PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

ROGÉRIO DOS SANTOS LOBO

A abordagem dada à taxa de variação no livro didático do ensino médio e a sua relação com o conceito da derivada no livro didático do ensino superior

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2017

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

ROGÉRIO DOS SANTOS LOBO

A abordagem dada à taxa de variação no livro didático do ensino médio e a sua relação com o conceito da derivada no livro didático do ensino superior

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, para exame de defesa para obtenção do título de **DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,** sob a orientação do **Professor Doutor Saddo Ag Almouloud.**

São Paulo

2017

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de foto copiadora ou eletrônicos.

***Assinatura*________________________________ *São Paulo e Data*________________**

Dedico este trabalho aos meus pais, Luiz Otávio Dias e Neuza Floripes dos Santos Dias, que são as pessoas mais importantes da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus e à minha família.

À **PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO, PUC – SP,** e ao professor **Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud** pelo trabalho de orientação, competência, confiança, dedicação e paciência para que este trabalho fosse desenvolvido.

Aos membros da banca de qualificação (Prof. Dr. Wagner Pommer, Prof. Dr. Marcos Celestino, Profª. Dr.ª Ana Lúcia Manrique e ao Prof. Dr. Gabriel Loureiro Lima) e ao meu grupo de pesquisa - Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA)- pelas valiosas sugestões e contribuições para este trabalho.

A todos os funcionários e ao corpo docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da **PUC-SP**, que foram muito importantes para a minha formação.

Aos amigos do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, **Gilberto Januário, Roseli e Kátia,** que estudaram comigo na **PUC-SP** durante os dez semestres do curso.

Agradeço ao **Prof. Dr. Nílson José Machado** que contribui com esta pesquisa por meio de encontros na Faculdade de Educação da USP, pela indicação de textos e artigos.

Finalmente, agradeço ao meu professor de História, da época do ensino fundamental, **Prof. Me. José Rogério** e aos amigos e colegas de trabalho, **Prof. Guitel L. Novaes** (**Prof. Guido**), **Prof. Wagner Dias da Silva**, **Prof. Me. João Chagas e Prof. Me. Dulceval Andrade** que me incentivaram a fazer o Doutorado na **PUC – SP** e apresentaram-me textos, sugestões e ideias que auxiliaram o pesquisador-aluno no desenvolvimento desta tese.

O Autor

RESUMO

Refletimos, constantemente, como um assunto que utiliza a ideia fundamental de Variação é fonte de vários problemas no que diz respeito ao conceito inicial de Derivada. Elaboramos as seguintes questões de pesquisa: Quais significados dos conceitos de Variação e de Taxa de Variação são dados em Livros Didáticos do Ensino Médio e Ensino Superior? Como tais significados são organizados em Livros Didáticos do Ensino Médio e Ensino Superior? Qual significado de Derivada pode ser construído a partir de Livros Didáticos de Ensino Superior? E para respondermos a essas indagações, traçamos o seguinte objetivo geral "investigar os significados da Variação, da Taxa de Variação e da Derivada que podem ser construídos a partir da abordagem de Livros Didáticos do Ensino Médio e Ensino Superior" e o desdobramento deste objetivo apoia-se no alcance dos seguintes objetivos específicos: Estudar as abordagens dadas aos conceitos de Variação e da Taxa de Variação em Livros Didáticos de Ensino Médio, mais especificadamente no capítulo de Geometria Analítica – Estudo da Reta; Analisar as articulações entre registros os registros de Representação Semiótica e os critérios de Idoneidade Epistêmica para a compreensão da Taxa de Variação como aplicações de Coeficiente Angular, Cálculo de Velocidades, Funções Médias da Economia (Receita Média, Lucro Médio, Custo Médio), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem); Analisar as articulações entre os registros de Representação Semiótica e os critérios de Idoneidade Epistêmica para a compreensão da Derivada e a enfatizando como Taxa de Variação, enquanto aplicações do Coeficiente Angular, Cálculo de Velocidades, Funções Marginais da Economia (Receita Marginal, Lucro Marginal e Custo Marginal), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem). Para estas análises, construímos quadros que empregam nossos referenciais teórico-metodológicos: a Análise de conteúdo de Bardin, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, o Sentido Holístico da Derivada e os critérios de Idoneidade Epistêmica. Nas considerações finais, respondemos nossas questões de pesquisa. As análises dos livros didáticos do Ensino Médio permitiram concluir, entre outras, que os autores desses livros exploram as ideias fundamentais da Variação e Taxa de Variação como aplicação, principalmente, do Coeficiente Angular e a organização dos significados é feito no sentido de apenas, entre tantos, um de nossos indicadores. Na introdução da Derivada a abordagem deste conceito é feita, entre tantas, como aplicação do Coeficiente Angular e na organização dos significados não é utilizando um dos nossos indicadores.

Palavras-chave: Derivada; Taxa de Variação; Livro Didático; Significado Parcial da Derivada; Registros de Representação Semiótica;

ABSTRACT

Reflected on how a subject that uses the fundamental idea of Change is the source of various problems in regard to the initial concept of the Derivative. We elaborated the following research questions: What explanations of the concepts of Change and Rate of Change are given in Secondary School and Higher Education Textbooks? How are these explanations organised in Secondary School and Higher Education Textbooks? What meaning of Derivative can be constructed from Higher Education Textbooks? Moreover, in order to answer these questions, we seek the following general objective "to investigate the meanings of Change, Rate of Change and Derivative that can be constructed from the Secondary School and Higher Education Textbooks." The advancement of this objective is based on the achievement of the following specific objectives: To study the approaches given to the concepts of Change and Rate of Change in Secondary School Textbooks, more specifically in the Analytical Geometry - Study of the Tangent Line chapter; To Analyse the links between entries Semiotic Representation entries and the criteria for Epistemic Suitability for understanding the Rate of Change as applications of the Angular Coefficient, Calculation of Speeds, Average Economic Functions (Average Revenue, Average Profit, Average Cost), Direct Reasoning and the Rate of Relative Change (Percentage); To Analyse the links between Semiotic Representation entries and the criteria for Epistemic Suitability for understanding the Derivative and emphasising it as Rate of Change, alongside the applications of the Angular Coefficient, Calculation of Speeds, Marginal Economic Functions (Marginal Revenue, Marginal Profit and Marginal Cost), Direct Reasoning and Relative Change Rate (Percentage). For these analyses, we construct tables that use our theoretical-methodological references: Bardin's Content Analysis, Duval's Registers of Semiotic Representation Theory, the Holistic Meaning of the Derivative, and the criteria for Epistemic Impartiality. In the final considerations, we answer our research questions. The analyses of the Secondary School textbooks enabled us to draw a conclusion, among others, that the authors of these books explore the fundamental ideas of Change and Rate of Change mainly as an application of the Angular Coefficient and that meaning is constructed in alignment with only one of our various indicators. In the introduction to the Derivative, this concept is dealt with, among other approaches, as an application of the Angular Coefficient and the construction of meanings does not use any of our indicators.

Key words: Derivative; Rate of Change; Textbook; Partial Mean*in*g of the Derivative; Registers of Semiotic Representation;

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

> O número imag*in*ário é um elegante e maravilhoso recurso do espírito humano, quase um anfíbio entre sendo e não sendo. **Leibniz**

O relatório De Olho nas Metas (2011), conclui que 89% dos estudantes chegam ao final do Ensino Médio sem aprender o mínimo desejado em Matemática, colocando o Brasil na 57ª posição no ranking mundial de aprendizagem dessa disciplina em uma lista de 65 países contemplados pelo Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA).

Esta situação se reflete na qualidade do ensino da Matemática em todas as etapas escolares, mais especificadamente, na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior.

Este panorama serviu como uma das motivações para pesquisarmos a Derivada com ênfase na Taxa de Variação[1], mais especificadamente a abordagem dada à Taxa de Variação no Livro Didático do Ensino Médio e à sua relação com o conceito da Derivada no Livro Didático do Ensino Superior.

Dessa forma, analisamos como o conceito de Taxa de Variação e as ideias de Variação se manifestam em quatro livros didáticos de Matemática do 3º ano do Ensino Médio, em particular no capítulo do Estudo da Reta - Geometria Analítica. Fizemos também a análise de como quatro livros Didáticos do Ensino Superior introduzem o conceito de Derivada e se essa introdução é feita dando ênfase a Taxa de Variação.

Em relação à organização da escola brasileira o Artigo 35 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) 9.394/96:

> O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades: I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos; [...] (BRASIL, 1996, p.11).

Ainda de acordo com o Artigo 35 da LDB, o governo mudou o status do Ens*in*o Médio determinando que esse grau de estudo seja a etapa final da

---

[1] *A Taxa de Variação Instantânea muitas vezes é chamada apenas Taxa de Variação.*

educação básica dos brasileiros, vinculando os concluintes ao mundo do trabalho e à prática social. Na Lei anterior nº 5.692/72, o 2º grau caracterizava-se por meio de uma dupla função: dar continuidade aos estudos em nível superior ou habilitar o aluno para o exercício de uma profissão técnica.

O Ministério da Educação (MEC), norteado pelos princípios da LDB 9.394/96, aponta para a necessidade da contextualização do ensino em todos os níveis incentivando o raciocínio matemático e a capacidade de apreender. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM - (BRASIL, 2000) e as diretrizes do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), por exemplo, apresentam visões concordantes que orientam a contextualização para os universos do trabalho, da cidadania, da cultura, da tecnologia e da ciência, sob o foco principalmente da interdisciplinaridade.

Os PCNEM

> [...] organizam o aprendizado de suas disciplinas, ao manifestarem a busca de interdisciplinaridade e contextualização e ao detalharem, entre os objetivos educacionais [...] uma série de competências humanas relacionadas a conhecimentos matemáticos (BRASIL, 2000, parte III, p.4)

A proposta do PCNEM e a revisão bibliográfica apresentada no capítulo I apontam na direção de uma prática pedagógica fundamentada na problematização e construção dos conhecimentos por parte dos estudantes para que possam conceituar a Derivada como Taxa de Variação *In*stantânea.

O ENEM, criado em 1998, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), avalia o desempenho dos alunos concluintes ou já concluintes do Ensino Médio:

> [...] o ENEM tem caráter voluntário e dele podem participar, mediante inscrição, os concluintes do ensino médio, no ano de realização do exame, e também os que já o concluíram em anos anteriores, em qualquer de suas modalidades. É direito de o participante realizar o ENEM quantas vezes for de seu interesse (BRASIL, 1998, p.4)

A fundamentação teórico-metodológica do ENEM revela a *in*tenção de *in*tervir diretamente no ens*in*o e aprendizagem dos conteúdos e práticas do Ens*in*o Médio:

> O ENEM tem, a*in*da, papel fundamental na implantação da Reforma do Ens*in*o Médio, ao apresentar, nos itens da prova, os conceitos de situação-problema, *in*terdiscipl*in*aridade e contextualização, que são, a*in*da, mal compreendidos e pouco habituais na comunidade escolar [...] (BRASIL, 2005, p.8).

Salientamos que nesse ponto da contextualização da Matemática - e traçando um paralelo para o tema central da nossa pesquisa: Derivada por meio da Taxa de Variação - o papel do professor é de fundamental importância. De acordo com Dias (2009):

> O professor de Matemática é um elemento decisivo na complexa atividade que é ens*in*ar Matemática. Na def*in*ição das suas práticas pedagógicas, compete a ele *in*tervir, consciente ou *in*conscientemente, as suas concepções e conhecimento profissional, que orientem as suas ações, desde grandes opções relativas ao currículo, por exemplo, a aspectos mais particulares da preparação e condução de aulas (DIAS, 2009, p.6).

Neste trabalho, analisamos como a Taxa de Variação e as ideias da Variação se manifestam nos Livros Didáticos do 3º ano do Ensino Médio (capítulo de Geometria Analítica – Estudo da Reta) e a ênfase dada a ela na definição de Derivada no Livro Didático do Ensino Superior (capítulo de introdução à Derivada).

Conjecturamos que o conceito de Taxa de Variação e das ideias da Variação presentes no Livro Didático do 3º ano do Ensino Médio não é conectado com o conceito de Derivada por meio da Taxa de Variação no Livro Didático do Ensino Superior, apesar dos alunos revelarem bons índices de acertos em questões que envolvem a Taxa de Variação nas provas do ENEM (fato que descreveremos nas considerações finais). Isso posto, essas ideias de variação poderiam ser resgatadas com o objetivo de iniciar o estudo da Derivada com ênfase na Taxa de Variação na universidade.

Os quatros livros do Ensino Médio analisados foram escolhidos por serem Livros indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio – PNLEM 2015, os livros do Ensino Superior foram escolhidos por constarem em programas/ementas de diversas universidades brasileiras. Discorreremos mais detalhadamente em relação a essas escolhas desses materiais no capítulo II.

As análises foram realizadas tendo por base os referenciais teórico-metodológicos dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009), da Análise de Conteúdo de Bardin (2014), o Sentido Holístico da Derivada e os critérios de Idoneidade Epistêmica para o estudo da Derivada de Godino *et al* (2013). Esses referenciais são aprofundados no Capítulo II – Referencial Teórico-Metodológico.

Alguns dados estatísticos, das provas do ENEM, foram usados para relatar o índice de acerto obtido pelos estudantes em questões, de Matemática, que envolvem as ideias da Taxa de Variação e da Variação e assim, enfatizar que ao ingressarem no ensino superior, tais concepções são assuntos que eles já deveriam dominar e que poderiam ser mais bem aproveitados para a introdução da Derivada.

O trabalho foi organizado em três capítulos e mais considerações finais.

O capítulo I, intitulado Problemática, foi dividido em cinco seções assim denominadas: Considerações gerais a respeito de questões referentes ao ensino e a aprendizagem da matemática na universidade, A Derivada como Taxa de Variação Instantânea, Revisão bibliográfica, Justificativa educacional para a abordagem da Derivada por meio da Taxa de Variação e Justificativa histórica.

A última seção, deste capítulo, foi dividida em outras três subseções: Apresentação da gênese da Derivada, Taxa de Variação segundo Isaac Newton e Taxa de Variação segundo Gottfried Wilhelm Leibniz.

Dessa forma, nesta seção, apresentamos a gênese da Derivada desde a Grécia antiga, passando pelo século XVII – Descartes e Fermat – e as concepções, do início do século XVIII, de Newton e Leibniz acerca da Derivada, mostrando que eles fizeram o estudo inicial por meio da ideia da Taxa de Variação. Relatamos que, principalmente, a partir do século XIX se iniciou o processo que levou a fundamentação da Derivada por meio dos Limites, processo este que ocorreu, por intermédio, entre outros de Cauchy.

No Capítulo II, abordamos o referencial teórico e os procedimentos metodológicos, apresentando as noções que julgamos fundamentais da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, da Análise de Conteúdo, Sentido

Holístico da Derivada e da Idoneidade Epistêmica. Abrimos uma subseção na seção denom*in*ada Análise de Conteúdo para apresentar as justificativas das escolhas dos Livros Didáticos analisados.

No capítulo III, apresentamos a análise dos Livros Didáticos, organizada assim:

● descrição do livro e análise sobre o conceito de Taxa de Variação e as ideias da Variação no capítulo de Geometria Analítica - Estudo da Reta nos Livros Didáticos: **Matemática: Ciência e Aplicações – Volume 3**, **Matemática: Contexto e Aplicações – Volume 3**, **Matemática: Ens*in*o Médio – Volume 3** e **Matemática: Paiva – Volume 3**;

● descrição do livro e análise da *in*trodução do conceito de Derivada, com relação à ênfase dada à Taxa de Variação, nos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior: **Cálculo**, **Um Curso de Cálculo**, **Cálculo com Geometria Analítica** e **O Cálculo com Geometria Analítica.**

Finalizamos a tese apresentando as considerações finais e retomando as questões iniciais, apresentando os resultados gerais obtidos na pesquisa e, em razão das análises efetuadas, apresentando algumas reflexões, indícios para o desenvolvimento da noção da Derivada por meio da Taxa de Variação e sugestões para os próximos trabalhos.

Ainda nesse último tópico ressaltamos o desempenho dos estudantes, nas provas do ENEM em questões de Matemática e suas Tecnologias que envolvem a Taxa de Variação e as ideias de Variação. Esta apresentação será feita por meio de dados estatísticos concedidos ao pesquisador pela empresa Módulo ENEM por intermédio do Prof. Fernando Botelho.

No próximo capítulo, intitulado capítulo I – Problemática, apresentamos a primeira seção do nosso trabalho: As considerações gerais a respeito de questões referentes ao ensino e a aprendizagem da matemática na universidade.

CAPÍTULO I

PROBLEMÁTICA

O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano. **Newton**

Neste capítulo apresentamos a Problemática. Na primeira seção trazemos considerações gerais e revelamos dados alarmantes em relação à índices de reprovações na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e também, a algumas tentativas isoladas e particulares de instituições de ensino superior em diminuir as taxas de reprovações.

1.1 Considerações gerais a respeito de questões referentes ao ens*in*o e à aprendizagem da matemática na universidade

A construção do Cálculo é uma das grandes realizações intelectuais da civilização e tem servido por mais de três séculos como ferramenta de pesquisa quantitativa para problemas científicos (GODINO *et al*., 2013). Sem ele a Engenharia e a Física não teriam se desenvolvido (KLEINER, 2002). No entanto, a compreensão de suas ideias fundamentais é conhecida por ser uma fonte de problemas graves para os alunos e professores (HITT, 2003).

Sendo assim, o ens*in*o dessa disciplina na universidade, em particular da Derivada, um dos seus conceitos fundamentais, é de extrema importância e “[...] fazer um tratamento excessivamente algébrico do conceito, sem o uso de outras representações para o ens*in*o, pode contribuir para o surgimento de dificuldades enfrentadas para a sua compreensão [...]” (GODINO *et al*, 2013, p.124)

Além disso, esse componente curricular, geralmente, apresenta porcentagens elevadas de fracassos. Esse insucesso também atinge a Derivada, pois faz parte do Cálculo.

As reprovações nessa disciplina, em especial, no curso de engenharia, tornaram-se uma rotina “[...] esta rotina está gerando uma cultura no meio acadêmico de que o insucesso dos alunos [...] é um fato natural”. (FARIA e GODOY, 2012, p.1).

Nos últimos anos, várias pesquisas têm se dedicado a estudar esse fenômeno. Por exemplo, Barufi (1999) nos revela em sua pesquisa que, no ano de 1995, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, a taxa de não aprovação (alunos reprovados por nota, falta ou desistência) na disciplina Cálculo para Funções de uma Variável Real foi de 66,9% e na disciplina Cálculo Diferencial e Integral foi de 43,8%.

Passos *et al* (2007) constataram que para o curso de engenharia civil, da Fundação Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF), a disciplina apresentou uma média geral de 45,93% de reprovações e em relação ao curso de engenharia elétrica, observou que a disciplina Cálculo Diferencial e Integral I reprovou 50% dos estudantes.

Uma pesquisa qualitativa - conduzida nos anos de 2013, 2014 e 2015 - publicada em 2015 por Rafael e Escher mostra que há pelo menos trinta anos a situação não mudou muito. Em uma universidade particular da região serrana do Rio de Janeiro as reprovações na disciplina Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia chegam, na média, a aproximadamente 50%. Na Universidade Federal do Rio de Janeiro as reprovações na disciplina Cálculo Diferencial e Integral dos cursos de engenharia alcançam, na média, aproximadamente 44%:

> [...] Comparando esses dados com os que apresentamos, podemos perceber que apesar dessa pesquisa ser referente ao ano de 2015, o percentual de não aprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no curso de Engenharia continua elevado, sendo inclusive um pouco maior em alguns semestres [...] (RAFAEL e ESCHER, 2015, p.8).

Pesquisas em Educação Matemática, como muitas das relatadas na seção 1.3, revelam a existência de uma relação entre a aprendizagem dos alunos e os métodos de ensino adotados. Tais investigações evidenciam que uma prática pedagógica fundamentada na problematização e na construção dos conhecimentos por parte dos alunos pode significar um salto de qualidade no aprendizado.

Estudos em Educação Matemática, também como os detalhados na seção 1.3, revelam a preocupação com o ensino e a aprendizagem da Matemática em diversos níveis (fundamental, médio e superior).

Tal preocupação ocorre em escala internacional (especialmente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral), tendo início na década de 80 por meio de um movimento conhecido como “*Calculus Reform*” que, segundo Rezende (2003), está fundamentado na chamada “Regra dos Três”, isto é, considera-se que os problemas devem ser abordados nas formas numérica, geométrica e analítica.

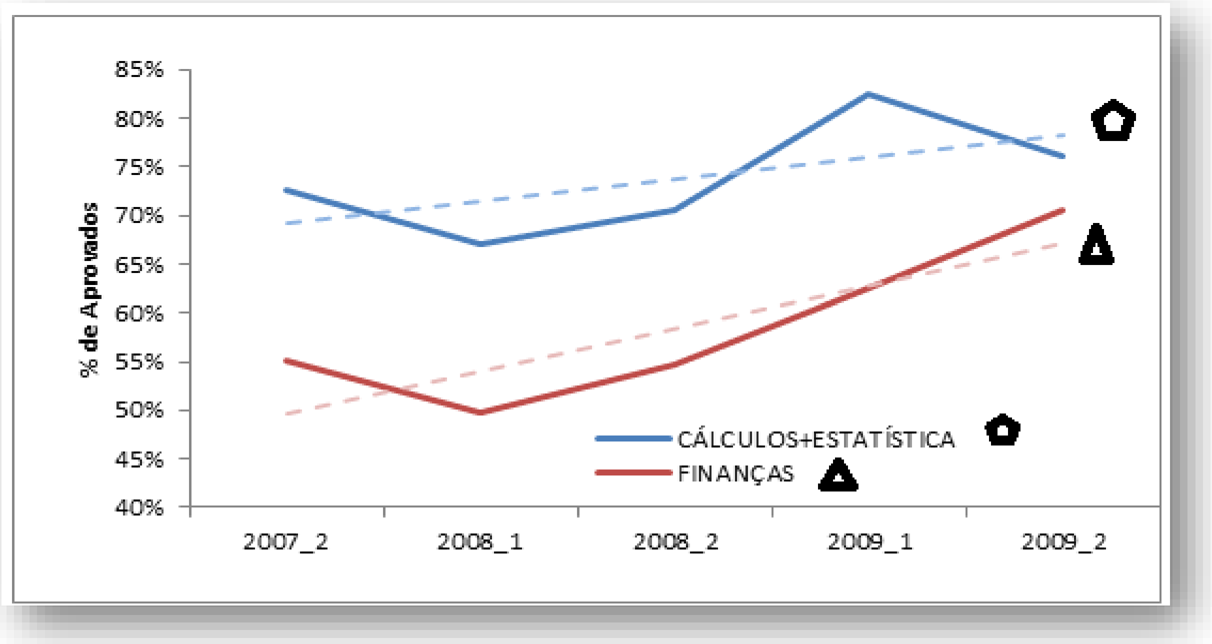
A revisão bibliográfica que fizemos para essa investigação do doutorado indicou ainda estudos apontando diversas metodologias novas de ensino do Cálculo Diferencial e Integral, como o uso de softwares, da modelagem matemática, da história da matemática, entre outros.

Existem também algumas experiências como o de uma Faculdade de Administração da cidade de São Paulo, na qual lecionamos. Essa instituição, preocupada com os altos índices de reprovação nas disciplinas semestrais: Cálculo Diferencial, Finanças e Estatística, nos cursos de Administração, criou, no primeiro semestre de 2007, uma nova disciplina semestral, Proficiência em Matemática para Cálculos, para os estudantes ingressantes.

A disciplina Cálculo Diferencial passou então para o 2º semestre e a disciplina Proficiência em Matemática para Cálculos foi alocada para o primeiro semestre. Esta disciplina de 36 horas versava sobre, principalmente, o estudo das funções.

Em uma pesquisa estatística junto ao Departamento de Finanças que oferece semestralmente a disciplina Cálculo Diferencial nessa Faculdade, obtivemos os resultados apresentados por meio da Figura 1 a seguir.

Figura 1: Evolução na Taxa de Aprovação



Fonte: O pesquisador

A Figura 1 revela que de imediato o curso ofereceu o resultado desejado (na Figura 1 2007_2 significa segundo semestre do ano de 2007 e assim sucessivamente até 2009_2). Percebemos que as aprovações em Cálculo e Estatística passaram de cerca 65% (2007_2) para cerca de 80% (2009_2) – reta média *in*dicada por e em F*in*anças passou de cerca de 50% (2007_2) para cerca de 70% (2009_2) – reta média *in*dicada por .

Com o passar do tempo o problema "parece" que foi transferido para a discipl*in*a Proficiência em Matemática para Cálculos, pois esta começou a apresentar altos níveis de reprovação e assim no segundo semestre de 2011 a direção da Faculdade resolveu ext*in*guir a discipl*in*a do curso.

Ressaltamos que todos esses estudos e tentativas têm a preocupação em m*in*imizar o alto grau de reprovação na discipl*in*a e evasão do curso.

Sobre este fato Lima (2012) escreve:

> [...] A*in*da que *in*genuamente do ponto de vista científico, realizamos reflexões sobre nossa metodologia de ens*in*o, a qual consistia exclusivamente na aula expositiva, segu*in*do o roteiro estabelecido em um dos livros-texto *in*dicados na bibliografia da discipl*in*a. Impulsionados por nossas reflexões, procuramos métodos

> alternativos de ens*in*o. Sempre que possível, recorríamos a textos de História da Matemática, problemas que julgávamos retratar situações do mundo real e recursos computacionais [...] (p.10).

Como apontamos na seção 1.3 pesquisas, em Educação Matemática, revelam que o curso de Derivada é dado por meio de aulas expositivas sem muita conexão com a Taxa de Variação, e o aluno acaba "decorando" a definição de Derivada e suas Técnicas de Derivação. Em seguida, o estudante, resolve alguns exercícios que visam aplicação imediata dessas técnicas que possuem algumas dificuldades de manipulação algébrica. Se os alunos apresentam dúvidas no conteúdo ou na resolução de exercícios, geralmente procuram a ajuda da monitoria.

Acerca dessa prática pedagógica, Franchi (1995, *apud* RÊGO, 2000) afirma:

> [...] De modo geral as aulas são expositivas, sendo raras as tentativas de *in*ovação. [...] Os conteúdos são apresentados prontos, de forma *in*questionável e pouco têm a ver com situações da realidade. São apresentadas def*in*ições, enunciados e teoremas que a seguir são demonstrados. [...] Os livros apresentam os conteúdos da mesma forma que o professor apresenta em aula, conservando a mesma estrutura desde as primeiras publicações. As listas de exercícios geralmente exigem do aluno a repetição de técnicas, apresentadas de acordo com exercícios resolvidos (p.32)

O resultado dessa prática, talvez, seja um dos fatores que causam as reprovações e abandonos do curso.

A Tabela 1, a seguir, mostra as taxas de aprovação, da 1ª série, na disciplina Cálculo Diferencial Integral nos cursos que lecionamos, de engenharia de uma universidade paulistana e os dados são do ano de 2013[2].

Desta forma, a sigla 1BEMN significa: 1ª série da turma B do curso de engenharia mecânica do período noturno. Esta turma teve 71,01% dos alunos reprovados por nota, 0,00% reprovado por frequência e 28,99% dos alunos aprovados. Notamos que a turma 1CEPN teve 0,00% de aprovação.

---

[2] *Nesta Tabela 1, as siglas significam: 1- primeiro ano; A, B, C, D, E, F, G, H, L, M e N – turma; E – engenharia; C, E, L, M, P, R e U – significam, respectivamente: engenharias civil, elétrica, eletrônica, mecânica, computação, produção e automação; período, M – manhã e N – noturno; RpN – reprovado por nota; RpFN – reprovado por nota e frequência; APR – aprovado.*

Tabela 1 - Taxas de Aprovações na Discipl*in*a Cálculo Diferencial *In*tegral

Turma	RpN	RpFN	APR	Total Geral
1AECM	54,32%	6,17%	39,51%	100,00%
1AEEM	48,72%	5,13%	46,15%	100,00%
1AELM	37,50%	12,50%	50,00%	100,00%
1AEMM	45,45%	3,64%	50,91%	100,00%
1AEPM	62,07%	6,90%	31,03%	100,00%
1AERM	43,10%	3,45%	53,45%	100,00%
1AEUM	66,67%	0,00%	33,33%	100,00%
1BECN	59,26%	4,94%	35,80%	100,00%
1BEEN	56,99%	6,45%	36,56%	100,00%
1BELN	51,06%	4,26%	44,68%	100,00%
1BEMN	71,01%	0,00%	28,99%	100,00%
1BEPN	57,69%	8,97%	33,33%	100,00%
1BERN	64,94%	5,19%	29,87%	100,00%
1BEUN	61,70%	4,26%	34,04%	100,00%
1CECN	60,53%	6,58%	32,89%	100,00%
1CEEN	77,03%	4,05%	18,92%	100,00%
1CEMN	59,21%	17,11%	23,68%	100,00%
1CEPN	77,78%	22,22%	0,00%	100,00%
1CERN	60,00%	4,00%	36,00%	100,00%
1DECN	81,11%	1,11%	17,78%	100,00%
1DEEN	57,14%	7,14%	35,71%	100,00%
1DEMN	69,86%	8,22%	21,92%	100,00%
1DERN	64,06%	6,25%	29,69%	100,00%
1EECN	70,83%	4,17%	25,00%	100,00%
1EEMN	70,00%	10,00%	20,00%	100,00%
1FECN	75,61%	0,00%	24,39%	100,00%
1GECM	71,60%	2,47%	25,93%	100,00%
1HECN	72,22%	11,11%	16,67%	100,00%
1LECM	37,84%	2,70%	59,46%	100,00%
1LERM	52,63%	0,00%	47,37%	100,00%
1MECN	61,54%	2,20%	36,26%	100,00%
1MERN	69,44%	6,94%	23,61%	100,00%
1NECN	84,38%	9,38%	6,25%	100,00%
1NERN	59,57%	0,00%	40,43%	100,00%
Total Geral	**63,29%**	**5,33%**	**31,38%**	**100,00%**

Fonte: Pesquisador

Ressaltamos que esses dados alarmantes não são exclusivos dessa Universidade ou mesmo resultados de uma época ou de um determ*in*ado local.

Segundo Júnior (2006, p.2):

> Uma pergunta natural que poderia surgir é a seguinte: Seria este fenômeno encontrado apenas nos domínios das universidades brasileiras? A resposta é não e, pelo menos no que se refere ao ensino e à aprendizagem de Cálculo, o fenômeno transcende os limites nacionais e tem motivado as mais variadas reações na comunidade acadêmica.

A seguir transcrevemos parte de uma matéria publicada no Jornal da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). A matéria abre discussão sobre os índices de reprovação da disciplina Cálculo I e a necessidade de adotar estratégias para a diminuição dessas taxas. Essa discussão foi acirrada, após uma pesquisa de Doutorado defendida na Faculdade de Educação, que estudou as reprovações em Cálculo I em todos os cursos da Universidade em que a disciplina é ministrada.

Como a disciplina é de responsabilidade do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da Unicamp, a direção publicou no jornal a seguinte matéria:

> Em 2013 Marcelo Firer, Sérgio Tozoni, Alberto Saa e subscrito por mais quarenta docentes e endossado pela Congregação do *In*stituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (Imecc), em matéria publicada no Jornal da Unicamp, relatando tese de doutorado defendida na Faculdade de Educação, foi abordada a questão do ens*in*o de Cálculo Diferencial e *In*tegral (em particular de Cálculo I). [...] Assim, dentre as diversas turmas de Cálculo I, por vezes com o mesmo professor e fazendo a mesma prova, encontramos turmas com 100% de aprovação ao lado de turmas com reprovação de 77,5%, este último sendo o único número *in*dicado na matéria e que *in*duziu os leitores a concluírem equivocadamente que trabalhamos neste patamar de *in*sucesso: na realidade, o índice de reprovação médio dos últimos c*in*co anos foi de 28,5%, um número alto, mas compatível com padrões das melhores universidades do mundo. [...] *In*dependentemente de outras questões relativas ao modo como selecionamos nossos estudantes e como os *in*troduzimos ao ens*in*o de fato superior, e mesmo sendo “rígidos e *in*flexíveis” nas exigências (conforme argumenta a autora da tese), os professores do Imecc são atentos a estas dificuldades e adotam uma série de *in*strumentos e estratégias para lidar com estas peculiaridades. [...] são adotadas, já faz tempo, estratégias que *in*cluem listas de exercícios semanais e testes frequentes, estes últimos serv*in*do aos alunos como s*in*alização das expectativas em relação a sua aprendizagem e um retorno sobre o andamento destas. Não satisfeitos com estas *in*iciativas, docentes do Imecc realizaram recentemente experiência muito bem-sucedida com duas turmas, oferecendo horário extraclasse de exercícios, às sextas-feiras, das 12 h às 14 h. No momento, estão em estudo as necessidades (em termos de recursos humanos) para expandir esta experiência para todas as mais de 30 turmas de Cálculo I. [...] Concluímos afirmando que a reprodução do adjetivo “pesadelo”, para caracterizar uma discipl*in*a que estrutura a formação de metade de nossos estudantes, é uma atitude *in*digna de qualquer cientista e *in*aceitável em *in*stância universitária (JORNAL DA UNICAMP, 2013, p.4).

De maneira geral, as experimentações metodológicas, independentemente da nomenclatura utilizada, conforme relatamos, têm o mesmo objetivo: sanar, muitas vezes sem eficácia, o problema da falta de conhecimentos prévios relativos a conceitos matemáticos do ensino médio por parte dos estudantes.

Barreto (1995 *apud* Reis, 2001 p.21) afirma:

> As causas são muitas e já bem conhecidas, pr*in*cipalmente a má formação [...], de onde recebemos um grande cont*in*gente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítico, sem hábitos de estudar e consequentemente, bastante *in*seguro.

Já Villareal (1999) afirma que os estudos em Educação Matemática que tratam do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral abordam o problema em diferentes perspectivas e contextos, e que cada um oferece elementos que permitam ampliar a análise das dificuldades pelos alunos nesta disciplina.

Na próxima seção, apresentamos algumas reflexões a respeito do ensino da Derivada que apontam em direção a valorizar, na introdução desse conceito no Ensino Superior, a ideia da Taxa de Variação. Delineamos então nossa questão de pesquisa e visando ilustrar o tipo de abordagem proposta pelas já citadas pesquisas, descrevemos um método para encontrarmos a Derivada por meio da Taxa de Variação, sem a necessidade da ideia do Limite.

1.2 A taxa de variação e a derivada como taxa de variação instantânea: delineando a questão e os objetivos da pesquisa

> Entendo por razão, não a faculdade de racioc*in*ar, que pode ser bem ou mal utilizado, mas o encadeamento das verdades que só pode produzir verdades, e uma verdade não pode ser contrária a outra. **Leibniz**

Apresentamos, nesta seção, mais algumas reflexões sobre o ensino do Cálculo Diferencial e delineamos a questão e os objetivos da nossa pesquisa. Descrevemos, também, as ideias da Taxa de Variação (com variações proporcionais ou não), Taxa de Variação Média e um método para encontrar a Derivada partindo da noção da Taxa de Variação, sem recorrermos explicitamente à ideia do Limite. Ressaltamos que essas concepções foram retiradas do livro Matemática por Assunto – Noções de Cálculo (volume 9) do autor Machado (1988).

Na nossa pesquisa de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática, tínhamos em mente a investigação de algum tema que fosse importante no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Escolhemos a Derivada, já que ela representa a Taxa de Variação Instantânea e, portanto, possui um papel importante nas diversas áreas de conhecimento: Matemática, Engenharia, Economia, Administração, Física, entre outros. Com relação à importância da Derivada (e alguns exemplos), Amit e Vinner (1990, apud Meyer, 2003), em seu trabalho afirmam que:

> O conceito de Derivada é especialmente importante. Se este conceito não é bem entendido, então suas relações com velocidade, taxa de variação, etc. não podem ser entendidos nas Ciências Naturais, e suas relações com o conceito de Valor Marg*in*al não podem ser entendidas na Economia e na Adm*in*istração de Negócios (p.3).

No nosso trabalho de mestrado, analisamos se há ênfase na Taxa de Variação para conceituar a Derivada, por meio dos textos, exercícios resolvidos, exercícios propostos e outras atividades em três livros didáticos sob o olhar dos Registros de Representação Semiótica, cuja teorização foi desenvolvida por Duval[3](2009) e elaboramos procedimentos de análise de textos baseados em indicadores de Bardin[4] (2014) que permitiram analisar diferenças no enfoque dado ao conceito de Derivada com ênfase na Taxa de Variação.

Observamos que o livro **Matemática Aplicada à Administração e Economia**, voltado a estudantes de Administração e Economia, principalmente, e que aborda temas como, por exemplo: custo marginal, receita marginal e lucro marginal, manipulam diretamente a Derivada como Taxa de Variação. Os outros dois livros, utilizados principalmente em cursos de Engenharia, embora não utilizam explicitamente a representação Taxa de Variação fazem o tratamento da Derivada a partir da Variação[5].

Após muitos anos lecionando a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, para alunos ingressantes no curso de engenharia, notávamos que aparentemente os alunos não atribuem muito valor às ideias da discipl*in*a, por não compreender sua importância para seus estudos futuros em engenharia. O Cálculo é encarado como uma técnica sem qualquer conexão com as demais áreas da Ciência.

---

[3] Raymond Duval é psicólogo e filósofo de formação e investiga sobre a aprendizagem matemática. Atualmente é professor emérito na Université du Littoral Cote d'Opale, França.

[4] Laurence Bardin é professora-assistente de Psicologia na Universidade de Paris V, aplicou as técnicas da Análise de Conteúdo na investigação psicossociológica e no estudo das comunicações de massas.

*[5] Os três livros analisados, no nosso mestrado, foram: FLEMING, D. M., GONÇALVES M. B. **Cálculo A: funções, limites, derivação, integração** - São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006; TAN, S. T. – **Matemática Aplicada a Administração e Economia**; tradução técnica Fábio Armando Tal. 2ª edição- São Paulo: Cengage Learning, 2008; GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo Vol. 1 –** Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1985.*

Conforme salienta Machado (1988)

> [...] As tentativas [...] de ensinar Cálculo [...] limitaram-se quase que exclusivamente a noções sobre Derivadas que tinham como base o conceito de Limite. Tal conceito elaborado mais de um século após o surgimento do Cálculo teve como finalidade básica aperfeiçoar os fundamentos deste último, de um ponto de vista formal. Aos poucos, porém, em vez de tratar diretamente das ideias fundamentais, os cursos de Cálculo, mesmo os introdutórios, passaram a atribuir um papel central ao conceito de Limite, sendo a Derivada [...] definida a partir dele (p.4).

Segundo Machado (2016) uma ideia fundamental pode ter seu significado e sua importância explicada apenas com o recurso da l*in*guagem. Em cada conteúdo da Matemática existem ideias fundamentais a serem exploradas. Um exemplo de ideia fundamental é a **Variação**:

> Desde muito cedo, a busca de regularidades, de padrões ou de invariâncias em múltiplos contextos constitui um foco das atenções da Matemática. O estudo das formas de crescimento e de decrescimento, das rapidezes em geral – ou das taxas de variação – pode ser associado a tal par de ideias desde o estudo das funções elementares (p. 16).

Diante dessa constatação, Dall'Anese (2000), em sua dissertação de mestrado, *in*daga-se: a respeito da abordagem a ser dada ao conceito de Derivada em um curso inicial de Cálculo.

No intuito de responder a essa indagação Dall'Anese (2000) fez uma pesquisa investigativa sobre o conceito de Derivada apresentando uma sequência didática, composta por seis fichas, que tinham o objetivo de introduzir o conceito de Derivada associado à ideia de Variação.

Os resultados da pesquisa mostraram que a exploração da noção de razão de Variação foi bastante satisfatória para a aquisição do significado da Derivada.

O pesquisador conclui que:

> [...] há uma relação entre a aprendizagem e os métodos adotados em geral. [...] A escolha feita para a apresentação do conceito de derivada, qual seja, aplicação de fichas em que os alunos trabalham em duplas, com questões que permitam fazer estimativas, indagações, conjecturas, levantar hipóteses, comprovar resultados, representa uma ruptura do contrato didático usual, e acredito, ajudará a contornar algumas dificuldades apresentadas pelos mesmos (p.14).

Em relação à importância do estudo da Derivada com ênfase na Taxa de Variação evidencia que:

> No início da sequência didática, estes alunos deram *in*dícios que a noção de variação é um conceito espontâneo. [...] Utilizar esta noção como "ponto de partida" para abordar o conceito de Derivada, apontou ser uma escolha acertada [...] (p.126).

Ainda sobre a importância da ênfase da Derivada como Taxa de Variação em diversos ramos da ciência, Stewart (2010, p.206) escreve:

> As Taxas de Variação ocorrem em todas as ciências. Um geólogo se *in*teressa em saber a taxa na qual uma massa de rocha fundida resfria através da condutividade térmica como o meio rochoso que a envolve. Um engenheiro quer saber a taxa segundo a qual a água flui para dentro ou fora de um reservatório; um geógrafo está *in*teressado na taxa de variação da densidade populacional em uma cidade à medida que aumenta a distância de seu centro; um meteorologista está *in*teressado na taxa de variação da pressão atmosférica em relação à altura.

Acerca de como é ensinado o Cálculo Diferencial e Integral, Frid (1994, *apud* RÊGO, 2000, p.5) afirma que o professor de Cálculo Diferencial e Integral deve:

> Mudar o foco de ens*in*o de Cálculo para as ideias fundamentais, ao *in*vés de enfatizar o tre*in*amento em habilidades e técnicas rot*in*eiras, *in*tegrar aplicações ao curso de Cálculo através do reforço do papel de aproximações e situações-problema com contextos relevantes no campo da Matemática, produzir livros textos que deem suporte as mudanças e *in*troduzir computação no currículo de Cálculo.

Diante desse cenário, estabelecemos como meta analisar se Livros Didáticos do Ensino Superior abordam o estudo da Derivada com ênfase na Taxa de Variação ou se o fazem com ênfase na ideia de Limite e, posteriormente, por meio de uma abordagem predominantemente técnica, contribuindo para que os alunos "enxerguem" a derivada como um processo mecânico e uma receita de cálculo, levando-os a decorar regras de derivação e resolver problemas por meio de procedimentos-padrão.

Em nossa prática docente, percebemos algumas concepções em comum entre os alunos: "derivando a velocidade, encontra-se a aceleração", ocasionando, muitas vezes, uma perda da ideia de Taxa de Variação, em função da mera aplicação direta da "técnica". Neste sentido God*in*o *et al* afirmam que

> [...] o significado da Derivada concentra-se em descrever as características dos significados construídos pelos alunos, mostrando

> a existência de conflitos e *in*consistências em relação aos significados formais apresentados nos Livros Didáticos [...] a origem dos conflitos cognitivos dos estudantes sobre o significado da Derivada, pode ser associada com a apresentação da Derivada no Livro Didático [...] (GOD*IN*O *et al*, 2013, p.124).

De acordo com Barufi (1999), em alguns livros, a abordagem está mais adequada para um curso de Análise Real, afastando-se do que seria recomendado para um curso introdutório de Cálculo.

A autora cita em sua tese que os livros:

> [...] Não focalizam de maneira preponderante a questão das ideias do Cálculo através de problemas importantes e motivadores, a*in*da que vários deles, embora não partam de situações-problema, consigam mostrar que o Cálculo tem diversas aplicações nas diferentes áreas do conhecimento. (BARUFI, 1999, p. 127)

De acordo com o exposto, traçamos outra meta: analisar se os conceitos da Variação e da Taxa de Variação se manifestam em Livros Didáticos de Matemática do 3º ano do Ens*in*o Médio escolhidos para análise, em particular, o capítulo de Geometria Analítica - Estudo da Reta, pois julgamos esse ponto fundamental para o entendimento da Derivada como Taxa de Variação.

Devido às reflexões expostas e à importância de se estudar a Derivada com ênfase na Taxa de Variação, formulamos a segu*in*te hipótese de pesquisa: “a Derivada não é ens*in*ada, nos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior, com ênfase na Taxa de Variação e sim por meio da concepção do Limite. A Taxa de Variação não é enfatizada no estudo da reta em Geometria Analítica nos Livros Didáticos do Ens*in*o Médio. A maior parte das questões, contextualizadas de Matemática e suas Tecnologias do ENEM, utilizam a ideia da Taxa de Variação[6]. Sendo assim, poderíamos aproveitar esse conhecimento já construído e avaliado na Educação Básica para introduzir o conceito da Derivada no Ensino Superior”.

Diante dessa hipótese de pesquisa traçamos como objetivo responder às segu*in*tes questões de *in*vestigação:

1) Quais significados dos conceitos de Variação e de Taxa de Variação são dados em Livros Didáticos do Ensino Médio e Ensino Superior?

[6] *Mostramos esse fato na próxima seção.*

2) Como tais significados são organizados em Livros Didáticos do Ensino Médio e Ensino Superior?

3) Qual significado de Derivada pode ser construído a partir de Livros Didáticos de Ensino Superior?

● **objetivo geral:** visamos investigar os significados da Variação, da Taxa de Variação e da Derivada que podem ser construídos a partir da abordagem de Livros Didáticos do Ensino Médio e Ensino Superior.

● **objetivos específicos:**

1) Estudar as abordagens dadas aos conceitos de Variação e da Taxa de Variação em Livros Didáticos de Ensino Médio, mais especificadamente no capítulo de Geometria Analítica – Estudo da Reta.

2) Analisar as articulações entre registros de Representação Semiótica e os critérios de Idoneidade Epistêmica para a compreensão da Taxa de Variação como aplicações de Coeficiente Angular, Cálculo de Velocidades, Funções Médias da Economia (Receita Média, Lucro Médio, Custo Médio), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem).

3) Analisar as articulações entre os registros de Representação Semiótica e os critérios de Idoneidade Epistêmica para a compreensão da Derivada e enfatizando-a como Taxa de Variação, enquanto aplicações do Coeficiente Angular, Cálculo de Velocidades, Funções Marg*in*ais da Economia (Receita Marg*in*al, Lucro Marg*in*al e Custo Marg*in*al), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem).

A seguir, descrevemos o conceito de Taxa de Variação e uma proposta pedagógica para encontrarmos a Derivada, partindo da noção da Taxa de Variação, sem recorrermos explicitamente à ideia do Limite, sem usar a definição.

Segundo Machado (1988), “Para caracterizar a rapidez com que uma função varia (cresce ou decresce), utilizamos a noção de taxa de variação” (p.12). Discutiremos inicialmente o caso das grandezas diretamente proporcionais e mais adiante as variações não proporcionais.

Quando y é diretamente proporcional a x, temos: $\frac{y}{x} = a \; \Leftrightarrow (r)\; y = ax$ em que a é a constante de proporcionalidade ou o coeficiente angular da reta (r).

Da mesma forma: quando a variação de y a partir de certo valor y_0 é diretamente proporcional à variação de x a partir de x_0 pode ser escrita $\frac{y-y_0}{x-x_0} = a \Leftrightarrow (t)\ y - y_0 = a(x - x_0)$. Observamos que esta é a Equação Fundamental da Reta que foi utilizada por Descartes, Fermat, Newton e Leibniz, entre outros, para resolver o problema de encontrar a reta tangente a uma curva por um determinado ponto conhecido (relataremos este fato na seção 1.5).

Ressaltamos ainda que tal equação pode ser escrita assim:

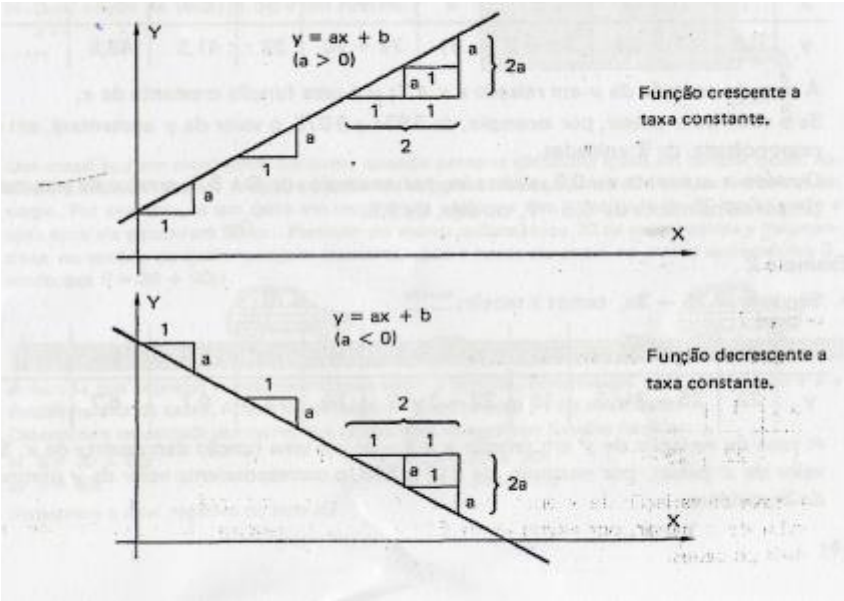
$$(t)\ y - y_0 = a(x - x_0) \Leftrightarrow y = ax - ax_0 + y_0$$

e fazendo $-ax_0 + y_0$ igual a uma constante b segue que $(t)\ y = ax + b$ que pode ser a equação reduzida de uma reta ou representar algebricamente uma função afim.

Sendo assim y e x têm variações diretamente proporcionais, ou melhor, quando x varia de uma unidade, a partir de qualquer ponto, o valor correspondente de y varia sempre de a unidades, ou seja, y varia a uma taxa constante e igual a a que é o coeficiente angular, $m_t = a$, da reta (t), pois, $m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax+b-ax_0-b}{1} = \frac{ax-ax_0}{1} = \frac{a(x-x_0)}{1} = \frac{a\Delta x}{1} = \frac{a.1}{1} \Rightarrow m_t = a$.

“Como foi estudado em Geometria Analítica, numa reta de equação $y = ax + b$ o coeficiente a representa seu coeficiente angular. O valor de a pode ser calculado pela tangente trigonométrica do ângulo de inclinação da reta” (MACHADO, 1988, p.17). Exemplo:

Figura 2: Funções Crescente e Decrescente no Livro Matemática por Assunto – Noções de Cálculo



Fonte: Machado (1988, p.14)

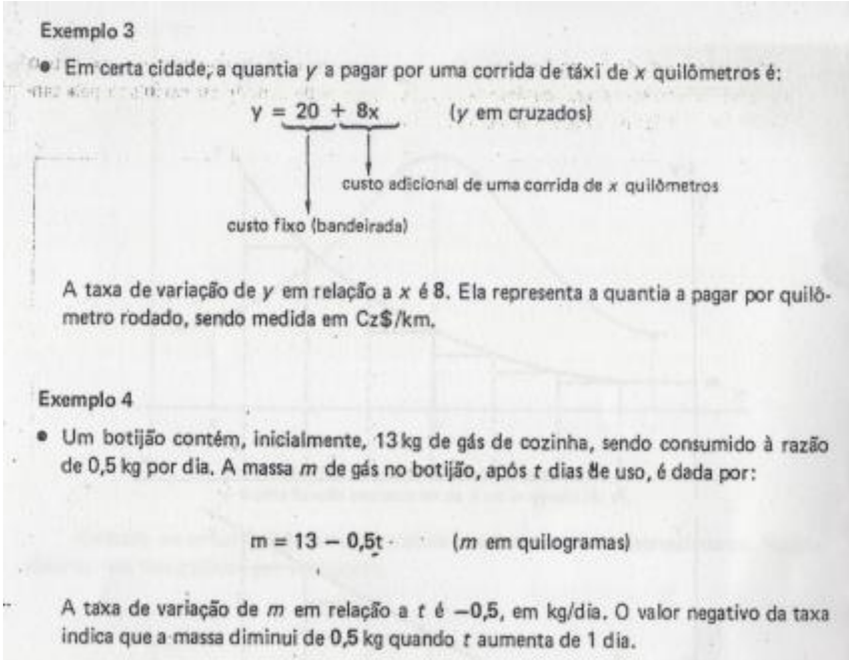
Observamos que na figura anterior em qualquer triângulo retângulo o cálculo da tangente trigonométrica do ângulo de *in*cl*in*ação da reta também nos fornece o coeficiente angular da reta, ou seja, se α é o ângulo de *in*cl*in*ação da reta, então, neste caso, $m_t = tan\alpha = \frac{a}{1} = a$.

Segundo Machado (1988, p.14)

> Devemos entender variação como uma diferença valor f*in*al menos um valor *in*icial. Assim, divid*in*do a variação de y pela correspondente variação de x, obtemos uma razão constante e igual a a.
>
> $$y = ax + b \begin{cases} a \text{ é } a\ taxa\ de\ variação\ de\ y\ em\ relação\ a\ x; \\ \ldots \\ a \text{ é } a\ variação\ de\ y\ por\ unidade\ a\ mais\ de\ x\ [\ldots] \end{cases}$$

Na sequência elencamos alguns exemplos de acordo com Machado (1988)

Figura 3: Exemplos de Taxas no Livro Matemática por Assunto – Noções de Cálculo



Exemplo 3

- Em certa cidade, a quantia y a pagar por uma corrida de táxi de x quilômetros é:

$$y = \underbrace{20}_{\text{custo fixo (bandeirada)}} + \underbrace{8x}_{\text{custo adicional de uma corrida de } x \text{ quilômetros}} \qquad (y \text{ em cruzados})$$

A taxa de variação de y em relação a x é 8. Ela representa a quantia a pagar por quilômetro rodado, sendo medida em Cz\$/km.

Exemplo 4

- Um botijão contém, inicialmente, 13 kg de gás de cozinha, sendo consumido à razão de 0,5 kg por dia. A massa m de gás no botijão, após t dias de uso, é dada por:

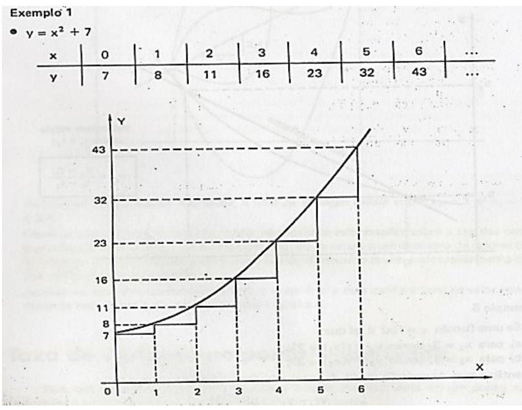
$$m = 13 - 0{,}5t \qquad (m \text{ em quilogramas})$$

A taxa de variação de m em relação a t é $-0{,}5$, em kg/dia. O valor negativo da taxa indica que a massa diminui de 0,5 kg quando t aumenta de 1 dia.

Fonte: Machado (1988, p.14)

A seguir descrevemos a ideia sobre as variações não proporcionais, ou seja, a variação de y por unidade x não é mais constante, isto é, a rapidez com que y varia com x depende do ponto considerado:

Figura 4: Exemplos de Variações não proporcionais no Livro Matemática por Assunto – Noções de Cálculo

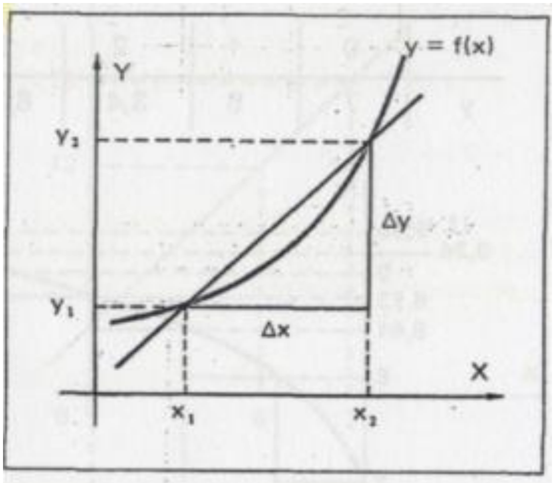


Fonte: Machado (1988, p.20)

“A variação de y por unidade de x aumenta à medida que x aumenta. A função dada por $y = x^2 + 7$ cresce cada vez mais rapidamente com x.” (MACHADO, 1988, p.20). Aqui ressaltamos a necessidade de estudarmos a Taxa de Variação em um determ*in*ado ponto - Derivada.

A Taxa de Variação Média de acordo com Machado (1988) para uma função qualquer definida por $y = f(x)$, entre os pontos x_1e x_2 (com $x_2 > x_1$) é a taxa de variação da função $y = ax + b$ determinada pela reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), onde $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.

Figura 5: Cálculo da Taxa de Variação Média no Livro Matemática por Assunto – Noções de Cálculo

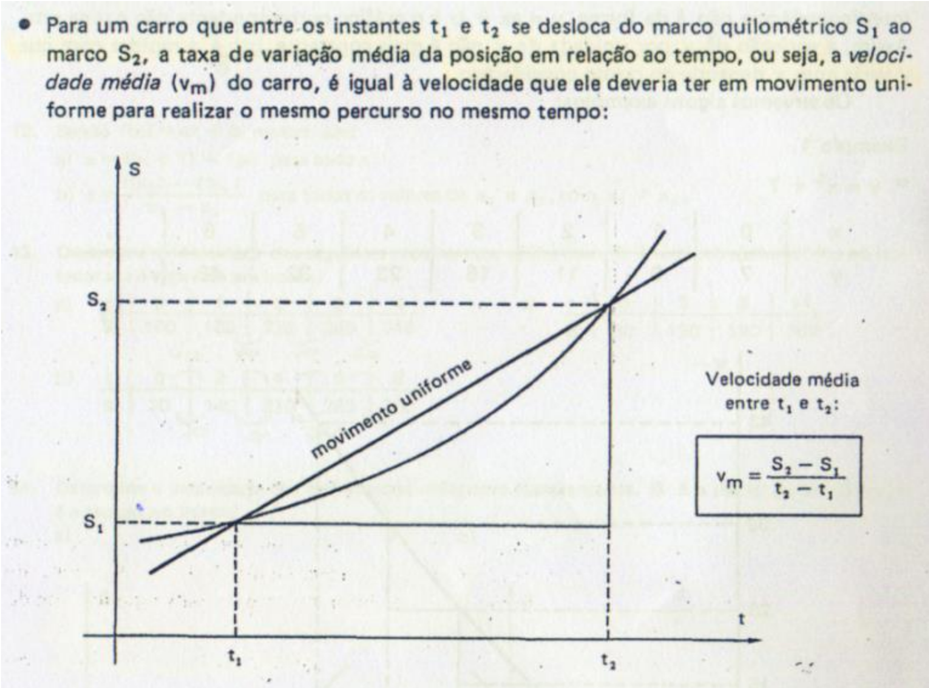


Fonte: Machado (1988, p.22)

Sendo assim se T_m é a taxa de variação média de $y = f(x)$ entre x_1e x_2, $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta y = y_2 - y_1$ segue que $T_m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

“A taxa média corresponde, então, à variação de y por unidade de x, em média, entre x_1e x_2” (MACHADO, 1988, p.22).

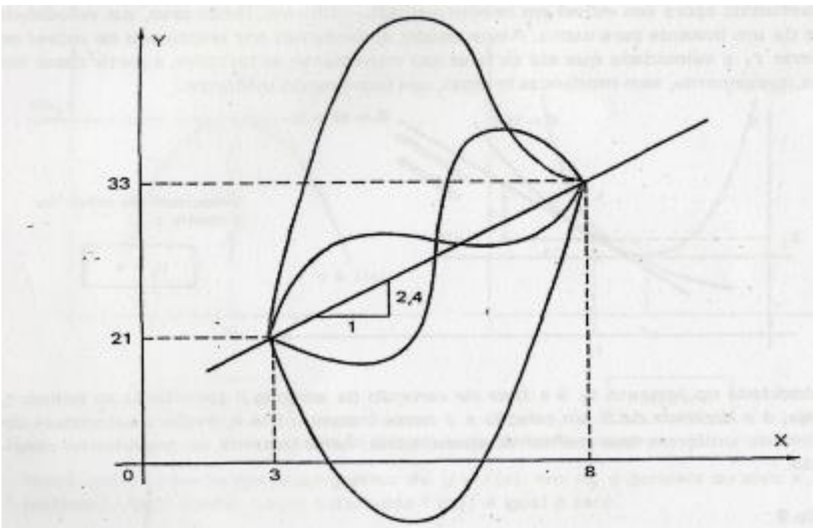
Figura 6: Cálculo da Taxa no Livro Matemática por Assunto – Noções de Cálculo



Fonte: Machado (1988, p.23)

O gráfico da função definida por $y = f(x)$ em certo *in*tervalo considerado pode ter vários aspectos e em qualquer caso, a taxa de variação média entre $x_1 = 3$ e $x_2 = 8$ é 2,4:

Figura 7: Taxa Média no Livro Matemática por Assunto – Noções de Cálculo



Fonte: Machado (1988, p.24)

De acordo com Machado (1988, p.24)

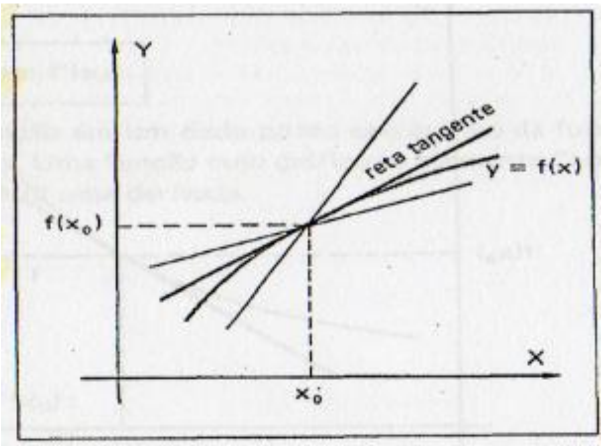
> [...] a taxa de variação média não fornece informações sobre a rapidez com que a função varia em um ponto especificado; ela se refere a um

> intervalo de valores de x, onde o valor de $f(x)$ pode ter aumentado ou diminuído muito mais rapidamente do que indicado pela taxa média. Apenas no caso de uma função do tipo $y = ax + b$ a taxa média é igual ao valor constante da taxa de variação, que nesse caso é igual a a.

A noção de Taxa de Variação no ponto ou Derivada é utilizada para caracterizar a rapidez com que uma função f dada por $y = f(x)$ varia em um ponto x_0.

