

**MARIA INEZ RODRIGUES MIGUEL**

**ENSINO E APRENDIZAGEM  
DO MODELO POISSON:  
UMA EXPERIÊNCIA COM MODELAGEM**

**DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**PUC/SP**

**São Paulo**

**2005**

**MARIA INEZ RODRIGUES MIGUEL**

**ENSINO E APRENDIZAGEM  
DO MODELO POISSON:  
UMA EXPERIÊNCIA COM MODELAGEM**

*Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia  
Universidade Católica de São Paulo, como exigência  
parcial para obtenção do título de DOUTOR EM  
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação do Prof.  
Dr. Saddo Ag Almouloud*

**PUC/SP**

**São Paulo**

**2005**

## **Banca Examinadora**

---

---

---

---

---

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

**Assinatura:** \_\_\_\_\_ **Local e Data:** \_\_\_\_\_

## ***Dedicatória***

***Este trabalho é dedicado a  
minha família e a todos que  
foram meus alunos em algum  
período de suas vidas.***

## **AGRADECIMENTOS**

Inicialmente, quero agradecer ao Professor Doutor Saddo Ag Almouloud por ter aceitado a árdua tarefa de orientar o presente estudo; sua postura flexível permitiu que me sentisse à vontade para pôr em ação minhas pretensões e seu realinhamento e sugestões garantiram apoio e segurança até o momento da finalização.

A todos os componentes da Banca Examinadora, em ordem alfabética, Professor Doutor Benedito Antonio da Silva, Professora Doutora Claudette Maria Medeiros Vendramini, Professora Doutora Janeth Bolite Frant, e Professora Doutora Lisbeth Kaiserlian Cordani, obrigada pelo acompanhamento desde a qualificação, com sugestões e correções preciosas que engrandeceram esta pesquisa.

Meus agradecimentos a todos os alunos que participaram do estudo, tanto do piloto quanto da fase experimental propriamente dita, sem os quais esta tese não existiria.

Um agradecimento particular aos colegas que, quando solicitados, não mediram esforços para cooperar e apoiar: Ana Maria Veloso Nobre, Ana Paula Jahn, Carmem Cecília Bueno Tobias, Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, Josemary Angélica Correia Gonçalves, Maria José Ferreira da Silva, Maria Thereza Goulart Dubus, Renata Rossini, Rosana Nogueira de Lima, Sandra Maria Pinto Magina, Vera Helena Giusti de Souza.

Um particular agradecimento pela receptividade e apoio recebidos à Instituição de Ensino Superior onde se desenvolveu a fase experimental desta tese, por intermédio da direção, chefias de departamento e coordenação de cursos.

Finalmente, mas, não menos valiosa foi a ajuda concedida pelo Conselho de Ensino e Pesquisa (CEPE) da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, instituição de ensino em que trabalho desde 1976, por meio da bolsa capacitação docente, viabilizando minhas aspirações.

**MIGUEL, M. I. R. Ensino e Aprendizagem do Modelo de Poisson: uma experiência com modelagem. Tese (doutorado). São Paulo. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: 2005.**

## **RESUMO**

Esta tese é centrada no ensino e na aprendizagem do Modelo de Poisson, seu questionamento refere-se ao uso da Modelagem Matemática, das etapas a serem consideradas e dos resultados, tanto na interação didática como nas aquisições e erros dos alunos participantes. As hipóteses de que o trabalho em dupla, o uso do computador e o experimento realizado na prática pudessem favorecer o desenvolvimento do projeto foram admitidas, a fim de serem validadas, ou não. Para tal, uma seqüência de ensino, elaborada com base nas etapas de Modelagem Matemática de Henry, foi aplicada a um grupo de alunos do segundo ano de graduação em Engenharia Elétrica e Ciência da Computação de uma Instituição de Ensino Superior. No estudo, a metodologia adotada foi a Engenharia Didática que permite a validação das hipóteses pela confrontação entre as análises a priori e a posteriori e favorece o realinhamento das atividades durante o processo. As bases teóricas foram a praxeologia de Chevallard e o enfoque ontológico-semiótico da cognição e instrução matemática de Godino. A primeira norteou a análise dos livros didáticos, a elaboração e a apresentação das tarefas propostas na seqüência pretendida; a segunda fundamentou a determinação de elementos de significado do Modelo de Poisson para serem considerados no ensino e orientar a análise dos resultados, possibilitando a identificação dos conhecimentos adquiridos que estão conforme a pauta institucional e os que podem ser considerados erros de aprendizagem. A pesquisa permitiu concluir que, não só o uso da Modelagem Matemática é favorável ao estudo realizado, como também todas as etapas de modelagem puderam ser interpretadas, adaptadas e consideradas essenciais, para que os

objetivos fossem atingidos, salientando-se que o experimento realizado deve ser cuidadosamente selecionado, a fim de servir de motivação aos sujeitos visados e, se possível, contemplar a interdisciplinaridade. Entre os diversos elementos de significado do Modelo de Poisson tomados como referência, muitos foram adquiridos pelo grupo de alunos participantes, embora algumas dificuldades relacionadas à utilização do aplicativo, à interpretação de termos do tipo: ao menos, no máximo, etc., e à representação simbólica persistiram durante todo o processo. A construção do Modelo de Poisson baseada nas hipóteses citadas sobre o experimento realizado mostrou ser uma estratégia viável e eficiente, garantindo relativa facilidade na aplicação do modelo nas mais variadas situações, inclusive, naquelas de aproximação ao Modelo Binomial. O resultado permite que se sugira a introdução do referido modelo nos moldes apresentados, em lugar do modo clássico com definição, exemplo e exercícios, ou ainda, por meio da aproximação ao Modelo Binomial. O uso de um aplicativo mostrou-se eficiente para agilizar as representações e facilitar a visualização de propriedades; no entanto, a aprendizagem da manipulação do aplicativo não pode concorrer simultaneamente com o estudo do conteúdo pretendido sob pena de comprometê-lo. O trabalho em dupla revelou que as trocas de informações, enriquecidas e complementadas pelas duas formações dos sujeitos envolvidos, permitiram o levantamento de novas questões e maior confiabilidade na realização das tarefas propostas.

**Palavras-Chave:** Modelo de Poisson, Modelagem Matemática, Engenharia Didática, Teoria Antropológica do Didático, Teoria das Funções Semióticas.

## **ABSTRACT**

This dissertation concentrates on the teaching and learning of the Poisson's Model, whose questioning refers to the use of the Mathematical Modeling, to the steps to be considered and to the results both in the didactic interaction and in the acquisition achieved and mistakes made by the participating pupils. The author considered the hypotheses that pair-work, computer use and practical experiments might favor the development of the project in order to validate it or not. For that purpose, a teaching sequence was elaborated based on this author's interpretation of the Mathematic Modeling suggested by Henry (1997) and was applied to a group of University undergraduates from the second year of the College of Electric Engineering and Computer Science. In the study, the adopted methodology was Didactic Engineering, which allows for the validation of hypotheses through the confrontation between the analysis, a priori and a posteriori, and favors the realignment of the activities during the process. The theoretical bases were Chevallard's praxeology and Godino's ontological-semiotic approach to cognition and mathematic instruction; the first guided the analysis of the didactic books and the elaboration and presentation of the proposed tasks in the intended sequence; the second was the basis for the determination of meaningful elements in Poisson's Model to be considered in the teaching and guide the result analysis, allowing for the identification of the know ledges acquired that were in accordance with the intended institutional guidelines and those that could be considered learning mistakes. This research lead to the conclusion that not only the use of the Mathematic Modeling is favorable for the study carried out but also that it made it possible for all the modeling steps to be interpreted, adapted and considered essential for the purposes to be achieved, emphasizing that the experiment carried out should be carefully chosen to serve as motivation for the target public and, if possible, contemplate interdisciplinarity. Among the several significant elements of Poisson's Model taken as reference, many were acquired by the group of participating pupils, however, some difficulties related to

the use of the software, to the interpretation of terms such as: at least, at most, etc and to the symbolic representation persisted throughout the whole process. The construction of Poisson's Model as from hypotheses presented about the experiment carried out proved to be a viable and efficient strategy, guaranteeing relative easiness in the application of the model in the most varied situations, including those with proximity with the Binomial Model; that result allows for the suggestion of the introduction of the mentioned model in the way it is presented, replacing the classical way, consisting of definition, example and exercises, or even, through the proximity with the Binomial Model. The use of a software proved to be efficient to expedite the representations and to make it easier for the visualization of properties; however, learning to handle the software cannot be simultaneous to learning the target content under the risk of compromising it. Pair work proved that information exchange, enriched and complemented by the backgrounds of the two individuals involved, allowed for the emergence of new questions and guaranteed greater reliability in the execution of the proposed tasks.

**Keywords:** Poisson's Model, Mathematical Modeling, Didactic Engineering, Anthropological Theory of Didactics, Theory of Semiotics Functions.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1. DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM SEGMENTOS ADJACENTES.....	19
FIGURA 2. COMPONENTES E FACETAS DA COGNIÇÃO MATEMÁTICA.....	46
FIGURA 3. ESQUEMA DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	<b>ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.</b>
FIGURA 4. ESQUEMA DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	<b>ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.</b>
FIGURA 5. ESQUEMA DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	<b>ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.</b>
FIGURA 6. MODELAGEM PARA A SALA DE AULA.....	<b>ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.</b>
FIGURA 7. CAPA DO LIVRO DE POISSON, 1837. ....	60
FIGURA 8. LIVRO DE POISSON, 1837, P. 206.....	61
FIGURA 9. CAPA DO LIVRO DE COURNOT, 1843.....	63
FIGURA 10. LIVRO DE COURNOT, 1843, P. 331 E 332.....	64
FIGURA 11. BACTÉRIAS EM UMA LÂMINA DE PETRI.....	67
FIGURA 12. ESQUEMA PARA ZERO OCORRÊNCIAS NO INTERVALO $[0, T + \Delta t]$ .....	82
FIGURA 13. DIVISÃO EM SUBINTERVALOS DE COMPRIMENTO $T/N$ .....	86
FIGURA 14. CONTADOR GEIGER-MUELLER .....	100
FIGURA 15. EXEMPLO DE RESPOSTA DA TAREFA 2.1.....	119
FIGURA 16. PARTIÇÃO DO TEMPO .....	127
FIGURA 17. NÚMERO DE PARTÍCULAS NO INTERVALO $[0, T + \Delta t]$ .....	127
FIGURA 18. EMISSÃO DE UMA PARTÍCULA NO INTERVALO $[0, T + \Delta t]$ .....	130
FIGURA 19. EMISSÃO DE DUAS PARTÍCULAS NO INTERVALO $[0, T + \Delta t]$ .....	132
FIGURA 20. MODELO DE POISSON COM PARÂMETRO 0,5.....	147
FIGURA 21. MODELO DE POISSON COM PARÂMETRO 5,8.....	148
FIGURA 22. MODELO DE POISSON COM PARÂMETRO 18,7 .....	149
FIGURA 23. COMPARAÇÃO: REALIDADE E MODELO POISSON .....	157
FIGURA 24. COMPARAÇÃO $B(20; 0,2)$ E $P(4)$ .....	176
FIGURA 25. COMPARAÇÃO $B(20; 0,6)$ E $P(12)$ .....	176
FIGURA 26. COMPARAÇÃO $B(20; 0,9)$ E $P(18)$ .....	177
FIGURA 27. COMPARAÇÃO $B(30; 0,2)$ E $P(6)$ .....	177
FIGURA 28. COMPARAÇÃO $B(40; 0,2)$ E $P(8)$ .....	178
FIGURA 29. COMPARAÇÃO $B(60; 0,01)$ E $P(0,6)$ .....	178
FIGURA 30. TESTE QUI-QUADRADO OBTIDO NA PLANILHA .....	192
FIGURA 31. ESQUEMA DE FUNCIONAMENTO DO CONTADOR GEIGER-MUELLER .....	198
FIGURA 32. RESULTADOS DO PRIMEIRO EXPERIMENTO DO PRIMEIRO CONTADOR .....	200
FIGURA 33. RESULTADOS DO SEGUNDO EXPERIMENTO DO PRIMEIRO CONTADOR.....	201
FIGURA 34. RESULTADOS DO TERCEIRO EXPERIMENTO DO PRIMEIRO CONTADOR .....	201
FIGURA 35. RESULTADOS DO QUARTO EXPERIMENTO DO PRIMEIRO CONTADOR .....	202
FIGURA 36. FOTO DE SIMÉON-DENIS POISSON.....	249
FIGURA 37. EMISSÃO DE RAIOS $\alpha$ , $\beta$ E $\gamma$ .....	262
FIGURA 38. PARTIÇÃO DO TEMPO .....	267

## LISTA DE FICHAS DOS ALUNOS

FICHA 1 - EXPERIMENTOS .....	108
FICHA 2 – AVALIAÇÃO DA PRIMEIRA ETAPA.....	110
FICHA 3 – ESTUDO DESCRITIVO .....	118
FICHA 4 – AVALIAÇÃO DA SEGUNDA ETAPA .....	120
FICHA 5 – CONSTRUÇÃO DO MODELO TEÓRICO .....	126
FICHA 6 – AVALIAÇÃO DA TERCEIRA ETAPA .....	138
FICHA 7 – EXPLORANDO O MODELO TEÓRICO .....	142
FICHA 8 – ESPERANÇA E VARIÂNCIA DO MODELO DE POISSON .....	153
FICHA 9 – COMPARANDO PRÁTICO E TEÓRICO .....	155
FICHA 10 – APLICANDO O MODELO DE POISSON .....	160
FICHA 11 – COMPARANDO BINOMIAL E POISSON.....	174
FICHA 12 – APROXIMAÇÃO POISSON DO MODELO BINOMIAL .....	180
FICHA 13 – FUNÇÃO REPARTIÇÃO.....	183
FICHA 14 – TESTE FINAL .....	184
FICHA 15 –(FICHA 9 REFORMULADA) – COMPARANDO PRÁTICO E TEÓRICO .....	207

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1. CICLO DA MODELAGEM.....	<b>ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.</b>
QUADRO 2. ESQUEMA DE MODELAGEM MATEMÁTICA.....	<b>ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.</b>
QUADRO 3. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO DE REFERÊNCIA DO MODELO DE POISSON .....	96
QUADRO 4. PRIMEIRA ETAPA DE MODELAGEM.....	106
QUADRO 5. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS .....	117
QUADRO 6. SEGUNDA ETAPA DE MODELAGEM.....	117
QUADRO 7. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS .....	125
QUADRO 8. TERCEIRA ETAPA DE MODELAGEM .....	126
QUADRO 9. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS .....	141
QUADRO 10. QUARTA ETAPA DE MODELAGEM.....	141
QUADRO 11. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS.....	151
QUADRO 12. QUINTA ETAPA DE MODELAGEM .....	152
QUADRO 13. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS.....	159
QUADRO 14. SEXTA ETAPA DE MODELAGEM.....	160
QUADRO 15. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS.....	179
QUADRO 16. ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS COM A APROXIMAÇÃO POISSON AO MODELO BINOMIAL.....	184

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1. COMPARAÇÃO ENTRE DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL E DE POISSON .....	65
TABELA 2. DESINTEGRAÇÃO RADIOATIVA – RUTHERFORD, 1920.....	66
TABELA 3. BOMBARDEIO AÉREO SOBRE LONDRES – SEGUNDA GUERRA MUNDIAL.....	67
TABELA 4. CONTAGEM DE BACTÉRIAS .....	68
TABELA 5. RESULTADO DA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS (ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA).....	79
TABELA 6. RESULTADO DA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS (ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA).....	93
TABELA 7. DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES DA VARIÁVEL ALEATÓRIA $W_T$ .....	127
TABELA 8. DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES DA VARIÁVEL ALEATÓRIA $W_{\Delta t}$ .....	128
TABELA 9. DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES DA VARIÁVEL ALEATÓRIA $W_T$ .....	135
TABELA 10. DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES DA VARIÁVEL ALEATÓRIA $W_T$ .....	153
TABELA 11. DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA QUANTO AO ENSINO BÁSICO .....	196
TABELA 12. FREQUÊNCIA DE RESPOSTAS DA PRIMEIRA QUESTÃO .....	227
TABELA 13. FREQUÊNCIA DE RESPOSTAS DA SEGUNDA QUESTÃO .....	227
TABELA 14. FREQUÊNCIA DE ACERTOS NA TERCEIRA QUESTÃO .....	227
TABELA 15. FREQUÊNCIA DE ACERTOS NA QUARTA QUESTÃO .....	228
TABELA 16. FREQUÊNCIA DE RESPOSTAS NA SEXTA QUESTÃO.....	229
TABELA 17. FREQUÊNCIA DE ACERTOS NA SÉTIMA QUESTÃO .....	229
TABELA 18. FREQUÊNCIA DE ACERTOS NA OITAVA QUESTÃO.....	230
TABELA 19. FREQUÊNCIA DE ACERTOS NA NONA QUESTÃO .....	230
TABELA 20. RAZÃO DE CONDENAÇÃO NA FRANÇA, NOS ANOS DE 1825 A 1830.....	256

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>15</b>
<b>CAPÍTULO 1 PROBLEMÁTICA, FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS.....</b>	<b>18</b>
1.1 <i>PROBLEMÁTICA</i> .....	18
1.1.1 REVISÃO DA LITERATURA .....	18
1.1.2 QUESTÕES DE PESQUISA, HIPÓTESES E OBJETIVOS.....	29
1.2 <i>FUNDAMENTOS TEÓRICOS</i> .....	31
1.2.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO.....	32
1.2.2 TEORIA DAS FUNÇÕES SEMIÓTICAS .....	38
1.3 <i>FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS</i> .....	46
1.3.1 ENGENHARIA DIDÁTICA .....	47
1.3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA.....	49
<b>CAPÍTULO 2 ANÁLISES PRELIMINARES.....</b>	<b>57</b>
2.1 <i>EPISTEMOLOGIA E HISTÓRIA</i> .....	57
2.2 <i>ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS</i> .....	69
2.2.1 OS LIVROS SELECIONADOS PARA ANÁLISE .....	70
2.2.2 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DOS LIVROS SELECIONADOS .....	71
2.2.2.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA PRAXEOLOGIA DIDÁTICA.....	72
2.2.2.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA PRAXEOLOGIA MATEMÁTICA .....	80
2.3 <i>ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERÊNCIA</i> .....	94
<b>CAPÍTULO 3 A SEQÜÊNCIA DE ENSINO CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI .....</b>	<b>98</b>
3.1 <i>O EXPERIMENTO PILOTO</i> .....	99
3.2 <i>OS ENCONTROS: CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI</i> .....	103
3.2.1 A PRIMEIRA ETAPA – REALIDADE - Laboratório de Física Nuclear .....	106
3.2.1.1 AVALIAÇÃO.....	109
3.2.1.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS.....	115
3.2.2 A SEGUNDA ETAPA – MODELO PSEUDOCONCRETO – Laboratório de Informática .....	117
3.2.2.1 AVALIAÇÃO.....	120
3.2.2.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS.....	124
3.2.3 A TERCEIRA ETAPA – MODELO MATEMÁTICO – Sala de aula usual.....	125
3.2.3.1 AVALIAÇÃO.....	138
3.2.3.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO PRETENDIDOS.....	141
3.2.4 A QUARTA ETAPA - ESTUDO MATEMÁTICO – Laboratório de Informática .....	141
3.2.4.1 AVALIAÇÃO.....	150
3.2.4.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS.....	151
3.2.5 A QUINTA ETAPA-CONFRONTAÇÃO MODELO/REALIDADE-Laboratório de Informática..	152
3.2.5.1 AVALIAÇÃO.....	158
3.2.5.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS.....	159
3.2.6 A SEXTA ETAPA – GENERALIZAÇÃO E PREVISÕES – Sala de aula usual .....	160
3.2.6.1 CURIOSIDADE DO MODELO DE POISSON .....	173

3.2.6.2 AVALIAÇÃO.....	179
3.2.6.3 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS.....	179
3.2.7 O ÚLTIMO ENCONTRO - TESTE FINAL – Laboratório de Informática .....	180
3.2.7.1 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS.....	184
3.2.7.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL AVALIADOS .....	192
<b>CAPÍTULO 4 EXPERIMENTAÇÃO.....</b>	<b>194</b>
4.1 OS SUJEITOS DA PESQUISA .....	195
4.2 O PRIMEIRO ENCONTRO .....	197
4.3 O SEGUNDO ENCONTRO .....	202
4.4 O TERCEIRO ENCONTRO.....	204
4.5 O QUARTO ENCONTRO.....	205
4.6 O QUINTO ENCONTRO .....	206
4.7 O SEXTO ENCONTRO .....	207
4.8 O SÉTIMO ENCONTRO .....	210
4.9 O OITAVO ENCONTRO.....	211
<b>CAPÍTULO 5 ANÁLISE A POSTERIORI VALIDAÇÃO .....</b>	<b>213</b>
5.1 A PRIMEIRA ETAPA.....	214
5.2 A SEGUNDA ETAPA.....	215
5.3 A TERCEIRA ETAPA .....	217
5.4 A QUARTA ETAPA .....	219
5.5 A QUINTA ETAPA.....	221
5.6 A SEXTA ETAPA .....	223
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES.....</b>	<b>226</b>
AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ENSINO (TESTE FINAL) .....	226
Concordâncias entre o significado institucional avaliado e o pessoal construído pelo grupo .....	231
Diferenças entre o significado institucional avaliado e o significado pessoal declarado.....	233
RESULTADOS EM RELAÇÃO AOS FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS.....	235
RESULTADOS EM RELAÇÃO ÀS HIPÓTESES DE PESQUISA .....	237
A QUESTÃO DE PESQUISA E SUGESTÕES PARA O ENSINO DO TEMA .....	238
QUESTÕES LEVANTADAS - SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS .....	241
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>244</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>249</b>
APÊNDICE A - SIMÉON-DENIS POISSON (1781-1840) .....	249
APÊNDICE B - TERMO DE COMPROMISSO E AUTORIZAÇÃO.....	259
APÊNDICE C - CARTA COMUNICADO DE PARTICIPAÇÃO.....	260
APÊNDICE D - FICHA DE IDENTIFICAÇÃO.....	261
APÊNDICE E - TEXTO SOBRE RADIOATIVIDADE.....	262

# INTRODUÇÃO

A experiência profissional da pesquisadora, com alunos do ensino superior, na área de Estatística, buscando freqüentemente estratégias de ensino que pudessem minimizar as dificuldades apresentadas pelos estudantes, motivou o direcionamento do presente trabalho para o ensino e aprendizagem no contexto dessa teoria.

No campo da Educação Matemática, os estudos sugerem novos caminhos, e a sala de aula passa a ser um precioso laboratório de experimentação, onde a ação, observação, análise e reflexão norteiam novas experiências, embora sem controle científico. Com essa postura, a pesquisadora apelou para diferentes estratégias de ensino de modelos probabilísticos e, mesmo assim, os resultados continuaram a revelar falhas na aprendizagem, no que se refere à identificação e manipulação dos modelos teóricos e na interpretação ou validação das soluções encontradas.

Em particular, o Modelo de Poisson, pela própria complexidade, sempre foi motivo de estudos e reflexões da pesquisadora, em razão de alguns fatores, dentre os quais se podem destacar: os conceitos matemáticos envolvidos na construção da distribuição de probabilidades que, em geral, não fazem parte do currículo anterior dos alunos e, portanto, podem trazer dificuldades na aproximação e apropriação do conteúdo envolvido; a dificuldade na determinação do parâmetro do modelo nas mais variadas situações; a obtenção das probabilidades depende de cálculos matemáticos que podem dificultar a interpretação e validação dos resultados encontrados; a falta de pesquisas sobre o tema que possam orientar novas experiências e a carência de material didático diferenciado.

Assim, motivado por esses fatores, o presente estudo trata do Modelo de

Poisson e enquadra-se no campo da Didática da Matemática que considera o saber matemático, como objeto de estudo e, paralelamente, o sujeito, quer seja aquele que aprende ou ensina.

No Capítulo 1, uma revisão da literatura é apresentada com resultados, dificuldades e sugestões de publicações relacionadas ao tema que justificam e fundamentam as questões de pesquisa, hipóteses e objetivos que são colocados e que alavancaram o desenvolvimento do projeto inicial. Na seqüência, encontram-se os fundamentos teóricos dessa pesquisa, quais sejam: a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1992, 1999, 2002; BOSCH; CHEVALLARD, 1999) e a Teoria das Funções Semióticas (GODINO, 2003). A primeira norteia a análise de livros didáticos e as atividades que compõem a seqüência de ensino e a segunda subsidia a determinação e análise de elementos de significado do Modelo de Poisson nos livros didáticos, na seqüência de ensino e nas produções dos alunos. A última parte contém o método de pesquisa adotado, a Engenharia Didática (DOUADY, 1987; ARTIGUE, 1988), e o processo de modelagem (HENRY, 1997) que orienta a elaboração das etapas na seqüência de ensino.

O Capítulo 2 trata de estudos preliminares, ou seja, epistemologia e história do Modelo de Poisson e da análise de livros didáticos que é apresentada em termos de organização didática e matemática, por meio das noções de tarefa, técnica, tecnologia e teoria da Teoria Antropológica do Didático. Apoiados nos estudos deste capítulo são identificados elementos de significado institucional de referência do Modelo de Poisson a serem considerados na elaboração da intervenção didática pretendida, de acordo com a Teoria das Funções Semióticas.

A concepção e análise a priori do projeto de engenharia encontram-se no Capítulo 3. No início, são apresentados alguns comentários a respeito do experimento piloto realizado em 2003. A seqüência de ensino é guiada pela interpretação da autora das etapas do processo de modelagem sugeridas em Henry (1997) e, sendo assim, os alunos realizaram o experimento de contagem de partículas emitidas por fontes radioativas, valendo-se do contador *Geiger-Mueller*, organizaram e exploraram os resultados colhidos com o auxílio de um aplicativo, participaram da construção do modelo teórico a partir de considerações

sobre a realidade observada, fizeram um estudo desse modelo valendo-se do mesmo aplicativo, compararam os resultados prático e teórico por meio de um teste estatístico, utilizaram o modelo criado em diferentes situações, incluindo a aproximação ao Modelo Binomial e, finalmente, responderam um teste final. Os conteúdos, as respostas e os ambientes utilizados, enquanto expectativas, estão organizados em atividades, e cada uma é apresentada em termos de tarefa, técnica didática, bloco tecnológico/teórico e análise a priori. Cada etapa é finalizada com a forma de avaliar e a explicitação dos elementos de significado institucional pretendidos.

A narração da fase experimental, com a caracterização dos sujeitos participantes, alunos do segundo ano dos cursos de graduação em Engenharia Elétrica e Ciência da Computação, como também as alterações necessárias na intervenção, em relação ao que estava previsto, encontram-se no Capítulo 4.

O Capítulo 5 trata da análise a posteriori, isto é, organização e estudo dos resultados colhidos na fase experimental, quais sejam: fichas de atividades, anotações dos observadores, arquivos dos trabalhos salvos em disquetes; um paralelo entre a análise a priori e a posteriori permite avaliar se os objetivos fixados foram atingidos.

Finalmente, o último capítulo apresenta os resultados do teste de avaliação do projeto de ensino implementado, as conclusões, as respostas às questões propostas e perspectivas para futuras pesquisas. Nas produções dos alunos, são identificados os elementos de significado pessoal declarados e é feita uma comparação entre estes e os elementos de significado institucional implementados, a fim de determinar os elementos de significado pessoal logrados (aprendizagem) e os que podem ser considerados erros de aprendizagem, por estarem em desacordo com o que foi institucionalizado na interação didática.

# CAPÍTULO 1

## PROBLEMÁTICA, FUNDAMENTOS

### TEÓRICOS e METODOLÓGICOS

Neste capítulo, são apresentadas algumas publicações no campo do Ensino da Estatística que contribuíram com sugestões no transcorrer do estudo, as questões de pesquisa, as hipóteses e os objetivos fixados inicialmente. A seguir, são feitas algumas considerações sobre a Teoria Antropológica do Didático e a Teoria das Funções Semióticas que fundamentaram o presente trabalho. Finalmente, uma breve exposição da metodologia de pesquisa adotada, a Engenharia Didática, e de alguns aspectos sobre Modelagem Matemática que orientaram a concepção e o desenvolvimento da seqüência didática.

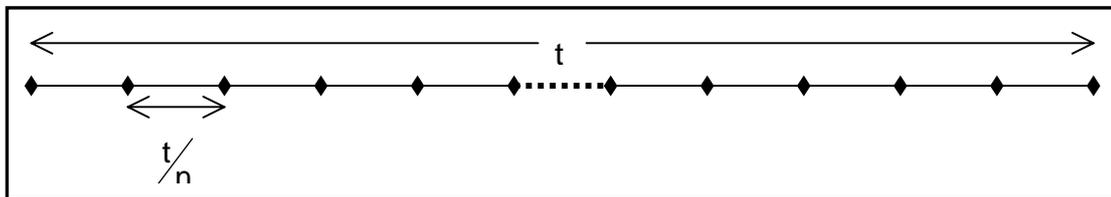
#### **1.1 PROBLEMÁTICA**

##### **1.1.1 REVISÃO DA LITERATURA**

As publicações específicas sobre o Modelo de Poisson encontradas foram poucas

e estas são do pesquisador Michel Henry do *Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Franche-Comté*.

A dedução da fórmula que fornece as probabilidades de uma variável aleatória com distribuição de Poisson foi uma dificuldade que mereceu atenção especial neste estudo. Em relação a esse aspecto, Henry e Dantal (1997) propõem a introdução desse conteúdo a alunos de terceiro ano do Ensino Médio, da seguinte forma: selecionam-se pontos sobre um eixo por meio de um processo aleatório e, a partir de um ponto escolhido arbitrariamente do tal eixo, considera-se um segmento de comprimento  $t$ . Pretende-se observar o número de pontos situados sobre esse segmento que pode ser considerado uma variável aleatória  $X$  e, portanto, impossível de ser previsto. Conforme os autores, o exame desse procedimento sugere algumas considerações: os pontos estão estatisticamente distribuídos sobre o eixo com densidade média, por unidade de comprimento, igual a  $\lambda$  e de modo homogêneo; a probabilidade de se obter mais de um ponto em um segmento de comprimento suficientemente pequeno é desprezível; os números de pontos em segmentos disjuntos são independentes. A seguir, Henry e Dantal (1997) consideram o mesmo processo em um segmento de comprimento  $\Delta t$ , suficientemente pequeno, concluindo que o número médio de pontos nesse segmento é  $\lambda \Delta t$ ,  $E(X) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 2.P(X = 2) + \dots$  e  $P(X = 2)$ ,  $P(X = 3)$ ,  $P(X = 4)$ ,... são desprezíveis. Assim,  $E(X) = P(X = 1) = \lambda.\Delta t$  e  $P(X = 0) = 1 - P(X \geq 1) = 1 - \lambda.\Delta t$ . Na seqüência do trabalho, o segmento de comprimento  $t$  é dividido em  $n$  segmentos adjacentes de comprimento  $t/n$ , como mostra a Figura 1.



**Figura 1. Divisão de um segmento em segmentos adjacentes**

Aumentando o valor de  $n$ , o comprimento  $t/n$  diminui; considere  $n$  tal que  $t/n$  seja suficientemente pequeno (comparável a  $\Delta t$ ); assim, para cada segmento:

$$p = \lambda \cdot \frac{t}{n} \text{ (probabilidade de um ponto) e } q = 1 - \lambda \cdot \frac{t}{n} \text{ (probabilidade de zero ponto).}$$

Os autores observam que, ao considerar  $n$  segmentos disjuntos de comprimento  $t/n$ , equivale a repetir, independentemente,  $n$  vezes a experiência aleatória anterior e, desse modo, a variável aleatória  $X$  tem distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ , donde:

$$P(X = m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} = \binom{n}{m} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-m}, \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots, n, \text{ onde } m \text{ é o}$$

número de pontos observados no segmento de comprimento  $t/n$ ; como  $t/n$  é suficientemente pequeno, pela segunda condição, não se tem mais que um ponto em cada segmento, o que acarreta  $m \leq n$ . Como  $n$  é suficientemente grande (para que  $t/n$  seja suficientemente pequeno), o autor considera o limite na equação anterior:

$$P(X = m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{m} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-m}, \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

O limite é calculado e a conclusão que se segue é que as três considerações, citadas anteriormente, determinam um Modelo Binomial para a lei  $X$ , aproximada por um Modelo de Poisson de parâmetro  $\lambda t$ .

O autor encerra o artigo, mencionando que as probabilidades elementares de  $X$  podem ser calculadas por:  $P(X = m) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!}$ .

Duas questões podem ser colocadas em relação à introdução proposta por Henry e Dantal (1997): como justificar ao aluno a aproximação, não exata, quando  $n$  não tende a infinito? Como explicar o uso do Modelo de Poisson em outras situações, como, por exemplo, as que envolvem área ou volume? Tendo em vista tais dificuldades que podem surgir, quando se propõe a introdução desse modelo como aproximação do Modelo Binomial, o presente estudo utiliza os Postulados de Poisson na dedução da fórmula que fornece as probabilidades e considera a orientação do trabalho apresentado a seguir.

O período atual é designado de pós-moderno por Henry (1997) e nele salienta a tendência em se valorizar o caráter instrumental da matemática para resolver problemas externos, colocados pelo desenvolvimento de outros setores da atividade humana. A resolução desses problemas envolve a situação

experimental e o controle teórico que os conhecimentos matemáticos permitem. Fundamentando-se nesse relacionamento entre teoria e prática, nesse artigo, Henry propõe o uso da Modelagem Matemática no desenvolvimento de seqüências de ensino e sugere as seguintes etapas para a aplicação desse processo a um experimento: realidade, modelo pseudo-concreto, modelo matemático, estudo matemático, confrontação modelo-realidade e generalização-previsão. A apresentação é puramente teórica e o autor sugere que os alunos sejam colocados, o mais precocemente possível, diante de situações aleatórias da realidade. O artigo foi fundamental na decisão de se considerar a modelagem matemática nesta tese e as seis etapas, propostas pelo autor, foram interpretadas e utilizadas na elaboração da seqüência de ensino.

A pesquisa de Coutinho (2001) centra-se no ensino e na aprendizagem, no sentido de buscar condições didáticas para que alunos de oitava série e de primeira série do ensino médio familiarizem-se com situações aleatórias em contexto escolar, nas quais o conceito de probabilidade foi introduzido por meio das noções freqüentista e geométrica, valendo-se do dinamismo que o aplicativo *Cabri-geomètre II* proporciona. No processo de modelagem, dois domínios foram utilizados: o concreto e o pseudo-concreto; no primeiro, o aluno observa e descreve em linguagem natural a situação aleatória da realidade a modelar e elabora um protocolo experimental com os critérios de classificação para sucesso e fracasso; no segundo, a experiência real é simplificada, por meio da abstração, para a configuração do modelo de urna para resolver o problema. A autora constatou que os alunos entre 14 e 16 anos adquiriram ferramentas de representação e de interpretação de fenômenos aleatórios que os levou a estimação da probabilidade. As atividades de observação e descrição de uma situação da realidade e o papel da linguagem no domínio pseudoconcreto possibilitaram a construção de um modelo teórico para situações aleatórias equivalentes que foram essenciais no processo de modelagem.

Para Girard (1997), quando se busca um modelo para aplicar à realidade, na verdade, é apenas para alguns aspectos selecionados e um modelo é considerado inadequado, quando se encontra uma falha, um desencontro com aquilo que se observou e Batanero acrescenta:

uma vez que construímos um modelo matemático para a situação e obtidas as conclusões, a partir do modelo, falta a parte mais importante: compará-las com o comportamento real da situação analisada e decidir se o modelo matemático nos proporciona uma boa descrição da realidade. (BATANERO, 2001, p. 2).<sup>1</sup>

Quando o desencontro existe, segundo Girard (1997), deve-se verificar se os parâmetros do modelo foram adequadamente estimados ou se é preciso buscar um modelo mais geral para o estudo e exemplifica com a soma dos pontos obtidos no lançamento de dois dados: o primeiro problema que surge relaciona-se a considerar  $5+6$  e  $6+5$  como distintos ou não, o que equivale, por exemplo, a considerar dados de cores diferentes ou não. Para o autor, essa problemática aparece, porque se desenvolve o trabalho sobre a realidade, mas, na verdade, já se está em um modelo. O professor passa pelas dificuldades relacionadas à modelagem sem explicitá-las; é preciso que as condições da experiência sejam definidas claramente e os enunciados dos problemas sejam cuidadosamente elaborados para não deixar aspectos implícitos que possam acarretar diferentes interpretações. Esse é um dos motivos que os exercícios são semelhantes para os professores e distintos aos alunos.

