división. -La concreción en ejemplos de DE permiten la utilización de un lenguaje numérico. En estos casos es también posible el uso de lenguajes algorítmico y de programación para implementar los procedimientos en el ordenador.
Conceptos	-Función euclídea: δ: D – {0} $\rightarrow \mathbb{N}$ aplicación verificando: i) $\delta(ab) \geq \delta(a)$ para todo $a,b \neq 0$. ii) Para todo $a,b \in$D, si $b \neq 0$, existen $q,r \in$D tales que $a = b\,q + r$ donde $\delta(r) < \delta(b)$ o $r = 0$.

	-Cociente y resto de dividir *a* entre *b*. Tipo de definiciones: Hay definiciones formales pues estamos en un ambiente muy abstracto.
Proposiciones	-Algoritmo de Euclides: el mcd de *a* y *b*, *d,* es el último resto no nulo de las divisiones sucesivas (o divisor del primer cociente exacto). -Identidad de Bezout: • A través de los restos del algoritmo de Euclides: $d = r_n = a\,u_n + b\,v_n$ • Mediante fórmulas recurrentes: $u_0 = 0$; $v_0 = 1$; $u_1 = 1$; $v_1 = -q_1$; $u_{i+1} = u_{i-1} - u_i\,q_{i+1}$; $v_{i+1} = v_{i-1} - v_i\,q_{i+1}$
Procedimientos	-Algoritmo de la división en ejemplos de DE. -Cálculo de divisores mediante divisiones exactas. -Cálculo de irreducibles buscando divisores a partir de cocientes exactos. -Cálculo de mcd: último resto no nulo en el algoritmo de Euclides. -Identidad de Bezout: • Por sustituciones regresivas de los restos en el algoritmo de Euclides. • Mediante fórmulas recurrentes.
Argumentos	-Fundamentalmente son argumentos constructivos y recurrentes. También hay argumentos deductivos.

Si D es DE, podemos desarrollar el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de dos elementos a , $b \in D - \{0\}$, no nulos:

$$
\begin{array}{ll}
a = b\,q_1 + r_1 \;; & \delta(r_1) < \delta(b) \\
b = r_1\,q_2 + r_2 \;; & \delta(r_2) < \delta(r_1) \\
r_1 = r_2\,q_3 + r_3 \;; & \delta(r_3) < \delta(r_2) \\
 & \\
r_{n-2} = r_{n-1}\,q_n + r_n \;; & \delta(r_n) < \delta(r_{n-1}) \\
r_{n-1} = r_n\,q_{n+1}; & r_{n+1} = 0
\end{array}
$$

$$\mathbf{(a\,,\,b) = r_n}$$

(último resto no nulo o divisor para la primera división exacta)

Para obtener la identidad de Bezout, de forma explícita, es necesario aplicar el algoritmo de Euclides: de forma recurrente, haciendo sustituciones regresivas, obtenemos que cada resto que encontramos en el algoritmo de Euclides es combinación lineal de a y b:

$$r_i = a\,u_i + b\,v_i$$

De esta forma el máximo común divisor, que es el último resto no nulo, r_n, dará la identidad de Bezout**:**

$$d = r_n = a\,u_n + b\,v_n$$

Además, se pueden obtener también fórmulas recurrentes para el cálculo del mcd (ver proposiciones en la tabla 4.2.4.1.), que se implementan fácilmente en lenguaje informático.

Aunque hay un alto nivel de abstracción, sobre todo en la definición de la función euclídea, en CE_DE el proceso de particularización se hace patente en los ejemplos que se trabajan dentro del Grado en Ingeniería Informática (enteros o el anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo) a través de ejercicios numéricos. Existen otros anillos donde se puede realizar el proceso de particularización de la estructura algebraica de DE, como $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ o los anillos de los enteros de Gauss ($\mathbb{Z}[i]$), En estos últimos la función euclídea: $\delta\ (a + bi) = a^2 + b^2$, viene dada por el módulo de cada complejo; sin embargo, este estudio no corresponde al currículo del estudiante de informática.

Respecto a CE_DIP, hay un cambio en las argumentaciones que ahora son de tipo constructivo e inductivo, lo que posibilita su traslado al lenguaje de programación. Como consecuencia, es notorio el papel de los procedimientos en CE_DE. En esta configuración encontramos los procedimientos más eficientes para el cálculo del mcd y la identidad de Bezout.

Los ejemplos que son DIP y no DE, como $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$, no se estudian en el Grado en Ingeniería Informática.

La siguiente figura muestra las implicaciones existentes entre los dominios estudiados, no verificándose el recíproco de cada implicación.

Figura 4.2.4.1. Implicaciones entre dominios

Establecido el significado institucional de referencia del máximo común divisor en Álgebra Superior a través de las configuraciones epistémicas en cada dominio, nos planteamos analizar el significado institucional pretendido de la divisibilidad. Para ello examinaremos los anillos que, en divisibilidad, corresponden al currículo del Grado en Ingeniería Informática; esto es, en los anillos de los números enteros y polinomios. Todo ello lo que abordaremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 5. Análisis de manuales

5.1. Introducción

La investigación, en este capítulo, se centra en analizar una parte del significado institucional del máximo común divisor para estudiantes del Grado en Ingeniería Informática. Concretamente, indagamos acerca del significado institucional pretendido en manuales recomendados para esta titulación, con objeto de determinar las características del mismo, utilizando las herramientas que proporciona el marco teórico del EOS, y según nos propusimos en el objetivo O2.1. de esta tesis doctoral.

Godino y Batanero (1994) afirman

> Una vez caracterizado el significado de referencia estaremos en condiciones de comprender las características del significado en las restantes instituciones de enseñanza y tratar de estudiar los factores condicionantes que operan en su constitución y desarrollo.
> La problemática de estudio de los significados institucionales para los objetos matemáticos podría modelizarse con la metáfora ecológica (introducida por Chevallard (1989) en la Didáctica): un objeto particular desempeña una función en distintas clases de instituciones e interesa determinar las condiciones necesarias y/o suficientes para que desempeñe su papel en cada una de ellas. Las nociones de objeto y significado institucionales pretenden servir de instrumento conceptual para este análisis ecológico y semiótico de las ideas matemáticas cuyo locus (o realidad) debemos situar en la cultura como hace White (1983). (p.345)

Consecuentemente, y tras haber analizado el significado institucional de referencia en el capítulo anterior, estamos en condiciones de observar en qué forma afecta el uso de recursos informáticos y el tratamiento de las aplicaciones, que corresponden a esta titulación, a la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad (objetivo O2.2. de esta tesis). Concretamente, queremos observar qué CE están presentes en los manuales recomendados para el Grado en Ingeniería Informática, con objeto de poner de manifiesto tendencias en la dualidad particular−general, así como mostrar carencias de significado y conflictos semióticos potenciales.

El análisis de manuales permitirá observar cambios del conocimiento matemático en esta temática al ser adaptado para ser objeto de enseñanza; esto es, la transposición didáctica que se produce (Chevallard, 1991).

Contreras y Ordóñez (2006) afirman

> Hay que tener en cuenta que entre el saber científico y el saber del alumno hay todo un complicado proceso de transposición didáctica que tiene diversas fases (programaciones ministeriales, programaciones de centro, de área, de aula…). En ellas sobresale, por su especial incidencia en la enseñanza, el papel que juegan los manuales en tal proceso de transposición didáctica. (p.67)

En ese trabajo se realiza una investigación didáctica sobre manuales a través del análisis ontosemiótico que se desarrolla en el EOS y se afirma: “Consideramos que dicha técnica permite un estudio pormenorizado de la actividad matemática, aportando una explicación a fenómenos didácticos que suelen darse en el aula y que se han puesto de manifiesto desde diferentes marcos teóricos.” (ibíd. p.68).

A su vez, el análisis didáctico de libros de texto tiene utilidad que para el profesor de matemáticas. Crisóstomo (2012) lo expresa de la forma:

> Desde la perspectiva ontosemiótica, el análisis de un libro de texto contempla la sistematización de las distintas configuraciones epistémicas de las nociones matemáticas desarrolladas en el texto y su posible articulación a lo largo de la trayectoria instruccional implementada (Godino, Font y Wilhelmi, 2006). Este tipo de análisis puede ser útil al profesor de matemáticas en la selección de materiales y planificación de sus clases con la utilización del libro de texto como documento de apoyo en las sesiones presenciales o de tutoría. (pp.187-188)

Por otra parte, el análisis didáctico de cada manual nos permite observar la transformación del saber sabio en saber enseñado (Chevallard, 1991), contenida en el texto, y obtendremos información acerca del conocimiento matemático que se proporciona al estudiante y que puede adquirir en el proceso de aprendizaje del mcd, a través de cada manual.

Por tanto, el análisis de manuales (sección 5.4.) utilizando la plantilla de análisis elaborada (que presentamos en la sección 5.3.), junto con la reflexión y comparación de los resultados obtenidos para los libros de texto (sección 5.5.), nos permitirá obtener características del significado institucional pretendido del mcd, así como poner de manifiesto la adaptación del significado que se produce dentro del manual para ser enseñado. Asimismo, podremos extraer carencias de significado, fuente de conflictos semióticos potenciales, y mostrar si existen tendencias por la influencia de los entornos computacionales, contrastando la hipótesis H2 expuesta en esta memoria.

5.2. Elección de la muestra

Se ha pretendido que la muestra elegida para el análisis didáctico, fuera representativa para el Grado en Ingeniería Informática.

La diversidad curricular en el nivel educativo universitario es muy amplia, tanto respecto de los contenidos, como en la distribución en asignaturas y su temporalidad (semestres y cursos en los que se ubican los temas de divisibilidad). Eso nos ha llevado a hacer un estudio pormenorizado de las titulaciones, asignaturas y sus bibliografías con objeto de extraer una muestra que, a pesar de la variabilidad que muestran los manuales en relación con el tratamiento de esta temática, nos permita clasificar y extraer las características del significado institucional pretendido del mcd para el Grado en Ingeniería Informática.

Se han seleccionado ocho libros de texto universitarios siguiendo la metodología de investigaciones anteriores (Ordóñez et al, 2015) y que se estructura en distintas fases:

En primer lugar, se escogen tres universidades españolas situadas en los primeros puestos del Ranking Académico (de Shanghai) de las Universidades del Mundo, en la disciplina de Ciencias de la Computación, en los años 2014 y 2015 (donde arranca nuestra investigación) y que se han mantenido en los primeros puestos, entre las españolas, hasta la actualidad. Estas son las universidades de Granada, Jaén y Politécnica de Madrid.

En segundo lugar, a través de sus páginas web, localizamos los Grados en Ingeniería Informática, Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas, y Grado en Matemáticas e Informática, y en ellos buscamos las asignaturas que podían contener los temas de divisibilidad. Analizamos las guías docentes o guías de aprendizaje publicadas en el curso 2017-18 (ver anexo I), de cada asignatura seleccionada para obtener la bibliografía que pudieran contener esta temática.

En la tabla 5.2.1. resumimos los resultados de la exploración realizada para este curso 2017-18 y, en ella, hemos marcado con asterisco (*) las asignaturas donde se localizaron los contenidos de divisibilidad que son objeto de nuestro estudio. También indicamos el curso o semestre en el que se imparten.

Tabla 5.2.1. Localización de la divisibilidad y bibliografía. Curso 2017-18.

Universidad	Titulaciones	Asignaturas Exploradas	Curso/ Semestre	Textos
Universidad de Granada	Grado en Ingeniería Informática	Algebra Lineal y Estructuras Matemáticas (*) Lógica y Métodos Discretos	1º/1º 1º/2º	M1, M2
	Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	Lógica y Métodos Discretos Álgebra I (*) Álgebra II Álgebra III	1º/1º 2º/1º 3º/1º 4º/1º	M3
Universidad de Jaén	Grado en Ingeniería Informática	Matemática Discreta (*) Álgebra (*)	1º/1º 1º/2º	M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8
Universidad Politécnica de Madrid	Grado en Ingeniería Informática	Matemática Discreta I (*) Matemática Discreta II	1º/1º 2º/1º	M1, M2 y M4
	Grado en Matemáticas e Informática	Matemática Discreta I (*) Matemática Discreta II Estructuras algebraicas (*)	1º/1º 1º/2º 2º/2º	M1, M2 y M4 M5

La última fase consistió en examinar y clasificar los recursos bibliográficos de cada materia según fuera bibliografía básica o complementaria; de forma que podíamos saber, si el profesor que imparte la asignatura lo consideraba como un manual básico, en la enseñanza y aprendizaje en esta disciplina, o si se trata de un libro de consulta.

Hemos realizado una selección de los textos con el criterio general de que fueran los recomendados por un número mayor de universidades en las bibliografías básicas y con mayor número de ediciones. Posteriormente, buscamos en las bibliografías complementarias. Para algún manual, la elección ha sido intencionada pretendiendo que los autores pertenecieran al mayor número de universidades españolas posibles o que el análisis del manual constituyera un elemento clarificador en la comparación con los restantes libros de texto, respecto del significado institucional pretendido de la divisibilidad.

Hemos incluido un manual más (al que ahora hemos notado M7) que en la investigación realizada en Ordóñez et al. (2015), por ser un libro de la universidad a distancia (U.N.E.D.), lo que pensamos que puede aportar información valiosa debido a que la enseñanza y aprendizaje puede tener elementos diferenciadores respecto de la enseñanza presencial.

Por tanto, la muestra seleccionada es amplia (considerando la envergadura de los manuales universitarios) debido a la gran variabilidad en el tratamiento de los contenidos y que no hay uniformidad en las bibliografías. Como hemos comentado, consta de ocho libros de texto que hemos numerado desde el manual 1, M1, hasta el manual 8, M8, tal y como aparece en la última columna de la tabla 5.2.1., y son los siguientes:

Manuales analizados:

[M1] Rosen, K.H. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones*. (5ª ed.) Madrid: Mc Graw–Hill.

[M2] Biggs, N.L. (1994). *Matemática Discreta*. Barcelona: Vicens Vives.

[M3] Cohn, P.M. (2000). *Classic Algebra*. England: Wiley and Sons.

[M4] García-Merayo, F. (2015). *Matemática Discreta*. (3ª ed.). Madrid: Paraninfo.

[M5] Dorronso, J. y Hernández, E. (1996). *Números, grupos y anillos*. Madrid: Addison-Wesley y la Universidad Autónoma de Madrid.

[M6] Vera, A., Vera, F.J. y García M.A. (1992). *Álgebra Abstracta Aplicada*. Murcia: Antonio Vera López y otros.

[M7] Bujalance E., Bujalance, J. A., Costa A. F., Martínez, E. (2005). *Elementos de Matemática Discreta*. (3ª ed.). Madrid: Sanz y Torres

[M8] García-Muñoz, M.A., Ordóñez, C. y Ruiz, J.F. (2006). *Métodos Computacionales en Álgebra para Informáticos. Matemática Discreta y Lógica*. Jaén: Universidad de Jaén.

De forma detallada, la elección de cada manual corresponde a los siguientes criterios:

[M1] Es un texto común en la bibliografía básica de asignaturas de las tres universidades y con mayor número de ediciones. Está escrito originalmente en inglés y la quinta edición ha sido traducida al castellano. Actualmente hay una séptima edición, del año 2012.

[M2] Se eligió por ser un libro recomendado también por las tres universidades aunque tiene menos ediciones que el anterior. La Universidad Politécnica de Madrid propone también, en la bibliografía de Matemática Discreta I, la segunda edición de

2002, en inglés. Sin embargo, hemos optado por la que aparece en castellano pues es la común a todas las bibliografías.

[M3] Es un texto de un profesor de la Universidad Politécnica de Madrid, cuya tercera edición corresponde a Mc Graw–Hill y que aparece en la bibliografía de las universidades de Jaén y la Politécnica de Madrid (libro básico y de consulta, respectivamente). En este caso, hemos preferido analizar una versión más actual, del año 2015, y que corresponde a la tercera edición.

[M4] Es un manual clásico en el estudio del Álgebra Superior, en inglés, y es común a dos universidades (la de Granada y Jaén). Lo encontramos en la bibliografía complementaria para el Grado en Ingeniería Informática de las asignaturas Matemática Discreta y Álgebra (Universidad de Jaén) así como en la bibliografía fundamental de Algebra I, del Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas (Universidad de Granada).

[M5] Es una copublicación de Addison-Wesley y la Universidad Autónoma de Madrid y aparece recomendado en las bibliografías: básica de Álgebra y complementaria de Matemática Discreta, para la Universidad de Jaén.

[M6] Aparece sólo en la bibliografía complementaria de Matemática Discreta de la Universidad de Jaén. Dos de sus autores pertenecen a la Universidad del País Vasco y el tercero a la Escuela de Informática de Murcia.

[M7] Es un manual de la universidad a distancia (U.N.E.D.) y está recomendado en la bibliografía complementaria de Matemática Discreta en la Universidad de Jaén.

[M8] Es un manual orientado a las prácticas con ordenador (con el software Mathematica). Recomendado en la bibliografía básica de la Universidad de Jaén y editado por el servicio de publicaciones de la UJA.

La extensión de las bibliografías de cada guía docente es variable. Para este curso 2017-18:

- La Universidad Politécnica de Madrid recomienda, en la guía de aprendizaje de Matemática Discreta I, para el Grado en Ingeniería Informática, 10 manuales: sólo dos (M1 y M2) como libros básicos y 8 como libros de consulta. Es muy parecida a la bibliografía de Matemática Discreta I, para el Grado en Matemáticas e Informática.
- Sin embargo, en la Universidad de Granada, la bibliografía de la asignatura para la doble titulación es muy diferente a la seleccionada para Informática. Para esta última, encontramos 3 manuales en la fundamental y 5 en la básica. La asignatura

Algebra Lineal y Estructuras Matemáticas contiene temas de divisibilidad pero no hay ningún manual en la bibliografía con estos contenidos.

- La Universidad de Jaén propone, para Matemática Discreta, una bibliografía básica con 5 manuales (dos de ellos con autores del área Álgebra de la UJA) y 25 manuales para la complementaria (entre lo que se encuentran libros de teoría, libros específicos de problemas o manuales de Mathematica). Esto nos ha permitido elegir los manuales M5, M6 y M7, publicados por otras universidades españolas.

La última columna de la tabla 5.2.1.. muestra la distribución, por asignaturas, de los textos seleccionados. Es importante señalar que esta bibliografía es la vigente durante este curso 2017-18, y que se ha mantenido al menos desde el curso 2014-15.

5.3. Instrumento de análisis didáctico

El estudio epistemológico en el que se han hecho explícitas las distintas CE según los dominios del Álgebra Abstracta, establece el significado de referencia del mcd en el Grado en Ingeniería Informática. Con el propósito de indagar acerca del significado institucional pretendido que se encuentra en manuales para este alumnado, se ha elaborado una plantilla general de análisis para esta temática (tabla 5.3).

La elaboración de esta herramienta de trabajo ha sido compleja debido a que debía afrontar, de forma unificada, la diversidad de contenidos curriculares distribuidos en diferentes asignaturas, cursos o semestres, (según hemos tratado en la sección 5.2.), y superar esta dificultad mencionada anteriormente.

Se ha llegado a la misma tras tomar en consideración investigaciones anteriores (Ordóñez, 2011; Ordóñez et al., 2015) y ampliar y profundizar en las clasificaciones, dentro de las entidades primarias. Por tanto, en el análisis de cada manual, consideraremos:

1. Situaciones–problemas: En esta entidad indagamos en las siguientes subvariedades:

1.1. *Extensión del manual*: especificamos el número total de páginas del manual y, la extensión y páginas exactas, en las que aparece tratada la divisibilidad (incluidas sus aplicaciones más relevantes).

1.2. *Lugar y orden*: Exponemos los capítulos y secciones donde se aborda el mcd. El orden y lugar en el texto informa, entre otras cosas, de los conocimientos que el autor requiere para el desarrollo de esta temática.

1.3. *Dominio de definición de cada concepto o proposición*: Exploramos en qué dominios se introducen los objetos matemáticos que aparecen en las entidades conceptos y proposiciones. Así distinguiremos entre: los naturales, los enteros, el anillo de polinomios o ambientes más generales como: DE, DIP, DFU y DI. Ha sido importante en esta cuestión observar los dominios de definición de los objetos matemáticos que intervienen en cada libro, para entender el tipo de CE elegida por el autor.

1.4. *Elementos introductorios*: Se han tenido aquí muy en cuenta si se proporciona o no justificación de los objetos matemáticos de la divisibilidad que incorpora el manual y si aparecen elementos favorecedores de un clima que permita introducir al estudiante en la temática, bien sea a través de datos históricos (ver ejemplo en la figura 5.3.1.), con la conexión con lo anteriormente estudiado (CE_Inicial), o mediante aplicaciones o ejemplos.

EUCLIDES

- *Nació en 323 a. C.*
- *Se conoce muy poco sobre su vida.*
- *Vivió y enseñó en Alejandría en tiempos del rey Ptolomeo.*
- *Escribió "Elementos de Geometría", riguroso tratado de matemáticas.*
- *El libro VII está dedicado a algoritmos sobre la teoría de números.*
- *Murió en 285 a. C.*

Una cuestión importante, ya conocida por Euclides, es la contenida en el teorema que sigue a continuación, en el que se prueba que el total de números primos es infinito.

Figura 5.3.1. Notas históricas (García-Merayo, 2015, p.17)

1.5. *Ejemplos*: El uso de los ejemplos y su posición en el texto (antes o después de cada concepto o resultado, así como si está bien resaltado y diferenciado o se entremezcla con el texto) es muy importante en el análisis de las situaciones, como muestran resultados previos a esta tesis doctoral (Ordóñez, Ordóñez y Contreras, 2015) o bien otras investigaciones como Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2014), y Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010). La tipología de los mismos corresponde a la clasificación que establecimos, en general, para las situaciones-problemas en la sección 4.2.: numéricos, abstractos, procedimentales y de aplicaciones. En la figura 5.3.2. mostramos un ejemplo abstracto del procedimiento del algoritmo de Euclides.

★★ EJEMPLO B. Queremos calcular el máximo común divisor de 5k + 3 y 3k + 2, donde k es cualquier número entero. Puesto que tenemos

$$5k + 3 = 1 \cdot (3k + 2) + (2k + 1),$$
$$3k + 2 = 1 \cdot (2k + 1) + (k + 1),$$
$$2k + 1 = 1 \cdot (k + 1) + k,$$
$$k + 1 = 1 \cdot k + 1,$$
$$k = k \cdot 1,$$

los dos lemas anteriores nos permiten deducir que el máximo común divisor de 5k+3 y 3k+2 es 1.

Figura 5.3.2. Ejemplo abstracto (Dorronso, 1996, p.29)

1.6. *Ejercicios*: Analizamos también si hay ejercicios propuestos y su número. Señalamos la posición de ellos en el manual y si se aporta o no resolución de los mismos. También buscamos si hay ejercicios orientados para resolver con ordenador. El tipo de ejercicios corresponde también a la clasificación general de las situaciones, establecida en la sección 4.2.; esto es, si son numéricos, abstractos, si trabajan procedimientos y buscan adquirir destrezas, si corresponden a propiedades relacionadas con el tema o a aplicaciones de la informática, como en el caso de la figura 5.3.3., donde se aplica la divisibilidad a los códigos de una cuenta bancaria.

*Ejercicio 12.20.** Un número de cuenta bancaria consta de 20 dígitos: los cuatro primeros indican la entidad, los cuatro siguientes indican la oficina, los dos siguientes son dígitos de control y los diez últimos se corresponden con el número de cuenta personal. Los dos dígitos de control se obtienen, el primero de los ocho dígitos de la entidad y oficina y el segundo del número de cuenta, de forma que son un test para verificar que el número es correcto. Llamemos D al primer dígito de control y C al segundo.

Entidad (4)	**Oficina (4)**	**DC (2)**	**NºCuenta (10)**
E_1 E_2 E_3 E_4	E_5 E_6 E_7 E_8	D C	N_1 N_2 N_3 N_4 N_5 N_6 N_7 N_8 N_9 N_{10}

Veamos cómo se calculan los dígitos de control, para ello consideremos,

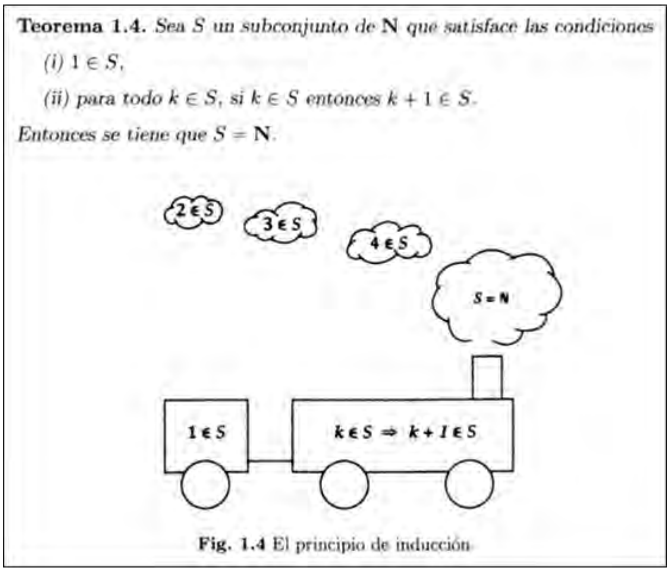
Figura 5.3.3. Ejercicio de aplicación (Garcia-Muñoz et al., 2006, p.207)

1.7. *Implementación informática:* En esta subcategoría analizamos si aparecen códigos o pseudocódigos para cada procedimiento.

1.8. *Aplicaciones y su lugar en el texto*: Son bastantes directas en esta temática y muy relevantes para el Grado en Ingeniería Informática. Observamos si se explicitan y en qué forma. En ocasiones aparecen como ejercicio o como parte básica en la teoría de códigos, claves de dominio público, etc. y tratadas en capítulos o secciones bien distinguidos.

2. Lenguajes: Analizamos los tipos de lenguajes utilizados en el manual, según la clasificación realizada en la sección 4.2.. Recordemos que distinguimos entre el lenguaje propio *de las matemáticas* y el lenguaje *de programación*. Dentro del lenguaje de las matemáticas diferenciamos: natural–vernáculo (escrito), numérico, tabular, gráfico (ver figura 5.3.4.) y formal o algebraico o simbólico, considerando también el lenguaje recurrente.

Dentro del lenguaje de programación, señalaremos si se utilizan pseudocódigos o códigos y en qué tipo de lenguaje: C, C++, Pascal, etc. o de software científicos como: Mathematica, Maple, etc.


Teorema 1.4. *Sea S un subconjunto de* $\mathbf{N}$ *que satisface las condiciones*

(i) $1 \in S$,

(ii) para todo $k \in S$, *si* $k \in S$ *entonces* $k+1 \in S$.

Entonces se tiene que $S = \mathbf{N}$.

Fig. 1.4 El principio de inducción

Figura 5.3.4. Lenguaje gráfico (Biggs, 1994, p.14)

3. Conceptos: Analizaremos si el manual contiene las definiciones de: divisor, primo, irreducible, mcd y elementos asociados. También señalaremos la configuración epistémica (CE_DI, CE_DFU, CE_DIP, CE_DE) según la cual el autor ha realizado la descripción de dichas nociones, aclarando si se utiliza CE_Inicial.

En esta entidad analizamos, también, el tipo de definición que aparece en el manual, según la clasificación de la sección 4.2. de esta memoria; esto es, si es *intuitiva* o *formal*, y en este último caso destacaremos las recurrentes, axiomáticas (por su relación con esta memoria) y las definiciones a través del contrario.

4. Proposiciones: Analizamos si aparecen o no, cada uno de los resultados: teorema fundamental de la aritmética, existencia y unicidad del mcd, algoritmo de la división, algoritmo de Euclides e identidad de Bezout. También indicaremos según qué CE (cuando tenga sentido).

5. Procedimientos: En esta entidad observamos si el manual contiene procedimientos para el cálculo de: divisores, primos, irreducibles y mcd. Además, indicaremos si contiene procedimientos para obtener la factorización en irreducibles, algoritmo de la división y algoritmo de Euclides.

En el caso del cálculo de la identidad de Bezout, distinguimos entre dos procedimientos: el que realiza el cálculo a través de los restos, por sustituciones regresivas y el que utiliza fórmulas recurrentes (ver procedimientos en CE_DE). Siempre que tenga sentido, se señalará la CE en la que se establece cada procedimiento.

6. Argumentaciones: En esta entidad nos fijaremos si existen, o no, demostraciones de cada proposición. En ocasiones, distinguiremos entre los dominios de los enteros, los polinomios u o tros dominios abstractos, pues las demostraciones son muy distintas en cada uno de ellos.

También analizamos el tipo de argumentos que hay a lo largo del texto, siguiendo la clasificación de la sección 4.2.: *deductivos, mediante el contra–recíproco, por reducción al absurdo, inductivos y constructivos*.

Los argumentos mediante ensayo–error no es lógico encontrarlos en un libro de texto, sino que corresponden, más bien, a la realización de prácticas por parte de los estudiantes, generalmente informáticas. Así este tipo de argumentos se abordará en relación al estudio de los significados personales de los estudiantes, que trataremos en el capítulo 6 de esta memoria.

Todo lo anteriormente expuesto lo hemos resumido en la tabla 5.3.1. Esta será la plantilla que utilizaremos como herramienta de análisis didáctico para cada manual y que nos servirá de base para la investigación acerca del significado institucional pretendido del máximo común divisor, en cada libro de texto elegido, según la metodología desarrollada en la sección anterior.

Tabla 5.3.1. *Tabla para el análisis de manuales.*

Entidades	Subvariedades	Consideraciones
Situaciones-problemas	Extensión	Especificar número de páginas del manual y páginas donde aparecen los temas tratados
	Lugar y orden	Capítulos y secciones en que se aborda
	Dominios de definición de cada concepto y proposición	$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, polinomios, DE, DIP, DFU y DI
	Elementos introductorios	Idea de lo pretendido, conexión con lo anteriormente estudiado, notas históricas
	Ejemplos	Cantidad, posición (antes o después de cada concepto), aspecto (resaltados o no), tipo (numérico, abstracto, procedimental, de propiedades, de aplicaciones)
	Ejercicios	Cantidad, posición, tipo, si se aporta o no resolución
	Implementación informática	Si aparecen códigos, pseudocódigos para cada procedimiento
	Aplicaciones y su lugar en el texto	Sistemas de numeración, aritmética modular, ecuaciones diofánticas, códigos, Criptografía…
Lenguajes	de las Matemáticas	Natural–vernáculo, numérico, tabular, gráfico, simbólico, recurrente, algorítmico.
	de programación	Pseudocódigos
		Códigos: tipo de lenguaje (C, C++, Pascal, etc.) o programas científicos (Mathematica, Maple, etc.)
Conceptos-definición	Divisor, primo, irreducible, mcd, asociados	Según las configuraciones epistémicas (CE_DI, CE_DFU, CE_DIP, CE_DE)
	Tipo de definiciones	Intuitiva, formal, recurrente o inductiva, axiomática, a través del contrario.
Proposiciones	Teorema fundamental de la aritmética, existencia y unicidad del mcd, algoritmo de la división y de Euclides, identidad de Bezout	Si aparecen o no cada uno de los resultados y según CE (cuando tenga sentido)
Procedimientos	Cálculo de: divisores, primos o irreducibles, factorización, alg. división, mcd, I. Bezout.	Tipo según las configuraciones epistémicas (CE_DI, CE_DFU, CE_DIP, CE_DE). Para I. Bezout: Restos o fórmulas recurrentes
Argumentos	Demostraciones	Si se desarrollan de cada proposición
	Tipo de argumentos en las demostraciones y a lo largo del texto	Deductivos, mediante el contra–recíproco, por reducción al absurdo, recurrentes o inductivos, constructivos.

5.4. Análisis de manuales

A continuación, exponemos los resultados del análisis realizado a los ocho manuales elegidos. Comenzaremos cada análisis recabando los datos básicos del manual (autores, año y número de la edición, idioma en el que está escrito, etc.) y dónde lo localizamos. En ocasiones, para clarificar, resumimos esta localización en la tabla 5.4.1. En la primera columna aparecen todas las asignaturas con contenidos de divisibilidad y, debajo de ellas, cómo se considera el manual (básico o de consulta). En gris claro, las asignaturas que no recomiendan dicho manual en su bibliografía, como Algebra Lineal y Estructuras Matemáticas en la tabla 5.4.1.

Tabla 5.4.1. *Localización de cada manual.*

Asignatura	Titulación	Universidad
Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas[1]	Grado en Ingeniería Informática	Universidad de Granada
Lógica y métodos discretos (bibliografía fundamental/complementaria)		
Algebra I (bibliografía fundamental /complementaria)	Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	Universidad de Granada
Lógica y métodos discretos (bibliografía fundamental /complementaria)		
Matemática Discreta (bibliografía básica/complementaria)	Grado en Ingeniería Informática	Universidad de Jaén
Algebra (bibliografía básica/complementaria)		
Matemática Discreta I (libro básico/de consulta)	Grado en Ingeniería Informática	Universidad Politécnica de Madrid
Matemática Discreta I (libro básico/de consulta)	Grado en Matemáticas e Informática	Universidad Politécnica de Madrid
Estructuras algebraicas		

[1]No hay bibliografía para el capítulo de aritmética modular

Posteriormente se adjunta la tabla 5.4.1.1. de análisis de cada manual comentando, a través de las entidades primarias, lo más significativo en el libro de texto. El análisis de las configuraciones epistémicas presentes en cada manual será muy relevante en esta investigación. Concluiremos haciendo una valoración de la idoneidad didáctica en sus diversas componentes y considerando los indicadores descritos (sección 3.1.).

5.4.1. Análisis del manual 1

Este libro de texto titulado Matemática Discreta y sus aplicaciones, y cuyo autor es K. H. Rosen (miembro distinguido de laboratorios AT&T, profesor en Monmouth University, EEUU), ha sido seleccionado pues está en la bibliografía básica o fundamental que aparece en la tabla 5.4.1.1.:

Tabla 5.4.1.1. *Localización del manual 1.*

Asignatura	Titulación	Universidad
Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas Lógica y métodos discretos (bibliografía fundamental)	Grado en Ingeniería Informática	Universidad de Granada
Algebra I Lógica y métodos discretos (bibliografía fundamental)	Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	Universidad de Granada
Matemática Discreta (bibliografía básica) Algebra	Grado en Ingeniería Informática	Universidad de Jaén
Matemática Discreta I (libro básico)	Grado en Ingeniería Informática	Universidad Politécnica de Madrid
Matemática Discreta I (libro básico) Estructuras algebraicas	Grado en Matemáticas e Informática	Universidad Politécnica de Madrid

Como vemos, este libro de texto aparece recomendado en la bibliografía básica de asignaturas, en todas las universidades. Es, por tanto, un m anual fundamental recomendado para la enseñanza y el aprendizaje del estudiante. A pesar de que se dispone de una séptima edición, del año 2012, en inglés, se recomienda en las guías docentes la quinta edición (2004), traducida al español, y que será objeto de nuestro análisis.