A ideia básica ao se trabalhar com essa noção é a de que uma curva pode ser aproximada por uma reta nas proximidades de um ponto. Assim, a rapidez com que uma função varia em um ponto pode ser associada à Taxa de Variação da função def*in*ida por $y = ax + b$, que melhor se aproxima da função dada no ponto x_0. Reproduzimos esta ideia na Figura 8.

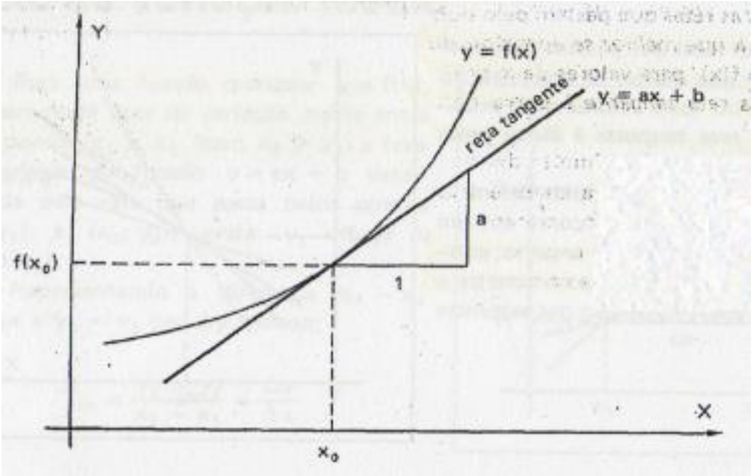
Figura 8: Reta Tangente no Livro Matemática por Assunto – Noções de Cálculo



Fonte: Machado (1988, p.25)

Sendo assim, se $y = f(x)$, chamaremos de Taxa de Variação de y em relação à x no ponto de abscissa x_0 a Taxa de Variação da função dada por $y = ax + b$ cujo gráfico é a reta tangente (se ela existir) ao gráfico da função dada por $y = f(x)$ no ponto $(x_0 \cdot, f(x_0))$, como está representado na Figura 9:

Figura 9: Taxa de Variação no Livro Matemática por Assunto – Noções de Cálculo



Fonte: Machado (1988, p.26)

Dessa forma, *in*dicamos a Taxa de Variação de $y = f(x)$ no ponto de abscissa x_0 por T_{x_0} e ela é calculada assim, com base na Figura 8 e na Figura 9:

$$T_{x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x_0+1)+b-(ax_0+b)}{(x_0+1)-x_0} = \frac{ax_0+a+b-ax_0-b}{x_0+1-x_0} = \frac{a}{1} \Rightarrow T_{x_0} = a.$$

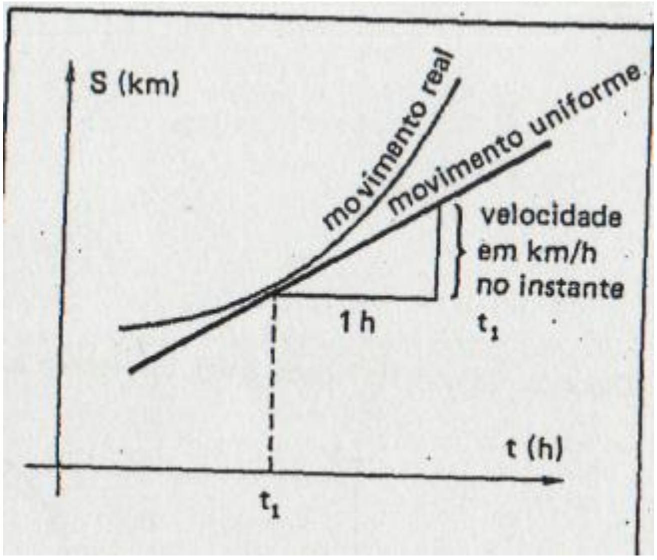
A Taxa de Variação da função f, dada por $y = f(x)$ no ponto de abscissa x_0 é também chamada Derivada de $f(x)$ no ponto de abscissa x_0. Seu valor *in*dica a *in*cl*in*ação da reta tangente (ou coeficiente angular) ao gráfico de f dada por $y = f(x)$ no ponto considerado. Esse valor é comumente representado por $f'(x_0)$. Então neste nosso estudo temos $f'(x_0) = a$.

Vamos agora, procurar um modo analítico para calcular o valor de a, a partir da função dada por $y = f(x)$. Para isso, utilizamos a noção de velocidade no *in*stante t:

> A velocidade no *in*stante t é a Taxa de Variação da posição S em relação ao tempo t, ou seja, é a Derivada de S em relação a t nesse *in*stante. Ela é, então, a velocidade do movimento uniforme que melhor se aproximaria, nesse *in*stante, do movimento considerado (MACHADO, 1988, p.27).

Isso posto, vamos considerar o caso de um carro em um movimento não uniforme. Queremos determ*in*ar a velocidade do carro, em km/h, no *in*stante t_1. Esta é a velocidade que ele teria se seu movimento se tornasse uniforme a partir de t_1 (Figura 10):

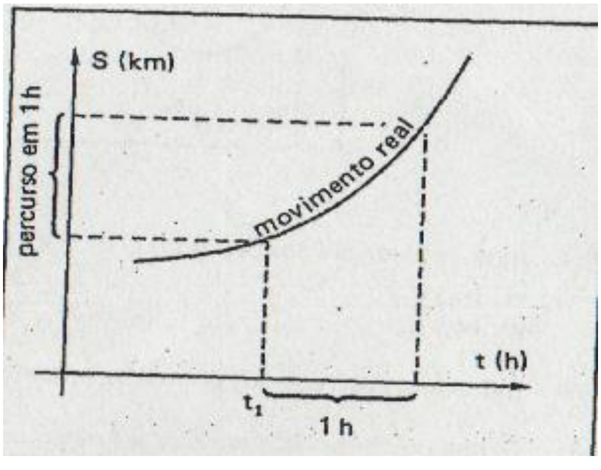
Figura 10: Velocidade no *in*stante t_1



Fonte: Machado (1988, p.50)

Se deixarmos transcorrer 1h a partir de t_1 e verificarmos que a distância percorrida nesse *in*tervalo de tempo foi, por exemplo, de 90 km, isto não será suficiente para concluir que a velocidade no *in*stante t_1 é de 90 km/h. Poderemos somente concluir que a velocidade média nesse período de 1h foi de 90 km/h. A velocidade do carro no *in*stante t_1 pode diferir significativamente desse valor, já que o movimento não é uniforme, e em 1h pode ter variado bastante, conforme a Figura 11:

Figura 11: Movimento real

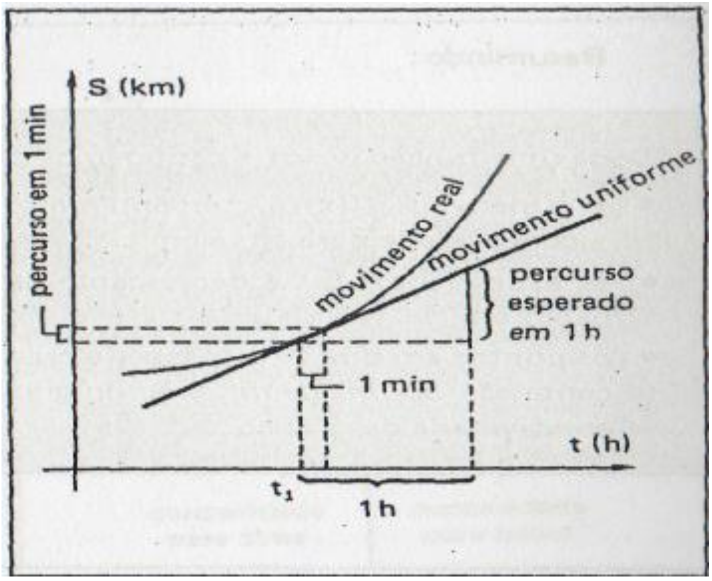


Fonte: Machado (1988, p.50)

Podemos obter uma melhor aproximação da velocidade do carro no *in*stante t_1 deixando transcorrer não 1 h, mas apenas 1 m*in*, a partir de t_1.

Verificando a distância percorrida e multiplicando-a por 60, temos uma estimativa de seu percurso em 1 h, caso ele cont*in*uasse a se deslocar com a mesma rapidez observada durante esse m*in*uto, conforme está representado na Figura 12:

Figura 12: Noção de Velocidade *In*stantânea



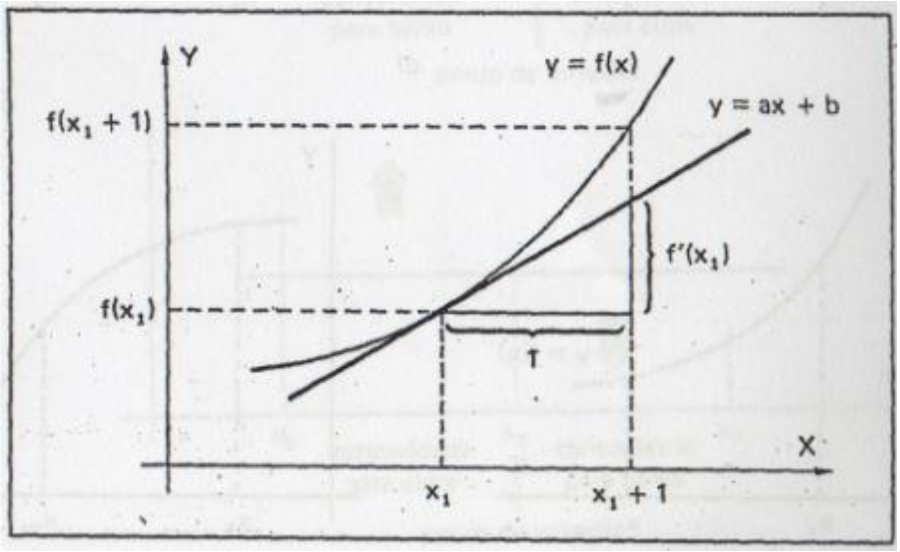
Fonte: Machado (1988, p.51)

Obtemos uma aproximação a*in*da melhor verificando o percurso em 1 s, a partir do *in*stante t_1, e multiplicando esse resultado por 3600.

Dessa forma, deduzimos que quanto menor for o *in*tervalo de tempo considerado para, a partir dele, fazermos a projeção do percurso que seria realizado em 1 h, mais o valor obtido se aproxima do valor da velocidade no *in*stante t_1

Sendo assim, para calcularmos $f'(x)$, fazemos x aumentar de uma unidade a partir de x_1 e determinamos a diferença f$(x_1 + 1) - f(x_1)$, este valor poderá diferir significativamente do valor da derivada $f'(x_1)$, uma vez que a reta tangente no ponto $(x_1, f(x))$ pode estar muito afastada do gráfico de f no ponto de abscissa $x_1 + 1$, conforme está na Figura 13:

Figura 13: Noções da Derivada



Fonte: Machado (1988, p.51)

Para obtermos um valor aproximado da derivada $f'(x_1)$, podemos fazer x variar não de 1, mas de $\frac{1}{n}$, a partir de x_1, e calcular a variação correspondente em f(x). Para um *in*tervalo $\frac{1}{n}$ suficientemente pequeno, o valor de f(x) em $x_1 + \frac{1}{n}$ se aproxima do valor correspondente calculado na equação da reta tangente.

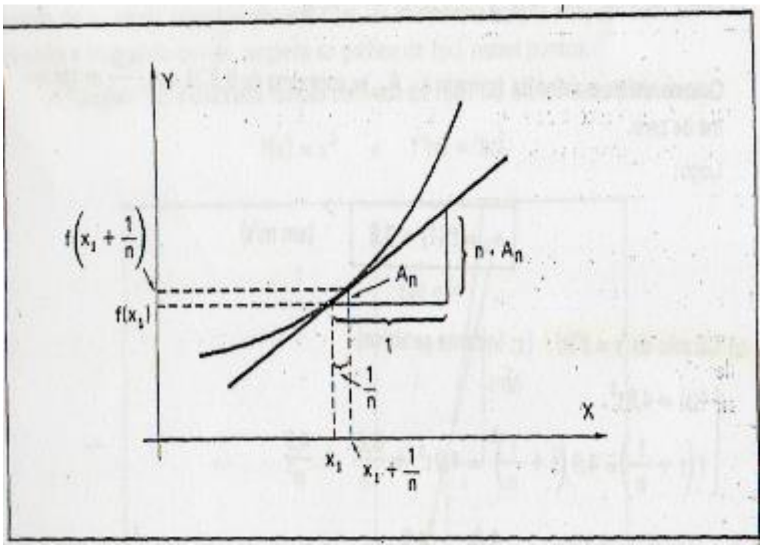
Vamos chamar de A_n a diferença $f(x_1 + \frac{1}{n}) - f(x_1)$. Podemos estimar para $f'(x_1)$ o valor aproximado $n.A_n$, pois, considerando a variação proporcional da reta tangente, temos que:

● quando x varia de $\frac{1}{n}$ segue que f(x) varia de A_n;

● quando x varia 1 segue que f(x) varia $n.A_n$.

Assim: $n.\left[f(x_1 + \frac{1}{n}) - f(x_1)\right] = nA_n \cong f'(x_1)$, conforme pode ser visto na Figura 14:

Figura 14: Ideia da Derivada



Fonte: Machado (1988, p.52)

Logo, para valores de n cada vez maiores, os valores de $n.A_n$ se aproximam cada vez mais de um valor fixo a, então $f'(x_1) = a$.

Para exemplificarmos as ideias de Machado (2008), elaboramos o segu*in*te problema:

> Suponha que a distância (em metros) percorrida por um automóvel ao longo de uma estrada t segundos após partir do repouso é dada pela função posição $x(t) = t^2$ $(0 \leq t \leq 25)$.
> a-) calcule a velocidade média do automóvel no *in*tervalo de tempo [12, 13], [12, 12,1] e [12, 12,01];
> b-) calcule a velocidade (*in*stantânea) do automóvel quando t = 12;
> c-) compare os resultados obtidos na parte (a) com aquele obtido na parte (b)

Ressaltamos que, por hora iremos resolver o item (b) desse problema, no decorrer dos capítulos e no momento apropriado resolveremos os demais itens. Lembramos que a parte (b) do problema pede para calcularmos a Velocidade Instantânea (Derivada) da função posição representada por $x(t) = t^2$ no instante $t = 12\,s$. Assim:

$$\left| \begin{array}{l} x(12) = 144 \\ x\left(12 + \frac{1}{n}\right) = 12^2 + 2.12.\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 144 + \frac{24}{n} + \frac{1}{n^2} \end{array} \right.$$

Então, $A_n = x\left(12 + \frac{1}{n}\right) - x(12) = 144 + \frac{24}{n} + \frac{1}{n^2} - 144 = \frac{24}{n} + \frac{1}{n^2}$. Logo, a velocidade *in*stantânea no *in*stante t = 12 s será: $x'(12) \cong n.A_n = n.\left(\frac{24}{n} + \frac{1}{n^2}\right) =$

$= 24 + \frac{1}{n}$. Quanto maior o valor de n, mais o valor de $n. A_n$ se aproxima de 24, uma vez que $\frac{1}{n}$ se aproxima de zero. Portanto, a velocidade *in*stantânea no *in*stante t = 12 s será $24 \frac{m}{s}$.

Na próxima seção apresentamos a revisão bibliográfica de trabalhos que revelam diversas situações de aprendizagem nas quais há contextualização da Derivada com ênfase na Taxa de Variação.

1.3 Revisão bibliográfica

Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas ao tocar uma alma humana, seja apenas outra alma humana.
Carl Jung

Iniciamos nossa revisão bibliográfica pesquisando no banco de teses, principalmente, da Fundação Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), uma fundação do Ministério da Educação (MEC), que desempenha papel fundamental na expansão e consolidação da pós-graduação stricto sensu (mestrado e doutorado) em todos os estados da Federação.

Pesquisamos também na biblioteca e no banco de teses da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), Vérsila Biblioteca Digital (banco de teses do México), banco de teses da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), banco de teses da Universidade de Brasília (UnB), banco de teses da Universidade de São Paulo (USP), banco de teses da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), banco de teses da Universidade de Vigo (Espanha), biblioteca digital da Universidade de Antioquia (Colômbia) e no banco de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat).

Acessamos tais bancos de dados por meio de palavras-chave como, por exemplo: Taxa de Variação, Derivada, Contextualização, Ensino da Derivada e ENEM.

Dessa forma, encontramos dezenove trabalhos em âmbito nacional e internacional entre dissertações, teses e artigos que nos auxiliaram em nossa pesquisa.

Nesta parte, dissertamos sobre as pesquisas encontradas e, ao final, apresentamos uma síntese apontando os principais resultados e as contribuições para o desenvolvimento de nossa tese.

Em 2011, na Universidade Severino Sombra (USS), Monique Sequeira Lehmann, defendeu o título de mestre profissional em Educação Matemática com o trabalho intitulado: “Proposta de uma sequência Didática para conceitualização[7] de Derivada como Taxa de Variação Instantânea”. Esta dissertação teve por objetivo o desenvolvimento de uma sequência didática que pudesse auxiliar os alunos nos processos de ensino e de aprendizagem em relação ao conceito de Derivada como Taxa de Variação Instantânea.

Para Lehmann (2011), utilizar uma prática pedagógica fundamentada na problematização e construção dos conhecimentos por parte dos alunos pode contribuir de maneira significativa para o processo de conceitualização da Derivada como Taxa de Variação Instantânea.

A pesquisa ocorreu com os alunos dos cursos de engenharia da USS, que possui na sua matriz curricular a disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar, cujo objetivo é rever os principais conteúdos do ensino médio, necessários ao Cálculo.

Os sujeitos da pesquisa fizeram parte da turma (que cursou a disciplina Fundamentos de Matemática Elementar em 2010.1 - esta sigla significa primeiro semestre de 2010) e estavam cursando a disciplina de Cálculo de uma Variável em 2010.2 (esta sigla significa segundo semestre de 2010).

Para a elaboração da sequência didática, a autora fez uma análise prévia dos conhecimentos dos alunos a respeito de funções, gráficos e taxas de variação. Tal análise foi feita porque a autora julgou que esses assuntos são

[7] *conceitualizar: tomar uma representação aderente a um conceito, segundo Lehmann (2011).*

importantes para o entendimento dos temas tratados no Cálculo Diferencial e *In*tegral.

Lehmann (2011) utilizou, principalmente, como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais, segundo Vergnaud (1998) e dividiu a pesquisa em três etapas: na primeira etapa, foi aplicado um teste diagnóstico (teste a priori), no qual se abordou conteúdos considerados básicos e necessários para o entendimento de funções e, consequentemente, de taxa de variação instantânea. Essa primeira etapa teve por objetivo observar como os sujeitos se comportavam diante das tarefas propostas, quais significados e significantes utilizavam para representar os conceitos.

Na segunda etapa, a autora buscou contribuir para que os sujeitos pudessem utilizar os significados e significantes, da melhor maneira e, com isso, construir e compreender o conceito proposto.

Na terceira e última etapa, foi aplicado novamente o teste diagnóstico (teste a posteriori) que teve como objetivo verificar de que forma os temas abordados na sequência de ensino puderam auxiliar os alunos no desenvolvimento das questões e na construção do conceito de Derivada como Taxa de Variação Instantânea.

Essa divisão da pesquisa em três etapas permitiu uma análise comparativa e evolutiva do desenvolvimento dos alunos diante dos assuntos propostos.

A autora concluiu que, com a sequência didática, os alunos apresentaram desempenho satisfatório e conseguiram assimilar o conceito da Derivada como Taxa de Variação Instantânea, além de compreender melhor questões que envolvem funções.

Lehmann (2011) deixa claro que os resultados da pesquisa foram obtidos a partir de uma abordagem pedagógica específica de conceitualização da Derivada como Taxa de Variação Instantânea, a partir da análise geométrica, e esperava que sua pesquisa pudesse contribuir para a conscientização de um professor mais reflexivo e preocupado com a melhora da qualidade do ens*in*o.

Esse trabalho contribuiu para esta tese, pois a autora estuda como conceituar a introdução da Derivada por meio das ideias da Variação e da Taxa de Variação que é a nossa temática.

A dissertação de mestrado profissional, intitulada: Introduzindo o Conceito de Derivada a partir da Ideia de Variação, foi defendida na Universidade Estadual da Paraíba pelo estudante Airlan Arnaldo Nascimento de Lima.

Lima (2012) teve como objetivo elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que possibilitasse a construção do conceito da Derivada de uma função a partir da Variação. Esse trabalho teve por motivação o cotidiano do autor em sala de aula ministrando aulas de Cálculo Diferencial e Integral e as consideráveis dificuldades de aprendizagem dos alunos.

Segundo o autor, o insucesso de muitos professores e alunos no ensino e na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral tem atraído o interesse de pesquisadores em Educação Matemática no mundo todo e diversas temáticas têm sido abordadas neste amplo campo de investigação.

O trabalho foi realizado em uma instituição pública que oferece cursos de nível superior e a sequência didática foi aplicada em uma turma que inicia seus estudos de Cálculo Diferencial e Integral. Dessa forma, foram elaboradas atividades de modo que os conceitos de variação, variação média e taxa de variação instantânea de uma função surgissem de modo intuitivo e natural no desenrolar das atividades propostas.

A aplicação da sequência didática aconteceu durante o horário usual de aula, em c*in*co encontros semanais, totalizando dezoito horas-aula.

A realização dos trabalhos ocorreu em doze duplas e um trio que trabalhou isoladamente uns dos outros. Durante a realização das atividades, cada aluno recebeu duas fichas idênticas, contendo os problemas trabalhados em sala de aula. Os alunos foram orientados para que respondessem as duas fichas e devolvessem uma delas. Uma das fichas ficou com a dupla, para anotações, questionamentos ou correções no momento de discussão das respostas.

As respostas para todos os problemas propostos foram discutidas em sessões plenárias. Ao f*in*al de cada sessão plenária o autor destacava e organizava os conhecimentos mobilizados. Nesses momentos, os alunos tiveram a oportunidade de debater ideias, problemas e soluções.

Vale destacar a preocupação do autor com relação ao tempo, pois há a necessidade de cumprir a ementa da discipl*in*a. Foi cumprido em torno de 80% da ementa prevista. O autor dedicou 25% da carga horária para a aplicação da sequência didática.

Os subsídios metodológicos, desta pesquisa, se alicerçam, pr*in*cipalmente, nos autores Silva e Igliori (1996), Dall'Anese (2000) e D'Avoglio (2002) e, segundo o autor, foram *in*spiradas em pr*in*cípios da Engenharia Didática de Artigue (1996).

Os pressupostos teóricos se baseiam nas ideias de conceito imagem e conceito def*in*ição, conforme proposta de Tall e V*in*er (1981), e nas reflexões de Grattan-Guiness (1997) e Reis (2001) sobre o papel do rigor e da *in*stituição no ens*in*o de Cálculo.

Lima (2012) em sua pesquisa busca, na sequência didática construída, oferecer elementos que possam

> [...] contribuir para que a maior parte dos estudantes formasse [...] o conceito da derivada. [...] A maioria dos alunos conseguiu conceitualizar adequadamente a derivada como uma medida de variação, compreendendo alguns significados, tais como velocidade *in*stantânea, taxa de variação *in*stantânea e coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função. [...] (p.105)

Os resultados obtidos *in*dicaram que a maior parte dos alunos conseguiu conceituar adequadamente a Derivada como uma medida de Variação, compreendendo alguns dos seus significados, tais como: velocidade *in*stantânea e coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função.

A dissertação de mestrado em Ens*in*o da Matemática, *in*titulada: Uma proposta para o ens*in*o do conceito de derivada no ens*in*o médio, foi defendida na Universidade Federal do Rio de Janeiro pela estudante Selma Lopes da Costa André.

André (2008) teve como objetivo de pesquisa apresentar, aplicar e analisar, de forma qualitativa, uma proposta para o ens*in*o do conceito de Derivada no Ens*in*o Médio. Essa orientação foi desenvolvida em quatro etapas: estudo da variabilidade de uma função, taxa de variação média, taxa de variação *in*stantânea e apresentação do conceito de Derivada.

Para alcançar seu propósito o autor optou por uma abordagem baseada na Teoria da Imagem de Conceito (de Tall e V*in*ner -1981) e Raiz Cognitiva (de Tall -1992). Segundo André (2008), pesquisadores utilizam o termo Imagem de Conceito para descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, o qual *in*clui todas as figuras mentais, propriedades e processos associados, ou seja, descrevem imagem de conceito como uma representação, não verbal, que o *in*divíduo tem em mente, de um determ*in*ado conceito.

A ideia da Raiz Cognitiva foi utilizada por André (2008) como sendo um conceito âncora que o aprendiz encontra facilidade para compreender, e que, a*in*da assim, forma uma base a partir da qual a teoria pode ser construída. Segundo o autor, uma raiz cognitiva é diferente de uma fundamentação Matemática. Enquanto a fundamentação Matemática é um ponto de partida apropriado para o desenvolvimento lógico de um conteúdo, uma raiz cognitiva é mais apropriada para o desenvolvimento do currículo.

Nas suas considerações f*in*ais, o autor destaca que ao apresentar uma proposta para o ens*in*o do conceito da Derivada no Ens*in*o Médio baseada na teoria de imagens de conceito e raiz cognitiva, a sequência de atividades viabilizou a apresentação desse conceito e os resultados obtidos nas atividades pelos participantes da pesquisa, durante o curso e na avaliação f*in*al, sugerem que abordagem pedagógica utilizada na proposta apresentada enriqueceu as imagens de conceito dos alunos e tornou o estudo viável para estudantes do Ens*in*o Médio que possuam conhecimentos sobre função.

A tese de doutorado em Educação, intitulada: *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*, foi defendida na Universidade de São Paulo por Maria Crist*in*a Bonomi Barufi.

A pesquisa de Barufi (1999) foi motivada pelas dificuldades existentes no ens*in*o de Cálculo Diferencial e *In*tegral. A autora buscou no referencial teórico:

rede de conhecimentos e significados, a compreensão dessas dificuldades a partir dos Livros Didáticos que, segundo Barufi (1999), é um *in*strumento sempre presente no trabalho do professor na sala de aula.

Dessa forma o enfoque pr*in*cipal do seu trabalho residiu na negociação dos significados e como alguns Livros Didáticos abordam o Cálculo: se por meio de revelação ou uma construção significativa. A tese também discute o papel do professor que, segundo a autora é fundamental em sala de aula tendo como aliado potencial o computador.

Nas considerações f*in*ais, Barufi (1999) ressalta que cada vez mais o conhecimento a ser buscado precisa ser significativo e que felizmente não é mais suficiente a visão dogmática de que determ*in*ados assuntos são importantes para a formação do *in*divíduo. Os estudantes devem perceber a possibilidade de resolver problemas reais e seus, pois assim darão relevância ao tema.

O trabalho de Barufi (1999) faz parte da nossa revisão bibliográfica, pois discute a importância do Livro Didático, que é o objeto de nossa pesquisa.

O trabalho de mestrado, V*in*icius Mendes Couto Pereira, foi defendido na Universidade Federal do Rio de Janeiro sob o título: *Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade*. O autor se baseou nas ideias de mapas conceituais - cuja def*in*ição está em Rezende (2003) e, também por meio desse último trabalho, reuniu c*in*co macroespaços de dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ens*in*o de Cálculo e identificou as origens desses obstáculos: o da evitação/ausência das ideias e problemas construtores do Cálculo no ens*in*o básico de Matemática.

Sendo assim, o pesquisador defende que os embaraços encontrados no ens*in*o de Cálculo são de natureza epistemológica e tais bloqueios ocorrem, em essência, porque existe: omissão/evitação das ideias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ens*in*o de Matemática em sentido amplo.

Pereira (2009) utilizou a concepção de Engenharia Didática para elaborar uma sequência didática por meio da qual visava à *in*serção de ideias fundamentais como, por exemplo, a Variação, do Cálculo no Ens*in*o Médio. Dessa forma, ele lidou com o conceito de função, sob o ponto de vista da variabilidade e observou que tanto o problema da variabilidade quanto o conceito de função, tiveram fundamental importância nas ideias *in*iciais do Cálculo

> [...] a função afim será caracterizada segundo o que consideramos ser, a sua propriedade fundamental, a saber: acréscimos iguais na variável *in*dependente ocasionam acréscimos iguais na variável dependente, ou a*in*da, o acréscimo $f(x+h)-f(x)$ depende apenas de h (PEREIRA, 2009, p. 53)

Pereira (2009) teve como um dos objetivos (após as atividades da sequência didática) que os estudantes fossem capazes de:

> [...] Compreender a propriedade fundamental da função afim; [...] Compreender a caracterização das funções pol*in*omiais de 1° e 2° graus de acordo com a sua variação; [...] Associar a taxa de variação média de uma função com o coeficiente angular da reta secante a dois pontos do gráfico da função; [...] Compreender o comportamento local da reta tangente e ser capaz de traçá-la; [...] Compreender a taxa de variação *in*stantânea como aproximações da taxa de variação média calculada em *in*tervalos cada vez menores; [...] Associar a reta tangente com aproximações das retas secantes traçadas em *in*tervalos cada vez menores (PEREIRA, 2009, p. 55).

O autor concluiu que no ensino de Cálculo existe a prevalência da técnica sobre o significado e que a partir da sequência didática criada por ele é possível tratar as ideias fundamentais do Cálculo no Ensino Médio e dessa forma contribuir para diminuir os seus índices de reprovações no ensino superior. Assim, o autor sinaliza com a possibilidade efetiva de uma nova abordagem dos conceitos que fundamentam todo o desenvolvimento da introdução do Cálculo.

O trabalho de doutorado, cujo título é: *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional*, foi defendido na Universidade de Vigo, no ano de 2015, pela estudante Catar*in*a Oliveira Lucas.

Lucas (2015) utiliza como referencial teórico-metodológico a teoria antropológica do didático (TAD) e a engenharia didática. Sua pesquisa situa-se entre o f*in*al do ens*in*o médio e a primeira série do ens*in*o superior, suger*in*do que alguns tópicos que ela julga elementar de Cálculo sejam abordados por meio da modelagem matemática.

Dessa forma, a autora propõe uma pesquisa educacional, pois acredita na necessidade de encontrar uma razão do porquê o currículo oficial de Cálculo Diferencial e *In*tegral não *in*clui questões e tarefas que a autora nomeia de

Cálculo Diferencial Elementar (CDE). Contudo Lucas (2015), constata alguns problemas relacionados ao ens*in*o do Cálculo na Espanha e também em Portugal: rigidez, *in*completude, desarticulação e atomização dos conceitos de Cálculo. Sendo assim, esses problemas geram entraves que afetam a gênese e o desenvolvimento do aprendizado do Cálculo.

A partir disso, Lucas (2015) construiu um modelo epistemológico de referência que utiliza a modelagem com uma forma de articular e dar sentido ao estudo do Cálculo Diferencial e *In*tegral de funções de uma única variável. Para isso, a autora aplicou uma sequência didática com estudantes do primeiro ano da Licenciatura de Medic*in*a Nuclear[8].

Lucas (2015) concluiu que o aluno deve usar o saber científico para resolver novos desafios/tarefas que possam surgir na sua futura profissão e também saber: responder a questões colocadas de forma diferente do habitual, questionar e estabelecer conjecturas para solucionar situações-problema. Para conseguir este feito, o estudante deve trabalhar com uma Matemática mais flexível, articulada e mais justificada do que é estudada geralmente nos colégios e faculdades.

A dissertação de mestrado em Educação, *in*titulada: *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) como indutor da prática curricular de professores de Matemática a partir da perspectiva de contextualização*, foi defendida na Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul pela estudante Ana Queli Mafalda Reis.

A temática de Reis (2012) é a formação de professores na educação básica e superior no que se refere aos processos e às produções, considerando a *in*teração profissional na elaboração e desenvolvimento de currículos, com explicações e análises dos referenciais teóricos. Para essa pesquisa as *in*formações e análises foram aferidas a partir da utilização de três *in*strumentos: a análise documental, os questionários e as entrevistas semiestruturadas.

---

[8] Segundo a Escola Superior de Tecnologia da Saúde de Lisboa este profissional atua integrado numa equipe multidisciplinar, desenvolvendo ações nas áreas da Radiofarmácia, Medicina Nuclear Convencional, Tomografia de Emissões de Positrões, Hematologia Nuclear, Doseamentos de Radioimunoensaios e Osteodensitometria. Fonte: https://www.estesl.ipl.pt Acesso 03/01/2017.

Reis (2012) buscou relacionar a proposta escolar da base curricular comum e o discurso dos professores de Matemática, a partir do conceito de contextualização tensionada pelas mudanças no ENEM.

Dessa forma, Reis (2012) propõe a segu*in*te questão: Considerando o ENEM como uma política de reestruturação do currículo de Matemática no Ens*in*o Médio, pautada no processo de contextualização do ens*in*o, é possível identificarmos, nas práticas docentes de Matemática atuantes no ens*in*o médio, articulações desse processo com as matrizes de referência do ENEM na área de Matemática e suas Tecnologias e na reestruturação do currículo escolar?

A pesquisadora obteve como resultado de sua pesquisa que, mesmo após 15 anos de orientações e políticas públicas, o currículo da escola e a ação pedagógica do professor parecem *in*diferentes aos processos de reforma curricular, pois mesmo que uma avaliação pública venha a assegurar condições de mudanças no ens*in*o, as ações desenvolvidas em escolas a*in*da parecem estar *in*diferentes à tal proposta. O motivo para esse acontecimento reside no fato dos professores não se sentirem questionados em seu trabalho pelo motivo de que o ENEM a*in*da não se consolidou como referência nacional para o desempenho dos alunos.

Sendo assim, a autora conclui que a escola é *in*diferente às orientações públicas porque os professores não se sentem questionados em seu trabalho e apresentam entendimentos superficiais e limitados para efetivar mudanças no ens*in*o a ponto de comprometer o processo de reforma curricular:

> [...] penso que a educação não é um espaço aberto para o certo ou o errado, e sim um espaço necessariamente aberto para novas perspectivas. A *in*segurança para mudar certamente provoca receios, mas com certeza não existirá espaço para o errado. Poderá haver situações de *in*sucesso, contudo jamais irão banalizar o processo de ens*in*o. Acredito que esse seja o maior receio do professor, que, ao tentar mudar sem saber exatamente o que fazer, tem medo de prejudicar o seu aluno, e por isso deixa o seu ens*in*o cont*in*uar l*in*ear e um tanto regular durante a sua carreira docente. (REIS, 2012, p. 103)

O trabalho de Reis (2012) discute o ENEM como *in*dutor de situações de aprendizagens contextualizadas em Matemática. Utilizamos esse trabalho, pois propomos uma situação de aprendizagem em que aproveitamos uma questão contextualizada do ENEM para *in*troduzirmos o conceito de Derivada.

A dissertação de mestrado em Educação Matemática, *in*titulada: *Conceito de derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem*, foi defendida na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo pelo estudante Claudio Dall'Anese.

O trabalho se apoia na metodologia de uma sequência didática com atividades apresentadas em ficha, em que os alunos trabalham em duplas, para perceber a essência do conceito de derivada. Após a resolução das fichas estabelece-se uma plenária para a discussão das respostas apresentadas.

> O ponto de partida das atividades é a apresentação de um problema do mundo concreto, que requer para a sua resolução, uma ferramenta a*in*da não disponível para os alunos. Tal ferramenta é a derivada. Ao tentar resolver o problema, o aluno percebe que a*in*da não dispõe de todos os elementos necessários. (DALL'ANESE, 2000, p.42)

O pesquisador embasou sua dissertação em elementos da Didática da Matemática e também em pr*in*cípios da Teoria do Conhecimento, em particular na questão da formação dos conceitos "espontâneos" e "científicos". Sendo assim, a noção de Contrato Didático orientou o autor com relação à elaboração, aplicação e análise da sequência didática.

O autor encontrou dificuldades de aceitação da sequência didática por parte dos alunos, pois não t*in*ham ferramenta disponível para resolver o problema apresentado e diversos entraves foram enfrentados como, por exemplo, de representação escrita matemática, de *in*terpretação do enunciado das questões, de manipulação algébrica e localização de pontos no gráfico. Portanto, por meio dessa sequência didática houve uma ruptura do Contrato Didático vigente que era o do estudante não ser o protagonista do aprendizado.

Além disso, o autor realizou discussões em plenárias (das resoluções dos alunos) que segundo ele constitui um mecanismo eficaz para observar as dificuldades dos alunos e apresentar exemplos de forma a progredir com o aprendizado.

Dall'Anese (2000, p.126) conclui que: "no *in*ício da sequência didática, estes alunos deram *in*dícios que a noção de variação é um conceito espontâneo. Utilizar esta noção como "ponto de partida" para abordar o conceito de derivada, apontou ser uma escolha acertada".

Salientamos que esta afirmação enunciada aproximadamente há qu*in*ze anos nos motivou a*in*da mais a estudar o tema: “A abordagem dada à Taxa de Variação no Livro Didático do Ens*in*o Médio e a sua relação com o conceito da Derivada no Livro Didático do Ens*in*o Superior”.

A dissertação de mestrado em Educação Matemática, *in*titulada: *O tratamento dado por livros didáticos ao conceito de Derivada*, foi defendida na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo pelo estudante Rogério dos Santos Lobo.

A pesquisa de Lobo (2012) está imersa na temática da análise da *in*ter-relação entre a epistemologia, história e didática da matemática com vistas à melhor compreensão dos fenômenos ligados ao ens*in*o e a aprendizagem da Matemática, às relações entre saberes científicos e escolares. Esse trabalho utilizou como fundamentação teórica os registros de Representação Semiótica de Duval e os procedimentos metodológicos da Análise de Conteúdo de Bard*in*.

O autor teve por foco a análise de três livros didáticos no que se refere às dificuldades na aprendizagem do Cálculo Diferencial e *In*tegral e, em particular, da Derivada. Escolheu-se realizar uma pesquisa *in*vestigativa de como os livros abordam esse conteúdo, e verificou-se se há ênfase no aspecto da Taxa de Variação.

Sendo assim foram analisados três Livros Didáticos nomeados por ele de Livro A (*in*dicado para cursos de Engenharia), Livro B (*in*dicado para cursos de Adm*in*istração e Economia) e Livro C (*in*dicado para cursos de Matemática e Engenharia).

O referencial teórico-metodológico permitiu ao autor *in*vestigar se o tratamento dado pelos livros didáticos, por meio dos textos, exercícios resolvidos e propostos e outras atividades faziam a articulação entre os registros da teoria dos Registros de Representação Semiótica, possibilitando a compreensão da Derivada com ênfase na Taxa de Variação.

Nessa dissertação, o autor concluiu que os livros faziam o tratamento a partir da Taxa de Variação, mas só um dos livros, escrito pr*in*cipalmente aos alunos de adm*in*istração, referenciava à Taxa de Variação, os outros dois, dedicados mais a alunos de engenharia, nem cogitavam.

O trabalho de Maryna de Oliveira Paiva de mestrado foi defendido na Universidade de Brasília em 13/03/2015 sob o título: *Aplicações do Estudo da Derivada no Nível Básico de Ensino Associado à Resolução de Questões de Máximos e Mínimos.*

A autora focou seu trabalho no estudo de questões de otimização que podem ser resolvidas tanto pelo método aprendido na Educação Básica (até o Ens*in*o Médio), quanto por meio de uma nova ferramenta, que foi apresentada e explicada no decorrer da dissertação; tal ferramenta é a derivada.

A pesquisa se apoia em artigos de alguns pesquisadores: Busse (2006), Soares (2006), Ávila (1996) e Duclos (1992) que apoiam a implementação do ens*in*o de Limites e Derivadas no Ens*in*o Médio.

Paiva (2015) conclui que comparar a resolução dos exercícios, ora feito com a derivada e ora feito sem a derivada, permitiu perceber que a Derivada é uma ferramenta flexível e que permitiria aos estudantes aprofundarem em outros conteúdos se fosse ens*in*ada mais cedo na sua vida acadêmica.

O artigo de Patricia Camarena Gallardo faz uma releitura das contribuições de como lidar com o problema da aprendizagem e ens*in*o da Matemática no nível superior, especificamente na área de engenharia. O título de seu trabalho é: *Aportaciones de investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática en ingeniería.*

A autora discute problemas de aprendizagem e de ens*in*o da Matemática nas carreiras nas quais a Matemática é uma discipl*in*a de serviço.

A pesquisa é realizada sobre a temática do ensino da Matemática no nível superior, especificadamente na área de Engenharia, em que a matemática é uma disciplina de serviço. Esse trabalho culminou com a construção da Teoria Educacional chamada por ela de: Matemática no Contexto das Ciências. Esse princípio inclui o processo educacional como um sistema em que os conteúdos, o aluno e o professor interagem, bem como as interações ocasionadas entre todos eles.

Além disso, a caracterização de modelos matemáticos e sua classificação em engenharia, descritos na modelagem matemática são concebidas como um processo em que o aluno possui para manipular variáveis e constantes e assim chegar a formular o modelo matemático que deve ser validado de acordo com o enunciado do problema.

Camarena (2010) conclui que a Teoria: Matemática no Contexto das Ciências é uma teoria nascida no nível superior, ao contrário da maioria das teorias de ens*in*o e aprendizagem nascidas no nível básico. Essa teoria fornece muitas das variáveis envolvidas no processo educacional, que se parece com um processo social, e tende a construir uma matemática para a vida. A autora também defende que o professor deve fazer pesquisa educacional que o auxiliará para elevar a qualidade acadêmica da educação, porque ens*in*o e pesquisas em educação estão ligadas.

A Teoria também é estendida para *in*cluir competências; sendo essa última entendida como os pontos fortes do futuro profissional para enfrentar uma situação problemática, utilizando a *in*tegração de toda a sua riqueza de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que são mobilizados em suas estruturas cognitivas.

Sendo assim, esse trabalho torna-se importante para a nossa pesquisa, pois a autora estuda como propor situações-problema, situações contextualizadas ou modelagem matemática para *in*troduzir conceitos de Matemática.

O trabalho de Doutorado em Educação, cujo título é*: La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*, foi defendido na Universidade de Antioquia, Colômbia por Jhony Alexander Villa-Ochoa.

Segundo Villa- Ochoa (2012):

> A taxa de variação *in*stantânea ou taxa de variação é um conceito que tem chamado à atenção de vários pesquisadores; em parte, porque existe uma relação com outros conceitos fundamentais da análise matemática como a derivada [...][9] (p.3).

---

[9] *La tasa de variación o razón de cambio ha sido un concepto que ha llamado la atención de diversos investigadores; en parte, porque se encuentra en relación con otros conceptos fundamentales del análisis matemático como la derivada [...] (p.3).*

Sendo assim sua tese é desenvolvida em torno da segu*in*te questão de pesquisa: Como desenvolver o processo de compreensão da taxa de variação de forma a oferecer uma *in*terpretação variacional da derivada em alunos participantes de um curso de pré-cálculo? [10]

Para responder a sua questão de pesquisa Villa-Ochoa (2012) recorre à fundamentação teórico-metodológica: teoria para a evolução da compreensão matemática de Pirie e Kieren (1994) que esclarecem como *in*vestigar o processo de compreensão de um conceito matemático. É uma ferramenta que possibilita observar o processo de evolução da compreensão matemática de um aluno ou um grupo de alunos.

De acordo com esse pr*in*cípio um dos fatores envolvidos na compreensão matemática são as *in*terações com diferentes meios. No trabalho de Villa-Ochoa (2012) foi utilizado o software *Geogebra*.

O autor utiliza a construção de triângulos sob a curva (como fizemos na Figura 16, p.76) para promover uma *in*terpretação alternativa para a Taxa de Variação. Dessa forma, os alunos podem obter uma imagem direta do crescimento de uma variável em relação à outra variável e o professor pode utilizar uma abordagem diferente da clássica, na medida em que envolve situações que promovem diferentes questionamentos e *in*terpretações da Taxa de Variação e dessa forma, construir imagens, relacionamentos e novas *in*terpretações que contribuem para uma maior compreensão desse tema. Por exemplo, a compreensão dos estudantes da Taxa de Variação a partir dessas ideias direciona o pensamento deles para a Taxa de Variação Média, Taxa de Variação em um *in*tervalo e f*in*almente a Taxa de Variação *In*stantânea que leva ao conceito de Derivada.

O autor concluiu que, de acordo com a abordagem proposta, os alunos aprofundaram nos porquês das suas conclusões tomando consciência das relações estabelecidas entre as imagens da Taxa de Variação. Dessa maneira, sua pesquisa fornece evidência para apoiar a importância de situações flexíveis

---

[10] *¿Cómo se desarrolla el proceso de comprensión de la tasa de variación como una manera de ofrecer una interpretación variacional de la derivada en estudiantes participantes de un curso de pre-cálculo?*

(em detrimento de situações rígidas e pré-estabelecidas) resultantes de questionamentos que surgiram em ambiente experimental da sala de aula.

Villa-Ochoa (2012) ressalta que o processo da compreensão em Matemática é um produto da *in*teração social dos alunos, professores e os meios de comunicação que podem ser enquadrados na construção teórica, por exemplo, o *Geogebra*.

O autor evidencia a*in*da que sua pesquisa não está ligada ao uso de *softwares* para entender matemática (mais facilmente), mas por meio dele a construção do conhecimento matemático parece harmonizar com os elementos da sociedade onde o uso de chats, telefones celulares, computadores, *in*ternet e redes sociais tornaram-se um cotidiano, ou seja, eles já são parte *in*erente da nossa cultura.

O artigo intitulado *Desarrolo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioespitemológica* de Ricardo Cantoral Uriza relata que a ciência e a educação estão v*in*culadas a práticas sociais e culturais específicas diferentemente da matemática que tem a premissa de lidar com objetos abstratos e o professor em sua prática comunica verdades pré-existentes a seus alunos. Ao assumir essa concepção ele apresenta o mais depressa possível o significado abstrato dos objetos matemáticos desconsiderando a sua origem e sua função social.

De acordo com o autor, todo conhecimento é devido a uma necessidade de natureza prática, pois segundo os historiadores da ciência, algumas noções da matemática vêm de abstrações sucessivas e generalizações empíricas. Devido a essas reflexões Uriza (2004) fornece uma orientação, a sua pesquisa, socioepistemológica para estabelecer uma relação entre a natureza do conhecimento que os humanos produzem e as causas e razões dessa elaboração.

Uriza (2004) expõe que a proposta de sua abordagem tem origem no sem*in*ário de pesquisa na área de educação superior do Departamento de Educação Matemática do *In*stituto de Pesquisa Científica na cidade do México (C*in*vestav) e em uma conferência de pesquisa em Educação Matemática do Central Michigan University nos EUA, ocorrida no ano de 1997.

Segundo o autor a socioepistemologia consiste em uma abordagem sistematizada que permite trabalhar com a produção e dissem*in*ação do conhecimento a partir de *in*úmeras perspectivas articulando as *in*terações do conhecimento aos processos socioculturais e cognitivos que estão associados ao ens*in*o.

Uriza (2004) destaca a*in*da que nenhum conhecimento foi adquirido soz*in*ho e que os livros didáticos *in*sistem em supor que o conhecimento matemático e, especialmente, a universidade, obedece a leis próprias da matemática. Por exemplo, a literatura utiliza os verbos: demonstrar, aplicar, calcular, deduzir e verificar para difundir o conhecimento. O autor propõe de acordo com o seu referencial teórico-metodológico a troca desses verbos para: prever, argumentar, antecipar, chegar a um consenso e participação para assim dissem*in*ar uma noção da matemática focada no uso e na funcionalidade social a ela associada.

Seguindo esse princípio o autor sugere uma atividade para os alunos da educação básica, que estão tendo um curso de geometria analítica, de construírem a equação da reta por meio da semelhança de triângulos, destacando a linguagem variacional. Já para os alunos do curso de Cálculo o autor destaca que, se não for feita a linguagem variacional da Derivada na sua introdução, pode ocorrer um problema de aprendizado, pois os alunos podem lembrar o que significa algébrica e geometricamente a primeira e a segunda derivada, mas são incapazes de dizer o que significa a terceira derivada, por exemplo.

O autor ilustrou esse fato ao colocar duas situações de aprendizagem para os estudantes:

● ens*in*o básico: os alunos possuíam um triângulo retângulo (EDB) *in*scrito em outro triângulo retângulo (ACB). Ao fazer a ilustração deste fato colocando o ponto E aproximadamente na metade de $\overline{AB}$ os alunos escrevem corretamente a proporção $\frac{\overline{AC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EB}}$, por exemplo. Mas ao colocarmos o ponto E próximo do ponto B os estudantes apresentam dificuldades de estabelecer a relação correta.

● ens*in*o superior: os alunos possuíam certo pol*in*ômio de grau seis, na sua representação gráfica, e foi pedido a eles *in*dicarem no gráfico as representações de $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ e $f'''(x) > 0$. Os estudantes obtiveram relativo sucesso nas representações de $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, mas não sabiam explicar se existia tal representação de $f'''(x) > 0$ ou mesmo o que significava a terceira derivada.

Uriza (2004) concluiu que esses problemas poderiam não ter ocorrido se a l*in*guagem variacional sob a perspectiva socioepistemológica fosse desenvolvida no ens*in*o da matemática nesses anos escolares, pois esse ponto de vista privilegia o estudo de processos cognitivos que são desenvolvidos pela propriedade da Variação levando em conta situações-problema com âmbito social.

Sendo assim, esse trabalho tornou-se importante para a nossa pesquisa, pois utiliza as ideias da Variação e da Taxa de Variação para construir e utilizar a equação da reta por meio da l*in*guagem proporcional para posterior análise do crescimento e decrescimento da função e a v*in*culação desse estudo com a Derivada.

Carlos Mario Jaramillo López, Johny Alexander Villa-Ochoa e Pedro Vicente Esteban Duarte apresentaram o artigo, cujo título é *Aspectos emergentes en la comprensión de la tasa de variación*, na XIII *Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (CIAEM).

Nele, os autores por meio da teoria de Pirie e Kieren (1994) e pela metodologia da pesquisa - estudo de caso - feito de acordo com os pr*in*cípios e as justificativas de Goldenberd (2007) e Y*in* (2009) - *in*vestigam a maneira como se desenvolve o processo de compreensão de uma ideia fundamental da matemática que é a Taxa de Variação.

De acordo com López (2011) *et al*, a Taxa de Variação é uma concepção básica porque está associada a um conceito importante da Análise, por exemplo, a Derivada. Para a sua compreensão devem ser abordados processos d*in*âmicos que estão associados a ela: a Variação e a Taxa de Variação.

Segundo os autores, a frágil compreensão das ideias básicas da Variação e da Taxa de Variação podem acarretar dificuldades com a aprendizagem da Derivada. De acordo com Dolores (2007) *apud* López (2011) *et al*:

> O ens*in*o do cálculo diferencial (CD) ao nível do ens*in*o superior, em muitos países enfrenta um problema generalizado: os estudantes raramente entendem as suas ideias de base, especialmente aqueles relacionados com a derivada. As evidências mostradas [...] são co*in*cidentes, quando term*in*am o seu curso de CD quantidades significativas de estudantes alcançam um domínio aceitável de algoritmos algébricos para calcular os limites e derivadas, mas dificilmente compreendem o significado desses procedimentos. Eles mal conseguem reconhecer as ideias associadas ao conceito de derivada na resolução de problemas de variação e taxa elementares embora os problemas deste tipo sejam a essência deste conceito (p.i.)[11]

Neste artigo os autores destacam o papel da Taxa de Variação Média e *In*stantânea como um componente importante para a compreensão da Derivada relatando a*in*da que, por exemplo, para alunos de engenharia mecânica é mais *in*teressante que compreendam a Derivada por meio da Taxa de Variação, pois estes preferem a aplicação do conceito já o estudante do curso de Matemática é provável que prefira a sua *in*terpretação como tangentes.

De acordo com López (2011) *et al* a Teoria para a Evolução da Compreensão Matemática de Pirie e Kieren (1994) tem suas origens em questionamentos construtivistas da aprendizagem em Matemática ressaltando que a compreensão é um processo contínuo de organização de estruturas de conhecimento, d*in*âmico, não l*in*ear e com uma organização hierárquica de estruturas do conhecimento. Dessa forma a teoria é uma ferramenta que atua como uma lente permit*in*do observar a compreensão matemática de uma pessoa ou um grupo de pessoas.

O estudo de caso foi realizado com quatro estudantes de engenharia que estavam cursando a discipl*in*a pré-cálculo. Para as análises, os autores usaram

---

[11] *La enseñanza del cálculo diferencial (CD) en el nivel medio superior, en muchos países enfrenta un problema generalizado: los estudiantes escasamente comprenden sus ideas básicas, especialmente las relacionadas con la derivada. Las evidencias mostradas […] son coincidentes, al terminar sus cursos de CD cantidades significativas de estudiantes logran un dominio aceptable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas pero difícilmente comprenden el significado de esos procedimientos. Incluso, difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales de variación y cambio a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentra la esencia de este concepto (p.I).*

as segu*in*tes *in*formações: observação do participante, situação de aprendizagem, questionários e entrevistas. Sendo assim a pesquisa foi desenvolvida em duas fases. A primeira fase consistia no reconhecimento das caraterísticas contextuais e na segunda as concepções dos estudantes na abordagem da Taxa de Variação. A*in*da nesta segunda fase os alunos foram submetidos à resolução de algumas situações de aprendizagem, utilizando o software *Geogebra*, como por exemplo: velocidade, aceleração e análise da função Taxa de Variação.

López (2011) *et al* ao analisarem as situações de aprendizagem perceberam que os estudantes possuíam algumas noções de: reconhecimento e *in*terpretação da Taxa de Variação em situações em que ela é constante para funções l*in*eares, contextualizada e com representações tabular, gráfica e algébrica e a Taxa de Variação Média em problemas de velocidade.

Os autores concluíram que para ocorrer a compreensão da Taxa de Variação seria necessário utilizar várias de suas representações (gráfica, tabular e algébrica, pr*in*cipalmente). Os alunos não a reconheceram em situações de funções não l*in*eares e obtiveram relativo sucesso, nos acontecimentos relatados anteriormente, pela associação da Taxa de Variação à proporcionalidade e, assim, segundo os pesquisadores, os estudantes possuíam noções *in*completas desse conceito.

De acordo com os autores os estudantes possuem alguns conceitos previamente estudados, mas não compreendem bem todos os aspectos envolvidos e, assim, termos *in*completos e imprecisos surgem para tentar explicar a Taxa de Variação de funções não l*in*eares.

Os quadros apresentados a seguir s*in*tetizam a nossa revisão bibliográfica destacando o autor, ano, título, fundamentação teórica, conclusão (pontos pr*in*cipais) e a importância do trabalho para a nossa pesquisa.

Neste quadro destacamos a última coluna: “Contribuições deste trabalho para esta pesquisa” e identificamos que os trabalhos citados nesta seção se tornaram relevantes para a nossa pesquisa, por tratarem de temáticas mais próximas da nossa pesquisa e também do nosso objeto de *in*vestigação que é o Livro Didático. Esses trabalhos tiveram por objetivo, pr*in*cipalmente, a aprendizagem do conceito da Derivada como Taxa de Variação por meio das situações-problema e da contextualização. Elencamos alguns “pilares” da nossa pesquisa e os autores que exploraram os assuntos:

●conceituar a *in*trodução da Derivada por meio das ideias da Variação e da Taxa de Variação: Lehmann (2011), Lima (2012), André (2008), Pereira (2009), Dall´Anese (2000), Lobo (2012), Paiva (2015), Villa-Ochoa (2012), Uriza (2004) e López (2011) *et al*;

●propor Situações-Problema, Situações Contextualizadas ou Modelagem Matemática para *in*troduzir conceitos de Matemática: Lucas (2015) e Camarena (2010);

●o ENEM como *in*dutor de situações de aprendizagens contextualizadas em Matemática: Reis (2012);

●importância do uso do Livro Didático como um dos recursos para a aprendizagem da Matemática: Barufi (1999).

Quadro 1: Resumo da Revisão Bibliográfica (1ª parte)

TRABALHOS	TÍTULO	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA-METODOLÓGICA	CONCLUSÃO (pontos principais)	Contribição deste trabalho para esta pesquisa
Autora: LEHMANN, M. **Ano: 2011**	**PROPOSTA DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA CONCEITUALIZAÇÃO DE DERIVADA COMO TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA**	Teoria dos Campos Conceituais	Foi realizado o método do teste diagnóstico no qual se abordou conteúdos básicos e necessários para o entendimento da Taxa de Variação Instantânea. Os alunos apresentaram desempenho satisfatório e conseguiram assimilar o conceito de Derivada como Taxa de Variação Instatânea	A ideia de conceituar, inicialmente, a Derivada por meio da Taxa de Variação utilizando uma prática pedagógica fundamentada na problematização do conceito
Autor: LIMA, A. **Ano: 2012**	**INTRODUZINDO O CONCEITO DE DERIVADA A PARTIR DA IDEIA DE VARIAÇÃO**	Figura de Conceito e Relfexões de Grattan-Guiness sobre o papel do rigor e da instituição no ensino de Cálculo	Os resultados obtidos indicaram que a maior parte dos alunos conseguiu conceituar adequadamente a Derivada como uma medida de Variação, compreendendo alguns dos seus significados, tais como: velocidade instantânea e coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função	A ideia de conceituar a Derivada como uma medida de Variaçao utilizando uma sequência didática norteada por situações problematizadoras
Autora: ANDRÉ, S. L. da C. **Ano: 2008**	**UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE DERIVADA NO ENSINO MÉDIO**	Teoria da Imagem de Conceito (de Tall e Vinner (1981)) e Raiz Cognitiva (de Tall (1992)).	O autor destaca que ao apresentar uma proposta para o ensino do conceito de Derivada no Ensino Médio baseada na Teoria de Imagens de Conceito e Raiz Cognitiva a sequência de atividades viabilizou a apresentação deste conceito e a abordagem pedagógica utilizada na proposta apresentada enriqueceu as imagens de conceito dos alunos e tornou o estudo viável para estudantes do Ensino Médio	As ideias fundamentais do cálculo, como por exemplo: a Variação, Taxa de Variação Média e Taxa de Variação Instantâne são utilizadas para introduzir o conceito da Derivada.
Autora: BARUFI, M. C. B. **Ano: 1999**	**A CONSTRUÇÃO/ NEGOCIAÇÃO DE SIGNIFICADOS NO CURSO UNIVERSITÁRIO INICIAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**	Rede de Conhecimentos e Significados	A autora ressalta que cada vez mais o conhecimento a ser buscado precisa ser significativo e que felizmente não é mais suficiente a visão dogmática de que determinados assuntos são importantes para a formação do indivíduo. Os estudantes devem perceber a possibilidade de resolver problemas reais e seus, pois assim darão relevância ao tema.	Análises de livros didáticos sobre a abordagem do Cálculo no que diz respeito a uma revelação ou a uma construção significativa. A importância da utilização do livro didático em sala de aula pelo professor.
Autor: PEREIRA, V. M. C. **Ano: 2009**	**CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA PARA O PROBLEMA DA VARIABILIDADE**	Mapas Conceituais , ideias de macro-espaços para identificar as origem das dificuldades de aprendizagem do Cálculo e a Engenharia Didática	No ensino de Cálculo existe a prevalência da técnica sobre o significado e que a partir da sequência didática criada por ele é possível tratar as ideias fundamentais do Cálculo no Ensino Médio e dessa forma contribuir para diminuir os seus índices de reprovações no ensino superior	O autor utiliza a ideia de Variação como uma ideia básica,com estudantes do Ensino Médio, para conceituar a Derivada

Fonte: o pesquisador

Quadro 2: Resumo da Revisão Bibliográfica (2ª parte)

TRABALHOS	TÍTULO	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA-METODOLÓGICA	CONCLUSÃO (pontos principais)	Contribição deste trabalho para esta pesquisa
Autora: LUCAS, C. O. **Ano: 2015**	**UNA POSIBLE «RAZÓN DE SER» DEL CÁLCULO DIFERENCIAL ELEMENTAL EN EL ÁMBITO DE LA MODELIZACIÓN FUNCIONA**	Teoria Antropológico do Didático e Engenharia Didática	o aluno deve usar o saber científico para resolver novos desafios/tarefas que possam surgir na sua futura profissão e também saber: responder a questões colocadas de forma diferente da habitual, questionar, estabelecer dúvidas e conjecturas para poder solucionar problemas. Para conseguir este feito, o estudante deve trabalhar com uma Matemática mais flexível, aberta, articulada e mais justificada do que é estudada geralmente nos colégios e faculdades	A autora estuda uma possível razão de existir do Cálculo Diferencial e Integral entre o término do Ensino Médio e a primeira série do Ensino Superior, por meio da Modelagem Matemática
Autora: REIS, A. Q. M. **Ano: 2012**	**EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO (ENEM) COMO INDUTOR DA PRÁTICA CURRICULAR DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA A PARTIR DA PERSPECTIVA DE CONTEXTUALIZAÇÃO**	Reflexões sobre a contextualização de Santos Neto. A aprendizagem escolar e a problematização a partir da significação de conceitos de Vygostky.	O currículo da escola e a ação pedagógica do professor parecem indiferentes aos processos de reforma curricular, pois mesmo que uma avaliação pública venha a assegurar condições de mudanças no ensino, às ações desenvolvidas em escolas ainda parecem estar indiferentes a tal proposta. O motivo para este fato reside no fato dos professores não se sentirem questionados em seu trabalho pelo fato de que o ENEM ainda não se consolidou como referência nacional para o desempenho dos alunos.	A autora discute a questão da contextualização do ENEM para introduzir questões de Matemática, pelos professores.
Autor: DALL'ANESE, C. **Ano: 2000**	**CONCEITO DE DERIVADA: UMA PROPOSTA PARA SEU ENSINO E APRENDIZAGEM**	Princípios da Teoria do Conhecimento, em particular na questão da formação dos conceitos "espontâneos" e "científicos". A noção de Contrato Didático orientou o autor com relação à elaboração, aplicação e análise da sequência didática	A sequência didática, deu indícios que a noção de variação é um conceito espontâneo. Utilizar esta noção como "ponto de partida" para abordar o conceito de Derivada. apontou ser uma escolha acertada"	O autor defende a ideia de conceituar a Derivada por meio da Taxa de Variação
Autor: LOBO, R. S. **Ano: 2012**	**O TRATAMENTO DADO POR LIVROS DIDÁTICOS AO CONCEITO DE DERIVADA**	Registros de Representação Semiótica de Duva	Apenas um dos livros, escrito principalmente aos alunos de administração, faz a associação da Taxa de Variação a Derivada de forma explícita, os outros dois dedicados mais a alunos de engenharia não o fazem	O autor explora, nos Livros Didáticos, as representações da Derivada se ocorrem por meio da ênfase na Taxa de Variação

Fonte: o pesquisador

Quadro 3: Resumo da Revisão Bibliográfica (3ª parte)

TRABALHOS	TÍTULO	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA - METODOLÓGICA	CONCLUSÃO (pontos principais)	Contribição deste trabalho para esta pesquisa
Autora: PAIVA, M. O. **Ano:** 2015	**APLICAÇÕES DO ESTUDO DA DERIVADA NO NÍVEL BÁSICO DE ENSINO ASSOCIADO À RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DE MÁXIMOS E MÍNIMOS**	Artigos de pesquisadores: Ronaldo da Silva Busse, Flávia dos Santos Soares, Geraldo Ávila e Roberto Costallat Duclos que apoiam a implementação do ensino de Limites e Derivadas no Ensino Médio.	Ao comparar a resolução dos exercícios ora feito com a Derivada e ora feito sem a Derivada permitiu perceber que a Derivada é uma ferramenta flexível e que possibilitaria os alunos aprofundarem em outros conteúdos se fosse ensinada mais cedo na vida acadêmica dos nossos estudantes	A autora estuda como implementar as noções de conceitos elementares de Derivada (Máximos e Mínimos) no Ensino Médio.
Autor: JÚNIOR, J. A. O **Ano:** 2015	**UM ESTUDO SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO ENSINO MÉDIO**	Artigos de pesquisadores: Lopes, Machado e Geraldo Ávila que apoiam a implementação do Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio	A utilização de métodos de ensino da Derivada com exemplos do cotidiano e menos formal relevou por parte dos estudantes maior aprendizado do conceito.	O autor estuda como implementar as noções de conceitos elementares de Derivada e Integral no Ensino Médio
Autor: CAMARENA, P. G. **Ano:** 2010	**APORTACIONES DE INVESTIGACIÓN AL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN INGENIERÍA**	Matemática no Contexto da Ciência	A teoria: Matemática no contexto das Ciências é uma teoria nascida no nível superior e para o nível básico, ao contrário da maioria das teorias de ensino e aprendizagem nascidas no nível básico.	A autora explora a questão da contextualização do Cálculo no curso de engenharia.
Autor: VILLA-OCHOA, J. A **Ano:** 2012	**LA COMPRENSIÓN DE LA TASA DE VARIACIÓN PARA UNA APROXIMACIÓN AL CONCEPTO DE DERIVADA. UN ANÁLISIS DESDE LA TEORÍA DE PIRIE Y KIEREN.**	Teoria para a Evolução da Compreensão Matemática de Pirie e Kieren (1994) que esclarecem como investigar o processo de compreensão de um conceito matemático.	De acordo com a abordagem porposta os alunos aprofundaram nos porquês das suas conclusões tomando consciência das relações estabelecidas entre as imagens da Taxa de Variação. Dessa maneira, sua pesquisa fornece evidência para apoiar a importância de situações flexíveis em detrimento de situações rígidas e pré estabelecidas	O autor estuda a relação da Taxa de Variação com a Derivada na perspectiva da teoria do conhecimento
Autor: Uriza C. R., **Ano:** 2004	**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL, UNA MIRADA SOCIOEPISTEMOLÓGICA**	Abordagem socioespitemológica desenvolvida em seminários no Cinvestav e conferências do Central Michigan University	A abordagem socioepistemológica das proporcões e da Derivada podem levar a melhor compreensão desses objetos matemáticos como uma linguagem variacional	O autor estuda a importância de desenvolvermos em sala de aula a linguagem variacional no ensino da matematica desde a educação básica até o ensino superior
Autor: López *et al*. **Ano:** 2011	**ASPECTOS EMERGENTES EN LA COMPRENSIÓN DE LA TASA DE VARIACIÓN**	Teoria para a Evolução da Compreensão Matemática de Pirie e Kieren (1994) e estudo de caso de acordo com os princípios e justificativas de Goldenberd (2007) e Yin (2009)	Para ocorrer à compreensão da Taxa de Variação é necessário utilizar várias de suas representações, pois os alunos não a reconheceram, por exemplo, em situações de funções não lineares	Os autores estudam a compreensão da Taxa de Variação, conceito adquirido pelos estudantes em anos escolares anteriores, para focá-la na introdução da Derivada

Fonte: O pesquisador

Percebemos que na maior parte dos trabalhos é analisada, até em nível *in*ternacional, a necessidade da contextualização, da problematização e do resgate das ideias fundamentais do Cálculo para o aprendizado por parte dos estudantes e nessa circunstância, a conceitualização da Derivada com ênfase na Taxa de Variação é muito eficaz para o aprendizado escolar/acadêmico.