Os trabalhos de Coutinho (2001) e Girard (1997) reforçam a opção deste estudo de colocar os alunos realizando um experimento na prática, em lugar de simular a experiência com o auxílio de um aplicativo. Os autores citados sugeriram a elaboração de um texto sobre o conteúdo a ser abordado que fosse disponibilizado aos alunos, a fim de que pudessem participar da elaboração do protocolo experimental, ou seja, dos aspectos da realidade a serem considerados na construção do modelo.

Parzys (1997) salientou a importância de se dar especial atenção ao papel da articulação entre os campos estatístico e probabilístico, em particular a distinção entre as noções de frequência e probabilidade. O autor destaca que diferentes representações, além da linguagem natural e algébrica, como tabelas e gráficos, podem favorecer a apreensão de vários aspectos e propriedades na exploração e comparação desses dois conceitos.

O trabalho de relacionar e distinguir as noções de frequência e

---

<sup>1</sup> Tradução nossa

probabilidade é um dos aspectos considerados nesta tese. O processo de modelagem adotado prevê a articulação dessas duas noções, porque trabalha com resultados experimentais e, a partir destes, com os teóricos do modelo criado; admite-se a hipótese de que a opção de usar o computador, como instrumento didático, agiliza a representação em gráficos e tabelas que pode favorecer a visualização e a compreensão da comparação sugerida por Parzys (1997).

Batanero, Tauber e Sánchez (2001), fizeram uma experiência de ensino da distribuição normal em um curso optativo de análise de dados, dirigido a 57 estudantes do primeiro ano do curso universitário (98/99), de diferentes áreas: Pedagogia, Psicologia, Psicopedagogia e Economia, na Faculdade de Educação da Universidade de Granada. A seqüência de ensino teve como fundamento a teoria sobre o significado institucional e pessoal dos objetos matemáticos (GODINO, 1996; GODINO; BATANERO, 1994, 1998) e incorporou o uso de computadores como ferramenta didática, dispositivo de cálculo e representação gráfica por meio do aplicativo *statgraphics*. Os alunos foram avaliados por um questionário com vinte itens, construídos com base nos apresentados em Cruise, Dudley e Thayer (1984, apud BATANERO; TAUBER; SÁNCHEZ, 2001) e por uma prova aberta, de três questões, para serem desenvolvidas com o mesmo aplicativo. Os autores citados constataram que os estudantes aprenderam a usar o aplicativo e adquiriram muitos dos elementos de significado considerados no ensino, como média, desvio padrão, assimetria, curtose, comparação visual entre teórico e empírico, influência dos parâmetros na representação gráfica, entre outros. Concluem ainda, que o uso de computadores introduz mudanças no significado da distribuição normal, porque afeta diferentes de seus elementos, como o fato de não haver necessidade da passagem pela padronização e que as representações do conceito ampliam-se, quando se propicia o trabalho com um conjunto de resultados da realidade que os alunos podem explorar de forma dinâmica. Dentre os elementos do significado que proporcionaram maior dificuldade de compreensão, os autores salientaram: saber quando uma variável quantitativa discreta pode ou não ser aproximada por uma distribuição contínua e suas conseqüências; aplicar e interpretar os coeficientes de assimetria e curtose; ler e compreender os elementos de um gráfico estatístico; diferenciar elementos

teóricos e empíricos, no processo de modelagem, o que pode explicar os erros na aplicação em inferência; usar as opções do menu secundário do aplicativo e argumentar em termos de análise e síntese, as questões abertas. Além disso, os autores sugerem que é possível a aprendizagem de noções básicas sobre a distribuição normal, dirigida a alunos que não tenham conhecimentos prévios em estatística, já que os cálculos podem ser levados a cabo com o uso de computadores.

A leitura desse artigo vem reforçar a opção de se adotar as etapas do processo de modelagem sugeridas em Henry (1997), pois, na interpretação feita pela autora desta tese, está previsto um trabalho dinâmico com observações obtidas na prática e uma dialética entre os elementos teóricos e empíricos, agilizados pelo uso do computador, como instrumento didático e ferramenta de cálculo.

Nessa mesma linha de estudo, Ensino da Estatística, Henry apresentou um trabalho na *XII<sup>ème</sup> École d'Été de Didactique des Mathématiques*, em agosto de 2003, na França. Esta Escola de Verão é realizada a cada dois anos, com participação internacional, e é organizada por iniciativa da *Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques* (ARDM); ela permite aos participantes trabalhar a partir de avanços recentes e significativos das pesquisas sendo um lugar de confrontações e de debates científicos, como também de formação de pesquisadores. As publicações em atas garantem certa visibilidade e ampliam as relações entre as instituições de pesquisa, de formação e de ensino da matemática. Dentre as modificações ocorridas em 2003, foi criado o dispositivo pedagógico, Trabalho Dirigido (TD); nele, um grupo de estudo ocupa de um a quatro encontros de uma hora e meia e tem por função operacionalizar certos conceitos ou técnicas de estudo apresentados no curso sob uma forma didática específica e pode ser direcionada a um público particular.

Henry (2003) propôs um TD com a finalidade de trabalhar as etapas do processo de modelagem. O experimento, desintegração atômica de uma massa de material radioativo, foi simulado por um programa de computador; os valores observados foram comparados aos teóricos de uma lei de Poisson, cujo parâmetro foi obtido dos próprios resultados. O programa também avaliou a

adequação do modelo usando o teste qui-quadrado; textos teóricos de referência foram disponibilizados: o teste qui-quadrado, o processo e a lei de Poisson (considerada como limite da lei Binomial), informações sobre a desintegração radioativa, o programa de simulação e o processo de modelagem. Neste, o autor distingue três níveis: situação concreta, formalização matemática do modelo e relativização das respostas. O TD de Henry veio acrescentar a importância de se considerar, nesta tese, o teste qui-quadrado na avaliação da adequação do modelo aos resultados experimentais, além de reforçar as opções do trabalho com modelagem e o uso do computador como instrumento didático.

Outro fator de dificuldade que também interfere no desenvolvimento do Modelo de Poisson é a noção de aleatoriedade. Batanero e Serrano (1995) apresentaram uma reflexão epistemológica sobre esse conceito e salientaram que o seu significado, enquanto entidade abstrata, pode criar dificuldades de compreensão aos estudantes por não estar nitidamente determinado já que, em distintos momentos da história, foi diferentemente interpretado e, ainda hoje, não se tem uma definição precisa que permita saber quando um resultado ou uma seqüência deles é ou não aleatória. Os autores sugerem que se comece com materiais que possam ser manipulados e que tenham propriedades de simetria (como dados e moedas), para depois trabalhar os não simétricos (como roletas com áreas desiguais); em seguida, os fenômenos sociais e/ou demográficos podem ser estudados e, no início do ensino médio, pode-se fazer uso de tabelas de números aleatórios na seleção de amostras, ou ainda, estudar propriedades desses números quando gerados por calculadora ou computador. A conclusão do artigo evidencia que a experimentação, registro e análise das seqüências produzidas nessas atividades permitirão integrar o estudo da probabilidade com a estatística e que, com base nessas experiências, é esperado que os alunos adquiram as seguintes características essenciais dos fenômenos aleatórios:

- ✓ Em condições fixadas de antemão, existe mais de um resultado possível;
- ✓ com os conhecimentos que possui o sujeito que emite o juízo, o resultado concreto que ocorrerá é imprevisível;
- ✓ tem possibilidade - ao menos imaginada - de repetir indefinidamente a observação ou produção do fenômeno;
- ✓ as seqüências de resultados obtidos nesta repetição carecem de um padrão que o sujeito pode controlar ou prever;
- ✓ nesta aparente desordem, muitas regularidades globais podem

ser descobertas, começando pela estabilização das freqüências relativas de cada um dos resultados possíveis. Essa regularidade global é o fundamento que nos permite estudar estes fenômenos aleatórios mediante o cálculo das probabilidades. (BATANERO; SERRANO, 1995, p. 26).<sup>2</sup>

Com base no parágrafo anterior, neste estudo, admite-se a hipótese de que a experiência de emissão de partículas por fontes radioativas possa favorecer a compreensão do acaso a fim de justificar e dar significado aos Postulados de Poisson na construção do modelo. Conforme Coutinho (2001), a percepção do acaso é feita pela tomada de consciência da variabilidade dos resultados e da não possibilidade de conhecer aquele que vai ocorrer, antes da realização do experimento, mesmo quando se conhecem todos os prováveis. Os trabalhos de Henry (2003), Coutinho (2001), Batanero, Tauber e Sánchez (2001) e Batanero e Serrano (1995) salientaram a importância de propor aos alunos situações que possibilitem a percepção da distinção entre probabilidade e freqüência e que, para tal, a confrontação entre resultados observados e teóricos pode ser favorável.

Girard (1997) apresentou também algumas dificuldades matemáticas relacionadas ao trabalho com porcentagem, mesmo em populações adultas. Em qualquer nível de ensino, são freqüentes questões como: sobre qual conjunto calculá-la? As porcentagens são disjuntas? As porcentagens devem ser somadas ou multiplicadas? Essas mesmas dificuldades refletem-se no trabalho com probabilidade e traduzem-se nas noções de eventos exclusivos e independentes. Além destas, também foram citadas pelo autor dificuldades relacionadas à linguagem, à interpretação de termos do tipo, ao menos, no máximo, não mais do que, menos que, mesmo entre estudantes universitários, como aquelas de representação e de significado de termos, como, por exemplo, se A então B, não A e não B, não A ou não B, associados à lógica matemática.

O desenvolvimento teórico do Modelo de Poisson envolve os conceitos de eventos exclusivos e independentes que, pelo que foi exposto, sugere atenção quando da utilização destes no trabalho com os alunos, no sentido de investigar possíveis concepções equivocadas e, caso existam, propor situações e questionamentos que possam favorecer o realinhamento de tais noções. Além da possível confusão entre exclusividade e independência, Grangé (1997) salienta a

---

<sup>2</sup> Tradução nossa

necessidade de esclarecer a diferença deste último, quando se considera o sentido familiar ou o probabilístico; neste caso, é preciso que o aluno perceba que a independência estatística de dois eventos depende das escolhas das probabilidades dos eventos elementares e apresenta um exemplo que pode ajudar nesse sentido:

No conjunto de famílias com três crianças, escolhe-se uma família, ao acaso. Os eventos, A: a família selecionada tem crianças dos dois sexos e B: a família selecionada tem no máximo uma criança do sexo feminino, são independentes? (GRANGÉ, 1997, p. 367).<sup>3</sup>

Admitindo que, para uma família, o sexo de uma criança não depende do sexo da criança precedente, o autor apresentou duas suposições que levaram a conclusões distintas. A primeira adota como valores das probabilidades elementares os resultados observados nas pesquisas francesas de que as frequências de nascimentos de crianças dos sexos masculino e feminino são, respectivamente, 0,514 e 0,486 (GRANGÉ, 1997, p.365); assim considerando, tem-se:

$$P(A) = 1 - P\{(m, m, m), (f, f, f)\} = 1 - (0,514^3 + 0,486^3) = 1 - 0,250588 = 0,749412$$

$$P(B) = P\{(m, m, m), (m, m, f), (m, f, m), (f, m, m)\} = 0,514^3 + 3 \cdot (0,514^2 \cdot 0,486) = 0,520995$$

$$P(A \cap B) = P\{(m, m, f), (m, f, m), (f, m, m)\} = 3 \cdot (0,514^2 \cdot 0,486) = 0,385198$$

$$P(A) \cdot P(B) = 0,749412 \cdot 0,520995 = 0,390440.$$

Nesse caso, como  $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$  tem-se que A e B não são independentes, no sentido probabilístico.

A segunda adota a equi-probabilidade dos sexos nos nascimentos das crianças de cada família. Assim,

$$P(A) = 1 - (0,5^3 + 0,5^3) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$P(B) = 0,5^3 + 3 \cdot (0,5^2 \cdot 0,5) = 4 \cdot (0,5^3) = 0,50$$

$$P(A \cap B) = 3 \cdot (0,5^2 \cdot 0,5) = 3 \cdot (0,5^3) = 0,375$$

$$P(A) \cdot P(B) = 0,75 \cdot 0,50 = 0,375.$$

Nesse caso, como  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ , tem-se que A e B são independentes, no sentido probabilístico.

<sup>3</sup> Tradução nossa

Os resultados, de contradição apenas aparente, pois partiram de suposições distintas, mostram a complexidade e sutileza que esse conceito envolve, o que justifica a importância de um trabalho didático cuidadoso em sua utilização.

A dificuldade na interpretação de termos como: ao menos, no máximo, etc., citada por Girard (1997), aparece nas situações de aplicação do Modelo de Poisson e espera-se que a referência a contextos da realidade ou de conhecimento dos alunos possa favorecer tal interpretação; acrescenta-se, porém, que ela depende, também, da concepção de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta. Esses aspectos devem ser considerados quando da concepção do trabalho a ser desenvolvido com os alunos.

Outro elemento que também foi motivo de reflexão e decisão da autora deste estudo refere-se ao trabalho em grupo. O texto de Carvalho e César (2001) referente ao projeto: Interação e Conhecimento do Centro de Investigação em Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa apresentou uma comparação entre os resultados de alunos, com idades entre 11 e 15 anos, que trabalharam ao longo de dois anos em grupo, e outros de forma individual, revelando que os primeiros mostraram melhor desempenho. Nas três sessões de trabalho em grupo, os alunos foram organizados em dupla e o conteúdo abordado foi de Estatística. As autoras comentaram as vantagens da estratégia adotada, à medida que os alunos precisaram compreender os argumentos do parceiro e explicitar os seus. Dessa forma, eles mobilizaram competências e conhecimentos que favoreceram o desempenho individual, avaliado posteriormente. O artigo ressalta que as atividades propostas foram não habituais e em contextos da realidade, com contratos didáticos<sup>4</sup> tradicionais modificados. As autoras citaram, ainda, a dificuldade, em vários países, de se implementar, de forma efetiva, o

---

<sup>4</sup> A noção de contrato didático deve-se a Brousseau e refere-se aos comportamentos do professor que são esperados pelo aluno e aqueles do aluno que são esperados pelo professor; um grande número de regras e convenções rege a relação entre professor e alunos, na maioria das vezes implicitamente, mas, vêm à tona quando um dos parceiros transgride alguma delas. O contrato didático depende da estratégia de ensino adotada: as escolhas pedagógicas, o estilo de trabalho proposto aos alunos, os objetivos de formação, a epistemologia do professor, as condições de avaliação, entre outros. A aquisição do saber pelos alunos é um dos objetivos fundamentais do contrato didático que a cada nova etapa precisa ser renovado e renegociado, embora, na maioria das vezes, essa negociação passe despercebida. (BROUSSEAU, 1997, p. 225-247).

ensino da probabilidade e da estatística na educação secundária, embora a renovação curricular já tenha sido aprovada, há algum tempo; entre outros, o fato dos professores terem uma formação inadequada ou até nenhuma formação em Estatística, faz com que muitos apresentem a disciplina, como um conjunto de técnicas a ser aplicado ou até não a apresente. Nessa mesma linha, Batanero (2000) afirma que a situação é mais alarmante ainda quando se questiona a formação desses professores em Didática da Estatística.

A opção de colocar os alunos trabalhando em dupla, em várias sessões da parte experimental desta tese, tem nos achados de Carvalho e César (2001) fundamentos para sua adoção.

### 1.1.2 QUESTÕES DE PESQUISA, HIPÓTESES E OBJETIVOS

O princípio metodológico que coloca em primeiro plano a questão da modelagem matemática é recente e inovador nas pesquisas em Didática da Matemática (BOSCH; CHEVALLARD, 1999). Os trabalhos de Henry (1997, 2003), Coutinho (2001), Girard (1997), Batanero, Tauber e Sánchez (2001) sugerem caminhos a serem seguidos que possibilitam o levantamento da seguinte questão de pesquisa inicial: **o uso da modelagem matemática é favorável ao ensino e aprendizagem do Modelo de Poisson?**

Considerando que em um processo de modelagem, a organização das etapas é fundamental, admite-se a hipótese de que as orientações de Henry (1997) possam ser interpretadas e adaptadas para a natureza desta tese; assim sendo, a seguinte questão secundária é colocada: **das etapas propostas por esse autor, quais são fundamentais?**

Em grande parte, as questões enunciadas dependem do ensino implementado; por esse motivo, os seguintes objetivos são propostos:

- ✓ fazer um levantamento das noções envolvidas no estudo do Modelo de Poisson;
- ✓ elaborar uma seqüência didática fundamentada no processo de modelagem

proposto por Henry (1997);

- ✓ aplicá-la a um grupo de alunos e fazer uma avaliação inicial (piloto);
- ✓ fazer os ajustes necessários na seqüência e reaplicá-la a um novo grupo de alunos;
- ✓ analisar e avaliar os resultados.

As publicações de Batanero e Serrano (1995), Coutinho (2001) e Henry (2003) trazem resultados sobre o uso do computador como ferramenta didática e as duas primeiras alertam para as dificuldades associadas ao aleatório; Girard (1997) conclui que, mesmo entre estudantes universitários, existem falhas na interpretação de termos do tipo: ao menos, no máximo, não mais do que, entre outros. Grangé (1997) alerta que se deve dar atenção especial ao se introduzir ou utilizar o conceito de independência; Parzys (1997) destaca a importância de se relacionar os conceitos de freqüência e probabilidade e Carvalho e César (2001) trazem resultados que mostram as vantagens do trabalho em grupo. Essas colocações sugerem novos objetivos: incorporar à seqüência de ensino o uso do computador, como ferramenta didática, dispositivo de cálculo e de representação, além de construir instrumentos de avaliação adaptados à natureza do curso que possibilitem investigar: **quais as dificuldades que foram identificadas na interação didática e quais as que persistiram? Das noções envolvidas no estudo do Modelo de Poisson, quais as que podem ser identificadas como aquisições dos alunos e quais as que podem ser consideradas como erros de aprendizagem?**

Tendo em vista o elemento matemático visado neste estudo, objetiva-se que, ao final da fase experimental, os alunos desenvolvam capacidades e habilidades para:

- ✓ identificar se o Modelo de Poisson é ou não inadequado para representar a realidade de uma situação proposta, no sentido de entrar ou não em contradição com as observações feitas;
- ✓ determinar o parâmetro do Modelo de Poisson para uma situação, seja ela experimental ou uma situação-problema;
- ✓ determinar probabilidades com o modelo teórico e interpretá-las na situação

apresentada;

- ✓ identificar propriedades da variável aleatória com distribuição de Poisson.

Como algumas pesquisas (BATANERO; TAUBER; SÁNCHEZ, 2001; HENRY, 2003) têm mostrado que o uso de um aplicativo pode favorecer o interesse, exploração e compreensão do modelo, admite-se a hipótese de que o uso do computador como instrumento didático possa contribuir para o desenvolvimento do processo de modelagem, dando condições ao aluno de usar o aplicativo para fazer tabulações, cálculos e gráficos, determinar as probabilidades do modelo teórico e comparar os resultados experimentais e teóricos por meio do teste de aderência qui-quadrado.

## 1.2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

O presente estudo é fundamentado por duas teorias: a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1992, 1999, 2002; BOSCH; CHEVALLARD, 1999) e a Teoria das Funções Semióticas (GODINO, 1996, 2003). A primeira delas, no que se refere à organização e apresentação da análise de livros didáticos selecionados e da seqüência de ensino pretendida e, a segunda, na identificação dos elementos a serem considerados no estudo e na avaliação dos resultados e conclusões.

Justifica-se o uso da Teoria Antropológica do Didático por possibilitar a organização do estudo em dois aspectos conectados, didático e matemático, além de permitir, em cada caso, que as atividades propostas pelos autores dos livros didáticos analisados e a concepção da seqüência de ensino pretendida pudessem ser descritas sob o ponto de vista prático e do saber matemático envolvido.

A preocupação da autora em elaborar uma seqüência de ensino que pudesse favorecer a aprendizagem do Modelo de Poisson com significado (no sentido usual do termo) e avaliar sua aplicação, motivou a busca de outros elementos teóricos para seu embasamento. Particularmente, o trabalho de Batanero, Tauber e Sánchez (2001) sobre o significado da distribuição normal

sugeriu o uso da Teoria das Funções Semióticas na fundamentação pretendida; essencialmente, a criação de categorias de significado de objetos matemáticos, identificados em caráter institucional e/ou pessoal, cuja confrontação possibilita a determinação de elementos da aprendizagem efetivamente consagrados no estudo e de outros, cuja dificuldade não foi ultrapassada (erros de aprendizagem), permitiu analisar e avaliar o trabalho desenvolvido.

No que se segue, alguns aspectos dessas teorias, relacionados às pretensões nesse estudo, são apresentados.

### **1.2.1 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO**

A Teoria Antropológica do Didático, proposta por Chevallard, começou a ser elaborada no início dos anos 90, baseada na Teoria das Situações, e pressupõe que tudo é objeto, embora as pessoas e instituições sejam objetos particulares. Para Chevallard (1992), do ponto de vista da semântica da teoria, não importa o que pode ser um objeto; diz-se que um objeto existe para uma pessoa, ou que uma pessoa conhece um objeto, se existe uma relação pessoal entre ambos e, analogamente, diz-se que um objeto existe para uma instituição, ou que esse objeto é conhecido na instituição, se existe uma relação institucional entre eles. Assim, conforme o autor, um objeto existe, se houver uma relação institucional ou pessoal com esse objeto. O conjunto de objetos conhecidos de uma instituição (objetos institucionais) é função do tempo, isto é, em cada período da história da instituição, esse conjunto pode ser modificado. A relação pessoal com um objeto pode existir mesmo antes da pessoa ser sujeito de uma instituição, e se a pessoa se sujeita à instituição, essa relação vai se constituir ou mudar, de acordo com a relação institucional. Quando a relação pessoal muda, pelo fato da pessoa ter-se tornado sujeito da instituição, diz-se que existiu aprendizagem em relação a esse objeto.

A intenção didática se manifesta por meio da formação de instituições, chamadas por Chevallard (1992): sistemas didáticos; tal sistema é composto de dois ou mais sujeitos da instituição, ocupando as posições de professor e de

aluno, e um conjunto de objetos institucionais visados para os sujeitos dessa instituição na posição alunos.

Segundo Bosch e Chevallard (1999), a didática propõe-se a estudar o desenvolvimento da atividade matemática e das necessidades para o seu ensino e aprendizagem. A cultura ocidental diferencia dois tipos de atividade: a manual e a intelectual; a matemática é organizada no segundo tipo e trabalha com noções, raciocínio, intuições, idéias e, também, com elementos materiais, como lápis, papel, régua, compasso, calculadora, computador. Estes últimos, geralmente, são de suporte, às vezes indispensáveis, mas não fazem parte da própria atividade. Os objetos sensíveis particulares, como formalismos, grafismos, palavras, etc. podem intervir na atividade matemática, como representações de outros objetos, com a função de produzir conceitos, mas não se pode considerar apenas essa função instrumental na análise didática do desenvolvimento do saber matemático. Com relação à preocupação com a natureza do objeto e com sua função na atividade matemática, Bosch e Chevallard (1999) definem: objetos ostensivos e objetos não-ostensivos. Os objetos ostensivos têm certa materialidade e, por isso, são perceptíveis aos sentidos humanos e podem ser manipulados: sons, grafismos e gestos; os objetos não-ostensivos são as idéias, intuições, conceitos, que existem institucionalmente, mas, não podem ser vistos, ditos, entendidos, percebidos ou mostrados por si próprios. Eles só podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados: uma palavra, uma frase, um grafismo, uma escrita, um gesto ou um longo discurso. Os autores citados salientam que o termo ostensivo tem, nessa teoria, um sentido mais amplo, refere-se ao conjunto dos sentidos do ser humano, e o termo manipulação é empregado para designar os diversos usos possíveis desses objetos: um grafismo pode ser traçado ou lido, um gesto pode ser feito ou percebido, um objeto material pode ser manipulado concretamente de diversas maneiras, etc. Assim, eventos mutuamente exclusivos e eventos independentes são palavras que evocam certos objetos não-ostensivos. Bosch e Chevallard acrescentam:

ostensivos e não-ostensivos são sempre objetos institucionais cuja existência só raramente depende da atividade de uma só pessoa [...] os objetos ostensivos e os objetos não-ostensivos são unidos por uma dialética que considera os segundos como

emergentes da manipulação dos primeiros e, ao mesmo tempo, como meios de guiar e controlar tal manipulação. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 90-91).<sup>5</sup>

Por exemplo, a notação  $P(A)$  e as palavras: probabilidade de um evento  $A$ , são objetos ostensivos; já a noção de probabilidade é um objeto não-ostensivo. Sendo  $A$  e  $B$  eventos mutuamente exclusivos de um mesmo espaço amostral e  $C$  um evento, não nulo, desse espaço, tem-se:

$$\begin{aligned} P[(A \cup B) | C] &= \frac{P[(A \cup B) \cap C]}{P(C)} = \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)} = \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C)}{P(C)} = \\ &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = P(A | C) + P(B | C) \end{aligned}$$

Pode-se considerar que os objetos ostensivos que aparecem, após a primeira igualdade, foram guiados pelo objeto não-ostensivo, definição de probabilidade condicional; após a segunda, pela propriedade distributiva da intersecção de conjuntos em relação à união; após a terceira, pelo axioma da probabilidade da união de dois eventos exclusivos; após a quarta, pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números reais; e, após a quinta, novamente pela definição de probabilidade condicional.

Na análise da atividade matemática, a ação conjunta, ostensivos/não-ostensivos, é conhecida em termos de signos (ostensivos) e significados (não-ostensivos). Os objetos ostensivos têm uma função instrumental, isto é, são ferramentas materiais para a ação nas organizações matemáticas, e outra semiótica, ou seja, uma capacidade de produzir sentido ou significado; as duas funções co-habitam. Vários objetos ostensivos aparecem na realização de uma atividade matemática, sem que se possa ativá-los individualmente e suas funções, dependendo da técnica adotada e dos registros utilizados, são distintas.

O valor instrumental de um objeto ostensivo depende da situação; por exemplo,  $E(X)$ ,  $\bar{X}$ ,  $\mu_X$  representam a média, embora  $E(X)$  seja usado no caso de se tratar de média de variável aleatória,  $\bar{X}$  no caso de média amostral e  $\mu_X$  para o caso de média populacional. O objeto ostensivo  $E(X)$  tem valor instrumental superior quando se pretende trabalhar com as propriedades da média, pois este

<sup>5</sup> Tradução nossa

ostensivo permite colocar em ação técnicas relacionadas às funções lineares, como  $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$  ou  $E(k.X)=k.E(X)$ , que não são usuais com os outros ostensivos. O valor semiótico (ou semioticidade) de um objeto ostensivo está em estreita relação com seu valor instrumental; ele tem seus valores instrumental e semiótico estabilizados localmente na história da instituição e podem evoluir de acordo com seu engajamento nas atividades institucionais. Essa evolução não é universal e uniforme, pois depende da instituição e das condições ecológicas. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

O saber matemático é uma forma particular de conhecimento, e é resultado da ação humana: é produzido, é ensinado ou se transpõe nas instituições. A organização praxeológica de um saber matemático serve para analisar, descrever e estudar as condições de sua realização; para defini-la, aos termos: objeto, pessoa e instituição são acrescentados três postulados que introduzem as noções de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. O primeiro diz que: “toda prática institucional pode ser analisada em diferentes pontos de vista e formas, por meio de um sistema de tarefas, relativamente bem limitadas que se dividem no fluxo da prática.” (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 84).<sup>6</sup>

Na prática institucional, o problema de delimitar as tarefas está aberto e depende do ponto de vista em que esta prática se desenvolve. A semântica da palavra engloba atividades gerais como tocar uma peça de Mozart ao piano, resolver um problema de probabilidade, fechar uma porta, calcular a probabilidade da intersecção de dois eventos, dançar tango, etc. Uma tarefa, portanto, se expressa por um verbo e supõe um objeto relativamente preciso, artefato construído nas instituições e sua reconstrução é objeto da didática.

Os autores diferenciam tarefa, tipo de tarefas e gênero de tarefas Assim, calcular é um gênero de tarefas, expresso por um verbo de ação, de concepção mais ampla e conteúdo mal definido;

um gênero de tarefas só existe sob a forma de diferentes *tipos* de tarefas, cujo conteúdo é mais estreitamente especificado. *Calcular* é, como se diz, um gênero de tarefas; mas *calcular o valor (exato) de uma expressão numérica contendo um radical* é um tipo de tarefas, da mesma forma que *calcular o valor de uma expressão contendo a letra x quando se dá a x um valor determinado [...]*

<sup>6</sup> Tradução nossa

enfim, tarefas, tipos de tarefas, gêneros de tarefas *não são dados da natureza: são artefatos, obras, construções institucionais*, cuja reconstrução em tal instituição, e por exemplo *em tal classe*, é um problema *que é objeto próprio da didática*. (CHEVALLARD, 1999, p. 224, grifo do autor).<sup>7</sup>

Dessa forma, calcular a probabilidade de uma variável aleatória assumir determinado valor é um tipo de tarefas e calcular a probabilidade de uma variável aleatória com distribuição de Poisson e parâmetro dois assumir o valor três é uma tarefa. Bosch e Chevallard (1999, p. 84) acrescentam que a noção de tarefa é delimitada pelo segundo postulado que diz: “a realização de toda tarefa provém de se colocar em ação uma técnica.”

O sentido do termo técnica é mais amplo do que o usual; não é apenas um procedimento estruturado e metódico, mas, uma maneira particular de se realizar determinada tarefa. Uma técnica pode resolver algumas tarefas de determinado tipo, mas, não obrigatoriamente todas; essa característica é definida como a capacidade intelectual da técnica (BOSCH; CHEVALLARD, 1999). Embora exista uma tendência em produzir algoritmos para as técnicas, sobretudo nos casos de tarefas mais complexas, essa característica não é necessária. Em cada instituição, em uma determinada época, existe uma ou poucas técnicas relacionadas a um tipo de tarefas, institucionalmente reconhecidas, embora técnicas diferentes possam existir em outras instituições. Em geral, essas novas técnicas provocam desequilíbrios nos sujeitos da instituição e, conseqüentemente, são contestadas e, na maioria das vezes, descartadas.

Com as noções de tarefa e técnica cria-se um bloco técnico-prático associado a um saber-fazer; a vida das instituições é feita de escolhas de tarefas e técnicas. A relação institucional a um objeto é constituída pelo conjunto de tarefas que devem ser resolvidas e pelas técnicas usuais na instituição. Dessa forma, a pessoa realiza diferentes tarefas, em instituições distintas a que ela se sujeita, simultânea ou sucessivamente, fazendo emergir sua relação pessoal aos objetos que teve contato.

Para Bosch e Chevallard (1999, p. 85), na maioria das vezes, as tarefas e as correspondentes técnicas em uma dada instituição, tendem a ser sempre as

---

<sup>7</sup> Tradução nossa.

mesmas; em meio a essa rotina, pode surgir uma tarefa problemática, isto é, para a qual não existe uma técnica apropriada; seja porque a tarefa é nova (para o sujeito ou para a instituição), seja porque a técnica existente está sendo questionada. Nesse caso, pode-se obter uma adaptação da técnica existente, ou uma transposição da técnica de outra instituição ou, até mesmo, a criação de uma técnica inédita. Um novo saber-fazer é construído e é preciso, ainda, organizá-lo para que se possa assegurar seu funcionamento regular na instituição. Relacionado a essa organização, o terceiro postulado é enunciado:

[...] a ecologia das tarefas e técnicas são as condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições e agente supõe que, para poder existir em uma instituição, uma técnica deve ser compreensível, legível e justificada [...] essa necessidade ecológica implica na existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que agente chama de tecnologia da técnica. O postulado anunciado implica também que toda tecnologia tem necessidade de uma justificativa que agente chama teoria da técnica e que constitui o fundamento último. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 85-86).<sup>8</sup>

A distinção entre técnica/tecnologia/teoria é funcional e deve sempre se referir ao tipo de tarefas que se toma como ponto de referência. No plano da tecnologia, situam-se os conceitos e as noções que permitem compreender e controlar a atividade humana; nele, objetos ostensivos são manipulados concretamente para permitir materializar explicações e justificativas necessárias ao desenvolvimento da técnica, como também produzir novas técnicas. A teoria é a especulação abstrata da tecnologia; no plano teórico estão as definições, os teoremas, as noções mais abrangentes e abstratas que servem para explicar, justificar e produzir tecnologias. Cria-se, então, um bloco tecnológico-teórico associado ao saber.

Assim, a praxeologia associada a um saber é a junção de dois blocos: saber-fazer (técnico/prático) e saber (tecnológico/teórico). A ecologia de uma praxeologia refere-se às condições de sua construção e vida nas instituições de ensino que a produzem, utilizam ou transpõem.

Segundo Chevallard (1999), as praxeologias (ou organizações) associadas a um saber matemático são de duas espécies: matemáticas e didáticas. As

---

<sup>8</sup> Tradução nossa.

organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula e as organizações didáticas referem-se ao modo de se fazer essa construção; sendo assim, existe uma relação entre os dois tipos de organização que Chevallard (2002) define como fenômeno de co-determinação entre as organizações matemática e didática.

A fim de elaborar uma praxeologia associada a um saber matemático, Chevallard (2002) salienta a importância de se situar esse saber em uma escala hierárquica de níveis, apresentada a seguir:

Nível -2	Sociedade	Cada nível refere-se a uma realidade e serve para determinar a ecologia das organizações matemáticas e didáticas relativas a esse saber.
Nível -1	Escola	
Nível -0	Pedagogia	
Nível 1	Disciplina	Em geral, os programas apresentados no primeiro encontro do ano letivo tratam apenas dos níveis 1, 2, 3, 4 e 5.
Nível 2	Domínio	
Nível 3	Setor	
Nível 4	Tema	
Nível 5	Objeto	

O conjunto de condições e necessidades que possibilita o desenvolvimento matemático (ecologia de uma praxeologia matemática) depende do material ostensivo que compõe as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Essa dimensão ostensiva de uma praxeologia permite que um saber matemático e os conhecimentos que ele pode construir, materializem-se.

### 1.2.2 TEORIA DAS FUNÇÕES SEMIÓTICAS

A Teoria das Funções Semióticas: um enfoque ontológico-semiótico da cognição e instrução matemática, elaborada desde o início dos anos 90 do século XX, foi apresentada por Juan Diaz Godino para obtenção da Cátedra na Universidade de Granada, Espanha, em 2003. O trabalho é dividido em três partes: a primeira trata do sistema de práticas pessoais e institucionais associadas a um campo de

problemas matemáticos; a segunda apresenta a noção de função semiótica e de uma ontologia matemática baseada em seis tipos de entidades primárias e cinco facetas duais da cognição matemática e a terceira traz ferramentas teóricas para analisar processos de instrução matemática, baseados em um modelo ontológico-semiótico.

O autor considera os objetos matemáticos como entidades complexas que são construídas ao longo do tempo, enriquecendo-se e complementando-se, com base na resolução de certos tipos de problemas. São considerados objetos matemáticos: situações-problema, técnicas, conceitos, proposições, argumentações, teorias, etc.. Em particular, são denominados objetos matemáticos lingüísticos: linguagem natural (oral e escrita), símbolos específicos, representação gráfica, objetos materiais, etc. (GODINO, 2003, p. 31). A ecologia dos objetos matemáticos é interpretada como uma metáfora que ajuda a compreender a gênese, o desenvolvimento e funcionamento de tais objetos; da Teoria Antropológica do Didático, foi adotada a idéia de que eles são emergentes de sistemas de práticas associadas a campos de problemas, que sugeriu a introdução das noções de prática, sistema de práticas e prática significativa (GODINO, 2003, p. 86). Toda ação ou expressão realizada por uma pessoa para resolver problemas matemáticos comunicá-los, validá-los ou generalizar a solução é definida como prática; o conteúdo associado à expressão que designa o objeto (significado sistêmico) é definido como sistema de práticas; uma prática é significativa, ou tem sentido, se ela desempenha a devida função a fim de atingir o objetivo visado nos processos de resolução, comunicação, validação e generalização (GODINO, 2003, p. 91-92; 24; 93).