Tabla 5.4.1.2. *Análisis del manual 1.*

Entidades		
Situaciones-problemas	Extensión	Consta de 860 páginas y se trata desde la página 140 a la 181.
	Lugar	Capítulo 2. Los fundamentos: algoritmos, números enteros y matrices: 2.4. Enteros y división; 2.5. Enteros y algoritmos; 2.6. Aplicaciones de la teoría de números.
	Dominios definición	Divisor y mcd: $\mathbb{Z}$; Primo, teorema fundamental de la aritmética, algoritmo de la división, de Euclides y Bezout: $\mathbb{N}$.
	Elementos introductorios	Al principio de cada sección hay idea de lo pretendido y el interés por sus aplicaciones. Notas históricas al introducir y en el pie de página (imágenes de Euclides, Fermat, Mersenne). Las definiciones o teoremas se deducen de ejemplos o conectan con CE_Inicial.
	Ejemplos	45, en total de las tres secciones, antes y después de cada concepto y bien resaltados. De tipo numérico, de aplicaciones a la informática y ejemplos adicionales en web (marcados con icono).
	Ejercicios	175, al final de cada sección y se aporta solución de los impares al final del texto, marcados con asteriscos según su dificultad. La mayor parte de tipo numérico aunque también de aplicación a la informática. Alrededor del 10 % son abstractos. Al final del capítulo se aporta: un resumen de conceptos y resultados clave, junto cuestiones de repaso (22), problemas complementarios (46), ejercicios de programación (27), problemas para resolver con programas realizados (11) y propuestas de proyectos (19).
	Implem. informática	Pseudocódigos para algoritmo de Euclides. Se propone para la identidad de Bezout en ejercicios.
	Aplicaciones y su lugar en el texto	Aritmética modular (funciones de dispersión, números pseudoaleatorios) y Criptología[1], sistemas de numeración, aritmética computacional con enteros grandes, pseudoprimos, Criptografía de clave pública[2], cifrado y descifrado RSA. Aparecen al final de cada sección y en algunos ejemplos. La sección 2.6 sólo es de aplicaciones.
Lenguajes	Matemáticas	Los más presentes: natural–vernáculo, numérico y algebraico. Simbólico (mezclado con el natural–vernáculo para explicarlo), tabular (criba de Eratóstenes), gráfico (figura) y algorítmico. También inductivo (para el algoritmo de Euclides y la I. Bezout).
	Programac.	Pseudocódigos
Conceptos	Definición	Divisor: CE_DI; Primo: La de irreducible para CE_DI (CE_Inicial); Irreducible y asociados: No aparecen; Mcd: CE_DI.
	Tipo de definiciones	Formales, deductiva (I. Bezout), inductiva (mcd de un numero finito), a través del contrario (*a* no divide a *b*, número compuesto).
Prop.	Proposiciones	Teorema f. aritmética: CE_DFU; Existencia del mcd: CE_Inicial; Unicidad: No; Alg.de la división, alg. de Euclides e I.Bezout: CE_DE.
Procedim.	Sí, cálculo	Divisores: CE_DE; primos: CE_Inicial (criba Eratóstenes) y CE_DI; Factorización: CE_DFU; Alg. división: CE_DE; mcd: CE_Inicial, CE_DI, CE_DFU, CE_DE; I. Bezout: CE_DE (por restos, fórmulas en ejercicio).

Arg.	No	Teorema f. aritmética; Unicidad del mcd; Alg.de la división; I. Bezout
	Sí	Existencia del mcd, deductivos; Alg. Euclides, constructivos e inductivos

1 y 2 estudio de mensajes secretos

En el manual 1 (tabla 5.4.1.2.) podemos observar, a través de la entidad situación-problema, que, a pesar de que el currículo correspondiente a este nivel se centra en el estudio de la divisibilidad en los enteros, el autor realiza una fuerte restricción en los dominios de definición considerados pues deriva frecuentemente en los naturales (CE_Inicial). Esto le permite no abordar la unicidad del mcd, la diferenciación entre los conceptos de elemento primo e irreducible, el orden utilizado para señalar el "mayor" de los divisores comunes, etc. Para estudiar estas cuestiones es necesario recurrir a dominios más amplios, lo que requiere un mayor nivel de abstracción y permite el paso de lo particular a lo general, imprescindible, por ejemplo, en el estudio de la divisibilidad en el anillo de polinomios, que no es abordado en este texto.

En resumen, podemos decir que el camino propuesto para el estudio del mcd en este texto se basa fuertemente en CE_Inicial y posteriormente pasa de forma muy sutil a CE_DI, evitando las cuestiones tediosas y más abstractas que antes hemos nombrado. La importancia de lo particular frente a lo general es así muy destacada. Su objetivo es llegar a obtener procedimientos para el cálculo a través del algoritmo de Euclides y la identidad de Bezout siendo de gran relevancia sus aplicaciones. Así, es muy significativa la ausencia de CE_DIP frente a la presencia de CE muy procedimentales como CE_DFU (importante en criptología) y sobre todo de CE_DE, la más eficiente respecto a los métodos de cálculo e imprescindible en sus aplicaciones a partir de la aritmética modular. Esta elección le permite aportar pseudocódigos para algunos procedimientos y que estos se puedan implementar en el ordenador.

En cuanto al tipo de situaciones, podemos observar que hay una gran variedad y cantidad de ejemplos y ejercicios como se informa en el prólogo: "ejemplos para ilustrar conceptos, relacionar diferentes materias y exponer posibles aplicaciones (…) a una amplia variedad de áreas, entre las que se incluyen las ciencias de la computación" (Rosen, 2004, p.xiv). A destacar la posición de los mismos: ejemplos introductorios anteriores al concepto, también posteriores al mismo y bien delimitados (ver figura 5.4.1.1.), hay problemas directos encaminados a desarrollar técnicas básicas y también se aportan ejercicios de programación, en la materia estudiada, para desarrollar con el ordenador. Aparecen al final de cada sección un bloque de "Problemas" de los que se aporta la resolución al final del libro (los impares) y también hay variedad respecto a los problemas complementarios entre los que se encuentran los más abstractos. Sin embargo, la mayor parte de los ejercicios son de tipo numérico (se corresponde con la faceta particular).

Lo anterior se pone de manifiesto en la entidad primaria lenguaje, con una fuerte presencia del lenguaje numérico. Utiliza también el lenguaje algorítmico pues, como el mismo autor señala, hay importantes ejemplos de algoritmos en los números enteros, como el algoritmo de Euclides y el extendido. Destaca el uso del lenguaje programación ofreciendo pseudocódigo para el algoritmo de Euclides. El lenguaje inductivo tiene poca presencia; por ejemplo, las fórmulas recurrentes para la obtención de la identidad de Bezout, se exponen en un e jercicio y se propone también implementarlas en el ordenador. Incluso podemos observar que no aparece el lenguaje axiomático que corresponde a entornos más abstractos.

Sin embargo, aparece el lenguaje formal o algebraico y el lenguaje natural–vernáculo tiene una gran presencia: “los primos son los «ladrillos» con los que se construye todo entero positivo, como muestra el teorema fundamental de la aritmética” (ibíd., p.142). También se utiliza para combinarlo con el lenguaje simbólico, como se pone de manifiesto en la definición de mcd: “El mayor entero d tal que d|a y d|b” (ibíd., p.146). O también introduciendo la notación para los divisores como en la figura 5.4.1.1.

DEFINICIÓN 1 Si a y b son enteros, $a \neq 0$, decimos que *a divide a b* si existe un entero c tal que $b = ac$. Cuando a divide a b decimos que a es un *factor* (o *divisor*) de b y que b es un *múltiplo* de a. La notación $a \mid b$ indica que a divide a b. Escribimos que $a \nmid b$ cuando a no divide a b.

Observación: Podemos expresar $a \mid b$ usando cuantificadores como $\exists c\,(ac = b)$, donde el dominio es el conjunto de los enteros.

En la Figura 1, los números dispuestos en línea indican qué enteros son divisibles por el entero positivo d.

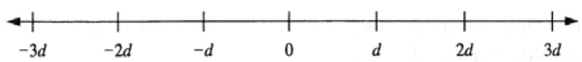


Figura 1. Enteros divisibles por el entero positivo d.

EJEMPLO 1 Determina si $3 \mid 7$ y si $3 \mid 12$.

Solución: Se tiene que $3 \nmid 7$, puesto $7/3$ no es un entero. Por otra parte, $3 \mid 12$, puesto que $12/3 = 4$. ◀

Figura 5.4.1.1. Manual 1. (Rosen, 2004, p.141)

Notemos la forma en que introduce el uso de los cuantificadores, en la “observación” de la figura 5.4.1.1. “Podemos expresar a | b usando cuantificadores como ∃c (ac=b)…" (ibíd., p.141) y, en el ejemplo posterior de la figura 5.4.1.1., explica la diferencia entre "$a \mid b$" (a divide a b) y a / b (la fracción $\frac{a}{b}$).

Los lenguajes tabular y gráfico son poco frecuentes. El tabular aparece en la criba de Eratóstenes (ibíd., p.428) y el lenguaje gráfico se utiliza para explicar la noción de divisor o múltiplo, como vemos en la figura 5.4.1.1.

En general, en la entidad conceptos, observamos que las definiciones de divisor y mcd corresponden a las establecidas en CE_DI. Sin embargo, CE_DE es utilizada como introducción y en la mayoría de los ejemplos, pues es más procedimental, y se restringe realmente al caso de los enteros positivos. La equivalencia entre ambas definiciones no se establece de forma explícita, sino que se realiza de forma transparente, lo que es posible porque parte de CE_Inicial y no trabaja en dominios más generales y abstractos.

Es significativo, en esta entidad, que la definición que se proporciona de número primo es la correspondiente a la de elemento irreducible en un DI y sólo se establece para enteros mayores que 1. La definición de elementos asociados, no aparece en ningún momento, por ser trivial en los naturales.

Respecto al tipo de definiciones que hay en el manual, podemos observar que se trata de definiciones formales, pero con un enfoque intuitivo utilizando CE_Inicial.

En la entidad proposiciones, destacamos que los teoremas se presentan nuevamente en dominios muy restrictivos, que no posibilitan la generalización. Es el caso del teorema fundamental de la aritmética, enunciado sobre los naturales, o del algoritmo de la división, donde sólo considera divisores mayores que cero. Esto último se debe a que inmediatamente interpreta los restos en términos de congruencias donde dividir, entre n, sólo precisa que éste sea de tal naturaleza; es decir, positivo.

Los procedimientos observados en este manual son múltiples y diversos. Para cada noción tratada se explicita un procedimiento de cálculo. Se han puesto de manifiesto en este texto los procedimientos de todas las configuraciones epistémicas salvo en la de DIP, sin establecer ninguna equivalencia o relación entre ellos, pues ésta surge de forma intuitiva.

En lenguaje informático se proporciona pseudocódigo para el algoritmo de Euclides. Sin embargo no aparecen implementados otros procedimientos relativos a la factorización en primos o identidad de Bezout. Para esta última sólo se expone el procedimiento resultante de sustituir los restos de forma regresiva para obtener la combinación lineal. Queda propuesto, en el apartado de problemas, el cálculo a través de fórmulas recurrentes y su traslado al ordenador.

Es muy significativa, en este manual, la ausencia de demostraciones para la mayoría de proposiciones. Respecto de la identidad de Bezout, el autor argumenta que "no se hará una demostración formal del teorema" (ibíd. p.167) remitiendo a una referencia bibliográfica. Sólo aparece una demostración inmediata, que parte de CE_inicial (la unicidad del mcd) y la del algoritmo de Euclides, que utiliza argumentos constructivos para obtener el mcd.

Este análisis de las entidades primarias muestra un libro de texto con una gran cantidad de situaciones, variedad en los tipos de lenguajes (mezclados con el natural–vernáculo) y que dota de relevancia a las aplicaciones informáticas, relacionando así los contenidos intra e interdisciplinares que contribuyen a la formación socio-profesional de estos estudiantes, por lo que la idoneidad ecológica es alta. A su vez estas tareas son motivadoras para dichos alumnos ya que pueden valorar la utilidad de las matemáticas en la vida profesional, lo que es un indicador de una buena idoneidad afectiva, subrayada también por la conexión con CE_Inicial.

Enlazar con ideas previas, posibilita que los contenidos se puedan alcanzar con una dificultad manejable, lo que nuevamente indica una buena idoneidad afectiva y también cognitiva, pues "el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados" (Godino, 2013, p.121) promueve el logro de los estudiantes. Sin embargo, en este nivel educativo la faceta cognitiva requiere del desarrollo de una comprensión conceptual, proposicional y argumentativa que promueva el paso del extensivo al intensivo; esto es, que realice el proceso de generalización, propio de la etapa universitaria. Uniendo ambas apreciaciones podemos decir que la idoneidad cognitiva es media.

En lo que respecta a la faceta epistémica, un buen indicador es la riqueza y variedad de situaciones (ejemplos, tipos de ejercicios y actividades propuestas, aplicaciones), la claridad y corrección con que se exponen las definiciones, proposiciones y procedimientos y, la diversidad de elementos lingüísticos utilizados. "Sin embargo, aunque las situaciones problema constituyen un elemento central el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones" (Godino, 2013, p. 120) y es aquí donde encontramos dos carencias destacadas de este manual que indican una idoneidad epistémica media. Por un lado, no aparecen desarrolladas demostraciones de ningún resultado, salvo algún argumento intuitivo o enlazado con CE_Inicial y alguno constructivo que, en realidad expone un procedimiento de cálculo.

Por otra parte, no se proporciona una clara identificación de los diversos objetos (primos o irreducibles, asociados) pues en dominios de definición muy restrictivos, como los naturales, estos coinciden y solamente adquieren su significado en ambientes generales, trabajando en CE_DI. Se produce un conflicto de significado cuando es necesaria su diferenciación y relación en otros dominios como el anillo de polinomios.

Así, el estudio en lo particular, obviando el proceso de generalización, provoca un conflicto semiótico potencial en el estudiante que no puede realizar el paso a la abstracción. A este conflicto lo llamaremos el *conflicto semiótico de la generalización*.

5.4.2. Análisis del manual 2

Este libro de texto, escrito por N. L. Biggs (profesor en la Universidad de Londres), se titula Discrete Mathematics. Se recomienda en todas las universidades analizadas (según la tabla 5.4.2.1.), la versión traducida al español por M. Noy (profesor de la Universidad Politécnica de Cataluña) en el año 1994, y que analizamos en esta sección, aunque hay una nueva edición, en inglés, del año 2002.

Tabla 5.4.2.1. *Localización del manual 2.*

Asignatura	Titulación	Universidad
Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas1 Lógica y métodos discretos (bibliografía fundamental)	Grado en Ingeniería Informática	Universidad de Granada
Algebra I	Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	Universidad de Granada
Matemática Discreta (bibliografía básica) Algebra (bibliografía complementaria)	Grado en Ingeniería Informática	Universidad de Jaén
Matemática Discreta I (libro básico)	Grado en Ingeniería Informática	Universidad Politécnica de Madrid
Matemática Discreta I (libro básico) Estructuras algebraicas	Grado en Matemáticas e Informática	Universidad Politécnica de Madrid

Como observamos, se trata de un libro, considerado básico por los profesores que imparten las asignaturas, para la enseñanza y aprendizaje de esta temática.

A continuación, presentamos el análisis didáctico realizado al manual 2, a través de la plantilla de análisis didáctico que exponemos en la tabla 5.4.2.2.

Tabla 5.4.2.2. *Análisis del manual 2.*

Entidades		
Situaciones-problemas	Extensión	Consta de 545 páginas y se trata: desde la página 16 a la 29 (capítulo 1), desde la 128 a la 148 (capítulo 6) y desde la 362 a la 386 (capítulo 15).
	Lugar	Capítulo 1. Enteros: 1.5. Cociente y resto; 1.6. Divisibilidad; 1.7. El máximo común divisor; 1.8. Factorización en números primos; 1.9. Ejercicios diversos. Capítulo 6. Aritmética modular: 6.1. Congruencias; 6.2. $\mathbb{Z}_m$ y su aritmética; 6.3. Elementos invertibles de $\mathbb{Z}_m$; 6.4. Construcciones cíclicas de diseños; 6.5. Cuadrados latinos; 6.6. Ejercicios diversos. Capítulo 15. Anillos, cuerpos y polinomios: 15.1. Anillos; 15.2. Elementos inversibles de un anillo; 15.3. Cuerpos; 15.4. Polinomios; 15.5. El algoritmo de la división para polinomios; 15.6. El algoritmo de Euclides para polinomios; 15.7. Factorización teórica de polinomios; 15.8. Factorización práctica de polinomios; 15.9. Ejercicios diversos.
	Dominios definición	Divisor y mcd: $\mathbb{Z}$ y polinomios; Primo, teorema fundamental de la aritmética: $\mathbb{N}$; Irreducible: polinomios; algoritmo de la división: $\mathbb{Z}$ (divisor positivo) y polinomios (K[x], K cuerpo); algoritmo de Euclides y Bezout: $\mathbb{Z}$ y polinomios; Asociados: no aparece.
	Elementos introductorios	Las definiciones o teoremas se deducen de ejemplos o conectan con CE_Inicial.
	Ejemplos	Habitualmente un ejemplo después de cada concepto y resultado. En ocasiones, también antes de los mismos, para introducir. De tipo numérico, alguno abstracto.
	Ejercicios	Hay alrededor de 5 al final de cada sección y, al final de cada tema, una sección titulada Ejercicios diversos, con 20 ítems, aproximadamente, donde se incluyen algún ejercicio de ampliación, propiedad, aplicación, etc. Al final del texto se aporta la solución de algunos ejercicios pero no el procedimiento.
	Implem. informática	Sí, poca y en otros capítulos como el de Algoritmos.
	Aplicaciones y su lugar	No aparecen dentro del tema sino a lo largo del texto y relacionadas con otras teorías. Aplicaciones: Aritmética modular, sistemas de numeración, cuadrados latinos, etc.
Lenguajes	Matemática	Los más presentes: natural–vernáculo y simbólico (mezclado con el natural–vernáculo para explicarlo). También algorítmico, numérico e inductivo (para el algoritmo de Euclides y la I. Bezout); tabular (operaciones en $\mathbb{Z}_m$) y gráficos (dibujos para $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_m$).
	Programac.	Pseudocódigos (para sistemas de numeración) y referencias a lenguaje Pascal. En ejercicios se propone el algoritmo de Euclides.
Concep.	Definición	Divisor: CE_DE, CE_DI; Primo: La de irreducible para CE_DI, (CE_Inicial), CE_DI (teorema 1.8.1); Irreducible: CE_DI; Mcd: CE_DI. Asociados: No aparece.

	Tipo de definiciones	Formales, deductiva (I. Bezout), inductiva (mcd de un numero finito), a través del contrario (*a* no divide a *b*).
Prop.	Proposiciones	Teorema f. aritmética: CE_DFU; Existencia del mcd: No se plantea (CE_Inicial); Unicidad: Sí (impone criterio: entero positivo o polinomio mónico); Alg.de la división, alg. de Euclides e I.Bezout: CE_DE.
Proced.	No	Primos
	Sí, cálculo	Divisores: CE_DE; Factorización: CE_Inicial; Alg. división: CE_DE; mcd: CE_DFU, CE_DE; I. Bezout: CE_DE (por restos).
Arg.	No	Existencia del mcd en los enteros (trivial por la CE_Inicial)
	Sí/ Tipo	Todas
		I. Bezout, deductivos; Alg. Euclides, constructivos e inductivos

En este manual la divisibilidad se aborda en tres capítulos: en el primero se estudian las nociones en el dominio de los números enteros; en el capítulo 6 se dedica a aplicaciones, entre ellas la aritmética modular (estudio minucioso) y en el último se ocupa de la divisibilidad en polinomios. Así, los dominios de definición que intervienen son $\mathbb{Z}$ y el anillo K[x] (K cuerpo), aunque en ocasiones, como en el algoritmo de la división o el teorema fundamental de la aritmética, realiza una restricción a los enteros positivos enlazando, así, con la CE_Inicial.

El resto es cero y tenemos que

$$x^2+5=(3x+5)(5x+1),$$

de manera que $3x+5$ es un mcd. De la primera ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} 3x+5 &= (x^3+2x^2+x+1)-(x+2)(x^2+5) \\ &= (x^3+2x^2+x+1)+(6x+5)(x^2+5), \end{aligned}$$

que tiene la forma requerida con $\lambda(x)=1$ y $\mu(x)=6x+5$.

Figura 5.4.2.1. Manual 2. Identidad de Bezout en $\mathbb{Z}_7$[x] (Biggs, 1994, p.378)

Los ejemplos son muy ricos y variados. Por ejemplo, propone el cálculo de la identidad de Bezout para el anillo de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}_7$ (Biggs, 1994, pp.377-378) muy interesante y nada trivial para el estudiante (ver el resultado en la figura 5.4.2.1.), lo que muestra la cuidada selección de los ejemplos.

Los ejercicios de cada sección se relacionan con lo expuesto. Fundamentalmente, son para adquirir destrezas y hay, también, algunos abstractos. También hay ejercicios diversos, al final del capítulo.

Las aplicaciones se encuentran repartidas a lo largo del texto y no se expone, en la mayoría de los casos, su relación con la Informática explícitamente. Asimismo hay pocos procesos implementados y se desarrollan en el capítulo de algoritmos o posteriores y no en el momento de enunciarlos.

Utiliza para la programación, pseudocódigos y algo de lenguaje Pascal. La variedad lingüística en el texto es muy amplia, se utilizan todos los tipos de lenguajes, incluso dibujos o representaciones, con un s entido metafórico. Muestra de ello es la figura 5.3.4, mostrada en la sección anterior, que ilustra el teorema de inducción. También, la figura 5.4.2.2. es un e jemplo de esta cuestión, mostrando dibujos o representaciones para los enteros y $\mathbb{Z}_m$. Notemos que utiliza la expresión *cíclico* para $\mathbb{Z}_5$, distinguiéndolo de $\mathbb{Z}$, lo que supone un conflicto semiótico importante, en Álgebra, pues es conocido que $\mathbb{Z}$, como grupo, es cíclico (en el sentido de la teoría de grupos), de forma que la imagen que se ofrece en la figura 5.4.2.2. puede suponer un conflicto para el lector.

en $\mathbf{Z}_m$ tenemos una especie de orden *cíclico*, representado por un conjunto de puntos regularmente espaciados en un círculo (figura 6.1). Por este motivo, la aritmética en $\mathbf{Z}_m$, o la *aritmética modular*, se enseña a veces en la escuela como la "aritmética del reloj".

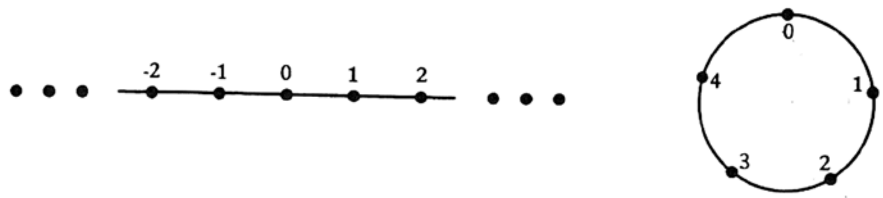


Fig. 6.1 Dibujos de $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Z}_m$.

Figura 5.4.2.2. Manual 2. Lenguaje gráfico (Biggs, 1994, p.134)

Las definiciones, usualmente, se establecen según la CE más general; esto es CE_DI. Aunque explícitamente no a parece el concepto de elementos asociados, lo utiliza para tratar la unicidad del mcd tanto en los enteros como en los polinomios. Esta cuestión de la unicidad la resuelve eligiendo el entero positivo o el polinomio mónico de entre todos los asociados. Las definiciones y proposiciones son todas formales aunque utiliza el lenguaje natural–vernáculo para explicarlas. Además, hay una gran riqueza argumentativa, con desarrollos muy formales. Resalta la dificultad de alguna de ellas, como en el caso de la factorización en primos, expresando:

> La facilidad con que hemos establecido la existencia de factorizaciones esconde dos dificultades importantes. En primer lugar, el problema de hallar los factores primos no e s en modo alguno trivial; y en segundo, no es evidente que exista una *única* factorización en primos para un e ntero cualquiera $n \geq 2$. (Biggs, 1994, p.25)

Los procedimientos ocupan un lugar importante como muestra la frecuencia con que aparece CE_DE. En el prólogo resalta la intencionalidad del manual: "Pretende cubrir el material necesario para aquellos estudiantes que utilizan las matemáticas como una herramienta" (ibíd., p.I). No aparece cálculo de los primos, conocido de CE_Inicial.

Por lo tanto, en el manual 2 encontramos todas las configuraciones epistémicas, salvo CE_DIP, quien aporta el orden sobre cadenas de ideales o argumentaciones muy depuradas, pero que este autor resuelve en los casos particulares donde se desarrolla el estudio de la divisibilidad (enteros y polinomios). Hay, así, una fluencia argumentativa importante que junto con la gran variedad de lenguajes y situaciones–problemas, la claridad y corrección en las definiciones, proposiciones y procedimientos, nos llevan a considerar una alta idoneidad epistémica.

La relación y diferenciación entre primo e irreducible se realiza de forma subliminal, mostrándola, a pesar de no abordarla en profundidad. También la relación con CE_Inicial es transparente, dejando en manos del lector los conocimientos previos adquiridos. Sin embargo hemos señalado cómo el manual promueve la comprensión e incide en aspectos que conllevan especial dificultad y que pueden dar lugar a conflictos semióticos. Entonces, podemos decir que la idoneidad cognitiva es alta.

Respecto a la idoneidad interaccional, resaltamos que es un texto con una presentación clara y bien organizada enfatizando las cuestiones claves del tema y señalando conflictos semióticos potenciales. Además, facilita y promueve cierta autonomía pues los ejemplos han sido cuidadosamente elegidos y propone ejercicios diversos, con sus soluciones. Estos indicadores nos muestran una idoneidad interaccional alta.

A pesar de la variedad de aplicaciones, la gran presencia de lenguajes natural–vernáculo y gráfico (a través de dibujos o representaciones), consideramos la idoneidad afectiva media ya que el estudiante no ve claramente la utilidad de esta temática en su vida profesional (las aplicaciones no se conectan con la informática). Esto, unido al uso de pseudocódigos y algoritmos para implementarlos en el ordenador (no muy abundantes) nos dan a una idoneidad ecológica y mediacional media–alta.

5.4.3. Análisis del manual 3

Este manual, titulado Matemática discreta, está escrito por F. García Merayo. La tercera edición del libro ha sido editada por Paraninfo en el año 2015 y es la que analizamos. Es un texto recomendado en la bibliografía básica de la asignatura de la Universidad de Jaén y como libro de consulta en la Universidad Politécnica de Madrid (tabla 5.4.3.1.) Por tanto, se trata de un libro de texto fundamental para la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en el Grado en Ingeniería Informática, por las Universidades de Jaén y Politécnica de Madrid. La tabla 5.4.3.2. muestra el análisis didáctico realizado al manual.

Tabla 5.4.3.1. *Localización del manual 3.*

Asignatura	Titulación	Universidad
Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas Lógica y métodos discretos	Grado en Ingeniería Informática	Universidad de Granada
Algebra I (bibliografía fundamental)	Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	Universidad de Granada
Matemática Discreta (bibliografía básica) Algebra (bibliografía básica)	Grado en Ingeniería Informática	Universidad de Jaén
Matemática Discreta I (libro de consulta)	Grado en Ingeniería Informática	Universidad Politécnica de Madrid
Matemática Discreta I (libro de consulta) Estructuras algebraicas	Grado en Matemáticas e Informática	Universidad Politécnica de Madrid

Los dominios de definición en la entidad situaciones–problemas arrojan que la mayor parte de los objetos matemáticos se estudian dentro de los números naturales, lo que evidencia la fuerte presencia de la CE_Inicial. Incluso cuando los conceptos o resultados se enuncian en el conjunto de los enteros, los ejemplos se presentan en los naturales.

Tabla 5.4.3.2. *Análisis del manual 3.*

Entidades		
Situaciones-problemas	Extensión	Consta de 656 páginas y se trata desde la página la 1 a la 75.
	Lugar	Capítulo 1. Teoría de números: 1.1. Introducción; 1.2. Cociente exacto; 1.3. Cociente entero; 1.4. División euclídea; 1.5. Algoritmo de la numeración; 1.6. Números primos y compuestos; 1.7. Maximo común divisor; 1.8. Mínimo común múltiplo; 1.9. Congruencias; 1.10. Ecuaciones de congruencia; 1.11. Restos potenciales; 1.12. Ecuaciones diofánticas; 1.13. Fracciones continuas.

	Dominios definición	Divisor, mcd, algoritmo de la división, de Euclides: $\mathbb{Z}$ (realmente $\mathbb{N}$); Primo, teorema f. aritmética, y Bezout: $\mathbb{N}$. Asociados e irreducible: no.
	Elementos introducto-rios	Al principio de cada sección hay idea de lo pretendido enlazando con la CE_Inicial. En muchas ocasiones se utilizan ejemplos para introducir y conectar con CE_Inicial tanto en definiciones como en teoremas. Notas históricas al introducir y mezclados con el texto (imágenes de Gauss, Euclides, Eratóstenes).
	Ejemplos	Muchos, entre tres y cinco después de cada concepto y resaltados. La mayoría de tipo numérico, y se trabajan ampliamente los procedimientos.
	Ejercicios	No aparecen ejercicios, explícitamente, pero el número de ejemplos es tan amplio, que algunos pueden considerarse como ejercicios y se trabajan enlazados con el concepto o procedimiento.
	Implem. Informática	Pseudocódigos para factorización en primos, comprobación de si un número es primo, algoritmo de Euclides.
	Aplicacio-nes y su lugar en el texto	Aparecen bajo epígrafe “Aplicaciones” (en total 8): pseudocódigos o tratamiento informático de procedimientos que trabaja y cuestiones relacionadas o interesantes en informática (conteo de divisores, localización de ficheros en un ordenador, números aleatorios,..). También incorpora otras aplicaciones en secciones (la 1.5. y desde la 1.9 a la 1.13).
Lenguajes	Matemática	Los más presentes: numérico y algebraico. Muy usado el lenguaje tabular (criba de Eratóstenes, factorización en primos, algoritmo de Euclides, divisores de un número, tablas de aritmética modular). También gráfico (múltiplos) y simbólico y natural–vernáculo, para restar formalismo. Hay lenguaje algorítmico e inductivo (algoritmo de Euclides y teorema f. de la aritmética, respectivamente).
	Programac.	Pseudocódigos.
Conceptos	Definición	Divisor: CE_DE; Primo: La de irreducible para CE_DI (CE_Inicial); Irreducible y asociados: No aparece; Mcd: CE_DI (CE_Inicial).
	Tipo de definiciones	Intuitivas (divisor), deductiva (divisor), inductiva (mcd de un número finito), a través del contrario (*a* no divide a *b*, número compuesto).
Prop.	Proposicio-nes	Teorema f. aritmética: CE_DFU; Existencia y unicidad del mcd: No (CE_Inicial); Alg.de la división, alg. de Euclides e I. Bezout: CE_DE.
Proced.	Sí, cálculo	Divisores: CE_DE; primos: CE_Inicial (criba Eratóstenes) y CE_DI; Factorización: CE_DFU; Alg. División: CE_DE; mcd: CE_Inicial, CE_DI, CE_DFU, CE_DE; I. Bezout: CE_DE (por restos).
Argumentaciones	No	Teorema fundamental aritmética (unicidad) y existencia y unicidad de mcd (no planteadas).
	Sí /Tipo	Todas las proposiciones enunciadas menos la unicidad del teorema fundamental de la aritmética, bien resaltadas.
		Deductivos; algorítmicos, constructivos e inductivos (factorización, alg. Euclides e I. Bezout). También, mediante el contra–recíproco

Es un texto diseñado para el trabajo autónomo del estudiante y el desarrollo de destrezas procedimentales, lo que se pone de manifiesto en la importancia dada a los ejemplos, tanto por el número alto que proporciona, de tres a cinco de cada objeto matemático estudiado (lo que justificaría la ausencia de ejercicios propuestos), como por la variedad de casos que trata. Como el mismo autor expresa:

> Hemos creído que la mejor manera de aprender es la de acompañar la teoría con ejemplos. Por ello, (…) se ha sustituido, en ciertos casos, la demostración de teoremas por la práctica derivada de los mismos, es decir, los ejemplos incluidos se han diseñado para acompañar las ideas matemáticas en las que están basados esos teoremas. (García-Merayo, 2015, p.XVII)

Los ejemplos son, fundamentalmente, de tipo numérico y, en ocasiones, proporcionan procedimientos de la CE_Inicial, como la factorización en primos de la figura 5.4.3.1. En ella observamos que se aporta: la resolución según CE_Inicial, el pseudocódigo para el procedimiento y la salida en tablas del mismo.

CE_Inicial:

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$$

```
PROCEDIMIENTO FACTORIZACIÓN
   N←M
   D←2
   J←1
   PARA1 N = M  HASTA  N = 1
      PARA2 (N MOD D) ≠ 0
         D←D + 1
      FIN-PARA2
      PRIMO (J) ← D
      EXPONENTE (J) ← 0
      PARA3 (N MOD D) = 0
         EXPONENTE (J) ← EXPONENTE (J) + 1
         N←N/D
      FIN-PARA3
      J←J + 1
   FIN-PARA1
FIN-PROCEDIMIENTO
```

Al aplicar este procedimiento al número 168 de uno de los ejemplos precedentes, las dos tablas lineales obtenidas, serían:

Primo	2	3	7
Exponente	3	1	1

con lo que $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$.

Figura 5.4.3.1. Manual 3. Descomponer 168 en primos (García-Merayo, 2015, pp.16-17)

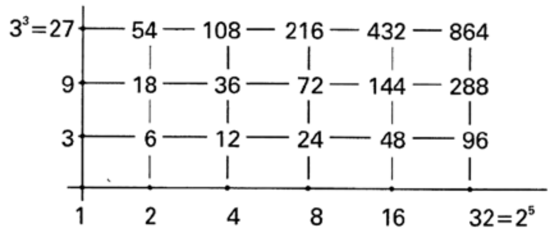
Aparecen muchas aplicaciones a la informática y se presentan pseudocódigos para distintos procedimientos (figura 5.4.3.1.). Por tanto, el lenguaje de programación está presente.