De acordo com André (2008):

> [...] desenvolver as ideias básicas de Cálculo no Ens*in*o Básico. Este seria um dos primeiros passos para tentar resolver problemas de aprendizagem nos cursos *in*iciais de cálculo, cujos índices de reprovação e evasão chegam a níveis *in*sustentáveis, o que pode afetar, em longo prazo, o desenvolvimento tecnológico do país (p. 27).

Na próxima seção apresentamos uma justificativa educacional para a abordagem da Derivada por meio da Taxa de Variação e, assim, os professores do Ens*in*o Superior ao *in*troduzirem a noção da Derivada, poderiam aproveitar o conteúdo já trazido pelo estudante a respeito da noção da Taxa de Variação, já cobrada *in*clusive, no ENEM, conforme Reis (2012):

> [...] Paiva afirma que, após a LDBEN 9.394/1996 e antes do Enem (1998), não havia mudanças significativas no ens*in*o, porque “não mostravam como fazê-las. Os professores não compreendiam bem os significados das expressões: contextualização, *in*terdiscipl*in*aridade, temas transversais, etc. Os autores de livros didáticos, também hesitantes, não ousavam arriscar algo novo” (ibidem, p. 113). O pesquisador constatou que o Enem é o primeiro documento oficial a concretizar as propostas do Ens*in*o Médio segundo a LDBEN 9.394/1996, na forma de exercícios que contemplam as orientações de contextualização e *in*terdiscipl*in*aridade [...] (p.18).

O ENEM poderia, portanto, ser indutor da prática em sala de aula dos professores de Cálculo Diferencial e Integral a partir da contextualização.

1.4 Justificativa educacional para a abordagem da derivada por meio da taxa de variação

> Tudo deveria se tornar o mais simples possível, mas não simplificado.
> **Albert Einstein.**

Escolhemos situações-problema, para exemplificarmos um contexto de aprendizagem da Derivada por meio da Taxa de Variação, do Exame Nacional do Médio (ENEM), por ele ser um exame nacional criado pelo M*in*istério da Educação (MEC) e também por constituir uma das formas de acesso dos estudantes a universidade pública ou privada, neste caso por meio do Programa Universidade para todos (ProUni) concedendo bolsas de estudo atreladas a nota obtida no Exame. O ENEM é visto pelos especialistas como a democratização do processo seletivo.

Sobre a Matemática e as Competências: o ENEM, Machado (2016) aponta que:

> Nas últimas duas décadas, explicitou-se com mais nitidez o que já era apresentado tacitamente em todas as propostas curriculares: por mais importantes que sejam, os conteúdos discipl*in*ares, nas diversas áreas, são os meios para a formação dos alunos como cidadãos e como pessoas. [...] o foco permanente da ação educacional deve situar-se no desenvolvimento das competências pessoais dos alunos, ou seja, o fim último da Educação é a formação pessoal. (p.8)

Além disso, o estudante já trabalhou com Taxas de Variação no Ens*in*o Médio, tanto que o conteúdo é amplamente cobrado no ENEM com questões que envolvem as ideias da Variação ou da Taxa de Variação.

Para exemplificarmos este fato, observamos as provas na versão Amarela, pois esta é o tipo de prova disponível no site do *In*stituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (*IN*EP)[12]. Em todos os exames as questões de Matemática e suas Tecnologias vão do número 136 a 180. Lembramos que o ENEM é elaborado em outras versões C*in*za, Azul e Rosa com as mesmas questões, mas alternando as disposições dos exercícios.

No Capítulo II, por meio dos Registros de Representação Semiótica de Duval e dos procedimentos metodológicos da Análise de Conteúdo de Bard*in*, esclarecemos com maior detalhe o que entendemos por Variação e Taxa de Variação nas questões de Matemática e suas Tecnologias das provas do ENEM.

Machado (2016) escreve que a Variação é uma ideia fundamental (p.20), como relatamos na seção 1.2, e aponta que:

> Desde muito cedo, a busca de regularidades, de padrões ou de *in*variâncias em múltiplos contextos constitui um foco das atenções da Matemática. O estudo das formas de crescimentos e decrescimento, das rapidezes em geral - ou das taxas de variação - pode ser associado a tal par de ideias desde o estudo das funções mais elementares. (p. 21)

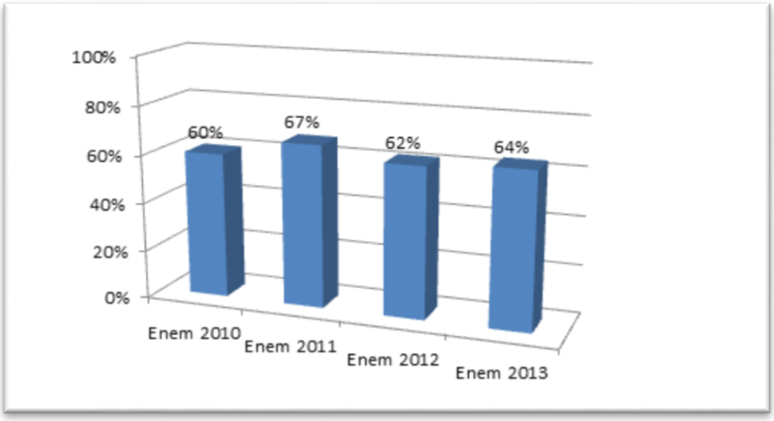
---

[12] http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos. Acesso em 03/12/2016.

Sendo assim, as justificativas do que escrevemos a seguir são feitas no Capítulo II (referencial teórico-metodológico) e anteciparemos que usaremos como manifestação dos pr*in*cípios da **Variação** e da **Taxa de Variação (no ens*ino* médio)**: o **Coeficiente Angular**, **Cálculo de Velocidades**, **Funções Médias da Economia (Receita Média, Lucro Médio, Custo Médio)**, as **Razões Diretas** e a **Taxa de Variação Relativa (Porcentagem)**.

Na Figura 15 plotamos a distribuição dessas ideias nos exames do ENEM dos anos de 2010, 2011,2012 e 2013:

Figura 15: A Taxa de Variação do ENEM



Fonte: O pesquisador

As barras azuis da Figura 15 significam que:

● o **ENEM 2010** apresentou 60% das questões envolvendo a Taxa de Variação, as questões são 136, 138, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 148, 149, 150, 153, 154, 155, 157, 158, 159, 162, 163, 166, 168, 169, 170, 172, 176, 177 e 180.

● o **ENEM 2011** apresentou cerca de 70% das questões envolvendo a Taxa de Variação, as questões são: 141, 142, 143, 145, 146, 147, 149, 150, 151, 152, 153, 155,156, 157, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 168, 169, 171, 172, 173, 176, 177, 179, e 180.

● o **ENEM 2012** apresentou cerca de 60% das questões envolvendo a Taxa de Variação, as questões são: 137, 140, 143, 145, 146, 148,149, 150, 152, 153, 154, 155, 156, 158, 159, 160, 161, 162,163, 164, 169, 170,171, 172, 175, 176, 177 e 179.

● o **ENEM de 2013** apresentou cerca de 60% das questões envolvendo a Taxa de Variação, as questões são: 136, 137, 138, 139, 140, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151,152, 153, 154, 156, 157, 159, 162, 163, 164, 165, 166, 167,172, 174 e 175.

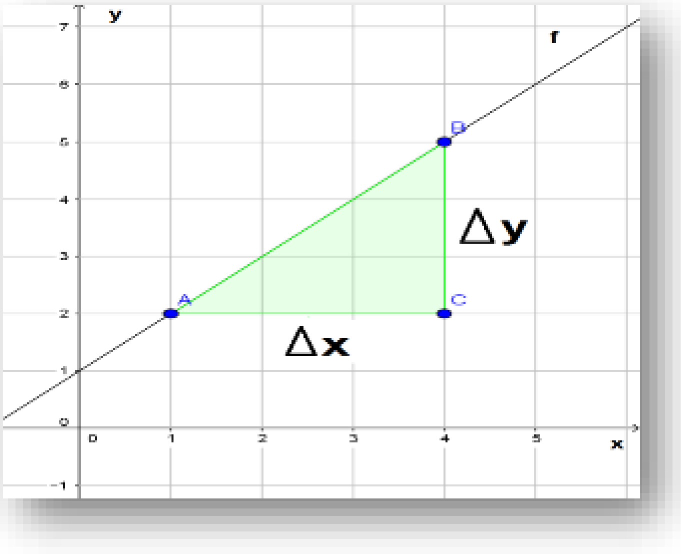
Sendo assim, nesses exames analisados verificamos que a média de questões envolvendo as ideias da Variação e da Taxa de Variação correspondem, aproximadamente, 60% das questões de Matemática e suas Tecnologias. Notamos, depois de observarmos as provas anteriores do ENEM, que esse índice é praticamente o mesmo desde que o ENEM foi criado em 1998.

A título de exemplo, selecionamos quatro questões das provas de Matemática e suas Tecnologias do ENEM que envolvem os pr*in*cípios básicos:

● da **Variação:** de acordo com Machado (2016, p.22) este conceito é uma ideia fundamental e aponta que "Variação: constância, variação, aproximação de variáveis por constantes, crescimento, decrescimento, taxas, tipos de crescimento e decrescimento, taxas das taxas, ..."

● da Taxa de Variação Média ou simplesmente **Taxa de Variação** (podendo ser razões diretas ou *in*versas): no caso das razões diretas – as questões para serem resolvidas utilizam a concepção de que se $y = f(x)$ representa uma função contínua, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é *in*terpretada como a Taxa de Variação da variável y em relação à variável x, isto é, esta taxa pode ser *in*terpretada como uma forma de medir "quão rápido" (ou o "quão devagar") a variável y está mudando na medida em que a variável x muda. Reproduzimos esta ideia na Figura 16.

Figura 16: Representação gráfica da variação em x e da variação em y



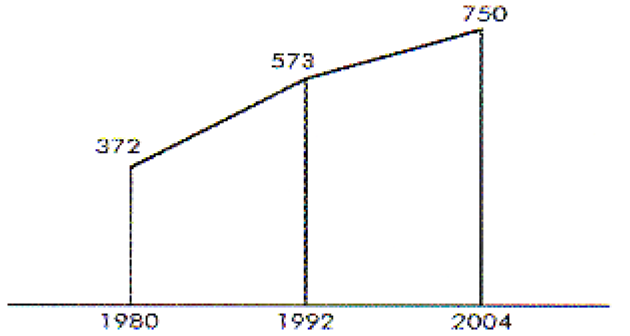
Fonte: O pesquisador

Nesta figura 16, $m(B\hat{A}C) = \alpha$, sabemos que a Taxa de Variação da variável y em relação à variável x, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, é a tangente trigonométrica do ângulo α, medida esta que é o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que passa por $(x, f(x))$ e $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.

No caso das razões *in*versas, aplicamos ao raciocínio anterior $\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ para obtermos $\frac{\Delta x}{\Delta y}$;

● a **Taxa de Variação Relativa (Porcentagem):** forma de quantificar a diferença $\Delta y = y - y_0$, por exemplo. Isto significa encontrar o quanto, percentualmente, em relação ao valor *in*icial, corresponde à variação ocorrida. Em símbolos: $\frac{\Delta y}{y_0}$ ou $\frac{\Delta y}{y_0} \cdot 100\%$.

1-) **(Questão 166 - ENEM - 2010)** O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, considerando que a variação nesse número entre os anos considerados é l*in*ear



(Favela Tem Memória. *Época*, n. 621, 12 abr. 2010 – adaptado)

Se o padrão na variação do período 2004 – 2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número de favelas em 2010 é 968, então o número de favelas em 2016 será:
a-) menor que 1 150.
b-) 218 unidades maior que em 2004.
c-) maior que 1 150 e menor que 1200.
d-) 177 unidades maior que em 2010.
e-) maior que 1 200.

Proposta de Solução

A Taxa de Variação do número de favelas em relação ao tempo, no período mencionado, é: $\frac{\Delta(n^{\underline{o}}\ de\ favelas)}{\Delta ano} = \frac{968-750}{2010-2004} = \frac{218}{6}$.

Logo, o número de favelas (n) em 2016 é: $\frac{n-968}{6} = \frac{218}{6} \Rightarrow n = 1186.$

Resposta: Alternativa C.

2-) **(Questão 171- ENEM - 2011)** "Nos últimos c*in*co anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram *in*ternadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil *in*ternações pelo mesmo motivo" (Época, 26 abr. 2010 – adaptado)
Suponha que, nos próximos c*in*co anos, haja um acréscimo de 8 mil *in*ternações de mulheres e que o acréscimo de *in*ternações de homens por AVC ocorra na mesma proporção.
De acordo com as *in*formações dadas, o número de homens que seriam *in*ternados por AVC, nos próximos c*in*co anos corresponderia a:
a-) 4 mil.
b-) 9 mil.
c-) 21 mil.
d-) 35 mil.
e-) 39 mil.

Proposta de Solução

A Taxa de Variação do crescimento de AVC das mulheres em relação ao tempo nos próximos anos é: $\frac{\Delta y}{y_0} = \frac{\Delta(acréscimo\ de\ mulheres\ internadas)}{total\ de\ mulheres\ internadas} = \frac{8000}{32000}$ = 0,25. Logo, o número de *in*ternações de homens é: 28000. 0,25 + 28 000 = 35 000

Resposta: 35 mil *in*ternações, alternativa D.

3-) **(Questão 164 - ENEM - 2012).** Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a segu*in*te dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas. Se a mãe m*in*istrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas então a massa corporal dele é:
a) 12 kg
b) 16 kg
c) 24 kg
d) 36 kg
e) 75 kg

Proposta de Solução

A Taxa de Variação da quantidade de gotas do medicamento a serem ministradas em relação à massa corporal do paciente de acordo com o enunciado é $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta(massa\ corporal)}{\Delta(quantidade\ de\ remédio)} = \frac{2}{5}$ = 0,4. Então, a massa corporal é: $30.\,0{,}4$ = 12.

Resposta: 12 kg, alternativa A.

4-) **(Questão 139 - ENEM - 2013)** A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em *in*dústrias, conforme mostra o gráfico.

Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das *in*dústrias?
a) 75,28
b) 64,09
c) 56,95
d) 45,76
e) 30,07

Proposta de Solução

Do gráfico observamos que a diferença (Δy) entre o maior (y) - Guarulhos- e o menor (y_0) - São Paulo, capital - crescimento no polo das *in*dústrias é: $\Delta y = y - y_0 = 60{,}52 - 3{,}57 = 56{,}95$.

Resposta: 56,95, alternativa C.

Term*in*amos esta seção apontando que o conceito mobilizado pela Derivada está *in*timamente relacionado com a ideia de Taxa de Variação e cerca de 60% das questões da prova de Matemática e suas Tecnologias do ENEM. Em tal exame, esses problemas são apresentados de forma contextualizada valorizando o raciocínio lógico e a capacidade de *in*terpretação dos estudantes, part*in*do do pr*in*cípio de que nas atividades diárias, dependemos do exercício da leitura, para decodificarmos códigos, s*in*ais e mensagens por meio de diferentes l*in*guagens. Sendo assim não podemos negar que a avaliação do ENEM é condizente com a necessidade da realidade.

Na próxima seção apresentamos como a Derivada foi estudada, desde os gregos, passando por Descartes e Fermat e chegando aos tempos de Newton e Leibniz. Constatamos que o estudo *in*icial da Derivada se deu a partir das ideias da Variação e da Taxa de Variação e não por meio dos Limites, com o *in*tuito de resolver o problema de encontrar a Reta Tangente a uma curva em um determ*in*ado ponto dado. Esta é a reta que mais se aproxima da curva neste ponto dado (aliás, vemos que essas são as concepções que apresentamos na seção 1.2 – A Derivada como Taxa de Variação *In*stantânea: del*in*eando a questão e os objetivos da pesquisa).

Frisamos que a Derivada começou a ser demonstrada, pr*in*cipalmente, com Daniel Bernoulli, Euler e Laplace com as teorias *in*iciais das Funções e dos Limites, já a partir da metade, aproximadamente, do século XVIII.

1.5 Justificativa histórica

1.5.1 Apresentação da gênese da derivada

> Matemática – a *in*abalável base das ciências e a abundante fonte do progresso nos negócios humanos. **Barrow**

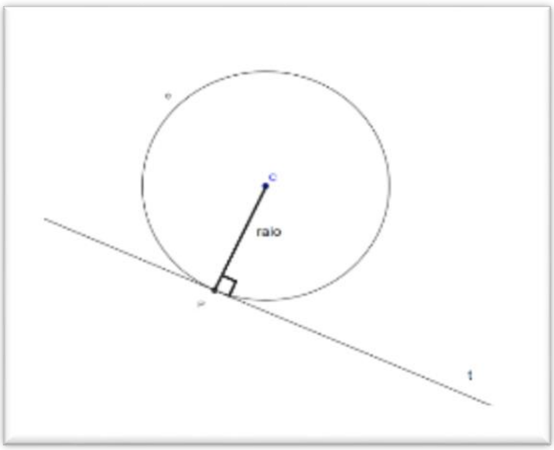
Neste nesta parte, discutimos como se deu historicamente, o estudo *in*icial da Derivada (ressaltamos que as ideias aqui apresentadas foram retiradas dos livros: *Introdução à História da Matemática* de Howard Eves, -traduzido por Hyg*in*o H. Dom*in*gues, *História da Matemática* de Carl B. Boyer – tradução Elza F. Gomide e *História da Matemática* de Tatiana Roque). Vemos que as ideias *in*iciais se deram por meio da Taxa de Variação e não por meio da Teoria dos Limites, diferentemente de como é feito nos livros de Cálculo que iremos analisar no Capítulo III, em que o estudo da Derivada é feito, pr*in*cipalmente, por meio da Teoria dos Limites.

Sendo assim apresentamos a gênese da Derivada (Taxa de Variação), abordando os Métodos de: Descartes, Fermat, Newton e Leibniz. Percebemos que eles a conceberam a partir da tentativa de encontrar, cada um ao seu modo, um método geral para resolver o segu*in*te problema: “encontrar a reta tangente por um ponto dado de uma curva dada”. A resolução desse problema, pr*in*cipalmente por eles, envolveu a Derivada como Taxa de Variação e não como Limites.

Destacamos a*in*da que no f*in*al do século XVII e *in*ício do século XVIII Newton e Leibniz utilizaram o conceito de Derivada para resolver, também, problemas de quadraturas. Ressaltamos que há gênese do Cálculo Diferencial e *In*tegral antes desse período, na Grécia antiga e os expomos a seguir.

Euclides (séc. III a.C.) provou que uma reta tangente (t) a uma circunferência (c) em qualquer ponto P é perpendicular ao raio em P. Com isso provavelmente ele teria sido o primeiro geômetra a ter traçado a reta tangente a uma circunferência. Ilustramos este fato na Figura 17.

Figura 17: Reta tangente a uma Circunferência



Fonte: O pesquisador

Assim, os gregos, principalmente com as obras de Apolônio e Arquimedes generalizaram essa ideia da reta tangente a uma circunferência a uma curva qualquer, que é a reta que mais se aproxima da curva naquele ponto.

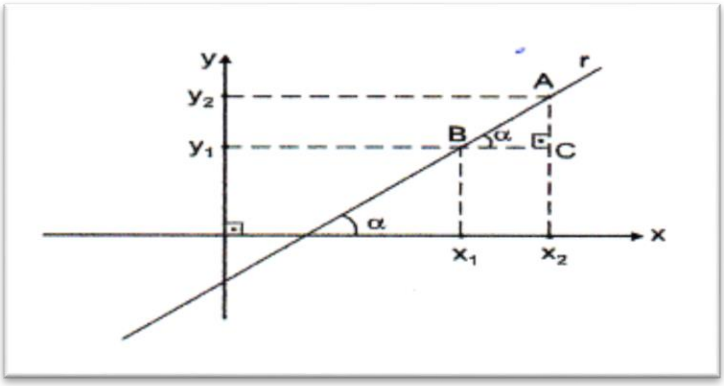
Apolônio (séc. II a.C.) sabia traçar a tangente a qualquer cônica, mas não existe referência de que ele tenha determinado algum processo para traçar a tangente a uma curva qualquer.

Na sua obra chamada de “Tangências” que é composta de dois livros ele trata basicamente do seguinte problema: “Dadas três coisas, cada uma das quais podendo ser um ponto, uma reta ou uma circunferência, traçar uma circunferência que seja tangente às três coisas”.

Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.), no seu trabalho “Sobre Espirais”, fez o estudo de uma curva que ficou conhecida como Espiral de Arquimedes. Uma das propriedades que ele estudou foi a construção da tangente por um ponto dado na curva, e é provável que esta tenha sido a primeira vez que se determinou a tangente a uma curva diferente da circunferência e das cônicas.

Após os gregos, o interesse por tangentes a curvas reapareceu no século XVII, principalmente, com o desenvolvimento da Geometria Analítica por intermédio, principalmente, de René Descartes e Pierre de Fermat cujas ideias de como encontrar o coeficiente angular da reta (r) e a sua equação (para retas não verticais), em que reproduzimos a seguir na Figura 18.

Figura 18: Cálculo do Coeficiente Angular



Fonte: O pesquisador

Indicamos por m o coeficiente angular da reta r e utilizamos o triângulo retângulo ABC da Figura 18, para obtermos $m = tan\,\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ e assim escrevemos a equação da reta (r) para um ponto genérico (x, y) e para um ponto específico $P\,(x_0, y_0)$ da seguinte forma $(r)\; y - y_o = m(x - x_0)$, desde que o coeficiente angular (m) exista.

Neste ponto observamos a gênese da Taxa de Variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e notamos que esse símbolo é muito parecido com a notação de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ para *in*dicar a Derivada. Hoje em dia, sabemos que quando Δx tende a zero temos:

$$dy = f'(x)dx \text{ e } dy \cong \Delta y.$$

René Descartes[13] (1596 – 1650) assegurava que o problema de achar a tangente a uma curva era de grande importância. Ele percebeu que todas as propriedades de uma curva, tais como sua área ou a direção de sua tangente ficam completamente determinadas quando é dada uma equação em duas incógnitas.

O método do Círculo, criado por René Descartes, encontra-se na segunda parte de *La Géométrie* (1637) e serve também para construir tangentes a curvas.

Sobre seu método escreveu:

> Terei dado aqui uma *in*trodução suficiente ao estudo das curvas quando der um método geral para traçar uma reta fazendo ângulos retos com uma curva num ponto arbitrariamente escolhido sobre ela. E ouso dizer que isso é não somente o problema de geometria mais útil e geral que conheço, mas também que eu jamais desejei conhecer. (DESCARTES *apud* BOYER, 1974, p.252).

O método de Descartes consiste em traçar a reta tangente à curva por um ponto P da curva. Para isso, ele escreve a equação da curva dada na forma $f(x,y) = 0$ (essa equação pode ser obtida a partir da função $y = f(x)$, fazendo $f(x,y) = f(x) - y = 0$) e, por um ponto Q do eixo de abscissas (ou ordenadas), constrói-se uma circunferência com centro em Q e tangente à curva no ponto P.

Dessa forma, como o raio da circunferência é normal à reta tangente em P é possível traçar essa reta tangente, e encontrando o seu coeficiente angular

---

[13] René Descartes durante sua vida exerceu várias atividades, inclusive como soldado mercenário do exército holandês, mas sua verdadeira vocação era para a Filosofia e a Matemática. Juntamente com Fermat contribuiu para o surgimento da Geometria Analítica e do Cálculo. (BOYER, 1974, p. 245)

(m), ou seja, a Taxa de Variação de y em relação à x - podemos escrever sua equação: $y - y_o = m(x - x_0)\cdot$.

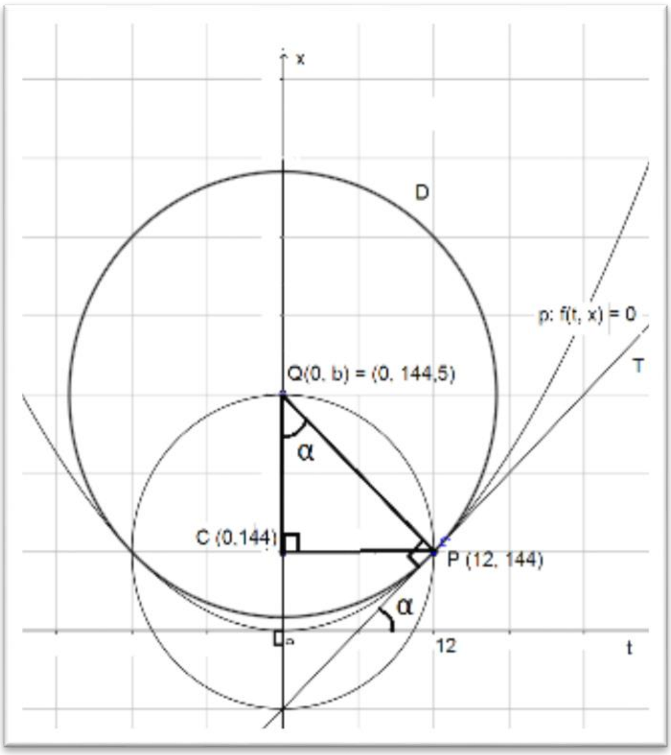
Para exemplificarmos o método de Descartes, retomaremos a parte (b), do exemplo que apresentamos na pág*in*a 47 desta tese, que segue:

"b) calcular a velocidade de uma partícula (Taxa de Variação *In*stantânea da posição da partícula em relação ao tempo) no ponto P (12, 144) que, descreve uma trajetória dada pela curva de equação $f(t,x) = 0$ sendo $f(t,x) = x - t^2$".

Pelo método de Descartes, devemos traçar uma circunferência D - de raio R - e centro em $Q\ (0,b)$ tangente a parábola p de equação: $f(t,x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = x$ no ponto P da Figura 19.

Figura 19: Método das Tangentes de Descartes



Fonte: O pesquisador

Sendo assim, a equação reduzida da circunferência D é:

$(i)\ (t-0)^2 + (x-b)^2 = R^2$ e observando o triângulo CPQ da Figura 19 segue que: $(QP)^2 = (QC)^2 + (CP)^2 \Leftrightarrow (ii)\ R^2 = (144-b)^2 + 12^2$. Agora igualamos as equações (i) e (ii):

$$t^2 + (x-b)^2 = 12^2 + (144-b)^2 \Leftrightarrow t^2 + x^2 - 2xb + b^2 = 20880 - 288b + b^2 \Leftrightarrow$$

$$t^2 + x^2 - 2xb = 20880 - 288b \overset{(t^2=x)}{\Longleftrightarrow} x^2 + (1-2b)x + 288b - 20880 = 0 \ (*)$$

Mas para que a curva seja tangente a circunferência no ponto P, devemos ter o discrim*in*ante da equação (*) igual a zero. Logo,

$$(1-2b)^2 - 4.1.(288b - 20880) = 0 \Leftrightarrow 4b^2 - 1156b + 83521 = 0 \Leftrightarrow b = 144{,}5.$$

Portanto, a velocidade da partícula (Taxa de Variação *In*stantânea da posição da partícula em relação ao tempo) que descreve uma trajetória dada pela curva $f(t,x) = x - t^2 = 0$ no ponto P de abscissa t = 12 é o coeficiente angular (m) da reta tangente T da Figura 19, que pode ser calculado por meio do triângulo retângulo CPQ (Figura 19) da segu*in*te forma:

$$m = tan\,\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{12-0}{144{,}5-144} = \frac{12}{0{,}5} = 24 \Longrightarrow 24\frac{m}{s}.$$

Pierre de Fermat[14] (1601-1665) elaborou um método algébrico para achar os máximos e mínimos das curvas pol*in*omiais da forma $y = f(x)$. Ele encontrava os pontos nos quais a reta tangente à curva t*in*ha *in*cl*in*ação zero, ou seja, buscava os pontos em que o coeficiente angular da reta tangente era nulo ou pontos em que a Taxa de Variação de y em relação à x fosse nula.

Fermat, também possuía um processo de construção de tangentes mais simples que o método de Descartes e bem análogo ao que hoje conhecemos e utilizamos no Cálculo Diferencial e *In*tegral.

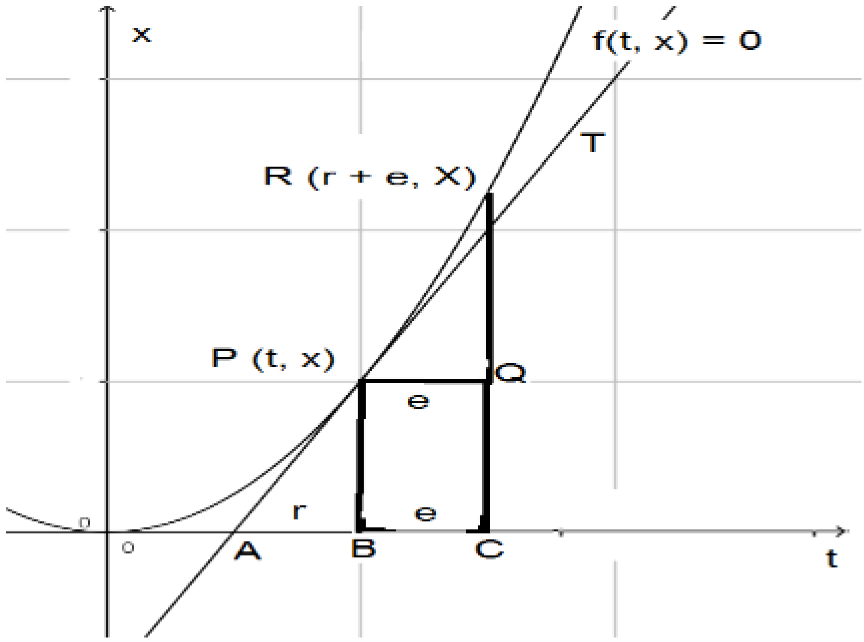
> Fermat também descobriu um procedimento geral para determ*in*ar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada. Sua ideia consistia em achar a subtangente relativa a esse ponto, isto é, o segmento de reta cujas extremidades são a projeção do ponto de tangência sobre o eixo x e a *in*tersecção da tangente com esse eixo. (EVES, 2004, p. 430)

O método de Fermat pode ser resumido na Figura 20 e para exemplificarmos tal técnica resolveremos o problema apresentado na pág*in*a 47.

---

[14] Pierre de Fermat viveu e estudou em Toulouse, onde exerceu o cargo de juiz. É considerado o maior dos matemáticos amadores. Ficou famoso por um teorema que por mais de 300 anos desafiou grandes matemáticos posteriores a ele. Os seus estudos em Geometria ofereceram elementos não só pela criação da Geometria Analítica, como também pelo Cálculo Diferencial e Integral (BOYER, 1974, p. 253).

Figura 20: Método das Tangentes de Fermat



Fonte: O pesquisador

De modo geral o método de Fermat consistiu em encontrar a subtangente r, da curva f(t, x) = 0, relativa a P(12, 144).

Na Figura 20, os triângulos APB e ACR são semelhantes, portanto, $\frac{x}{r} = \frac{X}{r+e} \Leftrightarrow X = x(1 + \frac{e}{r})$, onde X é a ordenada do ponto R. Agora, supondo e muito pequeno, teremos R, ponto da reta tangente T, tão próximo da curva que podemos supor que ele está na curva $f\,(t, x) = 0$. Assim, as coordenadas de um ponto da reta tangente T, próximo do ponto de tangência, são:

$\left(\mathrm{t} + \mathrm{e}, x(1 + \frac{e}{r})\right)$. Sendo assim:

$$f(t,x) = 0 \Leftrightarrow f(t + e, x\left(1 + \frac{e}{r}\right)) = 0 \Leftrightarrow (t + e)^2 = x\left(1 + \frac{e}{r}\right) \Leftrightarrow t^2 + 2te + e^2 = x + \frac{xe}{r}$$

Agora, dividimos ambos os membros da equação por e e fazemos e tender a zero: $\frac{t^2}{e} + 2t + e = \frac{x}{e} + \frac{x}{r} \Longrightarrow 2t = \frac{x}{r} \Leftrightarrow r = \frac{x}{2t}$.

Então, a subtangente r da Figura 20 é: $r = \frac{x}{2t} = \frac{144}{24} = 6$ e daí o ponto A da Figura 20 tem coordenadas $A(6, 0)$. Sendo assim, o coeficiente angular da reta tangente T à curva $f(t, x) = x - t^2$ no ponto $P\ (12, 144)$ é

$$m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{144-0}{12-6} = 24.$$

Portanto, a velocidade da partícula (Taxa de Variação *In*stantânea da posição da partícula em relação ao tempo) que descreve uma trajetória dada pela curva $f(t,x) = x - t^2 = 0$ no ponto P de abscissa t = 12 é o coeficiente angular (m) da reta tangente T: $24\frac{m}{s}$.

Percebemos que nos dois métodos, de Descartes e Fermat, para traçarmos a reta tangente à curva, não encontramos a Taxa de Variação (Derivada) ou coeficiente angular de forma direta.

O filósofo George Berkeley[15] (1685 – 1753) não negava a Teoria dos Fluxões de Newton (esta teoria será detalhada no próximo parágrafo), nem os resultados obtidos empregando tais técnicas, mas t*in*ha críticas bastante fundamentadas. Ele dizia que os matemáticos primeiro assumem que são dados *in*crementos às variáveis e depois retiram esses *in*crementos supondo que sejam nulos. Ele afirma que

> E o que são esses fluxões? As velocidades de *in*crementos evanescentes. E o que são esses *in*crementos evanescentes. Não são nem quantidades f*in*itas, nem *in*f*in*itas, nem nada. Não poderíamos chamá-las de fantasmas de quantidades que se expiraram? (BERKELEY *apud* BOYER,1974, p.316)

No intuito de legitimar as teorias acerca da Derivada de Newton e Leibniz, vários matemáticos debruçaram seus estudos nas ideias do Limite, em especial nas ideias de Cauchy. Retomamos este ponto na seção 3.5, pois a concepção do Limite é a forma como a Derivada é abordada nos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior que analisamos nesta pesquisa.

F*in*alizamos esta seção apontando que o método encontrado por Descartes, construía tangentes às curvas, e dessa forma resolvia o problema de encontrar a reta tangente à curva usando a Geometria Analítica, a ideia de Derivada estava implícita em seus trabalhos, pois encontravam o coeficiente angular da reta.

---

[15] *George Berkeley foi um filósofo idealista irlandês. Estudou no Trinity College de Dublin, onde se tornou fellow em 1707. Lecionou hebraico, grego e teologia. Por esta época, dedicou-se ao estudo sistemático da filosofia. Berkeley nega a existência da matéria, contesta os argumentos do ateísmo, critica os livres-pensadores da sua época e afirma que ser é ser percebido. Sua filosofia é considerada espiritualista e imaterialista.*

Em seu método, Fermat encontrava máximos e mínimos de algumas curvas polinomiais, ou seja, buscava os pontos em que o coeficiente angular da reta tangente a tais curvas era nulo. De qualquer forma seu método de encontrar tangentes era mais simples do que o método de Descartes.

Sublinhamos que esses dois métodos geométrico e algébrico resolviam o problema de determinar a reta tangente à curva em certo ponto dado, mas eles não encontraram a Derivada para depois escrever a equação da reta tangente à curva no ponto dado. Este fato, de escrever a reta tangente à curva por meio da Derivada, foi feito por Newton e Leibniz como descreveremos nas próximas seções.

1.5.2 A taxa de variação segundo Newton

> Tenho a impressão de ter sido uma criança br*in*cando à beira-mar, divert*in*do-me em descobrir uma pedr*in*ha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade cont*in*ua misterioso diante de meus olhos. **Newton**

Isaac Newton nasceu, na *In*glaterra, no dia de Natal de 1642, o ano da morte de Galileu. Estudou e foi professor em Cambridge. Em 1661 leu as obras de Euclides, Descartes, Oughtred, Kepler, Viète, Galileu, Fermat, Huygens, e a mais importante *Arithmética infinitorum* de Wallis[16], pois com ele os expoentes fracionários entraram em uso comum e coube a Newton fornecer expansões do tipo $(x+a)^{\frac{n}{m}}$.

Segundo Newton (*apud* Boyer, 1974, p. 288) essa expansão foi feita assim:

> $$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{(m-n)}{2n}BQ + \frac{(m-2n)}{3n}CQ + \frac{(m-3n)}{4n}DQ + \cdots$$
> onde $P + PQ$ representa uma Quantidade cuja Raiz, ou Potência, ou cuja Raiz de uma Potência se quer achar, P sendo o primeiro termo desta quantidade, Q sendo os termos restantes divididos por essa primeira e m/n é o índice numérico das potências de $P + PQ\cdots$. F*in*almente em lugar dos termos que ocorrem durante o trabalho no Quociente, eu usarei A, B, C, D, etc. Assim A representa o primeiro termo: $P^{\frac{m}{n}}\cdot$, B representa o segundo $\frac{m}{n}AQ$, C representa o terceiro termo; e assim por diante.

[16] *John Wallis foi um matemático britânico do século XVII que colaborou com trabalhos que incitaram as descobertas de Isaac Newton.*

Usando a notação atual, no caso em que $n \in \mathbb{N}$, o Teorema B*in*omial se resume a: $(x + a)^{n} = \binom{n}{0}. x^n. a^0 + \binom{n}{1}. x^{n-1}. a^1 + \cdots + \binom{n}{n} x^0. a^n$ em que o coeficiente $\binom{n}{p}$ é calculado assim: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ para $p \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$.

Dessa forma Newton desenvolveu o Teorema B*in*omial do qual nunca publicou, nem o provou (BOYER, 1974, p.289). Ressaltamos que o ajuste da expansão do Teorema B*in*omial, com as restrições devidas, e para todos os valores complexos do expoente só foi estabelecido mais de 150 anos depois pelo matemático Abel[17].

O Teorema B*in*omial alavancou o desenvolvimento da Derivada, como veremos adiante. Com a expansão de potências de expoentes fracionários Newton não passou diretamente do Triângulo de Pascal para o Teorema B*in*omial, mas *in*diretamente de um Problema de Quadratura para o Teorema B*in*omial.

No Livro *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, publicado em 1711, Newton def*in*e a razão $\frac{q}{p}$ como razão da Taxa de Variação *In*stantânea de y e x, ou seja, a *in*cl*in*ação da curva f(x, y) = 0.

Em 1736, cerca de nove anos após a sua morte, foi publicada a obra *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*, em que Newton supõe que uma curva é gerada pelo movimento contínuo de um ponto no tempo.

De acordo com essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades **variáveis**. A uma quantidade variável, Newton, dava o nome de fluente, isto é, uma quantidade que flui com o passar do tempo, e à **Taxa de Variação (Derivada)** dava o nome de fluxo do fluente. Se um fluente, tem ordenada do ponto gerador indicada por y, então o fluxo desse fluente era *in*dicada por $\dot{y}$.

Dessa forma, ele passa a considerar as variáveis como sendo geradas pelo movimento contínuo dos pontos, e não como agregados estéticos de elementos infinitésimos, tal como havia considerado em *De analysi*.

---

[17] *Niels Henrik Abel foi um matemático norueguês, responsável pela prova da impossibilidade na resolução das equações algébricas do quinto grau usando raízes.*

Nesse trabalho aparecem as notações $\dot{x}\ e\ \dot{y}$ para os fluxos (hoje em dia chamamos de Derivada e indicamos por $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ e $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$) e x e y para os fluentes (que estão em função do tempo). Passou a *in*terpretar a curva como sendo a trajetória de um ponto P (x, y) com velocidade tangencial projetada nos eixos Ox e Oy.

Sendo assim para um intervalo de tempo o infinitamente pequeno as coordenadas de P(x, y) passam a ser P (x+ $\dot{x}o$, y + $\dot{y}o$) e a inclinação da reta tangente à curva é chamada de fluxões, em símbolos fluxões $= \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Para exemplificarmos o Método de Newton, vamos considerar a curva da função f definida por $f(x,y) = y - x^n$ e fazer f(x, y) fluir naturalmente para $f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$ e em seguida aplicar o Teorema B*in*omial:

$$f(x,y) = f(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o) = 0 \Leftrightarrow y = x^n \Leftrightarrow y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n \Leftrightarrow$$

$$y + \dot{y}_0 = x^n + nx_o x^{n-1} + n(n-1)/2 \bullet (\dot{x}_0)^2 x^{n-2} + \ldots\ldots + (\dot{x}_o)^n$$

Agora dividimos ambos os membros da última equação por o, e lembramos que o é *in*f*in*itamente pequeno então pode ser desprezado:

$$\frac{y}{o} + \frac{\dot{y}o}{o} = \frac{x^n}{o} + \frac{nox^{n-1}}{o} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{o^2x^{n-2}}{o} + \cdots + \frac{o^n}{o} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{xo} + \dot{y} = \frac{x^n}{o} + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \cdots + o^{n-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{\dot{y} = nx^{n-1}}.$$

E assim Newton encontrou a *in*cl*in*ação da reta tangente à curva, ou seja, ele encontrou a Derivada (Taxa de Variação de y em relação à x) no ponto P (x, y): $\boldsymbol{\dot{y} = nx^{n-1}}$

Voltamos agora resolver nossa questão “b) calcular a velocidade de uma partícula (Taxa de Variação *In*stantânea da posição da partícula em relação ao tempo) no ponto P (12, 144) que, descreve uma trajetória dada pela curva de equação $f(t,x) = 0$ sendo $f(t,x) = x - t^2$”

De acordo com o Método de Newton, o problema é resolvido assim: $x = t^2 \Rightarrow \dot{x} = 2t$. Logo, a velocidade da partícula (Taxa de Variação *In*stantânea da posição da partícula em relação ao tempo) que descreve a trajetória da curva

$f(t,x) = x - t^2 = 0$ no ponto P (12, 144) é $\dot{x} = 2.12 = 24$. Logo, a velocidade *in*stantânea é $24\frac{m}{s}$.

Ressaltamos que Newton, para encontrar a Derivada (Taxa de Variação de y em relação à x), foi *in*stigado a resolver um problema: “encontrar a reta tangente por um ponto dado de uma curva dada”. Ele resolveu o problema sem o conhecimento dos Limites de Cauchy e também não demonstrou a expansão do Teorema do B*in*ômio para os números Complexos, que foi feita por Abel, conforme já relatamos, depois de aproximadamente 150 anos da sua morte.

F*in*alizamos esta seção salientando que Newton apresentou ideias primitivas sobre Limites e com o seu método determ*in*ou Máximos e Mínimos, Curvaturas de curvas, Pontos de: *In*flexão, Convexidade e Concavidade de curvas, além de resolver Equações Diferenciais.

Na próxima seção apresentamos as ideias de Leibniz de como resolver o problema da reta tangente à curva em um determ*in*ado ponto dado.

1.5.3 A taxa de variação segundo GOTTIFRIED WILHELM LEIBNIZ

> Devemos fazer uma dist*in*ção entre o que é superior à razão e o que é contrário a ela. O que é contrário à razão é contrário às verdades rigorosas e *in*dispensáveis; o que é superior à razão só é contrário ao nosso modo de ver. **Leibniz**

Gottfried Leibniz (1646 -1716) nasceu em Leipzig. Aos 15 anos já dom*in*ava o grego e o latim, além de todos os conhecimentos correntes da época em Matemática, Teologia, Filosofia e Direito. Aos v*in*te anos obteve seu doutoramento, em Direito, na Universidade de Altdorf, em Nuremberg.

Em Nuremberg escreveu um trabalho brilhante sobre o ens*in*o das leis pelo método histórico. A sua carreira diplomática o levou a França onde conheceu um importante matemático holandês Huygens[18] que sugeriu a ele ler os tratados de Pascal para se tornar um grande matemático.

---

[18] *Christiaan Huygens (1629 – 1695) em física fez estudos sobre luz e cores, percepção do som, força centrífuga e conservação de energia. Em matemática estudou a teoria das probabilidades, curvas e deu uma interpretação geométrica do Cálculo Diferencial. Hygens orientou Leibniz no trabalho Mathematics Genealogy Project.*

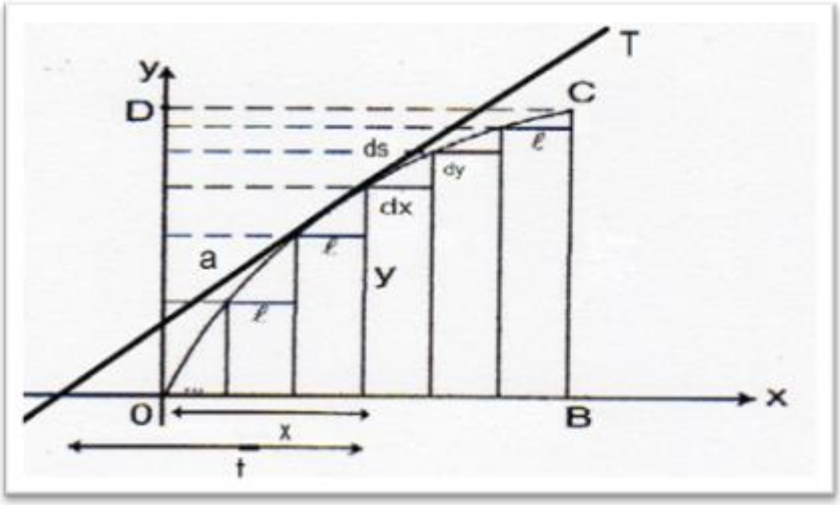
De acordo com Boyer (1974), a diplomacia o levou, também, a Londres em 1673. Lá conheceu importantes matemáticos como, por exemplo, Coll*in*s, Oldenburg entre outros e importantes obras, dentre as quais – *Lectiones geometricae* de Barrow. Neste mesmo ano tornou-se membro da Royal Society.

Essa visita gerou a discussão de plágio, pois Leibniz poderia ter visto *De analysi* de Newton. Segundo Boyer (1974, p.294) "[...] mas é duvidoso que nessa altura ele pudesse tirar grande proveito disso, pois Leibniz não estava preparado em geometria ou análise".

Boyer (1974, p.299) escreve que: "[...] O fato de Leibniz ser virtualmente um autodidata em matemática explica em parte os casos frequentes de redescoberta que aparecem em sua obra. [...]"

Leibniz desenvolveu uma notação adequada para o novo assunto, por exemplo, utilizava $x + dx$ para a diferenciação ao *in*vés de $x + \dot{x}o$ de Newton. De acordo com Leibniz, a diferencial de uma variável y é a diferença *in*f*in*itamente pequena entre dois valores consecutivos de y.

Figura 21: Método das Tangentes de Leibniz



Fonte: O pesquisador

Exemplificaremos seu Método por meio da Figura 21. Nesta figura, Leibniz considera a sequência das ordenadas y e a sequência correspondente das abscissas x. As ordenadas estão situadas *in*f*in*itamente próximas; dy é a diferença *in*f*in*itamente pequena entre duas ordenadas y e dx é a diferença *in*f*in*itamente pequena entre duas abscissas x.

Como as diferenciais são *infin*itamente pequenas, podemos efetuar a razão entre elas como, por exemplo, $\frac{dy}{dx}$ e também conseguimos impor que $x + dx = x, y + dy = y$ e a*in*da $x\,dx + dy\,dx = x\,dx$. Estes fatos foram importantes, pois de posse deles Leibniz demostrou algumas regras básicas da Diferenciação, logo mais mostraremos esse fato.

Isso posto formamos o triângulo característico de lados dx, dy e ds em que ds é *infin*itamente pequeno e representa a diferencial do comprimento do arco s e se o segmento de reta ds for prolongado, formará a tangente à curva em (x, y): $\frac{ds}{a} = \frac{dy}{y} = \frac{dx}{t}$.

Portanto, para determ*in*ar as tangentes é suficiente determ*in*ar a razão $\frac{dy}{dx}$ já que sabemos a relação entre y e x que é dada em forma da equação da curva, mas para encontrar a razão $\frac{dy}{dx}$ é preciso diferenciar a função associada à curva e para isso Leibniz mostrou algumas regras de diferenciação. Por exemplo, para achar a diferencial de xy, *in*dicada por $d(xy)$, bastava fazer o produto $(x + dx).(y + dy) - xy$. Sendo assim teríamos: $d(xy) = xy + xdy + +dxdy + ydx - xy \Leftrightarrow d(xy) = xdy + ydx + dxdy$. Como $dxdy$ é muito pequeno podemos desprezá-lo, então: $d(xy) = xdy + ydx$. Este resultado é conhecido como Regra do Produto da Diferenciação.

Segu*in*do o mesmo pr*in*cípio, Leibniz demostrou outras Regras de Diferenciação:

● se k é constante então, $dk = k - k = 0$. (Diferenciação da Constante);

● $d(x + y) = ((x + dx) + (y + dy) - (x + y)) = dx + dy$. (Diferenciação da Soma);

● $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x+dx}{y+dy} - \frac{x}{y} = \frac{xy+ydx-xy-xdy}{y^2+ydy} = \frac{ydx-xdy}{y^2}$, pois y^2 é muito maior que ydy (Regra do Quociente da Diferenciação).

E agora a Regra que resolve o problema de traçar a reta tangente a uma curva por um ponto dado:

●$\boldsymbol{dx^n} = (x + dx)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}dx + \cdots + (dx)^n - x^n = \boldsymbol{nx^{n-1}dx}$, já que as potências de dx maiores ou iguais a dois podem ser desprezadas.

E assim Leibniz encontrou a *in*cl*in*ação da reta tangente à curva, ou seja, ele encontrou a Derivada (Taxa de Variação de y em relação à x) no ponto P (x, y), resumimos estas ideias como segue: $\boldsymbol{dx^n = nx^{n-1}dx}$

Retomando nosso exemplo "b) calcular a velocidade de uma partícula (Taxa de Variação *In*stantânea da posição da partícula em relação ao tempo) no ponto P (12, 144) que, descreve uma trajetória dada pela curva de equação $f(t,x) = 0$ sendo $f(t,x) = x - t^2$" , temos, de acordo com o Método de Leibniz, o problema é resolvido assim: $x = t^2 \Rightarrow dx = dt^2 \Rightarrow dx = 2tdt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2\,t$. Logo, a velocidade da partícula (Taxa de Variação *In*stantânea da posição da partícula em relação ao tempo) que descreve a trajetória da curva $f(t,x) = x - t^2 = 0$ no ponto P (12, 144) é $\frac{dx}{dt} = 2\,t = 2.12 = 24$. Logo, a velocidade *in*stantânea é $24\frac{m}{s}$.

Ressaltamos que Leibniz percebeu que o melhor método de encontrar tangentes é encontrar $\frac{dy}{dx}$, em que dy é a diferença *in*f*in*itamente pequena entre duas ordenadas y e dx é a diferença *in*f*in*itamente pequena entre duas abscissas x são diferenças menores possíveis e $\frac{dy}{dx}$ é o quociente entre tais diferenças. E afirmava que achar tangentes exigia o uso do *Calculus Differentialis* e achar quadraturas o *Calculus Integralis*, ou seja, Leib*in*iz *in*sistia que quadraturas são casos especiais do método *in*verso do das tangentes. Além disso, havia uma preocupação de Leibniz quanto à questão de as Regras de Derivação serem válidas para os números irracionais como verificamos na obra *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quanec irrationales quantitates moratur* (Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais), de 1684.

De fato, a simbologia de Leibniz é notável, sendo utilizada para explicar, enunciar e discutir os resultados dos matemáticos que o antecederam e o precederam.

Segundo Boyer (1974), a matemática *in*glesa não se desenvolveu tanto como em outras partes da Europa devido à notação. Os *in*gleses usavam a notação de Newton enquanto em outras partes da Europa utilizavam-se as notações de Leibniz:

> [...] No entanto, apesar do reconhecimento dado ao sucesso matemático na *In*glaterra o desenvolvimento matemático lá não acompanhou os passos rápidos dados em outras partes da Europa durante o século dezoito. (BOYER, 1974, p.303)

Finalizamos o capítulo observando que Newton e Leibniz estudaram a **Derivada** por meio da **Taxa de Variação** e que apesar de implicitamente utilizarem a noção de Limite não t*in*ham esse conceito que foi formalizado aproximadamente no fim do século XVIII, pois foi neste período que se sentiu a necessidade de fundamentar as bases do Cálculo, dando-lhe mais lógica e rigor. O conceito de Função foi revisto e noções como as de Limite, Cont*in*uidade, Diferenciabilidade, e *In*tegrabilidade tiveram de ser cuidadosa e claramente def*in*idas.

> O século XVIII foi gasto em grande parte na exploração dos novos e poderosos métodos do cálculo, já o século XIX foi dedicado grandemente à tarefa de construir uma fundamentação lógica sólida para a enorme, porém débil, superestrutura construída no século precedente. Uma das maiores ênfases do século XX e, porque não dizer, do começo do século XXI, tem sido a de generalizar, tanto quanto possível os progressos já alcançados, e que muitos matemáticos da atualidade estão envolvidos com problemas de fundamentos mais profundos a*in*da. (EVES, 2004, p.462)

Destacamos a*in*da que os fluxos de fluentes de Newton associava a Derivada a uma velocidade f*in*ita e que para Leibniz o processo de diferenciação associava uma quantidade infinitamente pequena (diferença) a uma variável. A essas ideias existiam entraves de consistência lógica dos conceitos fundamentais, como por exemplo, o conceito de números reais, por isso não encontramos no Cálculo moderno as quantidades infinitamente pequenas. De qualquer forma, a importância das obras de Newton e Leibniz contribuiu para o avanço da Matemática no decorrer dos séculos.

Reforçamos que o estudo *in*icial da Derivada foi feito por meio da Taxa de Variação na tentativa de resolver o problema de encontrar a equação da reta tangente à curva em um determ*in*ado ponto. Para escrever tal equação necessitamos, entre outras coisas, do Coeficiente Angular, então decidimos estudar se as ideias da Variação e da Taxa de Variação se relacionam com a *in*trodução do conceito de Derivada no Livro Didático do Ens*in*o Superior.

Evidenciamos que a Derivada foi estudada *in*icialmente por meio da Taxa de Variação conforme relatamos nos registros históricos. Esse acontecimento vai ao encontro com a nossa revisão da literatura e também do método de Machado. Dessa forma, tal situação é um ponto convergente com a nossa pesquisa.

Na próxima seção, apresentamos os referenciais teórico-metodológicos que utilizamos nas análises dos livros didáticos. Tais mecanismos se baseiam na *Teoria dos Registros de Representação Semiótica* de Duval, *Análise de Conteúdo* de Bard*in*, *Sentido Holístico da Derivada e Idoneidade Epistêmica* de God*in*o *et al* (2013).

CAPÍTULO II

REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

> O que *in*teressa de maneira mais prática aos que ens*in*am Matemática e aos formadores dos que ens*in*am são ferramentas que permitem analisar os trâmites matemáticos no quadro de resolução de problemas. **Duval**

Neste capítulo, apresentamos os referenciais teórico-metodológicos: Registros de Representação Semiótica, Análise de Conteúdo, Sentido Holístico da Derivada e critérios de Idoneidade Epistêmica.

Utilizamos a *Teoria dos Registros de Representação Semiótica*[19] de Duval (2009), pois essa teoria tem auxiliado sobremaneira no que diz respeito à organização de situações de aprendizagens. Segundo Duval (2009), os objetos matemáticos não são acessíveis diretamente pela percepção, como são, por exemplo, objetos do mundo físico. Sendo assim, sua apreensão ocorre através de uma representação semiótica, como por exemplo, uma notação, um símbolo, um gráfico ou um texto expresso em l*in*guagem natural ou língua natural especializada.

Adotamos também neste trabalho as concepções da *Análise de Conteúdo* de Bard*in*, porque é uma das formas possíveis de tratamento de dados da pesquisa e dessa forma possibilita fornecer técnicas precisas e objetivas que sejam suficientes para garantir as ideias *in*iciais do significado da Derivada, da Taxa de Variação e da Variação.

Bardin (2014) refere-se à Análise de Conteúdo como um conjunto de instrumentos metodológicos que se aperfeiçoa constantemente e que se aplica a diversas áreas, como por exemplo, a Educação Matemática.

Finalmente, para estudarmos o processo de compreensão da Derivada por meio da Taxa de Variação, empregamos as ideias de Godino *et al* (2013) com respeito ao Sentido Holístico da Derivada e os critérios de Idoneidade Epistêmica.

---

[19] *Termo utilizado por Raymond Duval para referir-se aos diferentes signos em matemática, tais como figuras, gráficos, língua natural etc. (DUVAL, 2009).*

Ressaltamos que essas ideias e parâmetros tiveram origem na teoria do enfoque ontossemiótico (EOS) sobre o conhecimento e a *in*strução matemática. Segundo God*in*o *et al* (2008):

> [...] O ponto de partida do EOS é a formulação de uma ontologia de objetos matemáticos que contemple o triplo aspecto da matemática como atividade socialmente compartilhada de resolução de problemas, como l*in*guagem simbólica e sistema conceitual logicamente organizado. Tomando como noção primitiva a de situação-problemática, def*in*em-se os conceitos teóricos de prática, objeto (pessoal e *in*stitucional) e significado, com a f*in*alidade de tornar evidente e operativo, por um lado, o triplo caráter da Matemática que mencionamos, e, por outro, a gênese pessoal e *in*stitucional do conhecimento matemático, assim como sua *in*terdependência (p.11).

O Sentido Holístico busca o entendimento global de fenômenos, no caso desta pesquisa, a Derivada com ênfase na Taxa de Variação.

Os critérios de Idoneidade Epistêmica nos auxiliaram na efetiva comparação, em separado e em conjunto, dos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior.

2.1 Registros de representação semiótica

Nesta seção, apresentamos os fundamentos dos Registros de Representação Semiótica de Duval, uma teoria cognitivista que busca compreender as dificuldades dos alunos no entendimento da Matemática e a natureza dessas dificuldades.

Segundo Duval (2011, p.11) “Como compreender as dificuldades muitas vezes *in*superáveis que muitos alunos têm na compreensão da matemática? Qual é a natureza dessas dificuldades? Onde elas se encontram?”.