Nessa teoria, o termo significado é concebido como o conteúdo associado a uma expressão, mas não é, necessariamente, uma entidade mental, porém aquilo ao qual se refere um sujeito (pessoa ou instituição) em um dado momento e em dadas circunstâncias. Tem-se, portanto, que a relatividade do conhecimento a pessoas e instituições, proposta na Teoria Antropológica, também foi adotada na Teoria das Funções Semióticas. Nesta, uma instituição é constituída pelas pessoas envolvidas em uma mesma classe de situações problemáticas, geralmente condicionadas pelas regras e instrumentos disponíveis, que

contribuem para sua caracterização. Essa relatividade sugere as noções de práticas (“ações ou manifestações operatórias e discursivas”<sup>9</sup>, GODINO, 2003, p. 23) pessoais e institucionais, dependendo se são de uma pessoa ou são compartilhadas ao seio de uma instituição. Na seqüência, o autor define objeto institucional, como emergente do sistema de práticas sociais relacionadas a determinados problemas, sofrendo transformações e ampliando o campo de problemas a ele associado e objeto pessoal como emergente do sistema de práticas pessoais significativas associadas a um campo de problemas, cuja emergência é progressiva ao longo da história do sujeito, como conseqüência da experiência e da aprendizagem (GODINO, 2003, p. 97-99).

Dessa forma, o significado dos objetos matemáticos é relacionado com as práticas (operativas e discursivas) de um sujeito com os objetos ou ao seio das instituições, possibilitando que se fale em significado de um objeto pessoal e em significado de um objeto institucional (GODINO, 2003, p. 101). Cada uso de um termo é uma prática significativa a ser englobada em seu significado, tanto no que diz respeito ao conteúdo a que se refere o emissor como a interpretação que o receptor faz. No trabalho matemático, costuma-se usar um objeto para a representação de outros, em geral abstratos, estabelecendo-se uma correspondência, poucas vezes explícita, entre o representante e o representado; palavras, símbolos, gráficos e objetos físicos desempenham o papel de representar um objeto ou um de seus aspectos; os próprios objetos abstratos, as situações, as ações, os argumentos podem ser signos (GODINO, 2003, p. 149-150) de outras entidades.

A fim de esclarecer o emprego do termo signo pelo autor, faz-se necessária a introdução da noção de função, como dependência entre texto e seus componentes e dos componentes entre si. A palavra signo é usada para designar o conteúdo, a expressão e a interação entre ambos. Entre as dependências que se pode estabelecer entre as partes de um texto, destacam-se aquelas (representacionais) em que uma parte (expressão) designa outra (conteúdo); essa relação é chamada função de signo (HJEMSLEV, 1943, apud GODINO, 2003, p. 149) ou função semiótica (ECO, 1979, apud GODINO, 2003, p. 149). A expressão

---

<sup>9</sup> Tradução nossa.

e o conteúdo são os elementos entre os quais a função semiótica estabelece uma dependência. Além das dependências representativas, o autor considera também as acionais (de natureza operatória) e as cooperativas (relação entre duas ou mais partes de um texto para conjuntamente produzir uma unidade significativa mais global) como fundamentais para descrever a cognição humana (GODINO, 2003, p. 41).

Três componentes são colocados em jogo com a noção de função semiótica: um plano de expressão, um plano de conteúdo e um critério ou regra de correspondência. Com frequência, as funções semióticas vêm dadas explicitamente por um de seus componentes, enquanto os outros são estabelecidos de modo implícito. Dessa forma, o signo supõe um possível entendimento da correspondência entre expressão e conteúdo. Essa noção é usada para propor uma interpretação do conhecimento e da compreensão de um objeto por parte de um sujeito (pessoa ou instituição) em termos das funções semióticas que o sujeito pode estabelecer em determinadas situações.

Na Teoria das Funções Semióticas, o problema da compreensão está intimamente ligado a como se concebe o próprio conhecimento; a compreensão é considerada como um processo progressivo e é interpretada como correspondência entre significados pessoais e institucionais, portanto, não apenas mental, mas também social e interativo. A competência e a compreensão põem em jogo o conhecimento; diz-se que um sujeito é competente para realizar uma tarefa, quando é capaz de aplicar corretamente uma técnica; diz-se que um sujeito compreende a técnica que permite realizar a tarefa, quando ele conhece, porque a dita técnica é adequada, seu campo de validade e as relações com outras técnicas. Pode-se associar competência ao bloco técnico/prático (práxis) e compreensão ao bloco tecnológico/teórico (logos) das organizações praxeológicas da Teoria Antropológica do Didático. Existem diferenças entre esta e a Teoria das Funções Semióticas, pois, na primeira são identificadas duas facetas do conhecimento: práxis e logos, e, na segunda, além destas, uma terceira componente é identificada, a linguagem (em seus diversos registros), sem a qual as anteriores não podem ser desenvolvidas (GODINO, 2003, p. 129-130).

Em uma função semiótica, a expressão e o conteúdo podem ser

constituídos de um ou vários tipos de entidades que o autor categoriza em seis componentes da cognição matemática ou elementos de significado (BATANERO; TAUBER; SÁNCHEZ, 2001, p. 4) e são apresentados no que se segue.

1. SITUAÇÕES: no sentido amplo, refere-se tanto a problemas simples como complexos, matemáticos ou extramatemáticos. A passagem de um problema mais simples para outro mais complexo é um indicador de progresso ou avanço no conhecimento matemático, pessoal ou institucional.

2. LINGUAGEM: o termo linguagem é usado para designar todo tipo de representação, inclusive as matemáticas (termos, expressões, notações, tabelas, gráficos, ilustrações, esquemas, etc.), com função representacional e instrumental. O autor justifica a escolha do termo por considerar que representação não é exclusividade da linguagem; também, as abstrações matemáticas, as situações, ações, argumentos podem estar no lugar de outras entidades. O termo representação (ou expressão) é deixado para o caso das funções semióticas. A linguagem exerce papel comunicativo e instrumental, servindo de mediadora entre os estímulos do meio e as respostas do sujeito.

3. AÇÕES: do sujeito diante de tarefas matemáticas. Para resolver problemas, o sujeito aplica operações, algoritmos, técnicas, procedimentos, estratégias que são indicadores de diferentes elementos de significado do objeto visado no estudo.

4. CONCEITOS: na atividade matemática, o sujeito apóia-se em noções que conhece para resolver certo tipo de problemas que é proposto. Elas contribuem para a emergência de diferentes conceitos que, progressivamente, irão caracterizar o novo objeto que surge como resultado de ações ou práticas significativas. Cada definição provém de um sistema de práticas que envolve situações e linguagens específicas que podem constituir mudanças no significado do objeto.

5. PROPRIEDADES OU ATRIBUTOS: refere-se às condições de realização das ações; cada propriedade de um objeto matemático relaciona-o a outros e contribui para o crescimento do significado do objeto em questão. O autor salienta a importância de se levar em consideração, de acordo com o nível educativo visado, não só a seleção, mas também a organização das situações que irão propiciar a emergência das propriedades visadas.

6. ARGUMENTOS: a fim de justificar, explicar e comprovar as soluções dos problemas, ações e objetos são interligados, mediante argumentações e raciocínios; cada nível de ensino permite que se use determinado tipo de argumentação na validação dos resultados, desde demonstrações informais, generalizações, contra-exemplos até demonstrações formais. De acordo com o tipo de argumentação utilizado pode-se identificar a ampliação do significado do objeto em estudo.

Essas categorias são estabelecidas pelo autor, como constituintes primários de outros objetos mais complexos ou de organizações matemáticas. Em relação à Teoria Antropológica do Didático, pode-se considerar que as situações e as ações pertencem à componente prática (práxis), enquanto os conceitos, propriedades e argumentos, à componente teórica (logos), sendo a linguagem uma nova componente introduzida na Teoria das Funções Semióticas, que está presente de modo intrínseco e constitutivo na práxis e no logos (GODINO, 2003, p. 118). Para cada componente de significado descrita, o autor considera cinco facetas ou dimensões duais do conhecimento de acordo com o jogo de linguagem<sup>10</sup> do qual participam; são elas:

1. Institucional e pessoal: dependendo do interesse no estudo, pode-se considerar o sujeito individual (pessoal) ou documentos curriculares, livros texto, explicações do professor na sala de aula que têm conotações normativas ou convencionais (institucional), ou ainda, a interação em ambos. Godino (2003) distingue quatro tipos de significados institucionais e três pessoais, classificando-os, também, de acordo com o caráter a priori e a posteriori, conforme seja ele antes de se iniciar o processo instrucional propriamente dito, ou não.

#### TIPOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL

de referência: textos matemáticos, orientações curriculares, considerações de especialistas, conhecimento pessoal do professor (a priori).

pretendido: baseado nos significados de referência, o professor seleciona, ordena e delimita os elementos que serão desenvolvidos com os alunos, levando em

<sup>10</sup> “Consideramos jogos de linguagem, qualquer fragmento de nossas práticas lingüísticas efetivamente realizadas; nas situações comunicativas específicas devemos buscar o significado em uso dos termos e expressões matemáticas.” (GODINO, 2003, p. 114, tradução nossa).

consideração o tempo disponível, os conhecimentos prévios e os meios instrucionais disponíveis (a priori).

implementado: os significados que, efetivamente, têm lugar no desenvolvimento em sala de aula; podem ocorrer mudanças em relação ao que estava pretendido (a posteriori).

avaliado: refere-se a conteúdo que consta das provas, tarefas e observações relacionadas ao que foi, efetivamente, desenvolvido em sala de aula (não se refere ao que os alunos responderam, mas, ao que foi proposto) (a posteriori).

#### TIPOS DE SIGNIFICADO PESSOAL

(em todos os casos, pode-se analisar sob o aspecto a priori ou a posteriori, dependendo de se considerar como expectativa do professor ou resultado efetivamente comprovado)

global: refere-se à totalidade dos conteúdos que os alunos são capazes de manifestar potencialmente em relação a um objeto.

declarado: refere-se a tudo que é expresso nas provas de avaliação propostas aos alunos, incluindo resultados corretos ou não, sob o ponto de vista institucional; aqueles em desacordo com o institucional são considerados erros de aprendizagem.

logrado: refere-se ao significado pessoal declarado que está conforme a pauta institucional estabelecida.

A análise ontológica-semiótica é a indagação sistemática dos significados (conteúdo das funções semióticas) postos em jogo. A dialética entre os aspectos pessoais e institucionais dos objetos e significados reflete-se nos próprios objetos de ensino e de aprendizagem, permitindo caracterizar esta última como uma aproximação progressiva entre os dois tipos de significado e identificar as dificuldades em termos de conflitos semióticos (discordâncias ou disparidades entre os significados. Assim, se o receptor da informação não dispuser de códigos necessários para interpretar uma mensagem ou o emissor não apresentar elementos explícitos para a ativação do código pertinente, um conflito semiótico poderá ser produzido e, portanto, uma descontinuidade no processo instrucional terá lugar) e complexidade dos objetos matemáticos (GODINO, 2003, p. 138, 172,

231). Este estudo pode explicar, ao menos em parte, as dificuldades dos alunos e as limitações das competências e compreensões matemáticas postas em jogo.

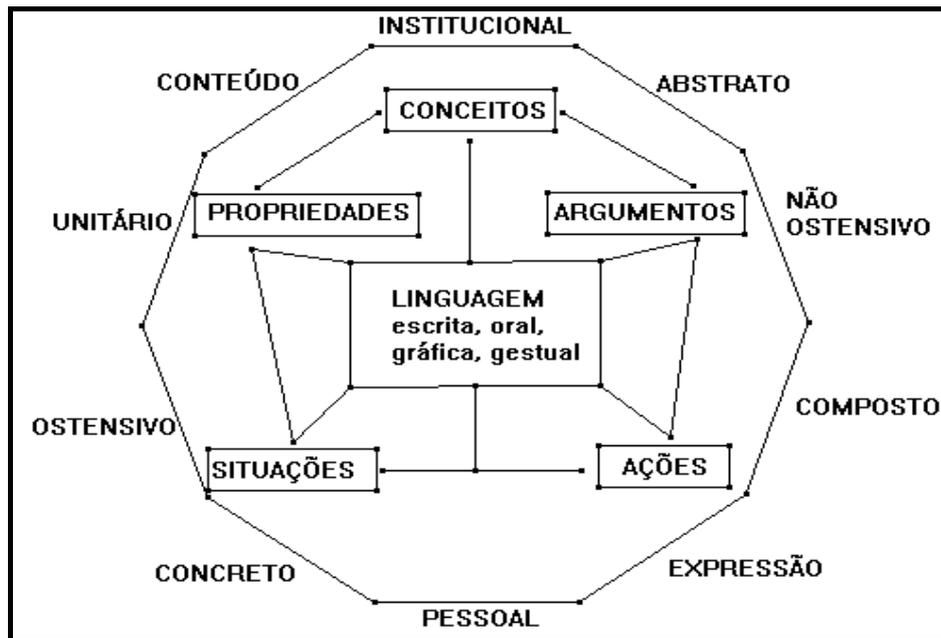
2. Elementar e sistêmico (unitário e composto): essa faceta prevê considerar um objeto como unidade elementar ou com certa organização, estruturada dentro de um sistema de objetos relacionados.

3. Ostensivo e não-ostensivo: como definiu o autor, a linguagem é considerada como a faceta ostensiva dos objetos matemáticos; ela é o meio pelo qual se expressam os objetos não-ostensivos, além de ser instrumento para sua constituição e desenvolvimento. Por outro lado, as entidades lingüísticas têm também uma faceta não-ostensiva, já que o sujeito (individual) pode pensar na palavra sem mostrá-la exteriormente. Nessa teoria, as dimensões: ostensivo e não-ostensivo podem ser aplicadas a qualquer objeto; um cálculo pode ser realizado por uma pessoa de modo ostensivo ou mental, como se os objetos ostensivos também pudessem funcionar como não-ostensivo.

4. Exemplar e tipo (concreto e abstrato): pretende-se estudar os conflitos provocados pelas generalizações nos processos de ensino e aprendizagem. Muitas vezes, em um estudo particular, é necessário esclarecer se a solução encontrada refere-se àquele objeto especificamente ou se ela pode ser estendida para qualquer elemento da classe de objetos a que ela pertence. Por exemplo, se  $X \sim P(2,5)$ , então,  $X = 2$  é o valor com probabilidade máxima; essa propriedade pode ser generalizada: se  $X \sim P(\lambda, t)$ , então,  $X = [\lambda t]$  (função maior inteiro contido) é o valor com probabilidade máxima.

5. Expressão e conteúdo: permite considerar o caráter essencialmente relacional da atividade matemática. Quaisquer dos componentes citados podem ser considerados como desempenhando papel de expressão ou de conteúdo nas funções semióticas, como já foi apresentado.

Um esquema que sintetiza o modelo ontológico-semiótico é apresentado na Figura 2. A linguagem ocupa um lugar central, pois o autor a considera o ponto de entrada para as outras entidades. (GODINO, 2003, p.145).



Fonte: Godino (2003, p. 146).<sup>11</sup>

**Figura 2. Componentes e facetas da cognição matemática.**

No presente estudo, o uso da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria das Funções Semióticas não se considera conflitante, visto que a segunda é fundamentada em muitos pressupostos da primeira e tendo em vista que se vai fazer apenas um recorte para a fundamentação necessária; a sutil diferença existente entre as concepções de objetos ostensivos e não-ostensivos não afeta a aplicação objetivada (GODINO, 2003, p. 142).

### 1.3 FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS

A escolha da Engenharia Didática, como método de pesquisa deve-se, sobretudo, à aspiração, desde as primeiras reflexões deste trabalho, para realizar um estudo experimental baseado em uma realização didática, isto é, concepção, realização, observação e análise de uma seqüência de ensino sobre o Modelo de Poisson. Desde a época do surgimento da Didática da Matemática são discutidas as relações entre pesquisa e uso de seus resultados no sistema de ensino. No início dos anos 80 do século XX, com essa preocupação, a Engenharia Didática foi

<sup>11</sup> Tradução nossa.

sendo construída como um conjunto de aulas seqüenciais organizadas a fim de desenvolver um projeto de ensino para uma população de alunos e, ao mesmo tempo, referir-se a uma metodologia de pesquisa, especialmente útil para a complexidade da sala de aula (DOUADY, 1987; ARTIGUE, 1988). Com essa dupla preocupação, a Engenharia Didática foi adotada como método de pesquisa para o presente estudo.

Além disso, as primeiras leituras, relacionadas ao tema, indicaram o uso da Modelagem Matemática no desenvolvimento do trabalho com os alunos; acrescenta-se, ainda, que:

[...] grande parte da atividade matemática (e particularmente a estatística) pode ser descrita como um processo de modelagem [...] um exemplo notável de modelagem estatística a partir de um problema prático são as distribuições de probabilidades, que permitem descrever de forma sintética o comportamento das distribuições empíricas de dados estatísticos e fazer previsões sobre o seu comportamento. (BATANERO, 2001, p. 1).<sup>12</sup>

Segundo Henry (1997), apesar dos muitos esquemas de Modelagem Matemática existentes, um estudo sobre o assunto culminou na opção de se fazer uma interpretação do processo de modelagem, como método norteador do desenvolvimento da seqüência de ensino pretendida, por contemplar etapas consideradas essenciais, na análise preliminar deste estudo.

Algumas noções sobre Engenharia Didática e Modelagem Matemática são apresentadas a seguir.

### 1.3.1 ENGENHARIA DIDÁTICA

O nome Engenharia Didática deve-se à comparação do trabalho de um engenheiro, no caso um professor, que prepara um projeto de ensino para uma população de alunos. Como no caso do engenheiro, o projeto fundamenta-se em conhecimentos científicos, mas, diante de situações mais complexas do que as previstas, precisa fazer escolhas e tomar novas decisões, sendo, portanto, um processo dinâmico de adaptação às condições encontradas.

<sup>12</sup> Tradução nossa.

Os objetivos de uma pesquisa, que utiliza a Engenharia Didática como método, são: estudo de processos de aprendizagem de um dado conceito, aprendizagem de métodos de trabalho em grupo, estudo e aplicação de estratégias didáticas como, por exemplo, o problema em aberto, o debate científico, entre outros. A singularidade desse método não está só nos objetivos didáticos, mas também nas características de seu funcionamento metodológico, que será brevemente apresentado a seguir.

Na Engenharia Didática, quatro fases podem ser distinguidas: (1) análises preliminares, (2) concepção e análise a priori das situações didáticas da engenharia, (3) experimentação e (4) análise a posteriori e validação. No que se segue, cada uma dessas fases é descrita, considerando o presente estudo.

(1) ANÁLISES PRELIMINARES: estudo histórico e epistemológico do Modelo de Poisson e análise de livros didáticos sob o ponto de vista da organização didática e matemática, visando a identificação de dificuldades e obstáculos relacionados a esse conteúdo. Determinação, com base nesse estudo, de elementos do significado institucional de referência do Modelo de Poisson.

(2) CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI: construção de uma seqüência de ensino e realização de um experimento piloto a fim de fazer os ajustes necessários; elaboração de um plano de desenvolvimento da fase experimental, com previsão das ações do professor e dos alunos no transcorrer das atividades propostas. Nessa fase, como expectativa, são descritos: o número de sessões ou encontros, o tempo previsto para cada uma, o ambiente a ser utilizado, o conteúdo a ser desenvolvido, os objetivos a serem alcançados e a forma de identificar a aprendizagem em cada situação.

Em razão das características teóricas que fundamentam o presente trabalho, cada encontro é composto de uma ou mais atividades, tendo, em cada uma, os seguintes tópicos de desenvolvimento:

- ✓ tarefa: atividade proposta;
- ✓ técnica didática: estratégia do professor para executar a tarefa didática;
- ✓ bloco tecnológico/teórico e análise a priori: explicações e justificativas da técnica didática a ser adotada, objetivos, respostas de acordo com o significado

institucional de referência, técnicas que os alunos podem se valer na realização da tarefa proposta, expectativa de solução dos alunos (elementos de significado pessoal global).

Ao final de cada encontro os elementos de significado institucional pretendidos são identificados e selecionados dentre aqueles de referência, citados nas análises preliminares.

(3) EXPERIMENTAÇÃO: esta é a fase clássica do desenvolvimento do trabalho com os alunos. Em cada encontro, uma análise a posteriori dos resultados é feita, tendo em vista uma adaptação às condições encontradas e aos objetivos fixados. Os elementos de significado pessoal declarados pelos alunos são analisados e podem sugerir alterações nas sessões subseqüentes, caso não estejam em acordo com aqueles de significado institucional de referência.

(4) ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO: esta análise engloba os comportamentos do professor e dos alunos, as produções, individuais ou em grupo e o levantamento dos elementos do significado pessoal declarado pelos alunos, cuja confrontação com os institucionais de referência possibilita a identificação da aprendizagem que, efetivamente, teve lugar no estudo realizado, e dos erros de aprendizagem.

A validação das hipóteses, consideradas no projeto de engenharia, se dá pela confrontação entre as duas análises: a priori e a posteriori; como ela é feita dentro do próprio processo, diz-se ser interna.

### **1.3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA**

A opção de se fazer uso da Modelagem Matemática, como método norteador da intervenção de ensino pretendida, fundamenta-se nas publicações de Henry (1997 e 2003), Coutinho (2001), Batanero, Tauber e Sánchez (2001), Girard (1997), citados anteriormente. Não se pretende apresentar aqui um estudo a respeito desse tema, que pode ser encontrado em Barbosa (2001), mas, apenas alguns aspectos, a fim de situar a abordagem que será adotada nesta pesquisa.

Bassanezi (2002) escreve que a Modelagem Matemática pode ser usada como método de pesquisa e, também, como estratégia de ensino e aprendizagem. Para Bienbengut e Hein (2000), a construção de modelos matemáticos, ou seja, relações matemáticas para estudar, representar e inferir sobre fenômenos observados, surgiu durante o Renascimento com a apresentação, em linguagem e tratamentos matemáticos, de idéias da Física; já na Educação, a Modelagem Matemática é recente e vem ganhando espaço nas últimas três a quatro décadas.

A origem da Modelagem Matemática foi a Matemática Aplicada que tem como objetivo a construção de modelos matemáticos para problemas colocados por outras áreas do conhecimento, cujas concepções encontradas na literatura são semelhantes; Matos, assim, o define:

Um modelo matemático de um objeto ou fenômeno real pode ser visto como um conjunto de regras ou leis de natureza matemática, que representam adequadamente o objeto, ou o fenômeno na mente de um observador. Portanto, um modelo matemático consiste em uma estrutura matemática que oferece uma aproximação dos traços essenciais de uma determinada realidade. (MATOS, 1995, p. 14).

Um exemplo histórico de Chevalier de Méré (1607-1684) (apud ZAQUI, 1992, p. 9) ilustra a dificuldade e a importância de se criar um Modelo: pode-se constatar que, jogando-se um grande número de vezes três dados, a soma 11 ocorre com mais frequência que a soma 12. Isso parece contraditório com o fato de que qualquer dessas somas é possível de ser obtida de seis maneiras distintas, a saber:

Soma 11:  $3+3+5$ ,  $3+2+6$ ,  $4+1+6$ ,  $4+2+5$ ,  $5+5+1$ ,  $4+4+3$ .

Soma 12:  $4+4+4$ ,  $4+3+5$ ,  $4+2+6$ ,  $3+3+6$ ,  $2+5+5$ ,  $1+6+5$ .

Pascal (1623-1662) resolveu esse problema, imaginando que os três dados fossem de cores diferentes e, dessa forma, tem-se:

Soma 11 :  $(3,3,5)$ ,  $(3,5,3)$ ,  $(5,3,3)$ ,  $(3,2,6)$ ,  $(3,6,2)$ ,  $(2,3,6)$ ,  $(2,6,3)$ ,  $(6,2,3)$ ,  $(6,3,2)$ , ... totalizando 27 casos.

Soma 12 :  $(4,4,4)$ ,  $(4,3,5)$ ,  $(4,5,3)$ ,  $(3,4,5)$ ,  $(3,5,4)$ ,  $(5,3,4)$ ,  $(5,4,3)$ ,  $(4,2,6)$ ,  $(4,6,2)$ ,  $(6,2,4)$ ,  $(6,4,2)$ ,  $(2,4,6)$ ,  $(2,6,4)$ ,...totalizando 25 casos.

Pode-se dizer que o modelo inicial não era adequado, enquanto o modelo dos três dados de cores diferentes possibilitou um estudo suficiente para validar a situação experimental observada.

A respeito dos modelos matemáticos, D'Ambrósio escreve:

[...] são caracterizados pela natureza dos parâmetros que se escolhem, que devem ser parâmetros quantificáveis e sujeitos a um tratamento matemático. Sempre será necessário selecionar parâmetros e, portanto, também o modelo matemático é uma aproximação do real. Mas deverá ser evitado o distanciamento da realidade e nesse caso se torna necessária uma avaliação, a cada instante, da adequação do modelo [...] naturalmente para processar um modelo com um número maior de parâmetros necessitamos um instrumental disciplinar maior. Daí o grande avanço que teve a modelagem quando surgiram calculadoras e computadores. (D'AMBRÓSIO, 1999).

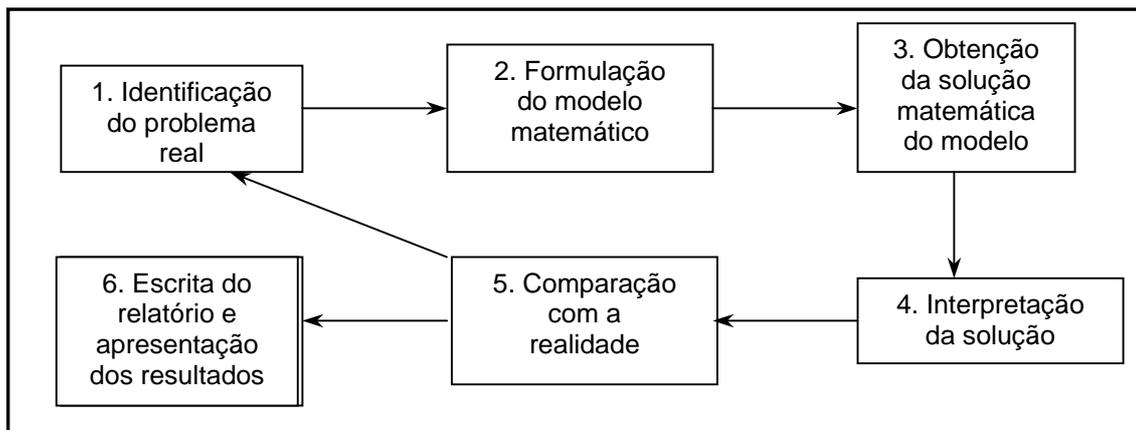
Levando em consideração que, ao observar um fenômeno, apenas alguns aspectos são selecionados, enquanto outros são descartados e, ao representá-los já estamos fazendo abstrações e simplificações da realidade observada. Henry (1997, p. 78) define: “um modelo é uma interpretação abstrata, simplificada e idealizada de um objeto do mundo real, de um sistema de relações, ou de um processo evolutivo que surge de uma descrição da realidade.”<sup>13</sup>

Um aspecto citado por Batanero (2001) refere-se à representatividade de um modelo matemático e suas implicações. Segundo Matos (1995), modelo e realidade (situação modelada) são facilmente identificados; é muito importante sublinhar a necessidade de separar o modelo da realidade que ele pretende representar, pois, tal identificação pode levar a tomar o fenômeno como algo controlável, que muitas vezes, não o é, e a acreditar que o modelo está, de fato, representando fielmente esse fenômeno. O autor tece críticas ao valor representativo dos modelos matemáticos, refere-se ao fato de que, dependendo dos objetivos visados e do modo de encarar a realidade, diferentes modelos podem ser criados para um mesmo fenômeno e que as condições e a finalidade para a qual ele foi construído devem ser explicitadas, permitindo, assim, uma possível utilização ou comparação com outros; Batanero (2001) acrescenta que o melhor modelo não é aquele que mais se aproxima das observações, mas, sim, aquele que, sendo simples, proporciona uma boa aproximação.

<sup>13</sup> Tradução nossa.

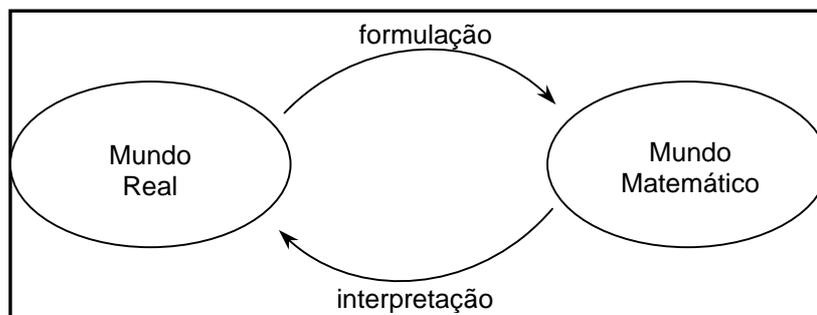
Sob o ponto de vista da Matemática Aplicada, a Modelagem Matemática é entendida, como um processo que tem origem na realidade e visa à construção de um modelo matemático dessa realidade. Esse processo é descrito, por vários autores, em etapas seqüenciais, formando um ciclo que pode ser repetido até que o modelo matemático aproxime-se da situação a ser modelada, e diferem na esquematização do ciclo e no detalhamento das etapas. A título de ilustração, alguns deles são apresentados nas Figuras 3 a 6 e nos Quadros 1 e 2.

Internacionalmente a 1<sup>st</sup> *International Conference on the Teaching of Mathematical Modeling and Applications (ICTMA – 1, 1984)* pode ser considerada um marco inicial da relação Modelagem Matemática e Ensino da Matemática. No Brasil, os primeiros estudos datam da década de 1970, provenientes da Universidade Estadual de Campinas e da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Sua consolidação, porém, só se deu no início dos anos 80 com o Professor Rodney Bassanezi, sob influência do Professor Ubiratan D'Ambrósio.



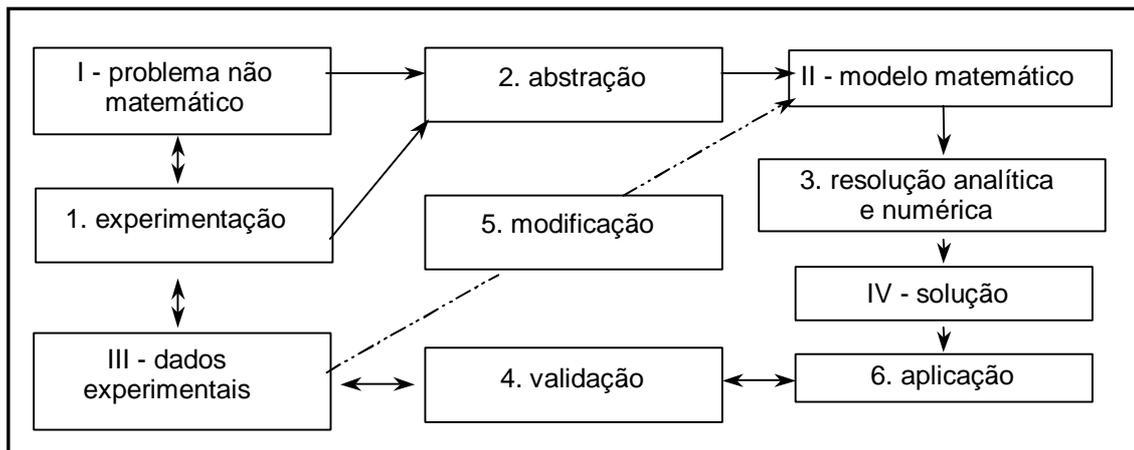
Fonte: Edwards; Hamson. (1990, p. 44 apud BARBOSA, 2001, p. 15).

**Figura 3. Esquema de Modelagem Matemática**



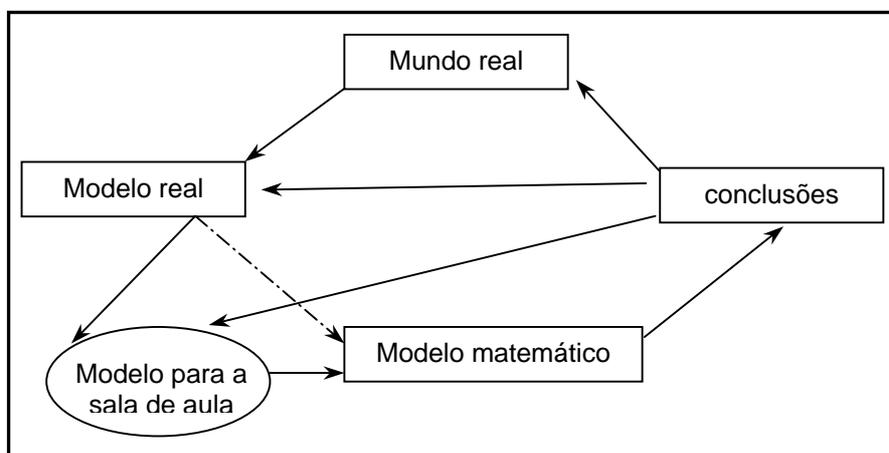
Fonte: Berry; Houston. (1995, p. 24 apud BARBOSA, 2001, p. 15).

**Figura 4. Esquema de Modelagem Matemática**



Fonte: Bassanezi. (1994, p. 64 apud BARBOSA, 2001, p. 15).

**Figura 5. Esquema de Modelagem Matemática**



Fonte: Kerr; Maki. (apud MATOS, 1995, p. 20).

**Figura 6. Modelagem para a sala de aula**

#### Quadro 1. Ciclo da modelagem

O ciclo da Modelagem é um conjunto de processos organizados nas etapas seguintes:

- ✓ identificação dos aspectos da realidade que interessa modelar;
- ✓ seleção dos objetos, relações e outros elementos que são relevantes;
- ✓ idealização dos dados anteriores sob uma forma adequada para a sua representação matemática;
- ✓ escolha de um universo matemático adequado para estabelecer o modelo;
- ✓ tradução para a matemática dos aspectos selecionados da realidade;
- ✓ estabelecimento de relações matemáticas entre os objetos traduzidos, explicitando os pressupostos formulados e as propriedades encontradas;
- ✓ uso de métodos matemáticos para a obtenção de resultados matemáticos e conclusões;
- ✓ interpretação dos resultados e conclusões em função da realidade original;
- ✓ avaliação do modelo, confrontando-o com a realidade, ou comparando-o com outros modelos, ou ainda, com a teoria existente;
- ✓ modificação do modelo ou construção de um novo modelo, se necessário, percorrendo novamente os estágios anteriores.

Fonte: Niss. (1987 apud MATOS, 1995, p. 18-19).

**Quadro 2. Esquema de Modelagem Matemática**

ETAPA	OBJETO DE AÇÃO	ATIVIDADE ESPERADA
Realidade	Estudo de um fenômeno real ou de um processo experimental.	Descrição simplificada dos elementos pertinentes para o problema proposto. Aplicação de um protocolo experimental. Tal descrição é filtrada por um olhar teórico.
Modelo pseudo-concreto	Situação genérica, descontextualizada, abstratamente portadora de propriedades do objeto de estudo. Hipóteses do Modelo: em geral implícitas, porém explícitas para o contexto particular.	Apresentação em linguagem corrente ou esquemática, validação retórica da analogia com a descrição precedente. Confrontação das hipóteses do modelo com os elementos correspondentes da descrição. Conjecturas sobre as propriedades do modelo respondendo à questão.
Modelo Matemático	Conjunto de equações ou de formalizações matemáticas representando as propriedades do Modelo e as hipóteses admitidas.	Colocar em equações ou formalização: à partir das leis do fenômeno estudado e dos conhecimentos teóricos do Modelo pseudo-concreto, escrever matematicamente as relações assinaladas entre as variáveis, num determinado quadro teórico.
Estudo Matemático	Propriedades do Modelo Matemático, decorrentes das hipóteses e das teorias matemáticas usadas.	Demonstração de resultados teóricos internos ao Modelo Matemático. Enunciado formal de uma resposta ao problema matemático proposto.
Confrontação Modelo-Realidade	Formulação em termos correntes dos resultados obtidos. Recontextualização. Confrontação do Modelo completado por esses resultados com as informações acessíveis da realidade.	Comparação dos resultados numéricos ou qualitativos com os dados experimentais correspondentes. Avaliação da margem de erro e da aceitabilidade do Modelo.
Generalização e previsões	Extensão da validade do Modelo a outras situações análogas, condições e generalizações. Previsão dos resultados nas novas situações.	A apreciação da validade e da generalidade do Modelo supõe um conhecimento de especialista da situação estudada. Não é mais uma tarefa do matemático. O especialista relativizará as conclusões, explicações e generalizações resultantes do estudo matemático em função das hipóteses.

Fonte: Henry. (1997, p. 81-83)<sup>14</sup>

A Modelagem Matemática pode ser proposta para desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema; neste caso, o aluno é orientado a construir o seu próprio modelo e os objetivos são:

- ✓ aproximar da matemática uma outra área do conhecimento;
- ✓ enfatizar a importância da matemática para a formação do aluno;
- ✓ despertar o interesse pela matemática ante a aplicabilidade;
- ✓ melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
- ✓ desenvolver a habilidade para resolver problemas;
- ✓ estimular a criatividade. (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p. 18).