Es muy notable la gran variedad de lenguajes a lo largo del desarrollo; en especial, es muy utilizado el tabular que, en ocasiones, se conecta con la salida de los programas (figura 5.4.3.1.). Se utiliza también el lenguaje tabular para recoger, de forma ordenada, los distintos cálculos, como en los procedimientos para el cálculo de divisores (figura 5.4.3.2.) o el algoritmo de Euclides (figura 5.4.3.3.).

☐ Veamos otra forma ordenada de obtener todos los divisores de un número. Sea este, por ejemplo, el 864. Se descompone en sus factores primos:

$$864 = 2^5 \cdot 3^3$$

Se dispone ahora la tabla que se indica con los múltiplos de 2 y de 3, hasta 2^5 y 3^3, incluyendo el $1 = 2^o = 3^o$.



El total de divisores es $\tau = 6 \cdot 4 = (5+1)\,(3+1) = 24$ ☐

Figura 5.4.3.2. Manual 3. Cálculo de divisores (García-Merayo, 2015, p.34)

☐ Dados a = 198 y b = 74, el algoritmo de Euclides aplicado, produce las siguientes igualdades:

	2	1	2	12
198	74	50	24	2
50	24	2	0	

$$\begin{aligned} 198 &= 74 \cdot 2 + 50 \\ 74 &= 50 \cdot 1 + 24 \\ 50 &= 24 \cdot 2 + \mathbf{2} \\ 24 &= 2 \cdot 12 + 0 \end{aligned}$$

por lo que d = mcd (198, 74) = 2. Entonces, para encontrar los coeficientes s y t, coeficientes de Bezout, procederemos de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} 2 &= 50 - 24 \cdot 2 = \\ &= 50 - (74 - 50) \cdot 2 = 50 \cdot 3 - 74 \cdot 2 = \\ &= (198 - 74 \cdot 2) \cdot 3 - 74 \cdot 2 = \\ &= \mathbf{198} \cdot 3 + \mathbf{74} \cdot (-8) \end{aligned}$$

Por tanto, $s = 3$ y $t = -8$ y mcd (198, 74) = 198 · 3 + 74 (–8). ☐

Figura 5.4.3.3. Manual 3. Algoritmo de Euclides (García-Merayo, 2015, p.29)

El autor intenta evitar el formalismo matemático en el texto como explica en el prólogo: "Nos hemos esforzado en presentar los conceptos de la forma más intuitiva. Por ello, y en muchos casos, hemos preferido mostrar los teoremas de forma práctica antes que demostrarlos" (ibíd., p.XIII). Esto se refleja en la entidad conceptos, donde la intuición, basada en CE_Inicial, es un recurso frecuente.

También las proposiciones y argumentaciones se ven afectadas por lo anterior. Las proposiciones se presentan mostrando, principalmente, su utilidad. Las demostraciones más difíciles matemáticamente, como la unicidad de la factorización en primos, no se aportan, mientras que, para la factorización, se utiliza una demostración que permite construir el método estudiado en Educación Primaria y del que aporta pseudocódigo para su implementación en el ordenador (figura *5.4.3.1.*). Así los argumentos procedimentales y el uso del lenguaje algorítmico, son destacables.

Frente a esto, los procedimientos ocupan un lugar central en el texto y están enfocados, tanto para adquirir destrezas, a partir de los ejemplos, como para trasladarlos a lenguaje de programación. De ahí que las configuraciones más presentes sean CE_DE, CE_Inicial y CE_DFU. Tiene poca representación CE_DI y no aparece CE_DIP. Esto provoca carencias en este manual, fuente de conflictos semióticos potenciales, relacionadas con la ausencia de la noción de elemento irreducible y su relación con los primos, y el planteamiento de la unicidad del mcd a través del estudio de los asociados. Esto es un indicador deficiente para la idoneidad epistémica; sin embargo, encontramos una gran variedad de lenguajes utilizados y riqueza en las situaciones de aplicación, lo que nos lleva a calificar la idoneidad epistémica como media.

La aportación de pseudocódigos y las aplicaciones a la informática nos permiten hablar de una idoneidad ecológica alta. Si, además consideramos el hecho de contener un gran número de ejemplos entorno a los objetos matemáticos estudiados, que promueven la autonomía en el aprendizaje, podemos afirmar que la idoneidad interaccional es muy alta.

La utilización de recursos informáticos, así como las aplicaciones y elementos introductorios que ponen de manifiesto la utilidad de las matemáticas en el desarrollo socio–profesional, permiten evaluar las idoneidades mediacional y afectiva altas.

Por último, consideramos que la idoneidad cognitiva es alta puesto que el manual 3 enlaza con los conocimientos previos del alumno (CE_Inicial) y realiza la mayoría de las demostraciones aunque tiene una cierta carencia relativa al desarrollo de la competencia argumentativa, estando sesgado hacia lo procedimental.

5.4.4. Análisis del manual 4

Este texto titulado Classic Algebra, escrito por P. M. Cohn (University College London, UK), ha sido seleccionado por su localización, según la tabla 5.4.4.1.

El manual 4 lo encontramos en la bibliografía complementaria para el Grado en Ingeniería Informática de la asignatura Matemática Discreta (Universidad de Jaén) así como en la asignatura Algebra I, del Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas (Universidad de Granada).; por lo tanto, está más orientado para un uso complementario y más cercano al grado de Matemáticas. Analizamos la tercera edición, del año 2000, en inglés.

Tabla 5.4.4.1. *Localización del manual 4.*

Asignatura	Titulación	Universidad
Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas1 Lógica y métodos discretos	Grado en Ingeniería Informática	Universidad de Granada
Algebra I (bibliografía fundamental)	Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	Universidad de Granada
Matemática Discreta (bibliografía complementaria) Algebra (bibliografía complementaria)	Grado en Ingeniería Informática	Universidad de Jaén
Matemática Discreta I	Grado en Ingeniería Informática	Universidad Politécnica de Madrid
Matemática Discreta I Estructuras algebraicas	Grado en Matemáticas e Informática	Universidad Politécnica de Madrid

La entidad situación-problema (tabla 5.4.4.2.) muestra que el primer dominio de definición donde el manual trabaja la divisibilidad es el conjunto de los números enteros. En él se presentan tres de las cuatro configuraciones epistémicas, pero utilizando un nivel de abstracción que le permite hacer el paso desde lo particular (los enteros) a lo general, representado en el estudio en dominios generales como DI, DFU y DE. El anillo de polinomios se obtiene como caso particular de los anteriores, realizando ahora un importante paso, a la inversa, desde lo general a un nuevo extensivo que corresponde con el proceso de particularización. Posteriormente introduce también el estudio en DIP; esto es CE_DIP.

Tabla 5.4.4.2. *Plantilla de análisis del manual 4.*

Entidades		
Situaciones-problemas	Extensión	Consta de 428 páginas y se trata en las páginas: 25-29 (capítulo 2), 145-152 (capítulo 6) y 308-311(capítulo 10).
	Lugar	Capítulo 2. Integers and rational numbers: 2.2. Divisibility and factoritation in $\mathbb{Z}$. Capítulo 6. Rings and fields: 6.5.Factorization. Capítulo 10. Rings and modules: 10.5. Principal ideals domains
	Dominios de definición	Divisor: $\mathbb{Z}$, DI; Primo: $\mathbb{N}$, DI; Irreducible: DI; Mcd: DI; Teorema fundamental de la aritmética: $\mathbb{N}$, DFU, polinomios; alg.división, DFU, polinomios, alg.de Euclides: DE; I. Bezout: $\mathbb{Z}$, DE, DIP, polinomios.

	Elementos introductorios	Al principio de cada sección breve idea de lo pretendido. Las definiciones o teoremas en dominios amplios enlazan con los enteros.
	Ejemplos	Cita (sin explicar), unos cinco ejemplos numéricos. Después de algún concepto y entremezclado en el desarrollo, sin resaltar.
	Ejercicios	35, al final de cada sección y se aporta solución al final del texto. La mayor parte es de tipo abstracto. Menos del 10% de tipo numérico. Para los enteros no hay ejercicios numéricos. Al final de cada capítulo hay 16, 30 y 12, respectivamente, en cada capítulo explorado.
	Implem. Infor.	Ninguna.
	Aplicaciones	Ninguna referencia
Lenguajes	Matemática	Los más presentes: formal y simbólico. También inductivo (muy riguroso) y natural–vernáculo, usado escuetamente para introducir.
	Programación	Ninguno
Conceptos	Definición	Divisor, irreducible, asociados y mcd: CE_DI; Primo: La de irreducible para CE_DI (CE_Inicial), CE_DI
	Tipo	Formales, inductiva (mcd de un numero finito).
Propos.	Proposiciones	Teorema f. aritmética y existencia del mcd: CE_DFU; Unicidad del mcd: CE_DI; Alg.de la división, Alg. De Euclides e I.Bezout: CE_DE; I.Bezout: También en DIP.
Proced	No	Divisores, primos, factorización, Alg. División
	Sí, cálculo	Mcd: CE_DFU, CE_DE; I. Bezout: CE_DE (por restos, implícito)
Argument.	Sí, en $\mathbb{Z}$	Todos salvo Alg.de Euclides.
		Argumentos deductivos e inductivos
	Sí, dominios generales	Teorema f. aritmética y existencia del mcd: DFU; Unicidad del mcd: CE_DI; Alg.de la división, Alg. De Euclides e I.Bezout: CE_DE; I.Bezout: También en DIP.
		Tipos: Deductivos, inductivos y constructivos

Respecto a los ejemplos, estos son casi inexistentes en el desarrollo. En pocas ocasiones, se presenta uno después de alguna definición y mezclado con el texto, sin resaltarlo (figura 5.4.4.1.).

> A *prime number* or *prime* is an integer p greater than 1 whose only positive factors are p and 1. For example, 2, 3 and 19 are prime numbers, but not 1, 9 or 15. The primes may be thought of as the constituents from which every natural number can be constructed by multiplication, just as every natural number can be obtained from 1 by repeated addition. For, as we shall see in Th. 3 below, every positive integer can be written as a product of prime numbers in essentially only one way.

Figura 5.4.4.1. Manual 4 (Cohn, 2000, p.26)

Hay muy pocos numéricos (alrededor de cinco en toda la exposición) y no se explican. Los ejemplos para trabajar procedimientos, como el algoritmo de Euclides, no se aportan y, en el caso de la identidad de Bezout, ésta se muestra para 5 y 18, pero no se ofrece cómo obtenerla, se deja en manos del lector.

En cuanto a los ejercicios, encontramos alrededor de la decena tras cada sección y ejercicios propuestos de todo el capítulo al final del mismo. Se aporta resolución en la parte final del texto, pero si el ejercicio es numérico, sólo se ofrece el resultado pero no se muestra el desarrollo para obtenerlo.

El lenguaje formal o algebraico es el que predomina en este manual. Además se utiliza para ligar, de forma coherente y sin que exista una distinción explícita, las definiciones, seguidas de algún ejemplo y resultados. Ciertos teoremas viene bien resaltados y para ellos su demostración está perfectamente delimitada.

El formalismo matemático se pone de manifiesto en el uso del lenguaje simbólico que es denso en todo el texto. Es significativa también la presencia del lenguaje inductivo que se ha desarrollado en secciones previas a la divisibilidad de los números enteros.

Frente a es tos lenguajes más rigurosos matemáticamente, encontramos el lenguaje natural−vernáculo en el inicio de algunas secciones, exponiendo brevemente una idea introductoria. Asimismo, es poco frecuente el uso del lenguaje numérico y por último observamos que el lenguaje algorítmico se usa de forma leve o implícita ya que da indicaciones del procedimiento pero no lo desarrolla explícitamente.

No aparece ninguna aplicación ni referencia a la informática y es nula la presencia de lenguajes de programación.

En la entidad primaria conceptos, establece la definición de divisor en $\mathbb{Z}$ de CE_DI, utilizándola de forma particular, para luego abstraerla en DI, realizando el proceso de generalización. Esto se observa en: “Let R be an integral domain; as in Z we define b | a …” (Cohn, 2000, p.145).

Respecto de la definición de primo o irreducible, en $\mathbb{Z}$, parte de CE_Inicial lo que le permite considerar los primos de forma equivalente a los irreducibles. Utilizará la generalización a elemento irreducible en DI para posteriormente, establecer la diferenciación y relación entre ambos conceptos. Por tanto nos volvemos a encontrar en esta entidad la faceta particular−general.

Las definiciones de elementos asociados y mcd las establece directamente en CE_DI, de forma general, para luego particularizar en $\mathbb{Z}$ y en el anillo de polinomios.

La mayor parte de las definiciones formuladas son de tipo formal. Aparece la definición inductiva para el mcd de un número finito de elementos.

Al igual que ocurre en la entidad conceptos, respecto de las proposiciones, el autor parte de algunos resultados en los enteros (como el teorema fundamental de la aritmética o el algoritmo de la división) para generalizarlos en DFU y DE y trabajar de forma abstracta en ellos.

Se estudia el teorema de existencia de mcd en todas las configuraciones epistémicas y resuelve la unicidad (salvo asociados) en el dominio más amplio, para DI.

La ausencia de procedimientos es una característica a resaltar. A pesar de indicar que algunas demostraciones proporcionan métodos de cálculo (el mcd a través de la factorización y del algoritmo de Euclides, o la identidad de Bezout, expresando cada resto como combinación lineal de los elementos) no llega a exponerlos explícitamente, sólo aporta las soluciones finales de algunos. Así mismo, aunque CE_DIP identifica los primos o irreducibles con los generadores de los ideales maximales y el mcd como el generador del ideal principal generado por los elementos, esto no proporciona en realidad un procedimientos de cálculo en el caso de los números enteros y los polinomios.

En la entidad argumentos, es importante destacar que se aportan demostraciones de todas las proposiciones estudiadas, en $\mathbb{Z}$ (utilizando argumentos propios de los enteros como el principio del mínimo) y en los dominios más generales, situando cada resultado y su demostración en la configuración epistémica en la que se establecen. Así, para la identidad de Bezout se obtienen tres tipos de demostraciones: en $\mathbb{Z}$, en DE y DIP. Los argumentos son fundamentalmente deductivos, los propios del Álgebra Abstracta. Se utiliza también la inducción muy formalmente, pues ha sido tratada en secciones anteriores, y hay argumentos constructivos en el Teorema fundamental de la aritmética y el algoritmo de Euclides. Los argumentos algorítmicos no se exponen explícitamente.

Del análisis didáctico, deducimos que este manual otorga una gran importancia a las argumentaciones y proporciona diferentes significados de los objetos matemáticos, diferenciándolos y clarificando las relaciones entre ellos debido al trabajo en todas las CE. Frecuentemente, está presente la dualidad particular−general en la realización de procesos de generalización (como en la definición de divisor) y de particularización (por ejemplo, en la aplicación al caso de polinomios).

Sin embargo, el uso casi exclusivo del lenguaje formal y simbólico junto con la ausencia de ejemplos, procedimientos o situaciones de aplicación nos indica una idoneidad epistémica media. Dichas ausencias, el alto nivel de abstracción presente, junto con la falta de conexión con CE_Inicial, dificulta el acoplamiento entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los pretendidos en el manual, lo que es un indicativo de conflictos semióticos potenciales y de idoneidades cognitiva y afectiva bajas.

Es característico en este libro de texto la falta de procedimientos de cálculo, lo que conlleva la imposibilidad de implementación en el ordenador. Las importantes aplicaciones de esta teoría a las ciencias de la computación no se abordan, mostrando así una baja idoneidad ecológica en este Grado en Ingeniería Informática. En la misma línea, no muestra la importancia de la Teoría de Números, y en general de las Matemáticas, en el desarrollo profesional de los estudiantes indicativo de una baja idoneidad afectiva nuevamente.

5.4.5. Análisis del manual 5

Este libro de texto editado por Addison-Wesley y la Universidad Autónoma de Madrid (1996) tiene por autores a J. Dorronso y E. Hernández, profesores en esta universidad. Como se indica en el prólogo, las notas y apuntes que confeccionaron para la docencia de Álgebra en el segundo curso de la licenciatura de Matemáticas, fueron la base de este manual, titulado Números, grupos y anillos.

Tabla 5.4.5.1. *Localización del manual 5.*

Asignatura	Titulación	Universidad
Álgebra Lineal y Estructuras Matemáticas1 Lógica y métodos discretos	Grado en Ingeniería Informática	Universidad de Granada
Algebra I	Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	Universidad de Granada
Matemática Discreta (bibliografía complementaria) Álgebra (bibliografía básica)	Grado en Ingeniería Informática	Universidad de Jaén
Matemática Discreta I	Grado en Ingeniería Informática	Universidad Politécnica de Madrid
Matemática Discreta I Estructuras algebraicas	Grado en Matemáticas e Informática	Universidad Politécnica de Madrid

Observemos en la tabla 5.4.5.1. que el manual 5 se recomienda en la bibliografía complementaria de la asignatura de primer semestre, mientras que se incluye en la bibliografía básica de asignaturas de segundo semestre (Álgebra) o segundo curso (Estructuras Algebraicas), esta última del Grado en Matemáticas e Informática.

La secuencia de capítulos, en este libro de texto (tabla 5.4.5.2.), muestra un proceso gradual en la enseñanza, respecto del grado de generalización. Parte de los números enteros, para dar un paso significativo en el estudio de la divisibilidad en polinomios y, posteriormente, en dominios más abstractos. De esta forma consigue realizar el estudio en las estructuras más generales de forma progresiva, lo que facilita la adquisición de conocimientos al estudiante.

Tabla 5.4.5.2. *Análisis del manual 5.*

Entidades		
Situaciones-problemas	Extensión	Consta de 277 páginas y se trata desde la página 28 a la 51 (capítulo 2), de la 213 a la 265 (capítulos 7 y 8).
	Lugar	*Capítulo 2*. Números y congruencias: 2.2. Máximo común divisor. Algoritmo de Euclides; 2.3. Teorema fundamental de la aritmética; 2.4. Congruencias; 2.5. Ecuaciones con congruencias; 2.6. Comentarios históricos. *Capítulo 7*. Anillos de polinomios: 7.1.Primeras definiciones y resultados; 7.2.Criterios de irreducibilidad para polinomios; 7.3.Raíces de polinomios y extensiones de cuerpos. *Capítulo 8*. Anillos. Resultados sobre factorización: 8.1.Dominios de factorización única; 8.2.Dominios de ideales principales; 8.3.Dominios euclídeos; 8.4.Máximo común divisor y mínimo común múltiplo en dominios de factorización única; 8.5.Factorización en $\mathbb{Z}[i]$; 8.6.Comentarios históricos.
	Dominios definición	Divisor: $\mathbb{Z}$, polinomios y DI; Primo: definición de irreducible en $\mathbb{N}$, polinomios y DI; Irreducible: polinomios, DI y $\mathbb{Z}$; asociados: mcd: $\mathbb{Z}$, DI, DIP, DFU, polinomios y DE; Teorema fundamental de la aritmética: $\mathbb{N}$, polinomios y DFU; alg.división: $\mathbb{Z}$, polinomios, DE; alg.de Euclides: $\mathbb{Z}$, DE, polinomios; I. Bezout: $\mathbb{Z}$, DIP, DE, polinomios.
	Elementos introductorios	Al principio de cada sección hay una pequeña introducción donde se exponen los objetivos. Comentarios históricos como sección al final de algunos capítulos (2 y 8). En ocasiones se utilizan los ejemplos para introducir el concepto o resultado.
	Ejemplos	2 o 3 de cada concepto, antes y después del enunciado y bien resaltados. De tipo numérico y también abstractos.
	Ejercicios	Hay alrededor de 15 al final de cada sección y no se aporta solución de los mismos. La mayor parte de tipo abstracto y pocos de tipo numérico.
	Implem. informática	No aparecen códigos ni pseudocódigos.
	Aplicaciones	No aparecen aplicaciones a la informática de forma explícita.

Lenguajes	Matemática	Los más presentes: formal, simbólico y natural–vernáculo. También, numérico e inductivo. Con menos frecuencia el lenguaje tabular (criba de Eratóstenes) y gráfico (relaciones entre dominios) No hay presencia de lenguaje algorítmico.
	Programac.	Ninguno.
Conceptos	Definición	Divisor: CE_DE en $\mathbb{Z}$, CE_DI también en polinomios; Primo: La de irreducible para $\mathbb{Z}$ (CE_Inicial), CE_DI; Irreducible: CE_DI, la de primo (CE_DFU) en polinomios; Asociados: CE_DI; Mcd: CE_DI y CE_Inicial en $\mathbb{Z}$.
	Tipo de definiciones	Formales, deductiva (I. Bezout o divisor en $\mathbb{Z}$) y a través del contrario (número compuesto y polinomio reducible).
Propos.	Proposicio-nes	Teorema f. aritmética: CE_DFU; Existencia del mcd: CE_Inicial, CE_DFU; Unicidad: CE_DI; I. Bezout: CE_DIP y CE_DE; Alg. de la división y alg. de Euclides: CE_DE.
Proced.	Sí, cálculo	Divisores: CE_DE en $\mathbb{Z}$; primos: CE_Inicial (criba Eratóstenes) y CE_DI; Factorización: CE_DFU; Alg. división: CE_DE; mcd: CE_Inicial, CE_DI, CE_DFU, CE_DE; I. Bezout: CE_DIP, CE_DE (por restos).
Argumentaciones	Sí, en $\mathbb{Z}$	Todos.
		Argumentos deductivos e inductivos. También constructivos para el algoritmo de Euclides y la I. Bezout.
	Sí, en polinomios	Algoritmo de la división
		Tipo recurrente.
	Sí, dominios generales	Teorema f. aritmética y existencia del mcd: DFU; Unicidad del mcd: CE_DI; Alg.de la división, Alg. de Euclides e I.Bezout: CE_DE; I.Bezout: También en DIP.
		Tipos: Deductivos, inductivos y constructivos

La graduación en el proceso de abstracción, de la que hablábamos anteriormente, se ve reflejada en los dominios de definición de la entidad situaciones-problemas. A modo de ejemplo, se puede observar que la definición de divisor se realiza en primer lugar en $\mathbb{Z}$, posteriormente en polinomios y, por último en DI.

La figura 5.4.5.1. muestra otro modelo del proceso de generalización, progresivo o gradual, que se realiza en la entidad conceptos, en esta ocasión para motivar la definición de asociados.

Los ejemplos, en este manual, aparecen antes de un concepto o resultado (figura 5.4.5.1.), como elementos introductorios, y después de los mismos. Se aportan también ejercicios al final de cada sección, sin resolución. La mayor parte de los ejercicios y ejemplos son de tipo abstracto, aunque también los hay numéricos.

Nuestro objetivo en este capítulo es estudiar a qué anillos D puede extenderse el Teorema Fundamental de la Artimética (teorema 2.3.3 del capítulo 2). En principio, el Teorema Fundamental de la Aritmética se enunció únicamente en $\mathbb{N}$, por lo que empezaremos extendiéndolo a $\mathbb{Z}$; esta extensión nos indicará cuál puede ser la forma de este teorema en anillos más generales. Según la definición, los irreducibles de $\mathbb{Z}$, que son los primos, son los enteros de la forma $\pm$ p, con p un primo natural. Por tanto, $6 = 2 \cdot 3 = (-2)(-3)$ son dos factorizaciones de 6 en primos distintos; sin embargo, el considerar a 2 y -2 ó 3 y -3 como primos distintos a efectos de factorización es algo engorroso: al fin y al cabo, si 2 divide a un entero, también lo hace -2. Esto, junto con el hecho de que los elementos invertibles de $\mathbb{Z}$ son $\{\pm 1\}$, motiva la siguiente definición:

Definición 8.1.3. Sea D un dominio de integridad conmutativo y con unidad; dos elementos r y s de D se llaman **asociados** (y escribiremos $r \sim s$) si existe $u \in U(D)$ tal que $r = us$.

★★ EJEMPLO C. En el anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros, p y q son asociados si $p = q$ o $p = -q$ ya que $U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$; en particular 2 y -2, 3 y -3 son pares de números asociados.

Figura 5.4.5.1. Manual 5. (Dorronso y Hernández, 1996, p.240)

Es destacable que no aparecen aplicaciones informáticas, ni se utiliza ningún lenguaje de programación.

Las definiciones y proposiciones se enuncian, por lo general, en la CE donde se establecen; es decir, la definición de mcd o su existencia se realiza en CE_DI y el teorema fundamental de la aritmética en CE_DFU. Así, el grado de formalidad y abstracción es elevado. Sin embargo, en conceptos como primo o irreducible, parte de CE_Inicial, (naturales y polinomios, respectivamente) realizando el proceso de generalización a CE_DI, donde se diferencian y clarifican o di stinguen. Una vez discriminados ambos conceptos, se realiza nuevamente el proceso de particularización a $\mathbb{Z}$ mostrando que aquí, los elementos primos e irreducibles coinciden.

Los procedimientos y argumentaciones se trabajan en todas las CE. Todas las demostraciones se realizan en los enteros (utilizando, a menudo, argumentos inductivos) y en dominios más generales donde se ponen en juego las demostraciones formales de las matemáticas. Están presentes también los argumentos constructivos que hablan de la importancia que el autor otorga a los procedimientos. El proceso de particularización en los procedimientos lo aborda, partiendo desde una estructura algebraica como DE, hacia ejemplos nada triviales que rompen con lo conocido por el estudiante. Es el caso del cálculo del mcd, a través del algoritmo de Euclides (o la identidad de Bezout) para los enteros de Gauss ($\mathbb{Z}[i]$) o el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Así, en este manual, están presentes todas la CE y todos los objetos matemáticos están adaptados al nivel educativo, poniendo de manifiesto las relaciones entre ellos (como el ejemplo de primo o irreducible). Sin embargo, al no encontrar aplicaciones a la informática, evaluamos la idoneidad epistémica, para el Grado en Ingeniería Informática,como media–alta.

Por otro lado, los contenidos tienen una dificultad manejable para los estudiantes. La CE_Inicial está presente de forma implícita y se va haciendo un proceso de generalización progresivo, como hemos comentado anteriormente; se proponen ejercicios antes de desarrollar los conceptos y se clarifican y abordan conflictos semióticos potenciales como la diferencia entre primo e irreducible, a la que hemos aludido. Además, se promueve la competencia argumentativa y la fluencia procedimental, pues es rico en procedimientos y argumentaciones. Estos son indicadores de una alta idoneidad cognitiva y también enriquecen la idoneidad interaccional, aunque la ausencia de ejercicios resueltos y ejemplos que no promueven la autonomía del estudiante, nos llevan a valorar la idoneidad interaccional como media.

Es significativa, en este manual, la falta de aplicaciones y recursos informáticos pero la presentación y estructura de los contenidos es muy buena. Ello incide directamente en la calificación de las idoneidades mediacional y afectiva, como medias. Por último, consideramos por lo anterior una idoneidad ecológica baja.

5.4.6. Análisis del manual 6

Este libro de texto titulado Álgebra Abstracta Aplicada, tiene por autores a: A. Vera López (Catedrático de Álgebra de la Universidad del País Vasco), F. J. Vera López (Profesor titular de Álgebra de la Universidad de Murcia) y M. A. García Sánchez (Profesora asociada de Álgebra de la Universidad del País Vasco).

Ha sido seleccionado pues está en la bibliografía complementaria de las asignaturas Matemática Discreta y Álgebra de la Universidad de Jaén.

Se caracteriza por realizar el estudio de la divisibilidad en las estructuras algebraicas más generales, como CE_DI, para obtener, como ejemplos, el caso de los enteros, el conjunto $\mathbb{Z}_n$ de las clases de restos o los polinomios. En la figura 5.4.6.1. se puede observar cómo el capítulo comienza definiendo la estructura de anillo para, posteriormente, mostrar los ejemplos importantes para un informático como $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}_n$ ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

Así, este manual trabaja con una gran abstracción; definiendo, en primer lugar, la estructura algebraica (lo general), para luego pasar al ejemplar/tipo. La faceta dual particular–general tiene un fuerte sesgo hacia lo general, realizando el proceso de particularización para mostrar ejemplos; de ahí la ausencia de CE_Inicial.

§1. Anillos. Primeras propiedades.

DEFINICION. Un **anillo** $(R, +, \cdot)$ es un conjunto R junto con dos operaciones $+$ y $\cdot$, satisfaciendo los siguientes axiomas:

$Ax1)$ $(R, +)$ es un grupo abeliano.

$Ax2)$ $\cdot$ es asociativa, o sea $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot) \cdot c \ \ \forall a, b, c \in R$.

$Ax3)$ Se verifica la ley distributiva a ambos lados, o sea

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \text{ y}$$

$$(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a) \ \ \forall a, b, c \in R.$$

El elemento identidad respecto a la suma $+$, es denotado por 0_R. Un anillo $(R, +, \cdot)$ se dice conmutativo, si $\cdot$ es una operación conmutativa en R. Un anillo $(R, +, \cdot)$ se dice unitario, si $\cdot$ posee elemento identidad, que denotaremos por 1_R.

EJEMPLOS. 1) Si $+$ y $\cdot$ denotan la suma y multiplicación ordinarias en los conjuntos $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}$, entonces $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ son claramente anillos conmutativos y unitarios.

2) Para cada $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ posee estructrua de anillo conmutativo con identidad, respecto a las operaciones siguientes:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$$

Figura 5.4.6.1, Manual 6 (Vera et al., 1992, p.291)

El sesgo hacia la abstracción se relaciona también con la fuerte presencia de CE_DIP frente a la ausencia, casi total, de CE_DE.

Todo ello se ve reflejado en la entidad situaciones–problemas, que aparece en la tabla 5.4.6.1., donde los dominios de definición presentados son abstractos. Ninguno de los ejemplos es numérico ni materializan procedimientos. En la misma línea, los ejercicios son abstractos y las aplicaciones no están directamente relacionadas con los conceptos sino que aparecen en capítulos posteriores.

Tabla 5.4.6.1. *Análisis del manual 6.*

Entidades		
Situaciones-problemas	Extensión	Consta de 772 páginas y se trata desde la página la 291 a la 388.
	Lugar	Capítulo 6. Anillos. 6.4. Dominios de factorización única. 6.5. Anillos de polinomios.
	Dominios definición	Divisor e irreducible: DI y DIP; asociados, primo: DI; mcd: DFU; teorema fundamental de la aritmética: DFU y DIP; algoritmo de la división: K[x], K cuerpo; algor. Euclides e I. Bezout: No aparecen.
	Elementos introductorios	No hay elementos introductorios ni notas históricas.

	Ejemplos	Hay pocos ejemplos, vienen resaltados. Ninguno numérico, ni que corresponda a un procedimiento de cálculo. Corresponden a ejemplos relacionados con la estructura. Utiliza $\mathbb{Z}$ y los polinomios como ejemplos.
	Ejercicios	20 problemas propuestos al final del capítulo, en una sección. Son de tipo abstracto. Al final del libro aparecen las soluciones de algunos problemas propuestos. Para este capítulo no se aporta resolución.
	Implem. informática	Ninguno.
	Aplicacio-nes y su lugar en el texto	No aparecen aplicaciones en el capítulo. $\mathbb{Z}_n$ y las congruencias se tratan como ejemplos de anillos, pero no como aplicaciones informáticas. Posteriormente hay varios capítulos de aplicaciones: autómatas, máquinas de Turing, códigos, criptología.
Lenguajes	Matemáticas	Los más presentes: lenguaje formal de las matemáticas y simbólico. El lenguaje numérico es muy escaso. No aparece lenguaje natural–vernáculo.
	Programac.	Ninguno.
Concept.	Definición	Divisor, primo, irreducible, asociados, mcd: CE_DI.
	Tipo de definiciones	Formales.
Proposicion.	Proposicio-nes	Teorema f. aritmética, existencia del mcd, unicidad: CE_DFU; Alg.de la división: CE_DE; alg. de Euclides e I. Bezout: No.
	No	Cálculo de: divisores, primos o irreducibles (en $\mathbb{Z}$), alg. división, mcd, I. Bezout.
Procedimientos	Sí, cálculo	Irreducibles: Criterio de irreducibilidad de Einstein,… para polinomios Factorización (dentro de la proposición 6.35), pero no se menciona como procedimiento
	No	Alg. de la división (en $\mathbb{Z}$), Alg. de Euclides e I. Bezout: No aparecen.
Argumentaciones	Sí, dominios generales	Existencia y unicidad del mcd: CE_DFU; Teorema f. aritmética: CE_DFU y CE_DIP, Alg. de la división: K[x] , K cuerpo.
		Todas las demostraciones, de cada resultado. Los argumentos son deductivos, propios de las matemáticas superiores. Se utiliza también la inducción, la reducción al absurdo y la demostración mediante el contra–recíproco, todas muy formales.

Los conceptos se definen en la CE más general, CE_DI, de tipo formal. Es significativo que no aparecen el algoritmo de Euclides ni la identidad de Bezout por lo que la presencia de CE_DE se reduce al algoritmo de la división. Así, no hay procedimientos de cálculo y las argumentaciones se presentan, en dominios generales y de todos los tipos de la matemática formal (salvo las constructivas).

La idoneidad epistémica la consideramos media, debido a que están presentes la CE_DI y CE_DIP, pero, prácticamente, no tiene presencia CE_DE respecto de las proposiciones y procedimientos. Los objetos matemáticos están bien presentados, pues son claros y correctos, pero no están adaptados al nivel educativo, lo que confiere una dificultad importante a nivel cognitivo dado que el estudiante no tiene los conocimientos previos, y que unido a la ausencia de fluencia procedimental, determina una idoneidad cognitiva baja.

El estudio a partir de las estructuras algebraicas abstractas y la falta de aplicaciones, es poco interesante para el estudiante de ingeniería, pues no ve la conexión con su vida profesional o cotidiana, esto nos lleva a valorar la idoneidad afectiva como baja. La idoneidades mediacional e interaccional son bajas, también, debido a que no se utilizan ningún tipo de recursos informáticos en la presentación del contenido y no se facilita la autonomía de aprendizaje ni la interacción manual-estudiante.

Por último, observamos que los contenidos corresponden a las directrices curriculares y existen conexiones inter e intra-disciplinares, aunque no se integran nuevas tecnologías, por lo que consideramos una idoneidad ecológica media.

5.4.7. Análisis del manual 7

Este manual titulado Elementos de Matemática Discreta, tiene por autores a E. Bujalance, J. A. Bujalance, A. F. Costa y E. Martínez de la U.N.E.D. De los mismos autores hay un libro de problemas resueltos. Se recomiendan en la bibliografía complementaria de la Universidad de Jaén. Analizamos la 3ª edición, del año 2005.