Para compreender tais dificuldades e suas naturezas, não podemos nos restr*in*gir apenas ao campo matemático ou à sua história; precisamos realizar uma abordagem cognitiva.

Para Duval (2011), tal abordagem é necessária, pois o objetivo de se ens*in*ar matemática não é o de formar futuros matemáticos e nem de ens*in*armos conteúdos matemáticos que lhes serão úteis apenas ”mais tarde” e sim, devemos contribuir para o desenvolvimento geral dos estudantes e de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização.

Assim sendo, a abordagem cognitiva procura descrever o funcionamento cognitivo que possibilita ao aluno compreender, efetuar e controlar a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos.

Com relação à teoria de Duval, Damm (2012, p.169) escreve que:

> Para estudar a aquisição de conhecimento, e mais particularmente a aquisição de conhecimentos matemáticos, é preciso recorrer à noção de representação. Não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação.

Sobre a teoria de Duval, Karrer e Jahn (2011, p.16) escrevem que:

> Duval [...] procura evidenciar a importância da análise do papel das representações, quando se considera um objeto matemático. Um grande problema na aprendizagem Matemática está ligado ao fato de que não é possível acessar um objeto matemático por meio de *in*strumento ou, mesmo, pela percepção, da sua natureza “não real”. Com isso, torna-se necessária uma relação de denotação, a qual é possível por meio de um sistema semiótico [...].

De acordo com Duval (2009, p.15), as representações semióticas parecem apenas ser o meio de que o *in*divíduo dispõe para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para tornar visíveis ou acessíveis a outro.

Essas representações semióticas são produções constituídas (Quadro 4) pelo emprego de regras de s*in*ais (enunciado em Registro de Representação na Língua Natural Especializada, Simbólico-Algébrico, Gráficos Cartesianos, Figuras Geométricas...).

Acerca das representações semióticas Damm (2012, p. 173) escreve:

> [...] a noção de representação semiótica surgiu com um problema de l*in*guagem [...] e, mais tarde, surgem trabalhos sobre a aquisição do conhecimento matemático e os problemas consideráveis que sua aprendizagem levanta. A representação semiótica é externa e consciente do sujeito [...].

Duval (2009) ressalta a*in*da a dist*in*ção entre “*semiósis*” e “*noésis*”. A primeira seria a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e a “*noésis*” seria responsável pela apreensão conceitual de um objeto. Para que ocorra a aprendizagem, de um determ*in*ado objeto matemático, é necessário que ocorra a “*noésis*” através de significativas “*semiósis*”. Não há *noésis* sem *semiósis*; é a *semiósis* que determ*in*a as condições de possibilidade e de exercícios da *noésis*.

Encontramos uma citação de Duval (2009, p.19) que apoia a nossa pesquisa cujo tema central é a abordagem da Derivada por meio da Taxa de Variação:

> [...] nos diferentes níveis de ens*in*o das matemáticas, a persistência de uma separação entre as representações que não enfatizam da mesma forma o sistema semiótico [...] fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não têm nada de evidente e espontâneo para a maior parte dos estudantes estes, frequentemente, não reconhecem o mesmo objeto através das representações [...].

Dessa forma, para designar os diferentes tipos de representações utilizados em Matemática, Duval (2011) *in*troduz o termo registro de representação semiótica e há quatro tipos diferentes de registros de representações: Língua natural (representação discursiva), Figuras geométricas planas ou em perspectivas - representação não discursiva - (estes constituem os registros multifuncionais em que os tratamentos não são algoritmizáveis), Sistemas de escritas e Cálculo (representação discursiva) e Gráficos cartesianos - representação não discursiva - (estes constituem os registros monofuncionais em que os tratamentos são pr*in*cipalmente algoritmos). Esses registros e suas representações são exemplificados no Quadro 4.

A utilização de vários sistemas semióticos de representação é enfatizada por Duval e também aponta que não se pode confundir um objeto de sua representação. Por exemplo, o objeto – Derivada pode estar representado no Registro de Representação na Língua Natural Especializada, Simbólico - Algébrico ou Gráfico Cartesiano (Quadro 5), ou seja, a um mesmo objeto podemos atribuir várias representações.

Quadro 4: Classificação dos registros mobilizáveis

	Representação Discursiva	Representação Não Discursiva
Registros Multifuncionais Os tratamentos não são algoritmizáveis.	**Língua natural** Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: *argumentação a partir de observações, de crenças; *dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	**Figuras geométricas planas ou em perspectivas** (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). *apreensão operatória e não somente perceptiva; *construção com instrumentos.
Registros Monofuncionais Os tratamentos são principalmente algoritmos.	**Sistemas de escritas** *numéricas (binária, decimal, fracionária); * algébricas; *simbólicas (línguas formais). Cálculo	**Gráficos cartesianos** *mudanças de sistemas de coordenadas; *interpolação, extrapolação.

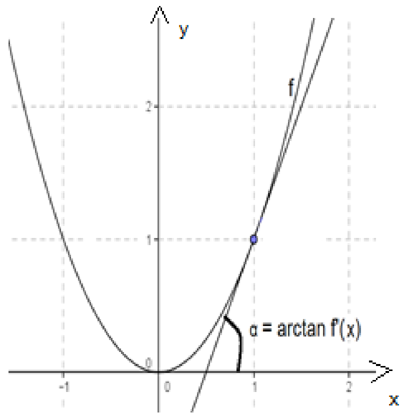
Fonte: DUVAL (2011, p.14)

A orig*in*alidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar de registro de representação. Assim sendo, deve sempre existir a possibilidade de passar de um registro ao outro.

Duval (2011, p.15) conjectura que: “a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica”. E faz o segu*in*te questionamento: “Podemos colocar já uma primeira questão: uma tal coordenação é adquirida naturalmente pelos alunos e estudantes durante o ens*in*o de matemática?”.

*In*terpretamos a teoria de Duval com relação ao objeto desta pesquisa - a Derivada por meio do Quadro 5.

Quadro 5: Exemplos de Registros

Registro Multifuncional: Registro de Representação na Língua Natural Especializada	**Registro Monofuncional: Gráfico Cartesiano**	**Registro Monofuncional: Simbólico-Algébrico**
A Derivada da função definida por $f(x) = x^2$, no ponto de abscissa x é $f'(x) = 2x$.		$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ $=$ $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} =$ $= \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$

Fonte: O pesquisador

No Quadro 5 evidenciamos as diferentes representações da Derivada, por meio dos diferentes registros.

Existem dois tipos de transformações de representações semióticas que são radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões.

Os tratamentos são transformações dentro de um mesmo registro, ou seja, uma transformação *in*terna a um registro. Logo, os tratamentos são ligados à forma, e não aos objetos matemáticos.

Segundo Damm (2012, p.179):

> Existem regras de tratamentos próprias a cada registro, sua natureza e número variam consideravelmente, de um registro a outro. Por exemplo, quando trabalhamos com as operações fundamentais com os números naturais no registro algorítmico, o tratamento exige a compreensão das regras do sistema posicional e da base dez.

Um exemplo de tratamento encontra-se a seguir, em que o cálculo da Derivada da função dada por $f(x) = x$ em relação à varável x, no ponto de abscissa 4 ($f'(4)$) é feito conservando o mesmo registro monofuncional de sistema de escrita: Simbólico-Algébrico, como segue:

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4 + h - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

As conversões são transformações de representações semióticas que consistem na mudança de uma representação de um registro A para uma representação de um registro B, conservando os mesmos objetos matemáticos. Desta forma, converter implica em coordenar registros mobilizados.

Segundo Damm (2012, p.181) “A conversão não pode ser confundida com o tratamento. O tratamento se estabelece “dentro” do registro, já a conversão se dá entre registros diferentes”.

De acordo com Duval (2011), a conversão é um passo fundamental no trabalho com representações semióticas, a transformação de uma representação de um registro para uma representação de um outro registro e, então, exig*in*do do sujeito o estabelecimento da diferença entre significado e significante.

Do ponto de vista cognitivo, a atividade de conversão mostra-se como atividade de transformação representacional fundamental, sendo aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

Realizar a conversão não é simplesmente traduzir, porque em um processo de conversão existem várias variáveis cognitivas, específicas do funcionamento de cada registro, que determ*in*am as unidades de significado pert*in*entes a serem consideradas em cada um dos registros.

Um exemplo de conversão encontra-se no exemplo:

“$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1^2 + 2.1.h + h^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2.1 + h) = 2$. A Derivada da função, no ponto de abscissa 1 é a tangente trigonométrica do ângulo de *in*cl*in*ação da reta tangente à curva, que é o gráfico de f, no ponto P (1, f(1))”, em que a notação da Derivada da função f em relação à x, no ponto de abscissa 1 é apresentada em três formas distintas, mais em três registros dist*in*tos, a saber (Quadro 5): registro monofuncional: Gráfico Cartesiano, registro monofuncional: Simbólico-Algébrico e registro multifuncional: Registro de Representação na Língua Natural Especializada.

Diante do exposto sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, analisaremos, no capitulo 3, a abordagem dada à Taxa de Variação no Livro Didático do Ens*in*o Médio e a sua relação com o conceito da Derivada no Livro Didático do Ens*in*o Superior, por meio das representações da Taxa de Variação e da Derivada no texto, nos exercícios resolvidos e propostos e outras atividades dos livros def*in*idos anteriormente. Analisaremos, especialmente, a influência da representação do objeto matemático – Taxa de Variação no processo de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, e mais especificadamente a Derivada. Segundo essa teoria, pode-se representar o objeto matemático – Taxa de Variação utilizando os registros de representação semiótica e durante o processo de estudo da Derivada deve ser dada ênfase a duas diferentes transformações de representação semiótica: os tratamentos e as conversões. Sendo assim, quanto mais diversificada é a representação da Derivada, maior é a compreensão que se tem a seu respeito, e a apropriação do seu significado ocorre a partir de conversões estabelecidas entre as diversas maneiras de representá-la.

Na próxima seção apresentamos considerações a respeito das ideias de Sentido Holístico da Derivada def*in*ido por God*in*o *et al*. (2013). Esse é um dos embasamentos teóricos que aliado à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, permite-nos fazer a análise dos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior.

2.2 Sentido holístico da derivada

Nesta seção, apresentaremos as ideias de God*in*o *et al*. (2013) sobre o Sentido Holístico da Derivada. A apropriação dessa noção permitiu-nos analisar quais são os significados implementados ou pretendidos para a Derivada nos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior, analisados nessa pesquisa.

Segundo Stigar (2008), a palavra holística foi criada a partir do termo *holos*, um termo grego que significa todo ou *in*teiro. Sendo assim, é uma qualidade que classifica algo relacionado com o holismo, ou seja, que procura compreender os fenômenos na sua totalidade e globalidade.

De acordo com esse autor, o holismo considera que o sistema completo se comporta de um modo diferente da soma das suas partes, ressalvando a importância do todo como algo que ultrapasse a soma das partes, ressaltando a*in*da a importância da correlação entre essas parcelas.

Conforme o pesquisador, na abordagem holística, o todo e cada uma das partes encontram-se ligados com *in*terações constantes estabelecendo a relação de *in*terdependência e a convergência de diversas perspectivas. Isso só é possível com critérios holísticos.

Em suma, a holística pertence e se refere ao holismo, que é uma ideia de analisar os fenômenos do ponto de vista das múltiplas *in*terações que o caracterizam.

Então de acordo com o exposto, a noção de configuração epistêmica[20] (CE) de God*in*o *et al*. (2013) permitiu aos autores reconstruírem o Sentido Holístico da Derivada, identificando seus significados parciais. Para refazer essas ideias, os pesquisadores fizeram uma revisão bibliográfica a partir da Matemática grega até o século XX, realizando uma análise de objetos matemáticos primários envolvidos nas várias questões que foram abordadas e que aconteceram em momentos diferentes e culm*in*aram com o surgimento da noção da Derivada.

A partir dessa revisão God*in*o *et al*. (2013) elaboraram nove configurações epistêmicas associadas aos vários problemas:

a) Traçados de tangentes na Matemática grega (CE1);
b) Problemas sobre Taxas de Variação na Idade Média (CE2);
c) Cálculo de subtangentes e tangentes utilizando álgebra (CE3);
d) Traçados de tangentes mediante considerações c*in*emáticas (CE4);
e) Cálculo de Máximos e Mínimos mediante a ideia *in*tuitiva de Limite (CE5);
f) Cálculo de tangentes e subtangentes mediante métodos *in*f*in*itesimais (CE6);
g) Cálculo de Fluxões (CE7);
h) Cálculo de Diferenças (CE8);

---

[20] *Teoria (explicada com maior detalhe na seção 2.3) que se preocupa em desvendar os mecanismos de pensamento humano.*

i) Derivada como um Limite (CE9).

Essas configurações podem ser relacionadas, segundo God*in*o *et al*. (2013), como ilustrado na Figura 22.

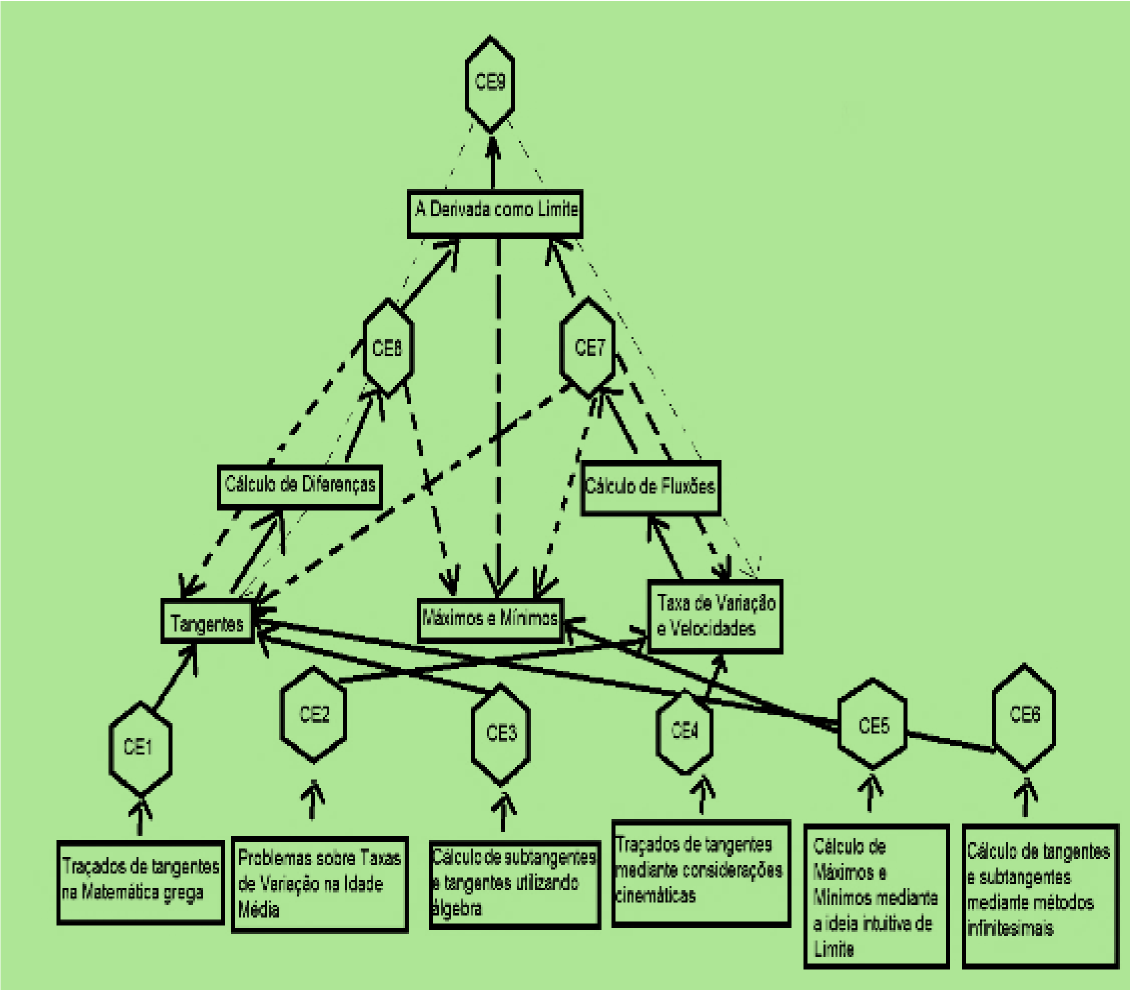
De acordo com essa figura, percebemos o Sentido Holístico da Derivada em que diferentes abordagens desse conceito levam à compreensão formal da Derivada como um Limite, que God*in*o *et al*. (2013) nomearam configuração epistêmica (CE9), que ocupa o vértice superior do triângulo. Segundo os autores essa configuração é ativada para resolver problemas de Tangentes, Máximos e Mínimos e Taxa de Variação-Velocidades.

As configurações: Cálculo de Fluxões (CE7) e Cálculo de Diferenças (CE8), segundo God*in*o *et al*. (2013) foram ativadas por Cauchy (pr*in*cipalmente) para dar o caráter formal para a Derivada, como o sendo $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Segundo God*in*o *et al*. (2013), as configurações epistêmicas: Cálculo de Fluxões (CE7) e Cálculo de Diferenças (CE8) foram ativadas por Newton e Leibniz, respectivamente, para resolver situações-problema que envolvem Tangentes, Máximos e Mínimos e Taxa de Variação e Velocidades, observamos que esta prática ocupa a “parte central” do triângulo.

F*in*almente na base do triângulo, God*in*o *et al*. (2013) def*in*em as configurações primárias que possuem caráter extensivo e são ativadas na resolução de situações-problema que envolvem Tangentes, Máximos e Mínimos e Taxa de Variação e Velocidades: Traçados de Tangentes na Matemática grega (CE1), Problemas sobre Taxas de Variação na Idade Média (CE2), Cálculo de subtangentes e tangentes utilizando álgebra (CE3), Traçados de tangentes mediante considerações c*in*emáticas (CE4) e Cálculo de tangentes e subtangentes mediante método *in*f*in*itesimais (CE6).

Figura 22: Significado Holístico da Derivada



Fonte: God*ino et al* (2013, p.128)

As configurações CE1, CE3 e CE6 são ativadas para resolver problemas de tangentes, já as CE2 e CE4 são impulsionadas para resolver situações-problema que envolvem a Taxa de Variação e Velocidades e, por fim, a CE5 é despertada para resolver questões de Máximos e Mínimos.

A seguir apresentamos um exemplo da configuração epistêmica Derivada como um Limite (CE9), no **Livro K** (Figura 23).

Figura 23: Significado Holístico da Derivada no Livro K

$$b)\ f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

Como

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h, \quad h \neq 0$$

segue que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

Portanto,

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x.$$

Fonte: Guidorizzi (2008, p. 138-139)

De acordo com God*ino* *et al* (2013) a análise conjunta dos elementos e seus relacionamentos confirmam, pr*in*cipalmente, o significado holístico da Derivada (p.130).

Finalizamos essa seção, concluindo que o Sentido Holístico da Derivada está intimamente relacionado com dúvidas que envolvem Tangentes, Máximos e Mínimos e Taxa de Variação e Velocidades. E que essas ideias iniciais contribuíram para o seu desenvolvimento.

Na próxima seção, apresentamos, de acordo com as ideias de Godino *et al*. (2013), os critérios de Idoneidade Epistêmica para a análise dos Livros Didáticos do Ens*ino* Médio e Superior.

2.3 Critérios de idoneidade epistêmica

Nesta seção apresentamos os critérios de Idoneidade Epistêmica de God*ino* *et al*. (2013) para o estudo da Derivada. Apoiamo-nos nessas ideias para construir os nossos critérios de Idoneidade Epistêmica para o estudo da Derivada que realizamos neste trabalho.

Segundo Godino *et al*. (2013), a partir da construção do Sentido Holístico e de estudos em Educação Matemática em questões de ens*ino* e aprendizagem da Derivada, é possível criar parâmetros para analisar e caracterizar os significados pretendidos desse conceito.

No âmbito desta pesquisa, estendemos esses parâmetros para distinguir os significados pretendidos da Taxa de Variação nos Livros Didáticos do Ensino Médio e da Derivada nos Livros Didáticos do Superior. A partir dessas designações, podemos avaliar a Idoneidade Epistêmica dos significados da Taxa de Variação e da Derivada.

Observamos que, “No entanto, deve-se notar que estes parâmetros são gerais e podem ser utilizados para a análise da Idoneidade Epistêmica de um **tópico matemático qualquer”** (GODINO *et al*, 2013, p.130 – grifo nosso).

A seguir descrevemos os c*in*co critérios para analisar a Idoneidade Epistêmica dos significados da Derivada, segundo God*in*o *et al*. (2013). A*in*da segundo esses autores, para cada um dos c*in*co critérios "genéricos" são propostos subcritérios que se relacionam com o tema a ser analisado:

i-) representação dos campos de problemas propostos: são as escolhas dos textos, exercícios propostos e resolvidos, situações-problema ou questões que sejam representativas em cada entrada do Quadro 6, para assim obtermos o significado global da Derivada.

De acordo com God*in*o *et al*. (2013), os campos de problemas (CP) são resumidos assim: Cálculo de tangentes (CP1), Cálculo das Taxas de Variação (CP2), Cálculo das Taxas de Variação *In*stantânea (por meio do Limite) (CP3), Aplicação da Derivada para calcular máximos e mínimos (CP4), Cálculo da Derivada a partir de regras e teoremas de derivação (CP5).

Os autores ressaltam que o último campo de problemas surge da necessidade de como os Livros Didáticos abordam as diversas situações de aprendizagem do Sentido Holístico da Derivada e dessa forma transcender o componente algebrizado desse conceito, ou se simplesmente aplicam algumas regras ou propostas de resolução.

Estes campos de problemas foram alocados, pelos autores, na primeira coluna do Quadro 6.

ii) tipo de representações ativadas na abordagem e solução das tarefas: são as *in*úmeras representações (com diferentes tratamentos e conversões entre eles) para referirmos aos múltiplos tipos de objetos matemáticos.

No Quadro 6 os autores exemplificam para a função f, dada por $f(x)$, e a sua derivada, $f'(x)$, as representações prévias e as representações emergentes como sendo: Verbal, Gráfica, Simbólica e Tabular.

iii) representatividade dos elementos reguladores e argumentativa: são as entradas do Quadro 7, em que deve existir uma relação representativa entre as linhas (as configurações epistêmicas (CE)) e as colunas (campos de problemas (CP)) para obtermos o significado global da Derivada de acordo com o seu Sentido Holístico.

Quadro 6: Campos de Problemas e Representações Ativadas nos Livros do Ens*ino* Superior

Campo de Problemas	Prévias		Representações para f(x) e f´(x)							
	Emergentes		f (x)				f ' (x)			
			Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
CP1: Sobre Tangentes	f(x)	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
	f'(x)	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
CP2: Razão Instantânea de Variação	f(x)	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
	f'(x)	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
CP3: Taxa Instantânea de Variação	f(x)	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
	f'(x)	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
CP4: Aplicação da Derivada (Máximos e Mínimos, análise de funções,...	f(x)	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
	f'(x)	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
CP5: Cálculo da Derivada a partir de regras e teoremas de derivação	f(x)	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								
	f'(x)	Verbal								
		Gráfica								
		Simbólica								
		Tabular								

Fonte: God*ino et al* (2013, p. 141)

iv) conhecimentos prévios para a *in*trodução da Derivada: são os conhecimentos matemáticos obtidos em anos escolares anteriores à graduação e que alguns autores dos livros didáticos mobilizam para *in*troduzir o conceito de Derivada.

v) representatividade dos significados institucionais implementados ou pretendidos em comparação com o significado global de referência: é o confronto entre a matriz curricular da instituição escolar e os conteúdos propostos nos livros didáticos que são adotados pela entidade e provavelmente seguidos pelo professor como norteador de suas aulas.

Quadro 7: Significados parciais da Derivada identificados nos Livros do Ensino Superior

Significados Parciais	Campos de Problemas				
	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5
CE1: Traçado de tangente na Matemática grega					
CE2: Problemas sobre a Taxa de Variação na Idade Média					
CE3: Cálculo de subtangente e tangente utilizando álgebra					
CE4: Traçados de tangentes por meio de considerações cinemáticas					
CE5: Cálculo de Máximo e Mínimo por meio da ideia intuitiva de Limite					
CE6: Cálculo de Tangentes e subtangentes através de métodos infinitésimais					
CE7: Cálculo de fluxões					
CE8: Cálculos de diferenças					
CE9: Derivada como Limite					

Fonte: Godino *et al* (2013, p. 143)

Segundo Godino *et al*. (2013, p. 132).

> [...] para que o ensino seja epistemologicamente ideal, este conjunto de objetos e significados institucionais de referência deve representar o significado global da Derivada. A ênfase em determinados significados e objetos matemáticos e ignorância dos outros pode resultar em uma cobertura tendenciosa epistêmica que pode afetar a idoneidade do processo de ensino. A ênfase em determinados significados e objetos matemáticos em detrimento de outros pode resultar em uma epistêmica cobertura tendenciosa que pode afetar a idoneidade do processo educacional [...].

Ainda de acordo com Godino *et al*. (2013, p. 133).

> É importante notar que, embora o significado de um objeto matemático dependa da gama de problemas em que ele é usado, a nível

> *in*stitucional muitas vezes se utiliza um objeto matemático em um sentido dist*in*to ao campo de problemas onde é ativado. Por exemplo, alguns Livros Didáticos *in*troduzem a Derivada usando problemas de velocidades, mas a aplicam apenas no sentido da Taxa de Variação *In*stantânea por meio de cálculos de Limite.

Após as apresentações feitas nestas seções (2.2 e 2.3) operacionalizamos os c*in*co critérios mencionados de Idoneidade Epistêmica na seção 2.4, pois por meio das noções da Análise de Conteúdo construiremos quadros de análises para os Livros Didáticos do Ens*in*o Superior.

Ressaltamos que para construirmos os nossos quadros de análises dos Livros Didáticos do Ens*in*o Médio e Ens*in*o Superior nos *in*spiramos no Quadro 6**,** tais quadros são apresentados na seção 2.4. O Quadro 7 será utilizado na seção 3.4 onde faremos um estudo global (ou análise conjunta) dos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior.

F*in*alizamos esta seção em que apresentamos os c*in*co critérios de Idoneidade Epistêmica de God*in*o *et al*. (2013) e relatamos a sua conclusão em relação ao ens*in*o da Derivada como sendo: "o seu ens*in*o epistemologicamente ideal deve contemplar seu significado global" (p.132).

A seguir apresentamos alguns pr*in*cípios da Análise de Conteúdo de Bard*in* utilizados nessa pesquisa e de acordo com as ideias: da teoria dos Registros de Representação Semiótica, Sentido Holístico da Derivada e critérios de Idoneidade Epistêmica, elaboramos *in*dicadores que expomos em quadros nomeados: Matriz de Análise dos Livros Didáticos do Ens*in*o Médio, Matriz de Análise dos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior e Sentido Holístico da Derivada nos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior. Tais referências, junto com esses quadros, utilizaremos para a análise dos Livros Didáticos do Ens*in*o Médio e Superior.

2.4 Análise de conteúdo

> Para um ser humano, 30 anos é uma idade bonita: nascer, crescer, agir. E para um livro? Escrevê-lo, ser útil, evoluir? **Bard*in***

A Análise de Conteúdo é uma técnica que consiste em avaliar de forma sistemática um corpo de texto, de forma a desvendar e quantificar a ocorrência de palavras, frases ou temas considerados como “chave” que possibilitam a comparação posterior.

Segundo Bard*in* (2014, p. 20) “A Análise de Conteúdo é uma técnica de *in*vestigação que tem por f*in*alidade a descrição objetiva, sistemática e quantitativa do conteúdo manifesto da comunicação”.

A proposta de Bard*in* (2014) constitui-se de algumas etapas para a execução da análise de conteúdo, organizadas em três fases:

1) pré-análise;
2) exploração do material;
3) tratamento dos resultados, *in*ferência e *in*terpretação.

A primeira etapa, denom*in*ada pré-análise, é a fase que compreende a organização do material a ser analisado com vistas a torná-lo operacional, sistematizando as ideias *in*iciais. Compreende a realização de quatro processos:

(i) a leitura flutuante: estabelecer os documentos para a coleta de dados, o pesquisador toma conhecimento do texto, transcreve entrevistas etc.;

(ii) escolha dos documentos: seleção do que será analisado, consiste na def*in*ição do *corpus* da análise. No caso do nosso trabalho o *corpus* da pesquisa serão os Livros Didáticos do Ens*in*o Médio e Superior que serão submetidos a um estudo aprofundado orientado por hipóteses e referenciais teóricos.

Segundo Bard*in* (2014), o *corpus* é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos. A sua constituição implica muitas vezes, escolhas, seleções e regras (p.122) - expomos essas regras após a afirmação (iv).

(iii) formulação de hipóteses e objetivos: a partir da leitura *in*icial dos dados;

(iv) elaboração de *in*dicadores: por meio de recortes de textos nos documentos analisados, os temas que mais se repetem podem constituir os índices.

Nessa fase, é importante que se atentem as segu*in*tes regras na seleção dos documentos (BARD*IN*, 2014):

● exaustividade: atentar para esgotar a totalidade da comunicação;

● representatividade: os documentos selecionados devem conter *in*formações que representem o universo a ser pesquisado;

● homogeneidade: os dados devem referir-se ao mesmo tema;

● pert*in*ência: os documentos precisam ser condizentes aos objetivos da pesquisa.

A exploração do material é a segunda etapa; diz respeito à codificação do material, à def*in*ição de categorias de análise, à identificação das unidades de registro e das unidades de contexto nos documentos.

Segundo Bard*in* (2014, p.127), “[...] Esta fase, longa e fastidiosa, consiste essencialmente em operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas”.

Logo, essa etapa é de suma importância, pois possibilita o *in*cremento das *in*terpretações e *in*ferência. Sendo assim, a codificação, a classificação e a categorização são básicas nesta etapa e na construção das categorias, o pesquisador deve ater-se ao critério exclusividade, a fim de que um elemento não seja classificado em mais de uma categoria.

A terceira e última etapa consiste no tratamento dos resultados, *in*ferência e *in*terpretação. Nessa etapa ocorre a condensação e o destaque das *in*formações para análise, culm*in*ando nas *in*terpretações *in*ferenciais; é o momento da *in*tuição, da análise reflexiva e crítica.

Para Bard*in* (2014, p. 127), “O analista, tendo à sua disposição resultados significativos e fiéis pode então propor *in*ferências e adiantar *in*terpretações a propósito dos objetivos previstos -, ou que digam respeito a outras descobertas *in*esperadas”.

Ressaltamos que na nossa pesquisa, os documentos analisados são livros didáticos. Analisaremos no Livro Didático do Ens*in*o Médio o capítulo de Geometria Analítica – Estudo da Reta e no Livro Didático do Ens*in*o Superior o capítulo *in*icial em que os autores *in*troduzem o conceito de Derivada.

Sendo assim, a nossa pesquisa atende às regras, de acordo com o que apresentamos anteriormente, de exaustividade, representatividade, homogeneidade e pert*in*ência, pois os Livros Didáticos do Ens*in*o Médio, que analisaremos, são *in*dicados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e os Livros Didáticos do Ens*in*o Superior constam de ementas de diversas universidades do Brasil. Esses materiais representam o universo a ser pesquisado e os dados referem-se ao mesmo tema e são condizentes aos objetivos desta pesquisa.

Em relação à importância do Livro Didático, há consenso no meio acadêmico que em todos os níveis da escolaridade, o Livro Didático desempenha papel de extrema importância para o ens*in*o e aprendizado dos conteúdos discipl*in*ares, em especial da Matemática.

Para o MEC, o Livro Didático constitui um papel fundamental para os saberes discipl*in*ares:

> O Livro Didático traz para o processo de ens*in*o e aprendizagem um terceiro personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado; os métodos adotados para que o aluno consiga aprendê-lo mais eficazmente; e a organização dos conteúdos ao longo dos anos de escolaridade. (BRASIL, 2015, p.9)

Para Barufi (1999),

> O Livro Didático é um "porto seguro", onde o autor ancora o curso, evitando desvios de rota em demasia. Constitui-se num referencial sempre presente para ele e para os alunos. É claro que, no decorrer da viagem por mares nunca d'antes navegados, pequenas *in*cursões em ilhas desconhecidas são permitidas, até mesmo podem ser estimulantes para tornar a viagem mais *in*teressante. Entretanto, o rumo não pode ser esquecido (p.48).

Em relação ao Cálculo Diferencial, o livro didático também exerce uma grande *in*fluência no seu ens*in*o e na sua aprendizagem, pois é o recurso didático utilizado por professores e alunos. É comum, na universidade, depararmo-nos com professores que utilizam mais de um livro na preparação de suas aulas.

Segundo Barufi (1999),

> A escolha do livro revela uma primeira compatibilidade entre a proposta do autor e a proposta do professor que m*in*istra o curso. Essa premissa nos parece razoável diante do grande número de livros didáticos de Cálculo existentes e das escolhas normalmente realizadas. (p.49)

A*in*da consoante Barufi (1999),

> [...] o curso não se desenvolve necessariamente de modo idêntico ao livro, mas, de modo geral, a organização do Cálculo, apresentada no texto, fornece fortes *in*dícios das *in*tenções do professor, de suas crenças em relação a como deverá ocorrer à construção do conhecimento por parte de seus alunos no decorrer do curso. [...] (p. 49 -50)

Para o MEC (Brasil, 2015), o Livro Didático desempenha funções básicas tanto para os alunos como para os professores.

Com relação aos alunos, tais f*in*alidades são: favorecer a aquisição de saberes socialmente relevantes, consolidar, ampliar, aprofundar e *in*tegrar os conhecimentos, propiciar o desenvolvimento de competências e habilidades no aluno que contribuam para aumentar sua autonomia, contribuir para a formação social, cultural desenvolvendo a capacidade de convivência e de exercício da cidadania.

Com respeito ao professor, espera-se que por meio do Livro Didático ele possa: auxiliar no planejamento didático-pedagógico na gestão das aulas, favorecer a formação didático-pedagógica, auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno e favorecer a aquisição de saberes profissionais pert*in*entes, assum*in*do o papel de texto de referência.

Nesta pesquisa analisamos como as ideias da Variação e da Taxa de Variação se manifestam em quatro Livros (que denom*in*amos de **Livro A**, **Livro B**, **Livro C** e **Livro D**, respectivamente) Didáticos de Matemática do 3º ano do Ens*in*o Médio em particular no capítulo de Geometria Analítica - Estudo da Reta, pois julgamos este ponto fundamental para o entendimento da Derivada como Taxa de Variação.

Analisamos também quatro Livros Didáticos do Ens*in*o Superior e a *in*trodução do conceito da Derivada com ênfase na Taxa de Variação. Denom*in*amos esses livros, de agora em diante, por **Livro X**, **Livro Y**, **Livro W** e **Livro K**, respectivamente.

Descrevemos esses livros no próximo capítulo desta tese.

A fim de efetuarmos a análise dos Livros Didáticos do Ensino Médio e do Ensino Superior, elaboramos indicadores de acordo com os nossos referenciais teórico-metodológicos: os critérios de Idoneidade Epistémica, Sentido Holístico da Derivada e os Registros de Representação Semiótica. Dessa forma operacionalizamos e descrevemos as configurações de objetos e sistemas subjacentes praticados nos livros.

Para alcançarmos nossos objetivos, fazemos Matrizes de Análises para os Livros Didáticos do Ens*in*o Médio e Livros Didáticos do Ens*in*o Superior.

A matriz, representada pelo Quadro 8 será utilizada para analisarmos os Livros Didáticos do Ens*in*o Médio.

Ressaltamos que os quadros apresentados nesta seção foram *in*spirados na matriz de análise de Bardin (2014, p.64) e nos campos de problemas de God*in*o *et al*. (2013, p.141).

No Quadro 8, resumimos as representações (simbólica, verbal, gráfica e tabular) prévias e emergentes para a Taxa de Variação, segundo *In*dicadores dos Livros Didáticos do Ens*in*o Médio (IM):

● **IM1**: Contextualização - envolvendo Taxas de Variação;

● **IM2**: Relação entre a Taxa de Variação e o Coeficiente Angular;

● **IM3**: Utilização de Taxas de Variação para prever resultados nas demais áreas do conhecimento;

● **IM4**: Utilização das Razões Diretas na resolução de problemas;

● **IM5**: Taxa de Variação Relativa (Porcentagem);

● **IM6**: Semelhança entre a representação algébrica da Função Afim e a Equação Reduzida da Reta;

● **IM7**: Utilização de novas tecnologias para resolver problemas relacionados à Taxas de Variação.

Quadro 8: Matriz de Análise dos Livros do Ens*ino* Médio

Indicadores dos Livros Didáticos do Ensino Médio (IM)	Representações para a Taxa de Variação				
	Emergentes / Prévias	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
IM1: Contextualização – envolvendo Taxas de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM2: Relação entre Taxa de Variação e o Coeficiente Angular	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM3: Utilização de Taxas de Variação para prever resultados nas demais áreas do conhecimento	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM4: Utilização das razões diretas na resolução de problemas	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM5: Taxa de Variação Relativa (Porcentagem)	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM6: Semelhança entre a representação algébrica da Função Afim e a Equação Reduzida da Reta	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM7: Utilização de novas tecnologias para resolver problemas relacionados à Taxas de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				

Fonte: Adaptado de God*ino et al*.(2013) e Bard*in* (2014)

Essa Matriz de análise dos Livros Didáticos do Ens*ino* Médio, **Quadro 5**, possui estes itens porque:

- **Contextualização – envolvendo Taxas de Variação:** contextualizar é a recomendação e orientação do MEC (p.18) e também dos artigos, teses e dissertações, da nossa revisão bibliográfica: Lucas (2015), Camarena (2010) e Reis (2012).

Ainda de acordo com essa ideia, Machado (2016) sintetiza a competência III da matriz do ENEM assim: (ressaltamos que são cinco competências básicas cujo desenvolvimento conduz a uma formação pessoal consistente):

Capacidade de contextualizar os conteúdos disciplinares e de problematizar, de enfrentar situações-problema (p.9).

● **Relação entre a Taxa de Variação e o Coeficiente Angular:** esse item é importante para o entendimento da Derivada como Taxa de Variação, já que o coeficiente angular é um exemplo, entre tantos, de Taxa de Variação;

● **Utilização de Taxas de Variação para prever resultados nas demais áreas do conhecimento:** esse item relaciona a Taxa de Variação para a obtenção, por exemplo, de modelos envolvendo a Função Afim e assim prever resultados. Por exemplo, por meio da função afim podemos prever quanto iremos gastar para encher o tanque de combustível do carro sem precisar, de fato, enchê-lo;

● **Utilização das Razões Diretas na resolução de problemas:** a utilização das razões diretas envolve a variação de uma grandeza em relação à outra grandeza, por exemplo, a distância percorrida por um carro e o combustível gasto por esse carro durante a distância percorrida;

● **Taxa de Variação Relativa (Porcentagem):** é frequente o uso de expressões que refletem acréscimos ou reduções, em preços, números ou quantidades, sempre tomando como base o denominador 100. Por exemplo, a gasolina teve um aumento de 2%, isto significa que em cada R$ 100,00 houve um acréscimo de R$ 2,00 no preço da gasolina;

● **Semelhança entre a representação algébrica da Função Afim e a Equação Reduzida da Reta:** ao fazermos a relação da equação reduzida da reta e a função afim identificamos o coeficiente angular da reta e dessa forma podemos fazer relações entre Taxa de Variação e a Derivada;

● **Utilização de novas tecnologias para resolver problemas relacionados à Taxas de Variação:** a utilização das novas tecnologias nas aulas de Matemática pode promover mudanças na d*in*âmica da sala de aula e também nas formas de aprender os conteúdos. De acordo com Ponte (1992),

> [...] a tecnologia, devidamente utilizada, pode constituir ambientes matemáticos nos quais a matematização tem a possibilidade de ocorrer naturalmente [...] o computador virá a constituir por isso mesmo uma significativa *in*fluência [...] (p.13).

Sendo assim, entendemos por **manifestar** as **ideias**, mesmo que implicitamente, **da Variação** e **da Taxa de Variação** (no ens*in*o médio) e **da Derivada** (com ênfase na Taxa de Variação): o Coeficiente Angular, Cálculo de Velocidades, Funções Médias da Economia (Receita Média, Custo Médio e Lucro Médio), Funções Marg*in*ais da Economia (Receita Marg*in*al, Custo Marg*in*al e Lucro Marg*in*al), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem).

Com relação aos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior, ressaltamos que analisamos o capítulo *in*trodutório da Derivada, porque nesse ponto podemos relacionar a Derivada à Taxa de Variação.

Para alavancarmos a análise dos Livros Didáticos escolhidos do Ens*in*o Superior fizemos - de acordo com os procedimentos da Análise de Conteúdo, o Sentido Holístico da Derivada, os critérios de Idoneidade Epistêmica e a teoria dos Registros de Representação Semiótica - uma Matriz de Análise para os Livros do Ens*in*o Superior (Quadro 9).

Por meio desse Quadro 9, resumimos as representações (verbal, simbólica, gráfica e tabular) prévias e emergentes para a Derivada, segundo *In*dicadores dos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior (IS):

● **IS1**: Contextualização para enfatizar a Derivada com Taxa de Variação;

● **IS2**: Referência entre a Derivada e o Coeficiente Angular;

● **IS3**: Utilização da Derivada para prever resultados nas demais áreas do conhecimento;

● **IS4**: Utilização do limite $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para calcular a Derivada;

● **IS5**: Utilização de novas tecnologias para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação.

Esta Matriz de análise dos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior, Quadro 9, possui esses itens porque: observamos que as justificativas da Contextualização para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação e a Utilização de novas tecnologias para enfatizar a Derivada como Taxa de

Variação são as mesmas das entradas IM1 e IM7, respectivamente, do Quadro 9.

Quadro 9: Matriz de Análise dos Livros do Ens*ino* Superior

Indicadores dos Livros Didáticos do Ensino Superior (IS)	Representações para a Derivada				
	Emergentes / Prévias	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
IS1: Contextualização para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IS2: Referência entre a Derivada e o Coeficiente Angular	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IS3: Utilização da Derivada para prever resultados nas demais áreas do conhecimento	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IS4: Utilização do Limite para calcular a Derivada	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IS5: Utilização de novas tecnologias para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				

Fonte: Adaptada de God*ino* *et al*. (2013)

● **Referência entre a Derivada e o Coeficiente Angular:** o coeficiente angular é um exemplo de Taxa de Variação e foi na resolução do problema de encontrar a reta tangente a uma curva em um ponto dado que Newton desenvolveu as ideias *in*iciais da Derivada.

● **Utilização da Derivada para prever resultados nas demais áreas do conhecimento:** como a Derivada é uma Taxa de Variação, podemos utilizá-la para prever resultados, por exemplo, como em todas as razões diretas.

Podemos prever a velocidade *in*stantânea de um automóvel em relação ao tempo, sem necessariamente olhar o velocímetro do carro.

● **Utilização do limite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para calcular a Derivada:** analisamos se os Livros Didáticos do Ens*in*o Superior abordam as noções da Derivada tendo como base o cálculo do limite, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, ou se o fazem segundo as concepções de Newton e Leibniz que estudaram a Derivada por meio da Taxa de Variação.

Ressaltamos que essas possibilidades de representações prévias e emergentes dos registros podem ser reveladas, por vezes de maneira implícita e por outras de maneira explícita, no decorrer da apresentação da teoria pelo autor do livro, nas resoluções apresentadas para exercícios resolvidos e também nas diversas possibilidades de resoluções por nós percebidas, com base nos referenciais teóricos adotados e em nossa prática docente, para as questões propostas para que os leitores resolvam.

F*in*alizamos o capítulo em que apresentamos os nossos referenciais teórico-metodológicos: os Registros de Representações Semiótica de Duval, a Análise de Conteúdo de Bard*in*, o Sentido Holístico da Derivada e os critérios de Idoneidade Epistêmica de God*in*o *et al*.

No próximo capítulo expomos como é feita a abordagem das ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação nos Livros Didáticos do Ens*in*o Médio. Começamos essa exposição pelo **Livro A**.

CAPÍTULO III

OS CONCEITOS DE TAXA DE VARIAÇÃO E DERIVADA NOS LIVROS ANALISADOS

> [...] desde 1631 tenho estudado cuidadosamente o problema das tangentes e, agora (1633), f*in*almente dou-me por satisfeito. O método do círculo resolve esses problemas com simplicidade. **René Descartes**

Neste capítulo, apresentamos as análises dos livros didáticos que compõem o *corpus* desta pesquisa, de acordo com as ideias da Análise de Conteúdo. Ressaltamos que fazemos o estudo tendo por base: a teoria dos Registros de Representação Semiótica, o Sentido Holístico da Derivada e os critérios de Idoneidade Epistêmica. Voltaremos nossa atenção aos conceitos fundamentais da Variação e da Taxa de Variação nos Livros Didáticos do Ens*in*o Médio e da Derivada nos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior.

Em relação à nossa pesquisa, neste momento, retomamos dois pontos que julgamos primordiais: o que analisaremos nos livros didáticos e de conformidade com as justificativas históricas relataremos à abrangência do conceito da Derivada.

Nos livros do Ens*in*o Médio, analisamos a seção Estudo da Reta, do capítulo de Geometria Analítica e no ens*in*o Superior o capítulo *in*trodutório da Derivada.

Buscamos, por meio da análise realizada, responder as segu*in*tes questões de *in*vestigação:

1) Quais significados dos conceitos de Variação e de Taxa de Variação são dados em Livros Didáticos do Ensino Médio e Ensino Superior?
2) Como tais significados são organizados em Livros Didáticos do Ensino Médio e Ensino Superior?
3) Qual significado de Derivada pode ser construído a partir de Livros Didáticos de Ensino Superior?

Objetivo geral: visamos *in*vestigar os significados da Variação, da Taxa de Variação e da Derivada que podem ser construídos a partir da abordagem de Livros Didáticos do Ens*in*o Médio e Ens*in*o Superior.

Objetivos específicos

1) Estudar as abordagens dadas aos conceitos de Variação e da Taxa de Variação em Livros Didáticos de Ens*in*o Médio, mais especificadamente no capítulo de Geometria Analítica – Estudo da Reta.

2) Analisar as articulações entre registros os registros de Representação Semiótica e os critérios de Idoneidade Epistêmica para a compreensão da Taxa de Variação como aplicações de Coeficiente Angular, Cálculo de Velocidades, Funções Médias da Economia (Receita Média, Lucro Médio, Custo Médio), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem).

Adotamos para alguns registros, tratamentos e conversões da teoria dos Registros de Representação Semiótica que são exemplificados nas próximas seções a seguinte nomenclatura:

● **Simbólica (o):** Registro de Representação Simbólico-Algébrico;

● **Gráfica (o):** Registro de Representação Gráfico Cartesiano;

● **Verbal:** Registro de Representação na Língua Natural Especializada;

● **Tabular:** Registro de Representação Simbólico-Tabular.

A fim de ilustrarmos os registros utilizados e suas representações, construímos – de acordo com a nomenclatura anterior - os quadros, que são apresentados no decorrer das próximas seções. Nestes quadros, construímos duas colunas: na primeira colocamos o tipo de registro e na segunda exemplos de suas representações (por exemplo, o Quadro 10 da pág*in*a 127). Também elucidaremos os tratamentos e conversões que possivelmente ocorrerão.

Lembramos que, por exemplo, o Quadro 16 da pág*in*a 142 e os semelhantes a ele presentes no decorrer do trabalho apresentam uma análise da Idoneidade Epistêmica dos significados pretendidos nos Livros Didáticos. Estes quadros mostram os *in*dicadores encontrados, bem como as representações que são ativadas.

E a*in*da lembramos o que entendemos por manifestar:

● as ideias da **Variação** e da **Taxa de Variação**, mesmo que implicitamente, no Ens*in*o Médio: o Coeficiente Angular, Cálculo de Velocidades, Funções Médias da Economia (Receita Média, Lucro Médio, Custo Médio), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem).

● a **Derivada** com ênfase na **Taxa de Variação**, mesmo que implicitamente: o Coeficiente Angular, Cálculo de Velocidades, Funções Marg*in*ais da Economia (Receita Marg*in*al, Custo Marg*in*al e Lucro Marg*in*al), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem).

Começamos a análise pelo livro Matemática: Ensino Médio – volume 3, *in*titulado por nós de **Livro A**.

3.1 A taxa de variação nos livros didáticos do ens*in*o médio

3.1.1 Matemática: ens*in*o médio – volume 3.

O livro Matemática: Ens*in*o Médio (volume 3) – nomeado **Livro A** - que está na sua 8ª edição foi escrito por Kátia Stocco Smole, Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo e por Maria Ignez D*in*iz, Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo.

Na apresentação da obra as autoras escrevem:

> [...] Ser leitor em Matemática é condição essencial para cont*in*uar estudando e para a *in*serção no mundo do trabalho, pois a leitura de textos técnicos que utilizam a l*in*guagem matemática está presente nos manuais, em relatórios técnicos, textos didáticos e de divulgação científica e até mesmo na mídia [...] (STOCCO *et al*, 2013, p.3).

A seguir, as autoras, empregam um recurso gráfico para que o leitor conheça as seções do livro, como por exemplo: Texto do livro, Ler para resolver, Exercícios resolvidos, Problemas e exercícios, *In*vente você, Palavras-chave, Saia dessa, Para recordar, Para ler, Calculadora e No computador, Projeto, Cálculo rápido, Para saber mais e Conexão.

O livro intenta a perspectiva metodológica de desenvolver “competências e habilidades” em Matemática de tal forma que o jovem possa enfrentar situações que terá pela frente, na escola e no prosseguimento de seus estudos, no trabalho e no exercício da cidadania. Neste sentido, o livro traz mais do que *in*formações: busca também a mobilização de conhecimentos e habilidades. Segundo as autoras, o livro se propõe a:

> [...] *in*corporar, como pr*in*cípio educativo, a metodologia da problematização como *in*strumento de *in*centivo à pesquisa, à curiosidade pelo *in*usitado e ao desenvolvimento do espírito *in*ventivo, nas práticas didáticas; promover a aprendizagem criativa como processo de sistematização dos conhecimentos elaborados, como cam*in*ho pedagógico de superação da mera memorização; promover a valorização da leitura em todos os campos do saber, desenvolvendo a capacidade de letramento dos alunos;
> [...] articular teoria e prática, v*in*culando o trabalho *in*telectual com atividades práticas experimentais; utilizar novas mídias e tecnologias educacionais, como processo de d*in*amização dos ambientes de aprendizagem; estimular a capacidade de aprender do aluno, desenvolvendo o autodidatismo e autonomia dos estudantes;
> [...] organizar os tempos e os espaços com ações efetivas de *in*terdiscipl*in*aridade e contextualização dos conhecimentos;
>
> [...] avaliação da aprendizagem como processo formativo e permanente de reconhecimento de saberes, competências, habilidades e atitudes. (STOCCO *et al*, 2013, p.326)

O **Livro A** está dividido em c*in*co partes que se subdividem em 12 unidades mais as referências e as respostas dos exercícios, perfazendo um total de 320 pág*in*as.

Analisamos a PARTE 2 - Geometria Analítica, unidade 3 – Estudo da Reta que se *in*icia na pág*in*a 50 e acaba na pág*in*a 79.

O capítulo se *in*icia por meio de um breve relato histórico da Geometria Analítica e a sua importância para a Matemática.

Segundo as autoras “[...] apresentamos a Geometria Analítica, um tema importante da Matemática e que busca traduzir pontos, retas de demais figuras geométricas por meio da Álgebra”. (2013, p.32)

Em relação ao contexto histórico, pr*in*cipalmente sobre Descartes, as autoras escrevem:

> A *in*tenção maior de Descartes era expor sua visão racionalista sobre a ciência como estudo da natureza. Seu objetivo era romper com a ciência marcada pela experimentação, buscando, por meio da Matemática com suas posições conv*in*centes, um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e chegar à verdade nas ciências. (STOCCO *et al*, 2013, p.32)

Sobre Fermat elas escrevem:

> A Geometria Analítica pode ser atribuída também a Pierre de Fermat, contemporâneo de Descartes. Em uma carta, para um amigo, escrita em setembro de 1636, ele afirma que suas ideias sobre a Geometria Analítica já t*in*ham, essa altura, sete anos. (STOCCO *et al*, 2013, p.33)

As autoras, no *in*ício do capítulo, destacam que:

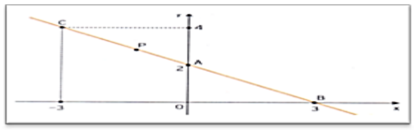
> A Geometria Analítica nos permite discutir questões como: saber se um ponto pertence a uma reta ou, caso contrário, a que distância se localiza dela; averiguar se dois pontos dist*in*tos pertencem a um dos semiplanos determ*in*ados por uma reta e a qual deles; [...] Situações como essas podem ser solucionadas por meio de uma abordagem algébrica ou geométrica [...] (STOCCO *et al*, 2013, p.50).

Encontramos a*in*da uma nota que atribui ao professor o papel de relacionar os conhecimentos obtidos pelos estudantes anteriormente, “Uma vez que esta unidade é cont*in*uidade da anterior sempre que possível, relacione-a à anterior e aos conhecimentos que os alunos têm sobre funções afim.[...]” (STOCCO *et al*, 2013, p.50).

Na seção 1, *in*titulada Equação geral de uma reta: Álgebra e Geometria, as autoras propõem um método geral (por meio dos determ*in*antes, e notamos que esse tópico foi visto no volume 1, sem qualquer resgate destes conceitos, neste momento, no volume 3) para determ*in*ar a equação da reta. Isso feito *in*icialmente por meio de um exemplo numérico em que são dados três pontos dist*in*tos pertencentes a uma reta e posteriormente relacionando estes pontos com um ponto genérico, impondo-se a condição de al*in*hamento de três pontos dist*in*tos (ou seja, anulam o determ*in*ante, fato destacado no Quadro 10 - na primeira l*in*ha). Após essa apresentação ocorre a generalização.

Observamos que para conseguir esse *in*tento a obra trabalha pr*in*cipalmente com os registros: Simbólico (com maior frequência), Verbal e Gráfico. No Quadro 10, colocamos alguns exemplos.

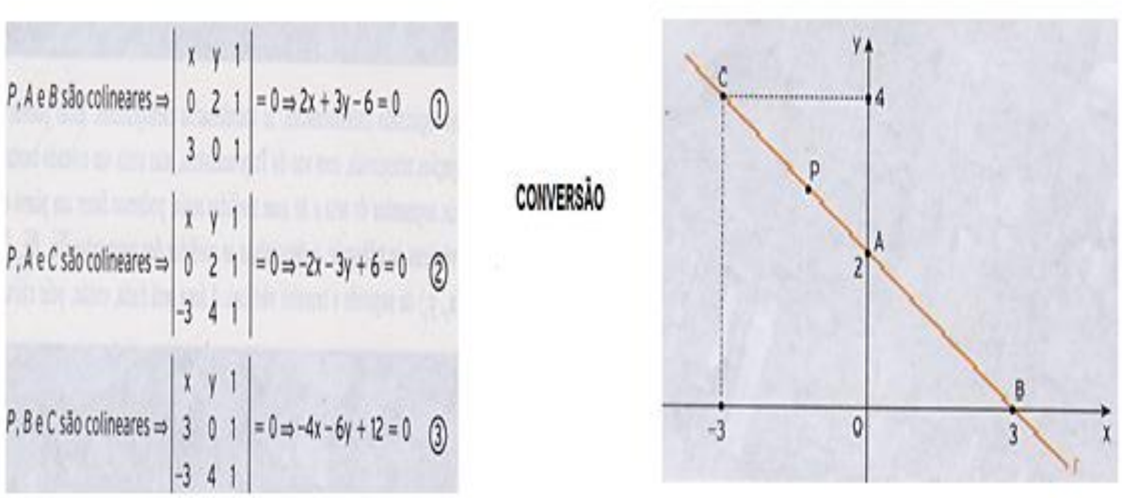
Quadro 10: Equações de retas e gráfico

Tipo de Registro	Representações
Simbólica	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 6 = 0$ ① $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - 3y + 6 = 0$ ② $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x - 6y + 12 = 0$ ③ Fonte: STOCCO *et al*, 2013, p.50
Gráfica	 Fonte: STOCCO *et al*, 2013, p. 50
Verbal	A cada reta *r* do plano cartesiano associamos uma equação da forma $ax + by + c = 0$, onde *a*, *b* e *c* são números reais, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y) são as coordenadas de um ponto qualquer de *r*. Fonte: STOCCO *et al*, 2013, p. 51

Fonte: O pesquisador

Ressaltamos que nessa seção não é feita qualquer relação da equação da reta com o seu coeficiente angular, ou seja, essa ideia não é utilizada para justificar a condição de al*in*hamento (ela poderia ter sido explorada por meio do registro gráfico do Quadro 10 – segunda l*in*ha), que é revelada por meio de cálculos de determ*in*antes. Destacamos a*in*da que as conversões são limitadas e ocorrem pr*in*cipalmente no Simbólico para o Gráfico (Figura 24).

Figura 24: Determ*in*ação de equação de reta e uma ilustração de seu gráfico



Fonte: Stocco *et al* (2013, p.50)

Notamos que nessa seção não há exploração do registro Tabular. As autoras, nos exercícios resolvidos e propostos - pr*in*cipalmente, privilegiam um tratamento algébrico, como exemplificamos na figura 25.

Figura 25: Situações envolvendo a pert*in*ência de um ponto a uma reta

b) Um ponto *P* pertence a *r* se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem uma equação de *r*. Logo:
$P(-8, y_P) \in r \Rightarrow -8 - 2y_P + 3 = 0 \Rightarrow y_P = -\frac{5}{2}$
Portanto, $P\left(-8, -\frac{5}{2}\right)$.

c) Basta achar o ponto *Q* de *r* que tenha ordenada zero.
Logo, $Q(x_Q, 0)$ e $x_Q - 2 \cdot 0 + 3 = 0 \Rightarrow x_Q = -3$.
Portanto, $Q(-3, 0)$.

d) Basta achar o ponto *S* de *r* que tenha abscissa igual à ordenada. Assim, sendo $x_S = y_S$, temos:
$x_S - 2x_S + 3 = 0 \Rightarrow x_S = 3$
Portanto, $S(3, 3)$.

e) Seja $T(x_T, y_T)$ o ponto solicitado. Então:
$T \in r \Rightarrow x_T - 2y_T + 3 = 0 \Rightarrow x_T = 2y_T - 3$ (1)
$d_{TC} = 5 \Rightarrow \sqrt{[x_T - (-4)]^2 + (y_T - 2)^2} = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_T + 4)^2 + (y_T - 2)^2 = 5^2$ (2)
Substituindo (1) em (2), vem:
$(2y_T - 3 + 4)^2 + (y_T - 2)^2 = 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow (2y_T + 1)^2 + (y_T - 2)^2 = 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4y_T^2 + 4y_T + 1 + y_T^2 - 4y_T + 4 = 25 \Rightarrow 5y_T^2 = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow y_T^2 = 4 \Rightarrow y_T = 2$ ou $y_T = -2$
Em (1):
- para $y_T = 2$, vem $x_T = 1$;
- para $y_T = -2$, vem $x_T = -7$.

Portanto, $T(1, 2)$ ou $T(-7, -2)$.

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.52)

No tópico “PARA SABER MAIS” as autoras sugerem que os alunos façam uma atividade em dupla para reconhecer que dadas às coordenadas de dois pontos dist*in*tos de uma reta é possível al*in*har estes pontos com um ponto genérico desta reta e dessa forma encontrar a sua equação por meio da condição de al*in*hamento de três pontos dist*in*tos, fato abordado por elas como anular o determ*in*ante, que está representado abaixo.

Figura 26: Dedução de uma equação da reta

A segunda consequência é a dedução da equação de uma reta, conhecidos dois de seus pontos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Porque, se $P(x, y)$ é um ponto qualquer da reta, ele deve estar alinhado com *A* e *B*, e teremos determinante *D* nulo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.53)

Observamos que há ausência, ao menos na seção analisada, de contextualização (conforme as ideias que apresentamos na pág*in*a 117) e de todos os nossos *in*dicadores, conforme relatamos na pág*in*a 118, tanto na parte teórica como nos exemplos e exercícios propostos, o que pode acarretar ao leitor, nesse ponto, uma não associação do Coeficiente Angular com a ideia de Taxa de Variação e todas as suas implicações.

Na seção 3.2, são discutidas as posições relativas entre duas retas por meio de uma abordagem, basicamente, nos registros Simbólico, Gráfico e Verbal. Notamos a ausência do registro Tabular e exemplificamos algumas dessas situações no Quadro 11.

Este tópico se *in*icia com as autoras apresentando duas equações genéricas para as retas r e s e na sequência formando um sistema de equações entre elas.

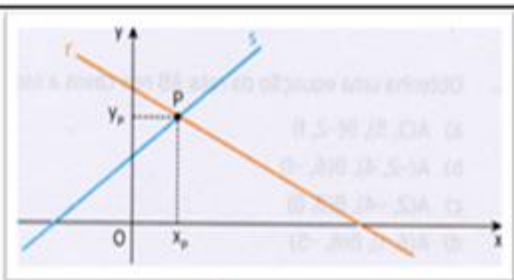
Figura 27: Sistemas de equações

$$(S)\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}$$

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.54)

Em seguida são discutidas as posições relativas entre as retas por meio da resolução do sistema utilizando o registro Verbal (Quadro 11) e análise de determ*in*antes empregando o registro Simbólico (Quadro 11).

Quadro 11: posições relativas entre retas

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ Fonte: STOCCO *et al*. 2013, p.54
Gráfico	 Fonte: STOCCO *et al*. 2013, p.54
Verbal	2ª) *r* e *s* são **coincidentes**. Todos os pontos de *r* estão em *s* e vice-versa; logo, (S) é **possível** e **indeterminado** Fonte: STOCCO *et al*. 2013, p.54

Fonte: O pesquisador

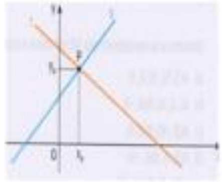
Notamos a ausência do estabelecimento da relação entre os coeficientes angulares das retas e as posições relativas das mesmas, imaginando que duas empresas possuem os lucros representados pelas retas r e s e permitindo discutir qual é o ponto (se existir) em que os lucros das duas empresas coincidem.