<sup>14</sup> Tradução nossa

Para colocar em prática esse projeto, os autores sugerem ao professor cinco passos: **DIAGNÓSTICO**: número de alunos, realidade socioeconômica, tempo de aula, tempo extra-classe dos alunos para pesquisar, conhecimento matemático que os alunos possuem; **ESCOLHA DO TEMA**: pelos alunos ou pelo professor, podendo ser bimestral, semestral ou um único tema, de acordo com as condições, motivação e interesse; **DESENVOLVIMENTO DO CONTEÚDO PROGRAMÁTICO**: o professor deve seguir as etapas do processo de modelagem: conhecer a situação-problema, desenvolver o conteúdo matemático necessário para formulação e resolução do problema com apresentação de exercícios análogos e interpretação-validação do modelo matemático; **ORIENTAÇÃO DE MODELAGEM**: reuniões para acompanhamento e orientação desde a escolha do tema, pesquisas, elaboração do modelo matemático, resolução dos problemas, exposição oral e escrita dos trabalhos e **AValiação DO PROCESSO**: o professor deve avaliar o grau de aprendizagem do aluno por meio de suas observações no desenvolvimento dos trabalhos, provas e exercícios. A Modelagem Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem “parte de uma situação/tema e sobre ela desenvolve questões que tentarão ser respondidas, mediante o uso de ferramental matemático e de pesquisa sobre o tema.” (BIEMBEGUT; HEIN, 2000, p. 28).

Os conceitos sobre a Modelagem da Matemática Aplicada nem sempre podem ser transferidos automaticamente para o campo da Educação Matemática, pois, neste caso, não conduz, obrigatoriamente, à construção de modelos propriamente ditos, no sentido de estabelecer relações matemáticas entre variáveis consideradas relevantes ao fenômeno. (BARBOSA, 2001, p. 36).

Tendo em vista a pretensão desta tese, o uso que se faz da Modelagem Matemática é norteado pelos pressupostos da Matemática Aplicada; entre os esquemas propostos estudados, o de Henry (1997) foi o que mais se aproximou das aspirações deste projeto e, por esse motivo, foi escolhido para servir de fundamento na concepção da seqüência de ensino. No processo de Modelagem, Henry (1997) distingue duas etapas, por terem competências distintas e, portanto, requererem contratos didáticos diferentes; são elas: observação e descrição de uma situação real e formalização do Modelo Matemático. Na primeira, escolhas

são feitas, apoiando-se em conhecimentos científicos, a fim de reter, o que parece pertinente, tendo em vista o problema proposto. Além disso, há a necessidade de uma fase de experimentação que requer a elaboração de um protocolo experimental, ou seja, um conjunto de instruções precisas a serem seguidas para que a experiência possa ser realizada ou reproduzida. Na segunda, os alunos precisam ser capazes de representar e manipular simbolicamente as relações obtidas, a fim de encontrar uma resposta ao problema proposto, além de validar e generalizar os resultados obtidos. Ao concluir, o autor salienta que a etapa de identificar as hipóteses do Modelo, como também a etapa de validação são delicadas e há necessidade de um conhecimento especializado do fenômeno estudado.

No que se segue, cada capítulo corresponde a uma fase da Engenharia Didática, método de pesquisa que norteia o desenvolvimento desta tese.

# CAPÍTULO 2

## ANÁLISES PRELIMINARES

Este capítulo corresponde à primeira fase da Engenharia Didática; em seu início, são apresentados alguns aspectos epistemológicos e históricos que antecederam a criação do Modelo de Poisson, assim como o modo e a situação em que ele foi introduzido; na seqüência, alguns livros didáticos são analisados, sob o ponto de vista matemático e didático, valendo-se de fundamentos da Teoria Antropológica do Didático; finalizando, são feitas considerações sobre o significado institucional de referência do objeto de estudo, conforme a Teoria das Funções Semióticas.

### 2.1 EPISTEMOLOGIA E HISTÓRIA

O estudo de questões epistemológicas, evolução histórica dos conceitos e obstáculos relacionados à Teoria das Probabilidades, segundo Batanero e Serrano (1995), pode ajudar a entender as dificuldades de aplicação dos conceitos na resolução de problemas, ainda hoje observadas.

Struik apresenta seis aspectos que tornam o estudo da história da matemática atrativo:

- 1) ele satisfaz o desejo de muitos de nós de sabermos como as coisas em matemática se originaram e se desenvolveram; 2) o estudo de autores clássicos pode oferecer uma grande satisfação em si mesmo, mas também pode ser um auxiliar no ensino e na pesquisa; 3) ele ajuda a entender nossa herança cultural, não

somente através das aplicações que a matemática teve e ainda tem na astronomia, na física e em outras ciências, mas também devido às relações que ela teve e ainda tem com campos variados como a arte, a religião, a filosofia e as técnicas artesanais; 4) ele pode proporcionar um campo onde o especialista em matemática e os de outros campos da ciência podem encontrar interesse comum; 5) ele oferece um pano de fundo para a compreensão das tendências em educação matemática no passado e no presente; 6) podemos ilustrar ou tornar mais interessante o seu ensino e conversação com historietas. (STRUICK 1985, p. 213).<sup>15</sup>

Na Teoria das Probabilidades, as controvérsias não são de tipo técnico, já que se tem uma axiomatização satisfatória, sem contradições e paradoxos, a de Kolmogorov (1903 – 1987) de 1933, mas são relacionadas à natureza dos objetos que se representam por meio da probabilidade:

A preocupação pelo significado dos termos e conceitos matemáticos leva diretamente à indagação sobre a natureza de os objetos matemáticos, à reflexão ontológica e epistemológica sobre a gênese pessoal e cultural do conhecimento matemático e sua mútua interdependência. (GODINO, 2003, p. 30).<sup>16</sup>

Uma das noções mais antigas é a de acaso, cuja origem deve-se aos jogos de azar, relativamente comuns nas primeiras dinastias da civilização egípcia, por volta de 3500 a.C. O jogo de dados data, provavelmente, de 3000 a.C. com os árabes e, por muitos séculos, o acaso foi motivo de reflexão de grandes pensadores como Aristóteles que defendia a idéia de que tudo o que existe deve ser atribuído ou à natureza, ou à arte, ou ao acaso. De Moivre (1667 – 1754) usava a providência divina para justificar o acaso (MILONE, 2004, p. 57 e 343).

Embora existam dados estatísticos coletados sistematicamente na Antigüidade e Idade Média, como os censos de Roma da época imperial, o estudo formal da Teoria das Probabilidades tem seu início na França, a partir de indagações sobre jogos de azar, que eram para os franceses de então, hábito elegante e sem nenhuma restrição legal; costumeiramente, os ricos investiam grandes somas em jogos e solicitavam aos intelectuais da época, avaliações dos riscos envolvidos (MILONE, 2004, p. 345).

A versão melhor aceita considera como marco inicial da Teoria das Probabilidades, a correspondência, em 1654, entre Pascal (1623 – 1662) e

<sup>15</sup> Tradução de Célia R.A.Machado e Ubiratan D'Ambrósio.

<sup>16</sup> Tradução nossa.

Fermat (1601 – 1665) sobre um problema colocado por Antoine Gombaud (Chevalier De Méré, 1607 - 1684) de como repartir o valor apostado em um jogo honesto de cara ou coroa, cuja vitória deveria ser daquele que primeiro obtivesse três vitórias, mas, que fora interrompido, quando um jogador tinha duas vitórias e o outro, uma. Ainda em 1654, Pascal refere-se à probabilidade, como uma matéria não explorada (repartição do acaso nos jogos) e apresenta à Academia de Paris um novo tratado, a Geometria do Acaso (MARTIN, 1996, p. 44).

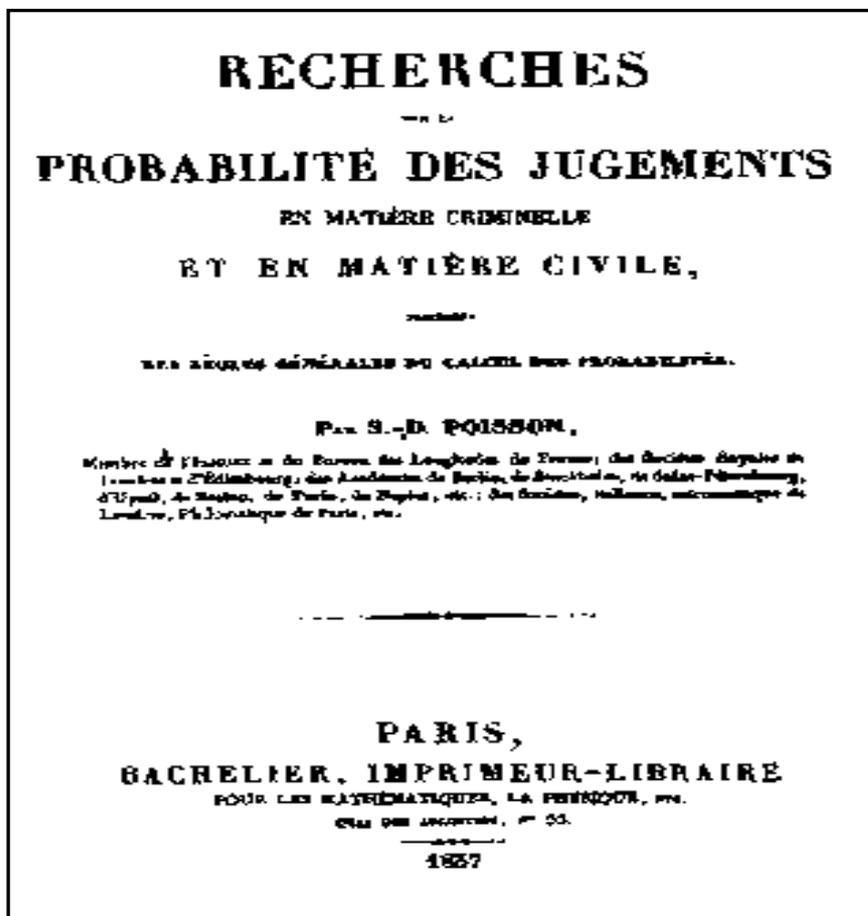
Para Cournot (1801 – 1877), Jaques Bernoulli (1654 – 1705) foi o primeiro responsável pela confusão entre as noções de chance e de probabilidade, pois as usava de maneira equivocada e deve-se a Poisson (1781 – 1840) a formulação explícita da distinção entre elas no livro *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile* (1837), em que chance devia ser aplicada aos eventos (independente do conhecimento que se tem sobre o fato), enquanto probabilidade era relativa aos conhecimentos; mas ele também não respeitou essa distinção em seu livro, que só foi estabilizada com Cournot.

Deve-se a Jaques Bernoulli o termo probabilidade a priori, para o caso de se considerar eventos equiprováveis, enquanto probabilidade a posteriori servia para medir a probabilidade de um evento a partir da observação de sua frequência relativa em um número suficientemente grande de eventos (MARTIN, 1996, p. 67).

A Teoria das Probabilidades começou a ganhar seu espaço no domínio da matemática com Laplace (1749 – 1827), Poisson e Cournot. De início, ela não aparece como uma teoria de matemática pura, mas, como um conjunto de modelos matemáticos indissociáveis de suas aplicações. No século XVIII esses modelos foram reunidos sob a denominação de matemáticas mistas (separadas da matemática, que na época referia-se à Aritmética e à Geometria). A Análise Combinatória já era considerada uma ciência abstrata e racional e a probabilidade foi definida como a relação entre o número de chances favoráveis ao evento e o número total de chances, por Cournot. Assim, tem-se o Cálculo das Probabilidades fundamentado na Análise Combinatória e no Cálculo Integral (MARTIN, 1996, p. 43, 77 e 78).

Na segunda metade do século XIX, a probabilidade matemática foi aplicada

no domínio biológico e nas ciências sociais que, na época era conhecida como estatística moral, integrada à probabilidade dos julgamentos. Para Cournot, não se tratava de medir a probabilidade de que um julgamento era justo ou injusto, como o fez Condorcet (1743 – 1794), mas, em determinar condições ótimas, de acordo com o número de vozes no júri. A história da Teoria é cheia de críticas e em 1840, elas se referiam à objeção em reconhecer sua cientificidade e à contestação de sua legitimidade em nível moral.<sup>17</sup> A resposta de Poisson à Academia de Ciências veio, em 1836, na obra *Notes sur le calcul des probabilités*, na qual o autor diz que o Cálculo das Probabilidades é tão exato quanto a Aritmética. (MARTIN, 1996, p. 255).



Em razão da especificidade desta tese, no que se segue são apresentadas algumas informações sobre a obra de Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, publicada em 1837, na qual aparece pela primeira vez o Modelo de Poisson.

Figura 7. Capa do livro de Poisson, 1837.<sup>18</sup>

Observa-se que grande parte do livro é um verdadeiro tratado sobre a Teoria das Probabilidades e a parte final versa sobre jurisdição. Nele são

<sup>17</sup> O termo probabilidade, do latim *probare*, (a provar) designa originariamente o que é aprovado pela autoridade.

<sup>18</sup> site: <<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Bookpages/Poisson10.gif>> Acesso: 22 out. 2002.

identificadas duas teorias associadas ao nome de Poisson: a generalização da lei dos grandes números de Bernoulli e o Modelo de Poisson. Este último aparece em uma única página (206) como aproximação do Modelo Binomial, apresentado na Figura 8.

**RECHERCHES**

et négligeant ensuite la fraction  $\frac{n}{\mu}$ , la quantité contenue entre les parenthèses, dans cette formule, deviendra

$$1 + \omega + \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^3}{1.2.3} + \dots + \frac{\omega^n}{1.2.3\dots n}.$$

En même temps, on aura

$$p = 1 - \frac{\omega}{\mu}, \quad p^n = \left(1 - \frac{\omega}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\omega}{\mu}\right)^{-n};$$

on pourra remplacer par l'exponentielle  $e^{-\omega}$ , le premier facteur de cette valeur de  $p^n$ , et réduire le second à l'unité; par conséquent, d'après l'équation (9), nous aurons, à très peu près,

$$P = \left(1 + \omega + \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^3}{1.2.3} + \dots + \frac{\omega^n}{1.2.3\dots n}\right) e^{-\omega},$$

pour la probabilité qu'un événement dont la chance à chaque épreuve est la fraction très petite  $\frac{\omega}{\mu}$ , n'arrivera pas plus de  $n$  fois dans un très grand nombre  $\mu$  d'épreuves.

Dans le cas de  $n=0$ , cette valeur de  $P$  se réduit à  $e^{-\omega}$ ; il y a donc cette probabilité  $e^{-\omega}$  que l'événement dont il s'agit n'arrivera pas une seule fois dans le nombre  $\mu$  d'épreuves, et conséquemment, la probabilité  $1 - e^{-\omega}$  qu'il arrivera au moins une fois, ainsi qu'on l'a déjà vu dans le n° 8. Dès que  $n$  ne sera plus un très petit nombre, la valeur de  $P$  différera très peu de l'unité, comme on le voit; en observant que l'expression précédente de  $P$  peut être écrite sous la forme

$$P = 1 - \frac{\omega^{n+1} e^{-\omega}}{1.2.3\dots n+1} \left(1 + \frac{\omega}{n+2} + \frac{\omega^2}{n+2.n+3} + \text{etc.}\right).$$

Si l'on a, par exemple,  $\omega = 1$ , et qu'on suppose  $n = 10$ , la différence  $1 - P$  sera à peu près un cent-millionième, de sorte qu'il est presque certain qu'un événement dont la chance très faible est  $\frac{1}{\mu}$  à chaque

Figura 8. Livro de Poisson, 1837, p. 206.<sup>19</sup>

Nesta obra, Poisson considerou uma variável aleatória com distribuição

<sup>19</sup> Essa página é cópia do livro: *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, gentileza de M. Demailly, da *Bibliothèque de mathématiques et d'informatique – École normale supérieure, Paris*; obtida em: 24 fev. 2005.

Binomial, onde  $\mu$  é o número de repetições independentes do experimento de Bernoulli. Admitindo  $\mu$  suficientemente grande, o número de sucessos dificilmente ultrapassa um certo valor  $n$ . Assim, sendo  $Y$  a variável aleatória Binomial, tem-se que  $P(Y = n)$  é um número “muito pequeno”, dado por:

$$\binom{\mu}{n} \left(\frac{\varpi}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\varpi}{\mu}\right)^{\mu-n} = \frac{\mu!}{n!(\mu-n)!} \frac{\varpi^n}{\mu^n} \left(1 - \frac{\varpi}{\mu}\right)^\mu \left(1 - \frac{\varpi}{\mu}\right)^{-n} =$$

$$= \frac{\varpi^n}{n!} \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{\mu^n} \left(1 - \frac{\varpi}{\mu}\right)^\mu \left(1 - \frac{\varpi}{\mu}\right)^{-n} \text{ e se aproxima de } \frac{\varpi^n}{n!} e^{-\varpi}.$$

Tem-se, portanto, que  $P(Y \leq n) = \left(\frac{\varpi^0}{0!} + \frac{\varpi^1}{1!} + \frac{\varpi^2}{2!} + \dots + \frac{\varpi^n}{n!}\right) e^{-\varpi}$  é a probabilidade de que um evento, cuja chance a cada prova é a fração muito pequena  $\frac{\varpi}{\mu}$ , não ocorra mais do que  $n$  vezes, em um número  $\mu$  de repetições.

Poisson continua com os argumentos e apresenta o caso, quando  $n = 0$ , para o qual se tem  $P(Y = 0) = e^{-\varpi}$  e, portanto, a probabilidade de que o evento ocorra pelo menos uma vez será dada por:  $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - e^{-\varpi}$ . Ele comenta que, se  $n$  é um número pequeno, o valor de  $P(Y \leq n)$  pouco difere da unidade. Assim,

<b>W ~ P(1)</b>	
<b>n</b>	<b>P(W=n)</b>
0	0,36787944
1	0,36787944
2	0,18393972
3	0,06131324
4	0,01532831
5	0,00306566
6	0,00051094
7	0,00007299
8	0,00000912
9	0,00000101
10	0,00000010
<b>1 - P(W≤10)= 0,0000001</b>	

$$P(Y \leq n) = 1 - \frac{\varpi^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\varpi} - \frac{\varpi^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\varpi} - \dots =$$

$$= 1 - \frac{\varpi^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\varpi} \left(1 + \frac{\varpi}{n+2} + \frac{\varpi^2}{(n+2)(n+3)} + \dots\right)$$

$$1 - P(Y \leq n) = \frac{\varpi^{n+1} e^{-\varpi}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{\varpi}{n+2} + \frac{\varpi^2}{(n+2)(n+3)} + \dots\right)$$

Ele exemplifica, considerando  $\varpi=1$  e  $n = 10$ , obtendo

$$1 - P(Y \leq 10) = 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!} e^{-1} \text{ próximo de } 0,00000001,$$

como se pode constatar nos cálculos ao lado.

Neste texto, é possível identificar a aproximação

entre os Modelos Binomial e Poisson, isto é, entre  $\binom{\mu}{n} \left(\frac{\varpi}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\varpi}{\mu}\right)^{\mu-n}$  e  $\frac{\varpi^n}{n!} e^{-\varpi}$ .

Esses resultados ganharam maior credibilidade, quando Antoine-Augustin Cournot (1801-1877) publicou em 1843, o livro: *Exposition de la Théorie des chances et des probabilités*, cujas páginas: 331 e 332 contêm cálculos que validaram a aproximação feita por Poisson. A capa desse livro é apresentada na Figura 9.

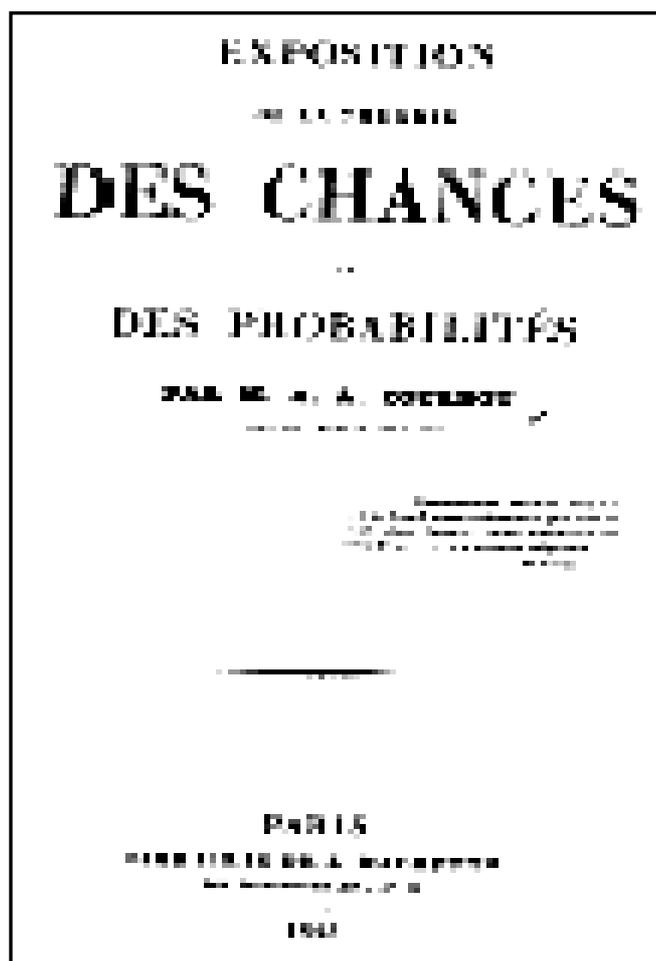


Figura 9. Capa do livro de Cournot, 1843.<sup>20</sup>

Nas referidas páginas, 331 e 332 (Figura 10), Cournot apresenta alguns cálculos que comparam os valores das probabilidades obtidas com as fórmulas da distribuição Binomial (com parâmetros duzentos e um centésimo) e aquela apresentada na obra de Poisson (com parâmetro dois).

<sup>20</sup> Obtida no site << <http://galica.bnf.fr>>>. Acesso em: 23 fev. 2005.

DES ASSURANCES. 331		332 CHAPITRE XIV.																																																																						
<p>par exemple, <math>p=0,001</math>, <math>\omega=0,0015</math>, <math>m=10\ 000</math>: on aura la probabilité 0,571 que le nombre des <i>sinistres</i> ne surpassera pas 12 et ne tombera pas au-dessous de 8, ce qui fait tomber le boni entre les limites <math>3a</math> et <math>7a</math>, ou <math>(5\pm 2)a</math>; et il devra arriver assez fréquemment (environ 48 fois sur 1 000) que la caisse d'assurance supporte un déficit. Il faudrait porter <math>\omega</math> à 0,002, ou au double de la valeur de <math>p</math>, pour rendre le cas d'un déficit extrêmement peu probable (<sup>1</sup>).</p>		<p>Quand on prend <math>m=100\ 000</math>, la valeur de <math>\omega</math> restant égale à 0,0015, ou continuant de surpasser d'un demi pour mille le risque assuré, on a la probabilité <math>\frac{1}{2}</math> que le boni tombera entre les limites</p> $(50\pm 6,742)a,$																																																																						
<p>ou environ 12<sup>c</sup> par 1 000 francs, ce qui cadre assez bien avec le nombre rapporté par M. Lacroix.</p> <p>Comme cas extrême, on peut citer le risque de perte des vaisseaux baleiniers, que les compagnies anglaises évaluent, dit-on, à <math>\frac{1}{100}</math>.</p> <p>(<sup>1</sup>) Quand le produit <math>mp</math> est un nombre aussi peu considérable, il faut absolument tenir compte du second terme de la formule (P), donnée dans la note sur le n° 33, ou même, pour plus d'exactitude, il faut recourir à cette autre formule d'approximation</p> $P=e^{-pm}\left(1+\frac{pm}{1}+\frac{p^2m^2}{1.2}+\dots+\frac{p^nm^n}{1.2.3\dots n}\right), \quad (P)$ <p>qui a été donnée par M. Poisson (<i>Recherches sur la probabilité des jugements</i>, p. 206), et dans laquelle P exprime la probabilité qu'il n'y aura pas plus de <math>n</math> sinistres pour <math>m</math> assurances.</p> <p>Afin qu'on puisse mieux juger du degré d'approximation de cette dernière formule, nous comparerons les nombres qu'elle donne pour <math>p=0,01</math>, <math>m=200</math>, avec ceux que M. Lacroix a pris la peine de calculer par les formules rigoureuses (p. 244 de l'ouvrage cité dans la note précédente), et nous formerons ainsi le tableau suivant, dans lequel <math>n</math> désigne le nombre des sinistres, (<math>p</math>) la probabilité de <math>n</math> sinistres, P la somme des nombres inscrits dans la colonne (<math>p</math>), ou la probabilité qu'il n'arrivera pas plus de <math>n</math> sinistres :</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">VALEURS de n.</th> <th colspan="2">VALEURS DE (p)</th> <th colspan="2">VALEURS DE P</th> </tr> <tr> <th>exactes.</th> <th>approchées.</th> <th>exactes.</th> <th>approchées.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0,133 980</td><td>0,133 335</td><td>0,133 980</td><td>0,133 335</td></tr> <tr><td>1</td><td>0,270 607</td><td>0,270 670</td><td>0,404 647</td><td>0,406 005</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,272 034</td><td>0,270 670</td><td>0,676 681</td><td>0,676 675</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,181 355</td><td>0,180 447</td><td>0,858 036</td><td>0,857 122</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,090 220</td><td>0,090 223</td><td>0,948 256</td><td>0,947 345</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,035 723</td><td>0,036 089</td><td>0,983 979</td><td>0,983 434</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,011 727</td><td>0,012 029</td><td>0,995 706</td><td>0,995 463</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,003 283</td><td>0,003 437</td><td>0,999 989</td><td>0,999 900</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,000 800</td><td>0,000 859</td><td>0,999 789</td><td>0,999 759</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,000 172</td><td>0,000 191</td><td>0,999 961</td><td>0,999 950</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,000 033</td><td>0,000 038</td><td>0,999 994</td><td>0,999 988</td></tr> <tr><td>11</td><td>0,000 005</td><td>0,000 007</td><td>0,999 999</td><td>0,999 995</td></tr> </tbody> </table> <p>Les différences sont de l'ordre de celles qu'il est très-permis de négliger; et l'on sera, à plus forte raison, autorisé à se servir de la formule (<math>p</math>) pour de plus grandes valeurs de <math>m</math>, ou pour de plus petites valeurs de <math>p</math>, comme celles qui se présentent ordinairement. Afin d'éviter une trop grande complication, nous continuerons de supposer dans le texte qu'on peut faire usage de la formule (P) du n° 33, réduite à son premier terme.</p>		VALEURS de n.	VALEURS DE (p)		VALEURS DE P		exactes.	approchées.	exactes.	approchées.	0	0,133 980	0,133 335	0,133 980	0,133 335	1	0,270 607	0,270 670	0,404 647	0,406 005	2	0,272 034	0,270 670	0,676 681	0,676 675	3	0,181 355	0,180 447	0,858 036	0,857 122	4	0,090 220	0,090 223	0,948 256	0,947 345	5	0,035 723	0,036 089	0,983 979	0,983 434	6	0,011 727	0,012 029	0,995 706	0,995 463	7	0,003 283	0,003 437	0,999 989	0,999 900	8	0,000 800	0,000 859	0,999 789	0,999 759	9	0,000 172	0,000 191	0,999 961	0,999 950	10	0,000 033	0,000 038	0,999 994	0,999 988	11	0,000 005	0,000 007	0,999 999	0,999 995
VALEURS de n.	VALEURS DE (p)		VALEURS DE P																																																																					
	exactes.	approchées.	exactes.	approchées.																																																																				
0	0,133 980	0,133 335	0,133 980	0,133 335																																																																				
1	0,270 607	0,270 670	0,404 647	0,406 005																																																																				
2	0,272 034	0,270 670	0,676 681	0,676 675																																																																				
3	0,181 355	0,180 447	0,858 036	0,857 122																																																																				
4	0,090 220	0,090 223	0,948 256	0,947 345																																																																				
5	0,035 723	0,036 089	0,983 979	0,983 434																																																																				
6	0,011 727	0,012 029	0,995 706	0,995 463																																																																				
7	0,003 283	0,003 437	0,999 989	0,999 900																																																																				
8	0,000 800	0,000 859	0,999 789	0,999 759																																																																				
9	0,000 172	0,000 191	0,999 961	0,999 950																																																																				
10	0,000 033	0,000 038	0,999 994	0,999 988																																																																				
11	0,000 005	0,000 007	0,999 999	0,999 995																																																																				

Figura 10. Livro de Cournot, 1843, p. 331 e 332.<sup>21</sup>

Os valores apresentados na página 332 foram completados na Tabela 1, possibilitando que se visualize a proximidade entre os dois modelos e, ainda, o complemento desprezível, ao qual Poisson se referiu.

<sup>21</sup> Obtidas no site << <http://galica.bnf.fr>>>. Acesso em: 23 fev. 2005.

**Tabela 1. Comparação entre distribuição Binomial e de Poisson**

n	Y ~ B(200;0,01)			W ~ P(2)		
	P(Y=n)	P(Y≤n)	1 - P(Y≤n)	P(W=n)	P(W≤n)	1 - P(W≤n)
0	0,133980	0,133980	0,866020	0,135335	0,135335	0,864665
1	0,270666	0,404646	0,595354	0,270671	0,406006	0,593994
2	0,272033	0,676679	0,323321	0,270671	0,676676	0,323324
3	0,181355	0,858034	0,141966	0,180447	0,857123	0,142877
4	0,090220	0,948254	0,051746	0,090224	0,947347	0,052653
5	0,035723	0,983977	0,016023	0,036089	0,983436	0,016564
6	0,011727	0,995704	0,004296	0,012030	0,995466	0,004534
7	0,003283	0,998987	0,001013	0,003437	0,998903	0,001097
8	0,000800	0,999787	0,000213	0,000859	0,999763	0,000237
9	0,000172	0,999960	0,000040	0,000191	0,999954	0,000046
10	0,000033	0,999993	0,000007	0,000038	0,999992	0,000008
11	0,000006	0,999999	0,000001	0,000007	0,999999	0,000001

Os valores exibidos na Tabela 1 permitem que se observe a aproximação entre os valores obtidos nos dois modelos: Binomial e Poisson, como também os pequenos valores das probabilidades excedentes, justificando que elas podem ser desprezadas. Cournot conclui dizendo que as diferenças apresentadas são da ordem daquelas que podem ser negligenciadas e que, por esse motivo, ele se sente autorizado a se servir da fórmula de Poisson, para valores grandes de  $m$  e para aqueles pequenos valores de  $p$ , como os que se observa na prática.

O Modelo de Poisson tem inúmeras aplicações: estrelas no espaço, falhas de materiais, cria de animais no campo, etc., que se distribuem de acordo com a lei de Poisson; se  $W_t$  é uma variável aleatória discreta que fornece o número de ocorrências do evento em um intervalo de dimensão  $t$  unidades, seja de tempo, área, ou volume, então, a distribuição de probabilidades de  $W_t$ , sob determinadas condições (que serão oportunamente apresentadas), é de Poisson com parâmetro  $\lambda t$  e indica-se:  $W_t \sim P(\lambda t)$  e é dada por:

$$P(W_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \text{ para todo } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

A seguir, são apresentados exemplos de observações que se ajustam à distribuição de Poisson, encontrados em Feller (1973, p. 169–174).<sup>22</sup>

<sup>22</sup> Tradução nossa.

Desintegrações radioativas: um exemplo famoso é devido a Rutherford e Geiger (1920), no qual se observou o número de partículas  $\alpha$  emitidas por uma substância radiativa que chega a um contador durante 2608 intervalos de tempo de 7,5 segundos cada um com  $k$  partículas ( $N_k$ ). Os valores da Tabela 2 fornecem o número de intervalos observados, sendo 10.094 partículas em 2.608 intervalos, que fornece uma média de 3,870 partículas; usando esse número, como parâmetro de um Modelo de Poisson, obtém-se os valores teóricos (esperados),  $NP_k$ .

**Tabela 2. Desintegração radioativa – Rutherford, 1920**

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\geq 10$
$N_k$	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	16
$NP_k(3,87)$	54,40	210,52	407,36	525,50	508,42	393,52	253,82	140,33	67,88	29,19	17,06

Fonte: Feller (1973, p.170).

Pela Tabela 2, pode-se apreciar que os valores teóricos,  $NP_k(3,87)$ , são relativamente próximos daqueles observados,  $N_k$ . A fim de julgar a precisão do ajuste, isto é, a magnitude das flutuações do acaso, o teste qui-quadrado é indicado. Assim,

$$\chi^2_{\text{calculado}} = \sum_i \frac{(N_{ki} - NP_{ki})^2}{NP_{ki}} = 12,885 \quad \text{e} \quad P(\chi^2_{(9)} > 12,885) = 0,168 \quad \text{cerca de 17\%}$$

Pode-se esperar que, em condições ideais, aproximadamente 17, de 100 casos em que se faça uma comparação análoga à feita, apresentem ajuste pior que aquele exibido na Tabela 2. O valor crítico para  $\chi^2_{(9)}$ , ao nível de 5%, por exemplo, é 16,919 que é maior do que o calculado e, portanto, neste nível, não existem motivos para se rejeitar o ajuste entre os resultados observados e aqueles obtidos com o Modelo de Poisson.

Bombardeios aéreos sobre Londres: esse é um exemplo de distribuição espacial de pontos aleatórios e refere-se ao bombardeio aéreo sobre Londres durante a Segunda Guerra Mundial. A área foi dividida em 576 regiões de um quarto de quilômetro quadrado cada. A seguir, a Tabela 3 a seguir registra a distribuição das 537 bombas;  $N_k$  representa o número de áreas que receberam  $k$  bombas. Estimando o número médio de bombas por área,  $537/576 = 0,932$  tem-

se uma estimativa do parâmetro da variável aleatória de Poisson a ser ajustada aos dados.

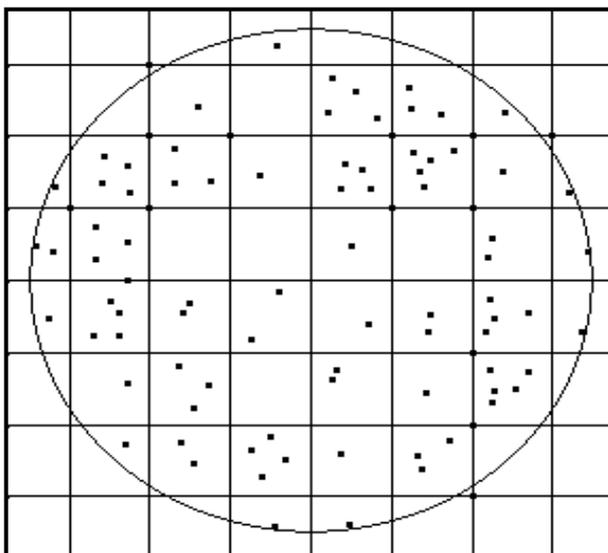
**Tabela 3. Bombardeio aéreo sobre Londres – Segunda Guerra Mundial**

K	0	1	2	3	4	≥ 5
$N_k$	229	211	93	35	7	1
$NP_k(0,932)$	226,81	211,39	98,51	30,60	7,13	1,57

Fonte: Feller (1973, p. 171).

Tem-se, portanto,  $\chi^2_{\text{calculado}} = \sum_i \frac{(N_{ki} - NP_{ki})^2}{NP_{ki}} = 1,169$  e  $P(\chi^2_{(4)} > 1,17) = 0,88$ .

O valor crítico para  $\chi^2_{(4)}$ , ao nível de 5%, por exemplo, é 9,49 que é maior do que aquele calculado e, portanto, neste nível, não há motivos para rejeição do ajuste entre os resultados observados e aqueles obtidos com o Modelo de Poisson. Pode haver uma tendência para achar que os pontos de ataque deveriam ser próximos; se isso fosse verdade, deveria haver uma freqüência maior em áreas muito ou pouco bombardeadas, do que naquelas intermediárias. Os valores da Tabela 3 mostram que existe aleatoriedade na distribuição dos bombardeios em Londres.



**Figura 11. Bactérias em uma lâmina de Petri.**

Bactérias em uma lâmina de Petri: uma lâmina (ou placa) de Petri<sup>23</sup> é uma embalagem de cristal ou plástico, na qual se dispõe um meio de cultivo para se fazer crescer bactérias ou fungos. A Figura 11 representa uma fotografia de uma lâmina de Petri com colônias de bactérias visíveis ao microscópio, na forma de manchas escuras.