En la entidad situaciones-problema (tabla 5.4.7.1.) cabe destacar que el dominio de definición utilizado es el de los números enteros. La mayoría de conceptos y proposiciones se realizan, en primer lugar, sobre el conjunto de los naturales. Posteriormente, utilizando el valor absoluto, amplía el resultado al caso de los negativos.

Tabla 5.4.7.1. *Plantilla de análisis del manual 7.*

Entidades		
Situaciones-prob.	Extensión	Consta de 309 páginas y se trata en las páginas 1-54 y 69-132.
	Lugar	Capítulo 1. Teoría elemental de Números.1-1. Algoritmos de la división y Euclides.1-2. Números primos y teorema fundamental de la aritmética. 1-4. Ecuaciones diofánticas. 1-5. Congruencias. 1-6. Sistemas de numeración y criterios de divisibilidad.

	Dominios de definición	Divisor y mcd: $\mathbb{Z}$; Primo: $\mathbb{Z}$; Irreducible: no; Teorema fundamental de la aritmética, alg.división, alg.de Euclides e I. Bezout: $\mathbb{Z}$.
	Elementos introductorios	Al principio de cada capítulo, de forma extensa, explicando qué es la teoría de Números. Frecuentes notas históricas a lo largo del capítulo.
	Ejemplos	Muchos, después de cada concepto o resultado hay 2 o 3 ejemplos, generalmente, mezclando numéricos y abstractos, también de propiedades, pero bien resaltados.
	Ejercicios	Entre 5 y 10 ejercicios al final de cada sección. No se aporta solución. Se entremezclan de tipo numérico y abstracto.
	Implem. Infor.	No se aportan códigos ni pseudocódigos.
	Aplicaciones	Algunas de forma explícita como secciones: sistemas de numeración, ecuaciones diofánticas, cadenas de bits, dígitos de control en publicaciones, códigos de barras, NIF, números pseudoaleatorios, aplicaciones a la aritmética computacional con enteros grandes, criptografía, código RSA, etc.
Lenguajes	Matemática	Los más presentes: Lenguaje formal, mezclado con el natural–vernáculo, para introducir o facilitar. También aparecen numérico e inductivo (mcd de un número finito y algoritmo de Euclides). El uso del lenguaje simbólico es reducido.
	Programación	Ninguno.
Conceptos	Definición	Divisor y mcd: CE_DI; Primo: la de irreducible para CE_DI, CD_DFU, posteriormente CE_DI (p.32); asociados: no.
	Tipo	Todas son formales, aunque utiliza lenguaje natural–vernáculo en su descripción. También deductiva (I. Bezout), inductiva (mcd de un numero finito), a través del contrario (número compuesto).
Prop.	Proposiciones	Teorema f. aritmética: CE_DFU; Existencia del mcd: CE_Inicial; Unicidad: No; Alg.de la división, alg. de Euclides e I.Bezout: CE_DE.
Proc.	Sí, cálculo	Divisores: CE_Inicial, CE_DFU; Primos: (Criba de Eratóstenes); Mcd: CE_Inicial, CE_DI, CE_DFU, CE_DE; I. Bezout: CE_DE (por restos).
Argumentos	No	Unicidad del mcd (no se plantea pues utiliza la CE_Inicial).
	Sí, en $\mathbb{Z}$	Todas, generalmente utilizando las propiedades de los enteros. Argumentos deductivos, por reducción al absurdo, inductivos y constructivos (alg. Euclides, I. Bezout).

El papel de los ejemplos es importante, tanto por la cantidad como por la situación de los mismos en el manual. Aparecen varios después de cada concepto o resultado y, a menudo, se parte de lo ejemplar para obtener el resultado general, como se aprecia en la figura 5.4.7.1., al introducir la identidad de Bezout.

Los ejercicios son escasos y no se aporta solución. Podemos encontrar la razón en el hecho de que los autores disponen de un libro de problemas resueltos, con la misma estructura de éste.

• Hemos visto en el ejemplo c de 1-1.20 que m.c.d.(−21, 12) = 3. Observemos que −21.1 + 12.2 = 3. El m.c.d. de −30 y 50 es 10. Podemos escribir 10 = 50.2 + (−30).3.

Estos dos ejemplos muestran que el m.c.d. de a y b puede expresarse como combinación lineal de a y b, para estos valores particulares de a y b. El siguiente Teorema nos dice que esto ocurre en general.

1-1.22 Teorema

Sean a y b enteros distintos de 0. Entonces existe un único d máximo común divisor de a y b. Además d es el entero positivo más pequeño que puede expresarse en la forma ax + by donde x e y son números enteros.

Demostración

Primero veamos que siempre existe d y después que d es único.

Figura 5.4.7.1. Manual 7 (Bujalance et al., 2005, p.18)

Son abundantes las aplicaciones a la informática pero no se aportan códigos o pseudocódigos para la implementación en el ordenador. Así el lenguaje de programación no aparece y el lenguaje más destacado es el lenguaje formal, propio de la Matemática, mezclado con el natural–vernáculo.

En la entidad conceptos, observamos que se utiliza CE_DI pero hay una ocultación absoluta del concepto de elemento irreducible. No se permite la distinción entre primo e irreducible, eliminando así toda posibilidad de realizar el paso al anillo de polinomios y, en general, a CE_DFU, donde el elemento irreducible toma todo su significado por su papel en la factorización, ya que se realiza a través de dichos irreducibles.

El concepto de elementos asociados, propio de CE_DI no se trata, lo que está relacionado con que no se problematiza la unicidad del mcd. La existencia se obtiene a partir de la CE_Inicial, que proviene de escoger el máximo de los divisores comunes con el orden natural, extendido a los números enteros. Se obtienen proposiciones y procedimientos para el cálculo del mcd en todas las CE salvo en CE_DIP. Las demostraciones se realizan de todos los resultados del manual, si bien, se recurre, a menudo, a argumentos específicos de los números enteros, como el principio de buena ordenación, de forma que no pueden ser generalizados. De esta manera, el conflicto semiótico de la generalización está presente en este manual.

En resumen, este manual se caracteriza por estar centrado en los números enteros, no aborda la CE_DIP ni algunos conceptos fundamentales (elementos irreducibles y asociados). Sin embargo, podemos observar que hay una muestra representativa de ejemplos y aplicaciones, utilizando el lenguaje natural–vernáculo para adecuar el lenguaje formal, propio de la Matemática. También las proposiciones y procedimientos son los fundamentales para este nivel educativo y se presentan de forma clara y correcta. De todo ello deducimos que la idoneidad epistémica es media.

La forma de exposición de resultados puesto de manifiesto en la figura 5.4.7.1. junto con el lenguaje natural–vernáculo facilita el que los contenidos pretendidos tengan una dificultad manejable; pero esto se pierde en la alta formalización que presentan las demostraciones dando así lugar a una idoneidad cognitiva media. Asimismo podemos también considerar una idoneidad afectiva media debido al alto nivel en las demostraciones contrarrestado con una gran variedad de aplicaciones a la Informática. A pesar de la diversidad de aplicaciones, consideramos que la idoneidad ecológica es baja debido a que no utiliza recursos informáticos (implementación de algoritmos y procedimientos en lenguaje de programación) como se recomienda en las directrices curriculares. Esta ausencia de recursos informáticos muestra también una baja idoneidad mediacional.

El grado de autonomía que proporciona al estudiante este manual es medio pues aunque se exponen muchos ejemplos resolviéndolos de forma explícita y detallada, las argumentaciones pueden presentar dificultades por el alto formalismo matemático puesto en juego. Se obtiene, por tanto, una idoneidad interaccional baja.

5.4.8. Análisis del manual 8

Este texto titulado Métodos computacionales en álgebra para informáticos. Matemática discreta y lógica, está escrito por tres profesores del área de Álgebra de la Universidad de Jaén (García-Muñoz, M.A., Ordóñez, C. y Ruiz, J.F.). Es un manual recomendado en la bibliografía básica de las asignaturas Matemática Discreta y Álgebra, del Grado en Ingeniería Informática de la Universidad de Jaén. Fue publicado en 2006 y actualmente se está preparando la segunda edición para el año 2019.

Se ha concebido como un manual para prácticas de ordenador por lo que se organiza en capítulos, cada uno de ellos diseñado para una práctica impartida, en dos horas, en el laboratorio. El manual 8 está enfocado, así, para trasladar la temática estudiada, al ordenador; esto se refleja dentro de la entidad situación-problema (tabla 5.4.8.1.), por un lado, en que los dominios de definición utilizados son $\mathbb{Z}$ y el anillo de polinomios (no se trabaja en dominios más abstractos, pues lo general no pue de implementarse en el ordenador).

Por otro lado, las características de los ejemplos y ejercicios muestran también cual es el propósito de este libro; esto es, encontramos que todos los ejemplos son numéricos, y se resuelven sólo con el programa Mathematica. Además, los datos de los ejemplos y ejercicios corresponden, frecuentemente, con números grandes (a veces datos personalizados, como el DNI, año de nacimiento, etc.), por lo que sería demasiado tedioso realizarlos con lápiz y papel.

Tabla 5.4.8.1. *Plantilla de análisis del manual 8.*

Entidades		
Situaciones-problemas	Extensión	Consta de 236 páginas y se trata en las páginas 179-223. Incluye CD-ROM.
	Lugar	Capítulo 11. Números naturales y enteros. Divisibilidad. Capítulo 12. Números naturales y enteros. Congruencias y sistemas de numeración. Capítulo 13. Polinomios. Cálculos básicos y divisibilidad.
	Dominios de definición	Divisor y mcd: $\mathbb{Z}$ y polinomios; Primo: $\mathbb{Z}$; Irreducible: no; teorema fundamental de la aritmética, alg.división, alg.de Euclides e I. Bezout: $\mathbb{Z}$ y polinomios.
	Elementos introductorios	Al principio de cada capítulo, breve idea de lo pretendido. No hay elementos introductorios.
	Ejemplos	Después de cada concepto o resultado hay ejemplos numéricos realizados con el programa Mathematica. Entre 6 y 12 en cada capítulo, bien resaltados. Aparecen todos en soporte CD-ROM.
	Ejercicios	Hay 15, 21 y 10 ejercicios al final de los capítulos 11, 12 y 13, respectivamente. No se aporta solución. La mayor parte es de tipo numérico, para realizar con ordenador y algunos con datos personalizados. Hay ejercicios de examen (también con texto), de aplicaciones y para programar. Se marcan con $*$ los que se consideran con mayor dificultad. Ejercicios resueltos y de autoevaluación en el cd.
	Implem. Infor.	Códigos con Mathematica o funciones del programa, para todos los conceptos y procedimientos.
	Aplicaciones	Algunas de forma explícita como secciones (sistemas de numeración, ecuaciones diofánticas, etc.). Las aplicaciones se resaltan también en los ejercicios, al final de cada capítulo y para resolverlas con ordenador: cálculo de la letra del DNI, códigos de entidades bancarias, codificaciones para GPS, código RSA, etc.
Lenguajes	Matemática	Los más presentes: numérico, algorítmico, para trasladar al ordenador. Lenguaje formal y simbólico en el resumen teórico. También aparecen inductivo (en la I. Bezout) y algo el natural–vernáculo.
	Programación	Códigos en lenguaje propio de Mathematica (tipo C) y posibilidad de trasladar a otros lenguajes. Funciones implementadas por el programa.
Concept.	Definición	Divisor y mcd: CE_DI; Primo: la de irreducible para CE_DI; asociados: polinomios.
	Tipo	Todas son formales, aparecen de forma escueta en un resumen teórico.
Prop.	Proposiciones	Teorema f. aritmética y existencia del mcd: CE_DFU; Unicidad del mcd: CE_DI; Alg.de la división, alg. de Euclides e I.Bezout: CE_DE

Procedimient.	Sí	Todos con Mathematica, en ocasiones de varias formas. Divisores, primos (distintos códigos), factorización, Alg. División, Mcd: CE_DFU, CE_DE; I. Bezout: CE_DE (por restos, implícito).
Argumen.	No	Ninguna demostración lo que se justifica en el prólogo.
	Tipo	Hay argumentos constructivos y algorítmicos para I. Bezout, el inverso en $\mathbb{Z}_n$, o ecuaciones diofánticas. Alguno deductivo o inductivo.

Las aplicaciones se sitúan, generalmente, al final del capítulo dentro del bloque de ejercicios, aunque en algunas ocasiones, como en el caso de las ecuaciones diofánticas, aparecen como sección.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores implementamos el Algoritmo de Euclides en el siguiente programa:

PROGRAMA	COMENTARIOS
n1= NÚMERO PARA APLICARLE EL ALGORITMO; n2= NÚMERO PARA APLICARLE EL ALGORITMO;	Valores a los que aplicamos el algoritmo de Euclides.
a=Abs[n1];b=Abs[n2];	Utilizaremos sus valores absolutos.
If [a<b,a=b;b=Abs[n1];];	Distinguimos el mayor.
m=1;	
While[m>0, m=Mod[a,b]; a=b; b=m;];	Algoritmo de Euclides.
Print["m.c.d.(",n1,",",n2,")=",a] Print["m.c.m.(",n1,",",n2,")=",Abs[(n1*n2)/a]]	Salida de datos.

Programa 11.1. Algoritmo de Euclides para números enteros.

Observemos que el programa reduce todos los casos al caso positivo considerando $a = |n1|$ y $b = |n2|$, el valor absoluto de los dos números enteros.

Ejemplo 11.3. Calcular, usando el Algoritmo de Euclides, el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de 34 y −218.

Aplicamos el programa 11.1. para calcular el Algoritmo de Euclides haciendo las siguientes modificaciones:

In[]:= **n1=34;**
n2=-218;

⋮ ⋮

Out[]= m.c.d.{34,-218}=2
m.c.m.{34,-218}=3706

Figura 5.4.8.1. Manual 8 (García-Muñoz et al., 2006, p.184)

También, en la última parte de cada capítulo, se incluye una sección de ejercicios propuestos que van desde los que son de aplicación directa y más fáciles de resolver, a otros opcionales (marcados con asteriscos) y que presentan mayor dificultad. Se adjunta un CD-ROM con los ejemplos y los programas que se desarrollan a lo largo del texto, ya preparados para ejecutarlos (figura 5.4.8.1.).

Los programas informáticos que se aportan están destinados a reproducir, en el ordenador, los procedimientos estudiados en la clase de teoría, de forma que haya una concordancia entre el aula de teoría y el laboratorio de prácticas. Esto se ve en la observación de la figura 5.4.8.1.: se indica que se toma valor absoluto para reducir al caso positivo, de forma análoga al desarrollo con lápiz y papel.

El manual 8 ofrece, en el formato digital, más ejemplos que refuerzan el aprendizaje y un compendio de ejercicios, fácilmente resolubles con los programas que se desarrollan en el libro y que pueden ser utilizados a modo de ejercicios de autoevaluación.

La entidad lenguaje pone claramente de manifiesto que este manual está dedicado a las prácticas informáticas ya que el lenguaje más utilizado es el numérico y el algorítmico pues son los que permiten el traslado al ordenador. La descripción de los códigos, como el programa 11.1 que aparece en la figura 5.4.8.1., es interesante para un estudiante de informática y permite su traslado a otros lenguajes de programación.

Las definiciones y proposiciones, muy formales, aparecen de forma escueta, a modo de resumen, fundamentalmente con la CE_DI. Sin embargo, los procedimientos se presentan en todas las CE posibles e incluso ofreciendo distintas formas de resolver una misma situación. En cuanto a los argumentos, sólo se exponen los constructivos, como se justifica en el prólogo.

Todo ello nos lleva a considerar un manual con una alta idoneidad ecológica por la buena correspondencia de los contenidos expuestos con las directrices curriculares, además de la integración de los recursos informáticos lo que contribuye a la formación socio profesional de los estudiantes de este Grado. También se obtiene una buena interrelación con otros contenidos intra e interdisciplinares. La utilización del ordenador, por un lado, nos lleva a considerar una idoneidad mediacional alta, pues permite introducir buenas situaciones y muy variadas, la distribución temporal es adecuada (cada capítulo corresponde a una práctica) pero se observa que las definiciones y propiedades no están muy contextualizadas; por otro lado, las tareas son de mayor interés para el estudiante y se conectan con sus intereses profesionales; ello nos indica una alta idoneidad afectiva.

La idoneidad epistémica la consideramos baja pues aparece una muestra sesgada de situaciones-problemas influenciada por el uso del ordenador, a la vez que los conceptos, proposiciones y argumentos no están suficientemente desarrollados (se aportan a modo de resumen). Consideramos que los procedimientos son claros y correctos, bien adaptados al nivel educativo. La dificultad manejable que presentan los procedimientos frente a la falta de atención respecto de definiciones y proposiciones, nos indica una idoneidad cognitiva media.

Es de destacar que este planteamiento de las prácticas, a través de un manual, promueve la autonomía del estudiante; ello unido a una presentación clara y bien organizada de las cuestiones clave, junto con la diversidad en los procedimientos presentados, nos lleva a establecer una idoneidad interaccional alta.

El cálculo del máximo común divisor con Mathematica, en el tema de polinomios, arroja distintos resultados en las prácticas informáticas dependiendo del método elegido. Esto supone un conflicto para el estudiante y un desequilibrio ligado a la unicidad. La resolución de este conflicto le permite conectar con la CE_DI y generalizar lo obtenido en el capítulo anterior para los números enteros. El proceso de generalización se efectúa desde los enteros a los polinomios.

5.5. Resultados del análisis de manuales

Este análisis de libros de texto ha permitido observar fenómenos didácticos en los manuales y que proporcionan *características* del significado institucional pretendido en manuales acerca de la divisibilidad, en el Grado en Ingeniería Informática y que destacamos a continuación .

Por una parte, en los manuales más recomendados, hemos detectado *carencias de significado* en tanto que los dominios donde se establecen las definiciones (extraídos de la entidad situaciones–problemas) se restringen y no se abordan todas las configuraciones epistémicas. Frente a ellos, los manuales que aparecen en la bibliografía complementaria, cuyas principales carencias se refieren a *la ausencia de indicadores ecológicos* relacionados con la informática.

Respecto de los *dominios*, los manuales 1 y 3 tratan la divisibilidad sólo sobre el conjunto de los números enteros, restringiéndose casi exclusivamente a los positivos, y mostrando fuerte dependencia de la CE_Inicial. El estudio del mcd en los enteros, propuesto en el currículo, no se realiza de forma profunda por priorizar los procedimientos (reduciendo los cálculos a los positivos) y las aplicaciones a la aritmética modular (la división para calcular las clases de restos en $\mathbb{Z}_n$, se realizan con divisor, n, positivo). Así, cuestiones esenciales en divisibilidad como las unidades, elementos asociados y su relación con la unicidad del mcd se obvian (por triviales) en los naturales, haciéndose transparentes. Esto va a impedir procesos de generalización y establecer relaciones entre objetos matemáticos para observar las conexiones existentes entre ellos.

Los manuales 2 y 8, a bordan la divisibilidad ampliando el conjunto de los enteros hasta el anillo de los polinomios. En este contexto emergen cuestiones que no son baladíes en esta temática, como la unicidad del mcd. A pesar de que en estos manuales sí se ponen en juego los conceptos y proposiciones según las CE_DI, CE_DFU y CE_DE, nuevamente encontramos carencias de significado que provienen de la falta de un desarrollo en profundidad de la temática, de forma que se abordan algunas cuestiones de forma transparente (por ejemplo, los asociados en M2, para luego tomar un único mcd: el polinomio mónico).

Es el caso del conflicto que se obtiene por la *no diferenciación* entre los elementos *primos e irreducibles* (CE_DI) lo que es fuente de conflictos semióticos potenciales que llamaremos el **conflicto primo–irreducible**. En relación a es tas nociones hemos hallado la siguiente casuística, que resumimos en la tabla 5.5.1. Los libros de texto considerados básicos en las bibliografías del Grado en Ingeniería Informática, presentan dicho conflicto pues se corresponden con las opciones 1 y 2 de la tabla, mientras que los restantes se incluyen en el tipo 3, superando el conflicto primo–irreducible debido al desarrollo a través de CE_DI .

Tabla 5.5.1. *Casos de relación entre elementos primos e irreducibles en CE_DI.*

1. Sólo se habla de primo en $\mathbb{Z}$ (irreducible no se nombra ni relaciona con él)	Primo = ~~Irreducible~~
2. Se habla de primos (en $\mathbb{Z}$) e irreducibles (en polinomios) pero no se distinguen	Primo = Irreducible
3. Se diferencian y relacionan elementos primos e irreducibles	Primo $\underset{\not\leftarrow}{\rightarrow}$ Irreducible

Por otra parte, y observando las CE presentes en cada manual, presentamos un resumen de las mismas en la tabla 5.5.1.1. Podemos destacar que la CE_Inicial está presente en todos los manuales salvo en el M8 (manual de prácticas) y en el M6 donde el estudio de la divisibilidad lo realiza el autor partiendo de la estructura algebraica más general de anillo (DI, DFU, DIP, DE) para luego particularizar, a modo de ejemplo, en los enteros y los polinomios. La CE_DIP no aparece en ningún manual de bibliografía básica del Grado en Ingeniería Informática mientras que aparece en todos los que están en el Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas o Grado en Matemáticas e Informática. Esto muestra una *menor formalización* en el tratamiento de la divisibilidad en los textos más representativos del Grado en Ingeniería Informática junto con la falta de notoriedad de las argumentaciones.

La *ausencia de argumentaciones,* que no son constructivas, en dos manuales recomendados en bibliografía básica para el Grado en Ingeniería Informática es muy significativa frente al hecho de ser los que contienen mayor implementación de procedimientos para el ordenador y más aplicaciones a la informática.

En los cuatro libros de texto, considerados básicos en el Grado en Ingeniería Informática, se promueve una *gran fluencia procedimental* que posibilita el paso a la implementación informática, lo que se extrae del *predominio de CE_DE* y del *uso del lenguaje algorítmico*, que aparece solamente en estos cuatro manuales.

En la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Superior adquieren especial relevancia los *procesos de generalización–particularización*; por tanto, los trataremos de forma más detallada, a continuación (apartado 5.5.1).

Concluiremos los resultados del análisis de manuales, con una visión conjunta de la idoneidad didáctica valorada en cada uno de los manuales, con objeto de obtener resultados acerca de un análisis comparativo entre ellos (apartado 5.5.2.).

5.5.1. Procesos de generalización–particularización en los manuales

Al analizar las relaciones entre el significado institucional de referencia y el significado institucional pretendido, los procesos de generalización–particularización ocupan un lugar destacado.

En el Álgebra Superior, cuando se emprende el estudio de una estructura, como es el caso de la estructura de anillo (relacionada con la divisibilidad), se realiza un doble proceso: por un lado, el *proceso de generalización*, que parte de la observación de las nociones relacionadas con el mcd en la CE_Inicial, y realiza el paso a los enteros. Posteriormente puede tener lugar otra generalización a los polinomios y, por último, a cada uno de los dominios más abstractos, ampliando y relacionando lo estudiado en cada paso.

Estos procesos de generalización, podemos decir que, de alguna forma, son "recurrentes" ya que, como sucede en el manual 5 (figura 5.5.1.), puede realizarse de forma gradual un número finito de veces. Esto es, si partimos de la CE_Inicial, en el primer paso ($\mathbb{N}$–$\mathbb{Z}$), los naturales son el particular y los enteros adoptan el papel de general. En el segundo paso ($\mathbb{Z}$–polinomios), los enteros se convierten ahora en ejemplar y los polinomios en general. El tercer paso, particular–general lo ocupan los polinomios–estructura algebraica (anillo o algún dominio abstracto).

Hablamos, por tanto, de uno o varios procesos de generalización (si existen), en cada manual. La abstracción es propia del Álgebra Superior, y estos procesos no acaban aquí, pues basta pensar cómo, a su vez, todas las estructuras algebraicas pueden convertirse en particular (en la teoría de categorías) y una categoría ser general, etc. y extender así, en uno dos o un número finito de pasos, este proceso de generalización.

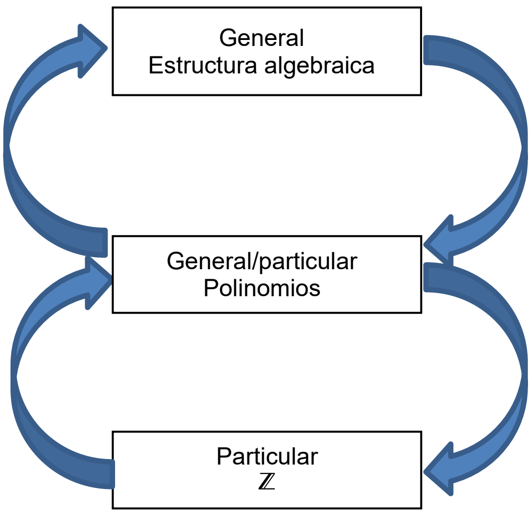


Figura 5.5.1. Procesos de generalización–particularización en M5

Por otro lado, se producen también procesos inversos al de generalización, y son los de *particularización* que se producen también en un número finito de pasos pero, ahora, en sentido contrario.

Bourbaki (como se citó en Hausberger, 2018) afirma

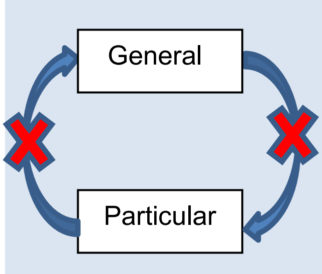
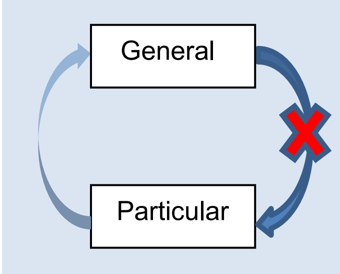
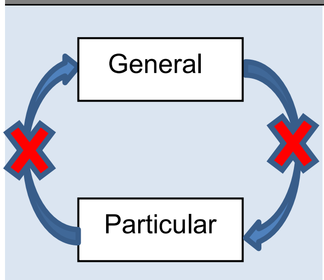
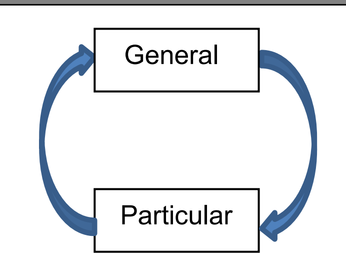
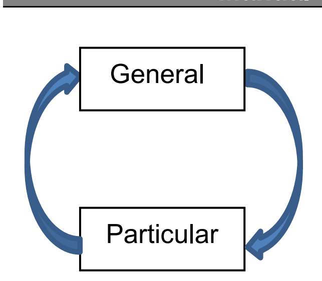
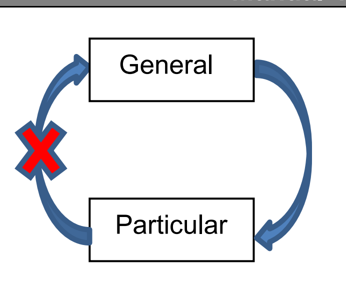
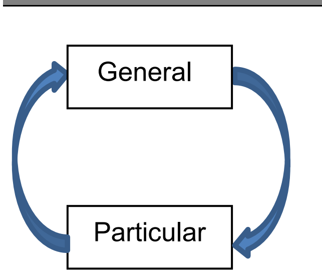
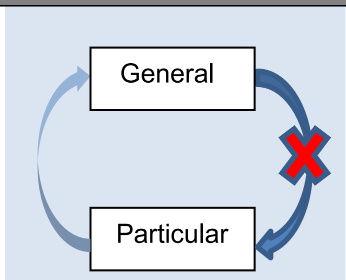
> Las "estructuras" son herramientas para el matemático; tan pronto como ha reconocido entre los elementos que estudia, relaciones que satisfacen los axiomas de un tipo conocido, tiene a su disposición de inmediato todo el arsenal de teoremas generales que pertenecen a las estructuras de ese tipo. (p.79)

La aplicación de este “arsenal” (que se encuentra en una estructura algebraica) al caso particular no es nada trivial. Basta poner como ejemplo el algoritmo de la división: si pensamos en la definición de función euclídea en la CE_DE, la complejidad de particularizar en $\mathbb{Z}$, no es la misma que dividir en los polinomios, y no digamos en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ o los enteros de Gauss. La enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en el

Álgebra Superior pasa por ambos procesos de generalización–particularización y ninguno de ellos puede obviarse.

En la tabla 5.5.1.1. hemos resumido, de forma gráfica, los procesos de generalización–particularización presentes en cada manual, junto con las CE que han emergido en el análisis didáctico de los mismos.

Tabla 5.5.1.1. *Proceso de generalización–particularización y CE en los manuales*

Procesos de generalización–particularización		
Manual	Diagrama	*Configuraciones epistémicas*:
Manual 1		CE_ Inicial : x CE_DI : x CE_ DFU : x CE_DIP: NO CE_DE : x
Manual 2(1)		CE_ Inicial : x CE_DI : x CE_ DFU : x CE_DIP: NO CE_DE : x
Manual 3		CE_ Inicial : x CE_DI : x CE_ DFU : x CE_DIP: NO CE_DE : x
Manual 4		CE_ Inicial : x CE_DI : x CE_ DFU : x CE_DIP: x CE_DE : x
Manual 5(2)		CE_ Inicial: x CE_DI: x CE_ DFU: x CE_CIP: x CE_DE: x
Manual 6		CE_ Inicial : NO CE_DI : x CE_ DFU : x CE_DIP: x CE_DE : x
Manual 7		CE_ Inicial : x CE_DI : x CE_ DFU : x CE_DIP: x CE_DE : x
Manual 8(1)		CE_ Inicial : NO CE_DI : x CE_ DFU : x CE_DIP: NO CE_DE : x

(1)El proceso de particularización–generalización es débil y se realiza a través de los polinomios
(2)El proceso de generalización–particularización es progresivo.

Al realizar el análisis del manual 1 observamos, que el estudio en lo particular, provocado por la fuerte restricción en los enteros al dominio de los naturales y obviando el proceso de generalización, provoca un conflicto semiótico potencial en el estudiante que no puede realizar el paso a la abstracción. A este conflicto lo llamaremos el **conflicto semiótico de la generalización**.

Según Font & Contreras (2008)

> La explicación de las dificultades que los estudiantes experimentan para comprender los objetos y los procesos matemáticos que relacionan lo particular con lo general, en nuestra opinión, se encuentran en la complejidad onto-semiótica de dichos objetos y procesos matemáticos. (p.35)

Respecto del proceso de particularización-generalización, consideran tres tipos de procesos: la abstracción reflexiva o constructiva, la eliminativa y la aditiva. Font y Rubio (2017) refiriéndose a lo anterior comentan

> Estas tres maneras de generar intensivos juegan un papel diferente en las matemáticas, la abstracción eliminativa y la constructiva tendrían que ver, sobre todo, con el "contexto de descubrimiento", mientras que la abstracción aditiva se relaciona, sobre todo, con el "contexto de justificación", puesto que esta última es la usada habitualmente en la presentación formalista de las matemáticas que se fundamenta sobre la teoría de conjuntos. (p.12)

Desde nuestro punto de vista, todos ellos se ponen en juego, de forma implícita, en esta investigación.

En el análisis de manuales realizado, hemos reparado en los procesos de generalización–particularización presentes en cada libro de texto en relación a la divisibilidad, y se ha obtenido la siguiente tipología que extraemos de la tabla 5.5.1.1:

1. Se establece en el manual el proceso de generalización–particularización: esto es, aparecen ambos procesos: el paso de lo particular a lo general (flecha ascendente) y el inverso, desde lo general a lo particular (flecha descendente).

2. No se establece en el manual el proceso de generalización aunque sí el de particularización: esto es, no hay paso de lo particular a lo general pero sí el inverso, desde lo general a lo particular (flecha descendente).

3. Se establece en el manual el proceso débil de generalización (flecha ascendente en color más claro) y no el de particularización (flecha descendente tachada).

4. Es el caso en que no se realiza ningún proceso ni de generalización ni de particularización (ambas flechas tachadas)

Extraemos que los manuales recomendados en bibliografía básica (celdas azules en la tabla 5.5.1.1.) se encuentran ubicados en los dos ultimos ítems de la clasificación; esto es, no realizan procesos de generalización (M1 y M3) o lo realizan de forma débil a traves de los polinomios (el caso de M2 y M8).

Sin embargo, lo manuales recomendados en bibliografía complementaria o para el Doble Grado en Informática y Matemáticas y el Grado en Matemáticas e Informática, se sitúan en el ítem 1, salvo el manual 6 que realiza el estudio en la estructura algebraica de anillo y luego particulariza, de forma trivial. Esto es, todos ellos realizan procesos de generalización–particularización, en los dos sentidos.

Además, tenemos que destacar que M5 realiza dichos procesos de forma gradual (figura 5.1.1.) lo que permite rebajar la complejidad de estos procesos en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad.

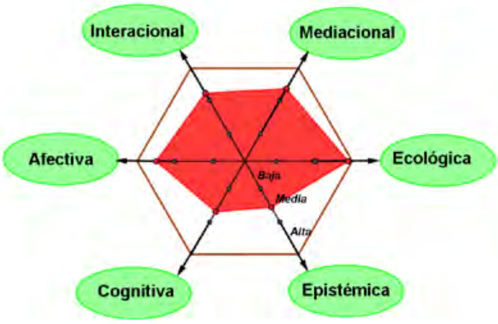
5.5.2. Idoneidad didáctica de los manuales

Con objeto de esquematizar los resultados, respecto de la idoneidad didáctica, que obtuvimos en el análisis cada manual, hemos optado por hacer operativa la figura 3.1.3. de esta tesis doctoral, proporcionada por el marco teórico del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Así, la tabla 5.5.2.1. nos proporciona, de forma gráfica, una visión conjunta acerca de la idoneidad de los ocho manuales analizados. De esta tabla obtenemos que, dentro de los textos que corresponden a la bibliografía básica, distinguimos, en términos de idoneidad: por un lado, M1, M3 y M8 y, por el otro, M2.