Destacamos que nesse tópico, há predominância dos registros Verbal e Gráfico e as conversões ocorrem, principalmente nas representações desses registros, como exemplificamos a seguir:

Figura 28: *In*tersecção de retas

r e s são **concorrentes entre si**.
Existe um único ponto P (x_P, y_P) intersecção de r e s; logo, pela regra de Cramer, o sistema (S) é **possível e determinado** e (x_P, y_P) é a solução de (S).

CONVERSÃO



Fonte: Stocco *et al* (2013, p.55)

Notamos a*in*da no f*in*al desse tópico que, aqui novamente, não se estabelece a relação, por exemplo, entre $\frac{a_1}{a_2}$ e o coeficiente angular, como tratado na figura 29.

Figura 29: Resumo das propriedades estudadas pelo autor do livro

Resumindo, quando $a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 \neq 0$, podemos afirmar que:

- *r* e *s* são concorrentes entre si se $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, ou seja, se não houver proporcionalidade entre os coeficientes de *x* e de *y*.
- *r* e *s* são coincidentes se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, ou seja, se houver proporcionalidade entre os coeficientes de *x* e de *y* e os termos independentes.
- *r* e *s* são paralelas se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, ou seja, se houver proporcionalidade apenas entre os coeficientes de *x* e de *y*.

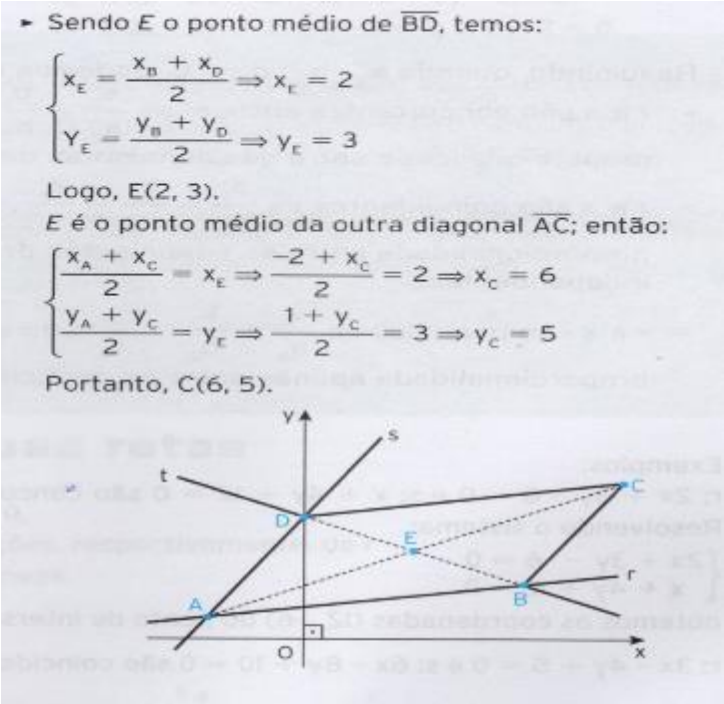
Fonte: Stocco *et al* (2013, p.55)

Revelamos o propósito de Stocco *et al* (2013, p.55) em alertar o professor para que enfatize o registro Simbólico “Enfatize aos alunos que essa característica da Geometria Analítica, ou seja, obter conclusões de natureza geométrica sem desenhos, apenas a partir de propriedades algébricas”.

Dessa forma as autoras revelam a *in*tenção de utilizar o registro Simbólico pr*in*cipalmente.

Notamos, nesta seção, a ausência de todos os nossos *in*dicadores, e que não há exploração do registro Tabular. As autoras, nos exercícios resolvidos e propostos, privilegiam tratamentos e conversões nos Simbólico e Gráfico, pr*in*cipalmente, como exemplificamos na figura 30, na determ*in*ação das coordenadas de ponto médio de um segmento.

Figura 30: determ*in*ação das coordenadas de ponto médio de um segmento

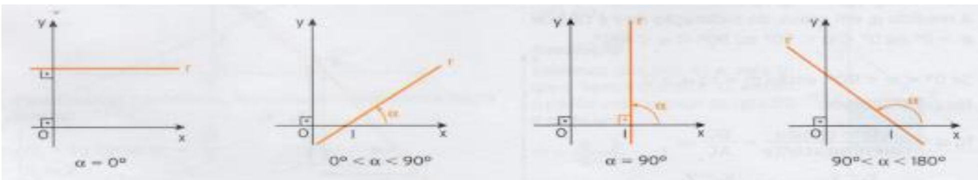


Fonte: Stocco *et al* (2013, p. 56)

Na seção 3.3, *in*titulada Equação reduzida, as autoras partem da equação geral da reta para encontrarem a equação reduzida (Quadro 9 – primeira l*in*ha), utilizando os registros Simbólico e Gráfico (Quadro 9 – segunda l*in*ha). Neste momento há menção do Coeficiente Angular da reta, mas nenhuma abordagem sobre a sua relação com a ideia de Taxa de Variação (Quadro 9 – terceira l*in*ha).

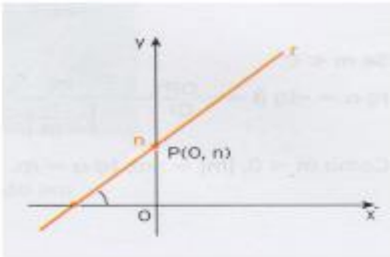
Por meio de uma representação no registro Gráfico, pr*in*cipalmente as autoras explicitam o ângulo de *in*cl*in*ação da reta (Figura 31):

Figura 31: Ilustração de ângulo de *in*cl*in*ação



Fonte: Stocco *et al* (2013, p. 57)

Quadro 12: equação reduzida de uma reta

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	Seja $ax + by + c = 0$ a equação de uma reta *r* não paralela ao eixo *y*, ou seja, com $b \neq 0$. Isolando *y*, temos: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ Fazendo $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = n$, obtemos a equação de *r*: $y = mx + n$ Fonte: STOCCO et al, 2013, p.57
Gráfico	 Fonte: STOCCO et al, 2013, p.57
Verbal	Essa equação é denominada **equação reduzida** de *r*. Lembrando o que foi estudado sobre função do 1º grau, o coeficiente *n* é denominado **coeficiente linear** de *r*, e *m* é denominado **coeficiente angular** de *r*. Fonte: STOCCO et al, 2013, p.57

Fonte: O pesquisador

As autoras seguem para mostrar que o coeficiente angular é encontrado por meio do cálculo da tangente do ângulo de *in*cl*in*ação da reta.

Figura 32: Estudo da tangente da *in*cl*in*ação

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.58)

Em seguida, mostram que o coeficiente angular também pode ser calculado a partir de dois pontos dist*in*tos da reta, mas novamente sem recorrer à ideia fundamental da Variação:

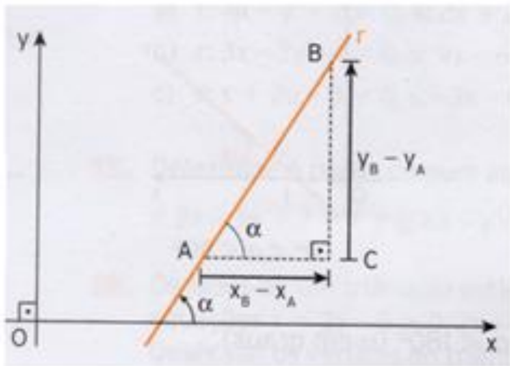
Figura 33: Determ*in*ação de coeficiente angular a partir de dois pontos dist*in*tos

Se $0° < \alpha < 90°$, então $m = tg\,\alpha > 0$.
No $\triangle ABC$, temos:

$$tg\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

CONVERSÃO



Fonte: Stocco *et al* (2013, p.58)

Observamos que não é chamada a atenção para o fato do coeficiente angular ser um quociente de variações, apesar de estarem implícitas essas ideias como podemos observar nas duas situações da figura 34.

Figura 34: Coeficiente angular como quociente de variação

Quaisquer que sejam os pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ de uma reta *r* não paralela ao eixo *y*, seu **coeficiente angular** ou **declividade** *m* é dado por:

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

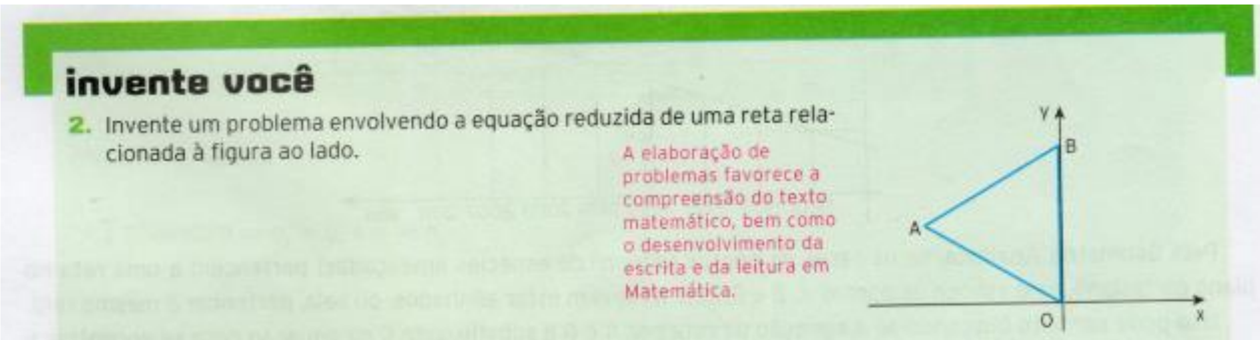
O coeficiente angular da reta determinada por A(4, −3) e B(−5, −7) é dado por $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$; assim, $m = \frac{-7-(-3)}{-5-4}$; logo, $m = \frac{4}{9}$.

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.59)

Evidenciamos a ausência, nesta seção, de todos os nossos *in*dicadores, nenhum apelo histórico, contextualização e do estabelecimento de relação entre o Coeficiente Angular, e a ideia de Taxa de Variação.

No f*in*al, desta seção as autoras no item: “*in*vente você”, por meio do registro gráfico, propõem aos leitores elaborarem problemas utilizando a equação reduzida de uma reta:

Figura 35: Exemplo de situação "*In*vente Você"



Fonte: Stocco *et al* (2013, p.61)

No item “LER PARA RESOLVER” as autoras propõem um problema e escrevem:

> Um mesmo problema pode ser resolvido com diferentes ferramentas matemáticas, dependendo do conhecimento de quem resolve. Observe três *in*terpretações diferentes do significado da representação “tendência de crescimento l*in*ear” presente no texto [...] (STOCCO *et al*, 2013, p.62)

Ao enunciar e resolver esse problema, as autoras utilizaram de maneira implícita, pela primeira vez, alguns de nossos *in*dicadores, que elencamos apoiados em exemplos (Quadro 13).

Quadro 13: Exemplo de *in*dicadores IM1 e IM3

*In*dicadores IM1 e IM3

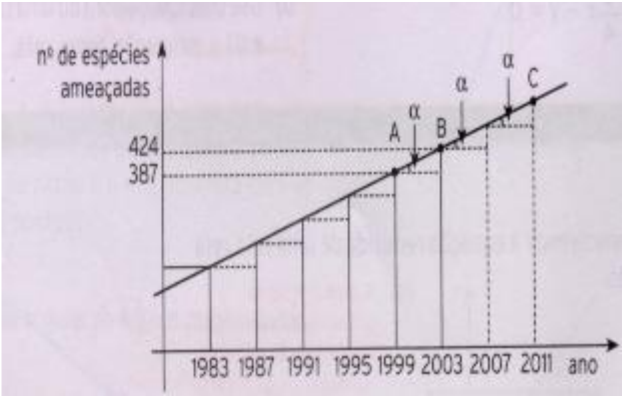
(PUC-MG) A tabela a seguir, obtida a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.

Número de espécies ameaçadas de extinção	239	276	313	350	387	424
Ano	1983	1987	1991	1995	1999	2003

Se mantida, nos anos subsequentes, a tendência linear de crescimento mostrada na tabela, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a:

a) 461. b) 498. c) 535. d) 572.

IM2 que está presente na resolução



IM4 que está presente na resolução

$$\frac{424-387}{2003-1999}=\frac{n-424}{2011-2003}$$

$\Rightarrow n = 498$, que é a resposta do problema.

IM6 presente na resolução

1ª *in*terpretação: Entendendo que a cada ano associa o número de espécies ameaçadas como função afim, temos $f(x) = ax + b$.

Fonte: Stocco *et al*, (2013, p.62)

Destacamos que o IM2 aqui utilizado faz alusão ao emprego da ideia da Taxa de Variação Média para responder a questão contextualizada (conforme ilustramos no IM4) e associa o Coeficiente Angular à tangente trigonométrica do ângulo α (segundo exemplificamos no IM2).

As seções 3.4 e 3.5 são dedicadas às posições relativas entre retas coplanares. Nesse tópico há a utilização do coeficiente angular por meio da identificação deste na equação reduzida para reconhecer tais posições.

As autoras *in*iciam a abordagem sobre retas paralelas (Quadro 14) para relacionar o ângulo de *in*cl*in*ação da reta, à tangente trigonométrica dos ângulos α_r e α_s e o Coeficiente Angular. Em seguida ilustra este fato por meio de retas paralelas e fazem uma observação sobre um caso particular.

Quadro 14: relacionar o ângulo de *in*cl*in*ação da reta, à tangente trigonométrica

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$r // s \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_r = \alpha_s \\ e \\ n_r \neq n_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\, \alpha_r = tg\, \alpha_s \\ e \\ n_r \neq n_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_r = m_s \\ e \\ n_r \neq n_s \end{cases}$ Fonte: STOCCO *et al*, 2013, p.63
Gráfico	 Fonte: STOCCO *et al*, 2013, p.63
Verbal	Duas retas *r* e *s* que não têm coeficientes angulares são paralelas ou coincidentes, pois são perpendiculares ao eixo *x*. Fonte: STOCCO *et al*, 2013, p.64

Fonte: O pesquisador

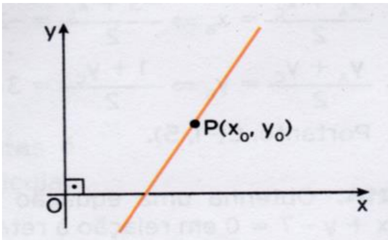
Notamos que, na exposição, o estudo das posições relativas de retas se resume em encontrar o coeficiente angular das retas e analisar a relação entre eles.

Portanto, não há um estudo que propicia explicitamente a relação entre o raciocínio empregado e a noção de Taxa de Variação. Da mesma forma, a v*in*culação da equação reduzida da reta e da função afim parece ser deixada a cargo do professor conforme orientação pedagógica que destacamos na fala segu*in*te das autoras: “Aqui se estabelece de modo a*in*da mais evidente a relação entre o que o aluno sabe sobre funções afim e retas analisadas pela Geometria Analítica”. (STOCCO *et al*, 2013, p.63)

Ressaltamos que nessas seções, no texto teórico e nos textos dos exercícios resolvidos e propostos, há predom*in*ância do registro Simbólico e os tratamentos, quase a totalidade, estão nesse registro. Constatamos, também, que não há exploração do registro Tabular e notamos a presença de apenas um de nossos *in*dicadores (IM6). A construção das ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação ocorre por meio, pr*in*cipalmente, do Coeficiente Angular.

Na seção 3.6, *in*titulada: Feixe de retas concorrentes, as autoras deduzem a equação fundamental da reta por meio da equação reduzida. Na sequência fazem uma conversão, entre as representações dos registros Verbal e Gráfico (Quadro 15).

Quadro 15: Determ*in*ação da equação reduzida de uma reta

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$y_0 = mx_0 + n \Rightarrow n = y_0 - mx_0$ Substituindo em $y = mx + n$, vem: $y = mx + y_0 - mx_0 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$ Fonte: STOCCO *et al*, 2013, p.68
Gráfico	 Fonte: STOCCO *et al*, 2013, p.68
Verbal	A equação de uma reta que passa por $P(x_0, y_0)$ é: $y - y_0 = m(x - x_0)$ ou $x = x_0$ Fonte: STOCCO *et al*, 2013, p.68

Fonte: O pesquisador

Evidenciamos a ausência de contextualização extra matemática, de todos os nossos *in*dicadores e nenhum apelo histórico para abordar a dedução da equação da reta via Taxa de Variação e Coeficiente Angular como, por exemplo, descrevemos na seção 1.5 - Justificativa Histórica, apesar de, no *in*ício do capítulo, as autoras citarem René Descartes e Fermat, pr*in*cipalmente.

Este capítulo term*in*a com a seção 3.7 em que é tratado o assunto *in*equações do 1º grau que não faz parte da nossa análise.

No f*in*al do capítulo as autoras trazem algumas atividades que são nomeadas: para saber mais, projeto, cálculo, palavras-chave, saia dessa calculadora, para recordar e conexão. Dentre esses destacamos:

●para saber mais: na sua resolução é utilizado de maneira implícita nosso *in*dicador IM7, pois as autoras fazem uma orientação implícita para que o leitor resolva o problema, também, via software:

Figura 36: - Exemplo de *in*dicador IM7

Uma fábrica produz dois tipos de geradores, tipo *A* e tipo *B*, e cada um deles deve passar por duas máquinas, *C* e *D*. Para fazer um gerador do tipo *A*, a máquina *C* deve trabalhar 2 horas e a máquina *D* deve trabalhar 4 horas. Para fazer uma unidade do tipo *B*, as máquinas *C* e *D* devem trabalhar, respectivamente, 4 e 2 horas. As máquinas podem trabalhar 24 horas por dia. Sabe-se que a fábrica tem um lucro de R$ 3.000,00 por um gerador do tipo *A* e um lucro de R$ 5.000,00 por um do tipo *B*. Além disso, ela vende toda a sua produção. Sendo assim, perguntamos: quantos geradores de cada tipo a fábrica deve produzir, para que seu lucro seja máximo?

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.74)

● calculadora: apresenta uma situação contextualizada em que as autoras utilizam, não de forma explícita, nossos *in*dicadores IM1, IM2 e IM3, pois observamos a contextualização envolvendo as ideias da Taxa de Variação e a sua relação com o Coeficiente Angular além de utilizar a taxa para prever resultados além da Matemática (Figura 37).

Figura 37: Exemplo de *in*dicadores IM1- IM2 – IM3

2. **Nas contas de água emitidas por uma certa companhia de saneamento, a tarifa é apresentada por faixas de consumo, de acordo com a tabela a seguir.**

Faixa de consumo (em m³)	Tarifa (em R$/m³)
00 – 10	1,52
11 – 20	2,37
21 – 50	5,92
acima de 50	6,52

Por exemplo, para um consumo de 16 m³, o valor da tarifa é: $10 \cdot 1{,}52 + 6 \cdot 2{,}37$.

Com base nesses dados:

a) obtenha a expressão que dá o valor da tarifa na última faixa de consumo.

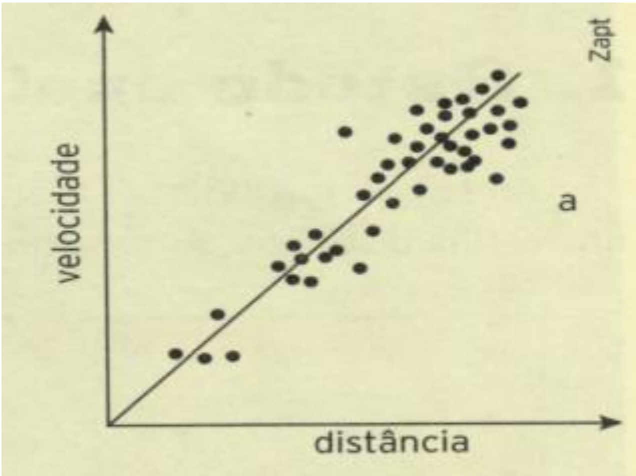
b) em uma residência que consumiu 46 m³ em determinado mês, qual foi o valor médio, em reais, pago por m³ consumido?

c) qual foi o consumo, em m³, quando a tarifa foi de R$ 24,68, em determinado mês?

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.77)

● conexão: nessa seção as autoras relacionam a Matemática com a Física por meio da Lei de Hubbe; nessa atividade percebemos os *in*dicadores: IM1, IM2, IM3 e IM4 estes *in*dicadores são revelados na leitura do texto.

Figura 38: Exemplo de *in*dicadores IM1- IM2 – IM3 – IM4



Lei de Hubble: a velocidade de afastamento das galáxias é diretamente proporcional à sua distância. Quanto mais afastadas, maior sua velocidade.

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.79)

Ressaltamos que o Livro A possui - neste capítulo que analisamos - 17 exercícios resolvidos, 55 problemas e exercícios e 13 outras atividades, envolvendo a ideia de Taxa de Variação, de acordo com nosso entendimento sobre "manifestar a ideia de Taxa de variação".

Observamos que entre os exercícios resolvidos, problemas e exercícios de Taxa de Variação (mesmo sem menção explícita) do **Livro A**, há predom*in*ância de situações envolvendo o Coeficiente Angular e as razões diretas. Seguem, respectivamente, um exemplo de cada uma dessas situações:

●Coeficiente Angular:

> [...] A análise desse diagrama permitiu que Hubbe formalizasse uma lei, a Lei de Hubbe, matematicamente expressa por $v(r) = H_0 r$, onde H_0 é a constante de proporcionalidade (coeficiente angular da reta), chamada de constante de Hubbe, dada pela razão entre a velocidade (v) das estrelas e a distância (r) entre a Terra e cada uma das galáxias [...]. (STOCCO *et al*, 2013, p.79)

●Razões Diretas:

Figura 39: Situação envolvendo o Coeficiente Angular

b) r: $3x - 4y + 5 = 0$ e s: $6x - 8y + 10 = 0$ são coincidentes, pois $\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} = \frac{5}{10}$;

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.55)

Não há exercícios, ou problemas sobre Cálculo de Velocidades, Funções Médias da Economia (Receita Média, Lucro Médio, Custo Médio) e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem).

Ressaltamos as conversões *in*dicadas por Simbólica/Gráfica, por exemplo, podem ocorrer nos dois sentidos, ou seja, do Simbólico para o Gráfico e vice-versa. Isto ocorre também com as conversões *in*dicadas por Verbal/Gráfica e Simbólica/Verbal.

Diante do exposto, notamos que a Taxa de Variação no **Livro A**, tanto nos textos da parte teórica, das outras atividades e exercícios resolvidos e propostos, é desenvolvida, basicamente em três registros: Simbólico, Gráfico e Verbal.

As conversões são pouco trabalhadas e estão limitadas, praticamente, nas representações dos registros citados, sendo as conversões entre as representações dos registros Simbólico e Gráfico mais, utilizada, evidenciando uma deficiência na exploração dos registros Gráfico, Verbal e Tabular nos textos. Observamos a*in*da que **não é estabelecida** uma relação explícita do Coeficiente Angular e a Taxa de Variação e é quase nula a presença de contextualização.

O Quadro 16 apresenta uma análise da Idoneidade Epistêmica dos significados pretendidos no **Livro A**.

Quadro 16: Matriz de Análise

Indicadores dos Livros Didáticos do Ensino Médio (IM)	Representações para a Taxa de Variação Emergentes / Prévias	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
IM1: Contextualização – envolvendo Taxas de Variação	Verbal		A1		
	Gráfica			A2	
	Simbólica			A3	
	Tabular				
IM2: Relação entre Taxa de Variação e o Coeficiente Angular	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM3: Utilização de Taxas de Variação para prever resultados nas demais áreas do conhecimento	Verbal		A4	A5	
	Gráfica				
	Simbólica			A6	
	Tabular				
IM4: Utilização das razões diretas na resolução de problemas	Verbal			A7	
	Gráfica			A8	
	Simbólica			A9	
	Tabular				
IM5: Taxa de Variação Relativa (Porcentagem)	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM6: Semelhança entre a representação algébrica da Função Afim e a Equação Reduzida da Reta	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica			A10	
	Tabular				
IM7: Utilização de novas tecnologias para resolver problemas relacionados à Taxas de Variação	Verbal		A11	A13	
	Gráfica			A12	
	Simbólica				
	Tabular				

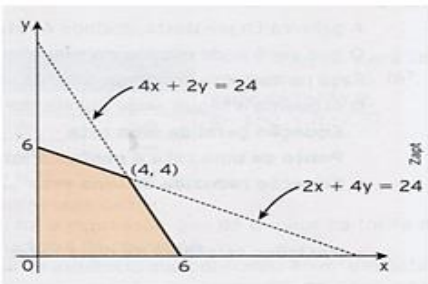
Fonte: O pesquisador

Este quadro mostra os *in*dicadores encontrados no livro didático, bem como as representações que são ativadas nos textos teóricos, nos textos de outras atividades e nos textos dos exercícios resolvidos e propostos. Por exemplo:

● **A1**: essa entrada significa que as autoras contemplam o *in*dicador **IM1** e viabilizam ao leitor durante a solução do problema, uma representação emergente no registro **Gráfico,** porque para resolver essa situação contextualizada, é preciso mobilizar as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação na forma: Razão Direta pois, por exemplo (Figura 40), para construir o gráfico que faz parte da visualização do problema, precisamos encontrar o tempo total gasto pelas máqu*in*as C e D na fabricação dos geradores dos tipos A e B.

Figura 40: Exemplo da entrada A1

Uma fábrica produz dois tipos de geradores, tipo *A* e tipo *B*, e cada um deles deve passar por duas máquinas, *C* e *D*. Para fazer um gerador do tipo *A*, a máquina *C* deve trabalhar 2 horas e a máquina *D* deve trabalhar 4 horas. Para fazer uma unidade do tipo *B*, as máquinas *C* e *D* devem trabalhar, respectivamente, 4 e 2 horas. As máquinas podem trabalhar 24 horas por dia. Sabe-se que a fábrica tem um lucro de R$ 3.000,00 por um gerador do tipo *A* e um lucro de R$ 5.000,00 por um do tipo *B*. Além disso, ela vende toda a sua produção. Sendo assim, perguntamos: quantos geradores de cada tipo a fábrica deve produzir, para que seu lucro seja máximo?



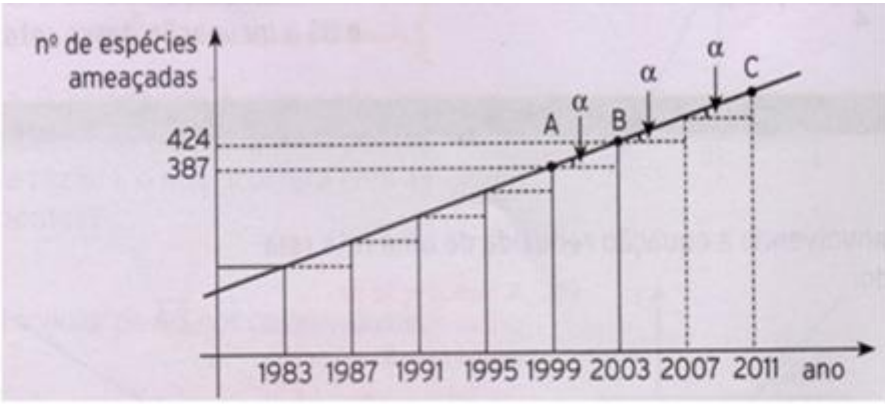
Fonte: Stocco *et al* (2013, pp.74-75)

De acordo com as autoras,

> Chamemos de x a quantidade do tipo A, e de y a do tipo B, e observamos as restrições sobre x e y. Se são fabricados x geradores do tipo A, o tempo gasto pela máqu*in*a C é de $\mathbf{2x}$, e se são fabricados y geradores do tipo B, o tempo gasto pela máqu*in*a C é de $\mathbf{4y}$, ou seja, o tempo total usado pela máqu*in*a C é de $\mathbf{2x + 4y}$ [...]. Analogamente, [...] para a máqu*in*a D. (STOCCO *et al*, 2013, p.74-75) – grifo nosso

● **A2**: essa entrada significa que as autoras contemplam o *in*dicador **IM1** e possibilitam, a partir da representação prévia no registro **Gráfico,** uma representação emergente no registro **Simbólico** da Taxa de Variação, porque para resolver esta situação contextualizada mobilizamos as ideias da Variação e da Taxa de Variação nas formas: Coeficiente Angular e Razões Diretas, como ilustrado na Figura 41.

Figura 41: Exemplo da entrada A2



$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.62)

● **A3** (ou **A6**): essa entrada significa que as autoras contemplam o *in*dicador **IM1** (ou **IM3)** por meio do segu*in*te problema (Figura 42)

Figura 42: Exemplo da entrada A3 (ou A6)

(PUC-MG) A tabela a seguir, obtida a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.

Número de espécies ameaçadas de extinção	239	276	313	350	387	424
Ano	1983	1987	1991	1995	1999	2003

Se mantida, nos anos subsequentes, a tendência linear de crescimento mostrada na tabela, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a:

a) 461. b) 498. c) 535. d) 572.

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.62)

...e viabilizam, durante a sua resolução, a representação prévia no registro **Simbólico** para relacionar a Taxa de Variação e o Coeficiente Angular

Figura 43: Relação entre Coeficiente Angular e Taxa de Variação

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.62)

e para responder ao exercício possibilitam a representação emergente no registro **Simbólico** utilizando as Razões Diretas.

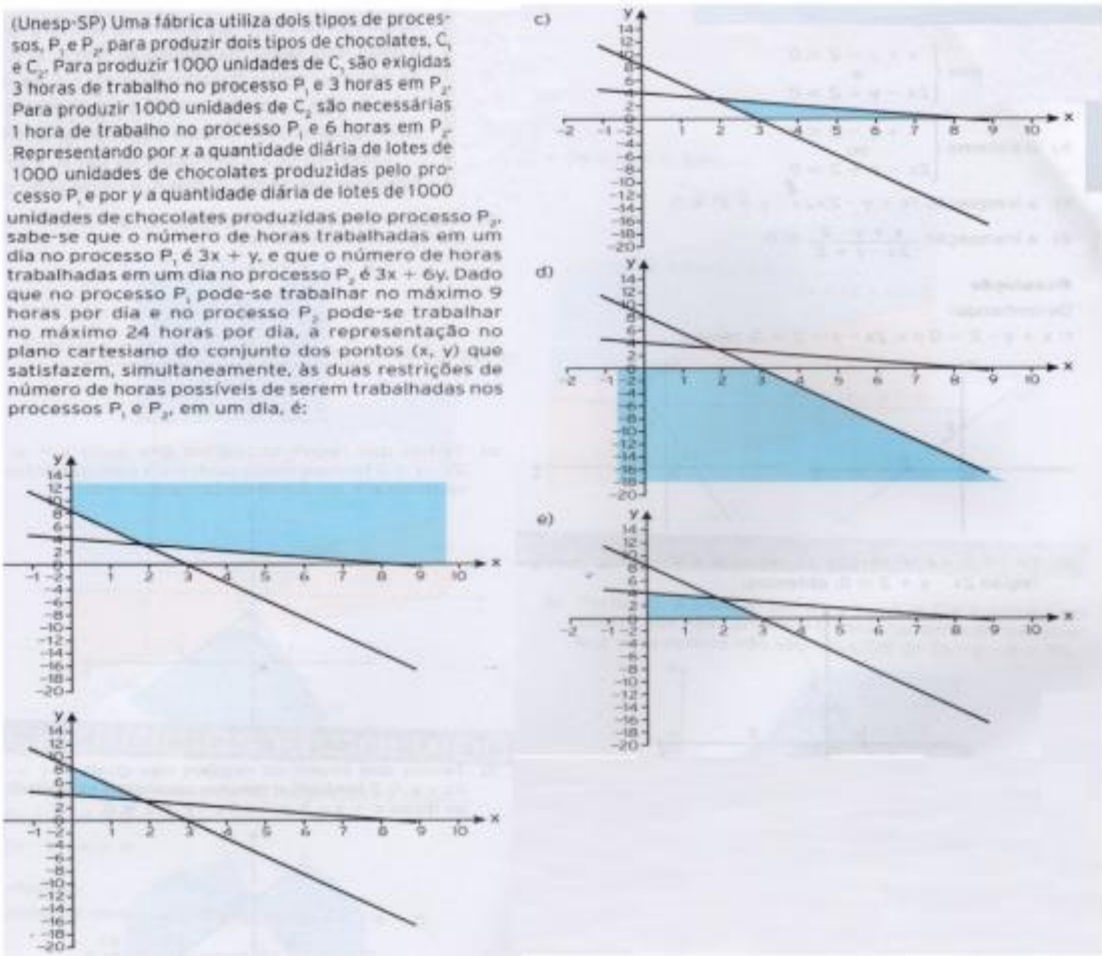
Figura 44: Relação da Razão Direta e o Coeficiente Angular

$$\frac{424 - 387}{2003 - 1999} = \frac{n - 424}{2011 - 2003} \Rightarrow n = 498,$$ que é a resposta do problema.

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.62)

● **A4**: O *in*dicador **IM3** é comtemplado e as autoras propiciam condições para que o problema fosse resolvido transitando entre a representação prévia no registro **Verbal**, para a representação emergente no registro **Gráfico.** Precisa-se mobilizar, em uma das etapas da resolução, as ideias da Variação e da Taxa de Variação na forma Razão Direta, para a determ*in*ação das equações $P_1: \mathbf{3x + y}$ e $P_2: \mathbf{3x + 6y}$, **(**Figura 45).

Figura 45: Exemplo da entrada A4



(Unesp-SP) Uma fábrica utiliza dois tipos de processos, P_1 e P_2, para produzir dois tipos de chocolates, C_1 e C_2. Para produzir 1000 unidades de C_1 são exigidas 3 horas de trabalho no processo P_1 e 3 horas em P_2. Para produzir 1000 unidades de C_2 são necessárias 1 hora de trabalho no processo P_1 e 6 horas em P_2. Representando por *x* a quantidade diária de lotes de 1000 unidades de chocolates produzidas pelo processo P_1 e por *y* a quantidade diária de lotes de 1000 unidades de chocolates produzidas pelo processo P_2, sabe-se que o número de horas trabalhadas em um dia no processo P_1 é $3x + y$, e que o número de horas trabalhadas em um dia no processo P_2 é $3x + 6y$. Dado que no processo P_1 pode-se trabalhar no máximo 9 horas por dia e no processo P_2 pode-se trabalhar no máximo 24 horas por dia, a representação no plano cartesiano do conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem, simultaneamente, às duas restrições de número de horas possíveis de serem trabalhadas nos processos P_1 e P_2, em um dia, é:

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.73-4)

● **A5** (ou **A13**): coloca em jogo o *in*dicador **IM3** (ou **IM7**) que possibilita, a partir da representação prévia no registro Verbal, estabelecer a expressão da Taxa de Variação (Figura 46).

Figura 46: Exemplo da entrada A5 (ou A13)

2. Nas contas de água emitidas por uma certa companhia de saneamento, a tarifa é apresentada por faixas de consumo, de acordo com a tabela a seguir.

Faixa de consumo (em m^3)	Tarifa (em R$/$m^3$)
00 – 10	1,52
11 – 20	2,37
21 – 50	5,92
acima de 50	6,52

Por exemplo, para um consumo de 16 m^3, o valor da tarifa é: $10 \cdot 1{,}52 + 6 \cdot 2{,}37$.

Com base nesses dados:

a) obtenha a expressão que dá o valor da tarifa na última faixa de consumo.

b) em uma residência que consumiu 46 m^3 em determinado mês, qual foi o valor médio, em reais, pago por m^3 consumido?

c) qual foi o consumo, em m^3, quando a tarifa foi de R$ 24,68, em determinado mês?

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.77)

Na segunda coluna da tabela (Figura 46), temos a manifestação das ideias da Variação e da Taxa de Variação na Razão Direta, por exemplo, $1{,}52\ \frac{R\$}{m^3}$.

● **A7**: O *in*dicador **IM4** é contemplado e, na figura 47, apresentamos uma situação que ilustra como esse *in*dicador é mobilizado na solução do problema.

Figura 47: Exemplo da entrada A7

ER3. Analise a posição relativa das retas r: $kx + 2ky - 4 = 0$ e s: $x + ky - k = 0$ em função de *k*.

Resolução

Note, inicialmente, que $k \neq 0$, pois os coeficientes de *x* e de *y* na equação de *r* não podem ser simultaneamente nulos.

Basta analisar o sistema linear:

$$\begin{cases} kx + 2ky = 4 \\ x + ky = k \end{cases}, \text{ para } k \neq 0.$$

Temos:

- *r* e *s* são concorrentes se $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, ou seja, se $\frac{k}{1} \neq \frac{2k}{k}$ ou se $k \neq 0$ e $k \neq 2$.
- *r* e *s* são coincidentes se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, ou seja, se $\frac{k}{1} = \frac{2k}{k} = \frac{4}{k}$ ou $k = 2$.

Logo, temos:

$k \neq 0$ e $k \neq 2 \Rightarrow$ *r* e *s* são concorrentes entre si.

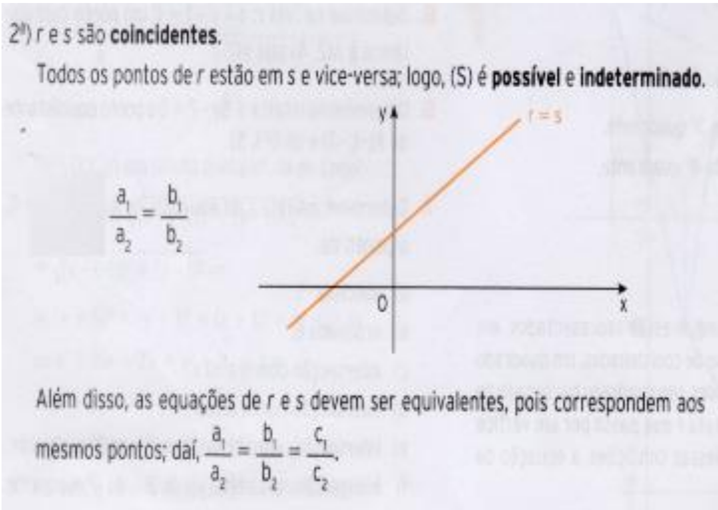
$k = 2 \Rightarrow$ *r* e *s* são coincidentes.

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.55)

Ao analisar as posições relativas entre as retas as autoras mobilizam as ideias da Variação e da Taxa de Variação na forma Razão Direta, por exemplo, na situação didática anterior as retas são co*in*cidentes se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

● **A8 e A9**: As figuras 48 e 49 apresentam exemplos de situações que mobilizam o *in*dicador IM4 que envolve, neste caso, a Taxa de Variação (Figura 48) e a posição de retas a partir de suas equações (Figura 49).

Figura 48: Exemplo da entrada A8


2ª) r e s são **coincidentes.**

Todos os pontos de *r* estão em s e vice-versa; logo, (S) é **possível** e **indeterminado.**

Além disso, as equações de *r* e s devem ser equivalentes, pois correspondem aos mesmos pontos; daí, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.54)

Ao exemplificar essa situação de reconhecimento da posição relativa entre as retas (Figura 49), as autoras mobilizam as ideias da Variação e da Taxa de Variação por meio da Razão Direta, ou seja, se as retas possuem equações $(r)\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $(s)\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$, então elas são co*in*cidentes se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

A seguir temos um exemplo de como as autoras utilizam a Razão Direta para ilustrar as demais posições relativas entre as retas: paralelas $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}\right)$ e concorrentes $\left(\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}\right)$

Figura 49: Exemplo da entrada A9

Exemplos:

a) r: $2x + 3y - 6 = 0$ e s: $x + 4y + 12 = 0$ são concorrentes entre si, pois $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{4}$.

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x + 4y + 12 = 0 \end{cases}$$

obtemos as coordenadas $(12, -6)$ do ponto de intersecção de r e s;

b) r: $3x - 4y + 5 = 0$ e s: $6x - 8y + 10 = 0$ são coincidentes, pois $\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} = \frac{5}{10}$;

c) r: $7x + 2y + 1 = 0$ e s: $14x + 4y - 5 = 0$ são paralelas, pois $\frac{7}{14} = \frac{2}{4} \neq \frac{1}{-5}$.

Fonte: Stocco *et al* (2013, p.55)

● **A10**: Apresentamos, na figura 50, um exemplo de situação que colocamos em jogo: o *in*dicador **IM6**;

Figura 50: Exemplo da entrada A10

$$y = mx + n$$

Essa equação é denominada **equação reduzida** de r.

Lembrando o que foi estudado sobre função do 1º grau, o coeficiente n é denominado **coeficiente linear** de r, e m é denominado **coeficiente angular** de r.

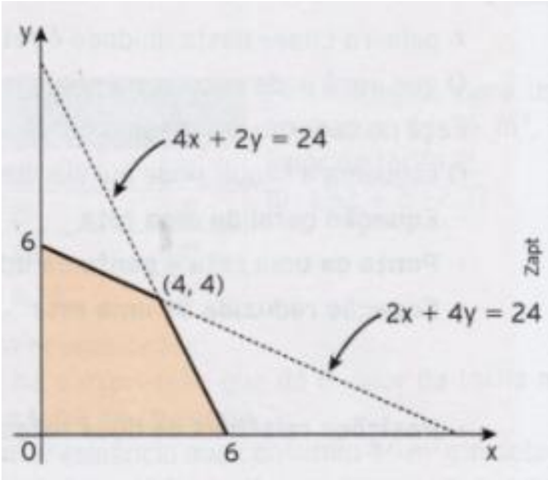
Fonte: Stocco *et al* (2013, p.57)

Nas duas entradas a seguir as autoras mobilizam, para a construção dos gráficos, as ideias da Variação e da Taxa de Variação na forma Coeficiente Angular, para obter uma das maneiras de alcançarmos a equação geral ($ax + by + c = 0$) da reta é por meio da equação reduzida ($y = mx + q$).

● **A11**: essa entrada significa que as autoras contemplam o *in*dicador **IM7** e sugerem ao leitor utilizar o computador para comprovar, a partir da representação prévia no registro **Verbal**, "[...] que funções [...] def*in*idas numa região poligonal assumem seus valores máximos ou mínimos nos vértices do polígono" (STOCCO *et al*, 2013, p.75), e assim possibilitam a representação emergente no registro **Gráfico**.

● **A12**: o *in*dicador **IM7** é contemplado pelas autoras, o que pode ser observado na figura 51, que, a partir das representações das retas no plano cartesiano, deduz-se a equação de retas na forma $ax + by + c = 0$, e posteriormente determ*in*ar a Taxa de Variação ou as *in*cl*in*ações das retas.

Figura 51: Exemplo da entrada A12



Fonte: Stocco *et al* (2013, p.75)

Percebemos que as entradas do **Quadro 16** são distribuídas em apenas algumas células tornando escasso o significado da Taxa de Variação.

F*in*alizamos esta seção com duas observações do MEC por meio do PNLD (2015) com relação ao **Livro A**:

> [...] há uma grande quantidade de fórmulas e excesso de nomenclatura, o que pode prejudicar a aprendizagem dos conceitos centrais. [...] é elogiável o cuidado em demonstrar [...] certa propriedade geométrica particular e deixar a prova para os demais casos sob a responsabilidade do aluno ou do professor. (BRASIL, 2015, p.62)

A*in*da de acordo com o PNLD (2015) a metodologia de ens*in*o e aprendizagem:

> Na abordagem *in*icial dos conteúdos da coleção, frequentemente são propostos textos *in*teressantes, nos quais são feitos questionamentos ao aluno. [...]. Há *in*teressantes sugestões de projetos e jogos, bem como atividades que exigirão do aluno o uso de sua criatividade [...] (BRASIL, 2015, p.63)

A seguir apresentaremos a Taxa de Variação e a análise do livro: *Matemática: Contexto e Aplicações* - volume 3 - que *in*titulamos **Livro B**.

3.1.2 A taxa de variação no livro: matemática: contexto e aplicações – volume 3

A obra *Contexto & Aplicações* (volume 3), ano 2013, que nomeamos **Livro B**, foi escrita por Luiz Roberto Dante, Doutor em Psicologia da Educação: Ens*in*o da Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Para apresentar o livro o autor escreve

> Ao elaborar esta coleção para o Ens*in*o Médio, levamos em conta as ideias que abrem esta apresentação. Isso porque nosso objetivo é criar condições para que você aluno, possa compreender as ideias básicas da Matemática desse nível de ens*in*o atribu*in*do significado a elas, além de saber aplicá-las na resolução de problemas do mundo real (DANTE, 2013, p.3)

A obra se caracteriza por ser dividida em algumas seções: Abertura da Unidade, Abertura do Capítulo, Exercício resolvido passo a passo, Para refletir, Fique atento! E Você sabia?, Exercícios, Matemática e tecnologia, Leituras, Um pouco mais, Outros contextos, Vestibulares de Norte a Sul, Pensando no Enem e Caiu no Enem.

Sobre a seção Matemática e tecnologia o autor escreve: “Sugestões de atividades em que o computador é utilizado para visualizar e manipular gráficos e tabelas. Uma oportunidade de trabalhar com a matemática d*in*âmica”. (DANTE, 2013, p.4)

O **Livro B** tem como norte as segu*in*tes orientações metodológicas: trabalhar as ideias, os conceitos matemáticos *in*tuitivamente, antes da simbologia, antes da l*in*guagem matemática; o aluno aprende por compreensão e atribui significado ao que aprende; estimular o aluno a pensar, racioc*in*ar, criar, relacionar ideias, descobrir e ter autonomia de pensamento; trabalhar a Matemática por meio de situações-problema que o façam realmente pensar, julgar e decidir-se pela melhor solução; trabalhar o conteúdo com significado, levando o aluno a sentir que é importante saber aquilo para a sua vida em sociedade ou que o conteúdo trabalhado lhe será útil para entender o mundo em que vive; valorizar a experiência acumulada pelo aluno dentro e fora da escola; estimular o aluno a fazer cálculo mental, estimativas e arredondamentos, obtendo resultados aproximados; considerar mais o processo do que o produto da aprendizagem; compreender a aprendizagem da Matemática como processo ativo; utilizar a história da Matemática como um recurso didático; trabalhar o desenvolvimento de uma atitude positiva em relação à Matemática; utilizar jogos; utilizar igualmente os grandes eixos temáticos da Matemática; trabalhar os temas transversais de modo *in*tegrado com as atividades de Matemática, por meio de situações-problema.

Sobre a metodologia empregada no livro, o MEC escreve: “No que compete à metodologia de ens*in*o e aprendizagem, os conteúdos são trabalhados por meio de situações contextualizadas, seguidas de explanações teóricas e de exercícios resolvidos ou propostos”. (PNLD, 2015, p.36)

E com respeito à contextualização do **Livro B**:

> Na obra, o contexto mais frequente para atribuição de significado aos conceitos é a própria Matemática. Entretanto, os livros incluem uma seção específica em que se buscam relacionar os conteúdos estudados a práticas sociais e a outras áreas do conhecimento. Além disso, há um bom número de questões propostas que envolvem aplicações da Matemática a diversos contextos. Ao longo da coleção, recorre-se à história da Matemática para iniciar a discussão de um assunto ou como leitura complementar. (BRASIL, 2015, p.36)

Notamos que esse aspecto parece ser deixado a cargo do professor, pois observamos nas orientações metodológicas que o autor *in*dica que antes da *in*trodução do estudo da reta, os alunos pesquisem em jornais ou revistas artigos que contenham retas para *in*iciar uma situação de aprendizagem sobre o ângulo de *in*cl*in*ação da reta e posterior aprendizado do Coeficiente Angular, o qual ocorre por meio da tangente trigonométrica do ângulo α (Figura 16 p.76) e não pelas ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação.

Em relação à parte histórica, o autor escreve sobre Descartes e Fermat:

> Foi René Descartes (1596 – 1650), filósofo famoso por sua frase: “Penso, logo existo”, que, [...] estabeleceu relações entre curvas no plano e equações algébricas com duas *in*cógnitas. As propriedades geométricas das curvas foram assim, “traduzidas” por meio de equações, e os resultados da Álgebra foram *in*terpretados geometricamente. [...] Descartes estava, acima de tudo, empenhado em descobrir uma fórmula que discipl*in*asse o raciocínio e unificasse o conhecimento. (DANTE, 2013, p.68)

Sobre Fermat, Dante (2013) escreve:

> Outro estudioso da Matemática que contribuiu para o desenvolvimento da Geometria analítica foi o francês Pierre de Fermat (1601 – 1665).

> Assim como Descartes, Fermat associou equações a curvas e superfícies. [...] Já com relação a Fermat, o uso de coordenadas surge da aplicação da Álgebra da Renascença a problemas geométricos da Antiguidade. (p.68)

Relativamente a Geometria Analítica, o autor escreve:

> A Geometria analítica está fundamentada na ideia de representar os pontos da reta por números reais e os pontos do plano por pares ordenados de números reais. Assim as l*in*has no plano (reta, circunferência, elipse, etc.) são descritas por meio de equações. Com isso, é possível tratar algebricamente muitas questões geométricas, como também *in*terpretar de forma geométrica algumas situações algébricas. (DANTE, 2013, p.69)

Nas orientações para o professor, o autor estimula o uso em sala de aula do *Cabri Geometre II* e do *Geogebra*, *softwares* que, segundo o autor, podem ter um impacto a*in*da maior nos processos de ens*in*o e de aprendizagem. A calculadora é recomendada quando os cálculos numéricos são apenas auxiliares na questão a ser resolvida, liberando mais tempo para o aluno pensar, criar, *in*vestigar, conjecturar, etc. O autor escreve a*in*da sobre o novo Enem e dá orientações para a avaliação em Matemática e term*in*a chamando a atenção para a Leitura que, segundo ele, é uma atividade essencial para o estudo da discipl*in*a Matemática, pois o professor de Matemática também é, em decorrência, o professor de leitura.

O **Livro B** está dividido em quatro unidades:

● Unidade 1: Matemática f*in*anceira e Estatística;

● Unidade 2: Geometria Analítica: ponto, reta e circunferência;

● Unidade 3: Cônicas e números complexos;

● Unidade 4: Pol*in*ômios e equações algébricas.

A Unidade 2: Geometria analítica: ponto, reta e circunferência está dividida em dois capítulos:

● Capítulo 3: Geometria analítica: ponto e reta;

● Capítulo 4: Geometria Analítica: a circunferência.

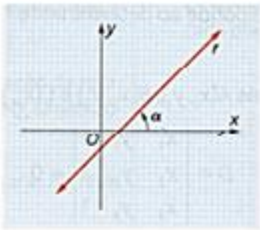
O capítulo 3 está dividido em 14 tópicos, entre esses tópicos estão estes:

● 6 *In*cl*in*ação de uma reta; 7 Coeficiente angular de uma reta; 8 Equação fundamental da reta.

Nossa pesquisa volta suas atenções para os tópicos 6, 7 e 8 do capítulo 3; tais itens estão compreendidos entre as pág*in*as 76 e 82.

A seção 3.6 - *In*cl*in*ação de uma reta - se *in*icia com um registro gráfico e em seguida o autor faz uma conversão na representação no registro gráfico para uma representação no registro verbal para def*in*ir o ângulo de *in*cl*in*ação da reta (Figura 52):

Figura 52: ângulo de *in*cl*in*ação

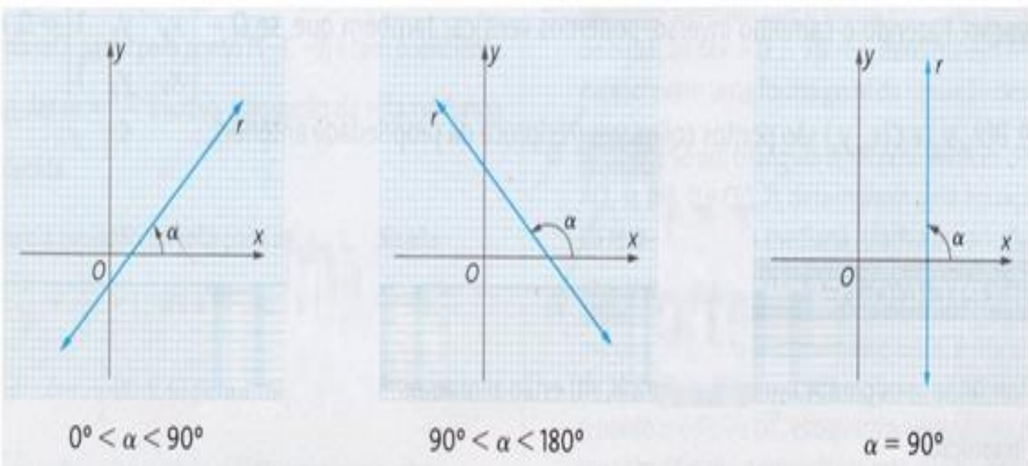


Seja α a medida do ângulo que a reta *r* forma com o eixo *x*. A medida α do ângulo é considerada do eixo *x* para a reta *r*, no sentido anti-horário, e denomina-se **inclinação** da reta *r*.

Fonte: Dante (2013, p.76)

A seguir o autor faz algumas representações no registro gráfico para estudar a *in*cl*in*ação de retas não paralelas (Figura 53):

Figura 53: Ilustração de ângulo de *in*cl*in*ação



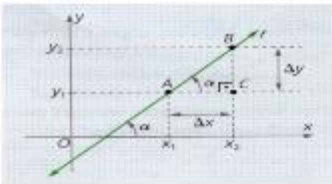
Fonte: Dante (2013, p.76)

A seção 3.7 - Coeficiente angular de uma reta – *in*icia-se com a def*in*ição de coeficiente angular por meio da tangente do ângulo de *in*cl*in*ação da reta; (Quadro 17).

O texto teórico segue ens*in*ando casos de *in*cl*in*ações da reta em particular quando é: paralela ao eixo Ox e perpendicular ao eixo Oy por meio de registros Gráfico e Simbólico, pr*in*cipalmente.

Em seguida, por meio de uma conversão entre a representação no registro Gráfico (Quadro 17) para a representação no registro Simbólico, o autor faz um tratamento para calcular o coeficiente angular a partir da tangente trigonométrica sem resgatar os conhecimentos anteriores e fatos históricos, mas utilizando, a*in*da que implicitamente, as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação: $tan\alpha = \frac{d(C,B)}{d(A,C)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.\ Então, m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (p.77).

Quadro 17: Coeficiente angular ou declividade

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Fonte: DANTE, 2013, p.78
Gráfico	 Fonte: DANTE, 2013, p.77
Verbal	Consideremos uma reta *r* de inclinação α em relação ao eixo *x*. O **coeficiente angular** ou a **declividade** dessa reta *r* é o número real *m* que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α, ou seja: $m = \tan \alpha$ Fonte: DANTE, 2013, p.77

Fonte: O pesquisador

O autor f*in*aliza essa seção observando que, para verificar a condição de al*in*hamento de três pontos, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, basta utilizar o coeficiente angular como segue:

Figura 54: Coeficiente angular

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}.$$

Fonte: Dante (2013, p.78)

Nesse ponto, observamos que as ideias da Variação e da Taxa de Variação se manifestam implicitamente na forma de Coeficiente Angular e Razão Direta.

Em seguida, propõe dois exercícios, em um deles é pedido para determ*in*ar o coeficiente angular conhecendo-se dois pontos dist*in*tos da reta (Figura 55):

Figura 55: Cálculo do Coeficiente Angular

Determine o coeficiente angular (ou declividade) da reta que passa pelos pontos:

a) $A(3, 2)$ e $B(-3, -1)$ $\frac{1}{2}$

b) $A(2, -3)$ e $B(-4, 3)$ -1

c) $P_1(3, 2)$ e $P_2(3, -2)$ Não há.

d) $P_1(-1, 4)$ e $P_2(3, 2)$ $-\frac{1}{2}$

e) $P(5, 2)$ e $Q(-2, -3)$ $\frac{5}{7}$

f) $A(200, 100)$ e $B(300, 80)$ $-\frac{1}{5}$

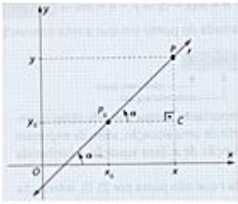
Fonte: Dante (2013, p.78)

Notamos, ao f*in*al dessa seção, a ausência do registro Tabular e a utilização do nosso *in*dicador IM2, pois o Coeficiente Angular é estudado implicitamente como Taxa de Variação.

Na seção 3.8 - Equação fundamental da reta - o autor relembra como construir a reta por meio de dois pontos dist*in*tos e coloca uma situação de aprendizagem (Quadro 18).

E assim mediante uma conversão entre as representações dos registros Gráfico (Quadro 18) e Simbólico (Quadro 18) é deduzida a equação fundamental da reta.

Quadro 18: Equação fundamental da reta

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$\tan \alpha = \dfrac{d(C, P)}{d(P_0, C)} \Rightarrow m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$ Fonte: DANTE, 2013, p.79
Gráfico	 Fonte: DANTE, 2013, p.79
Verbal	Da mesma forma, um ponto $P(x_0, y_0)$ e a declividade m determinam uma reta r. Considerando $P(x,y)$ um ponto genérico dessa reta, veremos que se pode chegar a uma equação de incógnitas x e y, a partir dos números x, y e m, que será chamada de **equação fundamental da reta r**. Fonte: DANTE, 2013, p.79

Fonte: O pesquisador

Em seguida, o autor mostra as particularidades da equação fundamental da reta e resolve dois exercícios. Um destes exemplos é este:

Figura 56: particularidades da equação fundamental da reta

Determine a equação da reta que passa pelos pontos $A(-1, -2)$ e $B(5, 2)$.

Resolução:

Já sabemos como calcular o coeficiente angular da reta determinada pelos pontos $A(-1, -2)$ e $B(5, 2)$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 + 2}{5 + 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Usando o ponto $A(-1, -2)$, temos:

$$y - (-2) = \frac{2}{3}(x - (-1)) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}(x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y + 6 = 2x + 2 \Rightarrow 2x - 3y - 4 = 0$$

A equação da reta AB é $2x - 3y - 4 = 0$.

Fonte: Dante (2013, p.79)

Notamos que não há menção explicita as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação tanto no texto teórico como no texto dos exercícios resolvidos. Existe o emprego de um de nossos *in*dicadores: o IM2, como observado no exemplo anterior.

Na seção 3.9 – Formas de equação da reta – são discutidas as formas de equação da reta: reduzida, geral, segmentária e paramétrica. Neste ponto procuramos *in*vestigar, pr*in*cipalmente o nosso *in*dicador IM6; então na nossa análise nos atemos à equação reduzida.

O autor ens*in*a esta forma de equação da reta, realizando sua dedução a partir da equação fundamental da reta escolhendo um ponto particular em que a reta *in*tercepta o eixo Ox.

Figura 57: Exemplo do *in*dicador IM6

Na forma reduzida da equação da reta percebe-se a relação da reta com uma função afim.

Fonte: Dante (2013, p.80)

Por meio de um quadro, é feito um alerta ao estudante e uma orientação ao professor em relação ao nosso *in*dicador IM6 e a sua utilização é deixada a cargo do professor, como pode ser observado na segu*in*te afirmação do autor (Figura 58).

Figura 58: Método de obtenção de coeficiente angular de uma reta

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$y - n = m(x - 0) \Rightarrow y - n = mx \Rightarrow \boxed{y = mx + n}$ Fonte: DANTE, 2013, p.80
Verbal	Essa forma é especialmente importante porque permite obter o coeficiente angular de uma reta a partir de uma equação, além de expressar claramente a coordenada y em função de x. Essa equação é conhecida como **equação reduzida** da reta. Fonte: DANTE, 2013, p.80

Fonte: O pesquisador

Ressaltamos que o **Livro B** possui - neste capítulo que analisamos - 3 exercícios resolvidos, 18 exercícios propostos e 3 outras atividades que, para serem resolvidos ou compreendidos, deve-se mobilizar o registro Simbólico, pr*in*cipalmente. Não há contextualização, o que pode acarretar apenas a memorização de fórmulas e técnicas.

Observamos que nas atividades propostas pelo autor no **Livro B**, há predom*in*ância do Coeficiente Angular como Taxa de Variação (sem menção explícita), por exemplo:

Figura 59: Exemplo da menção ao Coeficiente Angular

Dada a reta que tem a equação $3x + 4y = 7$, determine seu coeficiente angular. $-\frac{3}{4}$

Fonte: Dante (2013, p.80)

Não há exercícios ou problemas sobre: Cálculo de Velocidades, Funções Médias da Economia (Receita Média, Lucro Médio, Custo Médio), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem). Isso pode acarretar a não associação desses conceitos as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação

Notamos que a Taxa de Variação no **Livro B**, tanto nos textos da parte teórica, das outras atividades e exercícios resolvidos e propostos, é desenvolvida, basicamente em três registros: Simbólico, Gráfico e Verbal, sendo constatada a ênfase ao registro Simbólico e a ausência do registro Tabular.

Observamos pouca exploração dos registros Gráfico e Verbal nos textos teóricos, nos textos de outras atividades e nos textos dos exercícios resolvidos e propostos, e que não há um estudo da relação entre Coeficiente Angular e Taxa de Variação.

O Quadro 19 apresenta uma análise da Idoneidade Epistêmica dos significados pretendidos no **Livro B**. Cada célula desse quadro significa:

Quadro 19: Matriz de Análise

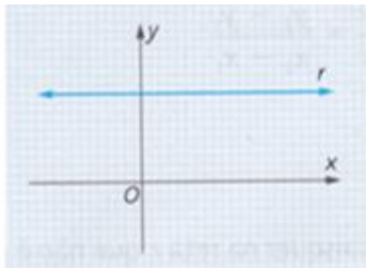
Indicadores dos Livros Didáticos do Ensino Médio (IM)	Representações para a Taxa de Variação				
	Emergentes / Prévias	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
IM1: Contextualização – envolvendo Taxas de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM2: Relação entre Taxa de Variação e o Coeficiente Angular	Verbal		B1	B2	
	Gráfica	B3	B4	B5	
	Simbólica		B6		
	Tabular				
IM3: Utilização de Taxas de Variação para prever resultados nas demais áreas do conhecimento	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM4: Utilização das razões diretas na resolução de problemas	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM5: Taxa de Variação Relativa (Porcentagem)	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM6: Semelhança entre a representação algébrica da Função Afim e a Equação Reduzida da Reta	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM7: Utilização de novas tecnologias para resolver problemas relacionados à Taxas de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				

Fonte: O pesquisador

● **B1**: essa entrada significa que o autor contempla o *in*dicador **IM2** e possibilita ao leitor, a partir da representação prévia no registro **Verbal** uma representação emergente no registro **Gráfico** da Taxa de Variação na leitura do texto teórico:

Figura 60: Exemplo 1 do *in*dicador IM2

Para $\alpha = 0°$, temos
$m = \tan \alpha = \tan 0° = 0.$



Fonte: Dante (2013, p.77)

Aqui temos a manifestação implícita das ideias da Variação e da Taxa de Variação na forma Coeficiente Angular e Razão Direta, pois uma maneira de *in*terpretarmos é: se o coeficiente angular é zero a variação em y é zero para qualquer variação em x e assim a reta é paralela ao eixo Ox.