Analogamente ao exemplo anterior, a Tabela 4 contém os números de

<sup>23</sup> Definição e figura obtidas em Mediciclopedia, no site: <[www.iqb.es/diccio/p/plhtm#placa\\_de\\_petri](http://www.iqb.es/diccio/p/plhtm#placa_de_petri)>. Acesso em: 25 nov. 2004.

regiões que têm  $k$  manchas escuras em oito experimentos com diferentes classes de bactérias, que podem ser obtidos analogamente ao caso anterior.

os resultados, apresentados na Tabela 4, podem ser obtidos.

**Tabela 4. Contagem de Bactérias**

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	nível $\chi^2$
$N_k$	5	19	26	26	21	13	8		97
$NP_k$	6,1	18,0	26,7	26,4	19,6	11,7	9,5		
$N_k$	26	40	38	17	7				66
$NP_k$	27,5	42,2	32,5	16,7	9,1				
$N_k$	59	86	49	30	20				26
$NP_k$	55,6	82,2	60,8	30,0	15,4				
$N_k$	83	134	135	101	40	16	7		63
$NP_k$	75,0	144,5	139,4	89,7	43,3	16,7	7,4		
$N_k$	8	16	18	15	9	7			97
$NP_k$	6,8	16,2	19,2	15,1	9,0	6,7			
$N_k$	7	11	11	11	7	8			53
$NP_k$	3,9	10,4	13,7	12,0	7,9	7,1			
$N_k$	3	7	14	21	20	19	7	9	85
$NP_k$	2,1	8,2	15,8	20,2	19,5	15,0	9,6	9,6	
$N_k$	60	80	45	16	9				78
$NP_k$	62,6	75,8	45,8	18,5	7,3				

Fonte: Feller (1973, p. 172).

Nota: o último elemento de cada experimento inclui os casos maiores ou iguais ao valor de  $k$ .

Além das inúmeras aplicações do Modelo de Poisson, nas mais variadas situações, como os exemplos citados, outro aspecto, não menos importante e interessante, refere-se ao Processo de Poisson, que será brevemente apresentado na seqüência.

Quando se define que para cada número real positivo  $t$ , o número de ocorrências de um evento em um intervalo de amplitude  $t$ , sob determinadas condições, tem distribuição de Poisson e parâmetro  $\lambda t$ , não se tem exatamente uma única variável aleatória definida. Na verdade, trata-se de uma coleção (infinita) de variáveis aleatórias, sendo cada uma determinada pela escolha do valor de  $t$ . Essa coleção é conhecida como Processo de Poisson; dessa forma, “um Processo de Poisson é gerado sempre que um evento ocorra em algum intervalo de tempo, para o qual as Hipóteses de Poisson sejam satisfeitas.” (MEYER, 2003, p.199).

Apesar do desmembramento dessa noção ser interessante e importante,

não se tem, nesta pesquisa, o objetivo de entrar no mérito do assunto. Por esse motivo, a referência a ele limitar-se-á a apresentação de um único exemplo de aplicação, obtido em Meyer (2003, p.199).

Uma peça de maquinaria, quando funciona adequadamente, dá um lucro de  $L$  reais por hora ( $L > 2$ ) a uma firma. Essa peça pode falhar em momentos inesperados; suponha que o número de falhas da referida peça seja, em média,  $\lambda t$  em qualquer período de  $t$  horas de duração e que ele pode ser considerado uma variável aleatória,  $W_t$ , com distribuição de Poisson. Se a máquina falhar  $k$  vezes em  $t$  horas, sabe-se que o prejuízo sofrido (parada da máquina seguida de reparo) é igual a  $(k^2+k)$  reais; assim, o prejuízo pode ser considerado uma variável aleatória dada por:  $W_t^2 + W_t$  e, portanto, o lucro total (LT) será dado por:

$$LT = L \cdot t - (W_t^2 + W_t).$$

Interessa saber para qual valor de  $t$  o lucro esperado é máximo, isto é, deve-se determinar o valor de  $t$  que maximiza  $E(LT)$ .

$$\begin{aligned} \text{Mas, } E(LT) &= E(L \cdot t - (W_t^2 + W_t)) = E(L \cdot t) - E(W_t^2) - E(W_t) = \\ &= L \cdot t - (\lambda t + (\lambda t)^2) - \lambda t = L \cdot t - 2 \cdot \lambda t - (\lambda t)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, o valor de } t \text{ deve satisfazer: } L - 2 \cdot \lambda - 2 \cdot \lambda^2 \cdot t = 0 \Rightarrow t = \frac{L - 2 \cdot \lambda}{2 \cdot \lambda^2} \text{ horas.}$$

Concluindo, a fim de garantir um lucro total esperado máximo é interessante que paradas programadas da máquina a cada  $\frac{L - 2 \cdot \lambda}{2 \cdot \lambda^2}$  horas sejam feitas.

## 2.2 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, uma análise de livros didáticos é apresentada, valendo-se de noções da Teoria Antropológica do Didático.

Os livros foram selecionados dentre os que são indicados na bibliografia de cursos universitários em que esse conteúdo é desenvolvido, não se limitando aos

de Matemática, mas incluindo também os de Engenharia e Computação. Depois de um breve levantamento em Instituições de Ensino Superior do País, seis livros foram selecionados; a grande variedade de livros indicados impossibilitou a determinação dos mais freqüentes para fazerem parte dessa análise. Optou-se, portanto, por seis livros escritos em português, sendo dois traduzidos e quatro de autores nacionais. Esta escolha fundamenta-se na hipótese de que a grande maioria dos alunos em cursos de graduação não domina suficientemente a língua inglesa (a quase totalidade dos livros estrangeiros indicados) e sempre que a bibliografia permite, opta por aqueles escritos em português. Além desse fato, a opção por quatro de autores nacionais fundamenta-se na hipótese de que as situações propostas devem ser mais próximas da realidade dos alunos. A busca por elementos de significado institucional de referência, do objeto Modelo de Poisson, que são influenciados também pelo momento histórico, segundo a Teoria das Funções Semióticas, motivou a escolha de livros em edições atuais e das décadas de oitenta e noventa do século XX.

### 2.2.1 OS LIVROS SELECIONADOS PARA ANÁLISE

**Livro 1.** MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. *Noções de Probabilidade e Estatística*. 6. ed. São Paulo: Edusp, 2004.

**Livro 2.** BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística Básica*. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2004.

**Livro 3.** FONSECA, J. S.; MARTINS, G. A. *Curso de Estatística*. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1982.

**Livro 4.** MORETTIN, L. G. *Estatística Básica*. 7. ed. v. 1. São Paulo: Makron Books, 1999.

**Livro 5.** MEYER, P. L. *Probabilidade. Aplicações à Estatística*. 2. ed. Tradução de Ruy de C. B. Lourenço Filho. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

**Livro 6.** SPIEGEL, M. R. *Estatística*. 3. ed. Tradução de Pedro Cosentino. São Paulo: Makron Books, 1993.

Além das justificativas já apresentadas para a seleção dos livros didáticos, acrescentam-se: Livros 1 e 2 por serem edições de 2004, em sua sexta e quinta edições, respectivamente, garantindo uma razoável representatividade do momento histórico atual; Livro 3, por ser da década de oitenta, em sua terceira edição e por ser escrito para o Curso de Matemática; Livro 4, por ser do final da década de noventa e, em sua sétima edição, que justifica sua aceitação em um número razoável de instituições por um bom período; Livro 5, por ser tradicional nos Cursos de Estatística, ser traduzido para o português e talvez aquele dentre os mais indicados; finalmente, Livro 6, por ser traduzido e da Coleção Schaum, que tem exemplares em vários ramos de estudo.

### **2.2.2 ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DOS LIVROS SELECIONADOS**

Na Teoria Antropológica do Didático, existe uma co-determinação entre as tarefas didáticas e matemáticas. No presente estudo, pretende-se descrever e analisar as organizações matemática e didática propostas nos livros selecionados. A primeira refere-se à realidade matemática apresentada pelo autor e a segunda, o modo que esse conteúdo é desenvolvido. De acordo com essa Teoria, as duas organizações (ou praxeologias) podem ser descritas e analisadas por meio de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

Dessa forma, alguns aspectos, de interesse no presente estudo, que são considerados variáveis que podem influenciar a construção e a relação ao objeto matemático Modelo de Poisson, serão organizados em tarefa, técnica e bloco tecnológico/teórico que nortearão a análise dos livros didáticos selecionados; não se pretende fazer nenhum juízo de valor quanto à qualidade dos livros, mas discuti-los sob o olhar das tarefas criadas. Além disso, as leituras efetuadas sugeriram que tais variáveis fossem colocadas, por hipótese, como influenciadoras no estudo desse conceito, mas, de modo algum esgotam as variáveis didáticas e de conteúdo que podem ser consideradas.

### 2.2.2.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA PRAXEOLOGIA DIDÁTICA

Neste tópico, pretende-se descrever e analisar as escolhas didáticas feitas pelos autores dos livros selecionados ou, em outras palavras, as praxeologias didáticas construídas em relação ao objeto Modelo de Poisson.

Uma praxeologia didática, em relação a um objeto matemático, surge como resposta a questões didáticas do tipo: como ensinar ... ? ou como determinar ... ? (GALLEGO, 2004). Essas questões são traduzidas em tarefas didáticas a serem executadas e as respostas referem-se às técnicas didáticas escolhidas, no caso, pelos autores dos livros didáticos (CHEVALLARD, 1999); no bloco tecnológico/teórico tem-se as explicações e justificativas relacionadas às técnicas adotadas.

**Questão 1.** Como construir o Modelo de Poisson?

**Técnica 1.1.** pela fórmula.

**Técnica 1.2.** como limite do Modelo Binomial.

**Técnica 1.3a.** baseadas nos Postulados de Poisson, mas, sem apresentar a demonstração.

**Técnica 1.3b.** baseadas nos Postulados de Poisson, apresentando a demonstração.

**Técnica 1.4.** baseadas nos Postulados de Poisson e usando limite do Modelo Binomial.

**Bloco tecnológico/teórico 1:**

A opção de considerar esta tarefa fundamenta-se no resultado de Batanero e Serrano (1995), quando estes autores enfatizam que a introdução de um conceito e de sua notação deve ser gradual, a fim de explicar matematicamente as regularidades observadas nas várias publicações de Henry (1997; 2003), nas quais o autor considera diferentes aspectos na aproximação ao modelo e, também, nos critérios de avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) para 2005, em especial, no critério de correção e adequação metodológicas, que diz:

## 2. Correção e adequação metodológicas

Por mais diversificadas que sejam as concepções e práticas de ensino e aprendizagem, promover a apropriação do conhecimento implica escolha de alternativas metodológicas que contribuam para um bom processo de ensino-aprendizagem. Essas escolhas devem incluir estratégias que mobilizem e desenvolvam várias competências cognitivas básicas, como a observação, a compreensão, a argumentação, a organização, a análise, a síntese, a comunicação de idéias matemáticas, o planejamento, a memorização, etc. Portanto, o livro didático que deixar de contemplar de forma evidente o trabalho adequado dessas competências poderá comprometer o desenvolvimento cognitivo do educando. Nesse sentido, qualquer que seja sua opção, o livro didático deve atender a dois requisitos metodológicos básicos:

- ✓ não deve privilegiar, entre as habilidades e competências que deve mobilizar e desenvolver, uma única, mas propiciar o desenvolvimento equilibrado de várias habilidades e competências;
- ✓ deve ser coerente com a proposta que explicita, respeitando os preceitos que lhe dão identidade e permitem não só identificá-la, mas compreender seu alcance. No caso de o livro didático recorrer a mais de um modelo metodológico, deve indicar claramente sua articulação. (PNLD, 2005, p. 202-203).

O autor de um livro pode construir o Modelo de Poisson, valendo-se de mais de uma das técnicas apresentadas. Isso se dá quando é objetivado, na organização matemática, que o leitor resolva problemas em que a única informação disponível seja a média, e aqueles que podem ser resolvidos pelo Modelo Binomial e o uso da aproximação Poisson é conveniente. Nesse momento, não se pretende avaliar se o autor deixa para o leitor a tarefa matemática de decidir pelo uso ou não da aproximação.

Como técnica 1.1, tem-se a abordagem clássica, na qual o conceito é introduzido pela definição formal, ou seja, uma variável aleatória discreta que assume valores inteiros de zero a infinito com distribuição de probabilidades dada pela fórmula de Poisson; nesse caso, conceitos de exponencial e fatorial precisam estar disponíveis.

Como técnica 1.2, tem-se o Modelo de Poisson introduzido como ferramenta de cálculo aproximado para probabilidades binomiais em que o valor de  $n$ , número de repetições, dificulta a obtenção dos resultados. Nesse caso, há necessidade de que os leitores tenham disponíveis conceitos relativos a limite, além daqueles citados na técnica anterior.

Como técnica 1.3, tem-se inicialmente algumas hipóteses admitidas a respeito de uma variável aleatória discreta e o Modelo de Poisson é construído valendo-se delas. Os conteúdos envolvidos nesse desenvolvimento, como solução de equações diferenciais lineares homogêneas e não homogêneas de primeira ordem, impossibilitam a apresentação dessa técnica a leitores que não tenham um bom conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral. Por esse motivo, ela foi subdividida em 3a e 3b, sem e com demonstração formal, respectivamente, a fim de verificar se o autor admite tal conteúdo como pré-requisito, ou impõe o resultado sem justificativa.

A técnica 1.4 é semelhante àquela apresentada por Henry e Dantal (1997), onde, inicialmente, tem-se a definição da variável aleatória: número de partículas emitidas em um intervalo de tempo  $[0, t]$ , em seguida, os cinco postulados enunciados e, posteriormente, a definição de uma outra variável aleatória: número de subintervalos de comprimento  $t/n$ , obtidos com a divisão do intervalo de tempo. Esta variável é binomial e, quando  $n$  é suficientemente grande, por aproximação, tem distribuição de Poisson. Como em cada subintervalo ocorre no máximo um evento, a variável definida inicialmente tem a mesma distribuição que esta.

**Questão 2.** Como representar o Modelo de Poisson?

**Técnica 2.1.** por tabela.

**Técnica 2.2.** graficamente.

**Técnica 2.3.** algebricamente.

**Técnica 2.4.** usando um software estatístico.

**Bloco tecnológico/teórico 2:**

Para Duval (2000, p. 58-59), não existe conhecimento sem representação e é preciso conhecer aquelas que são cruciais para aprender matemática. Assim admitindo, pretende-se com essa tarefa conhecer os registros de representação apresentados pelos autores dos livros selecionados.

Batanero, Tauber e Sánchez (2001) concluíram que a variada gama de representações de um conceito converte-se em ferramentas dinâmicas de exploração que podem favorecer a aquisição de muitos dos elementos de

significado considerados no ensino, além de que o uso de um aplicativo estatístico pode contribuir para a determinação das probabilidades, sem que seja necessário o uso de tabelas pré-elaboradas.

Com o aumento do número de alunos com um computador em casa e de aplicativos disponíveis na Internet, é interessante observar se existe a preocupação do autor em sugerir e orientar o seu uso. A agilidade que um aplicativo pode proporcionar em determinar tabelas e construir os gráficos correspondentes, além do dinamismo quando se altera o parâmetro da distribuição e muito rapidamente se pode obter a mudança ocorrida na tabela e no gráfico podem contribuir, conforme constataram Batanero, Tauber e Sánchez (2001), para o aumento de elementos de significado pessoal que os alunos possam adquirir como, por exemplo, as propriedades do Modelo estudado.

Nesta tese, também, há interesse em observar o uso de aplicativos estatísticos; a orientação nos livros pode ser o primeiro e, muitas vezes, o único contato a sugerir e ajudar o aluno nesse momento.

**Questão 3.** Como definir o uso da aproximação Poisson ao Modelo Binomial?

**Técnica 3.1.** indicar em cada problema.

**Técnica 3.2.** definir valores limites para os parâmetros do Modelo Binomial.

### **Bloco tecnológico/teórico 3:**

O uso do Modelo de Poisson para obter resultados aproximados em problemas binomiais é bastante simples de ser aplicado. O PNLD (2005) sugere que as estratégias propostas nos livros didáticos desenvolvam competências como a análise de relações e estruturas, o que reforça a importância de se considerar essa tarefa.

Na técnica 3.1, considera-se que o autor sugere, no próprio problema, que o leitor use a aproximação Poisson.

Na técnica 3.2, considera-se o caso em que o autor define valores limites para os parâmetros  $n$  e  $p$  do Modelo Binomial, para que a aproximação possa ser usada.

Quando as duas técnicas são selecionadas, em relação a um mesmo livro,

deve-se entender que o autor apresentou o critério de decisão, mas o uso é indicado em cada problema proposto. No caso em que apenas a técnica 3.2 é selecionada, deve-se considerar que a decisão da aproximação é tarefa deixada para o leitor. Se nenhuma delas é selecionada, significa que a opção didática do autor é pela não apresentação desse conteúdo.

**Questão 4.** Como apresentar os problemas referentes ao Modelo de Poisson?

**Técnica 4.1.** apresentar exemplos durante o desenvolvimento do conteúdo ou uma série de problemas resolvidos; número de problemas.

**Técnica 4.2.** apresentar uma série de problemas propostos sobre o Modelo de Poisson; número de problemas.

**Técnica 4.3.** apresentar uma série de problemas propostos sobre os Modelos Discretos misturados; número de problemas sobre o Modelo Poisson.

#### **Bloco tecnológico/teórico 4:**

Esta tarefa tem a finalidade de descrever as escolhas didáticas do autor em relação aos problemas apresentados no livro.

Em especial, pretende-se investigar se o autor deixa para o leitor a identificação do modelo adequado, isto é, se os problemas que podem ser resolvidos pelo Modelo de Poisson estão misturados aos de outros modelos discretos. Se isso ocorrer, mas, no enunciado for identificado que ele é de Poisson, ele será contado na técnica 4.2.

Assim como na Análise Combinatória, a separação dos exercícios, de acordo com a técnica de contagem a ser usada, deixa de lado a tarefa do leitor escolher a técnica adequada; isso acontece também no caso dos Modelos de Distribuição de Probabilidades, quando os exercícios são propostos separadamente de acordo com o Modelo.

A técnica de colocar problemas de modelos discretos e contínuos conjuntamente foi descartada, pois nenhum dos livros selecionados apresentou essa opção. Esta técnica foi ressaltada pelos resultados de Batanero, Tauber e Sánchez (2001), dentre os quais os autores constataram a dificuldade dos alunos para discriminar os casos em que uma variável discreta pode ou não ser

aproximada por uma distribuição contínua.

Além de como apresentar os problemas, também, o número deles é uma escolha didática do autor; por esse motivo, na técnica selecionada será exibido o número de problemas. O autor de um livro pode optar por mais de uma técnica, dentre as definidas.

**Questão 5.** Como dar condições ao leitor, para que ele possa adquirir os elementos de significado do Modelo de Poisson?

**Técnica 5.1.** apresentar problemas contextualizados; número de problemas.

**Técnica 5.2.** apresentar problemas que comparem dados reais ou simulados com aqueles obtidos com o Modelo de Poisson; número de problemas.

#### **Bloco tecnológico/teórico 5:**

Em razão do interesse demonstrado no presente estudo, com a técnica 5.2 pretende-se investigar, se o autor apresenta um conjunto de dados reais ou simulados para serem comparados com os teóricos, obtidos com o Modelo de Poisson. Recentemente, o trabalho de Batanero, Tauber e Sánchez (2001) constatou a dificuldade dos alunos para diferenciar distribuição teórica e empírica. Dantal (1997) observou que para a maioria dos alunos do segundo grau, os conteúdos de ensino não tiveram nenhum sentido com a construção do modelo feita sem a observação da realidade.

Quando se fala em dar sentido aos elementos do Modelo de Poisson, quer-se dizer: o valor do parâmetro, da média, do desvio padrão, das probabilidades que podem ser desconsideradas por assumirem valores desprezíveis e da probabilidade máxima. Conforme sugere o PNLD (2005) admite-se, neste trabalho, que problemas contextualizados (DANTE, 1988 apud SOARES; PINTO, 2001) envolvem situações mais próximas do cotidiano com valores reais ou simulados que possibilitam a ampliação do significado atribuído a tais elementos. Pode ser que o leitor ao encontrar um resultado absurdo e observá-lo no contexto da situação, perceba a incoerência e reconsidere sua solução.

As conexões dos conteúdos estudados com o contexto sócio cultural contemporâneo têm sido uma das recomendações mais freqüentes e amparadas em pesquisas acadêmicas. Com isso, a contextualização passou a ser um dos requisitos presentes na

avaliação de currículos e livros didáticos. Tem sido observado, no entanto, desvios na busca em atender tal requisito. O mais freqüente é tentar encontrar para todos os conceitos um vínculo direto com situações do dia-a-dia dos alunos, o que tem sido fonte de muitas contextualizações artificiais e inadequadas. (PNLD, 2005, p. 205).

Considera-se que o número de exemplos, problemas resolvidos ou propostos contextualizados são escolhas didáticas do autor. Como na questão 4, tem-se a totalidade de problemas apresentados no livro, por diferença pode-se saber se o autor apresenta, também, problemas teóricos, isto é, problemas em que ele define o parâmetro do modelo e pede para calcular algumas probabilidades, valor esperado, variância, desvio padrão, ou então, aqueles de aproximação do Modelo Binomial em que são dados os valores dos parâmetros e o leitor deve calcular algumas probabilidades.

No artigo de Batanero, Tauber e Sánchez (2001), os autores analisaram vários elementos de significado da distribuição normal e constataram que os alunos adquiriram muitos deles e, também, apresentaram dificuldades como, por exemplo, discriminar dados empíricos e os obtidos com o modelo e interpretar resumos estatísticos, entre outros. Esse artigo sugere que a técnica 5.2 pode contribuir para os leitores adquirirem alguns elementos de significado da distribuição de Poisson.

Uma vez definidos os itens, que serão considerados na descrição e análise dos livros selecionados, a Tabela 5 apresenta os resultados.

Três dos seis livros considerados introduzem o Modelo de Poisson pela fórmula, apesar de serem livros de edições recentes e apenas três apresentaram mais de uma aproximação ao modelo. A exploração das propriedades praticamente não é feita; a representação algébrica é usada no cálculo de algumas probabilidades, limitando-se a substituir valores na fórmula. A sugestão das pesquisas recentes para se trabalhar com experimentos da realidade a fim de serem modelados, praticamente não aparece e, quando aparece, não é explorada. (HENRY, 2003; BATANERO; TAUBER; SÁNCHEZ, 2001).

O uso de registros de representação limita-se ao tratamento da representação algébrica, e em nenhum momento foi encontrada a conversão para

outro registro.<sup>24</sup>

**Tabela 5. Resultado da análise de livros didáticos (organização didática)**

Tarefa	Técnica	Liv1	Liv2	Liv3	Liv4	Liv5	Liv6
1. construir o Modelo Poisson	1.1 fórmula	X	X			X	X
	1.2 lim. Bin.		X		X	X	X
	1.3a Post. sem dem.						
	1.3b Post. com dem.					X	
	1.4 Post. e lim. Bin.		X	X			
2. representar o Modelo Poisson	2.1 tabela	X	X				X
	2.2 gráfico	X					
	2.3 algébrica	X	X	X	X	X	X
	2.4 aplicativo		X				
3. determinar uso da aproximação	3.1 indica no problema					X	
	3.2 apresenta critério		X		X		X
4. problemas apresentados e quantidade	4.1 resolvido	2	2	1	15	5	3
	4.2 proposto separado	6	6	8	6	14	3
	4.3 proposto junto	0	1	0	5	1	0
5. problema - dar significado	5.1 contextualizado	5	4	8	20	17	5
	5.2 real X teórico	1	2	0	0	0	1

Fonte: informações obtidas nos livros analisados.

Nota: nas tarefas 4 e 5 tem-se o número de problemas.

Embora o uso de computadores na escola esteja em pauta nos dias de hoje, os livros estão longe de contribuir para seu ensino; a maioria não sugere seu uso, e, quando o faz, limita-se a exibir a tela final, sem orientação ou explicação. A apresentação de tabelas e gráficos nem sempre está dentro das normas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), embora sejam livros de nível universitário com conteúdo de Estatística.

Os problemas tanto resolvidos como propostos são, em sua maioria, contextualizados, o que pode favorecer o aprendizado. A tarefa de identificar o modelo a ser usado nos exercícios praticamente não é explorada nos livros analisados.

Vergnaud (1994) ressalta a importância de se trazer fatos históricos para os livros didáticos a fim de que os leitores tenham conhecimento das conjecturas e mudanças das idéias matemáticas ao longo do tempo, tornando-se mais conscientes das suas próprias dificuldades e concepções. Além de que, na ficha

<sup>24</sup> Tratamento e conversão no sentido definido por Duval (2000, p. 63-66).

de avaliação do PNLD (2005, p. 207) tem-se: “1.2 – Há referências aos processos históricos de produção do conhecimento matemático e estas contribuem para a aprendizagem da Matemática?”

Em nenhum dos livros houve referência a fatos históricos, o que torna atual a citação:

Não faz muito tempo, a maioria dos matemáticos mostrava pouco interesse, e alguns deles até um certo desprezo, pela história da matemática e por seus historiadores. Este conflito ainda não terminou. (STRUIK, 1985, p. 191).

De modo geral, pode-se concluir que os livros didáticos analisados apresentam o Modelo de Poisson de modo tradicional, mesmo em edições atuais. Os problemas, embora contextualizados, em sua maioria não se referem a dados reais. O uso do computador aparece em alguns poucos casos, muito discretamente, e só aqueles que dominam esse ambiente podem fazer uso desse conteúdo. “O livro didático exerce grande influência sobre a atuação do professor em sala de aula, pois ele se torna, freqüentemente, a única ferramenta disponível para o seu trabalho.” (PNLD, 2005, p. 196).

#### **2.2.2.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA PRAXEOLOGIA MATEMÁTICA**

Neste item, serão descritas e analisadas as praxeologias matemáticas que podem ser construídas em relação ao Modelo de Poisson. Neste caso, de acordo com a Teoria Antropológica do Didático, pode-se valer da organização em tarefa, técnica e bloco tecnológico/teórico, que pode ser diferente, de acordo com a técnica adotada (CHEVALLARD, 1999); assim considerando, ele é apresentado logo a seguir de cada técnica e, ao final, existem algumas explicações, em um bloco tecnológico/teórico geral.

De acordo com Chevallard (2001), há uma estreita relação e influência entre as organizações matemática e didática, que ele define como co-determinação; portanto, muitas das tarefas matemáticas, correspondentes às questões que são apresentadas a seguir, estão relacionadas com as tarefas didáticas do tópico anterior.

**Questão 1.** Como introduzir a fórmula da distribuição de probabilidades de uma

variável aleatória com distribuição de Poisson?

**Técnica 1.1.** construir a fórmula baseada nos Postulados de Poisson.

**Bloco tecnológico/teórico 1.1:**

Esta técnica requer conhecimentos avançados de Cálculo Diferencial e Integral, como a solução de um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem e a sua adoção considera que o leitor os tenha disponíveis. A dedução é longa e com vários pontos que precisam estar explícitos, mantendo as expressões intermediárias para que o leitor possa acompanhar seu desenvolvimento. (GRUPO AZARQUIEL, 1993).

Para simplificar a apresentação desta técnica, considerar-se-á o caso de um experimento aleatório, cujos acontecimentos repetem-se ao longo do tempo. No caso em que a repetição se dá no espaço, a demonstração é análoga. As notações utilizadas e o desenvolvimento da demonstração adotado foram sugeridos em Guimarães e Cabral (1997, p. 168–170; 183–186).

Seja  $W$  a variável aleatória discreta definida pelo número de ocorrências em um intervalo de tempo de duração  $t$ . Dessa forma,  $W$  pode assumir os valores: 0, 1, 2, 3, ..., com probabilidades respectivas:  $p_0(t)$ ,  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ ,  $p_3(t)$ , ..., isto é,  $p_k(t)$  é a probabilidade de  $k$  ocorrências no tempo  $t$ .

Considere agora uma partição do intervalo de tempo  $t$  em subintervalos de pequena duração ( $\Delta t$ ) e que  $\Delta P_k$  seja a probabilidade de  $k$  ocorrências em um intervalo de dimensão  $\Delta t$ ,  $\forall k, k = 0, 1, 2, 3, \dots$

A fim de construir um modelo matemático que permita a determinação dessas probabilidades, faz-se necessário admitir as seguintes condições, conhecidas como Hipóteses de Poisson ou Postulados de Poisson:

$C_1$ . os números de ocorrências registrados nos intervalos da partição são independentes entre si;

$C_2$ . a distribuição do número de ocorrências em cada intervalo é a mesma para todos os intervalos da partição;

$C_3$ . representando por  $\Delta P_1$  a probabilidade de se registrar exatamente uma ocorrência, em um intervalo  $\Delta t$ ,  $\Delta P_1$  é considerado proporcional a  $\Delta t$ , isto é,

existe um número real positivo  $\lambda$ , tal que,  $\Delta P_1 \cong \lambda \cdot \Delta t$ . Ainda mais,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P_1}{\Delta t} = \frac{dP_1}{dt} = \lambda;$$

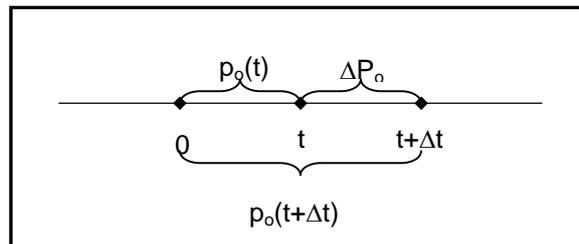
C<sub>4</sub>. representando por  $\Delta P_k$  ( $k \geq 2$ ) a probabilidade de se registrarem k ocorrências em um intervalo  $\Delta t$ ,  $\Delta P_k$  ( $k \geq 2$ ) é desprezível quando comparado a  $\Delta P_1$ . Ainda

$$\text{mais, } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P_k}{\Delta t} = \frac{dP_k}{dt} = 0, \quad \forall k, k \geq 2;$$

C<sub>5</sub>. Como condição inicial, tem-se que  $p_0(0) = 1$ , isto é, a probabilidade de nenhuma ocorrência em um intervalo de tempo nulo ( $\Delta t = 0$ ) é um (evento certo). Observe que  $p_k(0) = 0, \quad \forall k, k \geq 1$ .

Sem perda de generalidade, considerar-se-á que  $p_k(t)$  seja a probabilidade de k ocorrências no intervalo  $[0, t]$  e  $p_k(t + \Delta t)$  no intervalo  $[0, t + \Delta t]$ .

Para  $k = 0$ , tem-se o caso, representado na Figura 12.



**Figura 12. Esquema para zero ocorrências no intervalo  $[0, t + \Delta t]$**

De C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub> e C<sub>4</sub>, tem-se que:  $\Delta P_0 = 1 - \Delta P_1 - \sum_{k=2}^{\infty} \Delta P_k \sim 1 - \lambda \cdot \Delta t$  e

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t) \cdot \Delta P_0 \sim p_0(t) [1 - \lambda \cdot \Delta t]. \text{ Portanto, } \frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} \sim -\lambda \cdot p_0(t).$$

Fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$ , tem-se  $p_0'(t) = -\lambda \cdot p_0(t)$ , ou o equivalente:  $\frac{p_0'(t)}{p_0(t)} = -\lambda$ .

Integrando-se ambos os membros, em relação a t, obtém-se  $\ln p_0(t) = -\lambda \cdot t + C$ , onde C é uma constante de integração. Da condição C<sub>5</sub>, considerando  $t = 0$ , conclui-se que  $C = 0$  e, conseqüentemente,  $p_0(t) = e^{-\lambda \cdot t}$ .

Empregando essencialmente o mesmo caminho, pode-se obter uma



$$= e^{-\lambda.t} \left[ \frac{(\lambda.t)^0}{0!} + \frac{(\lambda.t)^1}{1!} + \frac{(\lambda.t)^2}{2!} + \frac{(\lambda.t)^3}{3!} + \dots \right]$$

O desenvolvimento em série de Mac Laurin da função  $e^x$  é:

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Substituindo esta última igualdade, quando  $x = \lambda.t$ , tem-se:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = e^{-\lambda.t} (e^{\lambda.t}) = e^0 = 1. \text{ Portanto, o modelo está bem definido.}$$

**Técnica 1.2.** deduzir a fórmula de Poisson, como limite do Modelo Binomial.

### Bloco tecnológico/teórico 1.2:

Esta técnica requer conhecimentos sobre o cálculo de limites, inclusive o de limite fundamental. A problemática está em definir, quando se deve fazer uso da aproximação. Pode ser que estipular um valor limite para  $n$  e/ou para  $p$ , a fim de garantir uma boa aproximação, não seja suficiente para os leitores adquirirem um significado pessoal comparável ao significado institucional de referência que ele tem (GODINO, 2003). Será que os leitores percebem e entendem o que acontece com as probabilidades para valores superiores a  $n$ ? Quando  $n$  é superior ao valor limite, por que os valores das probabilidades nos dois modelos são próximos?

Considere-se uma variável aleatória discreta  $Y$ , número de sucessos nas  $n$  repetições independentes de um mesmo experimento de Bernoulli, isto é, do tipo sucesso/fracasso. Essa variável aleatória segue um Modelo Binomial,  $Y \sim B(n, p)$ , cuja distribuição de probabilidades é dada pela lei:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ onde } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

sendo  $p$  a probabilidade de sucesso e  $q$  a de fracasso, isto é,  $q = 1 - p$ .

Nos casos em que o equipamento disponível impossibilita que os cálculos das probabilidades sejam efetuados, em razão da ordem de grandeza de  $n$ , há a necessidade de obter valores aproximados para as probabilidades desejadas.

Considerando, inicialmente,  $np = \lambda$ , tem-se:  $p = \frac{\lambda}{n}$  e, portanto,  $q = 1 - \frac{\lambda}{n}$ .

Substituindo esses valores em  $P(Y=k)$ , vem:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Calculando o limite, quando  $n$  tende a infinito, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(\lambda)^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \\ &= \frac{(\lambda)^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} = P(W = k), k = 0, 1, 2, \dots, n, \text{ onde } W \sim P(\lambda). \end{aligned}$$

Concluindo, as probabilidades em um Modelo Binomial coincidem exatamente com aquelas de um Modelo de Poisson em que  $np = \lambda$ , quando  $n$  tende a infinito. Nos dois modelos, as probabilidades são próximas, quando  $n$  for grande e  $p$  pequeno; em geral,  $n \geq 20$  fornece uma aproximação aceitável, desde que  $n.p < 7$  (para o caso em que  $n = 20$ , equivale a  $p < 0,35$ ; quando  $n = 25$ , equivale a  $p < 0,28$ , etc.).

**Técnica 1.3.** apresentar a fórmula de Poisson por definição.

### Bloco tecnológico/teórico 1.3:

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta assumindo os valores: 0, 1, 2, 3, ... .

Se  $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , diz-se que  $X$  tem distribuição de Poisson,

com parâmetro  $\lambda > 0$ .

A introdução de um conceito, diretamente pela sua definição, é usualmente conhecido como modo clássico ou tradicional em que se apresenta a definição, um ou mais exemplos de aplicação e problemas propostos.

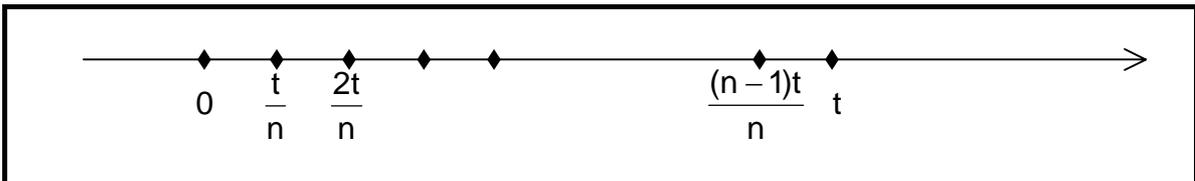
**Técnica 1.4.** deduzir a fórmula de Poisson baseada nos Postulados e como limite do Modelo Binomial.

### Bloco tecnológico/teórico 1.4:

A técnica 1.4 parte dos Postulados e deduz a fórmula de Poisson, como

limite do Modelo Binomial; dessa forma construído, pode-se justificar a aplicação do Modelo de Poisson a problemas em que só se tem conhecimento sobre o número médio de ocorrências do evento em um dado intervalo.

Considerando o experimento de desintegração radiativa, seja  $W_t$  o número de partículas emitidas no intervalo  $[0, t)$ , para todo  $t \geq 0$ ; admitindo os Postulados de Poisson, já citados na técnica 1.1, divide-se o intervalo de tempo em subintervalos de comprimento  $t/n$ , como na Figura 13.