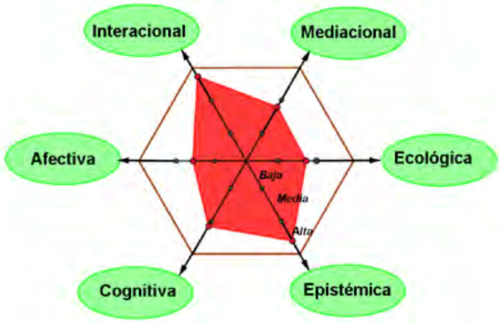
Los primeros tienen una alta idoneidad ecológica y mediacional puesto que proponen aplicaciones a la informática, procedimientos expresados a través del lenguaje algorítmico y de programación, así como situaciones que muestran el uso de la divisibilidad en su desarrollo socio–profesional. Además, los ejemplos tienen una gran importancia en estos manuales (se proponen muchos ejemplos para adquirir destrezas, tanto para realizarlos con lápiz y papel como con ordenador). Frente a esto, hay una carencia importante en las argumentaciones: los manuales 1 y 8 no realizan prácticamente ninguna demostración, salvo las constructivas, que en realidad promueven establecer un procedimiento y, en M3, las demostraciones más complejas, matemáticamente, no las aborda (como la que corresponde a la unicidad en el teorema fundamental de la aritmética).

Tabla 5.5.2.1. *Idoneidad didáctica de los manuales*

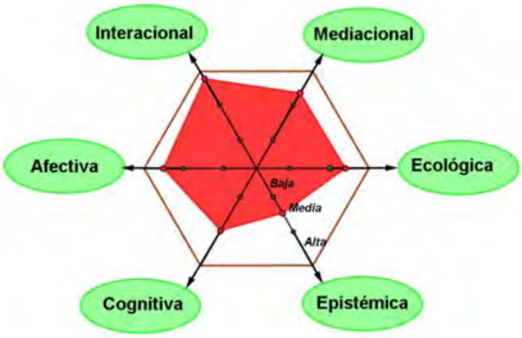
IDONEIDAD DIDÁCTICA



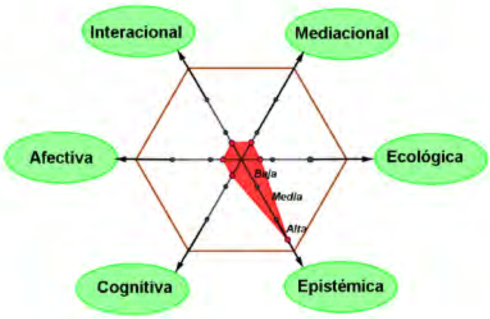
Manual 1



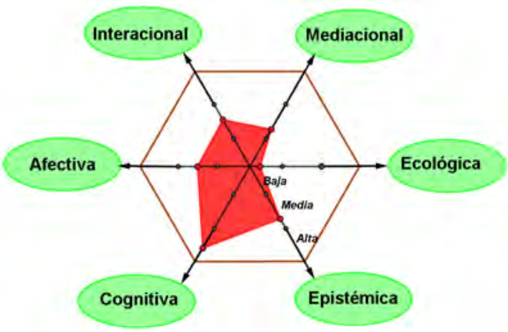
Manual 2



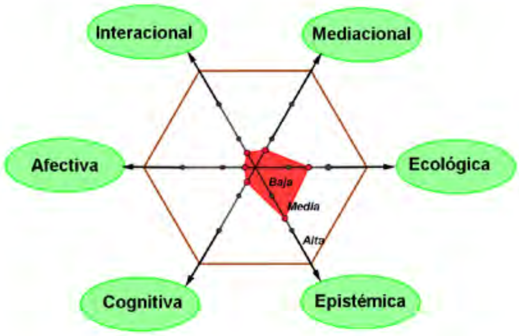
Manual 3



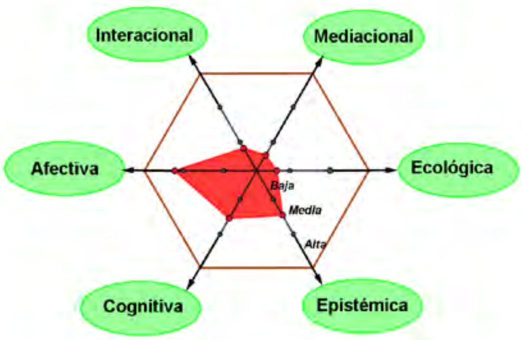
Manual 4



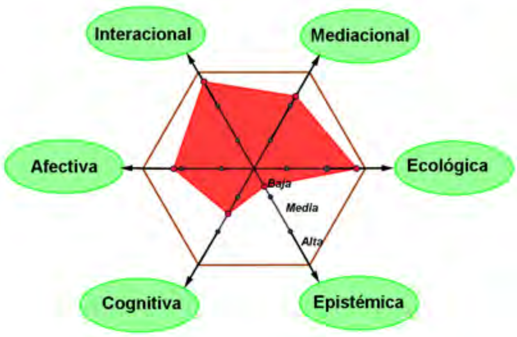
Manual 5



Manual 6



Manual 7



Manual 8

Los libros de texto considerados básicos para la divisibilidad, son manuales donde se prima lo procedimental y las aplicaciones, en perjuicio de lo epistémico. Frente a ellos, M2 tiene una alta idoneidad epistémica pero se rebaja la ecológica y mediacional.

En todos los manuales de la bibliografía básica hay una gran riqueza en la variedad de lenguajes como se ha comprobado en las imágenes que hemos ofrecido a lo largo del capítulo; en particular, el lenguaje natural–vernáculo suele utilizarse para rebajar el formalismo y explicar el lenguaje simbólico. Es significativo que los lenguajes algorítmico y de programación sólo están presentes en los libros considerados básicos en las guías de las asignaturas.

La proximidad con CE_Inicial de M1 y M3, junto con la alta cantidad de ejemplos y, en general, de situaciones hace que sea un texto más accesible al estudiante de ingeniería, por lo que las idoneidades afectiva e interaccional son altas buscando, probablemente, que no se produzca rechazo en los estudiantes de ingeniería, que utilizan la matemática como herramienta.

Los manuales de la bibliografía complementaria (de M4 a M7) tienen importantes carencias en las idoneidades ecológica, mediacional, interaccional y afectiva (parte superior de los hexágonos en M4 a M7 de la tabla 5.5.2.1.) debido a la falta de aplicaciones a la informática y del uso de recursos computacionales.

El manual 7 es el texto con mayor idoneidad afectiva de los que no pertenecen a la bibliografía básica, recordemos que es un libro de la U.N.E.D, y debe facilitar el aprendizaje más autónomo del estudiante. Sin embargo, al estar recomendado tanto para matemáticos como informáticos, las aplicaciones a la informática no se desarrollan.

Desde el punto de vista cognitivo, M5 es el mejor de entre los libros de consulta, en él el proceso de generalización gradual facilita la comprensión de los conceptos y proposiciones.

La mejor idoneidad epistémica la hemos valorado en el manual 4, pero es un libro de texto que en el resto de componentes son bajas. En esta línea, aunque un poco más ecológico tenemos al manual 6.

Se ha puesto de manifiesto, de la comparativa entre manuales, una importante diferencia entre textos que trabajan en entornos informáticos, donde son relevantes las aplicaciones informáticas y los procedimientos; frente a otros, en el que se realizan fuertes procesos de generalización, pero no se consideran aplicaciones.

Ha sido significativo, en la entidad argumentaciones, el menoscabo de las demostraciones en algunos manuales de la bibliografía básica, donde se utilizan los recursos informáticos.

Capítulo 6. Significados personales

6.1. Introducción

La investigación, en este capítulo, se entra en el estudio de los significados personales de los estudiantes acerca de la divisibilidad. En el marco teórico del enfoque ontosemiótico se enfatiza sobre la importancia de caracterizar tanto los significados institucionales como personales en la investigación en Didáctica de la Matemática. Así lo expresan Godino y Batanero (1994)

> Describimos, a continuación, algunas cuestiones de investigación más específicas formuladas de acuerdo a l a teoría del objeto y s ignificado desarrollada.
>
> a) Una clase de estudios primarios en Didáctica deben orientarse a determinar o caracterizar los significados institucionales, especialmente el significado en la institución matemática; es necesario ver cuáles son los usos característicos de los conceptos, proposiciones y teorías matemáticas, las situaciones problemáticas fundamentales que incorporan las notas esenciales de las nociones, las notaciones que podríamos llamar canónicas. Este análisis debe abarcar los aspectos epistemológicos y fenomenológicos de los mismos.(…)
>
> b) Respecto a los significados de los objetos personales, esto es, los relativos a profesores y alumnos, es n ecesario desarrollar procedimientos de diagnóstico que permitan, en un m omento dado, conocer el significado personal construido para el objeto o campo conceptual correspondiente. (pp. 345-346)

En esta dirección, y una vez caracterizados los significados institucionales de la divisibilidad (en los dos capítulos anteriores), abordamos, en este momento, el análisis de los significados personales de los estudiantes en esta temática, que corresponde a los objetivos O3, O4 y O5 de esta tesis doctoral.

La evaluación de los significados personales se efectuará a t ravés de dos estudios empíricos realizados a los estudiantes del Grado en Ingeniería Informática de la Universidad de Jaén: en el primero de ellos analizamos prácticas informáticas, realizadas en el laboratorio, sobre divisibilidad; el segundo estudio empírico se estructura en dos pruebas, sobre la misma situación, una escrita (en el aula de teoría) y otra informática (en el laboratorio). En ambos casos se les facilita un manual de prácticas, con el software Mathematica, como herramienta de aprendizaje (Garcia-Muñoz et al. (2006) y Ruiz (2012), respectivamente) que se encuentran en la bibliografía básica de las asignaturas de Matemática Discreta y Álgebra de la UJA.

Se ha puesto de manifiesto, en el capítulo anterior, la importancia de los procedimientos, en los manuales básicos para el Grado en Ingeniería Informática, por la posibilidad de trasladarlos al ordenador, así como por la notoriedad de las aplicaciones de la divisibilidad a la informática. También, hemos mostrado la importancia de la demostración en el proceso de generalización−particularización presente en el estudio de la divisibilidad en Álgebra Superior.

Todo lo anterior nos lleva a seleccionar un teorema sobre aritmética modular, concretamente sobre el cálculo de inversos (donde se aplica el mcd y la identidad de Bezout), que forma parte del temario de la asignatura de Matemática Discreta, y cuyas aplicaciones, en particular, en el estudio de las congruencias y, en general, a la informática son relevantes. La demostración de dicho teorema es constructiva; esto es, es posible extraer un procedimiento que podemos implementar en el ordenador.

A continuación (sección 6.2.), presentamos una investigación didáctica, que indaga en la influencia de un software científico, como Mathematica, en la enseñanza y aprendizaje de dicha demostración. Profundizamos, no sólo en el procedimiento extraído de esta demostración (apartado 6.2.1.), sino que otorgamos un lugar importante al uso que hacen los estudiantes de las hipótesis (apartado 6.2.2.), cuando el trabajo se realiza en un entorno informático. Se clasifican y cuantifican los conflictos semióticos manifestados por los estudiantes lo que nos permite caracterizar sus significados personales y determinar fenómenos didácticos que se producen.

Posteriormente, la sección 6.3. está dedicada al segundo estudio empírico, donde analizamos la instrucción, en el contexto de aritmética modular, cuando está apoyada por el uso de los recursos informáticos. En esta ocasión, la exploración de una misma situación (la propiedad conmutativa) tiene dos partes diferenciadas, pero conectadas entre ellas: una prueba escrita y otra con ordenador. De esta forma, se pretende mostrar las formas de resolución de los estudiantes y la inclinación en los métodos de trabajo elegidos, por influencia de las prácticas con ordenador.

6.2. Significados personales en prácticas informáticas sobre divisibilidad.

En esta sección se describe una investigación dirigida al análisis de la instrucción de los estudiantes del Grado en Ingeniería Informática, en un tema clave de la demostración en aritmética modular, como es el cálculo de inversos. Se han diseñado unas prácticas que realizaron en el laboratorio, empleando el programa Mathematica, 132 alumnos del primer curso del Grado en Ingeniería Informática, de la Universidad de Jaén. Las respuestas de los estudiantes han sido clasificadas y cuantificadas atendiendo tanto a los conflictos semióticos manifestados, como a la influencia que tiene dicho software científico en la enseñanza y aprendizaje de estos alumnos.

6.2.1. Descripción de la exploración

La muestra está formada por los grupos de prácticas que corresponden a la asignatura de Matemática Discreta del Grado en Ingeniería Informática (cinco, cada uno de ellos con un número máximo de 40 alumnos). Por tanto, analizamos las respuestas de 132 estudiantes, todos los asistentes en este día al laboratorio, de los 191 que aparecen matriculados, lo que supone un 70% de la población. La exploración se realizó en el mes de diciembre, al final del primer cuatrimestre del curso 2012-13.

Las cuestiones se elaboran por la doctoranda y son sometidas a juicio de expertos, sus directores y los profesores que componen el área de Álgebra de la Universidad de Jaén y que imparten docencia en esta materia. Estos últimos son autores del manual 8 (analizado en esta tesis doctoral) y que se utiliza como manual de prácticas en la asignatura Matemática Discreta.

Para la evaluación de los significados personales, se analizarán las respuestas de los estudiantes a los cuatro ejercicios de una práctica informática (anexo II). La corrección y codificación de las respuestas de los estudiantes se ha hecho siguiendo el método de otras investigaciones (Ordóñez, 2011; Ordóñez et al. 2013; Ordóñez et al., 2014; Ordóñez et al., 2017), utilizando el programa SPSS (anexo II), lo que ha hecho posible clasificar y cuantificar variables y así obtener regularidades a fin de caracterizar sus significados personales y determinar fenómenos didácticos que se producen en la enseñanza y aprendizaje del cálculo de inversos en $\mathbb{Z}_n$.

La práctica informática se basa en el siguiente resultado

<u>Teorema (Caracterización de unidades)</u>
Si $\bar{a}$ es un elemento no nulo de $\mathbb{Z}_n$, entonces:
$\bar{a}$ admite inverso en $\mathbb{Z}_n$ si y sólo si mcd{a , n}= 1

y se realiza en las dos horas de prácticas, en el laboratorio. El estudiante dispone del manual 8 (Garcia-Muñoz et al., 2006, pp.191-192) como herramienta de aprendizaje. En él se expone cómo el teorema caracteriza los elementos que admiten inverso en $\mathbb{Z}_n$ (los no nulos cuyo máximo común divisor con n sea 1). La demostración permite construir dicho inverso, a partir del cálculo de la identidad de Bezout y se expone un ejemplo de todo ello.

Posteriormente, se proponen cuatro ejercicios, todos ellos personalizados, para que no haya interacción entre los distintos alumnos, aunque con las mismas características didácticas. Cada estudiante debe realizarlos y entregarlos de forma telemática para nuestro análisis.

1. Calcular, si es posible, el inverso de la clase de tu DNI en $\mathbb{Z}_{17}$
2. Calcular, si es posible, el inverso de la clase de tu DNI en $\mathbb{Z}_{43}$
3. Calcular, si es posible, el inverso de la clase de tu DNI en $\mathbb{Z}_{DNI}$
4. Calcular, si es posible, el inverso de la clase (2x) en $\mathbb{Z}_{506}$, siendo x el número del puesto de ordenador que ocupa.

Las dos primeras situaciones se encaminan a la realización, con Mathematica, del procedimiento extraído de la demostración del teorema (lo trataremos en la sección 6.2.2.) y, las dos últimas, se han diseñado para poner de manifiesto el grado de consideración de los estudiantes por cada una de las hipótesis que intervienen en el mismo (sección 6.2.3.).

Para analizar resultados, en ambos casos se ha elaborado un análisis didáctico, a priori, de las situaciones haciendo explícitos conflictos de significado potenciales.

Giacomone (2017) realiza un análisis a priori en su investigación y manifiesta la utilidad del mismo

> El análisis *a priori* de cada una de las tareas implementadas durante toda la experiencia formativa, nos ha permitido a los investigadores y al profesor del curso, tomar conciencia de las relaciones complejas entre los distintos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas, prever

> conflictos cognitivos y gestionar las dificultades efectivas en el aula; asimismo ha sido un soporte en la puesta en común (p.10)

El EOS identifica en la actividad matemática cinco tipos de entidades u objetos primarios: situaciones-problema, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos (Godino, Batanero y Font, 2007). Así, el análisis a priori se conducirá a través de dichos objetos primarios que han sido una herramienta facilitadora en la clasificación de los conflictos semióticos potenciales.

6.2.2. Análisis didáctico de las prácticas sobre demostración

La figura 6.2.2.1. muestra el cálculo del inverso que realiza el manual 8 y que utiliza el estudiante para la ejecución de la práctica.

> Sabemos que Z_n es, en general, un anillo conmutativo. Los elementos no nulos que admiten inverso (se dirán unidades) son fácilmente identificables; en efecto,
>
> $\overline{a}$ admite inverso si y sólo si $(a, n) = 1$.
>
> Además el cálculo del inverso puede obtenerse como una consecuencia del algoritmo de Euclides. Concretamente, si $\overline{a}$ admite inverso es porque $(a, n) = 1$, y por la identidad de Bezout, $\exists\, u, v \in Z$ tales que $1 = au + nv$. Tomando clases en la igualdad anterior, tendremos $\overline{1} = \overline{au}$ pues $\overline{n} = \overline{0}$. Así deducimos que el inverso de $\overline{a}$ es la clase $\overline{u}$ siendo u el entero que aparece en la identidad de Bezout acompañando al entero a.

Figura 6.2.2.1. Construcción del inverso (Garcia-Muñoz et al., 2006, p.192)

La resolución para las situaciones 1 y 2 es similar. Se proponen las dos con objeto de asegurar, a todos los estudiantes, que puedan realizar la situación 1 o 2; esto es que su DNI sea primo relativo con 17 o 43.

Hemos estructurado en fases (de forma algorítmica) la resolución del experto, que se recoge en la tabla 6.2.2.1.

Tabla 6.2.2.1. *Fases para la resolución de la situación 1.*

Resolución del experto	Fases de la resolución
In[]:= n1=25000000; n2=17;	(F0) Selección de los datos para el programa. (F1) Introducimos los datos en el programa que calcula el mcd y la identidad de Bezout . (F2) Ejecutamos el programa accionando INTRO.
Out[]= m.c.d.{17 , 25000000}=1 m.c.m.{17, 25000000}=425000000 Identidad de Bezout: 1= 25000000·(-4)+17 ·(5882353).	(F3) Obtenemos la salida de datos del programa.
Como m.c.d.{17, 25000000}=1, entonces por la proposición, afirmamos que existe el inverso de 25000000 en Z_{17}	(F4) Aplicando la proposición y según el mcd: (F4.1) Si es 1, existe el inverso, (F4.2) Si es distinto de 1, el inverso no existe y el ejercicio termina, no se puede calcular.
El inverso de 25000000 en Z_{17} y es -4 (tomando clases en la identidad de Bezout, $\overline{17} = \overline{0}$)	(F5) En caso de que exista el inverso (mcd=1), aplicamos la demostración del teorema para elegir el número que acompaña al DNI y deducir que este es el inverso.
In[]:=Mod[-4,17]	(F6) Calculamos la clase de este número obtenido en el paso anterior, en $\mathbb{Z}_{17}$, con Mathematica, obteniendo el resto de dividir entre 17 con la función que tiene el programa (Mod[]).
	(F7) Ejecutamos Mathematica para realizar la operación accionando INTRO.
Out[]:= 13	(F8) Obtenemos el inverso.
	(F9) Comprobación (opcional).

A continuación, exponemos el análisis a priori realizado clasificando los conflictos de significado potenciales.

6.2.2.1. Análisis a priori de las tareas

Como hemos indicado, el análisis a priori se conducirá a través de las entidades primarias. Los conflictos semióticos potenciales de las entidades lenguajes, conceptos, pro posiciones y procedimientos son co munes para las cuatro situaciones propuestas en el primer estudio empírico.

Situación–problema

En ambas situaciones se analiza la construcción (figura 6.2.2.1.) para el cálculo del inverso con la ayuda de recursos informáticos. En estos casos nos interesa proponer problemas que, en el mayor número de casos admitan inverso, y esto se dará cuando el máximo común divisor sea 1.

Así, se toma como primer dato el DNI, para personalizar el ejercicio y porque es bien conocido por el estudiante con lo que será más difícil que se equivoque al teclearlo en el ordenador.

Se han seleccionado dos números primos, 17 y 43, para los que fuera difícil que el DNI fuera múltiplo de ambos.

Como paso previo a ap licar el programa Mathematica, se podría simplificar el valor del DNI, pasándolo a $\mathbb{Z}_n$, al igual que se haría sin la ayuda del ordenador. Se especifica en clase que no es necesario pues ya lo realiza el programa.

Otra característica del programa que van a u tilizar es que organiza los datos utilizando el orden natural; es decir, cuando calcula la identidad de Bezout, pone como primer término el que aparece con el dato de mayor valor absoluto:

$$1= 25000000\cdot(-4) + 17\cdot(5882353). \qquad \text{(a)}$$

Es obvio que cada DNI es mayor que 17 (43 para la situación 2) por lo que al utilizar el programa, la salida nos lo dará en el primer término de la expresión como vemos en (a).

El inverso de 250000000, e s -4, pues es quien lo acompaña en la identidad de Bezout. Sin embargo, en el ejemplo expuesto en clase, el inverso buscado aparece en el segundo término de la identidad de Bezout.

No se ha introducido en el ordenador un código que devuelva sólo el resultado del inverso tras introducir los datos, sino que se ha preferido implementar sólo la parte de cálculo más tediosa (la identidad de Bezout), así el estudiante trabaja de forma más centrada y visualiza todo el esquema demostración. Una vez localizado el inverso, hay que concluir dando su clase en $\mathbb{Z}_n$. Este paso no va a ser común para todos los alumnos pues a algunos ya les vendrá simplificado, lo que depende del valor numérico de su DNI.

Lenguaje

Teniendo en cuenta la trasposición informática (Balacheff, 1994) encontramos tres tipos de lenguaje: el propio de las matemáticas, el del programa informático con el que trabajamos (Mathematica) y el del entorno (Windows). Asociamos distintos conflictos semióticos potenciales dependiendo del tipo de lenguaje que consideremos.

• Lenguaje de las matemáticas:

Es fundamentalmente un lenguaje formal o simbólico (según la clasificación que establecimos en la sección 4.2.). Debemos remarcar que en el teorema aparecen un “si y sólo si” (bicondicional) y el cuantificador existencial, que conllevan una dificultad especial, desde el punto de vista didáctico. Si atendemos a los datos con los que trabajamos, observaremos que tenemos también un lenguaje numérico, propio de la aritmética modular.

Los conflictos semióticos potenciales para el lenguaje de las matemáticas (CSLM) que consideramos son:

$CSLM_1$: Aquellos casos en los que el alumno elige mal los datos.

$CSLM_2$: Aquellos casos en los que el estudiante realiza un cálculo previo, como lo realizaría sin ordenador, e introduce los datos simplificados.

$CSLM_3$: No se entiende la notación de clase de equivalencia y se confunde con complemento o negación (figura 6.2.2.1.1).

```
m.c.d.{17,DNI}=1
m.c.m.{17,DNI}=13xxxxxx
Identidad de Bezout: 1=DNI·(5)+ 17·(-227xxxxx).
Por tanto el inverso que nos piden es 5 negado.
```

Figura 6.2.2.1.1. Respuesta estudiante 49[7], situación 1

• Lenguaje del programa Mathematica

Mathematica es un software científico que trabaja en lenguaje de programación tipo C aunque con unas características muy especiales respecto de las sintaxis y respecto de los paquetes y funciones implementadas. Está estructurado en dos partes: Cuando iniciamos el programa, se despliegan una serie de ventanas con distinta funcionalidad, que permiten la comunicación con el usuario y con las que podemos interactuar, nos referimos a ellas como el *interfaz de usuario* o Front End. Por otra parte, para ejecutar o calcular algo, es preciso realizarlo en el *núcleo* o Kernel del programa, la parte más importante del mismo, pero no se realizará ningún cálculo mientras no se pulse la tecla INTRO.

Obtenemos, así, dos tipos de conflictos semióticos potenciales (CSLMth):

[7] Por protección de datos, se ha sustituido el número por DNI y algunas cifras por xxx

- Relativos al interfaz de usuario o Front End:

CSLMth$_1$: Corresponde a una mala utilización de las celdas de entrada de datos.
CSLMth$_2$: Corresponde a errores de sintaxis propia del Mathematica.
CSLMth$_3$: El alumno desconoce la función o paquete de los que el programa dispone para realizar los cálculos. En esta práctica, la función Mod[] se utiliza para calcular el resto de dividir dos números enteros.

- Relativos al Núcleo o Kernel:

CSLMth$_4$: Se produce cuando se bloquea el núcleo al ejecutar los datos, bien porque el programa no esté bien construido o porque la magnitud de los datos sobrepasan la memoria del ordenador.
CSLMth$_5$: Se desconoce por parte del alumno que para cargar el núcleo y realizar los cálculos es necesario pulsar INTRO.

- Lenguaje del entorno, en este caso Windows

El programa Mathematica lo utilizamos dentro del entorno Windows. Así, utilizar las ventanas y los archivos (bajárselos desde un espacio web donde los tenemos situados, guardarlos, enviarlos al directorio donde se entregan las prácticas,…) es algo propio del lenguaje que corresponde al entorno en el que trabajamos. Tenemos también que tener en cuenta las características de la red en la que nos encontramos, en este caso la red de la Universidad de Jaén.

Respecto del entorno Windows, podemos asociar los siguientes conflictos semióticos (CSLW):

CSLW$_1$: El alumno entrega la plantilla vacía.

CSLW$_2$: El estudiante entrega la práctica en un lugar equivocado o con el nombre cambiado.

CSLW$_3$: El archivo entra corrupto.

CSLW$_4$: Un mismo alumno entrega varios archivos.

Conceptos y proposiciones

Intervienen en estas entidades las definiciones de clases restos y unidad en un anillo (CE_DI), la unicidad del inverso y la identidad de Bezout (CE_DI y CE_DE, respectivamente).

Así, los conflictos semióticos potenciales asociados a conceptos y proposiciones (los hemos agrupado pues están relacionados), los notaremos CSCM y CSCMth, para los que corresponden a conceptos y proposiciones de las matemáticas o de Mathematica, respectivamente, y son:

$CSCM_1$: Se calcula el inverso del elemento cero.

$CSCM_2$: Para un elemento no nulo, se toma el cero como inverso.

$CSCM_3$: Se considera que no existe la clase de un número negativo o un número mayor que n.

$CSCM_4$: Se calculan dos inversos.

$CSCM_5$: No identifica la identidad de Bezout (figura 6.2.2.1.2.)

```
m.c.d.{DNI,DNI}-DNI
m.c.m.{DNI,DNI}-47
Identidad de Bezout: DNI-DNI·(0)+ 17·(1).
No es identidad de Bezout DNI en ZDNI
```

Figura 6.2.2.1.2. Respuesta estudiante 60[8], situación 2

$CSCM_6$: Confunde inversos en $\mathbb{Z}_n$ con divisores de cero.

$CSCMth_1$: No utiliza la función Mod[] para calcular la clase de restos del inversos.

Los conflictos que aparecen en las argumentaciones se pueden considerar también conflictos semióticos potenciales en esta entidad primaria

Procedimientos

En la tabla 6.2.2.1. se han expuesto las diferentes fases que constituyen este proceso, fases que podemos considerar como cadenas de funciones semióticas. Cada ruptura en esta cadena representa un conflicto semiótico potencial pues es necesario realizarlas todas para la correcta resolución de la situación propuesta.

Como se puede observar todos ellos han quedado descritos en alguna de las entidades primarias anteriores por lo que no utilizaremos nueva notación para representarlos. En lo que se refiere a los conflictos semióticos potenciales solamente destacaremos aquellos que no han sido ya expuestos en las otras entidades y lo representaremos por

CSP_1: No se conoce el procedimiento o se utilizan otros programas incongruentes.

Argumentaciones

Hemos distinguido dos tipos: Por un lado, las que corresponden a las matemáticas (según la clasificación de 4.2. en esta memoria). Son argumentaciones deductivas y podríamos decir que también son argumentos constructivos, pues la demostración no sólo proporciona la existencia del inverso sino que nos permite construirlo. Por otro lado, respecto del programa Mathematica, son frecuentes los argumentos por ensayo–error en el uso del ordenador (figura 6.2.2.1.3.).

Los conflictos semióticos en esta entidad (CSAM y CSAMth) son:

[8] Por protección de datos, se ha sustituido el número por DNI

CSAM$_1$: En la fase 4, a pesar de que se observa que el mcd es 1, se deduce que el inverso no existe.

CSAM$_2$: En la fase 4, deduce que no tiene inverso y sin embargo elige uno.

CSAMth$_1$: Argumenta que el segundo número es el inverso, basándose en la posición y no se fija si acompaña al DNI.

CSAMth$_2$: Se inventa el inverso a partir de datos de la identidad de Bezout que no corresponde con la construcción dada (figura 6.2.2.1.3.).

```
m.c.d.{17,DNI}=1
m.c.m.{17,DNI}=xxxxxx
Identidad de Bezout: 1=DNI·(4)+ 17·(-126xxxxx).
Por tanto el inverso que nos piden es -126xxxxx.
Por tanto el inverso es 17+4=21
```

Figura 6.2.2.1.3. Respuesta estudiante 93[9], situación 1

El siguiente apartado contiene los resultados obtenidos en la exploración y su discusión.

6.2.2.2. Resultados y discusión

Los datos de las dos situaciones han sido bien elegidos para que los alumnos pudieran calcular el inverso. En efecto, tan sólo dos alumnos de 132 no pudieron realizar la situación 1, con las mismas características didácticas de sus compañeros, al ser su DNI múltiplo de 17, pero ninguno de ellos fue también múltiplo de 43 y realizaron la situación 2 en las condiciones que pretendíamos.

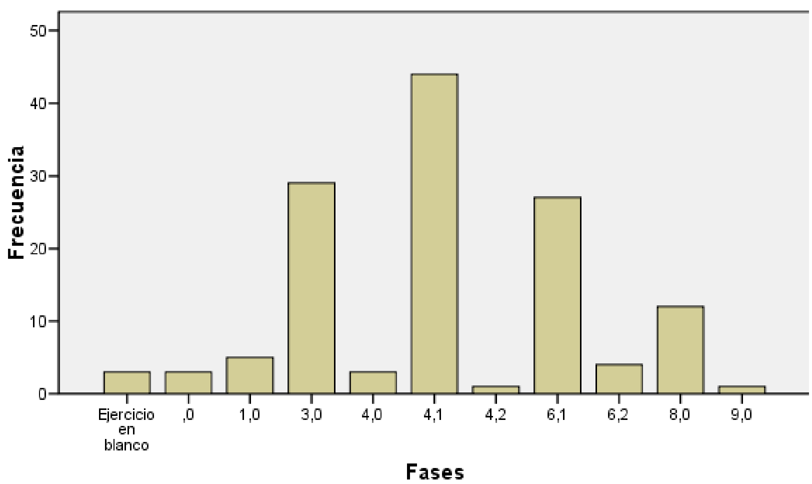


Figura 6.2.2.2.1. Fases de la demostración completadas con éxito

[9] Por protección de datos, se ha sustituido el número por DNI y algunas cifras por xxx

Los resultados podemos interpretarlos en términos de las fases descritas en la tabla 6.2.2.1.); esto es, en qué fase de la demostración, el estudiante ha tenido las mayores dificultades. No cabe duda que esta algoritmización en el proceso a través de la numeración de las fases aportará información valiosa respecto de los significados personales en el aprendizaje de esta demostración.

Para ello hemos realizado un recuento que nos indica cual ha sido la última fase de la demostración que el alumno ha realizado bien. Se considera que la demostración está correcta si, dependiendo del DNI, se ha llegado a la fase 4.2., 6, 8 o 9. El diagrama de barras de la figura 6.2.2.2.1. muestra la frecuencia de estudiantes que completaron con éxito cada fase.

En la situación 1 (respectivamente 2), el número de alumnos con la demostración correcta es 40 (41 respectivamente), de los 132 alrededor de un 31 %. Este bajo resultado nos indica la complejidad de dicho esquema de demostración.

Respecto de las fases que han completado correctamente, la de mayor frecuencia es la 4.1, con 44 alumnos en la situación 1 (45 en la situación 2). Estos casos aplican la proposición para asegurar la existencia del inverso y, sin embargo no saben elegir el inverso de forma correcta, como se explicaba en la demostración, sino que lo han asociado al elemento que ocupa el segundo lugar de la identidad; esto es, un *fenómeno didáctico* observado es que los alumnos *eligen el inverso* desde la identidad de Bezout que han obtenido con el ordenador, *basándose en la posición*, sin aplicar adecuadamente la construcción dada en la demostración.

Cabe también destacar que 29 estudiantes en la situación 1 (28 en la 2) se quedaron en una fase muy inicial de la demostración (fase 3) en la que no obtuvieron los cálculos por no haber dado al INTRO y activar el núcleo lo que interpretamos como un desconocimiento básico del programa Mathematica, con el que se ha estado trabajando durante todo el cuatrimestre, y que constituye un fenómeno didáctico relativo al *lenguaje*, cual es que, a pesar de tratarse de alumnos que llevan un cuatrimestre utilizando el programa *Mathematica,* un porcentaje estimable de ellos, alrededor del 22%, desconoce que ha de activarse el núcleo del programa para ejecutar los cálculos.

En la tabla 6.2.2.2.1. mostramos los resultados obtenidos respecto de los conflictos semióticos que emergen en las dos situaciones, clasificados según las distintas entidades primarias.

Observamos que los datos obtenidos en ambas situaciones son muy similares. Respecto del lenguaje, las argumentaciones y conceptos o proposiciones, observamos en la tabla 6.2.2.2.1., que los conflictos más significativos están relacionados con el programa Mathematica, mientras que en lo referente a los procedimientos, los conflictos semióticos con mayor frecuencia son los de las matemáticas. La baja incidencia de conflictos semióticos debido al lenguaje del entorno consideramos que se debe a la habilidad de estos alumnos en la utilización de recursos informáticos.

Tabla 6.2.2.2.1. *Cuantificación de conflictos semióticos en las situaciones 1 y 2.*

Entidades primarias		Situación 1		Situación 2	
		Frecuencia absoluta	Porcentaje absoluto	Frecuencia absoluta	Porcentaje absoluto
Lenguaje	Matemáticas	7	5,3%	7	5,3%
	Mathematica	45	34,1%	45	34,1%
	Entorno	8	6,1%	8	6,1%
Argumentación	Matemáticas	5	3,8%	4	3%
	Mathematica	46	34,8%	47	35,6%
Conceptos y proposiciones	Matemáticas	4	3%	3	2,3%
	Mathematica	35	26,5%	33	25%
Procedimientos	Matemáticas	28	21,2%	27	20,5%
	Mathematica	2	1,5%	4	3%

La entidad primaria en la que se han manifestado más conflictos semióticos (60 estudiantes en ambas situaciones) es el lenguaje. Entre ellos los conflictos relativos a las matemáticas no son significativos en esta práctica pues los datos estaban elegidos cuidadosamente; los del entorno tienen también una frecuencia baja pues el estudiante de informática está acostumbrado a distintos entornos y el tratamiento de archivos no les supone dificultad.