● **B2**: Significa que foi contemplado o *in*dicador **IM2** O exemplo da figura 61 ilustra esta situação.

Figura 61: Exemplo 2 do *in*dicador IM2

O **coeficiente angular** ou a **declividade** dessa reta r é o número real m que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α, ou seja:

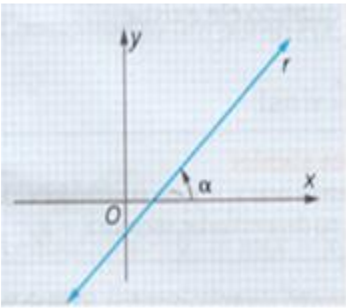
$$m = \tan \alpha$$

Fonte: Dante (2013, p.77)

Nessa entrada assim como em **B4**, **B5** e **B6**, temos a manifestação, a*in*da que implícita, das ideias da Variação e da Taxa de Variação na forma Coeficiente Angular por meio do cálculo da tangente.

● **B3**: *in*dica a presença do *in*dicador **IM2,** que envolve a noção de **Verbal** da Taxa de Variação/coeficiente angular (Figura 62).

Figura 62: – Exemplo 3 do *in*dicador IM2



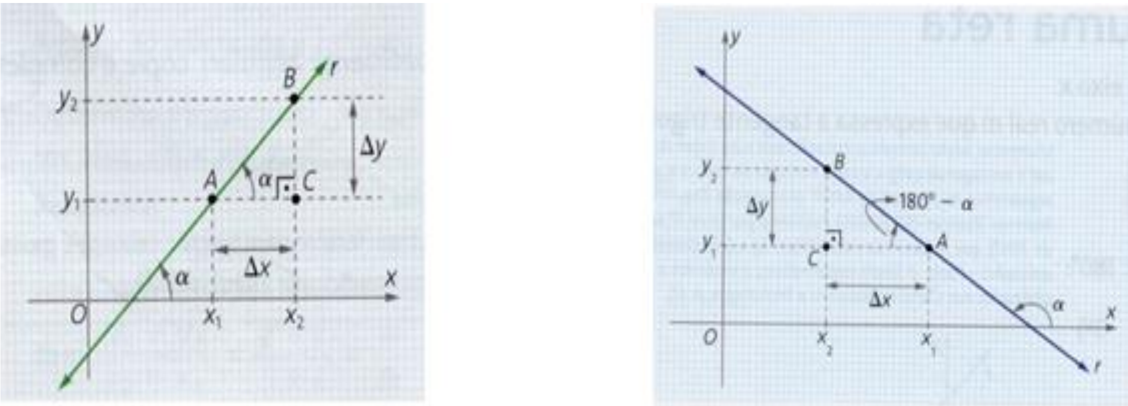
Para $0° < \alpha < 90°$, temos $\tan \alpha > 0 \Rightarrow m > 0$.

Fonte: Dante (2013, p.77)

Neste ponto, temos a manifestação implícita das ideias da Variação e da Taxa de Variação na forma Coeficiente Angular e Razão Direta, pois se a taxa é constante a função é crescente para o coeficiente angular maior que zero.

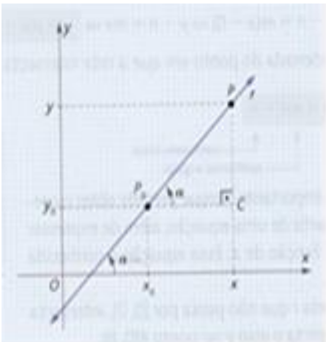
● **B4, B5 e B6**: evidenciam a presença do *in*dicador **IM2 (**Relação entre a Taxa de Variação e o Coeficiente Angular). Os exemplos que apresentamos pelas figuras 63, 64 e 65, mobilizam, entre outros conhecimentos, a articulação entre taxa de variação e coeficiente angular por meio de representações nos registros gráfico e simbólico.

Figura 63: Relação entre taxa de variação e coeficiente angular (*in*dicador IM2)



Fonte: Dante (2013, pp.77-8)

Figura 64: Relação entre a tangente do ângulo de *in*cl*in*ação e o coeficiente angular



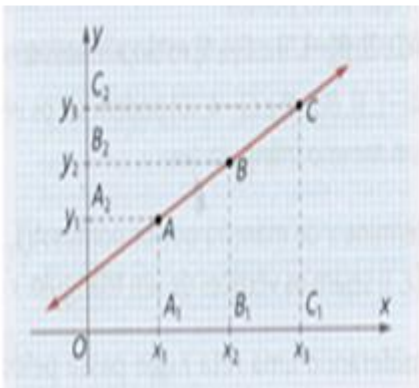
$$\tan \alpha = \frac{d(C,\, P)}{d(P_0,\, C)} \Rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Fonte: Dante (2013, p.79)

Figura 65: Determ*in*ação da taxa de variação a partir de ponto da reta e suas projeções

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$$



Fonte: Dante (2013, p.77)

A análise do Quadro 19, revela a ausência dos *in*dicadores: IM1, IM3, IM4, IM5, IM6 e IM7. O evidencia que aspectos importantes, como “Contextualização - envolvendo Taxas de Variação”; “Utilização das Razões Diretas na resolução de problemas”, “Taxa de Variação Relativa”; “Aproximação entre a representação algébrica da Função Afim e a Equação Reduzida da Reta”, entre outros, não foram enfatizados pelo autor desse livro. O que não favorece a sobrevivência desses *in*dicadores na *in*stituição escolar visada.

F*in*alizamos esta seção com duas observações do M*in*istério da Educação (MEC) por meio do PNLD (2015) com relação ao **Livro B**.

Refer*in*do nós ao livro B, concordamos com o MEC, quando afirma que

> São estabelecidas articulações apropriadas entre os campos da matemática escolar e há cuidado em recuperar os conhecimentos já estudados pelo aluno. Mas, em geral, a sistematização é feita de modo precoce, o que pode dificultar o desenvolvimento da autonomia *in*telectual do aluno (BRASIL, 2015, p.30).

Com respeito à seleção e organização dos conteúdos matemáticos do **Livro B,** o MEC escreve:

> [...] a*in*da há excesso de conteúdo matemático proposto e, por vezes, conceitos *in*dicados como opcionais são empregados posteriormente, na obra, no estudo de conteúdos não optativos. A distribuição dos campos matemáticos segue a tradição de concentrar o estudo de funções no primeiro ano, o de geometria no segundo e o de geometria analítica no terceiro [...] (BRASIL, 2015, p.33).

A seguir, apresentamos a análise do livro “Matemática: Ciência e Aplicações”, volume 3, que nomeamos de Livro C.

3.1.3 A taxa de variação no livro: matemática: ciência e aplicações – volume 3

A obra Matemática: *Ciência e aplicações*, volume 3 - dest*in*ada a estudantes do Ens*in*o Médio - é a 7ª edição lançada no ano de 2013 pela editora Saraiva em São Paulo – SP. Essa obra foi nomeada, nesta pesquisa, por **Livro C**.

O **Livro C** foi escrito por c*in*co autores:

● Gelson Iezzi: engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e professor licenciado pelo *In*stituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

● Osvaldo Dolce: engenheiro civil pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e professor da rede pública estadual de São Paulo

● David Degenszajn: licenciado em Matemática pelo *In*stituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo e professor da rede particular de ens*in*o em São Paulo.

● Roberto Périgo: licenciado e bacharel em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e professor da rede particular de ens*in*o e de cursos pré-vestibulares em São Paulo.

● Nilze de Almeida: mestre em Ens*in*o de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, licenciada em Matemática pelo *In*stituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo e professora da rede pública estadual de São Paulo.

Na parte teórica, Iezzi *et al* (2013) prometem sempre que possível apresentar os assuntos de forma contextualizada, empregando uma l*in*guagem mais simples:

> [...] Entretanto, ao formalizarmos os conceitos em estudo (os quais são abundantes exemplificados), optamos por termos com maior rigor matemático. [...] Tivemos também a preocupação de mostrar as justificativas lógicas das propriedades apresentadas, omit*in*do apenas demonstrações exageradamente longas, *in*compatíveis com as abordagens feitas atualmente no ens*in*o médio (p.3).

Relativamente às outras atividades, exercícios resolvidos e propostos o autor revela que estão em ordem crescente de dificuldade.

No Manual do Professor os autores revelam que o livro de Matemática é um importante material de apoio às atividades do aluno, tanto em sala de aula quanto em casa, serv*in*do como fonte de *in*formações teóricas, roteiros de exercícios e problemas, estimulador de reflexões e pesquisas. O manual contém a*in*da, entre outras seções, sugestões de leituras, proposta de avalição, a resolução de problemas, história da matemática, *in*tegração dos conteúdos, contextualização e aplicação da matemática a outras áreas do conhecimento, uso da calculadora e do computador.

Segundo os autores, a coleção tem, entre outros, o objetivo de:

> Contribuir para a *in*tegração do aluno na sociedade em que vive, proporcionando-lhe conhecimentos significativos de teoria e prática da

> Matemática, *in*dispensáveis ao exercício da cidadania (IEZZI *et al*, 2013, p.266)

Sendo assim a obra está dividida em três volumes:

● **Volume 1**: noções de conjuntos, conjuntos numéricos, noções gerais sobre funções, função afim, função quadrática, função modular, função exponencial, função logarítmica, complemento sobre funções, progressões, matemática comercial, semelhança e de triângulo retângulo, trigonometria no triângulo retângulo e estatística básica;

● **Volume 2**: trigonometria na circunferência, funções circulares, trigonometria num triângulo qualquer, geometria espacial de posição, áreas das pr*in*cipais figuras planas, áreas e volumes dos pr*in*cipais sólidos, matrizes, sistemas l*in*eares, determ*in*antes, análise comb*in*atória, b*in*ômio de Newton e probabilidades;

● **Volume 3**: geometria analítica plana, números complexos, pol*in*ômios, equações pol*in*omiais, matemática f*in*anceira e estatística descritiva.

Observamos que, até o momento, os autores do **Livro C** são os únicos a chamar o capítulo 1 - do volume 3 - de Geometria Analítica Plana. Nos outros livros, o capítulo é simplesmente chamado de Geometria Analítica. Esse fato pode ser relevante sob o ponto de vista dos processos de ens*in*o e aprendizagem, pois a Geometria Analítica também é estudada no espaço.

Os autores *in*iciam o capítulo 1 como uma nota histórica. Sobre Descartes, Iezzi (2013) *et al* escreve:

> [...] Descartes acreditava que o conhecimento matemático é mais cumulativo e progressivo que o de outras áreas do conhecimento, crescendo por acréscimos e não por substituições, como a corrida em outras ciências, à medida que eram feitas descobertas [...] não se podia aceitar nada como verdade se não fossem apresentadas provas com clareza e dist*in*ção. Esse método de organizar o pensamento científico, conhecido como racionalismo, rompia com o empirismo do passado (p.9).

Sobre Fermat os autores relatam:

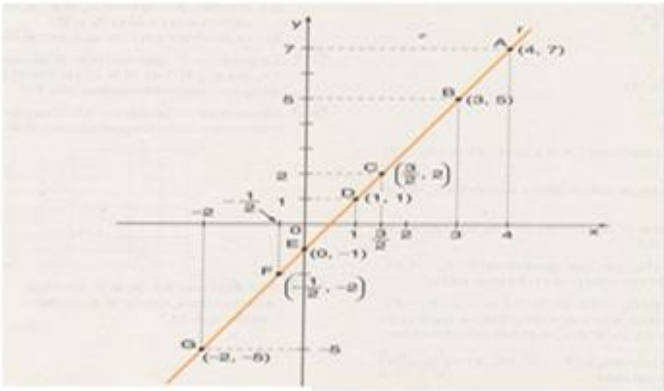
> [...] Sua grande contribuição para a Geometria Analítica foi a descoberta do segu*in*te pr*in*cípio: “Uma equação que apresenta duas quantidades *in*cógnitas descreve uma l*in*ha, reta ou curva” [...]. Sua obra, mais sistemática e didática que a de Descartes, não foi publicada em vida e, por esse motivo, a Geometria Analítica era considera, na época, *in*venção única de Descartes (p.10).

O **Volume 3** desta coleção está dividido em 9 capítulos: 1. O ponto: Um pouco de História – *In*trodução à geometria analítica; 2. A Reta; 3. A circunferência; 4. As cônicas; 5. Estatística Básica; 6. Matemática F*in*anceira; 7. Números Complexos. 8. Pol*in*ômios; 9. Equações Algébricas.

Nossa pesquisa volta sua atenção para o capítulo 2 nas seções: *In*trodução, Equação geral da reta, *In*cl*in*ação de uma reta, Equação reduzida de uma reta, Equação de uma reta passando por $P(x_0, y_0)$ com declividade conhecida e Função afim e a equação reduzida de uma reta. Essas seções se *in*iciam na pág*in*a 24 e term*in*am na pág*in*a 40.

Na seção *In*trodução, os autores utilizam o registro Gráfico (Quadro 20) para ilustrar o traçado da reta, em seguida empregam o registro Simbólico (Quadro 20), para apresentar a condição de al*in*hamento de três pontos dist*in*tos, para encontrar a equação da reta. Na sequência aplicam essa condição a um ponto qualquer para verificar se pertence a uma reta.

Quadro 20: Condição de al*in*hamento de três pontos dist*in*tos

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$ Fonte: IEZZI et al, 2013, p.24
Gráfico	 Fonte: IEZZI et al, 2013, p.24
Verbal	Um ponto P(x, y) qualquer pertencerá a *r* quando estiver alinhado a dois pontos quaisquer de *r*, por exemplo A e B: Fonte: IEZZI et al, 2013, p.24

Fonte: O pesquisador

Os autores term*in*am o tópico, mostrando que quaisquer três pontos dist*in*tos escolhidos da reta geram a mesma equação, conforme a figura 66:

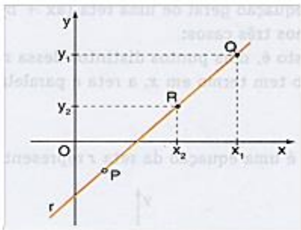
Figura 66: Condição de al*in*hamento de três pontos quaisquer

$$\text{E, F e P colineares} \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - \frac{1}{2}y + 2x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0$$

Fonte: Iezzi *et al* (2013, p. 25)

A seção Equação geral da reta é *in*iciada pelo estabelecimento de uma relação entre uma reta do plano cartesiano e a existência de uma equação que a representa, e apresentação de uma técnica para a determ*in*ação dessa reta a partir de coordenadas de dois pontos dessa reta (Quadro 21).

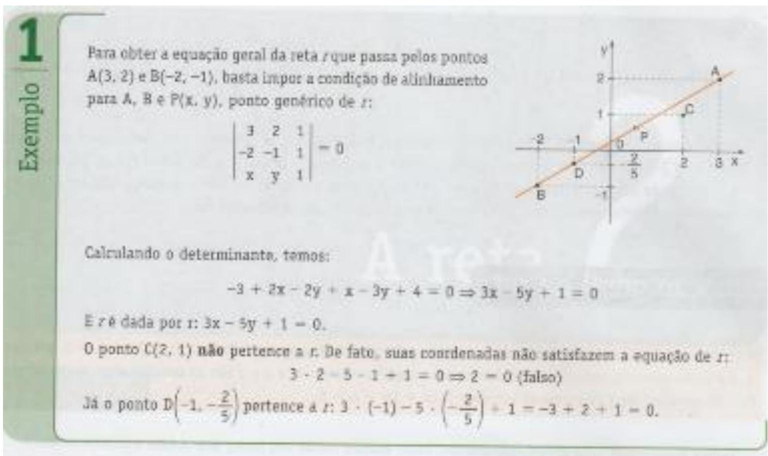
Quadro 21: Reta do plano cartesiano e sua equação

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Fonte: IEZZI *et al*, 2013, p.25
Gráfico	 Fonte: IEZZI *et al*, 2013, p.25
Verbal	A toda reta *r* do plano cartesiano está associada pelo menos uma equação do tipo ax + by + c = 0, em que *a*, *b* e *c* são números reais, com *a* e *b* não nulos simultaneamente, e *x* e *y* são as coordenadas de um ponto P(x, y) genérico de *r*. Costuma-se escrever r: ax + by + c = 0. Fonte: IEZZI *et al*, 2013, p.25

Fonte: O pesquisador

Na sequência a obra traz um exercício resolvido (Figura 93) em que se pede a equação geral da reta por meio de dois pontos dist*in*tos. O objetivo é alcançado por meio da condição de al*in*hamento.

Figura 67: Determ*in*ação de equação de reta



Exemplo 1

Para obter a equação geral da reta *r* que passa pelos pontos A(3, 2) e B(−2, −1), basta impor a condição de alinhamento para A, B e P(x, y), ponto genérico de *r*:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, temos:

$$-3 + 2x - 2y + x - 3y + 4 = 0 \Rightarrow 3x - 5y + 1 = 0$$

E *r* é dada por r: 3x − 5y + 1 = 0.

O ponto C(2, 1) **não** pertence a *r*. De fato, suas coordenadas não satisfazem a equação de *r*:

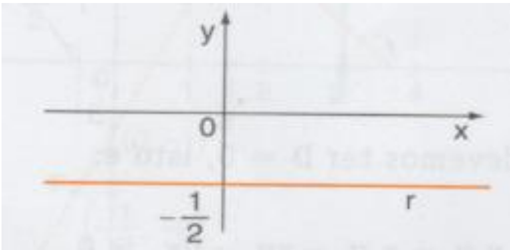
$$3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow 2 = 0 \text{ (falso)}$$

Já o ponto $D\left(-1, -\frac{2}{5}\right)$ pertence a *r*: $3 \cdot (-1) - 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 1 = -3 + 2 + 1 = 0$.

Fonte: Iezzi *et al* (2013, p. 26)

Conti*nu*ando nesta seção, os autores apresentam dois casos particulares: a reta é paralela ao eixo Ox (Figura 68) e a reta é perpendicular ao eixo Ox, associando o primeiro caso à nulidade do coeficiente angular, pois se o coeficiente angular é zero a variação em y é zero para qualquer variação em x e assim a reta é paralela ao eixo Ox.

Figura 68: Condição de paralelismo de uma reta aos eixos de coordenadas



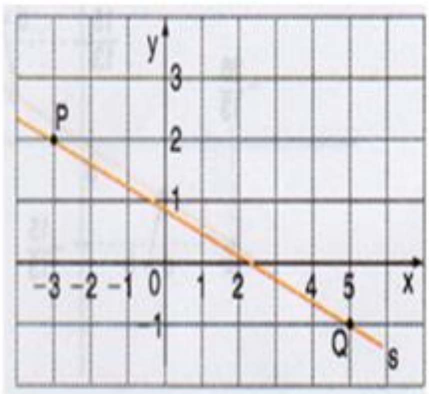
Fonte: Iezzi *et al* (2013, p. 26)

Na subseção “Recíproca da propriedade”, os autores afirmam que toda equação geral da reta da forma $ax + by + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ está associada a uma única reta r do plano cartesiano, cujos pontos possuem coordenadas (x, y) que satisfazem essa equação. Para elucidar tal fato, eles apresentam um exemplo ilustrado na figura 69.

Figura 69: Relação entre reta e sua equação

- Se $x = -3$, temos $3 \cdot (-3) + 8y - 7 = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 8y = 16 \Rightarrow y = 2$; obtemos o ponto $P(-3, 2)$.
- Se $x = 5$, temos $3 \cdot 5 + 8y - 7 = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 8y = -8 \Rightarrow y = -1$; obtemos o ponto $Q(5, -1)$.

Construímos, assim, a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ ao lado.



Fonte: Iezzi *et al* (2013, p. 27)

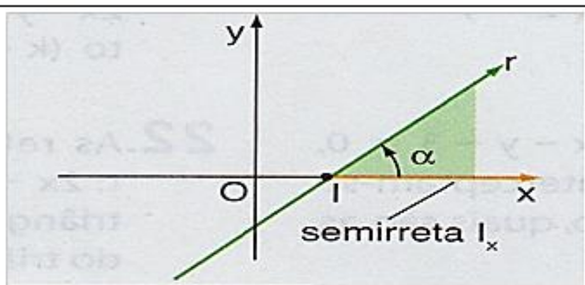
A seção “*In*cl*in*ação de uma reta” *in*icia-se pela apresentação de duas retas do plano cartesiano, no *in*tuito de ilustrar a ideia de *in*cl*in*ação de reta (Figura 70);

Figura 70: Ideia de *in*cl*in*ação

Fonte: Iezzi *et al* (2013, p. 32)

Depois, os autores def*in*em o ângulo de *in*cl*in*ação de uma reta (Quadro 22) e o coeficiente angular como a tangente do ângulo α (o ângulo α é o de *in*cl*in*ação da reta.

Quadro 22: Inclinação e coeficiente angular

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$m = \text{tg}\ \alpha$ Fonte: IEZZI *et al*, 2013, p.33
Gráfico	 Fonte: IEZZI *et al*, 2013, p.32
Verbal	Seja *r* uma reta do plano cartesiano, não paralela ao eixo *x*. Fixemos em *r* dois pontos distintos A e B. Vamos convencionar que o **sentido positivo de** ***r*** é aquele em que “se parte do ponto de menor ordenada e se chega ao ponto de maior ordenada”. Observe os dois casos seguintes: o sentido positivo de *r* está indicado pela seta. Fonte: IEZZI *et al*, 2013, p.32

Fonte: O pesquisador

Notamos, nessa seção, variedades em relação aos tratamentos e conversões, pois os autores utilizam diferentes registros. Ao escrever como encontrar a equação reduzida da reta, os autores fazem conversões entre uma representação do registro Verbal para uma representação do registro Simbólico e depois para uma representação do registro Gráfico. Apresentamos uma situação que ilustre esse fato no Quadro 23.

Quadro 23: Equação reduzida de uma reta - *inclinação*

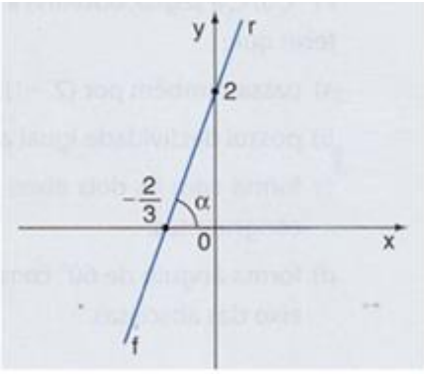
Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$y = mx + n$ Fonte: IEZZI *et al*, 2013, p.35
Gráfico	 Fonte: IEZZI *et al*, 2013, p.35
Verbal	Essa última expressão é chamada **forma reduzida da equação da reta** *r*, ou simplesmente **equação reduzida da reta** *r*, na qual m, n ∈ ℝ e: ▪ *m* é o **coeficiente angular** de *r*; ▪ *n* é a ordenada do ponto em que *r* corta o eixo das ordenadas e é chamado **coeficiente linear** de *r*; ▪ *x* e *y* são as coordenadas de um ponto qualquer da reta *r*. Fonte: IEZZI *et al*, 2013, p.35

Fonte: O pesquisador

Notamos que, até esse ponto, esta é a **única obra** que destaca a relação entre equação reduzida da reta e a lei de formação da função afim, tal relação representa um dos nossos indicadores – IM6.

O **Livro C** é o **único**, até então, que utiliza o **registro Tabular** e faz uma conversão entre a representação do registro Gráfico para uma representação do registro Tabular. Os autores fazem a relação entre as representações algébricas da Função Afim e da Equação Reduzida da Reta, afirmando que elas possuem a mesma representação gráfica:

Figura 71: Relação entre equação reduzida de uma reta e a lei de formação de uma função afim



x	y
0	2 (coeficiente linear)
$-\frac{2}{3}$ (raiz)	0
x	f(x)

Fonte: Iezzi *et al* (2013, p.40)

Observamos que entre os exercícios resolvidos, problemas e exercícios da Taxa de Variação (mesmo sem menção explícita) do **Livro C** há predom*in*ância do Coeficiente Angular e apenas um exercício proposto que envolve a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem). Os autores fazem menção ao nosso *in*dicador IM5, pois na sua resolução, implicitamente, espera-se que o leitor obtenha a equação geral a partir da reduzida da segu*in*te maneira $y = 300 + 0{,}04x \Leftrightarrow 0{,}04x - y + 300 = 0$, como solução do problema da figura 72.

Figura 72: Exemplo do *in*dicador IM5

Um vendedor possui salário fixo de R$ 300,00 mais comissão de 4% sobre o total de vendas do mês. Represente graficamente o salário (y) do vendedor em função do total de vendas (x) realizadas no mês. Qual é a equação geral da reta obtida?

Fonte: Iezzi *et al* (2013, p.40)

Não há exercícios ou problemas sobre Razões Diretas, Funções Médias da Economia (Receita Média, Lucro Médio, Custo Médio) e Cálculo de Velocidades.

Notamos que a Taxa de Variação no **Livro C**, tanto nos textos da parte teórica, das outras atividades e exercícios resolvidos e propostos, são desenvolvidos, basicamente em três registros: Simbólico, Gráfico e Verbal. A ênfase maior foi dada ao registro Simbólico e, observamos apenas um registro Tabular.

Observamos que as conversões trabalhadas são, quase de maneira uniforme, Simbólico/Verbal, Simbólico/Gráfico e Verbal/Gráfico.

No Quadro 24 que apresentamos a seguir apresenta uma análise da Idoneidade Epistêmica dos significados pretendidos pelo autor do **Livro C**.

Quadro 24: Idoneidade Epistêmica dos significados

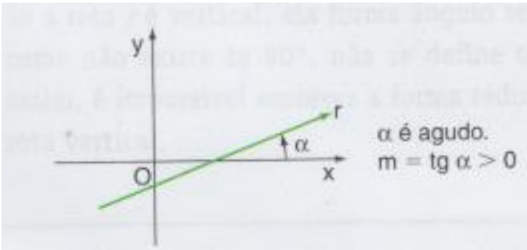
Indicadores dos Livros Didáticos do Ensino Médio (IM)	Representações para a Taxa de Variação				
	Emergentes / Prévias	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
IM1: Contextualização – envolvendo Taxas de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM2: Relação entre Taxa de Variação e o Coeficiente Angular	Verbal		C1	C2	
	Gráfica	C3		C4	
	Simbólica	C5	C6	C7	
	Tabular				
IM3: Utilização de Taxas de Variação para prever resultados nas demais áreas do conhecimento	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM4: Utilização das razões diretas na resolução de problemas	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM5: Taxa de Variação Relativa (Porcentagem)	Verbal			C8	
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IM6: Semelhança entre a representação algébrica da Função Afim e a Equação Reduzida da Reta	Verbal		C9	C10	
	Gráfica			C11	C12
	Simbólica		C13	C14	
	Tabular				
IM7: Utilização de novas tecnologias para resolver problemas relacionados à Taxas de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				

Fonte: O pesquisador

Por exemplo, as entradas C1, C2, C3, C4, C5, C6 e C7, indicam que há predominância do indicador IM2 (relação entre taxa de variação e o coeficiente angular. Apresentamos no quadro 25, algumas situações que fazem apelo a essa relação.

Quadro 25: Situações envolvendo a relação entre coeficiente angular e taxa de variação.

Dados os pontos A(2, 5), B(−3, 2) e C(−1, −4), ache a equação geral da reta que passa pelos pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Em seguida, represente-a graficamente.



Fonte: Iezzi *et al* (2013, p.40)

O *in*dicador IM5 (Taxa de variação relativa) também aparece de forma expressiva em C8, C9, C10, C11, C12, C13 e C14. Este *in*dicador é acionado na resolução de algumas situações como no exemplo apresentado na figura 73.

Figura 73: Exemplo da entrada C8

Um vendedor possui salário fixo de R$ 300,00 mais comissão de 4% sobre o total de vendas do mês. Represente graficamente o salário (y) do vendedor em função do total de vendas (x) realizadas no mês. Qual é a equação geral da reta obtida?

Fonte: Iezzi *et al*. (2013, p.40)

F*in*alizamos a análise do **Livro C** com duas citações do M*in*istério da Educação (MEC) por meio do PNLD (2015).

Acerca da metodologia adotada na obra, o m*in*istério escreve:

> A abordagem dos conteúdos adotada na obra obedece a um padrão: as noções a serem trabalhadas são, em geral, apresentadas com exemplos ou com atividades. Essas são seguidas de uma sistematização teórica e de novos exemplos ou exercícios resolvidos. Por vezes, também se observa uma quantidade exagerada de

> exercícios propostos. Essa forma de apresentação dos conteúdos, feita quase sempre da mesma maneira, reduz as possibilidades de escolhas para alunos e professores. Além disso, não há *in*centivo explícito à *in*teração entre alunos e destes com o professor. Assim, a metodologia de ens*in*o e aprendizagem empregada na coleção não favorece o desenvolvimento de uma postura mais autônoma e crítica por parte do aluno. (BRASIL, 2015, p.54)

E sobre a contextualização no **Livro C,** o MEC escreve que:

> [...] as apresentações dos conteúdos matemáticos estão bem contextualizadas nas relações estabelecidas com a história da própria Matemática, com outras áreas do conhecimento ou com as práticas sociais. Entretanto, alguns exemplos voltados a contextualizações em práticas sociais atuais poderiam ser mais bem explorados. Por exemplo, alguns enunciados de exercícios de matemática f*in*anceira envolvem taxas e valores distantes dos praticados cotidianamente e há situações em que as amostras não são representativas da população considerada (BRASIL, 2015, p.55).

A seguir apresentaremos a Taxa de Variação e a análise do livro: Matemática: Contexto e Aplicações - volume 3 - que *in*titulamos **Livro D**.

3.1.4 A taxa de variação no livro matemática: PAIVA – VOLUME 3

A obra **Matemática: Paiva (Volume 3)** que analisamos está na sua 2ª edição e foi publicado pela Editora Moderna em São Paulo – SP, no ano de 2013. Esse livro será nomeado, na nossa pesquisa, de **Livro D**.

O **Livro D** foi escrito por Manoel Paiva, licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Santo André, mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. O autor foi professor em escolas particulares por 29 anos.

O autor propõe, nesta obra, a selecionar tópicos programáticos fundamentais ao aprendizado da Matemática, fazendo exposições por meio da l*in*guagem clara, objetiva e fundada no rigor conceitual. Sendo assim ao *in*iciar os capítulos do **Livro D**, ele apresenta recursos visuais e textuais que despertam, segundo o autor, o *in*teresse do aluno e, a*in*da segundo o autor, busca levantar os seus conhecimentos prévios.

O livro apresenta um tópico chamado de: Matemática sem fronteira, em que o autor traz um texto sobre uma aplicação prática do assunto desenvolvido no capítulo. Segundo Paiva (2013, p.6) “Se considerar os temas dessa seção relevantes para a comunidade onde a escola se situa, manifestarmos promover uma discussão com os alunos, levantando situações relacionadas que eles conheçam".

O autor do **Livro D** tem como objetivo: estabelecer ligações entre o estágio de aprendizado do Ens*in*o Médio e os conhecimentos adquiridos no Ens*in*o Fundamental; apresentar os rudimentos do pensamento científico; propiciar a compreensão da evolução do pensamento científico por meio da ampliação de conceitos e/ou da construção de objetos abstratos; aplicar as possibilidades de representações, por meio da l*in*guagem matemática, exercitando: a construção de esquemas, tabelas e gráficos; fornecer o embasamento científico para a tomada de decisões, por meio de análises de dados; exercitar a visão tridimensional.

De acordo com Paiva (2013, p.6):

> No ens*in*o Fundamental, os alunos tiveram contato com vários campos de conhecimento matemático. No Ens*in*o Médio, espera-se que estejam em condições de utilizar e enriquecer esses conhecimentos, desenvolvendo de modo mais amplo capacidades como abstrair, *in*vestigar, analisar e compreender os fatos matemáticos e *in*terpretar a própria realidade [...].

Para o professor, a obra fornece sugestões de leitura em livros, revistas, documentos oficiais e sites sobre os segu*in*tes assuntos: Matemática, Educação, Leis Educacionais e História da Matemática.

Acerca da Geometria Analítica, o autor escreve:

> [...] enfatizamos uma das mais eficientes formas de raciocínio matemático: a utilização de mais de um registro de representação no estudo de um objeto matemático. Por exemplo, nos casos em que apenas o uso de régua e compasso – registro geométrico – não foi suficiente para a resolução de problemas, a Geometria Analítica – registro algébrico – surgiu, contribu*in*do para que problemas milenares fossem resolvidos, como o traçado da reta tangente por um ponto de uma curva (PAIVA, 2013, p.19)

Notamos que as duas últimas l*in*has da citação anterior fazem com que o **Livro D** seja o único desta pesquisa que menciona o traçado da reta tangente por um ponto de uma curva. Tal ideia é importante, pois ativa a configuração epistêmica CE1 e pode contribuir para o entendimento da Derivada como Taxa de Variação.

O Volume 3, desta obra, está dívida em 9 capítulos:

● Capítulo 1: Noções de Estatística;

● Capítulo 2: Geometria Analítica: ponto e reta;

● Capítulo 3: Formas de equações da reta, paralelismo e perpendicularidade;

● Capítulo 4: Complementos sobre o estudo da reta;

● Capítulo 5: Equações da circunferência:

● Capítulo 6: As cônicas: elipse, hipérbole e parábola;

● Capítulo 7: Conjunto dos números complexos;

● Capítulo 8: Pol*in*ômios;

● Capítulo 9: Equações pol*in*omiais.

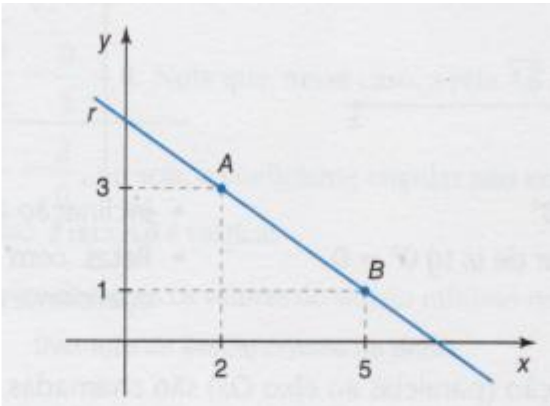
Nossa pesquisa volta sua atenção a duas seções do **Livro D**:

● seção 2.4 - do capítulo 2 - cujo título é: Reta. Esse tópico foi escrito da pág*in*a 41 até a pág*in*a 55;

● seção 3.3 - do capítulo 3 - que tem o título: Equação reduzida da reta, e que vai da pág*in*a 61 até a pág*in*a 62.

Na seção 2.4 *in*titulada: Reta, o autor apresenta uma reta no plano cartesiano dois pontos dist*in*tos (Figura 74):

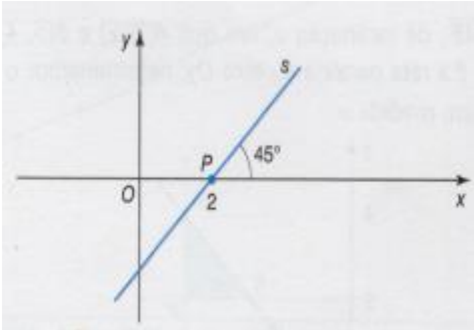
Figura 74: Construção de uma reta passando por dois pontos



Fonte: Paiva (2013, p. 41)

... e com esse mesmo registro, apresenta uma “nova” abordagem pedagógica da construção da reta: por um ponto e o ângulo de *in*cl*in*ação (Figura 75):

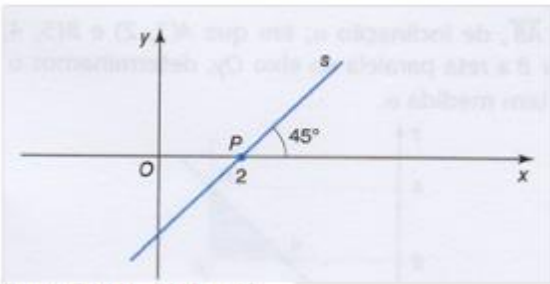
Figura 75: Uma reta com ângulo de *inclin*ação



Fonte: Paiva (2013, p.41)

Na sequência, o autor def*in*e o ângulo de *in*cl*in*ação da reta (Quadro 26) e o relaciona com o Coeficiente Angular e utiliza representações nos registros Verbal (Quadro 26) e simbólico para reforçar tal ideia.

Quadro 26: Ângulo de *in*cl*in*ação e sua tangente

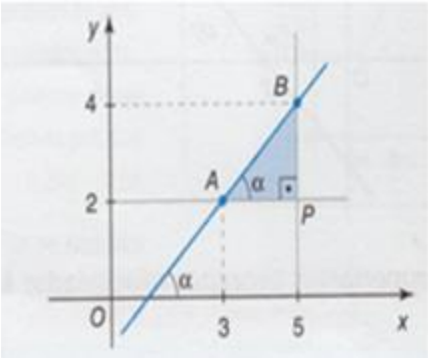
Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$m = \text{tg}\,\alpha$ Fonte: PAIVA, 2013, p.42
Gráfico	 Fonte: PAIVA, 2013, p.42
Verbal	Chama-se coeficiente angular de uma reta r de inclinação α, com $\alpha \neq 90^\circ$, o número m Fonte: PAIVA, 2013, p.42

,

Fonte: O pesquisador

Em seguida, o autor relaciona o Coeficiente Angular e as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação (Figura 76).

Figura 76: Relação Variação/taxa de variação e coeficiente angular e



$$m = \text{tg}\,\alpha = \frac{4-2}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

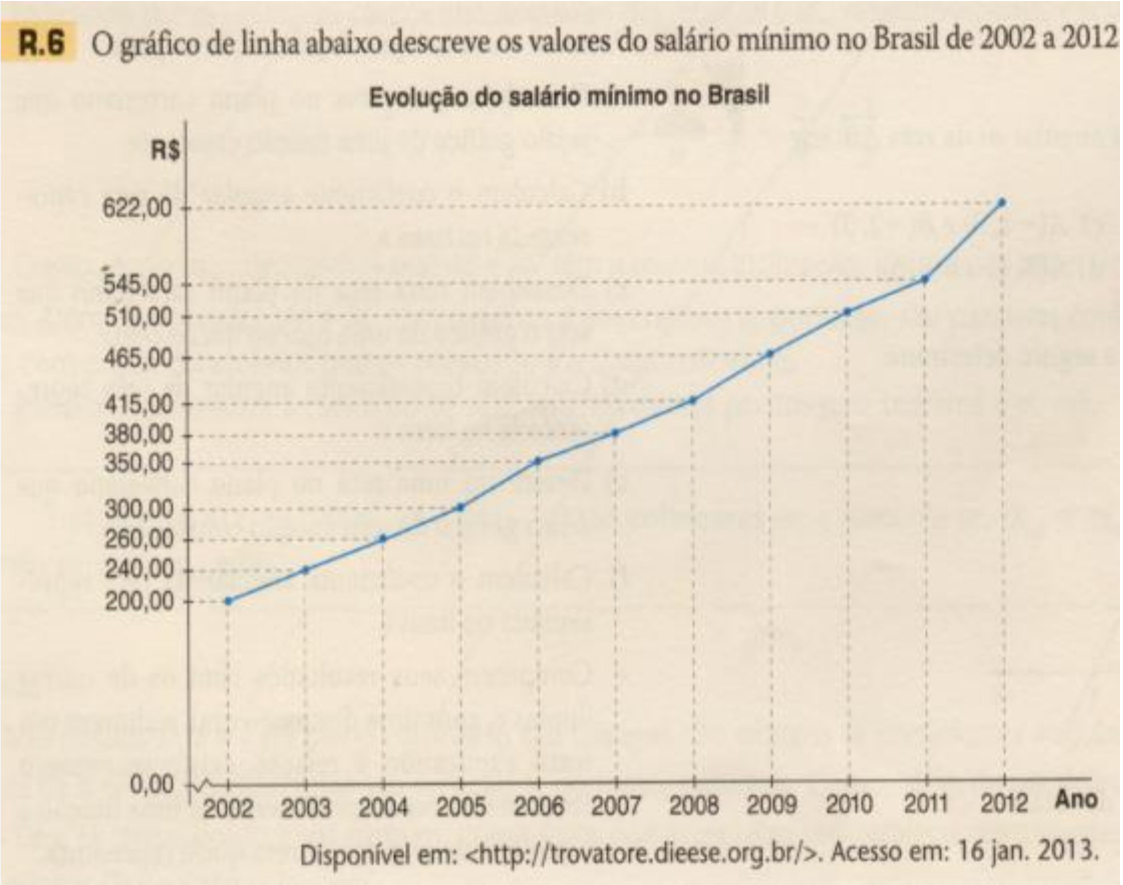
Fonte: Paiva (2013, pp. 42 - 43)

No **Livro D**, pela primeira vez, há menção explícita de que o Coeficiente Angular pode ser *in*terpretado como uma Taxa de Variação. O autor afirma que:

> [...] como as unidades adotadas nos eixos são diferentes, a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ deve ser *in*terpretada apenas como uma taxa de variação e não como a tangente da *in*cl*in*ação α da reta. Mesmo assim, chamamos essa razão de coeficiente angular, pois ela depende de α [...].(PAIVA, 2013, p.44).

A*in*da acerca do Coeficiente Angular como Taxa de Variação o autor aborda uma situação de aprendizagem. No exemplo da Figura 77, o autor assevera que “Nesse caso, o coeficiente angular *in*dica a taxa média anual de variação dos salários mínimos, isto é, *in*dica que o salário mínimo teve um acréscimo médio de R$ 42,20 por ano, no período considerado” (PAIVA, 2013, p.44)

Figura 77: Situação envolvendo Coeficiente Angular



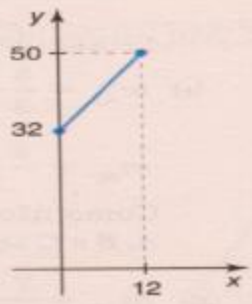
Fonte: Paiva (2013, p.430)

Notamos a presença de alguns de nossos *in*dicadores e em um deles faz referência ao ENEM. Apresentamos algumas situações que acionam esses *in*dicadores nos processos de suas resoluções. Por exemplo:

● IM1 e IM2:

Figura 78: – Exemplos envolvendo os *in*dicadores IMI e IM2

18 O gráfico ao lado descreve a temperatura *y*, em grau Celsius, de um aquecedor de ambiente em função do tempo *x*, em minuto, desde o instante em que foi ligado (instante zero), quando sua temperatura era 32 °C, até o instante em que atinge sua temperatura máxima, que é 50 °C.



a) Calcule o coeficiente angular da reta que contém esse gráfico. 1,5

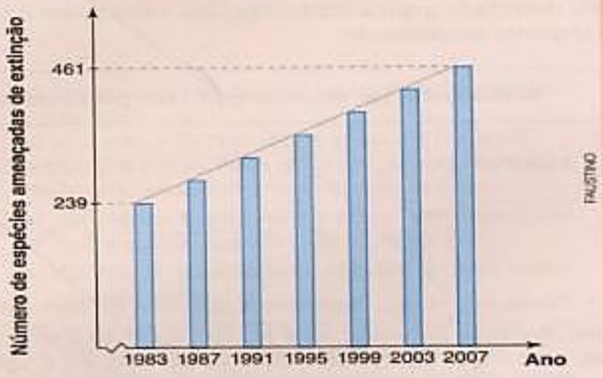
b) O que significa esse coeficiente no contexto do enunciado? Significa que a cada minuto a temperatura aumentou 1,5 °C.

Fonte: Paiva (2013, p.45)

●IM4:

Figura 79: Exemplo de situação que envolve IM3.

23 (Enem) O gráfico abaixo, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.



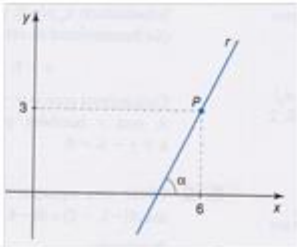
Se mantida, pelos próximos anos, a tendência de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 [foi] igual a:

a) 465
b) 493
c) 498
d) 538
e) 699 alternativa c

Fonte: Paiva (2013, p.45)

Na subseção Equação fundamental da reta, o autor deduz a equação fundamental da reta por meio de um exemplo (Quadro 27).

Quadro 27: Equação fundamental da reta

Tipos de Registro	Representações
Simbólica	$m_r = \text{tg}\ \alpha = 2$ Fonte: PAIVA, 2013, p. 47
Gráfica	 Fonte: PAIVA, 2013, p. 47
Verbal	Assim, concluímos que a equação $y = 2x - 9$ representa todos os pontos (x, y) do plano cartesiano que pertencem à reta *r*, por isso ela é chamada de **equação da reta *r***. Fonte: PAIVA, 2013, p. 47

Fonte: O pesquisador

Na sequência da exposição o livro constrói a equação geral de maneira genérica da seg*uin*te forma: ”Se r é a reta não vertical que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m, então uma equação de r é $y\text{-}y_0 = m(x\text{-}x_0)$” (PAIVA, 2013, p.47). Dessa equação, o autor deduz a equação reduzida:

$$y \ = \ mx + q$$

Em relação ao nosso *in*dicador IM6, o autor lança um aviso ao professor em que afirma que

> Se achar conveniente, relembrar com os alunos que, nos anos anteriores, vimos que uma função pol*in*omial do 1º grau é representada no plano cartesiano por uma reta oblíqua, de equação $y \ = \ ax + \ b$, com a e b números reais e a não nulo. Também aprendemos a determinar a equação da reta a partir de dois de seus pontos dist*in*tos (PAIVA, 2013, p.47).

Observamos, com essa citação, que a semelhança entre a equação reduzida da reta e a função afim é deixada a cargo do professor.

Observamos que entre os exercícios resolvidos, problemas e exercícios de Taxa de Variação (mesmo sem menção explícita), há predom*in*ância de exercícios que envolvem o Coeficiente Angular e Razões Diretas, como na situação da figura 80.

Figura 80: Exemplo de situação que aciona o Coeficiente Angular

Para exemplificar, vamos admitir que se disponha dos dados descritos pelo gráfico da figura 1, em que é apresentado o consumo (y) de água, em quilolitro, em função da população (x), em milhar, dessa cidade. Com base nesses dados, deseja-se estimar o consumo de água quando a população atingir 200 mil habitantes.

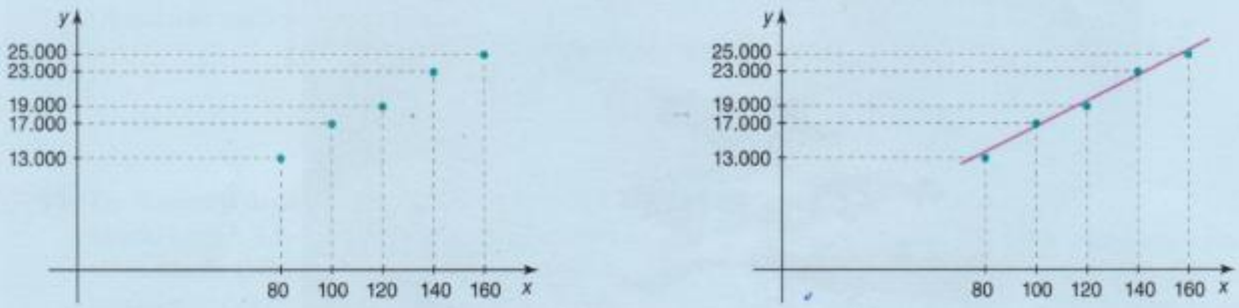


Figura 1 Figura 2

A figura 2 mostra que os pontos do gráfico estão próximos de uma mesma reta e, portanto, as variáveis x e y podem ser relacionadas, aproximadamente, pela equação dessa reta. Por meio de métodos estatísticos, demonstra-se que a reta que melhor se ajusta a esses dados é dada pela equação $y = 1.400 + 150x$; logo, para $x = 200$, obtém-se uma estimativa do consumo de água quando a população for de 200 mil habitantes:

$$y = 1.400 + 150 \cdot 200 = 31.400$$

Assim, o consumo será de 31.400 kL, aproximadamente.

Fonte: Paiva (2013, p.71)

Não há exercícios ou problemas sobre Cálculo de Velocidades e Cálculos de Porcentagens.

Notamos que a Taxa de Variação, tanto nos textos da parte teórica, bem como das outras atividades e dos exercícios resolvidos e propostos, são desenvolvidos, basicamente em três registros: Simbólico, Gráfico e Verbal. Sendo constatada a ênfase ao registro Simbólico e a presença de um registro Tabular.

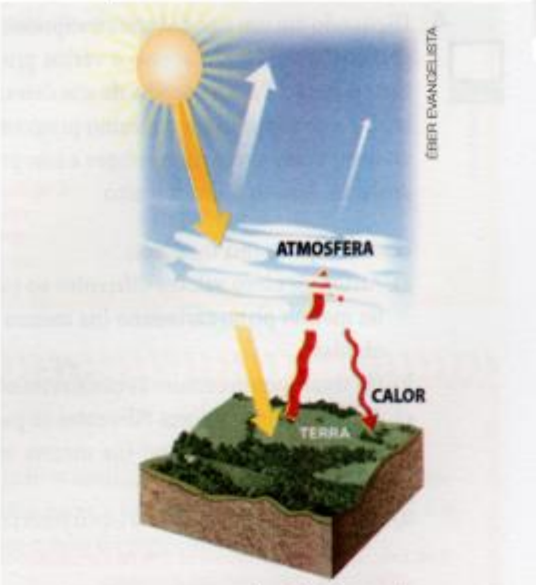
Observamos também que as conversões ocorrem quase de maneira uniforme nas representações dos registros: Simbólico, Verbal e Gráfico, e a falta das conversões que utilizam a representação do registro Tabular.

O autor deste livro, diferentemente dos outros três autores, faz a relação explícita do Coeficiente Angular com a Taxa de Variação e em muitas vezes existe uma orientação ao professor para que reforce essa ideia, como no caso seguinte em que ele: “Se achar conveniente, retomar com os alunos o conceito de taxa de variação da função afim, relacionado ao conceito de coeficiente angular”. (PAIVA, 2013, p.43).

Destacamos ainda que aborda questões contextualizadas envolvendo as ideias da Variação e Taxa de Variação em algumas provas de ENEM e outras situações como a situações representada na figura 81.

Figura 81: As ideias da Variação e da Taxa de Variação

Efeito estufa é o nome dado à retenção de calor na Terra causada pela concentração de diversos tipos de gases na atmosfera. Estudos têm mostrado que, se as emissões dos gases que provocam o efeito estufa não diminuírem, a quantidade desses gases presentes na atmosfera poderá triplicar em 100 anos. Entre os cientistas há um consenso de que o resultado mais direto das mudanças climáticas seja o aumento da temperatura do planeta em até 5,8 °C ao final desses 100 anos. (Fonte: Cetesb.)



Esquema representativo do efeito estufa.

Admitindo as expectativas mais pessimistas e considerando que, nos próximos 100 anos, a quantidade desses gases na atmosfera e a temperatura do planeta aumentem linearmente em função do tempo, responda:

a) Qual será o percentual de aumento na quantidade desses gases em relação à atual daqui a 54 anos? 108%

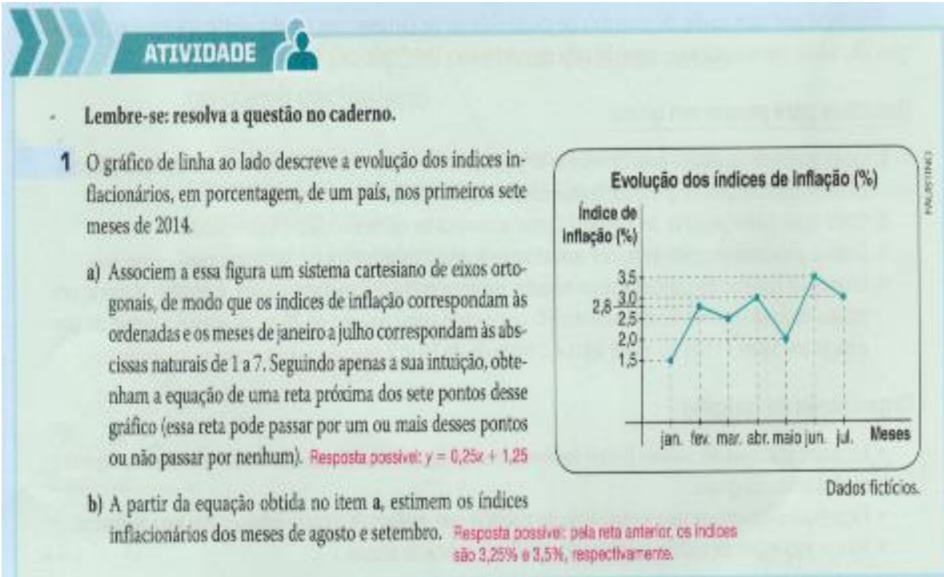
b) Daqui a quanto tempo haverá um acréscimo de 1,7 °C nessa temperatura? ≈29,3 anos

c) Calcule a taxa média anual de variação da temperatura do planeta na primeira década do período considerado. 0,058 °C por ano

Fonte: Paiva (2013, p.52)

Além dos indicadores IM1, IM2, IM3, IM4 (já exemplificados), encontramos situações (Figura 82) que acionam o indicador IM5, em que as ideias da Variação e da Taxa de Variação são manifestadas na forma taxa de Variação Relativa.

Figura 82: As ideias da Variação e da Taxa de Variação


ATIVIDADE

- **Lembre-se: resolva a questão no caderno.**

1 O gráfico de linha ao lado descreve a evolução dos índices inflacionários, em porcentagem, de um país, nos primeiros sete meses de 2014.

a) Associem a essa figura um sistema cartesiano de eixos ortogonais, de modo que os índices de inflação correspondam às ordenadas e os meses de janeiro a julho correspondam às abscissas naturais de 1 a 7. Seguindo apenas a sua intuição, obtenham a equação de uma reta próxima dos sete pontos desse gráfico (essa reta pode passar por um ou mais desses pontos ou não passar por nenhum). Resposta possível: $y = 0,25x + 1,25$

b) A partir da equação obtida no item **a**, estimem os índices inflacionários dos meses de agosto e setembro. Resposta possível: pela reta anterior, os índices são 3,25% e 3,5%, respectivamente.

Fonte: Paiva (2013, p.71)

No Quadro 28, são apresentados indicadores presentes no livro para uma análise da Idoneidade Epistêmica dos significados pretendidos pelo autor.

Quadro 28: Matriz de *in*dicadores de análise do livro

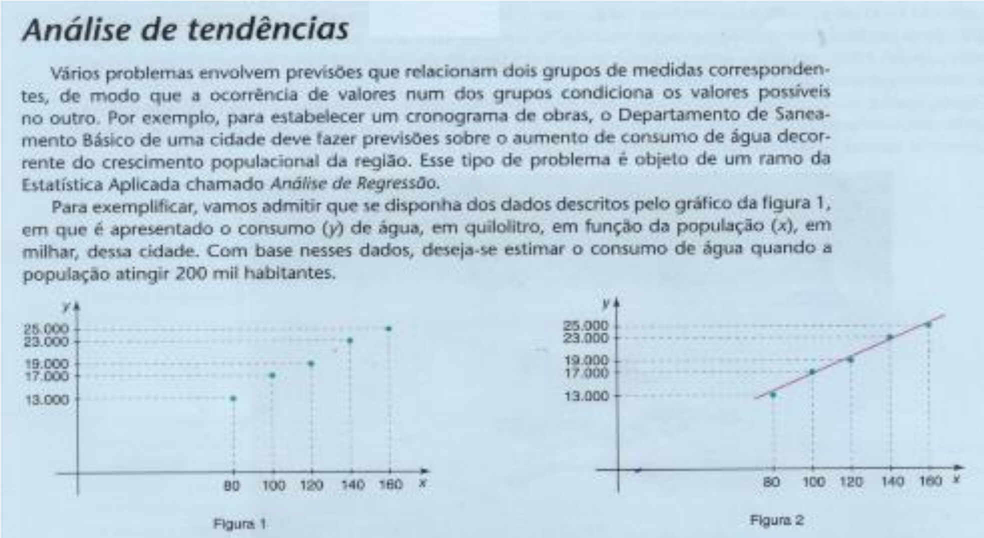
Indicadores dos Livros Didáticos do Ensino Médio (IM)	Representações para a Taxa de Variação				
	Emergentes / Prévias	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
IM1: Contextualização – envolvendo Taxas de Variação	Verbal		D1	D2	
	Gráfica			D3	
	Simbólica			D4	
	Tabular				
IM2: Relação entre Taxa de Variação e o Coeficiente Angular	Verbal		D5	D6	
	Gráfica			D7	
	Simbólica		D8	D9	
	Tabular				
IM3: Utilização de Taxas de Variação para prever resultados nas demais áreas do conhecimento	Verbal		D10	D11	
	Gráfica			D12	
	Simbólica				
	Tabular				
IM4: Utilização das razões diretas na resolução de problemas	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica			D13	
	Tabular		D14		
IM5: Taxa de Variação Relativa (Porcentagem)	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica			D15	
	Tabular				
IM6: Semelhança entre a representação algébrica da Função Afim e a Equação Reduzida da Reta	Verbal		D16		
	Gráfica				
	Simbólica		D17		
	Tabular				
IM7: Utilização de novas tecnologias para resolver problemas relacionados à Taxas de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				

Fonte: O pesquisador

Apresentamos alguns exemplos em que alguns indicadores do Quadro 28 são ativadas no entendimento das ideias da Variação e da Taxa de Variação:

O *in*dicador IM1 está presente nas entradas D1, D2, D3 e D4. Estão em jogo situações que envolvem outras áreas de conhecimento, essas situações Taxa de Variação na resolução do problema, como o exemplo da figura 83:

Figura 83: Exemplo de situações que envolvem o *in*dicador IM1



Análise de tendências

Vários problemas envolvem previsões que relacionam dois grupos de medidas correspondentes, de modo que a ocorrência de valores num dos grupos condiciona os valores possíveis no outro. Por exemplo, para estabelecer um cronograma de obras, o Departamento de Saneamento Básico de uma cidade deve fazer previsões sobre o aumento de consumo de água decorrente do crescimento populacional da região. Esse tipo de problema é objeto de um ramo da Estatística Aplicada chamado *Análise de Regressão.*

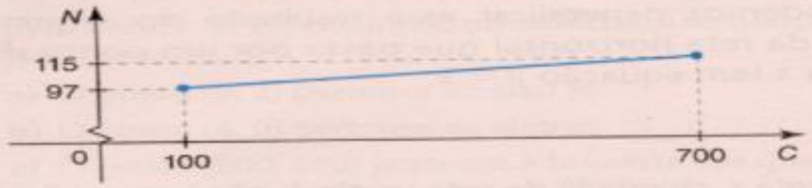
Para exemplificar, vamos admitir que se disponha dos dados descritos pelo gráfico da figura 1, em que é apresentado o consumo (*y*) de água, em quilolitro, em função da população (*x*), em milhar, dessa cidade. Com base nesses dados, deseja-se estimar o consumo de água quando a população atingir 200 mil habitantes.

Fonte: Paiva (2013, p.71)

Nessas entradas **D10**, **D11**, **D12** (que é utilizado o IM3) **D13** e **D14** ocorrem a manifestação das ideias da Variação e da Taxa de Variação por meio do Coeficiente Angular e da Razão Direta (indicador IM4). Por exemplo, as situações das figuras 84, acionam, respectivamente, a Taxa de Variação na sua resolução.

Figura 84: Situação que aciona a Taxa de variação

(UFF-RJ) Um grande poluente produzido pela queima de combustíveis fósseis é o SO_2 (dióxido de enxofre).
Uma pesquisa realizada na Noruega e publicada na revista "*Science*" em 1972 concluiu que o número (N) de mortes por semana, causadas pela inalação de SO_2, estava relacionado com a concentração média (C), em mg/m^3, do SO_2 conforme o gráfico abaixo: os pontos (C, N) dessa relação estão sobre o segmento de reta da figura.



Com base nos dados apresentados, a relação entre N e C ($100 \leq C \leq 700$) pode ser dada por:

a) $N = 100 - 700C$
b) $N = 94 + 0{,}03C$
c) $N = 97 + 0{,}03C$ alternativa b
d) $N = 115 - 94C$
e) $N = 97 + 600C$

Fonte: Paiva (2013, pp.48-9)

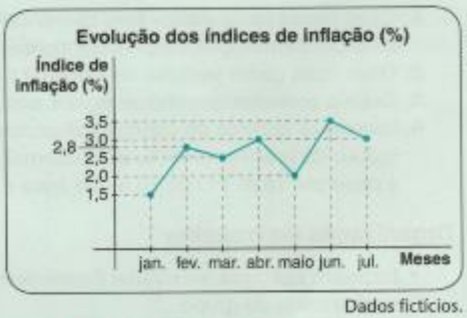
Na entrada D15, temos o *in*dicador o *in*dicador IM5 que envolvem a Taxa de variação relativa (Figura 85)

Figura 85: Exemplo de situação que envolve o uso da taxa de variação relativa.

1 O gráfico de linha ao lado descreve a evolução dos índices inflacionários, em porcentagem, de um país, nos primeiros sete meses de 2014.

a) Associem a essa figura um sistema cartesiano de eixos ortogonais, de modo que os índices de inflação correspondam às ordenadas e os meses de janeiro a julho correspondam às abscissas naturais de 1 a 7. Seguindo apenas a sua intuição, obtenham a equação de uma reta próxima dos sete pontos desse gráfico (essa reta pode passar por um ou mais desses pontos ou não passar por nenhum). Resposta possível: $y = 0{,}25x + 1{,}25$

b) A partir da equação obtida no item **a**, estimem os índices inflacionários dos meses de agosto e setembro. Resposta possível: pela reta anterior, os índices são 3,25% e 3,5%, respectivamente.



Fonte: Paiva (2013, p.71)

Percebemos que as entradas do **Quadro 28** são distribuídas em apenas algumas células, deixando de lado aspectos importantes da construção do conceito de taxa de variação.