**Figura 13. Divisão em subintervalos de comprimento  $t/n$**

A variável aleatória  $Y$ , número de subintervalos com uma partícula tem distribuição binomial com parâmetros  $n$  (total de subintervalos) e  $p = \lambda(t/n)$  (probabilidade de uma ocorrência em um subintervalo). Para  $n$  suficientemente grande, usando a técnica 1.2, tem-se que  $Y$  pode ser aproximada por uma variável aleatória com distribuição de Poisson com parâmetro  $n.p = n.\lambda.(t/n) = \lambda.t$ . Pelo Postulado  $C_4$ , a probabilidade de que cada subintervalo contenha duas ou mais ocorrências, tende a zero, quando  $n$  cresce. Assim,  $W_t$  é uma variável aleatória com distribuição de Poisson e parâmetro  $\lambda.t$ .

### **Bloco tecnológico/teórico geral 1:**

A validação de que o Modelo está bem construído que foi apresentada no final da técnica 1.1, é importante constar no final de qualquer técnica escolhida, pois, qual o leitor que não se coloca a seguinte questão: são infinitas probabilidades, todas positivas e não nulas; será que a soma das probabilidades é um?

Além disso, é importante apresentar abordagens do Modelo de Poisson que dêem condições ao leitor de resolver problemas que só têm como informação a média e, também, aqueles binomiais em que a aproximação Poisson é adequada.

No desenvolvimento das técnicas descritas, deve-se dar especial atenção

ao objeto ostensivo adotado para representar o parâmetro do modelo. Quando se usa a técnica 1.1 ou 1.4 é conveniente que se adote um objeto ostensivo do tipo  $\lambda.t$  que, em geral, é menos interessante para o caso da técnica 1.2 ou 1.3, que podem ser simplificadas com a adoção do objeto ostensivo do tipo  $\lambda$ . Além disso, é indispensável que se defina o papel funcional e semiótico do objeto ostensivo usado, a fim de evitar futuras dificuldades na resolução de novos problemas ou confusões na leitura de outros livros.

**Questão 2.** Como introduzir a fórmula para o valor esperado de uma variável aleatória com distribuição de Poisson?

**Técnica 2.1.** deduzir a fórmula pela definição de valor esperado.

**Bloco tecnológico/teórico 2.1:**

Sendo  $W \sim P(\lambda)$ , a distribuição de probabilidades é dada por:

$P(W=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ , para  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . O valor esperado de  $W$  será, portanto,

$$\begin{aligned} E(W) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(W=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \cdot \left[ 0 \cdot \frac{\lambda^0}{1 \cdot (0!)} + 1 \cdot \frac{\lambda^1}{1!} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} + 3 \cdot \frac{\lambda^3}{3!} \dots \right] = e^{-\lambda} \cdot \left[ 1 \cdot \frac{\lambda^1}{1!} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} + 3 \cdot \frac{\lambda^3}{3!} \dots \right] = \\ &= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \left[ 1 \cdot \frac{\lambda^0}{1 \cdot (0!)} + 2 \cdot \frac{\lambda^1}{2 \cdot (1!)} + 3 \cdot \frac{\lambda^2}{3 \cdot (2!)} + \dots \right] = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \left[ \frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots \right] = \\ &= e^{-\lambda} \cdot (\lambda) \cdot e^{\lambda} = (\lambda) \cdot e^0 = \lambda. \end{aligned}$$

Assim, a variável aleatória  $W \sim P(\lambda)$  tem valor esperado  $\lambda$ , ou seja, o próprio parâmetro da distribuição, que se indica:  $E(W) = \lambda$ .

A técnica 2.1, por usar a definição de valor esperado é simples de ser aplicada, já que o conceito de valor esperado deve fazer parte do contexto anterior do livro. Outro detalhe a ser observado, refere-se ao uso do desenvolvimento em série de Mac Laurin da função  $e^{\lambda}$ , que deve ser um conhecimento disponível do leitor e que, com certeza, não faz parte do conteúdo

de um livro de Estatística.

**Técnica 2.2.** deduzir a fórmula usando função geradora de momentos.

**Bloco tecnológico/teórico 2.2:**

A técnica 2.2 depende do conceito de função geradora que em um curso de graduação não é comum sua introdução, embora em um livro de Estatística possa fazer parte do contexto anterior do livro.

A função geradora de momentos de uma variável aleatória é dada por:  $G(t) = E(e^{t.X})$ . No caso,  $X \sim P(\lambda)$  e sendo assim, tem-se:

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{t.k} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot e^t} = e^{-\lambda + \lambda \cdot e^t}.$$

Como  $E(X) = G'(0)$ , tem-se  $G'(t) = (\lambda \cdot e^t) e^{-\lambda + \lambda \cdot e^t} = \lambda \cdot e^{t - \lambda + \lambda \cdot e^t}$  e, portanto,  $E(X) = \lambda$ .

**Técnica 2.3.** não apresentar a dedução da fórmula e deixá-la para o leitor.

**Bloco tecnológico/teórico 2.3:**

A técnica 2.3 que deixa a dedução a cargo do leitor, pode trazer alguma dificuldade, pois supõe conhecimentos que o texto anterior do livro, em geral, não apresenta. No caso de um leitor menos informado e que não disponha de outro material, ou não se dedique a buscar mais informações a respeito, pode ocorrer que essa demonstração seja desconsiderada.

**Bloco tecnológico/teórico geral 2:**

Independente da técnica utilizada é importante esclarecer a função semiótica do objeto ostensivo escolhido para representar o parâmetro da distribuição e, conseqüentemente, a média da variável aleatória definida. A opção de  $\lambda.t$  ou  $\lambda$ , na construção do modelo, deve ser mantida na dedução da fórmula para a média. Se  $\lambda$  foi definido como um número real positivo tal que  $\Delta P_1 \cong \lambda \cdot \Delta t$ , então  $\lambda.t$  é o número médio de ocorrências no intervalo de duração  $t$  e  $\lambda$  é o número médio de ocorrências por unidade de tempo. Mas, nada impede, de acordo com o desenvolvimento adotado, que se defina  $\lambda$  como o número médio de ocorrências no intervalo de duração  $t$ . Estas duas possibilidades de representação do parâmetro do Modelo de Poisson são facilmente confundidas e

podem gerar desequilíbrios, caso não sejam adequadamente explicitadas.

A opção pelo uso de uma técnica ou outra é uma escolha didática relacionada aos objetivos visados pelo autor no desenvolvimento do livro.

**Questão 3.** Como introduzir as fórmulas para a variância e para o desvio padrão de uma variável aleatória com distribuição de Poisson?

**Técnica 3.1.** deduzir as fórmulas pelo método prático de cálculo de variância.

**Bloco tecnológico/teórico 3.1:**

Sendo  $W \sim P(\lambda)$ , a distribuição de probabilidades é dada por:

$P(W=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ , para  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . A variância de  $W$  pode ser obtida por:

$\text{Var}(W) = E(W^2) - [E(W)]^2$ . Conforme já foi visto, tem-se que  $E(W) = \lambda$ , sendo necessário, portanto, calcular  $E(W^2)$ .

$$\begin{aligned} E(W^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P(W=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{(\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{(\lambda)^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \left[ 0^2 \frac{(\lambda)^0}{0!} + 1^2 \frac{(\lambda)^1}{1!} + 2^2 \frac{(\lambda)^2}{2!} + 3^2 \frac{(\lambda)^3}{3!} + \dots \right] = \\ &= e^{-\lambda} \cdot (\lambda) \cdot \left[ \left( \frac{(\lambda)^0}{0!} + \frac{(\lambda)^1}{1!} + \frac{(\lambda)^2}{2!} + \dots \right) + \left( 1 \cdot \frac{(\lambda)^1}{1!} + 2 \cdot \frac{(\lambda)^2}{2!} + 3 \cdot \frac{(\lambda)^3}{3!} + \dots \right) \right] = \\ &= e^{-\lambda} \cdot (\lambda) \cdot \left[ (e^{\lambda}) + (\lambda)(e^{\lambda}) \right] = (\lambda) + (\lambda)^2. \end{aligned}$$

Assim,  $\text{Var}(W) = E(W^2) - [E(W)]^2 = [(\lambda) + (\lambda)^2] - (\lambda)^2 = \lambda$ , o próprio parâmetro da distribuição. O desvio padrão é definido como a raiz quadrada (positiva) da Variância e indica-se  $DP(W)$ . Assim,  $DP(W) = \sqrt{\text{Var}(W)} = \sqrt{\lambda}$ .

**Técnica 3.2.** deduzir as fórmulas pela função geradora de momentos.

**Bloco tecnológico/teórico 3.2:**

Sendo  $W \sim P(\lambda)$ , a variância de  $W$  pode ser obtida por:

$\text{Var}(W) = E(W^2) - [E(W)]^2$ . Conforme já foi visto, tem-se que  $E(W) = \lambda$  e  $G'(t) = (\lambda \cdot e^t) e^{-\lambda + \lambda \cdot e^t} = \lambda \cdot e^{t - \lambda + \lambda \cdot e^t}$

Assim,  $G''(t) = \lambda \cdot (1 + \lambda \cdot e^t) \cdot e^{t-\lambda+\lambda \cdot e^t}$ , e, portanto,  $E(W^2) = G''(0) = \lambda + \lambda^2$ .

Logo,  $\text{Var}(W) = E(W^2) - [E(W)]^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$ , o próprio parâmetro da distribuição. O desvio padrão é determinado como na técnica 3.1.

**Técnica 3.3.** não apresentar a dedução das fórmulas e deixá-las para o leitor.

Os comentários são os mesmos que foram apresentados no caso do valor esperado.

No desenvolvimento que se segue, os problemas propostos nos livros didáticos são relacionados como tipos de tarefas matemáticas; o contexto, os valores do parâmetro, as probabilidades pedidas podem mudar, isto é, as tarefas são diferentes, mas do mesmo tipo.

**Tipos de Tarefas 4.** Calcular o valor de probabilidades, como:  $P(W = k)$ ,  $P(W < k)$ ,  $P(W \leq k)$ ,  $P(W > k)$  ou  $P(W \geq k)$ , onde  $k$  pode assumir qualquer dos valores, 0, 1, 2, 3, ... e  $W$  é o número de ocorrências do evento em um intervalo de tamanho  $t$ . Nesses casos, o número médio de ocorrências de tal evento em um intervalo de tamanho  $t$  ou distinto de  $t$ , é informado.

**Técnica 4.** Inicialmente, calcula-se o número médio de ocorrências no intervalo pedido. Se a probabilidade pedida for do tipo  $P(W = k)$ , substitui-se o valor do parâmetro na fórmula da distribuição de Poisson e efetua-se o cálculo indicado. Se a probabilidade pedida for do tipo  $P(W < k)$ , calculam-se as probabilidades de  $P(W = x)$ , para todo  $x < k$ , inteiro e, a seguir, somam-se os resultados. Se a probabilidade pedida for do tipo  $P(W \leq k)$ , procede-se como no caso anterior, para todo  $x$  inteiro,  $x \leq k$ . Se a probabilidade pedida for do tipo  $P(W > k)$ , deve-se usar a probabilidade complementar, isto é,  $P(W > k) = 1 - P(W \leq k)$  e calcula-se como indicado anteriormente. Se a probabilidade pedida for do tipo  $P(W \geq k)$ , usa-se a probabilidade complementar, isto é,  $P(W \geq k) = 1 - P(W < k)$  e o procedimento será aquele já indicado.

#### **Bloco tecnológico/teórico 4:**

A justificativa está diretamente relacionada ao conteúdo tecnológico/teórico já apresentado, isto é, a definição de variável aleatória com distribuição de Poisson e as funções semiótica e instrumental do objeto ostensivo que

representam o parâmetro da distribuição.

O leitor precisa ser informado que, probabilidades do tipo  $P(W \geq k)$  e  $P(W > k)$  que podem ser indicadas pelas somas:  $\sum_{x=k}^{\infty} P(W = x)$  e  $\sum_{x=k+1}^{\infty} P(W = x)$ , respectivamente, podem ser calculadas usando-se a probabilidade complementar, pois, na maioria dos casos, esta alternativa não é visualizada espontaneamente pelos leitores.

**Tipos de Tarefas 5.** calcular as probabilidades pedidas por aproximação Poisson a um problema binomial proposto, contextualizado ou não.

**Técnica 5.** determinar o parâmetro da variável aleatória de Poisson, isto é,  $\lambda = n.p$  e calcular as probabilidades pedidas, usando a técnica 4.

**Bloco tecnológico/teórico 5:**

A justificativa é aquela apresentada no bloco tecnológico/teórico da técnica 1.2. A problemática que deve ser explorada, refere-se à decisão pelo uso, ou não, da aproximação Poisson. Impor limites para os valores de  $n$  e  $p$ , ou seja, limitar  $n.p$ , para que a aproximação possa ser usada, é muito fácil de ser aplicada, porém é preciso que o significado pessoal declarado que o leitor possa expressar, aproxime-se do significado institucional de referência. Nos casos em que o equipamento disponível impossibilita que os cálculos das probabilidades sejam finalizados, há necessidade de se obter valores aproximados, valendo-se para tal de outros modelos. A decisão pelo uso da aproximação depende também da precisão desejada nos resultados. Pode ser que exemplos, em que os cálculos sejam efetuados com os dois modelos e depois comparados, auxiliem na reflexão sobre o tema; o uso de um aplicativo pode agilizar essa tarefa.

**Tipos de tarefas 6.** verificar se o Modelo de Poisson ajusta-se a um conjunto de valores.

**Técnica 6.1.** calcular a média dos valores, a fim de inferir o parâmetro do Modelo de Poisson. Comparar as frequências observadas e as frequências esperadas (determinadas com o modelo) por meio de um teste estatístico.

**Bloco tecnológico/teórico 6.1:**

Esta técnica é sugerida nas pesquisas de Henry (2003) e a de Batanero, Tauber e Sánchez (2001). Um programa de computador pode contribuir na execução dessa tarefa, já que os valores críticos podem ser facilmente obtidos, desde que os livros didáticos introduzam-no e orientem seu uso.

A técnica 6.1 é teoricamente simples de ser aplicada e o teste qui-quadrado favorece a discussão em torno da comparação das frequências e conclusão.

**Técnica 6.2.** calcular a média dos valores e com esta determinar as probabilidades, admitindo o Modelo de Poisson. Comparar essas probabilidades com as respectivas frequências observadas: *ver se há uma boa coincidência entre os valores das duas colunas.*<sup>25</sup>

**Bloco tecnológico/teórico da técnica 6.2:**

Esta técnica que foi utilizada em um dos livros analisados e, por esse motivo, consta desta análise, sem nenhuma justificativa tecnológica ou teórica. Não existe critério que possibilite a decisão da coincidência ser boa ou não. É apenas um momento inicial e subjetivo sem fundamentação matemática. Pode-se considerar que o uso dessa técnica foi uma opção didática do autor, tendo em vista um objetivo posterior de retomar o problema na apresentação de testes estatísticos, quando ele poderá definir critérios matemáticos decisórios do que seja uma boa coincidência entre os valores das duas colunas.

Considerando os livros selecionados, as tarefas e os tipos de tarefas, com respectivas técnicas, os valores da Tabela 6 apresentam a classificação dos mesmos, objetivando descrever a organização matemática construída pelos autores. O Modelo de Poisson tem sua apresentação e aplicação pouco explorada nos livros analisados, indicando que o significado institucional de referência do referido modelo é bastante limitado nas instituições de ensino superior, nível de graduação.

A pouca importância dada à aproximação ao Modelo Binomial como ferramenta de cálculo pode ser justificada pelo fácil acesso hoje aos

<sup>25</sup> Em itálico, palavras do autor do livro que usou essa técnica.

equipamentos de cálculo disponíveis, embora, dentre os livros analisados, alguns datem de 1969 e 1976, com edições atualizadas, sem mudanças em relação a esse aspecto. Na maioria dos casos, os problemas propostos são repetitivos, mudando apenas o contexto. Chega-se a ter um problema com o mesmo contexto em mais de um livro, apenas com valores diferentes. A preocupação em apresentar uma demonstração matemática rigorosa, praticamente, não existe, e em alguns casos é deixada a cargo do leitor.

**Tabela 6. Resultado da análise de livros didáticos (organização matemática)**

Tarefa	Técnica	Liv1	Liv2	Liv3	Liv4	Liv5	Liv6
1 deduzir a fórmula de Poisson	1.1 Postulados					X	
	1.2 limite binomial			X	X	X	
	1.3 fórmula	X	X		X	X	X
	1.4 Post. e lim Binomial		X				
2 deduzir a fórmula do valor esperado	2.1 definição				X	X	
	2.2 função geradora						
	2.3 cargo do leitor		X	X			X
3 deduzir a fórmula da variância e desvio padrão	3.1 definição				X	X	
	3.2 função geradora						
	3.3 cargo do leitor		X	X			X
4 problema proposto: média	4 det n <sup>o</sup> médio e fórmula	6	3	7	8	11	1
5 problema proposto: aprox. binomial	5 $\lambda = n.p$		1		3	3	1
6 problema proposto: real X teórico	6.1 teste estatístico						
	6.2 boa coincidência		X				

Fonte: os livros selecionados para análise.

Nota: nas tarefas 4 e 5 tem-se o número de problemas.

A indicação das pesquisas, para que sejam trabalhados conjuntos de valores obtidos em experimentos da realidade e que sejam comparados com os teóricos, a fim de estudar a adequação do Modelo de Poisson, é pouco explorada nos livros didáticos selecionados, embora as edições analisadas sejam de: 2004, 2004, 2003, 1999, 1993 e 1982.

Considerando as análises das organizações praxeológicas, tanto didáticas como matemáticas, os elementos de significado institucional de referência, segundo a Teoria das Funções Semióticas, que devem fazer parte do estudo do

Modelo de Poisson, podem ser determinados. Dessa forma, o tópico 2.3, desta tese, tem o objetivo de apresentá-los.

## 2.3 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERÊNCIA

De acordo com a Teoria das Funções Semióticas, o significado dos objetos matemáticos, como, por exemplo, o Modelo de Poisson, concebe-se com o sistema de práticas ligadas a campos de problemas específicos e seis componentes da cognição matemática (elementos do significado) são identificados: situações, ações, linguagem, conceitos, propriedades e argumentos. Essas componentes podem variar de acordo com o nível de escolaridade, a instituição de ensino e o momento histórico em que a análise ou interação didática ocorre e, ainda, pode-se considerar o caráter pessoal ou institucional desse significado. Os elementos de significado institucional de referência do Modelo de Poisson podem ser identificados com o estudo histórico e epistemológico do objeto em questão, com a análise dos livros didáticos selecionados e com os conhecimentos pessoais do professor (GODINO, 2003, p. 138), no caso, a autora desta tese. Em sua apresentação, além da classificação nas seis componentes, estas são agrupadas em três facetas do conhecimento: práxis (associada à competência, de âmbito técnico/prático), linguagem (em seus diversos registros) e logos (associado à compreensão, de âmbito tecnológico/teórico).

As situações e ações pertencem ao primeiro grupo (práxis) e foram selecionadas de modo a possibilitar a realização de ações que permitem desenvolver competências (no sentido apresentado por GODINO, 2003) para a realização de tarefas associadas ao objeto de estudo. Dessa forma, em relação ao Modelo de Poisson, três situações foram consideradas; a primeira permite que a fórmula de Poisson seja obtida como modelo matemático que se ajuste a um conjunto de valores experimentais; na segunda, a distribuição de Poisson é determinada por aproximação ao Modelo Binomial sob determinadas condições;

e, finalmente, a terceira, como modelo teórico para a resolução de problemas aplicados a outras áreas do conhecimento como, por exemplo, a Física.

A opção de introduzir o Modelo de Poisson baseado na realização de um experimento, de modo que ele seja obtido, como modelo teórico que se adere aos valores obtidos, é fundamentada nos princípios da modelagem matemática, em particular nos estudos de Batanero, Tauber e Sánchez (2001), Henry (1997 e 2003) e de Coutinho (2001), citados anteriormente.

A aproximação Poisson ao Modelo Binomial, a fim de tornarem viáveis os cálculos do segundo, nos casos em que o número de repetições é elevado, exerceu em outros tempos, um papel fundamental que hoje, com o fácil acesso às calculadoras e computadores, não mais se justifica. A riqueza está na comparação entre os dois modelos matemáticos, permitindo relacionar os parâmetros e o grau de aproximação obtido, a tal ponto de se obter uma coincidência teórica exata. Este estudo possibilita que se amplie a discussão da modelagem matemática e da relação entre teoria e prática, que justifica sua apresentação neste trabalho. Não se descarta, porém, a aplicação dessa aproximação a problemas de outras áreas do conhecimento, como o fazem os livros didáticos, pois, segundo Henry (1997) permite que se amplie a discussão do que o autor classificou como de difícil acesso, por requerer, muitas vezes, o domínio de um especialista. Assim, neste estudo, não se pretende fazer uma análise detalhada desse aspecto, mas, um início de reflexão do aluno, no que se refere à adaptação dos Postulados de Poisson a tais problemas e sua validade.

Estas aproximações ao objeto enriquecem e se complementam no estudo do Modelo de Poisson. Admite-se, neste trabalho, que elas possibilitam a realização de ações, cujas práticas, ao seio da instituição, podem permitir que o significado pessoal atribuído ao objeto matemático amplie-se, como consequência da experiência e da aprendizagem. As ações, decorrentes de se colocar em prática as situações descritas, são apresentadas no Quadro 3 e vão desde a realização de um experimento e coleta dos resultados até a elaboração de tabelas, gráficos, levantamento de conjecturas, construção do modelo teórico, comparação entre valores experimentais e teóricos, validação e generalização.

**Quadro 3. Elementos de significado de referência do Modelo de Poisson**

<b>PRAXIS</b>	<p><u>Situação</u> aproximação Poisson ao Modelo Binomial; ajuste a uma distribuição de dados empíricos, como modelo teórico aproximado; situações relacionadas a outras áreas do conhecimento como, por exemplo, a Física.</p> <p><u>Ação</u> realização de experimentos da realidade e coleta dos resultados; elaboração de protocolo experimental; e descrição de experimentos; organização, representação em tabela e/ou gráfica e resumo estatístico dos valores coletados, com o auxílio de aplicativo ou calculadora; construção do modelo teórico a partir de considerações relacionadas ao experimento; comparação de variáveis aleatórias com distribuição de Poisson com diferentes parâmetros: comparações das representações em tabelas e gráficas das médias, das variâncias, dos valores das variáveis com probabilidade máxima e dos intervalos com probabilidades não desprezíveis; estimação do parâmetro do modelo teórico a partir dos valores obtidos na experimentação; cálculo da frequência esperada sob a hipótese de que o modelo é de Poisson; comparação das frequências esperadas e observadas por meio de tabelas, gráficos e uso do teste de aderência qui-quadrado, com conclusão e análise; resolução de problemas semelhantes àqueles apresentados nos livros didáticos; comparação gráfica entre os Modelos Binomial e Poisson; representação de frequências e probabilidades em gráfico de colunas; resolução de problemas de aproximação Poisson ao Modelo Binomial; identificação de situações que podem ser estudadas, usando o Modelo de Poisson.</p>
<b>LINGUAGEM</b>	<p><u>Linguagem</u> tabelas e gráficos de barras e função acumulada; verbal: aleatório, valor médio, média, número médio de ocorrências, número mais provável, modelo teórico, valores coletados, protocolo experimental, parâmetro, distribuição de Poisson, probabilidade desprezível, teste qui-quadrado, Postulados de Poisson, hipóteses de Poisson, frequência esperada, frequência observada, valores experimentais, valores observados, qui-quadrado calculado, qui-quadrado crítico, nível de significância, não rejeitar a hipótese.</p> <p>algébrica: <math>W_t \sim P(\lambda t)</math>, <math>P(W_t=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}</math>, INV.QUI (CHIINV, em inglês),  <math>[E(W_t)-3.DP(W_t), E(W_t)+3.DP(W_t)]</math>, <math>\chi^2_{\text{calculado}}</math>, <math>\chi^2_{\text{crítico}}</math>, <math>E(W_t)</math>, <math>Var(W_t)</math>, <math>DP(W_t)</math>.</p>
<b>LOGOS</b>	<p><u>Conceitos</u> aleatório, valor esperado (média), número médio, parâmetro de modelo, variância, desvio padrão, limite, integral, exponencial, fatorial, independência, exclusividade, probabilidade complementar, probabilidade desprezível, pelo menos uma, no máximo um, pelo menos dois, não mais do que cinco, mais de duas, até três, pelo menos três, desenvolvimento em série de Mac Laurin, distribuição de probabilidades, função distribuição de probabilidades acumulada (função repartição ou escada), distribuição Binomial, teste qui-quadrado, qui-quadrado crítico, qui-quadrado calculado, nível de significância.</p> <p><u>Propriedades ou atributos</u> número de emissões depende do material e do intervalo de tempo entre as observações; aleatoriedade dos valores obtidos na observação de emissão de partículas; para usar o Modelo de Poisson basta conhecer o número médio de ocorrências; características de um Modelo Matemático associado a um experimento aleatório; relação entre parâmetro, média e dispersão e intervalo de observação; valor esperado é uma função linear; valor da variável com probabilidade máxima; intervalo de números reais que contém valores com probabilidades não desprezíveis; decréscimo das probabilidades à medida que os valores distanciam-se da média; a distribuição das ocorrências é a mesma para todos os intervalos de uma partição; os números de ocorrências registrados nos intervalos da partição são independentes; em um intervalo de pequena duração a probabilidade de se obter uma ocorrência é diretamente proporcional ao tamanho do intervalo; duas ou mais ocorrências, em um intervalo de pequena duração, tem probabilidade desprezível; a probabilidade de nenhuma ocorrência em um intervalo de duração zero é um; uma variável aleatória <math>Y \sim B(n, p)</math> aproxima-se de <math>W_t \sim P(n.p)</math> quando <math>n</math> cresce e <math>p</math> diminui; as probabilidades obtidas nos Modelos Binomial e Poisson coincidem exatamente no limite, quando o número de repetições tende a infinito e as médias coincidem.</p> <p><u>Argumentos</u> validação do ajuste do modelo teórico aos valores empíricos por teste qui-quadrado ou empírica, ou gráfica, ou das respostas encontradas a partir da análise do parâmetro do modelo; demonstrações formais e informais; deduções fundamentadas nas observações; comparações de resultados particulares com generalizações.</p>

A realização de tais ações envolve conteúdos e formas de expressá-los, quer seja verbal ou por meio de símbolos algébricos, gráficos, etc.. Dentre os signos, a serem institucionalizados, destacam-se os de aleatório, valores experimentais e teóricos, distribuição de Poisson, parâmetro, probabilidade desprezível, valor mais provável,  $W_t \sim P(\lambda t)$ ,  $P(W_t=k) = \frac{(\lambda.t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda.t}$ ,  $[E(W_t)-3.DP(W_t), E(W_t)+3.DP(W_t)]$ , entre outros. Assim, uma lista dos signos mais importantes a serem considerados, neste estudo, encontra-se no Quadro 3 e relaciona-se à faceta definida por Godino (2003) como linguagem.

As práticas dos alunos nas situações em que são envolvidos permitem que eles associem às expressões alguns conteúdos que Godino (2003) define como significado. Estes conteúdos referem-se à faceta logos e estão associados à compreensão; são os conceitos, as propriedades ou atributos e os argumentos. As conjecturas levantadas são formalmente ou não demonstradas, validadas ou rejeitadas; algumas se tornam conceitos e outras propriedades. No desenvolvimento das atividades, as práticas compartilhadas permitem que cada sujeito associe um significado pessoal ao objeto de estudo, em termos das funções semióticas que ele estabelece nas situações propostas.

Dentre os conceitos envolvidos neste estudo destacam-se os de aleatório, Modelo de Poisson, teste qui-quadrado, freqüência esperada e observada; dentre as propriedades do Modelo de Poisson, os valores com probabilidades desprezíveis, a probabilidade máxima, a relação entre parâmetro, média, variância, entre outros. A forma de validação poderá ser por demonstração formal ou fundamentada nas observações. O Quadro 3 exhibe os conceitos, propriedades e argumentos considerados na elaboração da fase experimental, assunto do Capítulo 3.

Apoiada nos elementos do significado de referência, a pesquisadora selecionará aqueles pretendidos que nortearão a concepção do trabalho a ser desenvolvido em sala de aula, como também a construção dos instrumentos de avaliação, análise dos resultados e para inferir características do significado pessoal global, que os alunos podem construir.

## CAPÍTULO 3

### A SEQÜÊNCIA DE ENSINO

### CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI

Neste capítulo, são apresentados o experimento piloto, a seqüência de encontros previstos, as condições de realização, objetivos, expectativas e a maneira que a aprendizagem será avaliada.

Por se tratar de uma pesquisa pontual, isto é, relacionada a um tópico, Modelo de Poisson, o piloto e a experimentação necessitam que os sujeitos participantes tenham estudado: conceitos de probabilidade condicional, eventos independentes e exclusivos, variável aleatória discreta, valor esperado, variância, desvio padrão, Modelo Binomial, limite e integral. Nesse sentido, como se pretende trabalhar com alunos de um curso regular de Probabilidade e Estatística, há necessidade de se aguardar o momento do conteúdo no desenvolvimento do programa, garantindo, assim, nenhuma relação pessoal anterior com o Modelo de Poisson, que possa interferir nos resultados.

A fim de fazer alguns acertos, na seqüência didática a ser aplicada, foi realizado um experimento piloto, cujos comentários são apresentados no que se segue.

### 3.1 O EXPERIMENTO PILOTO

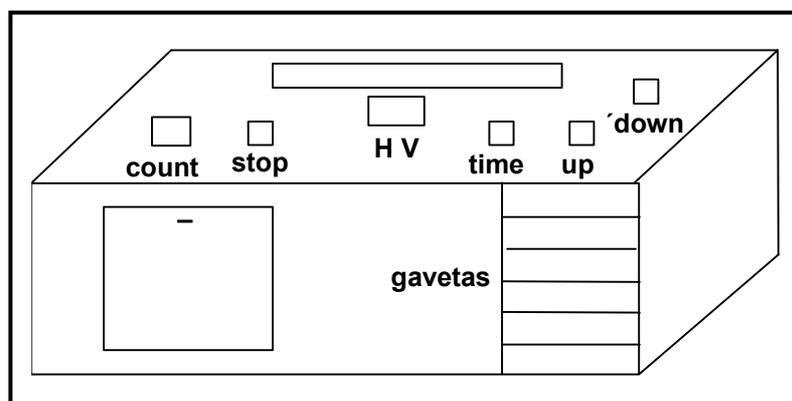
Com o intuito de redirecionar o projeto de Engenharia Didática pretendido, um experimento piloto foi realizado no segundo semestre de 2003, em uma universidade particular de Ensino Superior sem fins lucrativos, situada na capital de São Paulo.

O primeiro ponto de decisão referiu-se ao experimento da realidade que poderia ser realizado, ponto de partida do esquema de modelagem visado (HENRY, 1997). Logo de início, a pretensão de realizar a experiência de emissão de partículas por uma fonte radioativa, experimento clássico, quando se fala em Modelo de Poisson, tornou-se viável, quando uma professora do Departamento de Física da referida Instituição informou que o Laboratório de Física Nuclear dispunha de quatro contadores Geiger-Mueller e pôs-se à disposição para cooperar em sua realização.

O contador Geiger-Mueller, também, conhecido como contador Geiger, é um detector elétrico, simples de ser manipulado que opera em determinada faixa de tensão e esta depende da geometria do contador (raio do fio anodo) e da pressão do gás de enchimento; ele pode medir raios  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e X. Esquemáticamente, é uma caixa retangular de aproximadamente 40cm X 30cm X 20cm, com gavetas, em uma das quais se deve colocar o material radioativo que vem protegido em uma embalagem, a fim de permitir sua manipulação; a escolha da gaveta para colocá-lo define o foco que irá detectar as partículas emitidas. A fim de acionar o equipamento, deve-se calibrar a tensão, apertando, pausadamente, um botão, até que em um visor do aparelho chegue-se à tensão desejada, no caso, 340V. Em seguida, deve-se calibrar o comprimento do intervalo de tempo entre as contagens; o aparelho permite calibração de intervalos de um em um segundo até dez, de dez em dez segundos até cem e de cem em cem segundos até mil segundos. Coloca-se, então, o material radioativo na gaveta desejada e inicia-se a contagem das partículas emitidas. A cada intervalo de tempo, que foi fixado a priori, o aparelho interrompe a contagem e o número de partículas emitidas é indicado em um visor específico; dependendo do

material radioativo, as partículas emitidas podem ser raios  $\alpha$  ou  $\beta$ .

A Figura 14 exibe uma representação esquemática do contador Geiger-Mueller.



**Figura 14. Contador Geiger-Mueller**

O próximo ponto de decisão foi definir os sujeitos que fariam parte do piloto e este foi fundamentado em dois aspectos: no primeiro, os alunos do segundo ano do curso de Engenharia Elétrica eram do curso de Probabilidade e Estatística e iriam estudar o Modelo de Poisson, além de que, na cadeira de Física, no mesmo semestre fariam um estudo sobre radiação, incluindo o contador Geiger-Mueller; o segundo, relaciona-se à disponibilidade do Laboratório de Informática, decisão didática fundamentada nas pesquisas de Henry (2003) e Batanero, Tauber e Sánchez (2001). Coutinho (2001) concluiu que o fato de os alunos desconhecerem o aplicativo a ser usado na experimentação, pode comprometer o desenvolvimento do estudo; assim, decidiu-se por um aplicativo de uso freqüente em muitas empresas paulistas, e conhecido pela maioria dos alunos, embora não se tivesse informação sobre o domínio que eles teriam dessa ferramenta. Esta opção teve como objetivo que as interferências fossem poucas, durante o transcorrer das atividades, além de contribuírem, com a exploração do próprio aplicativo, para a formação geral desses alunos. Sendo assim, catorze sujeitos, voluntários do curso de Engenharia Elétrica, sete do noturno e sete do vespertino, participaram do piloto, que por disponibilidade do Laboratório de Informática, se desenvolveu no período vespertino. Convém observar que na falta de equipamento específico, como o contador Geiger-Mueller, outra experiência pode ser desenvolvida, como o número de telefonemas a um dado telefone, em um

dado período, ou o número de veículos de determinada cor que passa em um cruzamento, em determinado intervalo de tempo de determinado dia da semana, ou até uma simulação, como o fez Henry (2003).

Sete encontros foram realizados, sendo dois por semana: um foi no Laboratório de Física Nuclear, dois no Laboratório de Informática e quatro em sala de aula usual, cada um com uma hora e meia de duração. Assim, esta pesquisadora desenvolveu o trabalho com os alunos e duas professoras, da mesma instituição, foram observadoras do grupo. Os alunos trabalharam em dupla e, ao final de cada encontro preencheram, individualmente, uma ficha de avaliação sobre o conteúdo abordado e outra para opinarem sobre o que acharam interessante, o que não gostaram ou não acompanharam, sugestões para o aprimoramento do mesmo, enfim tudo o que quisessem comentar a respeito da sessão. As fichas, os resultados das avaliações e as observações sugeriram mudanças no projeto de Engenharia, a fim de melhorar a possibilidade dos objetivos serem atingidos.

Algumas decisões, como a escolha de alunos do Curso de Engenharia Elétrica e a experiência de emissão de partículas por uma fonte radioativa, que possibilitaram a conexão com a cadeira de Física, apresentaram bons resultados. Os participantes do projeto mostraram-se mais motivados que os demais nas aulas de radiação, segundo informações explicitadas pela professora da disciplina. Todos ficaram satisfeitos com a exploração do aplicativo que, segundo eles, poderá ajudá-los no trabalho de conclusão de curso. Alguns disseram que gostaram de *fazer matemática*; expressão usada por um dos alunos ao final da dedução do Modelo de Poisson, embora outros a tenham achado complicada. A importância da realização do experimento, como já tinha sido apontada por Coutinho (2001), também pôde ser evidenciada, quando um dos alunos falou: *nunca se sabe o número que vai aparecer quando apertamos o botão do contador Geiger, embora se saiba que ele vai ser em torno de ...*; essas palavras podem indicar um aspecto do conceito de aleatório, explicitado por esse aluno durante a experimentação.

Por outro lado, algumas mudanças mostraram-se necessárias:

- ✓ trocar o teste inicial por uma ficha de informações sobre o perfil do aluno;

- ✓ colocar os alunos antecipadamente em atividades que explorem o uso do aplicativo, pois no piloto a exploração das situações ficou prejudicada, já que a própria manipulação da ferramenta fez parte da aprendizagem simultaneamente, contrariando nossa expectativa;
- ✓ colocar alunos do curso de Ciência da Computação na composição das duplas, a fim de minimizar as dificuldades que o uso do computador pode acarretar;
- ✓ fazer um teste estatístico a fim de validar, ou não, a aderência do Modelo de Poisson aos resultados, e que não foi feito no piloto por uma questão de tempo disponível dos alunos; (Henry 2003)
- ✓ encontros com duas horas de duração e não uma hora e meia, como foi feito no piloto, no qual a discussão, ou a institucionalização ficou prejudicada em alguns casos;
- ✓ repetir o experimento de emissão de partículas com elementos radioativos diferentes e o mesmo intervalo de tempo entre as observações, que pode favorecer a ampliação do significado pessoal do parâmetro do Modelo;
- ✓ diminuir a duração do intervalo de tempo entre as observações, a fim de que o período de uma sessão seja suficiente para realização das experiências;
- ✓ fazer avaliação que exija o uso do aplicativo, como foi feito na pesquisa de Batanero, Tauber e Sánchez (2001).