Dentro de las argumentaciones, el conflicto semiótico más destacado ha correspondido a $CSAMth_1$ con una frecuencia de 45 (respectivamente 46) estudiantes y que se ha derivado de la *proposición falsa* que obtiene el inverso a través de la posición (fase 4.1 vista anteriormente)

Un fenómeno didáctico que se observa es el porcentaje, en torno al 30 %, de *conflictos semióticos con el programa Mathematica* en las entidades primarias como son el lenguaje, argumentaciones y conceptos y proposiciones, frente al escaso porcentaje de conflictos semióticos en procedimientos, también con el programa Mathematica.

6.2.3. Análisis didáctico de las prácticas sobre la consideración de las hipótesis

En la enseñanza y aprendizaje de un teorema en las matemáticas, es muy importante la consideración de las hipótesis del mismo pues éstas proporcionan el ambiente, en el cual, se verifica el resultado. Estas hipótesis tienen un papel importante en el desarrollo de la demostración y, para un informático, constituyen las condiciones "indispensables" para implementar en un algoritmo que describa el procedimiento, de forma que tienen que hacerse explícitas en el mismo.

En esta investigación nos ocupamos, de nuevo, del teorema de caracterización de las unidades en $\mathbb{Z}_n$, pero bajo la óptica de sus hipótesis. La demostración es constructiva y así, el cálculo del inverso de $\bar{a}$ se realiza bajo dos hipótesis:

- La primera, $\bar{a}$ es un elemento no nulo.
- La segunda, el máximo común divisor de a y n es 1.

Para poner de manifiesto el grado de consideración de los estudiantes por cada una de las hipótesis de este teorema hemos diseñado las situaciones 3 y 4 de la exploración que corresponden a un ejemplo que no verifica cada una de dichas hipótesis. Estas son:

Situación 3. Calcular, si es posible, el inverso de la clase de tu DNI en $\mathbb{Z}_{\mathrm{DNI}}$

Situación 4. Calcular, si es posible, el inverso de $\overline{2x}$ en $\mathbb{Z}_{506}$, siendo *x* el número del puesto de ordenador que ocupa.

6.2.3.1. Análisis a priori de las tareas

En estas situaciones 3 y 4, debido a que analizamos el mismo teorema que en las situaciones 1 y 2, aunque desde la perspectiva de las hipótesis, los conflictos semióticos potenciales relativos a las entidades lenguaje, conceptos y proposiciones son los mismos. También lo es, el procedimiento utilizado en la resolución. Por ello, en esta ocasión, exponemos sólo el análisis de la situación–problema y las argumentaciones

Dentro de la entidad situación-problema, comenzaremos exponiendo la resolución del experto de la situación 3. Esto es, calcular, si es posible, el inverso de la clase de tu DNI en $\mathbb{Z}_{\mathrm{DNI}}$.

Es obvio que, como las clases en $\mathbb{Z}_{\mathrm{DNI}}$ se calculan a través del resto de dividir entre el DNI, entonces $\overline{\mathrm{DNI}} = \overline{0}$, que no tiene inverso por definición, y simplemente con hacer esta observación concluiría el ejercicio, sin tener que realizar nada en el ordenador.

En esta situación, la clase a la que hay que calcularle el inverso corresponde, para todos los estudiantes, con la del 0 y no verifica la primera hipótesis del teorema. Optamos por no poner directamente que calcularan la clase del 0 porque si utilizaran como datos n1=0 y n2=25000000, el programa daría un mensaje de error y el alumno no se plantearía qué estaba pasando. Por tanto se prefirió buscar un múltiplo del DNI que no fuera el cero.

Si el estudiante no tiene en cuenta la hipótesis primera y hubiera aplicado el esquema de demostración basado en calcular el máximo común divisor y la identidad de Bezout, a través del programa que tienen en el manual, obtendría lo siguiente (tomando como DNI=25000000):

1. Modificaría las entradas del programa con los datos n1 y n2 siguientes
   In[]:= n1=25000000;
   n2=25000000;
2. Ejecutaría el programa presionando INTRO en el ordenador.
3. Obtendría los siguientes resultados:
   Out[]= m.c.d.{25000000 , 25000000}= 25000000
   m.c.m.{25000000 , 25000000}=25000000
   Identidad de Bezout:
   25000000= 25000000·(0) +25000000·(1). (*)
4. Se debería observar que el máximo común divisor <u>no</u> es 1 y, por la segunda hipótesis, deducir que no existe el inverso de 25000000.

Si esta segunda hipótesis pasara también inadvertida para el estudiante y continuara la demostración, debería seleccionar como inverso el número que en la identidad de Bezout, acompaña a 25000000. En este caso vemos que aparecen en la combinación lineal (*) el 0 y el 1. Ante esto, caben tres posibilidades:

- Si elige como inverso el 0, es una gran contradicción pues 0 no tiene inverso.
- Si se eligiera el 1, también es contradicción pues el 1 es el inverso del 1.
- Si elige ambos 0 y 1, contradice el hecho de que el inverso es único.

Cualquiera de estas contradicciones debería llamar la atención de que algo no va bien en la demostración (y esto es, precisamente, que no se verifican las hipótesis).

En el caso de la situación 4, para el estudio de la segunda hipótesis, se propone: calcular, si es posible, el inverso de $\overline{2x}$ en $\mathbb{Z}_{506}$, siendo x el número del puesto de ordenador del aula que ocupa (x=2,..,40).

Para esta práctica, el dato n1=2x es personalizado y su clase no es la clase del 0 en Z_{506} pues $4 \leq n1 \leq 80$. Además, 2x es el representante de clase canónico, por lo que no hay que simplificarlo con operaciones previas.

El segundo dato se eligió por ser un múltiplo de 2, alto, y que no terminara en 2 para que el alumno no viera a simple vista que no es primo relativo con 2x.

La resolución del ejercicio pasa por aplicar el programa de identidad de Bezout y comprobar que el máximo común divisor es múltiplo de 2, no es 1, por tanto no tiene inverso y el proceso concluye, a pesar de que el ordenador pueda calcular la identidad de Bezout.

No se ha implementado en el ordenador toda la demostración objeto de nuestro estudio, sino que se ha preferido recurrir a él, sólo para la parte de cálculo más tediosa. Tampoco se han incluido las hipótesis en el procedimiento que hemos trasladado a Mathematica. El motivo ha sido que se pretende que el estudiante trabaje todos los aspectos de dicha demostración y quede resaltada la importancia de estas dos hipótesis en el teorema.

Las argumentaciones son del mismo tipo que en las situaciones 1 y 2. En esta entidad podemos considerar los siguientes conflictos semióticos potenciales:

$CSAM_1$: Si el mcd es 1, se deduce que el inverso no existe.

$CSAM_2$: Deduce que no tiene inverso y sin embargo elige uno.

$CSAM_3$: A pesar de que el mcd es distinto de 1, deduce que existe el inverso.

$CSAM_4$: Razona que no existe el inverso porque el DNI es primo o porque existen divisores de cero.

$CSAM_5$: Razona que no existe el inverso porque el mcd es distinto de cero.

$CSAM_6$: Comprueba si el resultado es inverso del 0.

$CSAMth_1$: Argumenta que el segundo número es el inverso, basándose en la posición y no se fija si acompaña al DNI.

$CSAMth_2$: Se inventa el inverso a partir de datos de la identidad de Bezout que no corresponde con la construcción dada.

A continuación, mostramos los resultados del análisis realizado junto con su discusión.

6.2.3.2. Resultados y discusión

En la situación 3, respecto de los datos propuestos, podemos observar que la elección de los datos n1 y n2 como el DNI de cada alumno, ha dado lugar a muy pocos errores (el 3,8% de la muestra) pues es un número muy conocido por el alumno.

Recordemos que esta situación es el tercer ejercicio de la práctica realizada en el laboratorio. En blanco aparecen 9 alumnos de los 132 de la muestra. Podemos deducir que contestan un alto porcentaje de estudiantes. Esto nos indica que es un ejercicio asequible.

La figura 6.2.3.2.1 muestra un diagrama de sectores que resume los resultados respecto de la realización correcta del ejercicio 3.

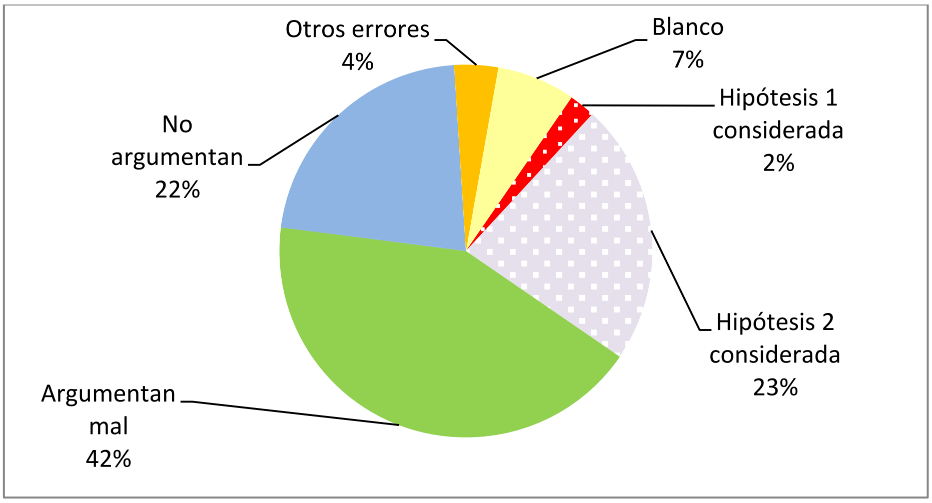


Figura 6.2.3.2.1. Resultados de la situación 3 correcta.

Tras el análisis estadístico, podemos deducir, según la figura 6.2.3.2.1., que sólo un 25% de los alumnos realizaron la situación 3 correctamente (Hipótesis 1 o Hipótesis 2 consideradas); es decir, tan sólo 33 estudiantes. De ellos: sólo 3 (el 2%), los que no tuvieron el conflicto semiótico $CSCM_1$ (calculan el inverso del 0), fueron los que consideraron la primera hipótesis del teorema. Dos de ellos concluyeron que no existe el inverso del 0 y explican que al no verificarse la hipótesis 1, el elemento no tiene inverso. No hicieron uso del ordenador para su deducción. Son los únicos que muestran una verdadera consideración de esta hipótesis en el teorema.

El estudiante 32, llega a la misma conclusión pero necesita el ordenador para deducir que el inverso no existe. Como vemos en la figura 6.2.3.2.1., comprueba que no existe el inverso basándose primero en la segunda hipótesis, que el máximo común divisor no es 1, y luego aporta que es el 0. Así, comprueba que no se verifica la hipótesis 2 y después observa que tampoco se cumple la hipótesis 1. Probablemente, este estudiante esté considerando la regla implícita de usar el ordenador al estar en un laboratorio de informática.

```
m.c.d.{25000000 , 25000000}= 25000000
m.c.m.{25000000 , 25000000}=43
Identidad de Bézout: 25000000= 25000000·(0) + 25000000·(1).
```

Al ser distinto el m.c.d. de 1 el número correspondiente a mi DNI (25000000) no tiene inverso, también decir que en $Z_{25000000}$ el número 25000000 es igual a 0

Figura 6.2.3.2.2. Respuesta del estudiante 32[10].

También se puede ver en la figura 6.2.3.2.2., del alumno 32: el mcm(25000000,25000000) = 43, en lugar de 25000000 (rodeado en rojo en la figura). Este dato corresponde a un ejercicio anterior y se ha acumulado en las variables del programa. El alumno debe saber, (si es estudiante de informática, con más razón) que deben *limpiarse las variables* al realizar un nuevo ejercicio. Eso se realizará saliendo del Kernel o utilizando las funciones adecuadas de Mathematica.

Sólo 30 personas (el 23%) deducen que no existe el inverso al considerar la hipótesis 2 pero no la hipótesis 1. Son alumnos que directamente realizan el ejercicio usando el ordenador, comprueban que el máximo común divisor no es 1 y no se paran a analizar o verificar la hipótesis 1, es decir si el elemento es cero. Aunque han realizado correctamente el ejercicio basan sus razonamientos en los cálculos proporcionados por el ordenador, no observando previamente el conjunto de hipótesis.

Observando la incidencia de los conflictos semióticos hemos obtenido los resultados que se muestran en la tabla 6.2.3.2.1. También recogemos los resultados de la situación 4 que analizaremos más adelante.

Tabla 6.2.3.2.1. *Cuantificación de conflictos semióticos en las situaciones 3 y 4.*

Entidades primarias		Situación 3		Situación 4	
		Frecuencia absoluta	Porcentaje absoluto	Frecuencia absoluta	Porcentaje absoluto
Lenguaje	Matemáticas	7	5,3%	9	6,8%
	Mathematica	119	90,2%	13	19,8%
	Entorno	8	6,1%	7	5,3%
Argumentación	Matemáticas	57	43,2%	58	43,9%
	Mathematica	0	0%	0	0%
Conceptos y proposiciones	Matemáticas	120	90,9%	1	0,8%
	Mathematica	1	0,8%	0	0%
Procedimientos	Matemáticas	29	22,2%	21	15,9%
	Mathematica	0	0%	0	0%

[10] Por protección de datos, se ha sustituido DNI=25000000

En la situación 3, los conflictos semióticos más numerosos son los correspondientes a los conceptos de las matemáticas, esto es, CSCM: lo manifiestan 120 de los 123 que respondieron. En particular, $CSCM_1$ (calcular el inverso sin considerar que es el 0) es el más frecuente, lo presentaron los 120 estudiantes. Todos ellos estiman que el cero puede tener inverso, o no observan que el cero es una clase que nunca tiene inverso, por definición, y realizan el esquema de demostración que presenta el teorema. De estos 120 estudiantes, 15 mostraron también $CSCM_2$, consideran que el cero es el inverso del cero. Aunque no ha tenido un alto índice de incidencia, hay 2 casos que manifiestan que el DNI tiene dos inversos ($CSCM_4$), el 0 y el 1, lo que nos parece, en este nivel educativo, un conflicto muy significativo.

Los conflictos del lenguaje del programa Mathematica (CSLMth) también han sido muy numerosos, concretamente 119. De ellos el más representativo ha sido $CLMth_6$, con 114 estudiantes que lo manifiestan. Corresponde a un conflicto relativo al núcleo del programa. Se puede ver en la figura 6.2.3.2.2., del alumno 32: el mcm(DNI,DNI)=43, en lugar del DNI. Este dato corresponde a un ejercicio anterior y se ha acumulado en las variables del programa.

Respecto de las argumentaciones, 57 alumnos mostraron CSAM. Se han presentado 6 tipos de conflictos semióticos ligados a las argumentaciones aunque el más frecuente ha sido $CSAM_3$ con 55 alumnos.

Es muy importante hacer notar que 85 personas, un 64% (los que argumentan mal o no argumentan) se quedaron en el paso 3 de la resolución del experto; de ellos, 29 obtuvieron los cálculos de la Identidad de Bézout con el ordenador y no son capaces de realizar ninguna argumentación.

En el análisis de la situación 4, podemos observar que la elección de los datos n1= 2x, siendo x el número de puesto de ordenador que ocupa en el laboratorio, y n2= DNI de cada alumno, ha sido acertada pues ha dado lugar a pocos errores (solamente 9 alumnos tomaron mal los datos del ejercicio).

Se incrementaron a 15 los alumnos que presentaron el ejercicio en blanco, 6 más que en la situación anterior, que puede ser debido a que es la última situación de la práctica. Aun así, el porcentaje de estudiantes que contestan sigue siendo alto, un 88,6% de la muestra, lo que nuevamente nos indica que es un ejercicio asequible.

Recordemos que esta situación analiza los alumnos que consideran la hipótesis 2 del teorema que estudiamos. Los resultados obtenidos son similares a los anteriores, aparecen 29 estudiantes (el 22% de la muestra) que consideraron la hipótesis 2, y por tanto hicieron el ejercicio bien. Como vemos según la hipótesis 2, los datos son estables respecto de los dos ejercicios y sigue siendo muy alto el número de alumnos con el ejercicio mal (66,7% frente al 68% que lo tenían mal en el problema anterior).

Observando la tabla 6.2.3.2.1., los conflictos semióticos más significativos han sido los relativos a las argumentaciones de las matemáticas, alrededor de un 44%, muy similar a la situación 1. El más frecuente es también $CSAM_3$ con 58 alumnos.

6.3. Significados personales en prácticas (escritas–informáticas) sobre un axioma en grupos

Hemos diseñado un experimento con objeto de contrastar la hipótesis 4 de esta tesis doctoral, relativa a la influencia del uso de los recursos informáticos en las demostraciones de propiedades relacionadas con axiomas en el Álgebra Abstracta.

Recurrimos al contexto de aritmética modular y definimos, en $\mathbb{Z}_n$ operaciones para trabajar los axiomas de grupo. Esta investigación analiza la influencia de un software científico como Mathematica en la enseñanza y aprendizaje de la propiedad conmutativa cuando ésta se trabaja en teoría de grupos. Para ello se han analizado realizaciones de los estudiantes a dos pruebas: una escrita y otra con ordenador. Se muestra la forma en que han abordado la resolución de las mismas extrayendo dificultades y errores, poniendo nuestro foco de atención en la faceta dual particular–general, en relación al método de trabajo elegido por los estudiantes en estas prácticas.

6.3.1. Descripción de la exploración

La propiedad conmutativa es un resultado conocido y utilizado desde las primeras etapas educativas en las que el niño se inicia en el aprendizaje de la Matemática. Sin embargo, su estudio en los distintos niveles educativos está dotado de características didácticas diferentes, señaladas por los niveles de algebrización establecidos en el EOS (Godino et al., 2015). Es en el último nivel de esta etapa, en Secundaria, en el que se realiza la “introducción” de algunas estructuras algebraicas, como la de grupo o espacio vectorial. Parece obvio que, cuando la propiedad conmutativa se enmarca en el estudio de una estructura algebraica, a nivel universitario, el nivel de abstracción aumenta y por tanto hay una mayor complejidad ontosemiótica.

Por otro lado, el conocimiento de la estructura de grupo es obligatorio para un informático por sus sustanciales aplicaciones: la máquina Enigma[11] se basa en el grupo simétrico o de las permutaciones y, el conjunto de las clases de restos módulo n, $\mathbb{Z}_n$ tiene un papel esencial en la Teoría de Códigos, y su aritmética, aparece explícitamente en programas para codificar. Todo esto hace necesario que el estudio de esta estructura en el aula de teoría venga apoyado en el trabajo con ordenador.

La exploración se dirige a estudiantes de primer curso del Grado en Ingeniería Informática, dentro de la asignatura Álgebra, impartida en el segundo semestre. Se estructura en dos pruebas (una escrita y otra con el ordenador) debido a que la enseñanza ha tenido dos partes diferenciadas: una en el aula de teoría (donde se introdujeron los distintos axiomas que componen la estructura de grupo abeliano) y otra en el laboratorio de prácticas, donde se presentan programas con Mathematica para cada una de estas propiedades, en particular, la conmutativa (figura 6.3.1.1.).

```
CONMUTATIVA[G_, operacion_] := Module[{CONTADORi, CONTADORj, conmutativa, op},
  op[x_, y_] := operacion[[Position[G, x][[1]], Position[G, y][[1]]]][[1]][[1]];
  conmutativa = True;
  CONTADORi = 1;
  While[conmutativa && CONTADORi ≤ Length[G],
   CONTADORj = 1;
   While[conmutativa && CONTADORj ≤ Length[G],
    If[TrueQ[op[G[[CONTADORi]], G[[CONTADORj]]] == op[G[[CONTADORj]], G[[CONTADORi]]]],
     , conmutativa = False];
    CONTADORj++;
   ];
   CONTADORi++;
  ];
  conmutativa
 ]
```

Figura 6.3.1.1. Propiedad conmutativa: código con Mathematica (Ruiz, 2012, p.44)

Resumimos en la tabla 6.3.1.1. los datos relativos a la muestra, tanto para la prueba escrita como para la prueba con ordenador.

Tabla 6.3.1.1. *Muestra para la situación de la propiedad conmutativa*

Estudiantes	Prueba escrita (Aula teoría)	Prueba con ordenador (Laboratorio)			
	Grupo B	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Matriculados	126	40	40	40	40
Registrados on–line	93	-	-	-	-
Presentados	61	36	40	34	33
Total muestra	**61**	**143**			

[11] Máquina electromecánica de cifrado rotativo (usada en la Segunda Guerra Mundial).

Observamos que se analizaron un total de 204 pruebas correspondientes a 61 estudiantes que se presentaron a la parte escrita en el aula de teoría y 143 alumnos en el laboratorio.

La *prueba escrita* se realizó en la hora de clase de teoría del grupo B, para lo que los estudiantes deben inscribirse on–line en un listado. Se apuntaron un total de 93 alumnos y se realizaron cuatro modelos de examen con las mismas características didácticas, que simbolizamos desde T1 a T4 (tabla 6.3.2.1.).

Al día siguiente, en el laboratorio, se realizó la *prueba con ordenador*. En este caso, para la muestra, se eligieron cuatro grupos de prácticas de los seis que componen la asignatura, pues son los que tienen su docencia en el mismo día de la semana. Cada grupo consta de 40 alumnos; la muestra se tomó de todos los que asistieron a clase y se realizaron dos opciones por grupo que notamos desde P1 a P8 (tabla 6.3.2.1.).

6.3.2. Análisis a priori de las tareas

Nuevamente y según Ordóñez et al. (2017) se utilizan las entidades primarias, propias del marco teórico.

Situación-problema

Para el estudio de la propiedad conmutativa se propone realizar el mismo ejercicio en el aula de teoría y en el de prácticas. Se trata de probar si se verifica la propiedad conmutativa en los conjuntos $\mathbb{Z}_p$ con operación $x*y = kxy$, donde k es primo relativo con p (primo que varía también según los distintos modelos) y $2 \leq k \leq 5$. Lo especificamos en la tabla 6.3.2.1.

Tabla 6.3.2.1. *Opciones de las situaciones según los grupos*

Pruebas	Teoría				Prácticas							
Modelos	T1	T2	T3	T4	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
Conjunto	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_7$	$\mathbb{Z}_{89}$	$\mathbb{Z}_{103}$	$\mathbb{Z}_{101}$	$\mathbb{Z}_{89}$	$\mathbb{Z}_{101}$	$\mathbb{Z}_{97}$	$\mathbb{Z}_{101}$	$\mathbb{Z}_{97}$
$x*y =$	2xy	3xy	4xy	5xy	2xy	3xy	5xy	4xy	2xy	3xy	4xy	2xy

Para *la prueba de prácticas*, se tomaron p, primos altos (p=89, 97, 101 o 103) para obligar a introducir la operación interna de forma analítica. Así se hacía obligado pasar el programa adecuado.

El alumno debía introducir, con Mathematica, órdenes para calcular $\mathbb{Z}_p$ y su tabla de operaciones, de la forma:

```
n=89;
G=Table[i,{i,0,n-1}]
operacion=Table[Mod[2x*y,n],{x,0,n-1},{y,0,n-1}]
```

Figura 6.3.2.1. Datos con Mathematica. Situaciones 3 y 4

y aplicar el programa CONMUTATIVA[G, operación] (ver figura 6.3.1.1.) para demostrarla; esto es,

$$a*b = b*a \text{ para todo } a,b \in G.$$

Es importante conocer que dicho programa consiste en hacer dos bucles anidados que recorren todos los elementos de G, (variables a, b) comprobando, para cada iteración, que los dos elementos a∗b y b∗a son iguales (figura 6.3.1.1.).

En esta prueba de prácticas, se consideró si el alumno dejaba en blanco el ejercicio, lo hacía bien o lo hacía mal (debido a errores que cometía al introducir los datos). En esta versión del problema con ordenador, era necesario implementar la operación interna, lo que supone entender y dominar el lenguaje de programación de Mathematica para conseguir una buena ejecución. Sin embargo, *en la prueba escrita* tomamos un primo p=7, pequeño, pero en el que tuviera que hacer operaciones y las tablas no fueran tan sencillas como para p=3 o p=5.

Se han clasificado tres tipos de resoluciones: numérica, tabular y abstracta.

.

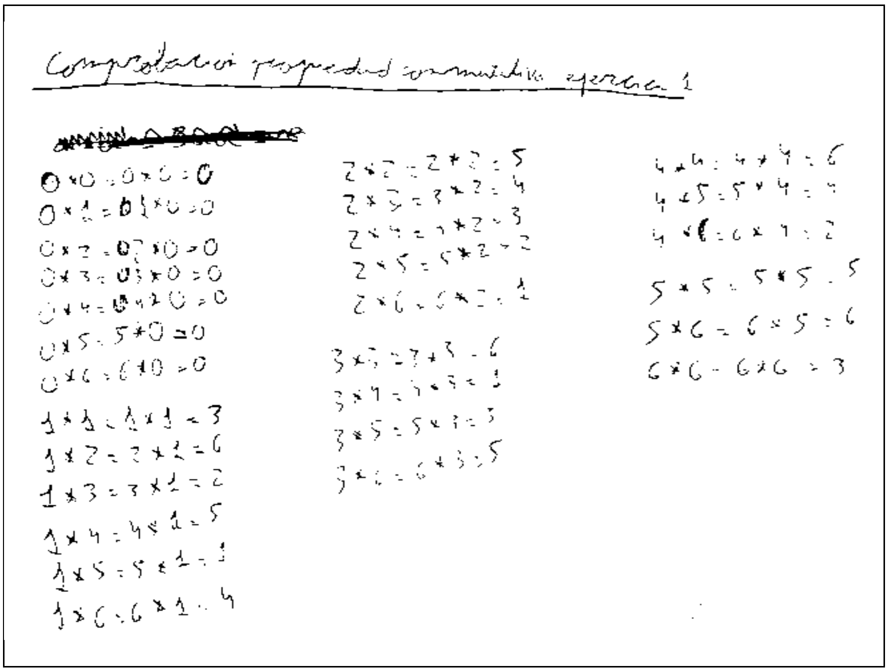
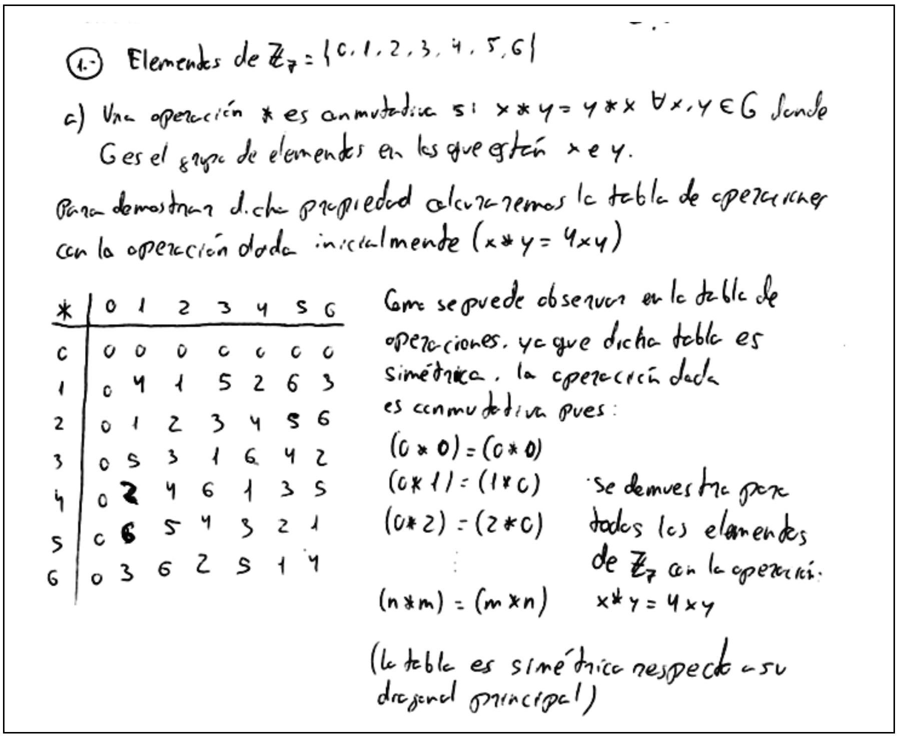


Figura 6.3.2.2. Resolución numérica. Estudiante 22

En la resolución de tipo numérico (figura 6.3.2.2.) vemos cómo el estudiante 22 realiza dos bucles anidados, como el ordenador: multiplica el 0 por todos los demás, luego el 1 con todos,…, hasta 6∗6=36, a ambos lados

.En la resolución de tipo tabular (figura 6.3.2.3.), el alumno 19 construye la tabla de operaciones y deduce la propiedad conmutativa de la simetría de la misma.


1.- Elementos de $\mathbb{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

c) Una operación $*$ es conmutativa si $x*y = y*x \ \forall x,y \in G$ donde G es el grupo de elementos en los que están x e y.

Para demostrar dicha propiedad elaboraremos la tabla de operaciones con la operación dada inicialmente $(x*y = 4xy)$

*	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	4	1	5	2	6	3
2	0	1	2	3	4	5	6
3	0	5	3	1	6	4	2
4	0	2	4	6	1	3	5
5	0	6	5	4	3	2	1
6	0	3	6	2	5	1	4

Como se puede observar en la tabla de operaciones, ya que dicha tabla es simétrica, la operación dada es conmutativa pues:

$(0*0) = (0*0)$
$(0*1) = (1*0)$ Se demuestra para
$(0*2) = (2*0)$ todos los elementos
$\vdots$ de $\mathbb{Z}_7$ con la operación
$(n*m) = (m*n)$ $x*y = 4xy$

(la tabla es simétrica respecto a su diagonal principal)

Figura 6.3.2.3. Resolución tabular. Estudiante 19

En este caso se codificó: si el alumno dejaba en blanco el ejercicio, lo hacía bien o lo hacía mal por un error al introducir los datos del conjunto o la operación.

Lenguaje

En el caso de la *prueba escrita* se estudió qué tipo de lenguaje aparecía en el ejercicio realizado por el estudiante y se clasificó como numérico, tabular y natural−vernáculo y algebraico o formal (según clasificación en 4.2. de esta memoria).

En el caso de la *prueba de prácticas*, el lenguaje utilizado es el de programación de Mathematica. Dicho lenguaje es riguroso para la sintaxis, de forma que distingue espacios, mayúsculas de minúsculas, y llaves, corchetes o paréntesis. Aquí se presentaron distintos conflictos semióticos. Por ejemplo, la operación 2xy tiene que introducirse como “2x∗y” o guardando el espacio “2x y” pues es la forma de utilizar el producto con Mathematica. También se presentaron errores en la forma de nombrar las variables. Todo esto está recogido en el diagrama de barras de la figura 6.3.3.1. que se presenta en la siguiente sección de resultados.

Conceptos

Definición 1. $\mathbb{Z}_p = \{\bar{a}: a \in Z\} = \{\ \bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\ \}$ es el conjunto de las clases de restos módulo p. La clase de a, $\bar{a}$, se calcula a través del resto de dividir a entre el número primo positivo p.

Asociado a este concepto hemos detectado, en *las dos pruebas*, distintos conflictos semióticos que corresponden a la comprensión de las clases de restos (como decir que $\bar{9} \notin \mathbb{Z}_p$), o del conjunto cociente $\mathbb{Z}_p$ (por ejemplo, no incluir la clase del 0). En el caso de la *prueba con ordenador,* hemos codificado: bien, mal o si no introduce el código para este conjunto (diagrama de barras de la figura 6.3.3.1.).

Definición 2. Un grupo se dice abeliano sii verifica la propiedad conmutativa.

Algunos estudiantes manifiestan la necesidad de definir o demostrar previamente todos los axiomas de grupo para poder trabajar la conmutativa. En Mathematica se ha implementado una orden denominada GRUPOABELIANO con la conjunción de todos los axiomas. Si se ejecuta y el programa devuelve *True,* es porque los verifica todos; sin embargo, si devuelve *False,* es porque no verifica alguno (en la situación propuesta, la propiedad del elemento simétrico). Al ocurrir esto el estudiante interpreta que esta propiedad no se verifica pues la consideran ligada a la estructura de grupo aun cuando han estudiado esta propiedad en otras estructuras algebraicas.

El concepto de operación interna requiere un cierto grado de abstracción para su utilización. Así vemos estudiantes que, cuando hacen realizaciones abstractas, describen x∗y=3xy pero y∗x=y3x, o bien confunden la operación ∗ con el producto.

Proposiciones

En ocasiones hemos encontrado que se confunde la propiedad conmutativa con otras (como asociativa u operación interna). Bajo el epígrafe incoherencias, hemos agrupado otros errores, con menos presencia, y alguna proposición falsa encontrada *en ambas pruebas*, como que si se verifica la propiedad conmutativa entonces es un "grupo" conmutativo (sin demostrar el resto de axiomas).

El uso de cuantificadores universal o existencial (∀ o ∃) no está exento de dificultades. Así, en *la prueba escrita,* en clase de teoría, han aparecido enunciados de conmutativa, que se exponen en la tabla 6.3.3.1., donde se enuncia "a∗b = b ∗a" (omitiendo que esto se verifica para cada a,b) u otros donde se cambian los símbolos ∀ y ∃.

Procedimientos

Los procedimientos empleados en la resolución de *la prueba escrita* han sido: numérico, tabular y abstracto. Los dos primeros (figura 6.3.2.1.) vienen influenciados por el trabajo de la estructura en el ordenador mientras que el abstracto proviene de la utilización de propiedades algebraicas abstractas, lo que corresponde a la faceta general.

En *la prueba de prácticas*, distinguimos en esta entidad, entre los estudiantes que realizaban bien el ejercicio, con un buen procedimiento y los que no lo realizaban correctamente. Hay que aclarar que el código del programa asigna *True*, por defecto, de forma que si hay un error en introducir los datos, aparece *True* como salida aunque el procedimiento no está bien. En este caso, los estudiantes no se han cuestionado la bondad del procedimiento dando toda la autoridad al ordenador.