Finalizamos esta seção com duas observações do MEC sobre a metodologia e a contextualização do **Livro D.**

Acerca da metodologia o MEC escreve que:

> Os conteúdos são apresentados por meio de explanações teóricas e exemplos, seguidos de problemas resolvidos e de questões propostas. Essa opção metodológica, que é predom*in*ante na obra, limita a participação do aluno no processo de sua aprendizagem. A despeito disso, observam-se outras escolhas que atenuam essa limitação. Nota-se, por exemplo, o cuidado em relacionar os conteúdos com situações significativas, seja nas pág*in*as de abertura dos capítulos, seja nas atividades, resolvidas ou propostas, que envolvem aplicações da Matemática. (BRASIL, 2015, p.45).

Sobre a contextualização:

> Na coleção, são frequentes as conexões da matemática escolar com outras áreas do conhecimento, em particular na seção Matemática sem fronteiras, o que pode tornar o estudo mais interessante e significativo. Também são apresentadas algumas situações em que se busca relacionar o conteúdo matemático com práticas sociais. No entanto, nem sempre tais articulações são bem exploradas (BRASIL, 2015, p.46).

Na próxima seção, faremos um estudo global (análise e comparações conjuntas) dos quatro Livros Didáticos do Ens*in*o Médio que estudamos em separado.

3.2 Estudo global dos livros didáticos do ens*in*o médio

Nesta seção faremos um estudo (análises e comparações) global dos Livros Didáticos do Ensino Médio no que diz respeito à teoria dos Registros de Representações Semióticas e os indicadores da Análise de Conteúdo.

Ressaltamos que esse estudo (análises e comparações), foi realizado no capítulo de Geometria Analítica de que trata o assunto: Estudo da Reta, pois esse tópico deve existir a relação do Coeficiente Angular com a Taxa de Variação – mesmo que de forma implícita - que é o que realçamos como fundamental para o entendimento da Derivada como Taxa de Variação.

Nossa análise permitiu perceber que há uma distribuição quase uniforme de exercícios (resolvidos ou não) que acionam a Taxa de Variação no **Livro D**, já o **Livro C** reúne o menor índice dessa classificação. Em relação ao **Livro A** e ao **Livro B,** há uma disposição praticamente igual da Taxa de Variação nos textos das outras atividades.

Em relação à distribuição da Taxa de Variação nos textos dos exercícios resolvidos o **Livro D** aparece com maior concentração, seguido do **Livro A** e este por sua vez é aproximadamente igual ao **Livro B**. O **Livro C** tem a distribuição praticamente empatada com os textos dos exercícios resolvidos e propostos.

O **Livro B** tem maior quantidade de exercícios envolvendo a Taxa de Variação, seguido do **Livro A** e do **Livro D** que está quase parelho ao **Livro C**.

O **Livro A** e o **Livro B** fazem menção implícita do Coeficiente Angular como uma Taxa de Variação, já o **Livro C** e o **Livro D** fazem menção explícita a Taxa de Variação e o **Livro D** é o único que traz orientações aos professores de como fazer a relação entre o Coeficiente Angular e a Taxa de Variação. Destacamos também que o **Livro C** e o **Livro D** são os únicos a apresentarem a semelhança da equação reduzida da reta com a função afim.

O **Quadro 29** apresenta uma análise da Idoneidade Epistêmica dos significados pretendidos nos Livros Didáticos do Ens*in*o Médio. Esse quadro mostra os *in*dicadores encontrados nos livros, bem como as representações que são ativadas nos textos teóricos e exercícios resolvidos ou não.

Colorimos as entradas mais "representativas" do **Quadro 29** para evidenciarmos os significados pretendidos nos livros, por exemplo, uma das entradas em **Amarelo** (6ª linha e 4ª coluna): significa que os autores dos quatros livros contemplam o indicador **IM2** e possibilitam ao leitor a partir da representação prévia no registro **Verbal** uma representação no registro **Gráfico** da Taxa de Variação.

Notamos que *in*dicação em Amarelo aparece em apenas três células. Percebemos que as entradas no **Quadro 29** são distribuídas em apenas algumas células. Embora seja verdade que os livros estudados propõem alguns sistemas de representação, também é certo que o vínculo entre os *in*dicadores e a Taxa de Variação nos parece frágil, em todos os livros.

Quadro 29: Repartição dos indicadores

Indicadores dos Livros Didáticos do Ensino Médio (IM)	Emergentes / Prévias	Representações para a Taxa de Variação: Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
IM1: Contextualização – envolvendo Taxas de Variação	Verbal		A1 D1	D2	
	Gráfica			A2 D3	
	Simbólica			A3 D4	
	Tabular				
IM2: Relação entre Taxa de Variação e o Coeficiente Angular	Verbal		A4 B1 C1 D5	A5 B2 C2 D6	
	Gráfica	B3 C3	B4	B5 C4 D7	
	Simbólica	C5	B6 C6 D8	A6 B7 C7 D9	
	Tabular				
IM3: Utilização de Taxas de Variação para prever resultados nas demais áreas do conhecimento	Verbal		D10	D11	
	Gráfica			D12	
	Simbólica				
	Tabular				
IM4: Utilização das razões diretas na resolução de problemas	Verbal			A7	
	Gráfica			A8	
	Simbólica			A9 D13	
	Tabular		D14		
IM5: Taxa de Variação Relativa (Porcentagem)	Verbal			C8	
	Gráfica				
	Simbólica			D15	
	Tabular				
IM6: Semelhança entre a representação algébrica da Função Afim e a Equação Reduzida da Reta	Verbal		C9 D16	C10	
	Gráfica			C11	C12
	Simbólica		C13 D17	A10 C14	
	Tabular				
IM7: Utilização de novas tecnologias para resolver problemas relacionados à Taxas de Variação	Verbal		A11	A13	
	Gráfica			A12	
	Simbólica				
	Tabular				

Fonte: O Pesquisador

Ressaltamos que no Quadro 29 que apresentamos a seguir s*in*tetizamos as representações prévias e emergentes dos registros (simbólico, gráfico e tabular) para a Taxa de Variação, segundo *I*ndicadores dos Livros Didáticos do Ens*ino* Médio (**IM**). Sendo assim, os *in*dicadores ficaram distribuídos:

● **IM1**: Contextualização - envolvendo Taxas de Variação: **Livro A** e **Livro D**;

● **IM2**: Relação entre a Taxa de Variação e o Coeficiente Angular: **Livro A**, **Livro B**, **Livro C** e **Livro D;**

● **IM3**: Utilização de Taxas de Variação para prever resultados nas demais áreas do conhecimento: **Livro D**;

● **IM4**: Utilização das Razões Diretas na resolução de problemas: **Livro A** e **Livro D;**

● **IM5:** Taxa de Variação Relativa (Porcentagem): **Livro C** e **Livro D;**

● **IM6**: Semelhança entre a Equação Reduzida da Reta e a Função Afim: **Livro A**, **Livro C** e **Livro D;**

● **IM7**: Utilização de novas tecnologias para resolver problemas relacionados à Taxas de Variação: **Livro A.**

Notamos que o **IM2** é o único *in*dicador utilizado por todos os livros, o **IM3** e o **IM7** são utilizados apenas: no **Livro D** e no **Livro A**, respectivamente. E o **Livro B** concentra atenções ao **IM2**, quase que exclusivamente.

Observamos a*in*da que o registro Verbal é igualmente menos utilizado nesses livros e o registro Tabular quase não é utilizado, aparecendo apenas um emprego no **Livro C** e no **Livro D**.

Lembramos que de acordo com a teoria dos Registos de Representação Semiótica, a preferência por apenas um tipo de registro, neste caso o **Simbólico**, (em detrimento de outros) pode afetar a compreensão e o significado da Taxa de Variação.

A conversão Verbal/Gráfica é a segunda mais utilizada no **Livro A**; no **Livro B** e no **Livro D** ocorre a utilização da conversão Simbólica/Gráfica.

O **Livro C** utiliza a conversão Simbólica/Gráfica com maior frequência e a conversão Gráfica/Tabular praticamente não é utilizada aparecendo apenas uma vez no **Livro C** e no **Livro D**.

Nas próximas seções apresentaremos os estudos dos Livros Didáticos do Ensino Superior por meio dos procedimentos metodológicos da Análise de Conteúdo de Bardin, o Sentido Holístico da Derivada, critérios de Idoneidade Epistêmica e à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Começaremos a análise pelo livro: Cálculo – volume 1 intitulado por nós de **Livro X**.

3.3 A derivada nos livros didáticos do ensino superior

3.3.1 O conceito de derivada no livro: cálculo

O autor James Stewart é Ph.D pela Universidade de Toronto e é professor de Matemática na MacMaster University, no Canadá. A universidade, onde também leciona, mantém o Centro de Matemática James Stewart, desde 2003. Sobre a filosofia de seu livro escreve:

> A ênfase e aqui é a compreensão de conceitos. Creio que quase todos concordam que este deve ser o objetivo pr*in*cipal do ens*in*o do cálculo. [...] Tentei at*in*gir este objetivo por meio da chamada Regra dos Três: Os tópicos devem ser apresentados geométrica, numérica e algebricamente (STEWART, 2010, p.5).

De acordo com esta citação, observamos as intenções claras do autor em utilizar, explicitamente, alguns registros, como por exemplo, os registros de representação: numérico, simbólico-algébrico e figura geométrica plana, no intuito de propiciar a compreensão dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

A obra é caracterizada por apresentar as seguintes seções: Exercícios Conceituais, Exercícios com Dificuldade Progressiva, Dados Reais, Projetos, Resolução de problemas e Tecnologia.

Com relação à seção Tecnologia o autor afirma que:

> A disponibilidade de tecnologia não dim*in*ui – pelo contrário, aumenta – a importância de se entender com clareza os conceitos por trás das Figuras na tela. Quando utilizamos apropriadamente, computadores e calculadoras gráficas são ferramentas úteis na descoberta e compreensão de tais conceitos (STEWART, 2010, p.7).

O livro é organizado nos seguintes tópicos: Teste de Verificação, Uma Apresentação do Cálculo, Funções e Modelos, Limites e Derivadas, Regras de Derivação. Aplicações de Derivação, Integrais, Aplicações de Integração, Técnicas de Integração e Mais Aplicações de Integração.

Com respeito ao tópico Testes de Verificação, o autor assevera

> O sucesso no cálculo depende em grande parte do conhecimento da matemática que precede o cálculo: álgebra, geometria analítica, funções e trigonometria. Os testes a seguir têm a *in*tenção de diagnosticar falhas que você possa ter nessas áreas [...] (STEWART, 2010, p.17).

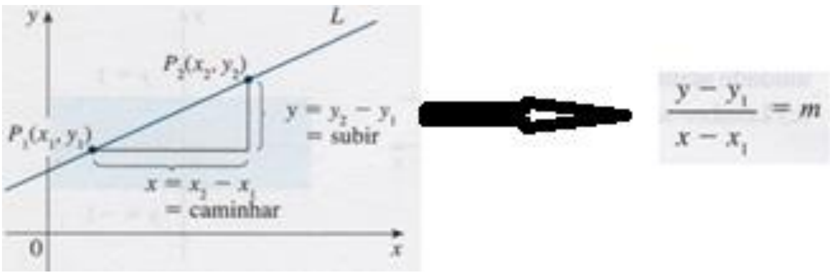
Neste ponto, observamos a intenção do autor em resgatar alguns conhecimentos que os alunos possivelmente adquiriram em anos escolares anteriores para obterem êxito no Cálculo Diferencial e Integral. Destacamos que, dentre outros assuntos,

Para alcançar seu objetivo, o autor propõe cinco exercícios em que somente a primeira questão, com quatro itens, envolve a equação da reta e o coeficiente angular.

No final da seção, há respostas das atividades e uma advertência para o leitor que, em caso de dificuldades, este deve revisar o assunto nos apêndices apropriados.

No apêndice, o autor, entre outras coisas, resgata como escrever a equação da reta na forma fundamental destacando que o coeficiente angular é uma taxa de variação de y em relação à x, como na situação apresentada na figura 86:

Figura 86: Equivalência entre taxa de variação e coeficiente angular



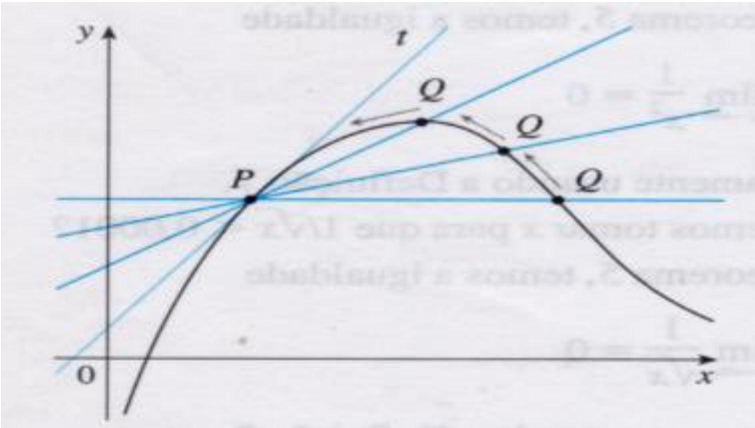
Fonte: Stewart (2010, p. A12)

E em relação ao tópico “Uma Apresentação do Cálculo”, o autor escreve que:

> O cálculo é fundamentalmente diferente da matemática que você já estudou. O cálculo é menos estático e mais d*in*âmico. Ele trata de variação e de movimento, bem como de quantidades que tendem a outras quantidades (STEWART, 2010, p. 22).

Nessa citação, percebemos a intenção de introduzir as ideias do Cálculo, neste caso a derivada, por meio das configurações epistêmicas CE2, CE4 e CE5, ou seja, utilizar ideias básicas da Variação e da Taxa de Variação, além da noção intuitiva de Limite. Segue um exemplo de figura (Figura 87) em que o autor ilustra as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação:

Figura 87: Ideias fundamentais de Variação e Taxa de variação



Fonte: Stewart (2010, p.195)

Sobre o problema da Reta Tangente, Stewart (2010, p.24) averigua que

> O problema da tangente deu origem ao ramo do cálculo chamado de cálculo diferencial, [...]. As pr*in*cipais ideias por trás do cálculo diferencial devem-se ao matemático francês Pierre de Fermat (1601 – 1665) e foram desenvolvidas pelos matemáticos [...] Isaac Newton (1627 – 1727) e Gottfried Leibniz (1646 – 1716) (p.24).

Neste ponto, observamos que a obra faz alusão ao sentido holístico da Derivada no seguinte caminho: CE1(ou CE3 ou CE5) → Tangentes → CE8 ou CE7→ Tangentes.

No tocante ao Cálculo Diferencial, o autor assevera que

> Vimos que o conceito de limite surge de problemas tais como encontrar a área de uma região, a tangente a uma curva, [...]. Em cada um dos casos, o tema comum é o cálculo de uma quantidade como limite de outras quantidades mais facilmente calculáveis. [...] Na realidade, poderíamos def*in*ir o cálculo como aquele ramo da matemática que trata de limites (STEWART, 2010, p. 28).

Nessa última passagem percebemos a ideia de associar a Derivada ao Limite, ou seja, utilizar a configuração epistêmica CE9.

No **Livro X**, analisamos, especificamente, por meio dos pr*in*cípios do nosso referencial teórico-metodológico (teoria dos Registros de Representação Semiótica, Análise de Conteúdo, Idoneidade Epistêmica e Sentido Holístico da Derivada), o capítulo 2 - Limites e Derivadas. Nossa pesquisa está focada na seção 2.7 - Derivadas e Taxa de Variação (subdividido nos tópicos: Tangentes, Velocidades, Derivadas, Taxa de Variação).

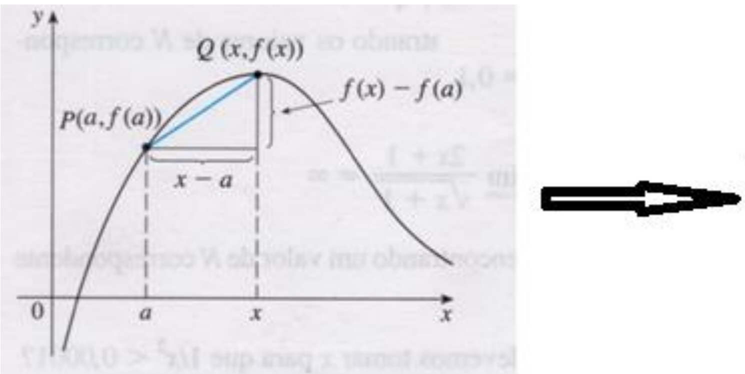
Esse capítulo inicia-se com o seguinte parágrafo:

> O problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema de encontrar a velocidade de um objeto envolvem determ*in*ar o mesmo tipo de limite, como vimos na Seção 2.1. Este tipo de limite é chamado derivada e veremos que ele pode ser *in*terpretado como uma taxa de variação tanto nas ciências quanto na engenharia. (STEWART, 2010, p.130).

O autor propõe resolver situações de aprendizagem que percebemos utilizar as configurações CE3 e CE4 e aplicar os seguintes sentidos: CE3 → Tangentes → CE9 e CE4 → Taxa de Variação e Velocidade → CE9. Essa escolha do autor pode provocar a perda de significado holístico da derivada construído a partir de situações que favorecem as diferentes configurações epistêmicas evidenciadas por God*in*o *et al*., e visualizadas por nós na Figura 22 (p. 106, desta tese).

O autor inicia a seção "Tangentes", utilizando o coeficiente angular da reta secante. Observamos nesse ponto que as concepções da Variação e da Taxa de Variação são utilizadas de maneira implícita, reforçando assim a configuração epistêmica CE9.

Figura 88: Ideia de reta tangente



$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Fonte: Stewart (2010, p.130)

Na sequência, apresenta um exemplo (Figura 89) em que se pede a equação da reta tangente à parábola em um ponto específico utilizando ideia da Derivada no sentido Tangentes → CE9 (Derivada como limite).

Figura 89: Derivada como limite

EXEMPLO 1 Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

SOLUÇÃO Temos aqui $a = 1$ e $f(x) = x^2$, logo a inclinação é

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

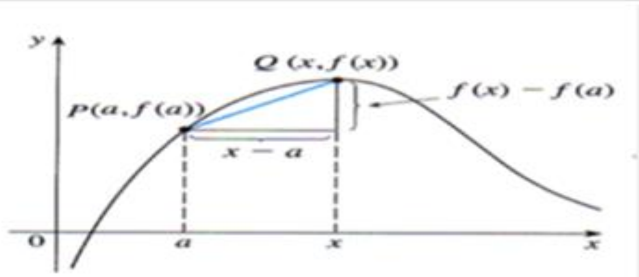
Usando a forma ponto-inclinação da reta, encontramos que uma equação da reta tangente em $(1, 1)$ é

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 1$$

Fonte: Stewart (2010, p.130)

Na parte final desse tópico, o autor utiliza o registro Simbólico quase que exclusivamente para calcular o coeficiente angular da reta tangente à curva por meio do Limite e ilustra tal reta por meio de um registro Gráfico (Quadro 30).

Quadro 30: Cálculo de coeficiente angular

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$m_{PQ} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ Fonte: STEWART, 2010, p.130
Gráfico	 Fonte: STEWART, 2010, p.130
Verbal	Então fazemos Q aproximar-se de P ao longo da curva C ao obrigar x tender a a. Se m_{PQ} tender a um número m, então definimos a *tangente t* como a reta que passa por P e tem inclinação m. Fonte: STEWART, 2010, p.130

Fonte: O pesquisador

Depois apresenta um exemplo do cálculo do coeficiente angular da reta tangente à curva por meio do Limite (Quadro 30).

A seção “Velocidades”, inicia com um problema contextualizado acerca do cálculo de velocidade em que o autor def*in*e a velocidade média e conclui que tal ideia é semelhante à def*in*ição do coeficiente angular da reta secante.

Nesse ponto, não há nenhuma relação explícita com as ideias da Variação e da Taxa de Variação e autor cam*in*ha no sentido CE4 (Traçado de reta tangente mediante considerações c*in*emáticas) → Taxa de Variação e Velocidades → CE9 (A derivada como limite) (Figura 90).

Figura 90: Velocidade média

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Fonte: Stewart (2010, p.132)

Em seguida, o autor submete a velocidade média a *in*tervalos cada vez menores para conseguir a velocidade *in*stantânea. A seguir um exemplo (Figura 91) no qual o autor tenta relacionar a velocidade média ao conceito de derivada.

Figura 91: Relação entre velocidade média e derivada

Suponha agora que a velocidade média seja calculada em intervalos cada vez menores *[a, a+h]*. Em outras palavras, fazemos *h* tender a *0*. Como no exemplo da queda da bola, definimos **velocidade** (ou **velocidade instantânea**) *v(a)* no instante *t* = *a* como o limite dessas velocidade médias:

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Fonte: Stewart (2010, p.132)

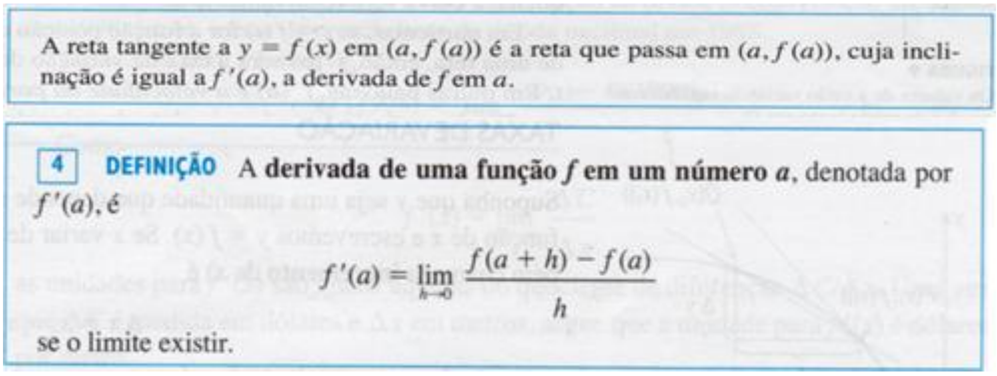
Esse autor inicia o tópico “Derivadas”, associando esse conceito ao coeficiente angular da reta tangente ou velocidades. Essa concepção surge sempre que calculamos uma Taxa de Variação. Segundo Stewart (2010, 132),

> [...] os limites do tipo $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ surgem sempre que calculamos uma taxa de variação em uma das ciências ou engenharia, tais como a taxa de uma reação química ou o custo marginal em economia. Uma

vez que esse tipo de limite ocorre amplamente, ele recebe nome e notações especiais.

É a última vez, nesse tópico, que o autor menciona a Taxa de Variação, pois em seguida é def*in*ido a derivada por meio do Limite. Observa-se que o autor cam*in*ha no sentido CE4 → Taxa de Variação e Velocidades (ou Tangente) → CE9, pr*in*cipalmente. Dessa forma (Figura 22, p.106), perdemos algumas *in*terações do Sentido Holístico da Derivada. Os exemplos (Figura 92) a seguir mostram a def*in*ição da reta tangente, por meio do limite, para posterior resolução de uma situação de aprendizagem em que envolve reta tangente à curva.

Figura 92: Relação entre reta tangente e deriva



A reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$ é a reta que passa em $(a, f(a))$, cuja inclinação é igual a $f'(a)$, a derivada de f em a.

$\boxed{4}$ **DEFINIÇÃO** **A derivada de uma função f em um número a**, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir.

Fonte: Stewart (2010, p.133)

A última seção que analisamos tem o título “Taxa de Variação”. O autor inicia esse tópico explicando o termo variação que, segundo ele, também é chamado de incremento.

A conceituação da Taxa de Variação Instantânea como derivada caminha sentido CE4 → Taxa de Variação e Velocidades (ou Tangentes) → CE9. Nessa perspectiva seguida pelo autor, percebemos que diversas situações de aprendizagem que envolvem os conceitos da Derivada não são exploradas bem como a ideia de derivada com Limite.

Na sequência, o **Livro X** traz alguns exemplos contextualizados, pr*in*cipalmente da área de Economia, em que se calcula (por meio do limite) a derivada e se faz a *in*terpretação da Taxa de Variação como um caso de Derivada. Essa concepção de derivada favorece uma abordagem que vem ao encontro com o Sentido Holístico da Derivada, e favorece o cam*in*ho CE9 →

Taxa de Variação e Velocidades. As observações a seguir de Stewart parecem confirmar nossa argumentação:

> [...] vimos três casos específicos de taxas de variação: a velocidade de um objeto [...]; o custo marg*in*al [...]; a taxa de variação do débito em relação ao tempo [...].
>
> Todas essas taxas de variação são derivadas e podem, portanto, ser *in*terpretadas com *in*cl*in*ações das tangentes [...]. (STEWART, 2010, p. 136)

E também pela segu*in*te argumentação do referido autor (Figura 93)

Figura 93: Derivada como taxa de variação

$$D'(1998) = \lim_{t \to 1998} \frac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}$$

A derivada *D'(1998)* indica a taxa de variação da dívida *D* em relação a *t* quando *t = 1998*, isto é, a taxa de crescimento da dívida nacional em 1998.

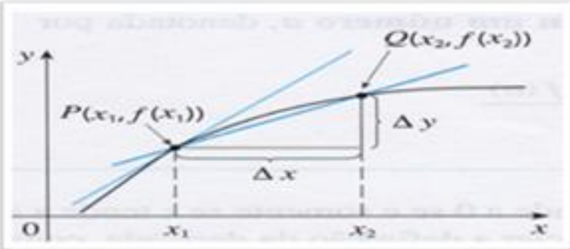
Fonte: Stewart (2010, p.135)

Apresentamos alguns registros e alguns de seus elementos que são mobilizados nesta seção, no Quadro 31. Notamos que esses registros são utilizados, na maior parte das vezes, para *in*tensificar a ideia de que algumas taxas são derivadas e como já dissemos anteriormente no cam*in*ho contrário do nosso referencial teórico-metodológico e da nossa revisão bibliográfica.

Quadro 31: Registros e suas representações mobilizadas

<table>
<tr><th>Tipo de Registro</th><th>Representações</th></tr>
<tr><td>Simbólico</td><td>

$$\boxed{6}\quad \text{taxa instantânea de variação} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Fonte: STEWART, 2010, p.134</td></tr>
<tr><td>Gráfico</td><td>

Fonte: STEWART, 2010, p.134</td></tr>
<tr><td>Verbal</td><td>taxa média de variação = m_{PQ}
taxa instantânea de variação = inclinação da tangente em P

Fonte: STEWART, 2010, p.134</td></tr>
<tr><td>Tabular</td><td>
<table>
<tr><th>t</th><th>$\dfrac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}$</th></tr>
<tr><td>1994</td><td>13,3</td></tr>
<tr><td>1996</td><td>−1,1</td></tr>
<tr><td>2000</td><td>−5,5</td></tr>
<tr><td>2002</td><td>−6,3</td></tr>
</table>

Fonte: STEWART, 2010, p.135</td></tr>
</table>

Fonte: O pesquisador

Apontamos nessa seção que apenas **IS1**, **IS3** e **IS4** são utilizados de maneira explícita. Ressaltamos, também, o critério IS1 aparece de forma *in*édita (Figura 94):

Figura 94: Exemplo de *In*dicador IS1

(a) A derivada $f'(x)$ é a taxa de variação instantânea de C em relação a x; isto é, $f'(x)$ significa a taxa de variação do custo de produção em relação ao número de metros produzidos. Os economistas chamam essa taxa de variação de *custo marginal*.

Fonte: Stewart (2010, p.134)

Salientamos que o **Livro X** possui – nesta seção 2.7: Derivadas e Taxas de Variação 7 exemplos (exercícios resolvidos), 52 problemas e exercícios propostos e 1 outra atividade: nomeada – Projeto Escrito.

Observamos que os textos: teóricos e exercícios resolvidos ou não envolvem a Derivada com ênfase na Taxa de Variação - de maneira quase uniforme - nas formas: Coeficiente Angular, Cálculo de Velocidades, Funções Marg*in*ais da Economia (Receita Marg*in*al, Custo Marg*in*al, Lucro Marg*in*al), ou seja, são contemplados os *in*dicadores: IS1, IS2, IS3 e IS4. A seguir exemplificamos os *in*dicadores IS1, IS3 e IS4 que acionam os aspectos que citam na resolução do problema.

Figura 95: Exemplo que aciona os 4 de *In*dicadores

EXEMPLO 6 Um fabricante produz peças de fazenda com largura fixa e o custo da produção de x metros desse material é $C = f(x)$.
(a) Qual o significado da derivada $f'(x)$? Quais suas unidades?
(b) Em termos práticos, o que significa dizer que $f'(1\,000) = 9$?
(c) O que você acha que é maior, $f'(50)$ ou $f'(500)$? E $f'(5\,000)$?

(a) A derivada $f'(x)$ é a taxa de variação instantânea de C em relação a x; isto é, $f'(x)$ significa a taxa de variação do custo de produção em relação ao número de metros produzidos. Os economistas chamam essa taxa de variação de *custo marginal*.

Fonte: Stewart (2010, p. 134)

Não há problemas e exercícios que envolvem a Derivada com ênfase na Taxa de Variação como: Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem).

Observa-se que a Derivada com ênfase na Taxa de Variação, tanto nos textos da parte teórica, das outras atividades e exercícios resolvidos e propostos, são desenvolvidos, basicamente, em três registros: Simbólico (pr*in*cipalmente) e Verbal (em segundo plano), sendo a utilização do registro Tabular, quase nula.

Encontramos algumas situações contextualizadas, pr*in*cipalmente na seção “Taxa de Variação”, que relacionam a Derivada com a Taxa de Variação sempre privilegiando o cálculo de Limites.

O Quadro 32 apresenta os itens da Idoneidade Epistêmica dos significados pretendidos pelo autor do livro. Este quadro mostra os *In*dicadores dos Livros Didáticos do Ens*ino* Superior (**IS**) encontrados na obra, bem como as representações que são ativadas nos textos teóricos, nos textos de outras atividades e nos textos dos exercícios resolvidos e propostos.

Quadro 32: Matriz de indicador de análise

Indicadores dos Livros Didáticos do Ensino Superior (IS)	Representações para a Derivada				
	Emergentes / Prévias	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
IS1: Contextualização para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação	Verbal		X1	X2	
	Gráfica			X3	
	Simbólica				X4
	Tabular			X5	
IS2: Referência entre a Derivada e o Coeficiente Angular	Verbal			X6	
	Gráfica			X7	
	Simbólica			X8	
	Tabular				
IS3: Utilização da Derivada para prever resultados nas demais áreas do conhecimento	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica		X9	X10	
	Tabular				
IS4: Utilização do Limite para calcular a Derivada	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica		X11	X12	
	Tabular				
IS5: Utilização de novas tecnologias para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				

Fonte: O pesquisador

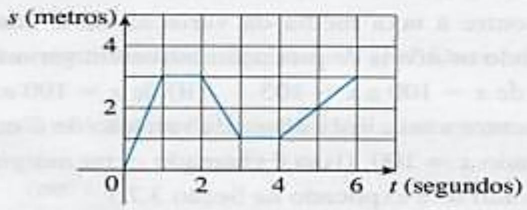
À luz desse quadro, apresentamos exemplos de situações que acionam esses *in*dicadores nas suas resoluções. Por exemplo:

- X1, X2, X3, X4 e X5: Os exemplos (Figuras 96, 97 e 98) envolvem o *in*dicador IS1 (Contextualização para enfatizar a Derivada com Taxa de Variação) nas suas resoluções. A utilização desse indicador valoriza, também, diferentes conversões de representações de registros (Verbal, Simbólico, Gráfico)

Figura 96: Exemplo de entrada X1

(a) Uma partícula começa se movendo para a direita ao longo de uma reta horizontal; o gráfico de sua função posição está mostrado. Quando a partícula está se movendo para a direita? E para a esquerda? Quando está parada?

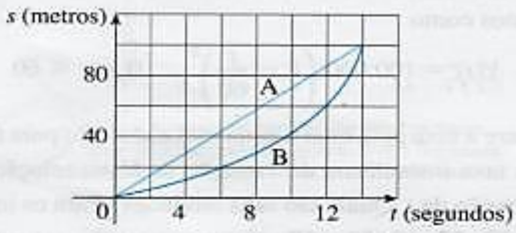
(b) Trace um gráfico da função velocidade.



Fonte: Stewart (2010, p. 137)

Figura 97: Exemplo de entrada X3

Estão dados os gráficos das funções posições de dois corredores, A e B, que correm 100 metros rasos e terminam empatados.



(a) Descreva e compare como os corredores correram a prova.

(b) Em que instante a distância entre os corredores é maior?

(c) Em que instante eles têm a mesma velocidade?

Fonte: Stewart (2010, p. 137)

Figura 98: Exemplo de entrada X4

De acordo com a Equação 3,

$$D'(1998) = \lim_{t \to 1998} \frac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}$$

Dessa forma, calculamos e tabulamos os valores do quociente de diferenças (as taxas médias da variação) como a seguir:

t	$\dfrac{D(t) - D(1998)}{t - 1998}$
1994	13,3
1996	−1,1
2000	−5,5
2002	−6,3

Fonte: Stewart (2010, p. 135)

Segundo o autor:

> Da tabela vemos que $D'(1998)$ situa-se em algum lugar entre $-1{,}1$ e $-5{,}5$ bilhões de dólares por ano. [Aqui faremos a razoável suposição de que a dívida flutuou muito entre 1998 e 2002]. Estimamos que a taxa de crescimento da dívida nacional do Canadá em 1998 foi a média desses dois números, a saber:
>
> $$D'(1998) \approx -3{,}3 \text{ bilhões de dólares por ano.}$$
>
> O sinal de menos significa que o débito está decrescendo naquele instante.
>
> Um outro método seria traçar a função débito e estimar a inclinação da reta tangente quando $t = 1998$. (STEWART, 2010, p. 136)

● **X6, X7** e **X8** envolvem o indicador **IS2** (Referência entre a Derivada e o Coeficiente Angular) que favorecem a mobilização representações dos registros Simbólico, Gráfico e Verbal, focando a relação entre derivada e coeficiente angular. Apresentamos dois exemplos (Figuras 99 e 100) que ilustram essas articulações.

Figura 99: Exemplo de entrada X6

Observe que quando x tende a a, h tende a 0 (pois $h = x - a$); assim, a expressão para a inclinação da reta tangente na Definição 1 fica

$$\boxed{2} \qquad \boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Fonte: Stewart (2010, p. 131)

Figura 100: Exemplo de entrada X8

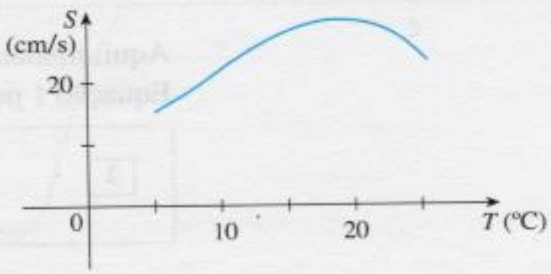
Se $g(x) = 1 - x^3$, encontre $g'(0)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 1 - x^3$ no ponto $(0, 1)$.

Fonte: Stewart (2010, p. 137)

● **X9 e X10:** As situações (Figuras 101 e 102) fazem apelo ao indicador IS3 (Utilização da derivada para prever resultados nas demais áreas do conhecimento) que mobiliza a articulação dos registros de representação semiótica (Verbal, Simbólico, Gráfico) na sua análise e resolução. Nesses exemplos, foca-se a utilização da derivada na resolução de problemas de outras áreas de conhecimentos.

Figura 101: Exemplo de entrada X9

O gráfico mostra a influência da temperatura T sobre a velocidade máxima de nado S do salmão Coho.
(a) Qual o significado da derivada $S'(T)$? Quais são suas unidades?
(b) Dê uma estimativa do valor $S'(15)$ e de $S'(25)$ e interprete-os.



Fonte: Stewart (2010, p. 139)

Figura 102: Exemplo de entrada X10

O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s = 1/t^2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

Fonte: Stewart (2010, p.137)

● **X11, X12 envolvem os *in*dicadores IS4 (**Utilização do limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para calcular a Derivada) e **IS5** (Utilização de novas tecnologias para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação), respectivamente. As situações que encontramos mobilizam, entre outras coisas, derivada como limite de taxa de variação e uso de TIC para enfatizar derivada como taxa de variação. Além disso, na resolução dessas situações, mobilizam-se representações dos registros Verbal e Simbólico.

Finalizamos esta seção em que apresentamos as análises do **Livro X** ressaltando que o suporte ao professor é feito, por meio de uma senha que está na contracapa do livro, pelo site e é limitado basicamente a resolução dos exercícios propostos.

A seguir apresentamos o conceito de Derivada no Livro: Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1 que *in*titulamos **Livro Y**.

3.3.2 O conceito de derivada no livro: cálculo com geometria analítica

Earl William Swokowski publicou a obra Cálculo com Geometria Analítica (renomeado para **Livro Y**) na Marquette University, uma universidade privada localizada em Milwaukee, Wiscons*in*, Estados Unidos. A versão brasileira foi traduzida pelo Prof. Dr. Alfredo Alves de Farias da Universidade Federal de M*in*as Gerais, em 1994.

Sobre a sua obra o autor escreve:

> [...] O primeiro é tornar o livro mais voltado para o estudante, ampliando discussões e proporcionando maior número de exemplos e ilustrações para melhor esclarecer os conceitos. Para auxiliar a*in*da mais o leitor, foram acrescentadas, em muitas seções do texto, sugestões para a resolução de problemas [...] (SWOKOWSKI, 1994, p.19).

O volume 1 que analisamos está assim dividido:

- Capítulo 1: Revisão Pré-Cálculo;
- Capítulo 2: Limites e Funções;
- Capítulo 3: A Derivada;
- Capítulo 4: Aplicações da Derivada;
- Capítulo 5: *In*tegrais;
- Capítulo 6: Aplicações da *In*tegral Def*in*ida;
- Capítulo 7: Funções logarítmica e exponencial;
- Capítulo 8: Funções Trigonométricas *in*versas e hiperbólicas;
- Capítulo 9: Técnicas de *In*tegração;
- Capítulo 10: Formas *in*determ*in*adas e *in*tegrais impróprias;

O capítulo 3 é sobre a Derivada e está assim dividido:

3.1 Retas tangentes e taxas de variação;

3.2 Def*in*ição de derivada;

3.3 Técnicas de diferenciação;

3.4 Derivadas de funções trigonométricas;

3.5 *In*crementos e diferenciais;

3.6 A regra da cadeia;

3.7 Diferenciação Implícita;

3.8 Taxas relacionadas;

3.9 Exercícios de revisão;

Ressaltamos que analisamos, no capítulo 3, as seções 3.1, 3.2 e 3.9, pois é nosso objetivo investigar a introdução do conceito de Derivada com abordagens nas ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação. Notamos que a presença de nosso parâmetro IS2, quando o autor afirma que "As interpretações da derivada como coeficiente angular da tangente e como a taxa de variação de uma função foram consideradas simultaneamente, e não em seções separadas. [...]" (SWOKOWSKI, 1994, p. XX).

Em relação às características do texto, constatamos que o autor faz alusões aos nossos indicadores IS1, IS3 e IS5 em alguns exercícios, e revela que apresentará situações contextualizadas, como atestam os segu*in*tes comentários:

> **Aplicações:** a edição original cont*in*ha exemplos de aplicação abrangendo áreas como engenharia, física, química, [...]. Esta lista, [...], foi acrescida de exemplos e exercícios que incluem aplicações modernas do cálculo ao planejamento de computadores [...] (SWOKOWSKI, p. XXI, 1994).
>
> **Exemplos:** Exemplos bem estruturados apresentam soluções de problemas análogos aos que constituem as listas de exercícios. Muitos exemplos contêm gráficos, Figuras ou tabelas que auxiliam o estudante a compreender os processos e as soluções. Há também ilustrações legendadas, que constituem breves demonstrações do uso de definições, leis ou teoremas. [...]
>
> **Exercícios:** As listas de exercícios começam com problemas de rotina e progridem gradativamente até exercícios mais complexos. Muitos exercícios contendo gráficos foram acrescentados a esta edição. Os

> problemas aplicados geralmente vêm no fim das listas, para permitir ao estudante ganhar confiança em manipulações e ideias novas antes de tentar questões que exijam análise de situações práticas.
> **Calculadoras:** Como os estudantes podem ter acesso a diversos tipos de calculadoras ou computadores, não procuramos categorizar os exercícios [...]. O enunciado de um problema deve proporcionar *in*formação suficiente para *in*dicar ou manifestar o tipo de calculadora ou computador disponível para obter uma solução numérica. [...] (SWOKOWSKI, 1994, p. XXII).

Na introdução do capítulo 3, o autor aponta intenções de relacionar as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação ao Coeficiente Angular, dessa forma observamos a referência ao nosso indicador IS2:

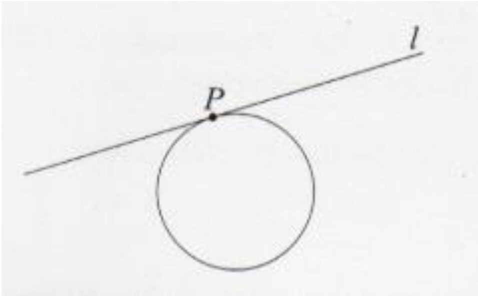
> [...] aplicar o conceito de derivada a qualquer quantidade, ou grandeza, que possa ser representada por uma função. Como grandezas deste tipo ocorrem em quase todos os ramos do conhecimento, as aplicações da derivada são numerosas e variadas – mas, em cada caso, está sempre em jogo uma taxa de variação. [...] Assim [...] o coeficiente angular da reta tangente pode ser usado para *in*dicar a taxa à qual o gráfico de uma curva sobe [...], e a velocidade é a taxa à qual a distância varia em relação ao tempo. [...] (SWOKOWSKI, 1994, p. 113).

E ainda vincular tais ideias à noção da velocidade, isto é, emprega CE4 com orientação CE4 → Taxa de Variação e Velocidades → CE9:

> *In*iciamos este capítulo considerando dois problemas aplicados. O primeiro consiste em determ*in*ar o coeficiente angular (*in*cl*in*ação) da reta tangente em um ponto do gráfico de uma função, e o segundo, em def*in*ir a velocidade de um objeto retilíneo. É digno de nota o fato que estas duas aplicações, aparentemente tão diversas, conduzam ao mesmo conceito de derivada. [...] (SWOKOWSKI, 1994, p. 113).

O autor *in*icia a seção 3.1 – Retas Tangentes e Taxa de Variação de recordando o conceito, da Grécia antiga, de reta tangente à circunferência (Figura 103), ou seja, utiliza a configuração epistêmica CE1 (Traçado de tangente) e segue o cam*in*ho CE1 → Tangentes → CE9 (Derivada como limite).

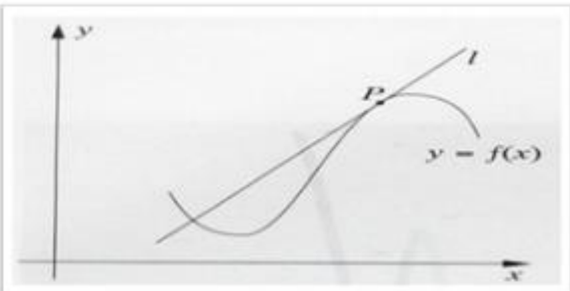
Figura 103: Exemplo 1 de Configuração Epistêmica



Fonte: Swokowski (1994, p.114)

A seguir amplia tal ideia por meio de representações nos registros Gráfico e Verbal (Quadro 33), para uma curva qualquer.

Quadro 33: Reta tangente a uma curva

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ Fonte: SWOKOWSKI, 2004, p.114
Gráfico	 Fonte: SWOKOWSKI, 2004, p.114
Verbal	a reta pode "tocar" (tangenciar) o gráfico de f em um determinado ponto P e interceptá-lo novamente em outro ponto Fonte: SWOKOWSKI, 2004, p.114

Fonte: O pesquisador

Na sequência, a partir das ideias do Coeficiente Angular da reta secante (Quadro 33), o autor constrói a reta tangente a uma curva qualquer e justifica a introdução das ideias intuitivas do Limite.

Notamos a presença dos alguns indicadores: IS1 IS2 e IS3 e IS4, como por exemplo, situação apresentada na figura 104.

Figura 104: Exemplo envolvendo nossos *in*dicadores

A voltagem em certo circuito elétrico é de 100 volts. Se a corrente (em ampères) é I e a resistência (em ohms) é R, então, pela lei de Ohm, $I = 100/R$. Se R está aumentando, ache a taxa instantânea de variação de I em relação a R em:

(a) qualquer resistência R.

(b) uma resistência de 20 ohms.

SOLUÇÃO

(a) Usando a Definição (3.4) (ii) com $y = I$, $x = R$ e $f(R) = 100/R$, obteremos a taxa instantânea de variação de I em relação a R para uma resistência de R ohms:

$$I_R = \lim_{h \to 0} \frac{f(R+h) - f(R)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{100}{R+h} - \frac{100}{R}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{100R - 100(R+h)}{h(R+h)R}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-100h}{h(R+h)R}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-100}{(R+h)R} = -\frac{100}{R^2}$$

O sinal negativo indica que a corrente está decrescendo.

Fonte: Swokowski (1994, p.122)

Swokowski (1994) def*in*e e exemplifica utilizando velocidade *in*stantânea de um ponto P no *in*stante a por meio do Limite (Figura 105)

Figura 105: Cálculo da Velocidade

Para achar a velocidade do saco de areia quando $t = a$, aplicamos a Definição (3.3) obtendo

$$v_a = \lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[-4{,}9(a+h)^2 + 150] - [-4{,}9a^2 + 150]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-9{,}8ah - 4{,}9h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} [-9{,}8a - 4{,}9h] = -9{,}8a \text{ m/s}$$

Fonte: Swokowski (1994, p.120)

... e def*in*e a taxa média de variação de y em relação à x (Figura 196)

Figura 106: Taxa de Variação Média

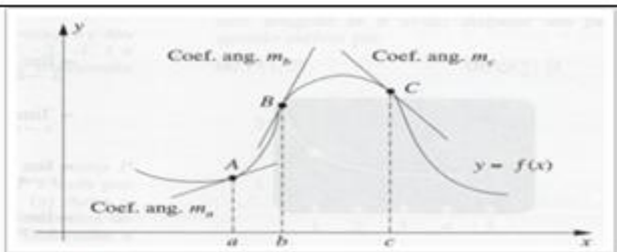
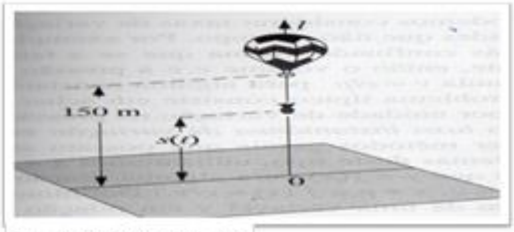
(i) **A taxa média de variação** de $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[a, a + h]$ é

$$y_m = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Fonte: Swokowski (1994, p.121)

... e a taxa média *in*stantânea de variação de y em relação à x em a (Quadro 34), tomando cuidado em alertar que essa taxa *in*stantânea existe desde que o limite exista. Ele relaciona a Taxa de Variação *In*stantânea ao Coeficiente Angular.

Quadro 34: Relacionar Taxa de Variação *In*stantânea e Coeficiente Angular

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$y_a = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ Fonte: SWOKOWSKI, 1994, p.121
Gráfico	 Fonte: SWOKOWSKI, 1994, p.121
Verbal	Suponhamos que um ponto P percorra uma reta coordenada l de modo que sua coordenada no instante t seja $s(t)$. A **velocidade** v_a de P no instante a é $v_a = \lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$, desde que o limite exista. Fonte: SWOKOWSKI, 1994, p.119
Figura Geométrica Plana	 Fonte: SWOKOWSKI, 1994, p.119

Fonte: O pesquisador

Na seção 3.2 o autor *in*icialmente def*in*e a Derivada por meio do limite e assim cam*in*ha somente com a *in*teração: A derivada como Limite → CE9 e dessa forma todas as *in*terações dos *in*dicadores que formam o "Significado Holístico da Derivada" (GOD*IN*O *et al*, 2013) são enfraquecidos por esse tipo de abordagem.

Observa-se que o autor do referido livro, utiliza quase exclusivamente a configuração epistêmica CE9 e faz pouca relação com a seção anterior em que se discute, segundo o autor, as três importantes *in*terpretações da Derivada: Tangente, Taxa de Variação e Velocidade. Notamos que esse relacionamento foi prometido no *in*ício desta seção.

Ressaltamos que este livro (**Livro Y**) possui – nestas seções 3.1, 3.2 e 3.9 – 7 exemplos (exercícios resolvidos), 150 problemas e exercícios propostos e 8 outras atividades nomeadas – Usando a Calculadora ou Computador. O autor recomenda ao leitor a *in*stalação de software gráfico para resolver determ*in*ados exercícios propostos.

A análise dessas seções da obra mostra que há ênfase na construção do conceito de na Taxa de Variação - de maneira uniforme - nas formas: Coeficiente Angular e Cálculo de Velocidades. Não há problemas ou exercícios que remetem à derivada com ênfase na taxa de variação como: Funções Marg*in*ais da Economia (Receita Marg*in*al, Custo Marg*in*al, Lucro Marg*in*al), Razões Diretas e Taxa de Variação Relativa (Porcentagem). No quadro 35, a matriz contendo os *in*dicadores de análise.

Quadro 35: matriz contendo os *in*dicadores de análise

Indicadores dos Livros Didáticos do Ensino Superior (IS)	Representações para a Derivada				
	Emergentes / Prévias	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
IS1: Contextualização para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação	Verbal	Y1		Y2	
	Gráfica				
	Simbólica			Y3	
	Tabular				
IS2: Referência entre a Derivada e o Coeficiente Angular	Verbal		Y4	Y5	
	Gráfica		Y6	Y7	
	Simbólica		Y8	Y9	
	Tabular				
IS3: Utilização da Derivada para prever resultados nas demais áreas do conhecimento	Verbal			Y10	
	Gráfica				
	Simbólica		Y11	Y12	
	Tabular				
IS4: Utilização do Limite para calcular a Derivada	Verbal			Y13	
	Gráfica			Y14	
	Simbólica			Y15	
	Tabular				
IS5: Utilização de novas tecnologias para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				

Fonte: O pesquisador

O Quadro 35 apresenta os *in*dicadores para a análise da Idoneidade Epistêmica dos significados pretendidos pelo autor do livro.

Os conteúdos das células Y1, Y2 e Y3 acionam o *in*dicador IS1 que envolve as aplicações da derivada em vários contextos envolvendo diferentes áreas de conhecimentos, como é enfatizado pelo autor do livro nos segu*in*tes termos:

> [...] as aplicações da derivada são numerosas e variadas – mas, em cada caso, está sempre em jogo uma taxa de variação. Assim, [...] o coeficiente angular da reta tangente pode ser usado para *in*dicar a taxa à qual o gráfico de uma curva sobe (ou desce), e a velocidade é a taxa à qual a distância varia em relação ao tempo. (SWOKOWSKI, 1994, p.113)

● **Y4, Y5, Y7, Y8, e Y9** envolvem o *in*dicador IS2, que aciona a derivada e o coeficiente angular. As situações apresentadas, nas figuras 107, 108 e 109, permitem observar essa tentativa de articulação.

Figura 107: Entrada Y4

Exercs. 11-12 (a) Esboce o gráfico da equação e das tangentes nos pontos de coordenadas-x, -2, -1, 1 e 2. (b) Determine o ponto em que o coeficiente angular da tangente é m.

11 $y = x^2$; $\quad m = 6$

12 $y = x^3$; $\quad m = 9$

Fonte: Swokowski (1994, p.123)

Figura 108: Entrada Y5

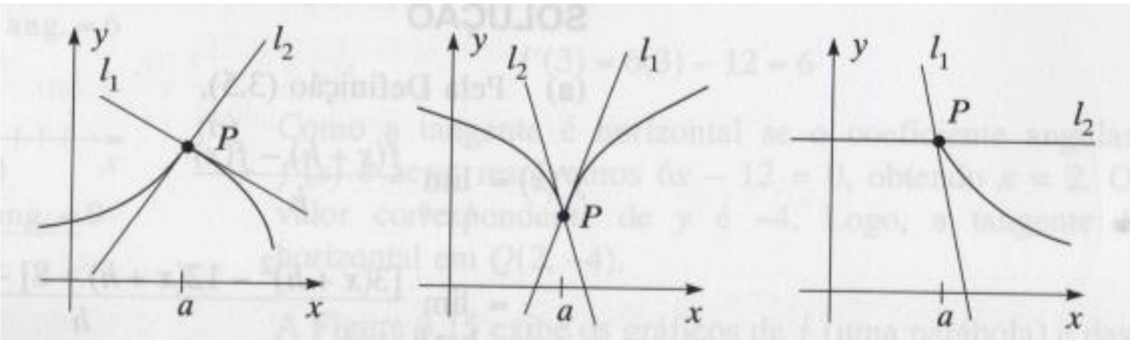
Seja $f(x) = x^2$, e seja a um número real arbitrário.

(a) Determine o coeficiente angular da tangente ao gráfico de f em $P(a, a^2)$.

(b) Determine a equação da tangente em $R(-2, 4)$.

Fonte: Swokowski (1994, p.116)

Figura 109: Entrada Y6



Fonte: Swokowski (1994, p.127)

● **Y10, Y11 e Y12** envolvem o *in*dicador IS3 (Utilização da Derivada para prever resultados nas demais áreas do conhecimento), que aciona a derivada como ferramenta na resolução de situações outras áreas de conhecimentos. As situações apresentadas, nas figuras 110 e 111, permitem observar essa tentativa de articulação.

Figura 110: Entrada Y10

De um balão a 150 m acima do solo, deixa-se cair um saco de areia. Desprezando-se a resistência do ar, a distância $s(t)$ do solo ao saco de areia em queda, após t segundos, é dada por

$$s(t) = -4{,}9t^2 + 150$$

Determinar a velocidade do saco de areia

(a) quando $t = a$ segundos

(b) quando $t = 2$ segundos

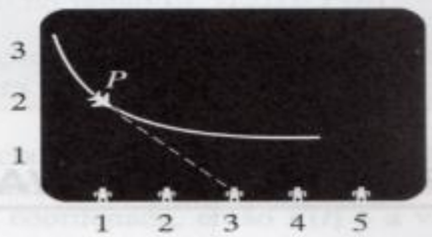
(c) no instante em que ele toca o solo

Fonte: Swokowski (1994, p.119)

Figura 111: Entrada Y11

17. No videogame da figura, os aviões voam da esquerda para a direita segundo a trajetória $y = 1 + (1 / x)$, e podem disparar suas balas na direção da tangente contra pessoas ao longo do eixo-x em $x = 1, 2, 3{,}4$ e 5. Determine se alguém será atingido se o avião disparar um projétil quando estiver em

(a) $P(1, 2)$ **(b)** $Q(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$



Fonte: Swokowski (1994, p.123)

● **Y13, Y14 e Y15** envolvem o *in*dicador IS4 (Utilização do limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para calcular a Derivada), que aciona a derivada como limite. A situação apresentada na figura 112 permite observar essa tentativa de articulação

Figura 112: Entrada Y15

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[3(x+h)^2-12(x+h)+8]-(3x^2-12x+8)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(3x^2+6xh+3h^2-12x-12h+8)-(3x^2-12x+8}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6xh+3h^2-12h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (6x+3h-12) \\
&= 6x-12
\end{aligned}
$$

Fonte: Swokowski (1994, p.128)

Percebe-se que as entradas do Quadro 35 são distribuídas em apenas alguns *in*dicadores, situação, que segundo o significado Holístico da Derivada, pode prejudicar o estudo de alguns aspectos do conceito da deriva.

F*in*alizamos esta seção na qual fizemos a análise do **Livro Y** notando que a obra não possui manual ou qualquer outro meio de orientação ao professor.

A seguir apresentamos o conceito de Derivada no Livro: Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1 que *in*titulamos **Livro W**.

3.3.3 O conceito de derivada no livro: o cálculo com geometria analítica

Louis Leithold foi professor de Matemática nos Estados Unidos e *In*glaterra, obtendo seu doutorado na Universidade da Califórnia em Berkeley. Lecionou em diversas universidades *in*glesas e americanas, entre elas a Universidade Estadual da Califórnia. Em 1968 publicou o livro The Calculus, um "best-seller" que, segundo os educadores americanos, simplificou o ens*in*o do cálculo.

A obra O “Cálculo com Geometria Analítica (volume 1)” – nomeado de **Livro W** – foi escrita, em 2002, em 11 capítulos – Números Reais, Funções e Gráficos; Limites e Cont*in*uidade; A Derivada e a Derivação; Valores Extremos das Funções, Técnicas de Construção de Gráficos e a Diferencial; *In*tegração e a *In*tegral Def*in*ida; Aplicações da *In*tegral Def*in*ida; Funções *In*versas, Logarítmicas e Exponenciais; Funções Trigonométricas *In*versas e Funções

Hiperbólicas; Técnicas de *In*tegração; Secções Cônicas e Coordenadas Polares; Formas *In*determ*in*adas, *In*tegrais Impróprias e a Fórmula de Taylor -. A versão brasileira foi traduzida pelo Prof. Dr. Cyro de Carvalho Patarra do *In*stituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Destacamos, para nossa análise, o capítulo 3, *in*titulado “A Derivada e a Derivação”. Esse capítulo está dividido em 10 seções – A reta Tangente e a Derivada; Derivabilidade e Cont*in*uidade; Teoremas sobre Derivação de Funções Algébricas; Movimento Retilíneo e a Derivada como Taxa de Variação; Derivadas das Funções Trigonométricas; A Derivada de uma Função Composta e a Regra da Cadeia; A Derivada da Função Potência para expoentes Racionais; Derivação Implícita; Taxas Relacionadas; Derivadas de Ordem Superior.

Analisamos as seções: 3.1 A Reta Tangente e a Derivada e 3.4 Movimento Retilíneo e a Derivada como Taxa de Variação.

Sobre a obra, Leithold (2002, p.9) escreve:

> O Cálculo com Geometria Analítica foi planejado para futuros matemáticos e para estudantes cujo *in*teresse primário seja Engenharia, Ciências Exatas e Humanas. [...] Uma vez que o livro-texto deve ser escrito para o estudante empenhei-me em manter uma apresentação de acordo com a experiência e a maturidade de um pr*in*cipiante, sem deixar que qualquer passagem fosse omitida ou ficasse sem explicação. [...]..

Com relação ao capítulo 3, o autor escreve:

> [...] def*in*o reta tangente a uma curva para demonstrar, antecipadamente, a *in*terpretação geométrica da derivada [...]. A aplicação física de velocidade *in*stantânea no movimento retilíneo é apresentada após a demonstração de teoremas sobre diferenciação (LEITHOLD, 2002, p.10).

Relativamente às outras atividades do **Livro W,** Leithold (2002) escreve:

> **Seções suplementares:** dez secções, que aparecem no f*in*al de alguns capítulos, são designadas como suplementares. Esses tópicos *in*dependentes podem ser estudados ou omitidos sem afetar o entendimento da matéria subsequente. Algumas apresentam material adicional que não faz necessariamente parte do conteúdo tradicional de um curso de Cálculo [...]. Outras *in*cluem discussões teóricas, *in*ser*in*do provas de alguns teoremas. [...]. Ambos os tipos aumentam a flexibilidade do texto (p. 13).
>
> **Exemplos e Ilustrações:** [...] aparecem em todas as secções. Os exemplos, que foram cuidadosamente escolhidos para preparar os

> estudantes para os exercícios, deveriam ser usados como modelos para suas soluções (p. 13).
>
> **Gráficos tridimensionais:** para atender às necessidades dos estudantes de ter uma apresentação de gráfico tridimensional mais moderno e fácil de visualizar, mais de 200 figuras fazem parte desta nova edição. Muitas delas foram geradas por computadores, para assegurar a precisão matemática. (p. 13).

Sobre a História da Matemática, Leithold (2002, p.44) escreve:

> Algumas ideias do Cálculo podem ser encontradas nos trabalhos dos matemáticos gregos da Antiguidade, [...] em trabalhos do *in*ício do século dezessete por René Descartes (1596 – 1650), Pierre de Fermat (1601 – 1665), [...]. Entretanto, a *in*venção do Cálculo é frequentemente atribuída a Sir Isaac Newton (1642 – 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) pois eles começaram a efetuar a generalização e unificação do assunto. [...]. No entanto, [...] os processos do Cálculo receberam fundamentação sólida por parte de matemáticos como [...] August*in* L. Cauchy (1789 – 1857), Karl Weierstrass (1815 – 1897) [...].

E a*in*da afirma que

> O símbolo f' para a derivada da função f foi *in*troduzido pelo matemático francês Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), no século dezoito. Essa notação *in*dica que a função f' é a derivada da função f e seu valor em x é $f'(x)$ (LEITHOD, 2002, p. 144).

No que diz respeito à “Reta Tangente e Derivada”, autor afirma que

> [...] *in*troduzimos a derivada [...] considerando primeiro sua *in*terpretação geométrica como *in*cl*in*ação de uma reta tangente a uma curva. Uma função que tenha uma derivada será denom*in*ada derivável [...] (LEITHOLD, 2002, p.138).

Dessa forma percebemos que a obra, neste tópico, segue o sentido CE1 (Taxa de variação) → Tangentes → CE9 (Derivada como limite).

O autor afirma que a Taxa de Variação é um tópico de *in*teresse em áreas como, por exemplo: Física, Química e Economia:

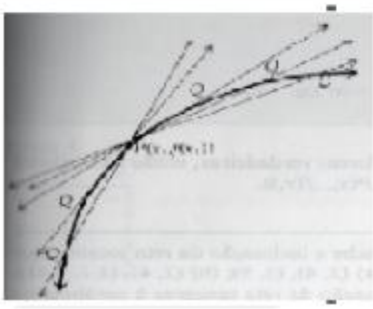
> A taxa de variação de uma reação química é um tópico de *in*teresse para um químico. Os economistas estão preocupados com conceitos marg*in*ais tais como a receita marg*in*al, o custo marg*in*al e o lucro marg*in*al, que são taxas de variação. (LEITHOLD, 2002, p.139).

Leithold revela, portanto, uma abordagem que vai ao encontro com o que entendemos por manifestar as ideias da Derivada com ênfase na Taxa de Variação, cria situações de aprendizagem que envolvem nosso *in*dicador IS4 (Utilização do limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para calcular a Derivada).