Com esses acertos e alterações, um novo grupo fez parte da fase experimental, que se realizou no segundo semestre de 2004, logo após os alunos terem estudado o Modelo Binomial em seus cursos. O experimento piloto além de revelar a necessidade de um conhecimento prévio em relação à manipulação do aplicativo, indicou a dificuldade do desenvolvimento do trabalho pretendido com o Modelo de Poisson que, por si só, é complexo. Assim, a decisão da pesquisadora, na tentativa de minimizar tais problemas, foi usar o mesmo aplicativo nas atividades de Estatística Descritiva, explorando a função frequência e a representação gráfica, além de desenvolver o estudo do Modelo Binomial com as mesmas etapas do processo de modelagem, partindo do experimento prático de lançar uma moeda cinquenta vezes, explorando a construção de tabelas e

gráficos em planilha e usando a função distribuição binomial para agilizar os cálculos, como, também, o teste de aderência qui-quadrado.

Tanto os alunos do piloto quanto aqueles que participaram da fase experimental do estudo, fizeram-no voluntariamente. Como os participantes do piloto impuseram a condição de não serem filmados ou gravados, decidiu-se, nos dois casos, pela colocação de observadores e identificação de todos os participantes por meio de um crachá com códigos do tipo: 1A, 1B, 2A, 2B, etc., cuja a letra indica o curso a que pertencem, sendo A para Engenharia Elétrica e B para Ciência da Computação, e o número indica a dupla.

### **3.2 OS ENCONTROS: CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI**

Este tópico trata da concepção e análise a priori da seqüência de ensino a ser aplicada aos alunos na fase experimental. Sete encontros constam desta, incluindo o teste final, cada um com duas horas de duração, desenvolvido na Instituição de ensino onde os participantes estudam. Os ambientes, sala de aula usual, Laboratório de Física Nuclear ou de Informática são identificados em cada atividade.

Os encontros estão organizados de acordo com as etapas de modelagem prescritas em Henry (1997), cuja apresentação é feita em termos da Teoria Antropológica do Didático em que se tem: a tarefa que será proposta aos alunos, a técnica didática a ser adotada e o bloco tecnológico/teórico com correspondente análise a priori que inclui explicações e justificativas, objetivos a serem atingidos e expectativas em relação às respostas dos alunos no cumprimento da tarefa proposta.

Na primeira etapa (realidade), os alunos receberão um texto sobre radiação, com o intuito de situá-los no contexto do experimento a ser realizado: emissão de partículas radioativas. Com base nesse estudo, um protocolo experimental será elaborado e colocado em ação pelos alunos (Laboratório de Física Nuclear).

Na segunda etapa (modelo pseudo-concreto), será feita uma breve análise descritiva dos valores colhidos experimentalmente, incluindo tabelas, gráficos e algumas medidas de tendência central e dispersão, com o auxílio de um aplicativo, visando a levantar algumas conjecturas sobre o experimento realizado (Laboratório de Informática).

Na terceira etapa (modelo matemático), com base no estudo anterior, o Modelo de Poisson será formalmente construído (sala de aula usual).

Na quarta etapa (estudo matemático) tem-se a exploração do modelo teórico criado valendo-se do aplicativo já utilizado; nela, para alguns valores do parâmetro do Modelo de Poisson, convenientemente selecionados a fim de possibilitar a generalização de propriedades, os alunos irão construir tabelas e gráficos correspondentes e determinarão algumas medidas de tendência central e dispersão (Laboratório de Informática).

Na quinta etapa (confrontação modelo-realidade), os alunos irão comparar os valores obtidos em um dos experimentos realizados e aqueles correspondentes ao modelo teórico construído; tal comparação será feita por tabela, gráfico e teste de aderência qui-quadrado (Laboratório de Informática).

Na sexta etapa (generalização e previsões), uma série de situações associadas a outras áreas do conhecimento, como também aquelas encontradas em livros didáticos, serão propostas aos alunos. Nela, ainda, será explorada a aproximação entre os Modelos Binomial e Poisson, por meio da representação gráfica e em tabela, para alguns valores dos parâmetros, selecionados de modo a favorecer a discussão sobre o nível da aproximação obtida (sala de aula usual).

No último encontro, um teste será aplicado com o intuito de avaliar o significado pessoal que os alunos foram capazes de atribuir ao objeto de estudo e possibilitar sua comparação com aquele implementado na interação didática e constante da análise a priori.

Toda tarefa proposta aos alunos, depois de finalizada, terá suas respostas apresentadas e discutidas no grupo, sob coordenação da professora que, após a chegada a um consenso, fará sua institucionalização, impedindo, porém, que os alunos alterem as respostas para que possam ser analisadas. Cada sessão será

avaliada pela atividade desenvolvida durante o encontro e, algumas vezes, também, por um questionário, descrito em termos de organização praxeológica, tendo o objetivo de explicitar a maneira pela qual a aprendizagem poderá ser identificada. Além disso, observadores farão anotações sobre as manifestações dos alunos e do professor que também serão consideradas na avaliação. Todo o material de posse dos alunos será recolhido ao final de cada encontro a fim de ser analisado e verificar a necessidade de mudanças em relação ao que estava previsto nas sessões subseqüentes.

A apresentação de cada etapa é encerrada com a identificação dos elementos de significado institucional pretendidos (GODINO, 2003), selecionados dentre os de referência, citados no Capítulo 2.

Conforme cita Chevallard (2002), neste estudo, a escala hierárquica de níveis pode ser assim considerada:

*Sociedade*: desenvolvimento de habilidades e competências visando à aplicação prática desse saber.

*Escola*: instituição particular de ensino superior, sem fins lucrativos, curso de graduação em Engenharia Elétrica e Ciência da Computação.

*Pedagogia*: oito encontros de duas horas, alunos trabalhando em dupla, em laboratórios de informática, de física ou em salas de aula usuais.

*Disciplina*: Matemática.

*Domínio*: Estatística.

*Setor*: Probabilidade.

*Tema*: variável aleatória.

*Objeto*: Modelo de Poisson.

Esta escala tem a finalidade de situar o saber visado no presente trabalho.

Antes do primeiro encontro, logo após a definição dos alunos que farão parte do estudo e estes assinarem o termo de compromisso e aceitação voluntária (Apêndice B), eles receberão uma carta comunicando sua participação no projeto (Apêndice C) e, ainda, deverão preencher a Ficha de Identificação

(Apêndice D), cujo objetivo é obter um breve perfil dos alunos. Será entregue, também, um texto sobre radioatividade (Apêndice E), elaborado com base em Kaplan (1983) e com a supervisão de professores de Física Nuclear da Instituição onde se realiza a fase experimental; será pedido aos alunos que façam sua leitura antecipada.

### 3.2.1 A PRIMEIRA ETAPA – REALIDADE - Laboratório de Física Nuclear

Esta primeira etapa da modelagem é denominada por Henry (1997) Domínio da Realidade; em relação a ela, o autor escreve:

**Quadro 4. Primeira etapa de modelagem**

ETAPA	OBJETO DE AÇÃO	ATIVIDADE ESPERADA
Realidade	Estudo de um fenômeno real ou de um processo experimental.	Descrição simplificada dos elementos pertinentes para o problema proposto. Aplicação de um protocolo experimental. Tal descrição é filtrada por um olhar teórico.

Fonte: Henry (1997, p. 81).

No início do primeiro encontro, os alunos serão levados a uma sala de aula usual, onde receberão a informação de sua não identificação na pesquisa, pois ela não será gravada ou filmada. Em seguida, o termo de compromisso e autorização assinado e a ficha de identificação preenchida serão recolhidos. As duplas serão formadas por meio de um sorteio aleatório, com um aluno de cada curso, momento em que os crachás serão entregues, a fim de que os observadores possam anotar suas manifestações, garantindo o anonimato e resguardando a possibilidade de acompanhamento das duplas e dos sujeitos no transcorrer da fase experimental. Logo a seguir, os participantes seguirão para o Laboratório de Física Nuclear, onde uma professora especialista em Física Nuclear, da própria Instituição, irá participar do encontro. A presença desta é justificada pela necessidade de pessoa autorizada na utilização de tal laboratório por questões financeiras e de segurança, além dos esclarecimentos específicos que esta poderá fornecer.

Em um primeiro momento, os alunos serão convidados a manifestarem suas idéias a respeito do texto sobre radioatividade, cuja leitura fora solicitada, fundamentando-se no trabalho de Henry (2003), no qual o autor disponibilizou alguns textos para os participantes lerem com antecedência, e na importância da introdução histórica quando se estuda um objeto matemático (STRUIK, 1985, VERGNAUD, 1994 e PNLD, 2005). Três objetivos a serem atingidos: o primeiro é informar os alunos a respeito do experimento e motivá-los com a expectativa de sua realização; o segundo é prepará-los para a discussão do protocolo experimental; o terceiro é contribuir para a identificação das hipóteses do Modelo e a etapa de validação, que, segundo Henry (1997), é delicada e necessita de conhecimento especializado do fenômeno estudado.

Em relação a esse texto, são esperadas questões relacionadas ao desenvolvimento matemático das relações entre a meia-vida e a constante de desintegração e entre esta última e a vida média. Observa-se, porém, que os conceitos matemáticos utilizados: variável aleatória, independência estatística, potenciação, radiciação, probabilidade complementar, exponencial, logaritmo neperiano, derivada, limite, integral imprópria e integração por partes, fazem parte do conteúdo já estudado pelos alunos. Este fato evidencia que uma discussão, coordenada pela professora, poderá resultar que o próprio grupo forneça os esclarecimentos necessários ao seu entendimento.

Como um estudo sobre radiação faz parte do currículo dos alunos de Engenharia, esperam-se questões a respeito do funcionamento do contador Geiger-Mueller e a possibilidade de manipular um material radioativo, sugeridas pelo piloto.

O objetivo da apresentação coletiva é socializar as informações do texto, caso alguns alunos não tenham feito sua leitura, além de prepará-los para a elaboração do protocolo experimental e construção do Modelo de Poisson. Na seqüência, a Tarefa 1.1 será proposta às duplas.

**Tarefa 1.1** Elaborar um protocolo experimental para o estudo da emissão de partículas por fonte radioativa, utilizando o contador Geiger-Mueller, selecionando os elementos a serem considerados e aqueles que deverão ser descartados; colocar em ação esse protocolo e anotar os resultados na Ficha 1.

**FICHA 1 - Experimentos<sup>26</sup>**(coloquem os códigos dos seus crachás) **Dupla:** \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_**Primeiro Experimento**

Tipo de material radioativo \_\_\_\_\_ na gaveta \_\_\_\_\_

Voltagem \_\_\_\_\_ Número de repetições \_\_\_\_\_

Duração do intervalo de tempo entre as observações: \_\_\_\_\_

Valores os colhidos:


**Técnica didática:** A elaboração do protocolo experimental será feita coletivamente, com a participação das professoras e na sua execução os alunos trabalharão em dupla, sendo duas por contador, sob a orientação da professora de Física.

**Bloco tecnológico/teórico e análise a priori:**

A decisão pela realização de um experimento, fundamenta-se nos trabalhos de Girard (2001) e de Coutinho (2001) em que esta última constatou, ainda, a importância de elaborar o protocolo experimental com os alunos, a fim de explicitar os elementos a serem considerados.

Fundamentando-se no texto sobre material radioativo, as professoras irão coordenar a elaboração dos protocolos dos experimentos a serem realizados, cujas repetições, em diferentes condições, têm o objetivo de viabilizar a introdução dos Postulados de Poisson que será feita posteriormente. Para esse fim, serão propostos quatro experimentos, em que as variáveis didáticas, duração do intervalo de tempo, número de observações, elemento radioativo e a gaveta do contador onde ele é colocado, são fundamentais. O primeiro deles com um determinado material radioativo e cinco segundos entre uma observação e outra; o segundo com outro material e mesmo intervalo de tempo; o terceiro e o quarto experimentos com o mesmo material usado no segundo experimento, porém com

<sup>26</sup> A Ficha 1 que os alunos receberam tem cem espaços para a anotação dos valores colhidos e repete-se nos quatro experimentos a serem realizados.

três e um segundo entre as observações, respectivamente. Estes tempos e a opção da gaveta mais distante têm a finalidade de obter valores que possam ser aproximados por um modelo de variável discreta (no caso, de Poisson). Em cada experimento serão colhidos os resultados de cem observações a fim de que seja viável a aplicação do teste qui-quadrado. Os tempos de cinco, três e um segundo pretendem, também, que a experimentação seja feita em um único encontro, sem dispersão por parte dos alunos<sup>27</sup> e, ainda, possibilitem a emergência de conjecturas relacionadas aos Postulados de Poisson como, por exemplo: o número médio de emissões por unidade de tempo caracteriza a fonte radioativa, o número de emissões é diretamente proporcional ao comprimento do intervalo de tempo considerado e a probabilidade de uma emissão é diretamente proporcional ao comprimento do intervalo de tempo, quando este é suficientemente pequeno. Estas conjecturas são sugeridas pelo próprio esquema de modelagem proposto por Henry (1997).

Nessa etapa, algumas competências a serem desenvolvidas: descrever uma situação problemática, identificar a variável aleatória a ser estudada além de elaborar e colocar em prática um protocolo experimental (HENRY, 1997). Não se espera que os alunos encontrem dificuldades no desenvolvimento desta atividade.

### 3.2.1.1. AVALIAÇÃO

Após o término da coleta dos resultados, os alunos serão convidados a sair do Laboratório de Física Nuclear e passarem a uma sala de aula usual, onde será proposta a Tarefa 1.2. A finalidade desta será avaliar o aproveitamento dos alunos, verificar se os objetivos foram atingidos e obter informações para os futuros encontros que, embora já estejam programados, podem sofrer modificações, tendo em vista as características da metodologia adotada. Além desse instrumento, as anotações dos observadores poderão complementar essa avaliação.

**Tarefa 1.2** Responder o questionário da Ficha 2.

<sup>27</sup> No piloto, um dos alunos classificou como "tedioso" ficar aguardando trinta segundos entre as observações.

**FICHA 2 – Avaliação da primeira etapa****Questionário** (coloque o código do seu crachá) **Aluno** \_\_\_\_\_

1. Descreva em linguagem corrente, o primeiro experimento que você realizou; explicita o que representam os valores que você coletou.

2. Considere que você use o protocolo do primeiro experimento realizado e o repita. O que você pode dizer em relação aos valores coletados e os obtidos na repetição?

3. Considere o primeiro e o segundo experimentos que você realizou.

a) Qual a diferença entre os dois?

b) O que representam os valores obtidos no primeiro experimento? E no segundo?

c) Existe alguma relação entre os valores do primeiro experimento e os do segundo? Por quê?

4. No segundo, terceiro e quarto experimentos, que você realizou, o material radioativo é o mesmo, mas mudou a duração do intervalo de tempo entre as contagens: tiveram duração de cinco, três e um segundo, respectivamente. Compare os resultados obtidos nos três experimentos e complete ou responda, conforme solicitado:

a) Se a duração do intervalo de tempo aumenta, os valores \_\_\_\_\_ .

b) Se a duração do intervalo de tempo diminui, os valores \_\_\_\_\_ .

c) Se o intervalo de tempo tiver duração muito pequena, menor que um segundo, quais valores você espera obter? (cite alguns)

d) Considere que a duração do intervalo de tempo é zero, isto é, não tem intervalo de tempo. Quais valores você espera obter? (cite alguns)

5. Um colega, que participou do piloto deste projeto, colheu os seguintes valores com determinada fonte radioativa e intervalos de trinta segundos de duração:

81    66    84    89    72    76    76    70    92    83    73    77    74

a) Você consegue predizer qual o valor mais provável para o próximo resultado? \_\_\_\_\_ (sim ou não); se sim, qual é? \_\_\_\_\_ .

b) O próximo resultado a ser colhido tem sua probabilidade alterada por influência dos anteriores? \_\_\_\_\_ (sim ou não)

c) Pode-se dizer que o valor do próximo resultado é \_\_\_\_\_ dos demais.

**6.** No texto que você leu sobre material radioativo, o número médio de emissões por intervalo de tempo é uma característica da fonte radioativa considerada na experimentação; depende do tipo de material, da quantidade de massa e da amplitude do intervalo de tempo, entre outros aspectos. Como você faria para estimar esse número médio de emissões por intervalo de tempo, utilizando os resultados colhidos:

a) no segundo experimento: \_\_\_\_\_, obtendo o número médio de emissões por essa fonte a cada \_\_\_\_ segundos.

b) no terceiro experimento: \_\_\_\_\_, obtendo o número médio de emissões por essa fonte a cada \_\_\_\_ segundos.

c) no quarto experimento: \_\_\_\_\_, obtendo o número médio de emissões por essa fonte a cada \_\_\_\_ segundos.

**7.** Esboce sua opinião sobre o encontro de hoje: (por favor, seja o mais sincero possível em suas menções, pois elas são muito importantes!)

a) o que você gostou?

b) o que você não gostou ou não entendeu?

c) qual parte você achou de fundamental importância?

e) explicita suas críticas e sugestões.

**Técnica didática:** os alunos irão responder o questionário individualmente e em sala de aula usual; a professora observará o trabalho dos alunos e só se manifestará, quando solicitada, limitando-se a esclarecer o que está sendo pedido no texto.

**Bloco tecnológico/teórico e análise a priori:**

A professora de Física não participará da atividade, pois seu desenvolvimento dar-se-á em sala usual e espera-se que os esclarecimentos específicos já tenham sido apresentados. O questionário e as anotações feitas

pelos observadores têm o objetivo de avaliar o encontro e vislumbrar possíveis alterações para os próximos, além de verificar se a realização dos experimentos e as discussões coletivas deram condições aos alunos de fazerem conjecturas relacionadas aos Postulados de Poisson que serão introduzidas no próximo encontro. Explicitar que não existe resposta errada e a importância da sua exibição para esse estudo faz parte do contrato didático que será negociado com os alunos e norteará as atividades durante o projeto. A opção pela resposta individual tem o propósito de obter o máximo de informações a respeito dos objetivos a serem alcançados.

A seguir, são apresentadas as respostas, as expectativas, os objetivos a serem atingidos em cada item do questionário e as prováveis técnicas que os alunos podem se valer em suas soluções.

1. Esta questão pretende avaliar se os alunos sabem descrever a situação experimental, ou seja, se eles identificam corretamente a variável a ser observada e evidenciam os aspectos relevantes do experimento. A expectativa é que sejam citados o material radioativo, a duração do intervalo de tempo, o número de repetições e a variável a ser estudada pela maioria dos alunos. Poucos devem citar a gaveta onde o material foi colocado e a regulação da voltagem no contador. A técnica que os alunos podem adotar para responder esse item, é a reflexão a respeito da ação que eles realizaram.

A resposta deve conter o tipo de material observado, a amplitude do intervalo de tempo considerado, o número de observações e a variável aleatória a ser observada: número de emissões pela fonte radioativa no intervalo de tempo considerado, que são os aspectos relevantes do primeiro experimento realizado.

2. Nesta questão o objetivo é investigar se os alunos identificam a característica aleatória dos resultados, além de verificar se percebem que, embora não sejam os mesmos, eles caracterizam a fonte observada. Além disso, pretende-se verificar se os alunos fazem a conjectura do Postulado de Poisson correspondente, qual seja, que a variável aleatória tem a mesma distribuição de probabilidades, em qualquer dos intervalos considerados.

Os alunos podem afirmar que os valores não serão os mesmos, mas não devem concluir que, embora distintos, eles caracterizem a fonte e, ainda, que a

distribuição do número de partículas emitidas em qualquer intervalo de tempo é a mesma. Pode ser que alguns sujeitos afirmem que os resultados serão exatamente os mesmos, indicando que os experimentos realizados não foram suficientes para uma primeira noção de aleatório. As dificuldades relacionadas a esse conceito são citadas nos trabalhos de Girard (1997) e de Batanero e Serrano (1995). No piloto, tal fato também pode ser observado, mas o trabalho nas etapas subsequentes mostrou que, aos poucos, os alunos identificaram algumas características desse conceito como, por exemplo, aquelas citadas por Batanero e Serrano (1995, p. 26). Os alunos podem comparar os resultados das experiências realizadas, a fim de responder essa questão.

Na repetição do experimento, alguns resultados podem coincidir, outros não, embora sejam próximos daqueles obtidos no primeiro experimento, porque a emissão de partículas por uma fonte radioativa é aleatória e se está observando a mesma fonte, com a mesma duração do intervalo de tempo.

A fim de exemplificar, alguns valores obtidos na fase piloto deste projeto, com o material cobalto 60, são apresentados a seguir.

intervalos com trinta segundos de duração: 81 – 66 – 84 – 89 – 72 – 76 – 76 ...

intervalos com dez segundos de duração: 28 – 31 – 32 – 29 – 29 – 24 – 31 – 23 ...

intervalos com um segundo de duração: 2 – 1 – 0 – 1 – 6 – 1 – 1 – 1 – 3 – 2 ...

**3.** Este item tem a intenção de investigar se os alunos identificam que os valores caracterizam a fonte observada. A expectativa é que, praticamente, todos os alunos respondam que os resultados seriam diferentes, porque mudou o elemento, simbolizando, não explicitamente, que cada conjunto de valores caracteriza uma fonte. Os alunos podem recorrer aos resultados obtidos nos dois primeiros experimentos a fim de responderem essa questão, mas é preciso verificar se eles os usam a fim de validar suas respostas, o que poderá ser constatado nas anotações dos observadores.

A resposta deve especificar, no item (a), que a diferença existente é a mudança do material radioativo; no item (b), que os resultados no primeiro experimento representam o número de emissões de um material e, no segundo, o de outro; no item (c), que não existe relação entre os resultados dos dois

experimentos, pois cada um deles caracteriza uma fonte radioativa.

4. Esta questão deve possibilitar que os alunos façam conjecturas sobre três Postulados de Poisson: a probabilidade de uma ocorrência em um intervalo suficientemente pequeno é diretamente proporcional à sua duração, quando o intervalo é suficientemente pequeno a probabilidade de duas ou mais ocorrências é desprezível e a probabilidade de zero ocorrência em um intervalo de duração tendendo a zero é um.

Os alunos devem responder adequadamente os itens (a) e (b), embora (c) e (d) possam ter respostas diferentes daquelas enunciadas, porém, sem contradições. O piloto revelou que alguns alunos não conceberam que o intervalo possa ter amplitude zero e apresentaram comentários em torno de um intervalo muito pequeno. A proporcionalidade entre a amplitude de um intervalo pequeno e a probabilidade de haver uma emissão não é esperada que apareça nas respostas nesse momento. A técnica que os alunos podem se valer é a observação dos resultados obtidos nos segundo, terceiro e quarto experimentos, pois estarão de posse da Ficha 1.

A resposta deve ser: em (a), que os resultados seriam proporcionalmente maiores, em (b), proporcionalmente menores, em (c), compostos, em sua maioria, de zeros e uns e em (d), todos iguais a zero.

5. O objetivo desta questão é que os alunos façam a conjectura do Postulado de Poisson que considera que o número de ocorrências em intervalos não sobrepostos são independentes e têm a mesma distribuição. Alguns alunos devem responder que os resultados são independentes e outros que são exclusivos, como aconteceu no piloto, ou apresentarem uma outra resposta para o item (b), citando que o valor deve estar entre aqueles obtidos, interpretando a pergunta em termos da representatividade e não em relação à probabilidade. Não se espera que eles citem que o número de emissões em qualquer intervalo tem a mesma distribuição. A dificuldade em identificar e utilizar o conceito de independência é citada em Girard (1997). Pretende-se investigar se tal dificuldade permanece com a mudança de estratégia que o trabalho com modelagem propicia. A técnica que os alunos podem adotar para responder essa questão é a observação dos resultados colhidos, em particular, a aleatoriedade dos mesmos.

A resposta deve afirmar, em (a), que não é possível prever o valor mais provável para o próximo resultado, em (b), que não tem sua probabilidade alterada por influência dos resultados anteriores e em (c), que se pode dizer que o valor é independente dos demais.

6. Com esta questão pretende-se investigar se os alunos percebem que a média é uma estimativa do número médio de partículas emitidas pela fonte, no intervalo de tempo considerado, que esta é mais precisa, quando se aumenta o número de observações. Espera-se que eles cheguem a explicitar que se deve calcular a média, mas nem todos devem mencionar que a estimativa é tanto mais precisa quanto maior for o número de observações ou que o número médio de emissões por unidade de tempo pode ser obtido, por regra de três, qualquer que seja a duração do intervalo de tempo. Os alunos podem associar o conceito de média com o número médio de emissões da fonte que eles querem estimar.

A resposta deve mencionar o cálculo da média aritmética dos resultados; nesse caso, ter-se-á uma estimativa do número médio de emissões dessa fonte no intervalo de tempo considerado: em (a), a cada cinco segundos, em (b), a cada três segundos e em (c), por segundo. A repetição do maior número possível de observações do experimento, em intervalos de tempo de mesma duração, possibilita a obtenção de uma estimativa mais precisa.

7. Quando da realização do piloto, esse item foi colocado como ficha de comentários sobre o encontro e foi muito valioso para o refinamento desta pesquisa. A questão objetiva avaliar o encontro em termos de visão do aluno, o que pode favorecer futuros trabalhos ou, até mesmo, os próximos encontros.

Espera-se que a maioria dos alunos cite o experimento realizado no Laboratório de Física Nuclear, como sendo interessante e motivador. Pode ser que algum aluno sinta-se intimidado a elogiar o desenvolvimento do trabalho, apesar das recomendações da importância de sua sinceridade; espera-se que não seja o caso de nenhum desses alunos.

### **3.2.1.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS**

Os elementos de significado institucional pretendidos foram selecionados dentre

aqueles de referência citados no Capítulo 2, por fazerem parte do estudo realizado neste encontro. De acordo com essa etapa de modelagem, proposta por Henry (1997), o aluno deve refletir sobre os experimentos e discussões realizados e elaborar, ainda no caso particular, hipóteses sobre o Modelo de Poisson. Note que, como o autor salienta, essa fase do processo é bastante complexa, por exigir conhecimentos específicos do contexto; a Ficha 2 e sua discussão, juntamente com o texto sobre material radioativo têm como objetivo diminuir essa dificuldade e possibilitar a organização de algumas conjecturas sobre as hipóteses do Modelo de Poisson, além de uma primeira concepção a respeito dos valores obtidos em um experimento aleatório, quais sejam:

- ✓ Os valores obtidos em um experimento aleatório são casuais; eles caracterizam o experimento realizado, mas não se pode dar demasiado crédito a eles. (item 2 e/ou item 3 e/ou observação e reflexão dos valores obtidos nos quatro experimentos)
- ✓ O número médio de partículas emitidas em um intervalo de tempo é característica da fonte observada, considerando que vários fatores foram desconsiderados. (item 1 e/ou item 2 e/ou item 3 e/ou item 6 e/ou primeiro e segundo experimentos)
- ✓ O número de partículas emitidas em um intervalo suficientemente pequeno é diretamente proporcional à amplitude do intervalo considerado. (item 4 (a) e (b) e/ou terceiro e quarto experimentos)
- ✓ A probabilidade de se obter mais de uma partícula emitida em um intervalo de tempo suficientemente pequeno é desprezível. (item 4 (c) e/ou quarto experimento)
- ✓ A probabilidade de nenhuma emissão em um intervalo de tempo de amplitude zero é um. (item 4 (d))
- ✓ Os números de partículas emitidas em intervalos de tempo não sobrepostos são independentes. (item 5 e/ou os experimentos realizados)
- ✓ Os números de partículas emitidas em intervalos de tempo de mesma duração e com o mesmo material têm a mesma distribuição de probabilidades. (item 2 e/ou comparação entre segundo, terceiro e quarto experimentos)

Acredita-se que nem todas as respostas esperadas sejam dadas espontaneamente, mas, com questionamentos adequados, sobre os respectivos itens pode-se chegar a elas. Ao final das discussões, a professora colocará as conclusões no quadro para que sejam institucionalizadas.

Uma síntese dos elementos de significado institucional pretendidos é apresentada no Quadro 5, considerando as facetas do conhecimento: práxis, linguagem e logoi, em que se tem classificadas as seis componentes da cognição matemática, quais sejam: situações, ações, linguagem, conceitos, propriedades ou atributos e argumentos. (GODINO, 2003, p. 118).

**Quadro 5. Elementos de significado institucional pretendidos**

PRÁXIS	LINGUAGEM	LOGOS
<u>Situação</u> situação relacionada à Física: contagem de partículas emitidas por fontes radioativas. <u>Ações</u> realização de experimentos de contagem de partículas radioativas com o contador Geiger-Mueller; elaboração de um protocolo experimental;	<u>Linguagem</u> aleatório, valor médio, teste qui-quadrado, protocolo experimental. descrição de experimentos.	<u>Conceitos</u> valor médio, aleatório. <u>Propriedades</u> número de partículas emitidas depende do material e do intervalo de tempo entre as observações; valores obtidos na observação de partículas emitidas são aleatórios. <u>Argumentos</u> validação empírica; dedução fundamentada na observação dos resultados obtidos.

### 3.2.2 A SEGUNDA ETAPA – MODELO PSEUDOCONCRETO – Laboratório de Informática

A segunda etapa de modelagem é definida por Henry (1997), como Modelo pseudo-concreto; em relação a ela o autor escreve:

**Quadro 6. Segunda etapa de modelagem**

ETAPA	OBJETO DE AÇÃO	ATIVIDADE ESPERADA
Modelo pseudo-concreto	Situação genérica, descontextualizada, abstratamente portadora de propriedades do objeto de estudo. Hipóteses do Modelo: em geral implícitas, porém explícitas para o contexto particular.	Apresentação em linguagem corrente ou esquemática; validação retórica da analogia com a descrição precedente. Confrontação das hipóteses do Modelo com os elementos correspondentes da descrição. Conjecturas sobre as propriedades do Modelo respondendo à questão.

Fonte: Henry (1997, p. 82).

Esta etapa de modelagem será desenvolvida no segundo encontro, no Laboratório de Informática, com o auxílio de uma planilha. Com a Tarefa 2.1 (Ficha 3), os alunos organizam os resultados, coletados nos experimentos, em tabelas e gráficos, valendo-se de medidas de tendência central e dispersão, com o auxílio do aplicativo; a Tarefa 2.2 (Ficha 4) tem o objetivo de avaliar o encontro.

No início desta etapa, as duplas serão orientadas a se posicionarem diante de um computador e será proposta a Tarefa 2.1.

**Tarefa 2.1** Realizar a tarefa proposta na Ficha 3.

### FICHA 3 – Estudo descritivo

(coloquem os códigos dos seus crachás) **Dupla** \_\_\_\_\_ **e** \_\_\_\_\_

Digite os valores obtidos na primeira experiência na planilha e obtenha o resumo estatístico dos resultados, usando a opção Estatística Descritiva que o aplicativo oferece. Com essas informações, digite a Matriz Bin (considerando um estudo exato) e use a função Freqüência para contagem. Construa um gráfico de colunas com as informações da Matriz Bin e respectivas freqüências. Repita essa tarefa para a segunda, terceira e quarta experiências e salve no disquete que lhe foi entregue (não esqueça de ir salvando, enquanto trabalha, para não perder informações).

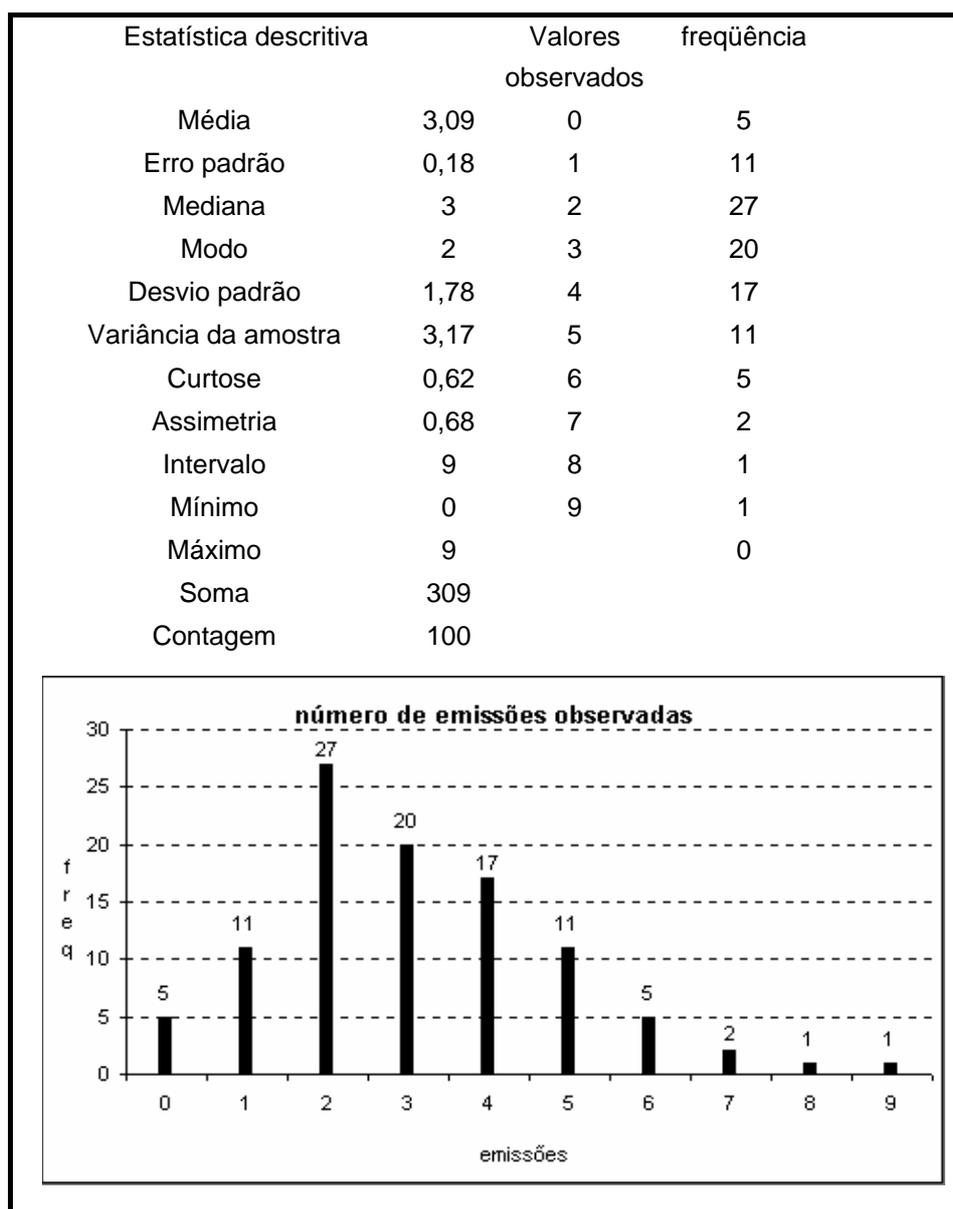
**Técnica didática:** Trabalho em dupla; a professora poderá, quando solicitada, orientar a manipulação do aplicativo.

#### **Bloco tecnológico/teórico e análise a priori:**

A opção de distribuir as fichas, pedir que as duplas executem a tarefa e só orientá-las na manipulação do aplicativo, quando houver solicitação, é justificada pelo fato de os alunos já terem utilizado esse aplicativo nas aulas de Probabilidade e Estatística. O trabalho colaborativo pode favorecer o rendimento das duplas, pois um dos alunos é do curso de Computação.

Como ilustração da resposta para essa tarefa, um exemplo, com valores obtidos em Henry (2003), é apresentado na Figura 15. Para Henry (1997), na segunda etapa de modelagem, objetiva-se traduzir a descrição dos experimentos em um sistema estruturado e simplificado (em didática, a contextualização do

saber velho). Aqui serão levantadas as hipóteses do Modelo de Poisson, mas, apenas no contexto particular do experimento, ou seja, da emissão de partículas por essas fontes radioativas; as hipóteses do modelo geral estão implícitas. Pretende-se chegar ao modelo de forma esquemática, usando a linguagem natural. Nessa etapa, a validação será pela confrontação com a descrição feita na etapa anterior, quando da elaboração do protocolo experimental.