Argumentos

En *la prueba escrita* encontramos argumentos que concluyen que la operación es o no conmutativa. En el caso afirmativo, no todas las argumentaciones son correctas. En la tabla 6.3.3.1. de resultados especificamos todos los casos. Algunos estudiantes argumentan, a partir de un ejemplo, que la propiedad se verifica para todos los elementos del conjunto, lo que señala la confusión entre cuantificadores universales y existenciales. Estos utilizan lo particular (el ejemplo) como general (la demostración abstracta). Medimos, también, aquellos estudiantes que, utilizando cualquier procedimiento, no argumentan y se limitan a decir "se observa que es conmutativa"

En *la prueba con ordenador,* constatamos aquellos alumnos que argumentan que es "grupo abeliano", pues verifica la conmutativa (sin estudiar el resto de axiomas).

6.3.3. Resultados y discusión

Analizando la muestra, sólo realizaron la **prueba escrita**, 61 estudiantes de 126 que forman el grupo B, un 48,4%. En el registro on–line desistió realizar el ejercicio algo más de un 26%. Este porcentaje tan bajo para la muestra, nos habla de la dificultad del tema de grupos para el alumnado.

Observando la tabla 6.3.3.1. de resultados (los porcentajes aparecen entre paréntesis y se obtienen sin contar los que lo han dejado en blanco), obtenemos que la entidad *situación-problema* nos ha permitido ver que el ejercicio ha resultado muy accesible para los estudiantes ya que sólo el 4,9% lo dejaron en blanco y el 88,5% introdujo bien los datos. Respecto a la entidad *conceptos*, se obtuvo que lo hicieron bien el 62,1%. Se presentaron conflictos semióticos en las clases de restos y $\mathbb{Z}_7$, (estas nociones fueron estudiadas en el primer cuatrimestre, y aún presentan dificultad para algunos alumnos).

De los datos que aparecen en las entidades: *lenguaje*, *procedimientos* y *argumentaciones* podemos extraer la forma en que los alumnos han trabajado la propiedad conmutativa.

Tabla 6.3.3.1. *Resultados de la prueba escrita.*

Entidades		Frecuencia (Porcentaje)	Entidades			Frecuencia (Porcentaje)
Situación-problema	Blanco	3 (4,9)	Lenguaje		Numérico	3 (5,2)
	Bien introducida	54 (88,5)			Tabular	30 (51,7)
	Mal introducida	4 (6,6)			Formal	31 (53,4)
Conceptos	Bien	36 (62,1)	Procedimientos		Numérico	7 (12,1)
	Clase restos	6 (10,3)			Tabular	25 (43,1)
	$\mathbb{Z}_p$	5 (8,6)			Abstracto	30 (51,7)
	Grupo abeliano	8 (13,8)			En blanco	0 (0)
	Operación interna	8 (13,8)	Argumentaciones		No argumenta	8 (13,8)
Proposiciones	Todo bien	41 (70,7)		Tabla	No conmutativa	2 (3,4)
	Falta $\forall$	8 (13,8)			Bien conmutativa	14 (24,1)
	Confunde $\forall$ y $\exists$	3 (5,2)			Mal conmutativa	1 (1,7)
	Con asociativa	1 (1,7)		Numérico	Bien	2 (3,4)
	Con op. interna	1 (1,7)			Un ejemplo	7 (12,1)
	Incoherencias	4 (6,9)		Deductivo	No conmutativo	3 (5,2)
					Sí, producto	24 (41,4)
					Sí, mal argumento	1 (1,7)

Los datos del *lenguaje* tabular, nos informan que el 51,7% de los estudiantes construyen la tabla de operaciones para $\mathbb{Z}_7$, a pesar de que tenía que realizar bastantes cálculos. Es claro que utilizar un lenguaje vernáculo-algebraico para razonar que verifica la propiedad, es bastante más eficiente en este caso. La suma de los *procedimientos* numérico y tabular, que nos proporciona un método de trabajo de tipo particular-concreto, derivado del uso de recursos informáticos, arroja un 55,2% frente a un 53,4% que opta por lo abstracto-general. Respecto de las *argumentaciones*: los que razonaron bien a partir de la tabla fueron un 24,1%, y, por otro lado, los argumentos deductivos correctos fueron un 41,4%. Un 13,8% no argumentó, se limita a decir "se observa", lo que nos indica la dificultad en este nivel para deducir de forma clara.

En la entidad *propiedades*, el 13,8% olvida el cuantificador universal en la definición, un 5,2% que confunde $\forall$ y $\exists$, y un porcentaje bajo confunde la conmutativa con otras propiedades. Casi el 71% no presenta dificultades o errores asociados a esta entidad.

En la **prueba de prácticas**, hemos analizado la ejecución del ejercicio con ordenador y resumimos los resultados en el diagrama de barras de la figura 6.3.3.1.

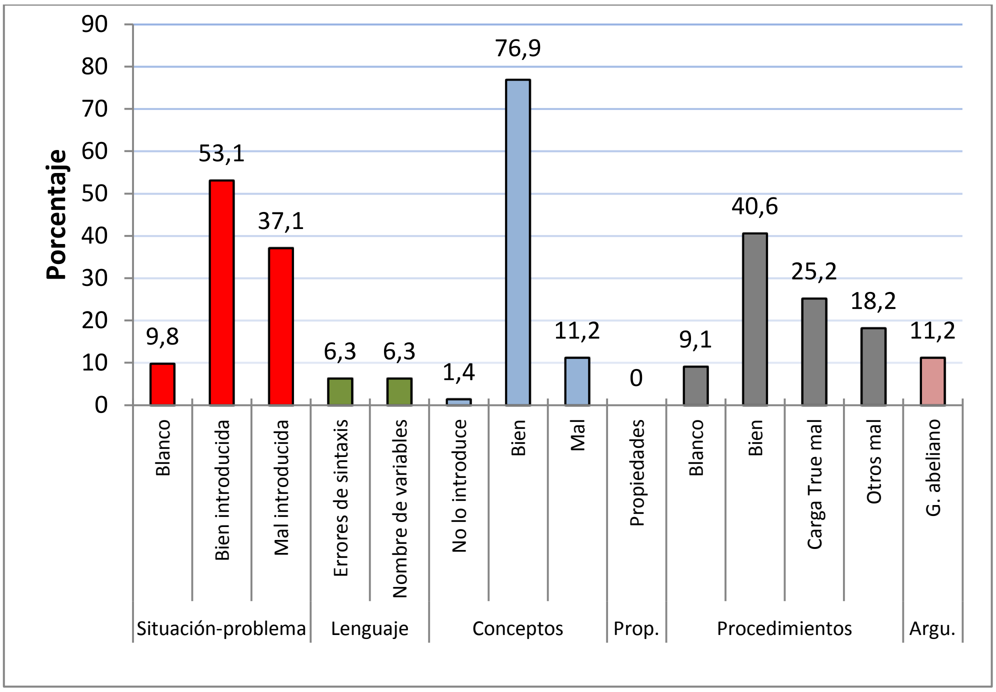


Figura 6.3.3.1. Resultados de la prueba de prácticas

Observando la entidad *procedimientos*, obtenemos que realizaron el ejercicio bien un 40,6% de los estudiantes. Teniendo en cuenta que un 9,8% lo dejaron en blanco (*situación-problema*) y un 9,1% no i niciaron los procedimientos (*procedimientos*), resulta que un 40,5% de los estudiantes mostraron errores. Lo distintos casos los hemos agrupado en dos categorías:

1. Dificultades relativas al entorno computacional
2. Dificultades relativas al contenido matemático

Es lógico que las categorías anteriores no sean disjuntas pues hay alumnos que presentan conflictos en ambas. En el primer bloque, deducimos de la entidad *situación-problema* que un 37,1% de estudiantes presenta bastantes dificultades con la introducción de los datos, en particular de la operación interna, debido a que debían comprender el lenguaje de programación de Mathematica para poder realizarlo con éxito. De la entidad lenguaje, un 6,3% tuvo errores de sintaxis y otro 6,3% tiene errores al nombrar las variables. También hay un 18,2% (*procedimientos*) que ejecuta mal el programa. Todos los estudiantes que se sitúan en este bloque muestran que el uso de un programa científico, a nivel universitario, no está exento de dificultades. No existe ningún software científico que no pr esente problemas y todos tienen determinadas exigencias o debilidades. En el caso de Mathematica, el programa tiene un lenguaje de programación muy asequible pero es muy riguroso respecto de la sintaxis.

En el segundo bloque subrayamos aquellos estudiantes que consideran que la propiedad conmutativa está ligada a la estructura de grupo (*argumentaciones*), y argumentan mal a través de la función "GRUPO ABELIANO" (el 11,2%). También un 11,2% (*conceptos*) presentó conflictos relativos al conjunto de las clases de restos. Destacamos el alumnado que descarga toda la responsabilidad en el ordenador, y si le devuelve *True*, deduce que es conmutativa, aunque esté realizando mal ejercicio. Estos constituyen un 25,2% del total (*procedimientos*).

Capítulo 7. Conclusiones

Esta memoria presenta una investigación sobre la divisibilidad en Álgebra Superior y la influencia del uso de los recursos informáticos en la enseñanza y aprendizaje de esta temática para el Grado en Ingeniería Informática. Como marco teórico de referencia hemos adoptado el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos que nos ha permitido desglosar el objetivo principal de la tesis doctoral en distintos objetivos específicos según la faceta institucional–personal propuesta en el EOS.

A continuación, exponemos las principales conclusiones obtenidas en la tesis doctoral. Para ello y, teniendo en cuenta la discusión de resultados en los capítulos 4, 5 y 6, analizamos el grado de consecución de los objetivos implicados en cada estudio, lo que nos permitirá contrastar cada una de las hipótesis involucradas.

Posteriormente, resaltaremos las principales aportaciones de nuestra investigación junto con los trabajos desarrollados hasta el momento y, por último, las líneas de investigación abiertas que pueden complementar este trabajo.

7.1. Conclusiones sobre los objetivos e hipótesis

En el capítulo 1 describimos el problema de investigación y se concluyó extrayendo el objetivo principal de nuestra investigación: *describir y analizar la influencia del uso de recursos informáticos en la enseñanza y el aprendizaje de la* *divisibilidad, para el Grado en Ingeniería Informática, identificando fenómenos didácticos y conflictos de significado, utilizando las herramientas que propone el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

La faceta institucional–personal propuesta en el marco teórico originó el desglose de objetivos que se expuso en el capítulo 3, junto con las hipótesis planteadas. A continuación, aportamos las conclusiones que se han obtenido para ellos. En primer lugar exponemos lo referido al significado institucional, que corresponde a los dos primeros objetivos.

***O1**. Analizar el desarrollo epistemológico-evolutivo del máximo común divisor, identificando elementos diferenciadores entre la época griega y la moderna, para establecer configuraciones epistémicas según los distintos dominios de definición, con objeto de caracterizar el significado institucional de referencia del máximo común divisor.*

El planteamiento de este primer objetivo corresponde a la necesidad de encontrar, en el desarrollo histórico–epistemológico del máximo común divisor, los elementos diferenciadores entre los resultados desarrollados por Euclides, en la época griega, y su evolución hasta el Álgebra Abstracta.

Hemos observado que los dominios de definición implicados en el enunciado de los objetos matemáticos intervinientes, en cuestiones de divisibilidad (divisor, primo, factorización en irreducibles, algoritmo de Euclides o identidad de Bezout), eran la clave para que, en el Álgebra Abstracta, se obtuvieran generalizaciones de dichos objetos. Así, aparecieron anillos como los DI, donde se establecieron y diferenciaron los principales conceptos implicados en la divisibilidad. Cada método de cálculo del mcd se generalizó a un dominio del Álgebra Abstracta:

- “El mayor de los divisores comunes” → DI
- “Comunes, de la factorización en primos, elevados al menor exponente” → DFU
- “El generador del ideal principal generado por los dos elementos” → DIP
- Algoritmo de Euclides: “último resto no nulo” → DE

Por tanto, hemos establecido configuraciones epistémicas en cada uno de los dominios anteriores, de forma que el estudio de estas cuatro CE ha permitido identificar los significados de los objetos intervinientes, así como las relaciones entre ellos y los procesos necesarios en la enseñanza del mcd. Un claro elemento diferenciador entre la matemática griega y el Álgebra Abstracta se encuentra, justamente, en la dualidad particular–general pues, mientras que Euclides trabaja en el ejemplar (segmentos o números naturales), en el Álgebra moderna se realiza el proceso de abstracción y se generalizan los objetos considerados "tipos" de la matemática griega lo que, a nuestra consideración contrasta la hipótesis 1.

> **H1**: Existen elementos diferenciadores en las épocas griega y moderna, respecto del máximo común divisor, que permiten, utilizando las herramientas del enfoque ontosemiótico, establecer configuraciones epistémicas según distintos dominios de definición que se describieron en la época moderna, donde la dualidad particular–general es uno de los elementos diferenciadores fundamentales.

El estudio epistemológico–evolutivo del mcd nos ha llevado al logro del primer objetivo donde, a través de las configuraciones epistémicas, hemos podido caracterizar el significado institucional de referencia del mcd en el Álgebra Superior. Dichas CE permitieron la construcción de una herramienta de análisis didáctico con objeto de abordar el objetivo ***O2.1.*** *Determinar características del significado institucional pretendido del máximo común divisor, mostrado en manuales para el Grado en Ingeniería Informática, utilizando las herramientas del EOS.*

Dicha herramienta ha consistido en la construcción de una plantilla general utilizando las entidades primarias descritas en el EOS, tras ampliar y profundizar en las clasificaciones dentro de ellas (especialmente sobre la tipología de lenguajes, conceptos y argumentaciones que se expuso en el capítulo 4). Esta herramienta ha posibilitado el análisis de ocho libros de texto recomendados en el Grado en Ingeniería Informática, de forma unificada, a través de su comparación con el significado institucional de referencia, establecido previamente en términos de CE, salvando así las dificultades relativas a la diversidad curricular de la etapa universitaria.

La elección de los manuales, tras una exploración profunda en universidades, titulaciones, asignaturas y sus guías docentes, ha permitido extraer una muestra amplia de libros de texto universitarios que consideramos representativos en el Grado en Ingeniería Informática, debido a la metodología empleada.

Además, la distinción entre bibliografía básica o complementaria, manuales del Grado en Ingeniería Informática o, de la doble titulación con Matemáticas y del Grado de Matemáticas e Informática, ha posibilitado mostrar una comparativa entre textos, de forma que los segundos son elementos clarificadores para determinar características del significado institucional pretendido en manuales considerados por el profesorado como básicos para informática.

El estudio a través de las CE ha puesto de manifiesto que se opta por manuales muy centrados en los procedimientos, lo que viene marcado por la dominancia de CE_DE y arraigados en CE_Inicial, lo que observa en la fuerte restricción en los dominios de definición de los conceptos y proposiciones. Ningún manual de bibliografía básica trató la CE_DIP lo que pone de manifiesto, por ejemplo, la falta de consideración acerca de una demostración general para la identidad de Bezout.

En los manuales básicos en informática, han sido muy significativas, las carencias de significado y la relación entre los conceptos primo e irreducible que se superan a través de CE_DI. Así, tal como indica Godino et al. (2014), se observa un cierto efecto Topace, ya que "se rebajan los objetivos de aprendizaje, por lo que se disminuye la idoneidad epistémica de la actividad matemática pretendida" (p.197).

La falta de procesos de generalización (en ocasiones sólo una generalización débil a través de los polinomios) y de particularización es un fenómeno didáctico que ha emergido en el estudio del significado institucional pretendido del mcd en manuales de bibliografía básica.

De estas dos últimas cuestiones han surgido dos conflictos semióticos potenciales que hemos denominado el conflicto de primo−irreducible y el conflicto semiótico de la generalización.

La menor formalización en el tratamiento de divisibilidad es también una característica en textos recomendados en la bibliografía básica lo que se pone de manifiesto en la variedad lenguajes (con predominio del lenguaje natural−vernáculo y el numérico) junto con la falta de notoriedad de las demostraciones. Ha sido relevante, en la entidad argumentaciones, el menoscabo de las demostraciones en manuales de la bibliografía básica, donde se utilizan los recursos informáticos. Según Harel & Sowder (2007)

> El énfasis que los profesores ponen en la justificación de la demostración desempeña sin lugar a dudas un papel fundamental en la formación de los esquemas de demostración de los alumnos. Un aforismo habitual es "Uno obtiene lo que enseña", y el currículo establecido puede variar considerablemente de un aula a otra. (p.840)

Es decir, la ausencia de las demostraciones en textos básicos suponen un conflicto de significado entre el pretendido que establece el manual y el normativo, lo que supone una importante carencia en la enseñanza, fuente de conflictos semióticos para el alumno.

La valoración de la idoneidad didáctica (Godino, Contreras y Font, 2006) y su representación gráfica (utilizando el hexágono del EOS), mostrada en la tabla 5.5.2.1., ha facilitado una visión global de todos los manuales y ha puesto de relieve la importancia de las idoneidades ecológica, interaccional, mediacional y afectiva, altas en manuales de bibliografía básica, frente a la cognitiva y epistémica (más bajas). Todo lo anterior se relaciona con la importancia que tiene en ingeniería, el hecho de que los contenidos de las matemáticas contribuyan a la formación socio–profesional y permitan conexiones intra e interdisciplinares, pues estos estudiantes utilizan la Matemática como herramienta.

Por lo tanto, hemos descrito características del significado institucional pretendido del máximo común divisor, y también fenómenos didácticos mostrados a través del análisis de los manuales analizados, que junto con distintos conflictos semióticos resaltados, a nuestro entender, permite considerar que hemos alcanzado, razonablemente, el objetivo *O2.1*.

También, de la comparativa entre manuales, se ha detectado una importante diferencia entre textos que trabajan en entornos informáticos, donde son relevantes las aplicaciones informáticas y la fluencia procedimental (también marcada por el uso del lenguaje algorítmico); frente a los otros, en los que se realizan fuertes procesos de generalización, pero no se consideran aplicaciones.

Esto pone de manifiesto tendencias de la faceta particular frente a la general; esto es, en el estudio del mcd, la historia de la Matemática mostró un cambio radical desde la matemática griega, de Euclides, al siglo XIX, con la aparición del Álgebra Abstracta. Sin embargo, el uso de la tecnología en la enseñanza de la divisibilidad y su aplicación a la informática, parece provocar en nuestro siglo, una transformación del proceso anterior hacia su inverso, con la vuelta hacia la matemática "griega", en el sentido de la preeminencia de lo particular frente a lo general, del contenido frente a la forma (Harel & Sowder, 2007).

De esta forma, hemos conseguido alcanzar el objetivo ***02.2.*** *Poner de manifiesto en qué forma afecta a la enseñanza, el uso de recursos informáticos y el tratamiento de las aplicaciones que corresponden a esta titulación, así como identificar fenómenos didácticos y mostrar tendencias en la dualidad particular – general.*

Ambos objetivos están asociados a la hipótesis

> **H2.** El uso de recursos informáticos y el tratamiento de las aplicaciones que corresponden a esta titulación, está provocando unos cambios en la enseñanza del máximo común divisor que muestra una tendencia hacia la preeminencia de lo particular frente a lo general.

que, en nuestra opinión, ha quedado refrendada.

A continuación, abordamos las conclusiones relacionadas con el estudio de los significados personales de los estudiantes, con objeto de observar la influencia del uso de los recursos informáticos en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad.

Concretamente, la investigación se orienta a contrastar la hipótesis siguiente:

> **H3.** El uso de recursos informáticos está provocando unos cambios en el aprendizaje de la demostración, en el contexto de aritmética modular, en el Grado en Ingeniería Informática.

Por lo tanto, en el objetivo ***O3*** proponemos e*xtraer y analizar los significados personales construidos por los estudiantes universitarios de primer curso del Grado en Ingeniería Informática, mediante el análisis de sus respuestas a prácticas informáticas, con el software Mathematica, y utilizando las herramientas del enfoque ontosemiótico, en el contexto de aritmética modular, como aplicación relevante de la divisibilidad en esta titulación.*

Para alcanzar este objetivo, se ha diseñado un estudio empírico que consta de dos partes:

En la primera, hemos analizado las realizaciones de los estudiantes en el aula de prácticas en torno a una demostración y que corresponde al subobjetivo. ***O3.1.*** *Extraer y analizar los significados personales de estos estudiantes acerca de una demostración, en el contexto de aritmética modular, en una práctica con Mathematica, utilizando las herramientas del EOS.*

Han emergido diferentes conflictos semióticos que hemos podido clasificar según las distintas entidades primarias que nos aporta el marco teórico EOS, y los distintos contextos debidos a la transposición informática. De esta manera hemos observado cuáles son los conflictos semióticos de estos estudiantes, lo que ofrece características sobre sus significados personales.

El análisis cuantitativo nos indica que los estudiantes no comprenden bien el esquema de demostración estudiado, porque no aplican la proposición o porque utilizan criterios erróneos, como la posición, para la elección del inverso. También, el concepto de clase de restos constituye una dificultad importante para estos alumnos.

Al trabajar la demostración con recursos informáticos, han aparecido nuevos conflictos derivados de las características del programa Mathematica, en particular asociados al lenguaje. Así, hemos podido comprobar que la trasposición informática no está exenta de dificultades.

Si nos planteamos el impacto del programa Mahematica en el aprendizaje de la demostración, diremos que, incluso teniendo en cuenta las dificultades propias de

Mathematica, es muy conveniente pues facilita la resolución y permite al alumno centrarse en la demostración evitando que se disperse con tediosos cálculos numéricos. También permite visualizar las dificultades encontradas en el aprendizaje de esta demostración, lo que nos lleva a afirmar la hipótesis asociada a este objetivo

> **H3.1.** Los significados personales de los estudiantes se ven afectados por las prácticas informáticas, con el programa Mathematica, produciéndose fenómenos didácticos.

La segunda parte se relaciona con el subobjetivo ***O3.2.*** *Determinar el uso que hacen los estudiantes de las hipótesis de un teorema sobre aritmética modular, cuando la enseñanza y aprendizaje están mediados por el trabajo con Mathematica, utilizando como marco teórico el EOS.*

En los resultados sobre los ítems 3 y 4, diseñados para la consecución de *O.3.2.*, hemos obtenido que la hipótesis 1 ha sido considerada tan sólo por un 2% de la muestra y la hipótesis 2, ha sido tenido en cuenta por un 22% de la misma. En ambos casos, el resultado lo consideramos muy bajo.

En la resolución de la situación 3 no era necesario el uso del ordenador pues el 0 no admite inverso. Solo un 2% toma en consideración esta hipótesis lo que nos lleva a pensar que la hipótesis 1 resulta una *hipótesis invisible* para los estudiantes, quienes se centran sólo en la parte central del esquema de demostración e ignoran las condiciones bajo las cuales es posible realizar dicha demostración. Estimamos que esto puede venir potenciado por el hecho de que esta hipótesis se sitúe al inicio del enunciado y no en la parte central del teorema, donde se encuentra el bicondicional.

Es importante tener en cuenta que estos alumnos se encuentran en el laboratorio de informática por lo que han podido aplicar la regla implícita de que es necesario usar el ordenador para resolver la cuestión planteada. En este sentido, la respuesta del estudiante 32 que se expone en la figura 6.2.3.2.2., viene a corroborar la autoridad del ordenador sobre sus propias consideraciones, pues no es capaz de deducir que no existe el inverso, hasta que no lo comprueba a través de los resultados que le proporciona el ordenador.

La no consideración de la hipótesis 1, les lleva a realizar argumentaciones evidentemente falsas como que el inverso es el 0, el inverso es el 1 o incluso que tiene dos inversos, sin plantearse qué está ocurriendo. El alumno, cuando el ordenador realiza los cálculos se ve enfrentado a un dilema ante el cual: o abandona el ejercicio sin argumentar (un 22%), o manifiesta graves conflictos semióticos relativos al concepto de inverso, su unicidad, divisores de cero,… que no son capaces de superar. Esto nos confirma nuevamente la prácticamente nula consideración de esta hipótesis junto con la debilidad de las argumentaciones.

El análisis de la situación 4 nos ha mostrado nuevamente que la hipótesis 2 ha sido muy poco considerada, tan sólo por un 22 % del alumnado, que fueron los que realizaron bien el ejercicio. De los restantes, alrededor del 16% realizan los cálculos con el ordenador pero no continúan con la demostración ni argumentan nada. El conflicto semiótico de argumentación $CSAM_3$, pone de manifiesto que un 43,9% argumenta la existencia de inverso a pesar de que no son primos relativos, es decir obtienen un inverso.

Las situaciones 3 y 4 del cuestionario nos han llevado a afirmar lo expuesto en la subhipotesis

> **H3.2.** Las prácticas informáticas con el programa Mathematica influyen en el papel que los estudiantes de esta titulación otorgan a las hipótesis, en el aprendizaje de una demostración matemática, en el contexto de aritmética modular.

En ambas partes de este estudio empírico hemos observado que, a la hora de trabajar en un entorno de enseñanza con Mathematica, hemos de tener en cuenta, también, todo lo relativo al lenguaje pues es notable el número de conflictos semióticos CLMth que muestran los alumnos en este objeto primario. Este estudio, realizado en la sección 6.2. (estructurado en dos partes) ha permitido corroborar la hipótesis más general

> **H3.** El uso de recursos informáticos está provocando unos cambios en el aprendizaje de la demostración, en el contexto de aritmética modular, en el Grado en Ingeniería Informática.

Para aportar una visión sobre la demostración, que no corresponda exclusivamente al trabajo en el aula de prácticas, en la sección 6.3. de esta memoria se diseñó un experimento que constaba de una prueba escrita y otra prueba informática (en el laboratorio) para una misma situación. Se pretende mostrar la forma en que los estudiantes abordan la resolución y los métodos de trabajo elegidos en el estudio de la propiedad conmutativa, en el contexto de aritmética modular, debido al entorno de trabajo informático. Este experimento corresponde al objetivo ***O4.*** *Analizar el cambio de los esquemas de demostración (abstracta a empírica*[12]*) en las respuestas relativas a demostraciones en un axioma en el contexto de aritmética modular, mediada por un entorno informático; así como la clasificación de diversos conflictos semióticos y las relaciones entre dichos esquemas de demostración.*

[12] En el sentido de Harel & Sowder (2007)

De los resultados obtenidos en esta investigación, hemos observado que un tanto por ciento reducido de alumnos se registraron para hacer la prueba escrita y lo atribuimos a la dificultad del tema de grupos y al nivel de abstracción requerido por los estudiantes en esta temática; por lo que nos habla de su complejidad ontosemiótica.

En lo que respecta al aprendizaje, hay un tanto por ciento elevado de estudiantes que realizan correctamente la cuestión. Además, a t ravés de los procedimientos (apoyado por los resultados del lenguaje y las argumentaciones), se ha podido observar que más de la mitad de los estudiantes (el 55,2 %) eligen un de sarrollo tabular y/o numérico (como el realizado con los recursos informáticos), lo que les permite abordar la resolución desde lo particular, mientras que el 53% aborda la resolución desde lo general. Estimamos que esto es debido al impacto del entorno computacional en el que se ha desarrollado la instrucción.

En el análisis de esta prueba de evaluación hemos obtenido que si bien el estudio de la conmutatividad, en el aula de prácticas no e stá exento de dificultades, aporta una mayor riqueza a la hora de seleccionar el método de desarrollo (numérico, tabular o abstracto) mostrando una tendencia hacia lo particular–concreto, en la prueba escrita, que corrobora la hipótesis

> **H4.** Los esquemas de demostración axiomático–modernos[13], se enriquecen cuando se utilizan los recursos informáticos pues permiten trabajar, de forma empírica, en demostraciones de Álgebra Abstracta.

Por último, respecto de la dificultad del uso del lenguaje simbólico, a nivel universitario, nos planteamos el objetivo ***O5.*** *Analizar el sentido más concreto que toman algunos cuantificadores lógicos abstractos, que se utilizan en la demostración matemática, como son el universal y el existencial, con el uso del programa Mathematica.*

De la exploración acerca de la propiedad conmutativa, hemos obtenido que las prácticas informáticas facilitan el uso y comprensión de los cuantificadores, lo que muestra el bajo porcentaje de conflictos en la entidad proposiciones, donde sólo un 5% confunde los cuantificadores universal y existencial y un 13,8 % omite "$\forall$" en sus realizaciones en la prueba escrita. El uso del lenguaje informático transforma el cuantificador universal en un buc le "For desde 1 hasta n". Así, éste toma un nue vo sentido sustituyendo lo abstracto que supone el símbolo "$\forall$" por lo particular del proceso iterativo For, potenciando la faceta particular frente a l a general. Estas conclusiones nos hacen pensar que hemos alcanzado el objetivo O5 que, a s u vez, contrasta la hipótesis

[13] En el sentido de Harel & Sowder (2007)

H5. A través de las prácticas informáticas con el programa Mathematica los cuantificadores universal y existencial han tomado un nuevo sentido, al potenciar la particularización frente al proceso de generalización, lo que ha mejorado su comprensión y uso.

Todo lo anterior, tanto en el estudio de los significados institucionales como personales acerca de la divisibilidad, nos induce a pensar que, puede estar produciéndose un giro desde lo general, propio del Álgebra Superior, hacia lo particular, que ahora posibilita el ordenador. Hemos detectamos una inclinación hacia lo particular o concreto en las formas de trabajo seleccionadas por los estudiantes, y una carencia importante en los procesos de generalización–particularización mostrada en los manuales recomendados para el Grado en Ingeniería Informática que afectan a la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Superior.

En particular, el uso del lenguaje simbólico se ve afectado por ello y aparecen conflictos semióticos relativos al lenguaje, más cuando se ponen en juego nuevos elementos lingüísticos relacionados con la informática (pseudocódigos, lenguajes de programación, relativo al entorno Windows, etc.) que con llevan distintas dificultades, como hemos mostrado.

Las carencias argumentativas detectadas en el análisis de manuales así como las dificultades de los estudiantes en demostración, manifestadas a través de los estudios empíricos, nos llevan a reflexionar sobre la enseñanza y aprendizaje de la demostración y cómo utilizar los recursos informáticos para desarrollar la competencia argumentativa, a nivel universitario. Según Harel & Sowder (2007)

> En las matemáticas griegas, la forma de la demostración no puede desvincularse, completamente del contenido del contexto espacial o cuantitativo. Por el contrario, en matemáticas modernas una demostración es válida en función de su forma únicamente. (p.823)

Restringir fuertemente los dominios de definición en el estudio de la divisibilidad afecta, entre otras cosas, a las demostraciones que, en el caso de los enteros, utilizan propiedades, como el principio de inducción, que corresponden a las características particulares en $\mathbb{Z}$ (el contenido) y no a la forma (métodos más generales, en estructuras abstractas), por lo que no pueden desvincularse de los números enteros. En este sentido, la influencia del entorno informático en demostración, en divisibilidad, nos lleva también a la vuelta hacia la matemática "griega", esto es, la preeminencia de del contenido frente a la forma.

Estos mismos autores afirman

> Las facilidades que ofrece la tecnología ha suscitado preocupación porque puede generar un gran número de ejemplos de forma natural y ello podría minar la sensación de necesidad de esquemas de demostración deductivos en los alumnos. Afortunadamente, varios estudios han mostrado que, con una planificación y enseñanza cuidadosamente elaborada durante un periodo de tiempo, es posible el progreso hacia esquemas de demostración deductivos en entornos tecnológicos, donde se dan las deseadas conjeturas y definiciones. (p.854)

Así, es necesario tomar conciencia de la tendencia hacia lo procedimental y, en general, hacia la particularización, para poder replantearse la utilización de recursos tecnológicos con el objetivo de trabajar el proceso de generalización. En esta dirección, hemos realizado investigaciones acerca de la influencia del software Mathematica en la enseñanza y aprendizaje de una demostración (Ordóñez et al., 2013), y el papel que juegan las hipótesis en ella (Ordóñez et al., 2014), así como la dualidad particular–general en el estudio de axiomas (conmutativa) mediado por entornos computacionales (Ordóñez et al., 2017), relacionadas con esta tesis doctoral.

No podemos ignorar el hecho de que la muestra en los estudios de investigación presentados en esta memoria corresponde a estudiantes de ingeniería informática, por lo que el uso del ordenador es propio de su proyecto educativo y contribuye a su formación socio–profesional, lo que nos muestra que, a nivel ecológico, el tipo de análisis realizado y, la investigación en Didáctica de las Matemáticas sobre la enseñanza y aprendizaje en entornos computacionales para estos estudiantes, es muy recomendable.

7.2. Principales aportaciones del trabajo y propuestas educativas

La Didáctica del Álgebra Superior, en entornos informáticos, es un campo poco explorado y la temática es novedosa en Didáctica de las Matemáticas.

Una primera aportación de esta tesis doctoral es la determinación del significado institucional de referencia del máximo común divisor y otras nociones de divisibilidad en Álgebra Superior (primo, irreducible, unidades, asociados, etc.) que está constituido por las diferentes configuraciones epistémicas, identificadas a través de dominios del Álgebra Abstracta (como DI, DFU, DIP y DE) y que describimos en el capítulo 4.

Basándonos en estas CE, hemos podido construir una herramienta para el análisis de manuales, que salva la gran variedad curricular propia de la etapa educativa universitaria y proviene también de profundizar en las clasificaciones establecidas en las distintas entidades primarias.

Asimismo, hemos podido caracterizar el significado institucional pretendido del mcd en manuales para el Grado en Ingeniería Informática estableciendo una comparativa con el significado institucional de referencia.

La metodología empleada para la elección de la muestra formada por ocho manuales universitarios, a través del Ranking de Shanghái de las mejores universidades del mundo, las titulaciones, asignaturas, guías docentes y bibliografías (básicas y complementarias), con contenidos de divisibilidad, es totalmente novedosa y se utiliza con la idea de buscar manuales representativos para esta titulación, en España.

Una nueva aportación proviene de la adaptación y aplicación de los criterios de idoneidad en manuales, proporcionados por el marco teórico del enfoque ontosemiótico. El contraste entre las distintas representaciones de las idoneidades didácticas de los manuales se ha presentado de forma original, dado que visualiza muy bien las diferencias didácticas, algunas de ellas notables, entre manuales y que son de gran utilidad en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad, tanto para el profesorado que imparte la materia como para el estudiante. Podríamos decir que dicha representación gráfica es “una fotografía didáctica del manual”.

También hemos aportado el análisis de los procesos de generalización-particularización que intervienen en cada texto, y que podemos considerar, inherentes al estudio del Álgebra, en el nivel universitario.

Consideramos novedosa la investigación sobre la influencia del uso de un software científico, como Mathematica, en los procesos de instrucción, en divisibilidad, a través del análisis de prácticas informáticas y, también, de su comparación con pruebas escritas para una misma situación. Concretamente, se ha trabajado en el contexto de aritmética modular tanto para una demostración, como de las consideraciones de las hipótesis, o del estudio de la propiedad conmutativa en grupos.