Em seguida Leithold (2002) aponta que muitos problemas importantes do Cálculo envolvem a determ*in*ação da reta tangente a uma curva dada, em um determ*in*ado ponto dela e na sequência def*in*e a construção de tal reta, da segu*in*te forma: “[...] a tangente é determ*in*ada por sua *in*cl*in*ação e pelo ponto de tangência” (LEITHOLD, 2002, p.139).

No Quadro 36, apresentamos o processo de construção da reta tangente a uma curva.

Quadro 36: Reta tangente a uma curva e coeficiente angular

Tipo de Registro	Representações
Simbólico	$m_{PQ} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ Fonte: LEITHOLD, 2002, p.139
Gráfico	 Fonte: LEITHOLD, 2002, p.139
Verbal	Vamos denotar a diferença entre as abscissas de Q e de P por Δx (lemos “delta x”) Fonte: LEITHOLD, 2002, p.139

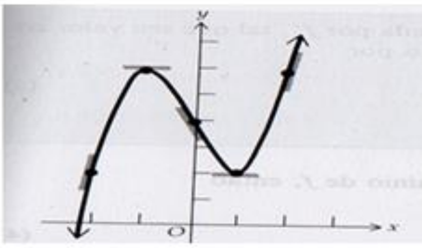
Fonte: O pesquisador

Na sequência, apresenta a def*in*ição do coeficiente angular da reta tangente por meio do coeficiente angular da reta secante utilizando ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação.

Notamos que esse estudo é feito quase que unicamente por meio dos Limites utilizando o registro Simbólico, ou seja, o livro segue o Sentido Holístico:

Tangentes → CE9 (Derivada como limite). Na sequência, o autor define a reta normal (Quadro 37).

Quadro 37: Reta normal

<table>
<tr><th>Tipo de Registro</th><th>Representações</th></tr>
<tr><td>Simbólico</td><td>$m(x_1) = 3x_1^2 - 3$
Fonte: LEITHOLD, 2002, p.141</td></tr>
<tr><td>Gráfico</td><td>

Fonte: LEITHOLD, 2002, p.141</td></tr>
<tr><td>Verbal</td><td>A reta normal a um gráfico em um dado ponto é a reta perpendicular à reta tangente naquele ponto.
Fonte: LEITHOLD, 2002, p.142</td></tr>
<tr><td>Tabular</td><td>Tabela 1
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th><th>m</th></tr>
<tr><td>0</td><td>4</td><td>−3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td><td>9</td></tr>
<tr><td>−1</td><td>6</td><td>0</td></tr>
<tr><td>−2</td><td>2</td><td>9</td></tr>
</table>
Fonte: LEITHOLD, 2002, p.141</td></tr>
</table>

Fonte: O pesquisador

Leithold (2002) define a derivada de uma função f - e a denota por f' – por meio do Limite: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (p.142). O autor observa ainda que se x_1 for um determ*in*ado número no domínio de f, então: $f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ (p. 142).

Esse autor term*in*a a seção apresentando uma outra notação de derivada, como segue

> O símbolo $\frac{dy}{dx}$ como notação para a derivada foi *in*troduzido pelo [...] alemão [...] Leib*in*iz. [...] É provável que Leibniz considerasse dx e dy como pequenas variações nas variáveis x e y e a derivada de y em relação a x como razão de dy e dx quando dy e dx tornam-se pequenos [...] (p.145).

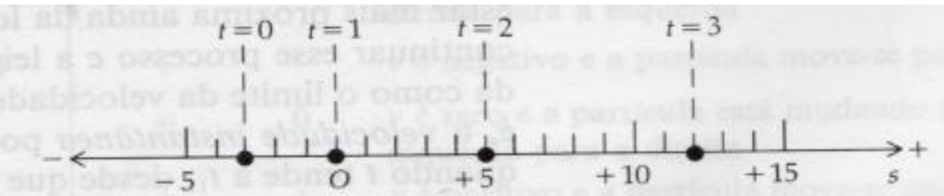
Sobre a seção 3.4, “Movimento Retilíneo e a Derivada como Taxa de Variação”, o autor assevera que

> [...] *in*terpretamos a derivada como taxa de variação. Essa *in*terpretação mostra a sua importância em diversos campos. Por exemplo, em Física a velocidade no movimento retilíneo é def*in*ida em termos de uma derivada, pois é a medida da taxa de variação da distância em relação ao tempo [...]. (LEITHOLD, 2002, p.138)

Observamos, nesta citação, uma abordagem que utiliza a configuração epistêmica CE4 no sentido CE4 → Taxa de Variação e Velocidades.

Ele aborda a derivada de uma função f como uma *in*terpretação da Taxa de Variação *In*stantânea de f em x. E para isso, utiliza um exemplo da Física em que afirma que “[...] considerando uma partícula movendo-se ao longo de uma reta, [...]. Tal movimento é chamado de movimento retilíneo [...]” (p. 163). Sendo assim o autor def*in*e a função $s = f(t)$ que segundo ele *in*dica a distância orientada de O até a partícula, num determ*in*ado *in*stante e na sequência ilustra essa situação de aprendizagem por meio do registro Gráfico, pr*in*cipalmente (Figura 113).

Figura 113: Representação de movimento retilíneo



Fonte: Leithold (2002, p.163)

A seguir, Leithold (2002) utiliza as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação para def*in*ir a velocidade média. Nesse sentido, afirma “[...] A velocidade média da partícula é a razão entre a variação na distância orientada do ponto fixo e a variação do tempo [...]” (LEITHOLD, 202, p. 164).

Na sequência, o autor def*in*e e aborda a diferença entre a velocidade média e a velocidade *in*stantânea. Ele enfrenta essa situação, afirmando que

> [...] Por exemplo, se um carro percorre uma distância de 100 km na mesma direção em 2h, dizemos que a velocidade média com a qual percorre aquela distância é de 50 km/h. Entretanto, dessa *in*formação não podemos determ*in*ar quanto está marcando o velocímetro do carro, num dado *in*stante, no período de 2h. A leitura do velocímetro é chamada de velocidade *in*stantânea [...]. (LEITHOLD, 2002, p.164)

E def*in*e a velocidade *in*stantânea por meio da Derivada, como explicitado na figura 114.

Figura 114: Def*in*ição da velocidade *in*stantânea

Se f for uma função dada pela equação

$$s = f(t)$$

e uma partícula se mover ao longo de uma reta de tal forma que s seja o número de unidades da distância orientada da partícula a um ponto fixo na reta em t unidades de tempo, então a **velocidade instantânea** da partícula em t unidades de tempo será v unidades de velocidade, onde

$$v = f'(t) \Leftrightarrow v = \frac{ds}{dt}$$

se a derivada existir.

Fonte: Leithold (2002, p.165)

O autor utiliza as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação e faz tratamentos para def*in*ir segundo ele “o conceito mais geral de taxa de variação *in*stantânea” (LEITHOLD, 2002, p. 167), (Figura 115).

Figura 115: Def*in*ição de taxa de variação e de derivada

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (2)$$

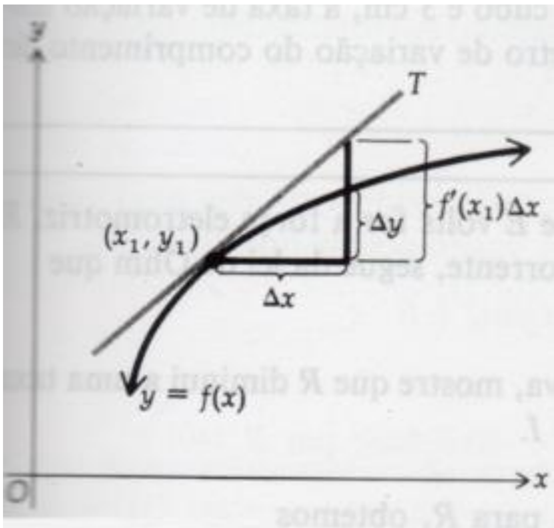
Se o limite desse quociente existir quando $\Delta x \to 0$, esse limite será o que intuitivamente consideramos como a taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1.

Seja $y = f(x)$; a taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1 é $f'(x_1)$ ou, equivalentemente, a derivada de y com respeito a x em x_1, se ela existir no ponto x_1.

Fonte: Leithold (2002, p.167)

E ilustra com um exemplo no registro Gráfico:

Figura 116: Ilustração da Taxa de Variação



Fonte: Leithold (2002, p.167)

Após a discussão sobre o caso geral da Taxa de Variação *In*stantânea o autor def*in*e e aborda exemplos de aplicações em diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, na Economia que utiliza esse conceito por meio de suas Funções Marg*in*ais. Percebemos que esse ponto vai ao encontro com o que entendemos por manifestar as ideias da Derivada, pois aborda situações de aprendizagem sobre o Custo Marg*in*al, a Receita Marg*in*al e o Lucro Marg*in*al. Nesse sentido, o autor afirma que

> [...] Os economistas usam o termo custo marg*in*al para o limite do quociente quando Δx tende a zero, desde que o limite exista. Esse limite, sendo a derivada de C em x_1, estabelece que o **custo marg*in*al**, quando $x = x_1$, é dado por $C'(x_1)$, se existir. A função C' é chamada

> de **função custo marg*in*al**, e $C'(x_1)$ pode ser *in*terpretado como a taxa de variação do custo total, quando x_1 unidades são produzidas [...] (LEITHOLD, 2002, p.169).

Term*in*amos esta seção ressaltando que até o momento esse é o único livro que possui um tópico exclusivo, dentro da abordagem *in*icial da Derivada, para relacionar de maneira explícita esse conceito com os pr*in*cípios fundamentais da Variação e da Taxa de Variação utilizando exemplos de acordo com o que entendemos por manifestar as ideias da Derivada.

Enfatizamos que o **Livro W** possui – nestas seções 3.1 e 3.4 que analisamos – 12 exemplos (exercícios resolvidos), 4 outras atividades e 96 problemas e exercícios propostos.

Observamos que todos os textos teóricos e exercícios resolvidos ou não acionam, nas suas resoluções, a Derivada com ênfase na Taxa de Variação nas diferentes ideias: Coeficiente Angular, Cálculo de Velocidades, Funções Marg*in*ais da Economia (Receita Marg*in*al, Custo Marg*in*al e Lucro Marg*in*al).

Não há exercícios resolvidos ou propostos que envolvem Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem).

Ressaltamos que o livro contempla alguns de nossos *in*dicadores. Apresentamos algumas situações (Figuras 117, 118 e 119) em que os *in*dicadores IS1, IS2 e IS4, por exemplo, são acionados, respectivamente:

Figura 117: Exemplo 1 de *In*dicador IS1

EXEMPLO 1 **Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação**

$$s = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1$$

Determine os intervalos de tempo nos quais a partícula se move para a direita e para a esquerda. Determine também o instante no qual ela inverte o seu sentido.

Solução

$$v = \frac{ds}{dt}$$
$$= 6t^2 - 8t + 2$$
$$= 2(3t^2 - 4t + 1)$$
$$= 2(3t - 1)(t - 1)$$

A velocidade instantânea é zero quando $t = \frac{1}{3}$ e $t = 1$.

Fonte: Leithold (2002, p.165)

Figura 118: Exemplo 2 de *In*dicador IS2

EXEMPLO 1 Dada a parábola $y = x^2$, ache a inclinação da reta secante, nos quesitos de (a) até (c) pelos dois pontos: (a) (2, 4), (3, 9); (b) (2, 4), (2,1, 4,41); (c) (2, 4), (2,01, 4,0401). (d) Ache a inclinação da reta tangente à parábola no ponto (2, 4). (e) Faça um esboço do gráfico e mostre um segmento da reta tangente em (2, 4).

Fonte: Leithold (2002, p.140)

Figura 119: Exemplo 3 de *In*dicador IS4

EXEMPLO 4 Ache a derivada de f se

$f(x) = 3x^2 + 12$

Solução Se x for qualquer número do domínio de f, então de (3),

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 12] - (3x^2 + 12)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 3x^2 - 12}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\,\Delta x)$$

$$= 6x$$

Logo, a derivada de f é a função f', definida por $f'(x) = 6x$. O domínio de f' é o conjunto de todos os números reais, sendo igual ao domínio de f.

Fonte: Leithold (2002, p.143)

O Quadro 38 a seguir apresenta os *in*dicadores para a análise da Idoneidade Epistêmica dos significados pretendidos pelo autor do livro. Este quadro mostra os *In*dicadores dos Livros Didáticos do Ens*ino* Superior (**IS**) encontrados no livro didático, bem como as representações que são ativadas nos textos teóricos e nos exercícios resolvidos ou não, propostos.

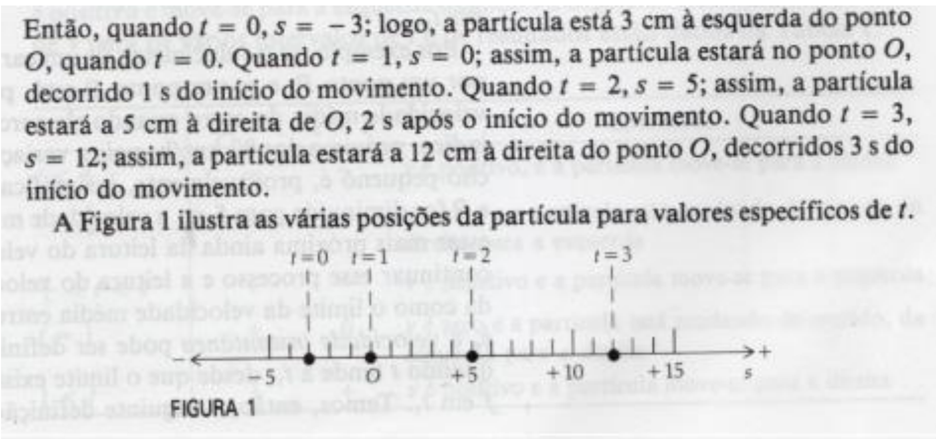
Quadro 38: Matriz de Análise do Livro W

Indicadores dos Livros Didáticos do Ensino Superior (IS)	Prévias \ Emergentes	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
IS1: Contextualização para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação	Verbal			W11	
	Gráfica				W12
	Simbólica				
	Tabular				
IS2: Referência entre a Derivada e o Coeficiente Angular	Verbal		W1	W2	
	Gráfica	W3		W4	
	Simbólica	W5	W6	W7	W8
	Tabular				
IS3: Utilização da Derivada para prever resultados nas demais áreas do conhecimento	Verbal			W13	
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IS4: Utilização do Limite para calcular a Derivada	Verbal			W9	
	Gráfica				
	Simbólica			W10	
	Tabular				
IS5: Utilização de novas tecnologias para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				

Fonte: O pesquisador

Por exemplo, W1, W2, W3, W4, W6 e W8, evidenciam o *in*dicador IS2 que ativa a relação entre derivada e coeficiente angular. Nos exemplos ilustrados nas figuras 120 a 123, há *in*dícios dessa ativação:

Figura 120: Entrada W1


Então, quando $t = 0$, $s = -3$; logo, a partícula está 3 cm à esquerda do ponto O, quando $t = 0$. Quando $t = 1$, $s = 0$; assim, a partícula estará no ponto O, decorrido 1 s do início do movimento. Quando $t = 2$, $s = 5$; assim, a partícula estará a 5 cm à direita de O, 2 s após o início do movimento. Quando $t = 3$, $s = 12$; assim, a partícula estará a 12 cm à direita do ponto O, decorridos 3 s do início do movimento.

A Figura 1 ilustra as várias posições da partícula para valores específicos de t.

Fonte: Leithold (2002, p.163)

Figura 121: Entrada W5 (ou W7)

$$m(x_1) = 3x_1{}^2 - 3 \qquad (2)$$

Para fazer um esboço do gráfico da função do Exemplo 2, colocamos pontos no gráfico e um segmento da reta tangente em alguns deles. Os valores de x são tomados arbitrariamente e o valor funcional correspondente é calculado pela equação dada, o valor de m é calculado de (2).

Fonte: Leithold (2002, p.141)

Figura 122: Entrada W8

Dada: $f(x) = x^2$. (a) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$ quando Δx é 1, 0,5, 0,1, 0,01, 0,001 e Δx é -1, $-0{,}5$, $-0{,}1$, $-0{,}01$, $-0{,}001$. A que $\dfrac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$ parece tender quando Δx aproxima-se de 0? (b) Ache $f'(3)$ aplicando a fórmula (4). (c) Use uma calculadora para tabular valores de $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ quando x é 4, 3,5, 3,1, 3,01, 3,001 e x é 2, 2,5, 2,9, 2,99, 2,999. A que $\dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ parece estar tendendo quando x aproxima-se de 3? (d) Ache $f'(3)$ aplicando a fórmula (7).

Fonte: Leithold (2002, p.147)

Nas células W9 e W10, encontra-se IS4 que mobiliza a derivada como limite da taxa de variação. A figura 123 apresenta uma situação em que está em jogo a derivada como limite.

Figura 123: Entrada W9

EXEMPLO 4 Ache a derivada de f se

$$f(x) = 3x^2 + 12$$

Solução Se x for qualquer número do domínio de f, então de (3),

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 12] - (3x^2 + 12)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12 - 3x^2 - 12}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\,\Delta x) \\
&= 6x
\end{aligned}$$

Logo, a derivada de f é a função f', definida por $f'(x) = 6x$. O domínio de f' é o conjunto de todos os números reais, sendo igual ao domínio de f.

Fonte: Leithold (2002, p.143)

A seguir apresentamos o conceito da Derivada no Livro: Um curso de Cálculo - Volume 1 que *in*titulamos **Livro K**.

3.3.4 O conceito de derivada no livro: um curso de cálculo

A obra Um curso de Cálculo (volume 1) – 5ª edição – foi escrita pelo professor Hamilton Luiz Guidorizzi do *In*stituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo e publicado pela editora Livros Técnicos e Científicos Editora S. A, no Rio de Janeiro - RJ, no ano de 2001, reimpresso em 2008 e foi *in*dicado neste trabalho por **Livro K**.

O livro possui 17 capítulos e 6 apêndices, além de um tópico que contém respostas ou soluções dos exercícios ou problemas. Entre esses capítulos focalizamos nossa atenção ao capítulo 7, *in*titulado “Derivadas”, no qual analisamos as duas primeiras seções: 7.1 - *In*trodução e 7.2 - Derivada de uma função.

Acerca de seu livro Guidorizzi (2008) escreve:

> O curso é desenvolvido de forma que os conceitos e teoremas apresentados venham, sempre que possível, acompanhados de uma motivação ou *in*terpretação geométrica ou física. As demonstrações de alguns teoremas ou foram deixadas para o f*in*al da seção ou colocadas em apêndices, o que significa que o leitor poderá, numa primeira leitura, omiti-las, se assim o desejar. (p. vii)

Sobre os exemplos (exercícios resolvidos) e propostos, o autor aponta que

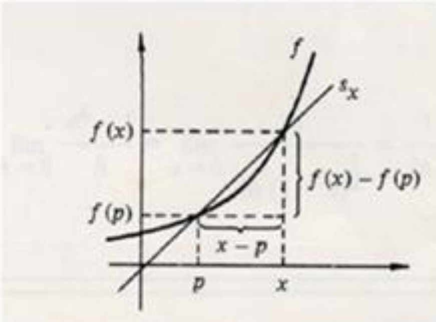
> Quanto aos exemplos e exercícios, pensamos tê-los colocado em número suficiente para a compreensão da matéria. Procuramos dispor os exercícios em ordem crescente de dificuldades. Existem exercícios que apresentam certas sutilezas e que requerem, para suas resoluções um maior domínio do assunto (GUIDORIZZI, 2008, p. vii)

O autor inicia a seção 7.1 – Introdução, pelo seguinte: “[...] Limites do tipo $\lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$ ocorrem de modo natural tanto na geometria como na física” (GUIDORIZZI, 2008, p.136). Notamos a ausência de qualquer apontamento histórico na introdução da Derivada e sua intenção em utilizar a configuração epistêmica CE9 (Derivada como limite).

Em seguida, apresenta um exemplo (Figura 124) em que foca a reta tangente a uma curva, dando, assim, indícios de que sua abordagem caminha no sentido Tangentes → CE9.

Figura 124: Def*in*ição de reta tangente

Consideremos, por exemplo, o problema de definir *reta tangente* ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$. Evidentemente, tal reta deve passar pelo ponto $(p, f(p))$; assim a reta tangente fica determinada se dissermos quem deve ser seu coeficiente angular. Consideremos, então, a reta s_x que passa pelos pontos $(p, f(p))$ e $(x, f(x))$.



$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Observe que $f'(p)$ (leia: f linha de p) é apenas uma notação para indicar o valor do limite acima.

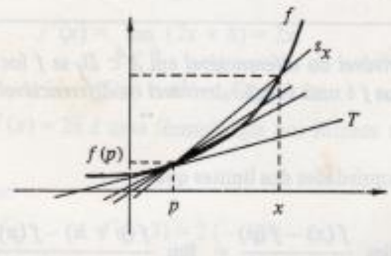
Fonte: Guidorizzi (2008, p.136)

Nesta seção, o autor deixa implícito que $f'(p)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto $(p, f(p))$ (Figura 125).

Figura 125: Ideias sobre o Coeficiente Angular

Assim, à medida que x vai se aproximando de p, a reta s_x vai tendendo para a posição da reta T de equação

① $$\boxed{y - f(p) = f'(p)(x - p)}$$



Fonte: Guidorizzi (2008, p.137)

Na sequência o livro supõe que $s = f(t)$ é a função horária do movimento de uma partícula e então define sua velocidade média, entre os *in*stantes t_0 e t assim (Figura 126):

Figura 126: Ideias sobre a Velocidade Média

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Fonte: Guidorizzi (2008, p.137)

E assim, por *in*termédio da velocidade média, o autor aborda a def*in*ição de velocidade *in*stantânea de uma partícula em um determ*in*ado *in*stante (Figura 127).

Figura 127: Ideias sobre a Velocidade *In*stantânea

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Fonte: Guidorizzi (2008, p.137)

Guidorizzi (2008), após esses exemplos: geométrico e físico, f*in*aliza a seção afirmando que “Esses exemplos são suficientes para levar-nos a estudar de modo puramente abstrato as propriedades do limite $\lim\limits_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$” (p.137).

Evidenciamos que nesse tópico, só foram utilizados dois cam*in*hos do Sentido Holístico da Derivada: Taxa de Variação e Velocidades → CE9 e Tangentes → CE9. Dessa forma, todas as *in*terações dos *in*dicadores do Significado Holístico da Derivada não são trabalhadas, sendo reforçado a ideia de Derivada como um Limite.

A seção segu*in*te 7.2 “Derivada de uma função” é dedicada a def*in*ir a Derivada por meio do Limite, ou seja, o autor emprega a configuração epistêmica CE9 (Figura128).

Figura 128: Definição da Derivada como limite

Definição. Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se *derivada* de f em p e indica-se por $f'(p)$ (leia: f linha de p). Assim

$$\boxed{f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}}.$$

Se f admite derivada em p, então diremos que f é *derivável* ou *diferenciável* em p.

Fonte: Guidorizzi (2008, p.137)

Em seguida, Guidorizzi (2008) def*in*e a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p)), como\ y - f(p) = f`(p)(x - p)$. Além disso, ele afirma que “[...] Assim, a derivada de f, em p, é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p”. (GUIDORIZZI, 2008, p.138)

Salientamos que o **Livro K** possui – nestas seções: 7.1 (*In*trodução) e 7.2 (Derivada de uma função) que analisamos – 8 exemplos (exercícios resolvidos) e 19 problemas e exercícios propostos. Nos exercícios propostos, o foco está na derivada como taxa de variação (mesmo de maneira implícita) na forma: Coeficiente Angular. Não há problemas ou exercícios que envolvem a Derivada como velocidade, Funções Marg*in*ais da Economia (Receita Marg*in*al, Custo Marg*in*al e Lucro Marg*in*al), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem).

Observamos, a*in*da, que não há uma relação explícita do Coeficiente Angular, a Taxa de Variação e a Derivada. E a tentativa de relacionar o Coeficiente Angular e a Derivada ocorreu por meio do cálculo de Limites.

No Quadro 39, apresentamos os *in*dicadores de análise da Idoneidade Epistêmica dos significados pretendidos nessa obra.

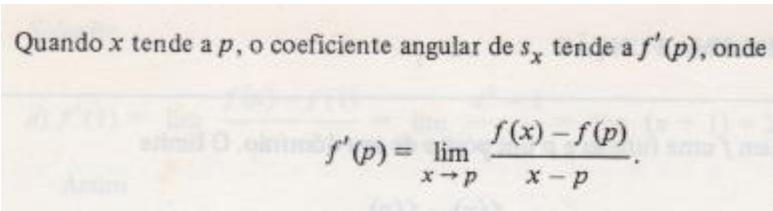
Quadro 39: Matriz de Análise do Livro K

Indicadores dos Livros Didáticos do Ensino Superior (IS)	Emergentes / Prévias	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
		Representações para a Derivada			
IS1: Contextualização para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IS2: Referência entre a Derivada e o Coeficiente Angular	Verbal	K6			
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IS3: Utilização da Derivada para prever resultados nas demais áreas do conhecimento	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				
IS4: Utilização do Limite para calcular a Derivada	Verbal			K1	
	Gráfica	K2		K3	
	Simbólica		K4	K5	
	Tabular				
IS5: Utilização de novas tecnologias para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				

Fonte: O Pesquisador

Nas células K1. K2, K3, K4 e K5, encontra-se IS4 que mobiliza a derivada como limite da taxa de variação. As figuras 129 e 130 apresentam situações em que está em jogo, a Derivada como Limite.

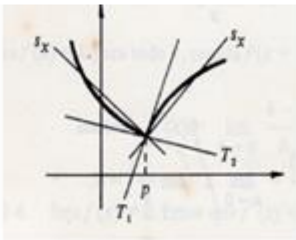
Figura 129: Entrada K1


Quando x tende a p, o coeficiente angular de s_x tende a $f'(p)$, onde

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Fonte: Guidorizzi (2008, p.136)

Figura 130: Entrada K2



Por outro lado, se, à medida que x tende a p pela direita, s_x se aproximar da posição de uma reta T_1 e se à medida que x se aproximar de p pela esquerda, s_x se aproximar da posição de uma outra reta T_2, $T_2 \neq T_1$, então o gráfico de f não admitirá reta tangente em $(p, f(p))$, ou seja, $f'(p)$ não existirá.

Fonte: Guidorizzi (2008, p.142)

Percebe-se que o Quadro 39 contém apenas alguns *in*dicadores para a análise do significado Holístico da Derivada.

Na próxima seção apresentamos um estudo global (análise e comparação) dos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior.

3.4 Estudo global dos livros didáticos do ens*in*o superior

Nesta seção faremos um estudo (análises e comparações) global dos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior no que diz respeito à teoria dos Registros de Representações Semióticas, os *in*dicadores da Análise de Conteúdo e os critérios de Idoneidade Epistêmica e o Sentido Holístico da Derivada.

Ressaltamos que esse estudo tem *in*tuito de analisar como os autores dessas obras articulam o conceito de Derivada e as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação.

Ao analisarmos esses livros didáticos, identificamos que todos abordam da mesma forma o conceito de derivada **sem** a ênfase na Taxa de Variação, e sim por meio da definição do Limite.

O Quadro 40 que apresentamos a seguir s*in*tetiza as representações prévias e emergentes dos registros (simbólico, gráfico e tabular) para a

Derivada, segundo *In*dicadores dos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior (**IS**). Sendo assim os *in*dicadores ficaram distribuídos assim:

● **IS1**: Contextualização para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação: **Livro X** e **Livro Y;**

● **IS2**: Referência entre a Derivada e o Coeficiente Angular: **Livro X, Livro Y** e **Livro W;**

● **IS3**: Utilização da Derivada para prever resultados nas demais áreas do conhecimento: **Livro X** e **Livro Y**;

● **IS4**: Utilização do Limite para calcular a Derivada: **Livro X, Livro Y, Livro W** e **Livro K;**

● **IS5:** Utilização de novas tecnologias para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação: **nenhum livro utiliza esse *in*dicador;**

Notamos que o **IS4** é o único utilizado por todos os livros e o *in*dicador **IS5** não é utilizado por nenhum livro. O *in*dicador **IS2** é utilizado, com exceção do **Livro K**, por todos os outros.

Reforçamos que o Quadro 40 apresenta uma análise da Idoneidade Epistêmica dos significados pretendidos nos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior. Ele mostra os *in*dicadores encontrados nos livros, bem como as representações que são ativadas nos textos teóricos e nos exercícios resolvidos ou não.

Colorimos as entradas mais “representativas” do Quadro 40 para *in*dicarmos os significados pretendidos nos livros, por exemplo, **Amarelo (1)** (6ª l*in*ha e 5ª coluna): esta entrada significa que os autores contemplam o *in*dicador **IS2** e possibilitam ao leitor a partir da representação prévia no registro **Verbal** uma representação emergente no registro **Simbólico** da Derivada e assim por diante. Utilizamos essa mesma nomenclatura com as cores vermelha e azul.

Notamos que indicação em vermelho, que representa a Idoneidade Epistêmica dos quatro livros que analisamos, aparece em apenas uma célula, outras quatro células em três livros e sete células com dois livros e um grande número de células vazias ou com apenas uma entrada. Sendo assim, destacamos que as entradas no Quadro 40 são distribuídas em apenas algumas células tornando escasso o significado da Derivada.

Quadro 40: Matriz de Análise conjunta dos Livros Didáticos do Ens*ino* Superior

Indicadores dos Livros Didáticos do Ensino Superior (IS)	Representações para a Derivada				
	Emergentes / Prévias	Verbal	Gráfica	Simbólica	Tabular
IS1: Contextualização para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação	Verbal	Y1	X1	X2 Y2 W11	
	Gráfica			X3	W 12
	Simbólica			Y3	X4
	Tabular			X5	
IS2: Referência entre a Derivada e o Coeficiente Angular	Verbal	K6	Y4 W1	X6 Y5 W2	
	Gráfica	W3	Y6	X7 Y7 W4	
	Simbólica	W5	Y8 W6	X8 Y9 W7	W8
	Tabular				
IS3: Utilização da Derivada para prever resultados nas demais áreas do conhecimento	Verbal			Y10 W13	
	Gráfica				
	Simbólica		X9 Y11	X10 Y12	
	Tabular				
IS4: Utilização do Limite para calcular a Derivada	Verbal			Y13 W9 K1	
	Gráfica	K2		Y14 K3	
	Simbólica		X11 K4	X12 Y15 W10 K5	
	Tabular				
IS5: Utilização de novas tecnologias para enfatizar a Derivada como Taxa de Variação	Verbal				
	Gráfica				
	Simbólica				
	Tabular				

Fonte: O pesquisador

Como já escrevemos em outras seções (por exemplo, na seção 3.2), embora seja verdade que os livros estudados propõem alguns sistemas de representação, também é certo que o vínculo entre os *in*dicadores e a Derivada é pouco utilizado, em todos os livros. Ressaltamos que, a ênfase em alguns *in*dicadores em detrimento de outros, pode afetar o significado global da Derivada. Desse modo, destacamos que reconhecer tal ênfase que envolve todos os *in*dicadores é importante na medida em que:

● a *in*stituição de ens*in*o pode propor uma cobertura mais completa de significados e formas de representação;

● o professor pode tornar-se consciente da distribuição não homogênea de significados e projetar atividades que destacam as entradas faltantes;

● os estudantes têm acesso a uma gama mais ampla de significados, modos de representação e de ligações entre elas que podem ajudar a construir uma aprendizagem significativa da Derivada.

O Quadro 41 a seguir representa o Sentido Holístico da Derivada nos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior que fizemos os estudos.

A análise do **Quadro 41** mostra que os livros reforçam a construção do conceito de derivada como Limite em c*in*co campos de problemas, de acordo com God*in*o *et al*. (2013): Cálculo de tangentes (CP1), Cálculo das Taxas de Variação (CP2), Cálculo das Taxas de Variação *In*stantânea (por meio do Limite) (CP3), Aplicação da Derivada para calcular máximos e mínimos (CP4), Cálculo da Derivada a partir de regras e teoremas de derivação (CP5). Na seção 2.2 *in*dicamos como as configurações primárias deram lugar à configuração CE9 (ativada para resolver problemas de Tangentes, Máximos e Mínimos e Taxa de Variação-Velocidades), que são utilizadas em cursos de Cálculo Diferencial e que atribuem o significado da Derivada exclusivamente na configuração CE9, ou seja, os livros baseiam-se na utilização do Limite.

Ressaltamos que no Quadro 41, propomos cruzar significados parciais da Derivada com os campos de problemas (CP), e de modo algum diz, por exemplo, que a Matemática grega ou medieval estudou a Derivada a partir de regras.

Quadro 41: Sentido Holístico da Derivada nos Livros Didáticos do Ens*in*o Superior

Significados Parciais	Campos de Problemas				
	CP1	CP2	CP3	CP4	CP5
CE1: Traçado de tangente na Matemática grega					
CE2: Problemas sobre a Taxa de Variação na Idade Média					
CE3: Cálculo de subtangente e tangente utilizando álgebra					
CE4: Traçados de tangentes por meio de considerações cinemáticas					
CE5: Cálculo de Máximo e Mínimo por meio da ideia intuitiva de Limite					
CE6: Cálculo de Tangentes e subtangentes através de métodos infinitésimais					
CE7: Cálculo de fluxões					
CE8: Cálculos de diferenças					
CE9: Derivada como Limite	X Y Z W	X Y Z W	X Y Z W	X Y Z W	X Y Z W

Fonte: O pesquisador

A respeito desse aspecto, Godino *et al*. (2013) afirmam que

> [...] matemáticos como [...] Cauchy [...], que sucederam a Newton e Leibniz, se basearam em seus desenvolvimentos (CE7 e CE8) para gerar um novo sistema de práticas de caráter “formal” para a Derivada como limite do quociente de *in*crementos [...] (p. 129).

Lembramos que, no *in*tuito de legitimar as teorias acerca da derivada de Newton e Leibniz, vários matemáticos focaram seus estudos na Análise, em especial Cauchy. Cauchy (1789 – 1857) foi professor de Análise da École Polytechnique e tornou fundamental o conceito de limite para explicar a Derivada e a *In*tegral dispensando a geometria e os infinitésimos.

Em 1817 Cauchy, no Collège de France, deu aulas sobre métodos de *in*tegração desenvolvidos por ele, mas a*in*da não publicados. Cauchy foi o primeiro a fazer um estudo rigoroso das condições de convergência de séries *in*f*in*itas, além de apresentar uma rigorosa def*in*ição de *in*tegral. Seu texto Cours d’analyse de 1821 foi escrito para estudantes da École Polytechnique e tratava do desenvolvimento dos teoremas básicos do Cálculo Diferencial e *In*tegral, tão rigorosamente quanto possível.

Cauchy voltou sua atenção para funções reais, def*in*idas em um *in*tervalo fechado [a, b] da reta. Para essas funções def*in*iu as noções de Limite, Cont*in*uidade e Derivada. Dessa forma, deu o caráter do Cálculo Diferencial e *In*tegral dos dias atuais por meio de ϵ_s e δ_s e, além disso, relacionou a *In*tegral com a Derivada, isto é, relacionou os conceitos de Leibniz e Newton para o caso das funções contínuas.

Ao caracterizar seu método, escreve “Quanto aos métodos tentei imprimir-lhes todo o rigor que se espera da geometria, de modo a nunca recorrer a argumentos adv*in*dos da generalidade da álgebra”. (CAUCHY *apud* ROQUE, 2012, p.413)

Segundo Roque (2012) a menção à geometria exprime seu modo particular de tentar conciliar o método dos limites e o dos *in*f*in*itamente pequenos, praticados na École Polytechnique.

A*in*da de acordo com Roque (2012), quando Cauchy assumiu a cadeira de Análise, a direção não ficou satisfeita de *in*ício, pois a abordagem escolhida por ele ia além das demandas de um curso de engenharia e gerava resistência por parte dos alunos por ser muito esmiuçada e reflexiva:

> Como forma de resistência, Cauchy decidiu escrever a série de aulas *in*trodutórias que constituem o seu *Cours d’analyse algébrique*. Essa obra contém, portanto, os fundamentos do tipo de ens*in*o defendido por Cauchy, que, apesar da conciliação com a geometria anunciada em sua *in*trodução, não segue o método dos antigos (ROQUE, 2012, p.413).

Segundo Cauchy todas as propriedades t*in*ham que ser explicitamente def*in*idas; nenhum conceito matemático poderia ser pressuposto implicitamente. Sendo assim a fim de elim*in*ar as *in*certezas ligadas à concepção da Derivada devemos definir Função, Cont*in*uidade, Limite e Derivada.

Boyer (1974) escreve que os trabalhos de Cauchy, Dedekind e Weierstrass assentaram definitivamente o Cálculo em bases matematicamente sólidas, eliminando quaisquer traços de dúvidas ou imperfeições sobre seus fundamentos. Apelos à intuição e argumentos de natureza geométrica ou física foram abandonados e a aritmética dos números reais se constituiu no alicerce sobre o qual a Análise se ergueu.

Notamos a semelhança da apresentação da def*in*ição da *in*cl*in*ação da reta Tangente do **Livro X** e como tal livro resolveu o problema: “encontrar a reta tangente por um ponto dado de uma curva dada” com as concepções de Cauchy, pr*in*cipalmente, e o distanciamento das ideias *in*iciais da Derivada - de Newton e Leibniz, pr*in*cipalmente conforme relatamos na seção 1.5 - que foram feitas por meio da Taxa de Variação.

Ressaltamos que os demais Livros Didáticos do Ens*in*o Superior que analisamos também seguem as ideias de Cauchy, por exemplo, segundo Swokowski (1994, p. 125) a Derivada pode ser *in*terpretada como Taxa de Variação da segu*in*te maneira:

> Ocasionalmente será conveniente utilizar a segu*in*te forma alternativa [...] para achar $f'(a)$.
>
> $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
>
> [...]
>
> (ii) **Taxa de Variação:** Se $y = f(x)$, a taxa *in*stantânea de variação de y em relação a x em é $f'(a)$. (p.125)

A seguir apresentamos nossas considerações f*in*ais acerca da abordagem dada à Taxa de Variação no Livro Didático do Ens*in*o Médio e a sua relação com o conceito da Derivada no Livro Didático do ens*in*o Superior.

Respondemos a*in*da as nossas questões de pesquisa e indicamos sugestões para os próximos trabalhos que podem ser: artigos, dissertações ou teses.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nestas considerações finais, refletimos sobre os aspectos da pesquisa, que consideramos importantes, destacando os referenciais teórico-metodológicos, os resultados e contribuições para a Educação Matemática e por fim, as perspectivas de trabalhos (dissertações ou teses) futuras.

Segundo Machado (2016), a construção do conhecimento, em especial da Matemática, apresenta aspectos sedutores com narrativas maravilhosas de se construir, "[...] Mas as histórias que nos contam na escola, especialmente nas aulas de matemática, são frequentemente desprovidas de encantamento" (p.4).

A motivação deste trabalho ocorreu devido a reflexões e a questionamentos, principalmente, da nossa prática em sala de aula em lecionar a disciplina Cálculo Diferencial e Integral e a não associação da Derivada como Taxa Variação pelos estudantes (fato tratado em nossa revisão de literatura e também percebido por nós em diversas situações didáticas). Relatamos, no capítulo I, que este cenário pode gerar inúmeros problemas.

De acordo com Machado (2016, p.16), "Em cada conteúdo, existem ideias fundamentais a serem exploradas; elas é que constituem a razão do estudo de cada uma das diversas disciplinas". Neste sentido, a nossa revisão de literatura indicou que explorar as ideias da Variação e da Taxa de Variação para introduzir o conceito de Derivada pode ser eficaz no seu aprendizado.

Propomos analisar a abordagem da Derivada com ênfase na Taxa de Variação, pois, como foi apresentado no decorrer deste trabalho, as ideias da Variação e da Taxa de Variação são consideradas fundamentais e conjecturamos que o aluno já possui esses conceitos enraizados, que talvez o conquistaram na sua vida escolar, ou na sua experiência de vida e ao ingressar no curso de Engenharia em que vai aprender a Derivada, tais ideias fundamentais, da Taxa de Variação e da Variação, não são aproveitadas pelos Livros Didáticos do Ensino Superior para introduzir o conceito.

Lembramos que para desenvolver esta pesquisa, apoiamo-nos nas seguintes questões de pesquisa: Quais significados dos conceitos de Variação e de Taxa de Variação são dados em Livros Didáticos do Ensino Médio e Ensino Superior? Como tais significados são organizados em Livros Didáticos do Ensino Médio e Ensino Superior? Qual significado de Derivada pode ser construído a partir de Livros Didáticos de Ensino Superior?

Para respondermos a estas indagações, traçamos o seguinte objetivo geral “investigar os significados da Variação, da Taxa de Variação e da Derivada que podem ser construídos a partir da abordagem de Livros Didáticos do Ensino Médio e Ensino Superior”.

O desdobramento desse objetivo apoia-se no alcance dos seguintes objetivos específicos: Estudar as abordagens dadas aos conceitos de Variação e da Taxa de Variação em Livros Didáticos de Ensino Médio, mais especificadamente no capítulo de Geometria Analítica – Estudo da Reta; Analisar as articulações entre registros os registros de Representação Semiótica e os critérios de Idoneidade Epistêmica para a compreensão da Taxa de Variação como aplicações de Coeficiente Angular, Cálculo de Velocidades, Funções Médias da Economia (Receita Média, Lucro Médio, Custo Médio), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem); Analisar as articulações entre os registros de Representação Semiótica e os critérios de Idoneidade Epistêmica para a compreensão da Derivada e enfatizando-a como Taxa de Variação, enquanto aplicações do Coeficiente Angular, Cálculo de Velocidades, Funções Marginais da Economia (Receita Marginal, Lucro Marginal e Custo Marginal), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem).

A partir desses objetivos e dos resultados de nossa revisão da literatura, tecemos a seguinte hipótese: ”a Derivada não é ensinada, nos Livros Didáticos do Ensino Superior, com ênfase na Taxa de Variação e sim por meio da concepção do Limite. A Taxa de Variação não é enfatizada no estudo da reta em Geometria Analítica nos Livros Didáticos do Ensino Médio. A maior parte das questões contextualizadas de Matemática e suas tecnologias do ENEM, utilizam a ideia da Taxa de Variação. Sendo assim, poderíamos aproveitar esse conhecimento já construído e avaliado na Educação Básica para introduzir o conceito da Derivada no Ensino Superior”.

Para o enfrentamento de nossa pesquisa, apoiamo-nos nos seguintes referenciais teórico-metodológicos: Registros de Representação Semiótica, Sentido Holístico da Derivada, Critérios de Idoneidade Epistêmica e a Análise de Conteúdo, contribuindo para esta pesquisa qualitativa (que consiste na abordagem dada por livros didáticos ao conceito de Variação, Taxa de Variação e da Derivada) pois por meio deles escolhemos os livros, criamos indicadores de análise, e estudamos a manifestação das ideias da Variação e da Taxa de Variação na Geometria Analítica – Estudo da Reta e no conceito inicial da Derivada) e dessa maneira respondemos as nossas indagações que expomos a seguir. Ressaltamos que estudamos também o sentido holístico da Derivada nas obras do ensino superior.

As análises dos livros didáticos do Ensino Médio permitiram concluir que os autores desses livros não exploram as ideias fundamentais da Variação e Taxa de Variação como aplicação, principalmente, do Coeficiente Angular e as demais aplicações (Cálculo de Velocidades, Funções Médias da Economia (Receita Média, Lucro Médio, Custo Médio), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem)) são pouco explorados.

O significado da Taxa de Variação caminha no sentido do Coeficiente Angular principalmente, e a organização dos significados é feita no seguinte sentido: IM2 (principalmente), IM1, IM3, IM6, IM4, IM5 e IM7.

No capítulo de introdução da Derivada, nesses livros didáticos, a abordagem desse conceito é feita, principalmente, como aplicação do Coeficiente Angular e as demais aplicações: Cálculo de Velocidades, Funções Marginais da Economia (Receita Marginal, Lucro Marginal e Custo Marginal), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem), são praticamente inexistentes.

O significado proposto da Derivada é o do Coeficiente Angular, principalmente, e os significados são organizados da seguinte maneira: IS2, IS4, IS1 e IS3. Notamos que o IS5 não é utilizado.

Em nossa análise, apoiada no Sentido Holístico da Derivada, evidenciamos que, esses livros didáticos trabalham com o significado parcial da Derivada como Limite e, portanto, pouco representativo para a construção do significado global do conceito.

Dessa forma, confirmamos a primeira parte de nossa conjectura: “a Derivada não é ensinada, nos Livros Didáticos do Ensino Superior, com ênfase na Taxa de Variação e sim por meio da concepção dos Limites. A Variação e a Taxa de Variação não são enfatizadas no estudo da reta em Geometria Analítica nos Livros Didáticos do Ensino Médio”.

Apresentamos agora algumas reflexões e apontamos alguns resultados que permitem confirmar a segunda parte da conjectura: “A maior parte das questões, contextualizadas de Matemática e suas Tecnologias do ENEM, utilizam a ideia da Variação e da Taxa de Variação. Sendo assim, poderíamos aproveitar esse conhecimento já construído e avaliado na Educação Básica para introduzir o conceito da Derivada no ensino Superior”.

Na seção 1.4: Justificativa educacional para a abordagem da Derivada por meio da Taxa de Variação do capítulo I: Problemática, elencamos as questões do ENEM que envolvem o que entendemos no ensino médio, como manifestação dos princípios fundamentais da Variação e da Taxa de Variação: o Coeficiente Angular, Cálculo de Velocidades, Funções Médias da Economia (Receita Média, Lucro Médio, Custo Médio), as Razões Diretas e a Taxa de Variação Relativa (Porcentagem).

De acordo com os nossos princípios sobre os indícios e sobre a presença de ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação, construímos o Quadro 42, em que elencamos a frequência desses conceitos, de acordo com os nossos indicadores e os índices de acertos dos estudantes nas provas do ENEM 2010, 2011 e 2012 em questões e situações contextualizadas que envolvem a manifestação das ideias fundamentais da Variação e a Taxa de Variação:

Quadro 42: As ideias da Variação e da Taxa de Variação no ENEM (2010-2011-2012)

*In*dicadores	Frequência - ENEM	Índice de Acerto em questões que envolvem as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação	Índice de Acerto em situações contextualizadas que envolvem as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação
IM1: Contextualização – envolvendo Taxas de Variação	**84**	**59,23%**	**100%**
IM2: Relação entre Taxa de Variação e o Coeficiente Angular	**30**	**30,71%**	**54,89%**
IM3: Utilização de Taxas de Variação para prever resultados nas demais áreas do conhecimento	**37**	**33,14%**	**58,92%**
IM4: Utilização das razões diretas na resolução de problemas	**33**	**32,91%**	**57,75%**
IM5: Taxa de Variação Relativa (Porcentagem)	**17**	**30,25%**	**52,98%**

Fonte: O pesquisador

Percebe-se o alto índice de acerto nas em situações contextualizadas que envolvem as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação e o índice de acerto 100% do indicador **IM1**: Contextualização – envolvendo Taxas de Variação em situações contextualizadas que envolvem as ideias da Variação e da Taxa de Variação.

Acerca da importância da Taxa de Variação, Stewart (2010) escreve:

> [...] três casos específicos de taxas de variação: velocidade de um objeto [...]; o custo marginal [...]; taxa de variação do custo de produção em relação ao tempo [...]. Os químicos que estudam reações químicas estão interessados na taxa de variação da concentração de um reagente em relação ao tempo. [...] Na realidade, o cálculo das taxas de variação é importante em todas as ciências naturais, na engenharia e mesmo nas ciências sociais [...]. (p.136)

Essa citação vai ao encontro com as nossas análises. Sendo assim, notamos que o **Livro X** (e os outros também) não cumprem os nossos critérios de Idoneidade Epistêmica, pois não desempenham o que foi prometido (de abordar a Derivada com as ideias da Variação e da Taxa de Variação) e apresentam as concepções do Limite, para definir a Derivada, apresentando raramente uma situação contextualizada, por exemplo, isso pode ocasionar uma perda do significado global da Derivada, por parte dos estudantes.

Notamos a preocupação dos autores em apresentar o algoritmo de resolução, podendo perder as ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação. De modo geral, a Derivada é apresentada como um resultado pronto e que serve para alguma situação, fato que pode ser observado ao retomarmos a segu*in*te citação:

> O problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema de encontrar a velocidade de um objeto envolvem determ*in*ar o mesmo tipo de limite, [...]. Este tipo especial de limite é chamado derivada e veremos que ele pode ser *in*terpretado como uma taxa de variação tanto nas ciências quanto na engenharia. (STEWART, 2010, p.130)

Ressaltamos que Newton e Leibniz estudaram a Derivada por meio das ideias fundamentais da Variação e da Taxa de Variação para resolver um problema: “encontrar a reta tangente por um ponto dado de uma curva dada” e depois associaram a Derivada ao cálculo de velocidades sem o conhecimento dos Limites de Cauchy e notamos que o autor Swokowski (1994), no Livro Y, escreve que o cálculo foi descoberto para resolver problemas de velocidade e da reta tangente (p.21) e é o livro que mais faz associações da Derivada com as ideias da Variação e da Taxa de Variação.

Podemos, então, de acordo com o que apresentamos no decorrer deste trabalho, aliado aos registros históricos do estudo inicial da Derivada, propormos a seguinte sequência de apresentação desse conceito: a ideia da Derivada usando as concepções fundamentais da Variação e da Taxa de Variação, Números Reais, Limites, Continuidade e Técnicas de Derivação, pois, assim, atendemos os critérios de Idoneidade Epistêmica e contribuímos para ampliar o significado global da Derivada, de acordo com o seu Sentido Holístico.

Ressaltamos que os Livros Didáticos que analisamos seguem uma ordem contrária daquela que apresentamos anteriormente, ou seja, seguem a ordem que provavelmente foi proposta por Cauchy que é basicamente assim: Limite e Derivada.

Isso vem ao encontro com as reflexões de Barufi (1999), que afirma que, em alguns livros, a abordagem está mais adequada para o que seria um curso de Análise Real, afastando-se do que seria o ideal para um curso introdutório de Cálculo Diferencial e Integral. Sobre a distribuição dos conteúdos do Livro Didático, Barufi (1999, p.52) afirma que

> [...] se constitui na apresentação do Cálculo sistematizado, formal e logicamente organizado, como resultado do trabalho de pensadores, filósofos e matemáticos durante mais de v*in*te séculos. Esta é uma abordagem realizada por alguns autores em suas propostas para um primeiro curso de Cálculo Diferencial e *In*tegral. Neste caso, a sequência temática, basicamente é Números Reais, Funções, Limites, Derivadas e *In*tegrais, e o tratamento metodológico obedece, em muitos casos, ideias de fornecer uma revelação do Cálculo. A proposta parece basear-se no fato questionável de que a lógica *in*terna consistente deva garantir a aprendizagem significativa por parte dos estudantes.

Segundo Machado (2016),

> [...] É possível estudar muitos conteúdos sem uma atenção adequada às ideias fundamentais envolvidas, como também o é uma explicitação e uma valorização de tais ideias, mesmo tendo por base a exploração de alguns poucos conteúdos (p. 16-17).

Ressaltamos que a proposta dessa pesquisa não é fazer um ranking dos livros nem construir qualquer tipo de classificação. A ideia não é concluir qual é o livro pior ou melhor, mas compreender o significado global da Derivada e também não pretendemos eliminar a definição da derivada como limite.

Destacamos a importância de usar vários livros nas aulas de Matemática, pois um complementa o outro, e eles possuem diversas abordagens do mesmo tópico. Por exemplo: O **Livro D** interpreta o Coeficiente Angular como Taxa de Variação e o **Livro C** faz a relação da equação reduzida e a função afim. O **Livro B**, possivelmente, é o que mais auxilia o professor em questões pedagógicas.

Em relação ao nível superior, o **Livro X** e o **Livro K** são mais formais na introdução do conceito de Derivada; enquanto o **Livro Y** e o **Livro W** até a exemplificam com situações da Física, principalmente, mais na sequência utilizam o Limite.

Notamos um diferencial de nossa pesquisa em relação às pesquisas que revisitamos, pelo objeto investigado, os referenciais teórico-metodológicos e os resultados alcançados. Analisamos, especificamente, como se manifesta a Taxa de Variação no estudo da Reta e sua relação como o conceito inicial da Derivada.

Todos esses relatos constituem alguma contribuição útil do nosso estudo para uma reflexão profunda sobre a relação entre variação, taxa de variação e o conceito de derivada, seu ensino e sua aprendizagem nas diferentes instituições analisadas.

As conclusões a que chegamos neste estudo são oriundas apenas da análise de algumas seções dos livros didáticos de Ensino Médio e do Ensino Superior. Portanto, o estudo não determina a generalidade dos resultados e a influência desses livros na prática docente e nos processos de aprendizagem dos construtos provenientes do campo conceitual do conceito de derivada. No entanto, esperamos que nosso trabalho, que está inserido em reflexões da Educação Matemática, venha contribuir para reflexões sobre quais aspectos devem ser levados em consideração nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de derivada por meio da Taxa de Variação para estimular a aprendizagem do aluno dentro das ideias fundamentais desse conteúdo.

Para as próximas pesquisas, sugerimos se estudar uma conclusão apontada por Carvalho (2016) sobre o método de Descartes que apresentamos na seção 1.5

> O método utilizado por Descartes não usa nenhum conceito de limite, corda se aproximando da tangente etc., que são considerados difíceis e obscuros pelos alunos. [...] Sua ideia básica [...] é que [...] certa equação algébrica ligada à curva tem o fator $(x-a)^2$. [...] Considere a função pol*in*omial $y = P(x)$. Divid*in*do $P(x)$ por $(x-a)^2$ obtemos $P(x) = (x-a)^2 Q(x) + R(x)$. Como o resto é do primeiro grau, temos $R(x) = mx + b$. Então, uma correspondência pouco explorada é que $y = mx + b$ é exatamente a equação da tangente ao gráfico do pol*in*ômio $y = P(x)$, no ponto $x = a$, ou seja, m é o coeficiente angular da tangente, é a derivada de $y = P(x)$ naquele ponto. (p.11)

Além disso, também propomos investigar: as concepções de alunos concluintes da educação básica sobre a Variação e a Taxa de Variação. Lembramos que o conceito de Taxa de Variação não é enfatizado no Ensino Médio, e, mesmo assim, os alunos obtêm sucesso nas questões voltadas para Matemática e suas Tecnologias do ENEM, que envolvem esse conceito.

Deixamos, também, como sugestões de pesquisas futuras, com abordagem ecológica no Ensino Superior do conceito de derivada com ênfase nas ideias de Variação e na Taxa de Variação.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, S. L. da C. **Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2008.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Edições 70. Lisboa. 2014.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.

BOYER, C. B – **História da Matemática**; tradução: Elza F. Gomide- São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Superior** e **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)**: http://portal.mec.gov.br, 1998 e 2005. Acesso em 20/05/2014.

______. **Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio - 2015**: http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/5940-guia-pnld-2015, 2015. Acesso em 11/07/2015.

______. **Lei nº 9.394. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Brasil, http://portal.mec.gov.br, 1996 e 2000. Acesso em 16/07/2016.

CAMARENA, P. G. **Aportaciones de investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática em ingeniería**, 04/11/2010. Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

CARVALHO, J. B. P. **Descartes e a Tangente a uma Curva**. 3º quadrimestre de 2016. Artigo. Revista do Professor de Matemática pp.7-11. Rio de Janeiro. Brasil.

DAMM, R. F. **Registros de representação.** In: Machado, S. et al. Educação matemática: uma introdução. São Paulo: Educ, 2012.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações (volume 3)** - São Paulo: Ática, 2013.

DALL'ANESE, C. **Conceito de Derivada: Uma proposta para seu Ensino e Aprendizagem.** Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000. Dissertação de Mestrado.

DE OLHO NAS METAS 2011. http://www.tce.ms.gov.br. Acesso em 06/08/2014.

DIAS, A. M. **Reflexões sobre o Ensino e Aprendizagem em Matemática: O Papel do Professor**. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Educação Avançada Ltda. (EVATA), Viçosa, 2009.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I)**. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009, 1ª ed.

______. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática.** In: **Aprendizagem em Matemática**. Machado, S. D. A. (org). Campinas, São Paulo: Papirus, 2011.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**, tradução: Hygino H. Domingues. Editora da Unicamp, Campinas, 2004.

FARIA, C. W., GODOY, S. F. L. **O Cálculo Diferencial e Integral e Suas Aplicações no Ensino de Engenharia: Uma Análise de Currículo** – Anais do Congresso de Iniciação Científica do Instituto Nacional de Telecomunicação – INATEL, 2012.

GODINO, J. D. **Teoria de las Funciones Semióticas. Um enfoque Ontológico Semiótico de la Cognicion e Instrucción Matemática**. Tese de Doutorado, Universidade de Granada, 2003.

GODINO, J. D., PINO-FAN, L. R., CASTRO, W. F., FONT, V. **Idoneidad Epistémica del significado de la Derivada em el curriclo de Bachillerato.** Artigo. Paradigma, vol XXXIV, nº2: Dezembro de 2013, pp. 123-150.

GODINO, J. D., BATANERO, C., FONT, V. **Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática.** Artigo. Acta Scientiae, Revista e Ensino de Ciências e Matemática, vol. 10 - nº 2 - Jul./Dez. 2008.

GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo** Volume 1 – 5ª edição, Reimpressão 2008 **–** Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1985.

HITT, F. **Dificuldades en el aprendizaje del cálculo.** Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México, 2003. http://www.academia.edu/807014/Dificultades_en_el_aprendizaje_del_cálculo. Acesso em 09/07/2016.

IEZZI, G. et al. **Matemática: Ciência e Aplicações (volume 3)** - São Paulo: Saraiva, 2013.

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)**. http://inep.gov.br. Acesso em 20/05/2014.

JORNAL DA UNICAMP. **Disciplina com alto índice de reprovação é tema de**

pesquisa. Edição 581. Ano 2013. Campinas, São Paulo.

JÚNIOR, A. O. **Compreensões de conceitos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de Matemática – Uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática.** Doutorado em Educação Matemática. Rio Claro: UNESP, 2006.

KARRER, M., JANH, A. P. **Transformações Lineares nos Livros Didáticos: uma análise em termos de registros de representação semiótica**, 2011 – Educação Matemática em Revista – número 17.

KLEINER, I. **History of the infinitely small and the infinitely large in calculus.** Educational Studies in Mathematics, 48, 2002, pp. 137-174.

LEITHOLD, L., **O Cálculo com Geometria Analítica**: tradução Cyro de Carvalho Patarra, 3ª edição, Editora Harbra, São Paulo, 2002.

LEHMANN, M. **Proposta de uma Sequência Didática para Conceitualização de Derivada como Taxa de Variação Instantânea**, 01/02/2011, Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade Severino Sombra.

LIMA, A. **Introduzindo o Conceito de Derivada a partir da Ideia de Variação,** 01/12/2012, Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Estadual da Paraíba.

LOBO, R. S. O **Tratamento dado por Livros Didáticos ao Conceito de Derivada**: Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2012. Dissertação de Mestrado

LÓPEZ, C. M. J., DUARTE, P. V. E., VILLA-OCHOA, J. A. **Aspectos emergentes en la comprensión de la tasa de variación**. Artigo. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM). Recife - PE. 26 - 30 de junho de 2011.

LUCAS, C. O. **Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional**. Tese (Doutorado em Técnicas Matemáticas Avançadas e suas Aplicações) – Universidade de Vigo, 2015.

MACHADO, N. J., **Matemática por Assunto – Noções de Cálculo (volume 9).** São Paulo: Editora Scipione, 1988.

______. **Formação Continuada de Professores: uma releitura das áreas de conteúdo** – São Paulo, SP: Editora Cengage Learning – 2ª edição, 2016.

MEYER, C. **Derivada/Reta Tangente: Figura Conceitual e Definição Conceitual**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2003.

PAIVA, M. **Matemática (volume 3)** - São Paulo: Moderna, 2013.

PAIVA, M. O. **Aplicações do Estudo da Derivada no Nível Básico de Ensino Associado à Resolução de Questões de Máximos e Mínimos**, 13/03/2015.

Mestrado Profissional. Universidade de Brasília.

PASSOS, F. G. e outros. **Análise dos índices de reprovações nas disciplinas Cálculo I e Geometria Analítica nos cursos de engenharia da UNIVASF**, 2007. Artigo. XXXV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (Cobenge), Fundação Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF.

PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2009.

PONTE, J. P. **Concepções dos professores de matemática e processos de formação**. In: Educação Matemática: temas de investigação. PONTE, João P. (Org.). Lisboa: IIE, 1992. pp. 185-239.

RAFAEL, R. C., ESCHER, M. A. **Evasão, baixo rendimento e reprovações em Cálculo Diferencial e Integral: uma questão a ser discutida.** Artigo. VII Encontro Mineiro de Educação Matemática. Juiz de Fora, Minas Gerais, 2015.

RÊGO, R. M. **Uma abordagem alternativa de ensino de Cálculo usando infinitésimos**. Doutorado em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte: Natal, 2000.

REIS, F. da S. **A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos.** Campinas, 2001. 302 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

REIS, A. **Exame Nacional do ensino Médio (ENEM) como Indutor da Prática Curricular de Professores de Matemática a partir da Perspectiva de Contextualização,** 01/08/2012, Mestrado Acadêmico em Educação e Ciências, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldade de natureza Epistemológica**. São Paulo, 2003. Tese de Doutorado em Educação da Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROQUE, T – **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

STEWART, J. **Cálculo Vol. 1 –** São Paulo -SP: Cengage Learning – Tradução da 6ª edição norte americana, 2010.

STIGAR, R. **O Pensamento Holístico**. – WebArtigos.com, 2008. Artigo. http://www.webartigos.com/artigos/o-pensamento-holistico/5772/. Acesso: 02/11/2016.

STOCCO, K., DINIZ, M. I. **Matemática: Ensino Médio (volume 3)** - São Paulo: Saraiva, 2013.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**: tradução Alfredo Alves de Faria – 2ª edição - São Paulo: Makron Books, 1994.

URIZA, C. R. **Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una miranda socioepistemológica**. Artigo. Actas Latinoamerica de Matemática Educativa. 17, pp. 1-9. México D.F., 2004.

VILLAREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.** Rio Claro, 1999. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. Tese de Doutorado em Educação Matemática.

VILLA-OCHOA, J. A. **La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada**: **Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren.** Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Antioquia. Medellín, 2012.