En los dos estudios empíricos para determinar los significados personales de los estudiantes, hemos obtenido muestras amplias: de 132 estudiantes para la investigación en la sección 6.2. y de 204 pruebas analizadas (61 estudiantes en la prueba escrita y 143 en el laboratorio) en la sección 6.3. E ste número es debido a que el colectivo de estudiantes de ingeniería informática es numeroso y está creciendo debido al auge de las ciencias de la computación, lo que proporciona mayor fiabilidad a los resultados obtenidos en las exploraciones.

7.2.1. Implicaciones para la enseñanza

La investigación en Didáctica proporciona información muy importante para la docencia. En mi caso, como profesora del área de Álgebra de la Universidad de Jaén, esta tesis doctoral me ha aportado una visión nueva sobre los acontecimientos que ocurren en la enseñanza y aprendizaje a nivel universitario, que ha originado algunas reflexiones o sugerencias, que se derivan tanto de la faceta institucional mostrada en esta tesis doctoral, como de la faceta personal. A continuación, exponemos algunas implicaciones para la enseñanza derivadas de esta investigación.

En el estudio de los significados institucionales, la metodología empleada para la elección de manuales ha requerido la exploración de las guías docentes de las asignaturas.

En relación a la bibliografía, hemos encontrado gran variabilidad en cuanto al número de libros recomendados. Han aparecido asignaturas cuyas bibliografías, no incluían ningún manual con contenidos de divisibilidad a pesar incluir estos temas, o también, hemos encontrado libros de ediciones obsoletas. El cuidado y la actualización de las bibliografías creemos que es una cuenta pendiente en la Universidad, sobre la que debe reflexionar el profesorado que imparte la docencia.

Respecto de los recursos web de las páginas de las universidades, estos deben ser más accesibles en la búsqueda de información, tanto para el profesorado como para el estudiante. En ocasiones, no ha sido sencillo encontrar las guías docentes o planes de estudios. De todas formas, debemos decir que desde el año 2014, en que comenzamos a explorar páginas web de distintas universidades, a este curso 2017-18, en que se ha realizado el último examen, ha habido una mejora considerable en las páginas webs de las universidades, que continuamente se van actualizando y mejorando.

También, hemos apreciado disparidad, en las memorias RUTC de los grados, en cuanto a descriptores, competencias, etc. de forma que pensamos que los centros de cada universidad, deberían orientar parte de su trabajo en realizar un estudio profundo de las memorias de los grados, para solventar estas cuestiones.

Los resultados ofrecidos en el análisis de cada manual son muy valiosos para el profesor, pues se han puesto de manifiesto carencias significado o conflictos semióticos potenciales, muy importantes para la enseñanza. Además, este análisis ha resaltado, a través de las entidades primarias, otras informaciones acerca de los ejemplos, procedimientos, aplicaciones, lenguaje algorítmico, etc. existentes o no en el libro de texto. Especialmente interesante, es la valoración de la idoneidad en los manuales pues, de la observación de la misma, el profesor puede complementar, por ejemplo, un manual con una alta idoneidad ecológica e idoneidad epistémica media (manual 1), con otro con idoneidad epistémica mayor (manual 2) y obtener así mejores bibliografías, en el sentido de equilibrar las debilidades en unos manuales con las fortalezas de otros.

La investigación acerca de los significados personales de los estudiantes ha puesto de manifiesto las dificultades respecto del lenguaje simbólico y en demostración.

La trasposición informática muestra cómo el uso de un software científico no está exento de dificultades. En esta investigación se han puesto de manifiesto bastantes conflictos en el lenguaje de Mathematica, debido a la sintaxis (espacios, mayúsculas y minúsculas, etc). La elección del programa informático para el apoyo en la instrucción debe realizarse sopesando los conflictos semióticos potenciales, con objeto de incidir en ellos y suavizarlos o contrarrestarlos.

También se ha puesto de manifiesto la dificultad en las demostraciones que presentan estos estudiantes de ingeniería informática, así, como la baja consideración de las hipótesis en la práctica informática realizada. La carencia argumentativa que se ha detectado en manuales de la bibliografía básica puede tener repercusiones en el aula, de forma que el profesor de matemáticas no desarrolle suficientemente la competencia argumentativa, en estudiantes de ingeniería.

Harel & Sowder (2007) afirman

> Algunos profesores tienden a ver la demostración como un obj etivo apropiado únicamente para la educación matemática de una minoría de alumnos, sin considerar la demostración y justificación un elemento central de las matemáticas en el aula, como se ha insistido numerosas veces desde las autoridades en educación matemática (p.852)

Conscientes de esta carencia, necesitamos mejorar nuestras intervenciones en el aula provocando el discernimiento en el estudiante, a través de un trabajo orientado a actividades que promuevan la argumentación. Los recursos informáticos pueden ser utilizados en esta dirección, como lo muestra los experimentos presentados en el capítulo 6 de esta memoria.

Carvajal, Font & Giménez (2016) afirman

> El uso de las TIC está provocando cambios significativos que influyen de manera substancial a la hora de explicar los diversos contenidos que se han de impartir en las diferentes etapas educativas. Estos cambios introducen nuevas necesidades formativas así como nuevas posibilidades metodológicas que hacen que el papel de profesores y alumnos difiera del tradicionalmente establecido en el último siglo. (p.2)

En esta dirección, el profesorado universitario debe hacer un esfuerzo complementando su formación con objeto de no perderse del ritmo vertiginoso de crecimiento de internet, redes sociales, etc. y adoptar “nuevas posibilidades metodológicas” que ofrece la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. La Didáctica tiene un papel muy relevante en innovación pues permite emitir juicios de pertinencia, adaptación y eficacia sobre los cambios que se producen.

Particularmente, los profesores del área de Álgebra de la UJA editamos el manual 8, que ha sido sometido a análisis en esta investigación. Para las prácticas informáticas analizadas en la sección 6.2. se ha utilizado este libro como herramienta de aprendizaje. Las consideraciones didácticas extraídas de la investigación en esta tesis doctoral, se van a plasmar en un proyecto de innovación docente de la Universidad de Jaén, solicitado con objeto de obtener medios humanos y técnicos que permitan lograr una actualización dinámica del manual 8, utilizando recursos audiovisuales en un espacio web accesible y de gran difusión, de forma que contribuyan a la mejora en la enseñanza y aprendizaje de esta asignatura.

El proyecto se titula “Actualización dinámica de manuales con recursos audiovisuales según investigaciones en Didáctica de la Matemática”, fue presentado dentro del plan PI2D-UJA 2016 y aprobado en la resolución de 20 de abril de 2017 (vicerrectorado de Enseñanzas de Grado, Postgrado y Formación Permanente) con código PID32_201617, con dos años de duración. El equipo está formado por los autores del manual, la doctoranda (también coautora) y sus directores de tesis. Ha sido por tanto una colaboración interdepartamental entre Didáctica de las Ciencias y Matemáticas.

Para alcanzar los objetivos propusimos una metodología que consta de dos partes diferenciadas: la primera, corresponde a la actualización de contenidos del texto escrito aplicando las investigaciones didácticas realizadas, mientras que la segunda está encaminada a la construcción del soporte técnico, tanto de audiovisuales como de su alojamiento en internet.

A. Para la actualización de contenidos del texto escrito, en formato papel, propusimos:

A.1. Modificar el texto y los programas a versiones más actuales de Mathematica (11 o superiores, si existen en los dos años de duración del proyecto) y añadiendo otros nuevos. Esto recaerá en los profesores del área de Álgebra.

A.2. Aportar conclusiones extraídas de investigaciones en esta tesis doctoral que analizan y describen el impacto del uso del programa Mathematica en esta temática de Matemática Discreta para alumnos del Grado de Ingeniería Informática. Para ello:

A.2.1. Haremos una revisión y mejoras en el texto en la línea de las tendencias investigadas en los manuales recomendados por otras universidades. Concretamente, en la faceta institucional en esta memoria se analiza la forma en que se abordan temas de Matemática Discreta y sus aplicaciones a la Informática, en textos recomendados para los estudios del Grado en Ingeniería Informática.

En esta línea incluiremos un mayor número de ejercicios (de exámenes de teoría y prácticas del Grado) adjuntando su resolución, en formato web, con el uso de medios audiovisuales.

A.2.2. Propondremos modificaciones que ayuden a corregir errores y conflictos semióticos descritos a través del análisis de las prácticas realizadas por los alumnos en el capítulo 6 y

A.2.3. Evaluaremos los cambios antes de hacerlos definitivos, a través de un análisis de los significados personales de los alumnos, realizado mediante un cuestionario en el aula de prácticas. Las conclusiones serán abaladas por una publicación en Didáctica de la Matemática.

Para abordar el trabajo en el soporte técnico apropiado, elaboramos un cuestionario Google que ponía de manifiesto las preferencias del alumnado, tanto respecto del entorno web como del tipo de ejercicios que les gustaría. Se ha realizado, en octubre de 2017, a todos los estudiantes matriculados en la asignatura Matemática Discreta, en la hora de prácticas de la asignatura.

Consta de 16 ítems: las primeras preguntas iban encaminadas a constatar los formatos web más utilizados por este alumnado. Aportamos aquí los resultados que corresponden a las preguntas de la 13 a la 16:

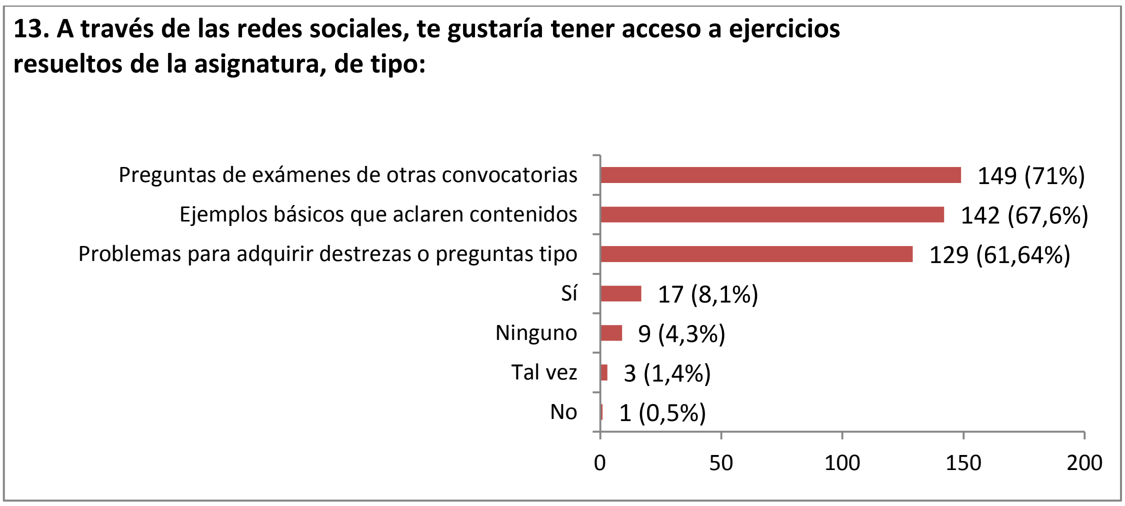


Figura 7.2.1. Ítem 13 cuestionario Google

En el ítem 13 (figura 7.2.1.), se obtuvieron 210 respuestas. Los problemas más demandados fueron los problemas de exámenes, junto a ejemplos básicos y ejercicios de destrezas y preguntas tipo.

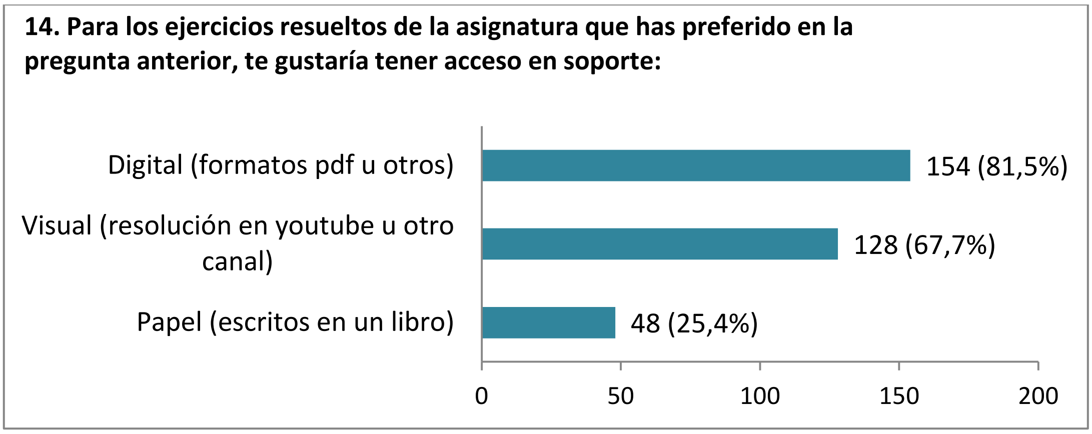


Figura 7.2.2. Ítem 14 cuestionario Google

De 189 respuestas obtenidas en el ítem 14 (figura 7.2.2), el más demandado es formato digital, un 81,5 % frente al formato escrito (25%) y un 67,7% demanda la propuesta de recursos audiovisuales. Interpretamos que prefieren el formato pdf frente a los vídeos, debido a que la modalidad de examen no es la oral.

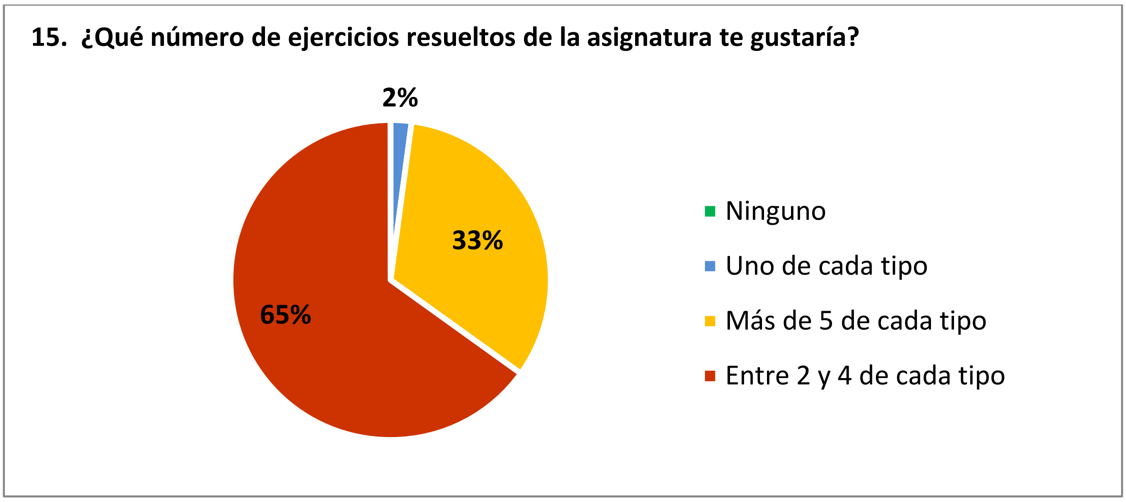


Figura 7.2.3. Ítem 15 cuestionario Google

Para el ítem 15, se obtuvieron 189 respuestas, destacando un número pequeño de ejercicios de cada tipo, entre 2 y 4, lo que explicaban por la falta de tiempo.

Casi el 95% de 189 repuestas recogidas en el ítem 16 (figura 7.2.4), prefieren la resolución en el momento o al día siguiente, como máximo.

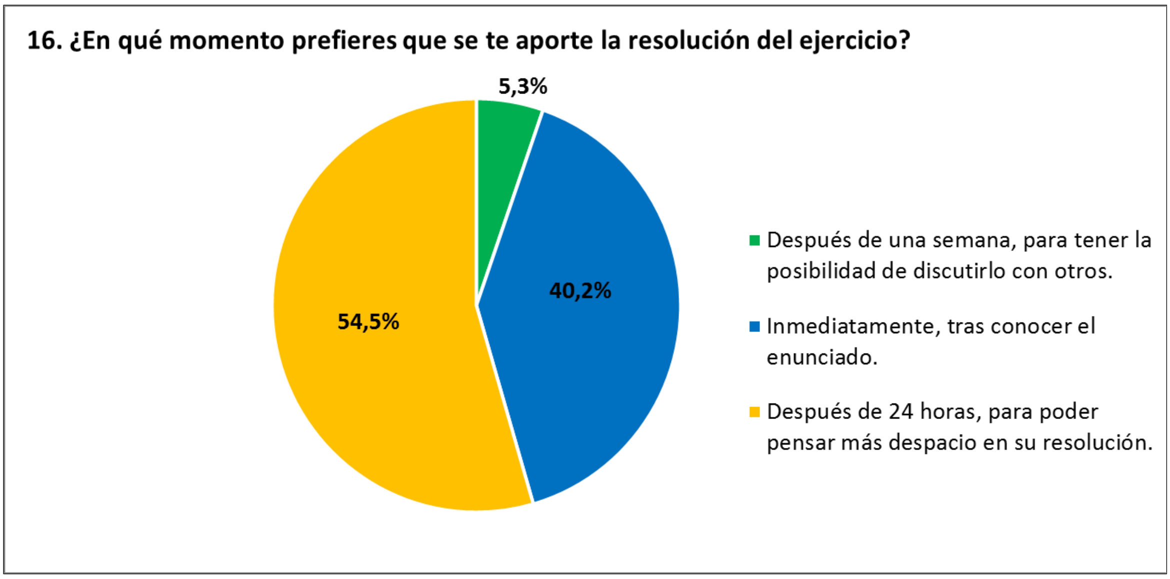


Figura 7.2.4. Ítem 16 cuestionario Google

De las consideraciones obtenidas de los estudiantes, decidimos:

B. La creación de un entorno web que consta de dos partes:

B.1. Una página web en la que alojar una guía del manual, que se enlace con las páginas web de los profesores de la asignatura y facilite el seguimiento de las prácticas por parte del estudiante durante todo el cuatrimestre, a través del móvil o la tableta.

B.2. Una página en Facebook del libro en el que se incluyan videos explicativos de la resolución de ejercicios. A los recursos audiovisuales en Facebook se accederá también a través de un código QR, que se situará en cada capítulo. A través de él se accederá a exámenes de otros años del Grado en Ingeniería Informática, tanto en formato escrito (pdf u otros) como con el software Mathematica..

La construcción del soporte técnico, correrá a cargo de un becario del Grado en Ingeniería Informática (que haya solicitado las prácticas Ícaro de la UJA) y la participación de estudiantes voluntarios, en la grabación de los vídeos.

El equipo de investigadores de Didáctica de la Matemática interviene en el diseño del cuestionario Google y la aplicación de las investigaciones didácticas, así como el análisis didáctico encaminado a la evaluación de cambios en el manual. La coordinación del proyecto está cargo de la doctoranda.

Las reflexiones teóricas en cuanto a la Didáctica de la Matemática, y en particular, del Álgebra, han puesto de manifiesto un proceso de cambio, respecto al soporte de manuales para docencia, en el Grado en Ingeniería Informática, mostrando una clara tendencia en las preferencias de estos estudiantes hacia soportes digitales y recursos audiovisuales, en lugar del formato tradicional.

7.3. Trabajos desarrollados

De esta investigación se han derivado diferentes trabajos presentados en congresos y jornadas, así como publicaciones que exponemos cronológicamente:

Ordóñez, C, Ordóñez, L. y Contreras, A. (2013). Significados personales acerca de una demostración en Teoría de Números con Mathematica. Presentado en el XVII, Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática en Bilbao, España.

Ordóñez, C, Ordóñez, L. y Contreras, A. (2014). Las hipótesis en Álgebra, cuestiones didácticas a considerar en un entorno con Mathematica. Presentado en el XVIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, en Salamanca, España.

Ordóñez, C, Ordóñez, L. y Contreras, A. (2015). La divisibilidad en manuales para estudiantes en Ingeniería Informática. Presentado en el XIX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, en Alicante, España.

Ordóñez, C., Ordóñez, L., Contreras, A. y Ruiz, J. F. (2017). La dualidad particular–general en el estudio de la propiedad conmutativa en ingeniería informática. Presentado en el Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, Universidad de Granada, España.

Ordóñez. C., Ordóñez, L. & Contreras, A. (s.f.). La enseñanza del máximo común divisor en el Grado en Ingeniería Informática mediada por un e ntorno computacional. Manuscrito no publicado. Enviado a AIEM el 24 de marzo de 2018, en revisión.

Ordóñez, C., Ordóñez, L., Contreras, A., García-Muñoz, M. A. y Ruiz, J. F. (s.f.). Un proyecto de innovación didáctica e investigación enfocado en la Didáctica del Álgebra Superior mediada por recursos tecnológicos. Presentado en el Primer Workshop sobre Entornos Tecnológicos en Educación Matemática, celebrado en Valencia, España, el 8 de marzo de 2018. Manuscrito no publicado. Enviado a Magister (monográfico sobre entornos tecnológicos) el 28 de mayo de 2018, en revisión.

7. 4. Líneas de investigación futuras

De cara al futuro tenemos líneas de investigación abiertas tanto en la faceta institucional como en la personal.

En estos momentos estamos avanzados en la redacción de una publicación sobre los resultados del análisis a los ocho manuales que hemos presentado en el capítulo 5 de esta tesis doctoral. También, en la línea del análisis de manuales, nos gustaría explorar el currículo de primaria y secundaria acerca del mcd, que ya hemos iniciado con CE_Inicial, y analizar la bibliografía de estas etapas educativas en torno a la divisibilidad, con objeto de determinar conflictos de significado y fenómenos didácticos.

Respecto de los significados personales y la consideración de las hipótesis, hemos obtenido resultados que nos han llamado la atención sobre hipótesis invisibles y su relación con el bicondicional. Tenemos en mente una exploración, para estudiantes que cursen Álgebra en el segundo semestre, ahondando sobre estas *hipótesis invisibles* y la superación de las dificultades mostradas en esta investigación. Quizás la teoría de grafos pueda ser un buen contexto para este trabajo.

El objetivo 5 de esta tesis doctoral, en torno al lenguaje simbólico, puede completarse con el estudio de los axiomas de neutro y simétrico, en grupos, donde los cuantificadores universal y existencial entran en juego con mayor interés y dificultad. Ya tenemos recogida la muestra y está pendiente de análisis y obtención de resultados.

Por otro lado, está la necesidad de suscitar en el alumno los procesos de generalización–particularización debido a su relación intrínseca con el Álgebra Abstracta y que se ha puesto de manifiesto en esta memoria. ¿Cómo provocar en el estudiante de informática la necesidad de abstracción? ¿Puede facilitar el uso de los recursos informáticos dichos procesos? Pensamos que sí, y quizás la idea pueda estar en pasar de lo finito a lo finito muy grande para llegar a lo infinito. Debemos pensar en el diseño de estudios empíricos que analicen este proceso de generalización de una forma gradual.

Por último, la demostración ha sido un tema transversal a lo largo de esta tesis doctoral. Hemos comentado que el proyecto de innovación que tenemos concedido en la UJA, titulado “Actualización dinámica de manuales con recursos audiovisuales según investigaciones en Didáctica de la Matemática”, termina en abril de 2019. Aún están pendientes tareas para la nueva edición del manual e implementar en la enseñanza las investigaciones de la sección 6.2. Se ha hecho una propuesta de cambio que estamos evaluando a través de un cuestionario que realizamos en diciembre de 2017, en el laboratorio de prácticas. De los resultados que obtengamos, tomaremos decisiones para hacer los cambios más pertinentes y que permitan superar, en gran parte, los conflictos semióticos obtenidos. Así, está prevista una publicación, en Didáctica, que recoja todo esto, asumiendo los compromisos adquiridos en el proyecto.

El primer trimestre del próximo curso se abordará la grabación de vídeos y la construcción de recursos web para alojarlos, poniendo así en juego nuevas metodologías para la enseñanza y aprendizaje de Matemática Discreta a nivel universitario. Es obvio que hay que ser cautos y es necesaria mucha investigación en Didáctica de las Matemáticas, para evaluar estas metodologías.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarado, A y González, M.T. (2010). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática. Estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias,* 28 (1), 73-84.

Alvarado, A y González, M.T. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 16 (1), 37-63.

Artigue, M. (2015). Tecnologías de la información y de la Comunicación y Aprendizaje basado en la Investigación: ¿Qué sinergias?. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.). *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas,* 17-27.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. Bishop, E. Mellin-Olsen, y J.van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth teaching,* 175-192. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Balacheff, N. (1993). La transposition informatique, un nouve au problème pour la didactique des mathématiques, En Artigue et al. (eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble: La pensée sauvage éditions. 364-370

Balacheff N. (1994). Didactique et in telligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 14*(172), 9-42.

Biggs, N.L. (1994). *Matemática Discreta*. Barcelona: Vicens Vives.

Bosh, M., Gascon, J. & Nicolás, P. (2018). Questioning Mathematical Knowledge in Different Didactic Paradigms: the Case of Group Theory. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4*(1), 23-37.

Bujalance E., Bujalance, J. A., Costa A. F., Martínez, E. (2005). *Elementos de Matemática Discreta.* (3ª ed.). Madrid: Sanz y Torres

Camacho,V., Sánchez J.J. y Zubieta, G. (2014) Los estudiantes de ciencias, ¿pueden reconocer los argumentos lógicos involucrados en una demostración? *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 117-138.

Carvajal, S., Font, V., & Giménez, J. (2016). Caracterización de la competencia digital en la formación de profesores de matemáticas. *Revista del Congrés Internacional de Docència Universitària i Innovació (CIDUI), (3).* Recuperado el 23 de febrero de 2018 de http://cidui.org/revistacidui/index.php/cidui/article/view/895/856

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique

Codes, M. (2015). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional*. (Tesis doctoral). Universidad de Salamanca, Salamanca, España. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de https://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/76452/1/DDMCE_CodesValcarceM_ComprensionConceptosEntornoComputacional.pdf

Cohn, P.M. (2000). *Classic Algebra*. (3th ed.). England: Wiley and Sons.

Conejo, L. (2015). *Análisis histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los teoremas de límites y continuidad. De la Ley General de Educación a la Ley Orgánica de Educación*. (Tesis doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid, España. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de http://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/16309/1/Tesis854-160226.pdf

Conejo, L., Arce, M., & Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 51-71.

Contreras, A., Font, V., García, M., Luque, L., Marcolini, M., Ordóñez, L., Ortega, M y Sánchez, C. (2005). Aplicación del programa Mathematica a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. *IX Simposio de la SEIEM*, 271-282.

Contreras, A. y Ordóñez, L., (2005). Análisis de manuales en el marco teórico de la TFS. Aplicación a la integral definida. *Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (V CIBEM)* Oporto. Portugal.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Relime, 9*(1), 65-84.

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 28*(3), 367-384.

Contreras, A. y Ortega, M. (2009). Fenómenos didácticos emergentes de las prácticas realizadas con el programa Mathematica. *Comunicación en el Grupo de Investigación de Didáctica del Análisis. XIII Simposio de la SEIEM*. Manuscrito no publicado.

Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Edson_Crisostomo_tesis.pdf

Del Pino-Ruiz, J. y Estepa, A. (2017). Análisis del tratamiento de la dispersión en libros de texto de 3º y 4º de ESO. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/delpino.pdf

Distéfano, M. L. (2017). *Procesos de significación para algunos símbolos matemáticos en estudiantes universitarios*. (Tesis doctoral). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, Argentina. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_Distefano.pdf

Distéfano, M. L., Pochulu, M. D. y Font, V. (2015). Análisis de la complejidad cognitiva en la lectura y escritura de expresiones simbólicas matemáticas. *Journal of Research in Mathematics Education, 4*(3), 202-233.

Dorronso, J. y Hernández, E. (1996). *Números, grupos y anillos*. Madrid: Addison-Wesley y la Universidad Autónoma de Madrid.

Dubinsky, E. & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, y J Kapput (Eds), *Research in collegiate mathematics education IV*, 239-286.

Filloy, E., Puig. L. & Rojano, T. (2007). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach.* (Vol. 43). Springer Science & Business Media.

Font, V. & Contreras, Á. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*(1), 33-52.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa, 8* (1), 67-98.

Font, V. y Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Recuperado el 23 de febrero de 2018 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/font.pdf

García-Merayo, F. (2015). *Matemática Discreta*. (3ª ed.) Madrid: Paraninfo.

García-Muñoz, M.A., Ordóñez, C. y Ruiz, J.F. (2006). *Métodos Computacionales en Álgebra para Informáticos. Matemática Discreta y Lógica*. Jaén: Universidad de Jaén.

García-Muñoz, M. A.; Ruiz, J. F. y Ordóñez, C. (2007). Comprobación computacional de conjeturas en estucturas finitas. *Avances en Matemática Discreta en Andalucía. V Encuentro Andaluz de Matemática Discreta*, 213-222

García-Muñoz, M. A.; Ruiz, J. F. y Ordóñez, C. (2009). Estructuras algebraicas finitas. Implementación de las estructuras de retículos y álgebras de Boole finitas con Mathematica. *III Congreso de Mathematica en España*. Salamanca. España

García-Muñoz, M. A.; Ruiz, J. F.; Ordóñez, C.; Castro, I.; Quesada, J. M.; Rodríguez, C. (2012). Una herramienta colaborativa en el proceso de aprendizaje-enseñanza de las matemáticas universitarias. *Actas de las III Jornadas sobre Innovación docente y adaptación al EEES en las titulaciones técnicas. INDOTEC 2012*, 139-142. Recuperado el 23 de febrero de http://www.ugr.es/~indotec/documentos/actas12.pdf

Gea, M. M. (2014). *La correlación y regresión en bachillerato: análisis de libros de texto y del conocimiento de los futuros profesores.* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de http://www.ugr.es/~batanero/documentos/Tesis_GEA.pdf

Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2014). La regresión en los textos de bachillerato de ciencias sociales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII*, 365-373.

Gea, M. M., Lopez-Martin, M. M. & Roa, R (2015). Conflictos semióticos sobre la correlación y regresión en los libros de texto de Bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8,* 29–49.

Giacomone, B. (2017). Análisis ontosemiótico de una tarea de modelización matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Recuperado el 23 de febrero de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/giacomone.pdf

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11,* 111-132.

Godino, J. D. (2014). Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas. Recuperado el 23 de febrero de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf

Godino, J. D. (2017). Construyendo un s istema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino.pdf

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (3),* 325–355.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10*, 7-37.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción Matemática.* Universidad de Granada. Recuperado el 28 de febrero de 2018 de http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/parte_i_un_enfoque_ontosemiotico_del_conocimiento_y_instruccion_matematica.pdf

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *XXVII* (2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque onto-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8*, 117-142.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y de la intrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.

González, Y., Garín, M., Nieto, M., Ramirez, R., Bernabeu, J., Pérez, M. N., Perez, B, Morales, F. y Vidal, G. (2015). *Matemáticas 6 Primaria. Savia. Primer trimestre.* Andalucia: Ediciones S.M.

Hanna, G., de Villiers, M., & International Program Committee. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM*, *40*(2), 329-336.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a Project of National Council of Teachers of Mathematics*, *2*, 805-842.

Hausberger, T. (2018) Structuralist Praxeologies as a Research Program on the Teaching and Learning of Abstract Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4*(1), 74-93.

Johnson, R. B., y Onwuegbuzie, A. (2004). Mixed methods research: a research paradigm whose time has come. *Educational Research, 33*(7), 14-26.

Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días***.** (Alfonso Casal et al., trad.). Madrid: Alianza Editorial. (Obra original publicada en 1972).

Kumar, A. & Kumaresan, S. (2008). Use of mathematical software for teaching and learning mathematics. *In Proceedings of ICME11*, 373-388.

Lacués, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los sistemas matemáticos de símbolos. *Didac, 55-56*, 29-35.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18* (1), 49-76.

Ministerio de Educación (2009). *Resolución de 8 de junio de 2009, de la Secretaría General de Universidades, por la que se da publicidad al Acuerdo del Consejo de Universidades, por el que se establecen recomendaciones para la propuesta por las universidades de memorias de solicitud de títulos oficiales en los ámbitos de la Ingeniería Informática, Ingeniería Técnica Informática e Ingeniería Química* (12977). Recuperado el 23 de febrero de https://www.boe.es/boe/dias/2009/08/04/pdfs/BOE-A-2009-12977.pdf

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* (2222). Recuperado el 23 de febrero de https://www.boe.es/boe/dias/2014/03/01/pdfs/BOE-A-2014-2222.pdf

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato* (37). Recuperado el 23 de febrero de https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf

Ordóñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las Matemáticas de 2º de Bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, Jaén, España. Recuperado el 23 de febrero de 2018 d e http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Lourdes_Ordo%C3%B1ez.pdf

Ordóñez, C, Ordóñez, L. y Contreras, A. (2013). Significados personales acerca de una demostración en Teoría de Números con Mathematica. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII*, 411-420.

Ordóñez, C, Ordóñez, L. y Contreras, A. (2014). Las hipótesis en Álgebra, cuestiones didácticas a co nsiderar en un entorno con Mathematica. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII*, 493-502.

Ordóñez, C, Ordóñez, L. y Contreras, A. (2015). La divisibilidad en manuales para estudiantes en Ingeniería Informática. En C. Fernández, M. Molina y N Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, 431-440.

Ordóñez, C., Ordóñez, L., Contreras, A. y Ruiz, J. F. (2017). La dualidad particular–general en el estudio de la propiedad conmutativa en ingeniería informática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado el 23 d e febrero de 2018 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/ordo%C3%B1ez.pdf

Ordóñez. C., Ordóñez, L. & Contreras, A. (s.f.). La enseñanza del máximo común divisor en el Grado en Ingeniería Informática mediada por un entorno computacional. Manuscrito no publicado.

Ordóñez, C., Ordóñez, L., Contreras, A., García-Muñoz, M. A. y Ruiz, J. F. (s.f.). Un proyecto de innovación didáctica e i nvestigación enfocado en la Didáctica del Álgebra Superior mediada por recursos tecnológicos. Manuscrito no publicado

Parra-Urrea, Y. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis Ontosemiótico de los libros de texto chilenos: el caso de la noción de función. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/parra.pdf

Puig, L. & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study*, 187-223.

Recio, A.M. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España. Recuperado el 23 de febrero de 2018 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/AMRecio_tesis_doctoral.pdf

Recio, A.M. & Godino J.D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematics proof. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 83-99

Rosen, K.H. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones*. (5ª ed.). Madrid: Mc Graw- Hill.

Ruiz, J. F. (2012). *Métodos computacionales en álgebra, matemática discreta: grupos y grafos*. (2ª ed.). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Vera, A., Vera, F.J. y García M.A. (1992). *Álgebra Abstracta Aplicada*. Murcia: Antonio Vera López y otros.