Fonte: Henry (2003).

**Figura 15. Exemplo de resposta da Tarefa 2.1.**

O uso do computador como ferramenta didática foi sugerido nas pesquisas de Henry (2003) e Batanero, Tauber e Sánchez (2001). Nessa tarefa, o uso de um aplicativo pode favorecer o estudo pretendido pela agilidade na construção de

gráficos e tabelas, cuja visualização, segundo os achados de Parzys (1997) e de Batanero, Tauber e Sánchez (2001), facilita a identificação de propriedades relativas aos valores colhidos. Além disso, o aplicativo utilizado dispõe da ferramenta Estatística Descritiva que fornece de uma só vez informações como média, variância e desvio padrão amostrais, número de elementos, valores máximo e mínimo, que são particularmente úteis na elaboração da tabela de freqüências com base nos valores colhidos. Alguns alunos podem apresentar dificuldades no uso da função freqüência do aplicativo, como ocorreu no desenvolvimento do projeto piloto.

### 3.2.2.1 AVALIAÇÃO

De posse dos resultados experimentais, dos resumos estatísticos e das representações gráficas será solicitado que os alunos respondam as seguintes questões que, juntamente com as observações e os conteúdos dos disquetes servirão para avaliar a segunda etapa.

**Tarefa 2.2** Responder ou completar os itens constantes na Ficha 4.

#### FICHA 4 – Avaliação da segunda etapa

(coloquem os códigos dos seus crachás) **Dupla** \_\_\_\_\_ **e** \_\_\_\_\_

Observando os gráficos e os resumos estatísticos dos quatro experimentos que você realizou, responda os seguintes itens:

1. Defina a variável aleatória que você observou no: (não esqueça de identificar o material radioativo)

a) primeiro experimento: \_\_\_\_\_

b) segundo experimento: \_\_\_\_\_

c) terceiro experimento: \_\_\_\_\_

d) quarto experimento: \_\_\_\_\_

2. Em cada experimento que você realizou, os valores obtidos são ditos aleatórios. Explique o que isso significa, isto é, o que você entende por valores aleatórios?

3. O segundo, terceiro e quarto experimentos que você realizou referem-se a um mesmo material radioativo. Você já tem calculado, na sua planilha, o número médio de emissões por essa fonte em cada um dos intervalos: cinco, três e um segundo.

a) Use o número médio de emissões por essa fonte em cinco segundos (segundo experimento) e obtenha o número médio correspondente para um segundo.

Complete: Em média, essa fonte emite \_\_\_\_\_ partículas por segundo.

b) Use o número médio de emissões por essa fonte em três segundos (terceiro experimento) e obtenha o número médio correspondente para um segundo.

Complete: Em média, essa fonte emite \_\_\_\_\_ partículas por segundo.

c) Você tem agora três números: o obtido em (a), o obtido em (b) e aquele obtido no quarto experimento, todos representam o número médio de emissões de uma mesma fonte radioativa por segundo. Como você explica o fato de que os três números não são exatamente os mesmos?

d) Com os conhecimentos que você tem até agora, algum deles é o verdadeiro número médio de emissões por essa fonte? \_\_\_\_\_ (sim ou não). Se não, tem algum que é melhor que os outros? Por quê?

4. Complete, arredondando os números obtidos para duas casas decimais:

a) Primeiro experimento: média = \_\_\_\_\_ e variância = \_\_\_\_\_ (cinco segundos)

b) Segundo experimento: média = \_\_\_\_\_ e variância = \_\_\_\_\_ (cinco segundos)

c) Terceiro experimento: média = \_\_\_\_\_ e variância = \_\_\_\_\_ (três segundos)

d) Quarto experimento: média = \_\_\_\_\_ e variância = \_\_\_\_\_ (um segundo)

Observando as informações acima, qual conjectura pode-se fazer em relação aos valores da média e da variância do número de partículas emitidas por uma fonte radioativa em um intervalo de determinada duração?

5. Esboce sua opinião sobre o encontro de hoje: (por favor, seja o mais sincero possível em suas citações, pois elas são muito importantes!)

a) o que você gostou?

b) o que você não gostou ou não entendeu?

c) qual parte você achou de fundamental importância?

e) explicite suas críticas e sugestões.

**Técnica didática:** os alunos responderão os itens da Ficha 4 em dupla e a professora limitar-se-á a orientá-los, para que não deixem de responder nenhuma questão.

**Bloco tecnológico/teórico e análise a priori:**

A opção de os alunos responderem as questões em dupla, cuja composição é de um aluno de cada curso, tem o objetivo de favorecer o rendimento, já que os alunos de Engenharia estudam radioatividade na cadeira de Física, no semestre em questão. O esclarecimento do texto, apenas quando solicitado, pretende que o professor não induza as duplas na direção das soluções esperadas.

A seguir, são apresentadas as respostas, os objetivos, as expectativas e as possíveis técnicas que as duplas poderão adotar na execução da tarefa.

1. Neste item objetiva-se verificar se as duplas especificam o material e o intervalo de tempo como sendo fatores considerados relevantes. A apresentação dos quatro itens a serem completados pode provocar uma reflexão em relação a esse aspecto. Objetiva-se, ainda, que as duplas comecem a fazer conjecturas em relação ao Modelo, que é o mesmo em cada experimento, mudando apenas o parâmetro e que este depende da duração do intervalo de tempo e da fonte radioativa.

Em cada caso, a resposta deve mencionar que a variável aleatória é o número de emissões pela fonte no intervalo de tempo considerado. Todas as duplas devem responder adequadamente esse item, pois podem recorrer à Ficha 1 a fim de retomar os valores coletados. As observações da representação gráfica e do quadro Estatística Descritiva podem favorecer as conjecturas em relação ao Modelo de Poisson visadas.

2. O item tem o objetivo de investigar se a experimentação no Laboratório de Física Nuclear e o tratamento dos valores obtidos na planilha possibilitaram alguma evolução da dupla na interpretação do conceito de aleatório, em relação ao que foi apresentado, individualmente, no questionário da Ficha 2.

As duplas poderão recorrer à Ficha 1 para elaborarem suas respostas e deverão explicitar que os valores ocorrem ao acaso, isto é, não podem ser previstos antecipadamente. O projeto piloto forneceu respostas que se referiram a *não ter ordem, diferentes uns dos outros, não seguem nenhuma lei de formação, não podem ser definidos antes de realizar o experimento, não têm regras, não se repetem*<sup>28</sup>, evidenciando que a idéia de aleatório está presente na maioria das respostas. Espera-se resultado semelhante também para esse grupo.

**3.** Este item tem o objetivo de verificar se as duplas identificam a idéia do acaso do experimento realizado; comparando com a resposta do item 2 do questionário na Ficha 2, pode-se avaliar se houve alguma evolução até o momento. A resposta para o item (a) deve mencionar que a divisão do número médio por cinco e em (b) por três. No item (c), a justificativa da diferença dos três resultados deve ser fundamentada no acaso dos experimentos realizados. No item (d), a resposta deve conter que nenhum deles é o verdadeiro valor ou o melhor representante, já que o número de observações é o mesmo em todos os casos.

Em relação às respostas das duplas, não se espera dificuldade em relação aos itens (a) e (b); em (c) eles podem justificar corretamente, como também podem apresentar alguma argumentação relacionada à duração do intervalo de tempo. No item (d) pode ser que muitos alunos escolham o valor obtido em (a) como sendo o melhor, justificando que quanto maior o intervalo de tempo, melhor será a aproximação ao verdadeiro valor, como ocorreu no piloto. Existem indícios de que uma maior amplitude do intervalo de tempo induza o aluno a concluir que esse fator implique uma contagem mais precisa. A técnica que pode ser utilizada pelas duplas nos itens (a) e (b) é o uso da regra de três simples e em (c) e (d), a técnica deve ser fundamentada na reflexão e observação dos resultados colhidos, como também no texto sobre material radioativo e sua discussão.

**4.** Com este item objetiva-se que as duplas façam a conjectura da propriedade do Modelo de Poisson de que média e variância coincidem. A resposta deve apresentar os valores da média e da variância em cada caso, com duas casas decimais e identificar uma aproximação entre os dois valores. Não se espera que os alunos cheguem a concluir a coincidência dos valores, justificando que as

<sup>28</sup> Em itálico, termos usados pelos alunos no projeto piloto.

diferenças encontradas podem ser devidas ao acaso da realização dos experimentos. Alguns podem dizer que os valores têm a mesma ordem de grandeza e outros que não existe relação entre os valores da média e da variância, identificando que essa conjectura não foi feita até o momento. Espera-se, ainda, encontrar erros de arredondamento na apresentação dos valores da média e da variância nos quatro casos, como ocorreu no piloto. Os alunos podem se valer do uso do computador para os arredondamentos, formatando as células para duas casas decimais, evitando os erros previstos anteriormente. Em relação aos valores da média e variância, as duplas podem usar os resultados obtidos nos quatro experimentos para organizarem suas conclusões.

**5.** Esta questão tem o objetivo de avaliar o encontro em termos de visão das duplas, o que pode favorecer futuros trabalhos ou, até mesmo, os próximos encontros.

Os alunos devem citar a representação gráfica como sendo importante na visualização dos resultados obtidos. No piloto, foi quase unânime, a explicitação de que a exploração do uso do aplicativo foi o aspecto mais importante, pois não houve oportunidade de fazê-lo anteriormente e, ao mesmo tempo, acharam que uma hora e meia não foi suficiente para aprenderem a manipular de modo adequado o aplicativo.

Os comentários e sugestões obtidos no experimento piloto, além da valorização da exploração da planilha, fizeram alusão à mudança de ambiente, Laboratório de Física Nuclear, Laboratório de Informática (*que tal adotar essa estratégia para o curso de Probabilidade e Estatística?*<sup>29</sup>) e à importância de se poder valer de resultados reais para desenvolver o trabalho na planilha. Estas observações foram muito valiosas na elaboração desta fase, tendo em vista que elas também foram sugeridas pelos trabalhos de Coutinho (2001) e Batanero, Tauber e Sánchez (2001).

### **3.2.2.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS**

Nesta etapa, os elementos de significado institucional pretendidos referem-se às

<sup>29</sup> Frase de um aluno durante o projeto piloto.

conjecturas que podem ser feitas em relação às propriedades do Modelo de Poisson que serão utilizadas na próxima sessão. Os alunos podem recorrer aos resultados experimentais e à sua representação gráfica, para que os objetivos sejam atingidos. Admite-se a hipótese de que esse estudo possa colaborar no estabelecimento de uma relação pessoal significativa, dos alunos com o objeto matemático Modelo de Poisson, como sugerem os resultados de Batanero, Tauber e Sánchez (2001), quando os autores concluem que o uso de computadores e observação de um experimento da realidade introduzem mudanças no significado da Distribuição Normal, porque afeta diferentes elementos do modelo. No Quadro 7 tem-se uma apresentação dos elementos de significado pretendidos nesse encontro.

**Quadro 7. Elementos de significado institucional pretendidos**

PRÁXIS	LINGUAGEM	LOGOS
<p><u>Ações</u> organização, representação em tabela e gráfico e resumo estatístico de valores coletados com auxílio de um aplicativo.</p>	<p><u>Linguagem</u> tabela; gráfico de barras.</p>	<p><u>Conceitos</u> aleatório, probabilidade desprezível, independência, variância, desvio padrão, média..</p> <p><u>Propriedades</u> valores obtidos nos experimentos são aleatórios; número de emissões por intervalo de tempo é característica do elemento radioativo; número de emissões em um intervalo de duração suficientemente pequeno é diretamente proporcional à amplitude do intervalo; a probabilidade de obter mais de uma emissão, em um intervalo de duração suficientemente pequena, é desprezível; a probabilidade de nenhuma emissão, em um intervalo de amplitude zero, é um; os números de emissões, em intervalos não sobrepostos, são independentes; os números de emissões, em intervalos de mesma duração e com o mesmo elemento radioativo, têm a mesma distribuição.</p> <p><u>Argumentos</u> validação empírica; comparação de casos particulares com generalização.</p>

### 3.2.3 A TERCEIRA ETAPA – MODELO MATEMÁTICO – Sala de aula usual

Henry (1997) define a terceira etapa de modelagem, como modelo matemático. Em relação a ela, o autor escreve:

Quadro 8. Terceira etapa de modelagem

ETAPA	OBJETO DE AÇÃO	ATIVIDADE ESPERADA
Modelo Matemático	Conjunto de equações ou de formalizações matemáticas, representando as propriedades do Modelo e as hipóteses admitidas.	Colocar em equações ou formalização: à partir das leis do fenômeno estudado e dos conhecimentos teóricos do Modelo pseudo-concreto, escrever matematicamente as relações assinaladas entre as variáveis, em um determinado quadro teórico.

Fonte: Henry (1997, p. 82).

O terceiro encontro será em sala de aula usual, já que se pretende desenvolver a organização matemática do Modelo de Poisson de forma expositiva e, ao mesmo tempo, participativa. No início, os alunos receberão uma cópia da Ficha 4 e outra do conteúdo do disquete correspondente; de posse deste material, será proposta a Tarefa 3.1, que tem o objetivo de trabalhar a terceira etapa de modelagem: construção da organização matemática do Modelo de Poisson.

**Tarefa 3.1** Acompanhar o desenvolvimento que será exposto pela professora, participando da sua elaboração, com sugestões e questionamentos, sempre que necessários.

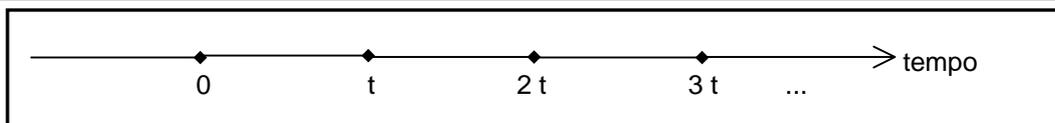
O desenvolvimento, a que se refere à Tarefa 3.1, é apresentado na Ficha 5 e uma cópia será entregue a cada aluno ao final da exposição.

#### FICHA 5 – Construção do Modelo Teórico

Os experimentos que foram realizados, conforme se pode constatar, referem-se ao estudo da radioatividade. A variável estudada foi o número de partículas emitidas por uma fonte radioativa durante um intervalo de tempo de duração  $t$ ; seja  $W_t$  essa variável aleatória. Em cada experimento, foi determinada a distribuição de freqüências por tabela e gráfico e foram obtidas algumas medidas, como média e variância. Pretende-se construir um Modelo Teórico a fim de determinar as probabilidades da variável aleatória  $W_t$ , cujas freqüências correspondentes se aproximem dos valores daquelas encontradas em cada um dos experimentos.

Pode-se considerar que a variável aleatória  $W_t$ : número de partículas emitidas por uma fonte radioativa em um intervalo de duração  $t$  assume os valores: 0, 1, 2, 3, ..., já que o Modelo Teórico deve possibilitar o estudo do número de partículas emitidas por qualquer fonte e qualquer duração para o

intervalo de tempo. Considerando uma determinada fonte e um intervalo de duração  $t$ , seja a partição do tempo apresentada na Figura 16.



**Figura 16. Partição do tempo**

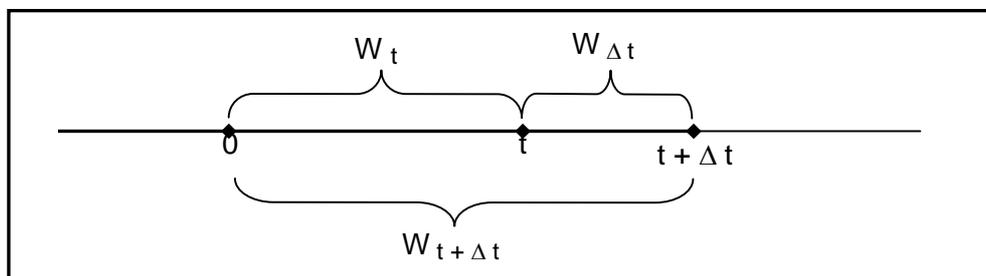
A distribuição de probabilidades da variável aleatória  $W_t$  está representada na Tabela 7.

**Tabela 7. Distribuição de probabilidades da variável aleatória  $W_t$**

$W_t$	0	1	2	3	...
$P(W_t)$	$P(W_t = 0)$	$P(W_t = 1)$	$P(W_t = 2)$	$P(W_t = 3)$	...

### Cálculo de $P(W_t = 0)$

Considere as variáveis aleatórias,  $W_{\Delta t}$ ,  $W_{t+\Delta t}$  definidas pelo número de partículas emitidas, por essa fonte radioativa, nos intervalos de duração  $\Delta t$  e  $t+\Delta t$ , respectivamente, como indicado na Figura 17.



**Figura 17. Número de partículas no intervalo  $[0, t+\Delta t]$**

A fim de que o Modelo Teórico possa ser construído, algumas hipóteses devem ser admitidas, hipóteses essas sugeridas pela observação dos experimentos realizados.

Como a fonte é a mesma, é razoável admitir-se a hipótese ( $H_1$ ) de que a **distribuição do número de emissões é a mesma para todos os intervalos da partição**. Dessa forma, observa-se que  $W_t$ ,  $W_{\Delta t}$  e  $W_{t+\Delta t}$  têm a mesma distribuição de probabilidades, cada uma em relação à duração do intervalo de tempo considerado. Portanto, tem-se que:

$$P(W_{t+\Delta t} = 0) = P(W_t = 0 \cap W_{\Delta t} = 0) \quad (1)$$

Outra hipótese ( $H_2$ ) a ser admitida é que **os números de ocorrências registrados nos intervalos de tempo da partição são independentes entre si**; dessa forma, as variáveis aleatórias,  $W_t$  e  $W_{\Delta t}$ , são estatisticamente independentes, donde se pode escrever que:

$$P(W_{t+\Delta t} = 0) = P(W_t = 0) \cdot P(W_{\Delta t} = 0) \quad (2)$$

Como  $W_{\Delta t}$  tem a mesma distribuição de probabilidades de  $W_t$ , mudando apenas a duração do intervalo de tempo, tem-se:

**Tabela 8. Distribuição de probabilidades da variável aleatória  $W_{\Delta t}$**

$W_{\Delta t}$	0	1	2	3	...
$P(W_{\Delta t})$	$P(W_{\Delta t}=0)$	$P(W_{\Delta t}=1)$	$P(W_{\Delta t}=2)$	$P(W_{\Delta t}=3)$	...

Como  $P(W_{\Delta t}=0) + P(W_{\Delta t}=1) + P(W_{\Delta t}=2) + P(W_{\Delta t}=3) + \dots = 1$ ,

$$\text{tem-se que: } P(W_{\Delta t} = 0) = 1 - P(W_{\Delta t} = 1) - \sum_{k=2}^{\infty} P(W_{\Delta t} = k).$$

Substituindo o valor de  $P(W_{\Delta t} = 0)$  na equação (2), tem-se:

$$P(W_{t+\Delta t} = 0) = P(W_t = 0) \cdot \left[ 1 - P(W_{\Delta t} = 1) - \sum_{k=2}^{\infty} P(W_{\Delta t} = k) \right]$$

de onde se obtém,

$$P(W_{t+\Delta t} = 0) = P(W_t = 0) \cdot \left[ P(W_{\Delta t} = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(W_{\Delta t} = k) \right]$$

ou ainda,

$$P(W_{t+\Delta t} = 0) - P(W_t = 0) = -P(W_t = 0) \cdot \left[ P(W_{\Delta t} = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(W_{\Delta t} = k) \right]$$

Dividindo ambos os termos por  $\Delta t$ , tem-se:

$$\frac{P(W_{t+\Delta t} = 0) - P(W_t = 0)}{\Delta t} = -P(W_t = 0) \cdot \left[ \frac{P(W_{\Delta t} = 1)}{\Delta t} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{P(W_{\Delta t} = k)}{\Delta t} \right]$$

Passando ao limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $\Delta t$  pequeno) tem-se:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(W_{t+\Delta t} = 0) - P(W_t = 0)}{\Delta t} = -P(W_t = 0) \cdot \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(W_{\Delta t} = 1)}{\Delta t} + \sum_{k=2}^{\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(W_{\Delta t} = k)}{\Delta t} \right] \quad (3)$$

Levando-se em consideração os experimentos realizados, é razoável admitir-se a hipótese (H<sub>3</sub>) de que **em um intervalo de pequena duração a probabilidade de se obter uma emissão é diretamente proporcional ao comprimento do intervalo**, isto é, existe um  $\lambda$ , real positivo, tal que:

$$P(W_{\Delta t}=1) = \lambda \cdot \Delta t \quad (\text{ver texto sobre material radioativo}) \quad (4)$$

Admite-se, ainda, a hipótese (H<sub>4</sub>) de que **em um intervalo de pequena duração a probabilidade de duas ou mais emissões é desprezível**, isto é,

$$P(W_{\Delta t}=2) = P(W_{\Delta t}=3) = \dots = 0, \text{ ou equivalentemente, } P(W_{\Delta t}=k) = 0, \quad \forall k \geq 2 \quad (5)$$

Substituindo (4) e (5) em (3), tem-se:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(W_{t+\Delta t} = 0) - P(W_t = 0)}{\Delta t} = -P(W_t = 0) \cdot \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\lambda \cdot \Delta t}{\Delta t} + \sum_{k=2}^{\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta t} \right]$$

De onde se tem:

$$P'(W_t = 0) = -P(W_t = 0) \cdot \lambda \quad \text{ou} \quad \frac{P'(W_t = 0)}{P(W_t = 0)} = -\lambda$$

Integrando ambos os membros dessa última igualdade, vem:

$$\int \frac{P'(W_t = 0)}{P(W_t = 0)} dt = \int (-\lambda) dt, \text{ e, portanto, } \int \frac{1}{P(W_t = 0)} P'(W_t = 0) dt = -\lambda t + c_1,$$

onde  $c_1$  é real.

Assim,  $\ln | P(W_t = 0) | + c_2 = -\lambda t + c_1$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são reais.

Como  $P(W_t = 0) \geq 0$ , tem-se:  $\ln P(W_t = 0) = -\lambda t + (c_1 - c_2)$ ; considerando  $c_3 = c_1 - c_2$ , vem que:  $\ln P(W_t = 0) = -\lambda t + c_3$ . e portanto,  $e^{-\lambda t + c_3} = P(W_t = 0)$ ,

$$\text{ou ainda, } P(W_t = 0) = e^{-\lambda t} \cdot e^{c_3}, \text{ isto é, } P(W_t = 0) = e^{-\lambda t} \cdot c_4. \quad (6)$$

É necessário admitir a hipótese (H<sub>5</sub>) de que **a probabilidade de nenhuma ocorrência em um intervalo de tempo nulo é um**, isto é, se não tem intervalo de tempo para a observação, com certeza, nenhuma emissão poderá ser

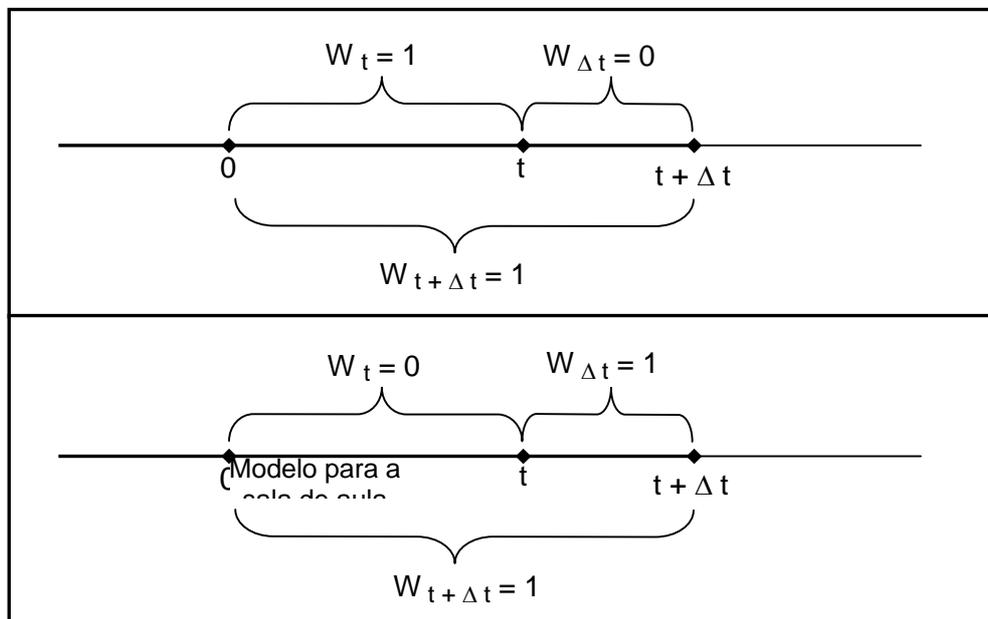
observada. Note que a hipótese  $H_5$  é imediata, mas é uma condição, para que se possa criar o Modelo Teórico.

Com essa hipótese, tem-se que  $P(W_0 = 0) = 1$ ; substituindo esse resultado em (6), tem-se que:  $1 = e^{-\lambda \cdot 0} \cdot c_4 \Rightarrow c_4 = 1$ .

Dessa forma, chega-se a:  $P(W_t = 0) = e^{-\lambda t}$ , que é a probabilidade procurada.

### Cálculo de $P(W_t = 1)$

Há dois casos exclusivos representados na Figura 18.



**Figura 18. Emissão de uma partícula no intervalo  $[0, t + \Delta t]$**

$$\begin{aligned} P(W_{t+\Delta t} = 1) &= P[(W_t = 1 \cap W_{\Delta t} = 0) \cup (W_t = 0 \cap W_{\Delta t} = 1)] = \\ &= P(W_t = 1 \cap W_{\Delta t} = 0) + P(W_t = 0 \cap W_{\Delta t} = 1) = \\ &= P(W_t = 1) \cdot P(W_{\Delta t} = 0) + P(W_t = 0) \cdot P(W_{\Delta t} = 1) \end{aligned}$$

Substituindo os valores obtidos anteriormente, tem-se:

$$P(W_{t+\Delta t} = 1) = P(W_t = 1) \cdot \left[ 1 - P(W_{\Delta t} = 1) - \sum_{k=2}^{\infty} P(W_{\Delta t} = k) \right] + e^{-\lambda t} \cdot P(W_{\Delta t} = 1)$$

$$P(W_{t+\Delta t} = 1) - P(W_t = 1) = - P(W_t = 1) \cdot \left[ P(W_{\Delta t} = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(W_{\Delta t} = k) \right] + e^{-\lambda t} \cdot P(W_{\Delta t} = 1)$$

Dividindo por  $\Delta t$  ambos os membros da igualdade acima e levando ao limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$  chega-se a:

$$P'(W_t = 1) = -P(W_t = 1) \cdot [\lambda + 0] + e^{-\lambda t} \cdot \lambda \quad \text{ou} \quad P'(W_t = 1) = -P(W_t = 1) \cdot \lambda + e^{-\lambda t} \cdot \lambda \quad (7)$$

A solução dessa última equação pode ser obtida, partindo-se da solução de:  $P'(W_t = 1) = -P(W_t = 1) \cdot \lambda$ , que é o mesmo tipo de equação obtido anteriormente, cuja solução é:  $P(W_t = 1) = e^{-\lambda t} \cdot c_4$ . A determinação do valor de  $c_4$  é um pouco diferente; note que esta deve ser a solução da equação:  $P'(W_t = 1) = -P(W_t = 1) \cdot \lambda + e^{-\lambda t} \cdot \lambda$  e para tal,  $c_4$  deve ser função de  $t$ . Admitindo, portanto, que  $c_4 = c(t)$ , tem-se:  $P(W_t = 1) = e^{-\lambda t} \cdot c(t)$  e conseqüentemente,  $P'(W_t = 1) = -\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c(t) + e^{-\lambda t} \cdot c'(t)$ . Substituindo esses dois resultados na equação (7), pode-se encontrar o valor de  $c(t)$ .

De fato,  $-\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c(t) + e^{-\lambda t} \cdot c'(t) = -\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c(t) + e^{-\lambda t} \cdot \lambda$ , de onde se tem:  $c'(t) = \lambda$  e por integração segue que  $c(t) = \lambda \cdot t + k$ . Dessa forma,  $P(W_t = 1) = e^{-\lambda t} \cdot c_4 = e^{-\lambda t} \cdot c(t) \Rightarrow P(W_t = 1) = e^{-\lambda t} \cdot \lambda \cdot t + k$ , onde  $k$  é um número real. Como  $P(W_0 = 1) = 0$ , pois sem intervalo de tempo é impossível obter-se uma emissão, tem-se que:  $0 = e^{-\lambda \cdot 0} \cdot \lambda \cdot 0 + k \Rightarrow k = 0$ .

Assim, a probabilidade procurada é:  $P(W_t = 1) = e^{-\lambda t} \cdot \lambda \cdot t$

### Cálculo de $P(W_t = 2)$

Existem três casos exclusivos a serem considerados: 2 e 0, 1 e 1, 0 e 2 representados na Figura 19.

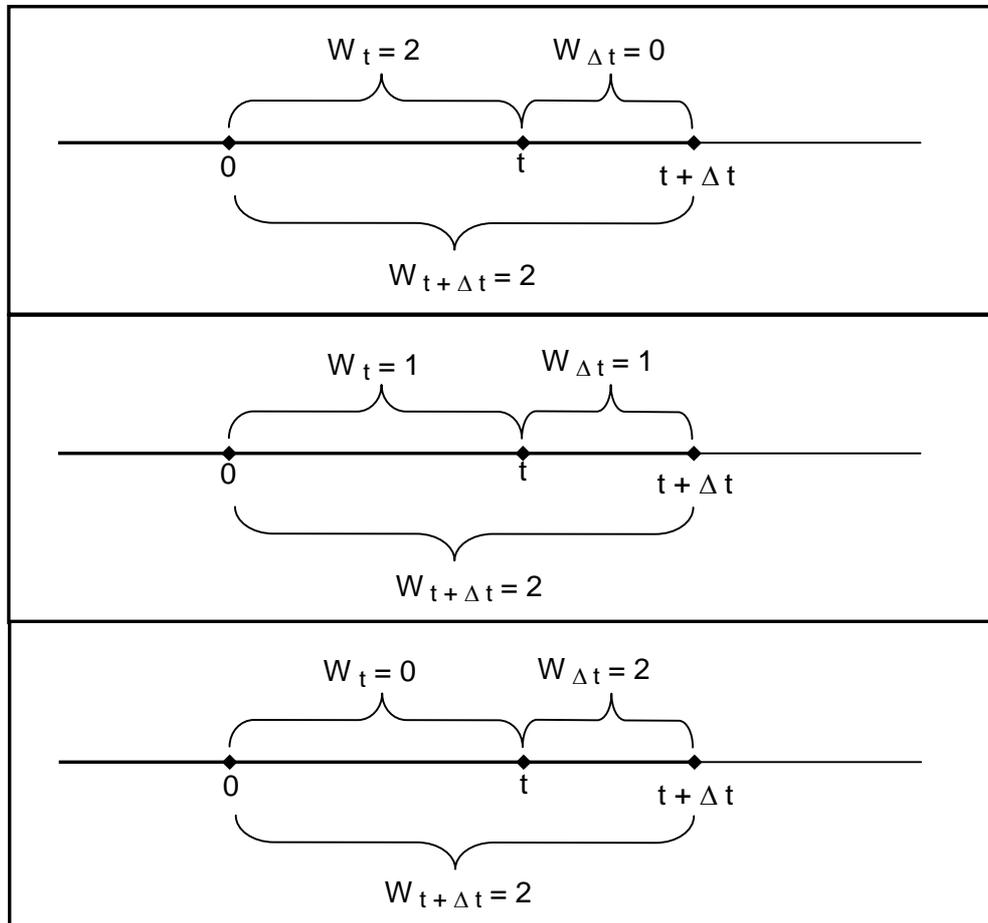
$$\begin{aligned} P(W_{t+\Delta t} = 2) &= P[(W_t = 2 \cap W_{\Delta t} = 0) \cup (W_t = 1 \cap W_{\Delta t} = 1) \cup (W_t = 0 \cap W_{\Delta t} = 2)] = \\ &= P(W_t = 2 \cap W_{\Delta t} = 0) + P(W_t = 1 \cap W_{\Delta t} = 1) + P(W_t = 0 \cap W_{\Delta t} = 2) = \\ &= P(W_t = 2) \cdot P(W_{\Delta t} = 0) + P(W_t = 1) \cdot P(W_{\Delta t} = 1) + P(W_t = 0) \cdot P(W_{\Delta t} = 2) \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores obtidos anteriormente vem:

$$\begin{aligned} P(W_{t+\Delta t} = 2) &= P(W_t = 2) \cdot P(W_{\Delta t} = 0) + e^{-\lambda t} \cdot \lambda \cdot t \cdot P(W_{\Delta t} = 1) + e^{-\lambda t} \cdot P(W_{\Delta t} = 2) = \\ &= P(W_t = 2) \cdot \left[ 1 - P(W_{\Delta t} = 1) - \sum_{k=2}^{\infty} P(W_{\Delta t} = k) \right] + e^{-\lambda t} \cdot \lambda \cdot t \cdot P(W_{\Delta t} = 1) + e^{-\lambda t} \cdot P(W_{\Delta t} = 2) \end{aligned}$$

de onde se obtém:  $P(W_{t+\Delta t} = 2) - P(W_t = 2) =$

$$= - P(W_t = 2) \cdot \left[ P(W_{\Delta t} = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(W_{\Delta t} = k) \right] + e^{-\lambda t} \cdot \lambda \Delta t \cdot P(W_{\Delta t} = 1) + e^{-\lambda t} \cdot P(W_{\Delta t} = 2)$$



**Figura 19. Emissão de duas partículas no intervalo [0, t + Δ t]**

Dividindo por Δ t ambos os membros da igualdade acima e levando ao limite quando Δ t → 0, chega-se a:

$$P'(W_t = 2) = -P(W_t = 2) \cdot [\lambda + 0] + e^{-\lambda t} \cdot \lambda \Delta t \cdot \lambda + e^{-\lambda t} \cdot 0$$

$$\text{ou } P'(W_t = 2) = -P(W_t = 2) \cdot \lambda + e^{-\lambda t} \cdot \lambda^2 t$$

A solução desta última equação pode ser obtida, partindo-se de  $P'(W_t = 2) = -P(W_t = 2) \cdot \lambda$ , que é o mesmo tipo de equação obtido anteriormente, cuja solução é:  $P(W_t = 2) = e^{-\lambda t} \cdot c_5$ .

A determinação do valor de  $c_5$  é feita de modo análogo ao que foi feito para

c<sub>4</sub>. Note que  $P(W_t = 2) = e^{-\lambda t} \cdot c_5$ , deve ser a solução da equação:

$$P'(W_t = 2) = -P(W_t = 2) \cdot \lambda + e^{-\lambda t} \cdot \lambda^2 t \quad (8)$$

e para tal,  $c_5$  deve ser função de  $t$ . Admitindo  $c_5 = c(t)$ , tem-se:

$$P(W_t = 2) = e^{-\lambda t} \cdot c(t) \text{ e conseqüentemente, } P'(W_t = 2) = -\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c(t) + e^{-\lambda t} \cdot c'(t).$$

Substituindo-se esses dois resultados na equação (8), pode-se encontrar o valor de  $c(t)$ . De fato,

$$-\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c(t) + e^{-\lambda t} \cdot c'(t) = -\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c(t) + e^{-\lambda t} \cdot \lambda^2 t$$

De onde se tem:  $c'(t) = \lambda^2 t$ . Integrando, tem-se que  $c(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2} + k$ . Dessa

forma,  $P(W_t = 2) = e^{-\lambda t} \cdot c_5 = e^{-\lambda t} \cdot c(t) \Rightarrow P(W_t = 2) = e^{-\lambda t} \cdot \left( \frac{\lambda^2 t^2}{2} + k \right)$ , onde  $k$  é

uma constante real.

Como  $P(W_0 = 2) = 0$ , isto é, se não há intervalo de tempo é impossível observar duas emissões, tem-se que:  $0 = e^{-\lambda \cdot 0} \cdot \left( \frac{\lambda^2 0^2}{2} + k \right) \Rightarrow k = 0$ .

Assim, a probabilidade procurada é:  $P(W_t = 2) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda^2 t^2}{2} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^2}{2}$ .

### Cálculo de $P(W_t = 3)$

Existem quatro casos exclusivos a serem considerados.

$$\begin{aligned} P(W_{t+\Delta t} = 3) &= \\ &= P[(W_t = 3 \cap W_{\Delta t} = 0) \cup (W_t = 2 \cap W_{\Delta t} = 1) \cup (W_t = 1 \cap W_{\Delta t} = 2) \cup (W_t = 0 \cap W_{\Delta t} = 3)] = \\ &= P(W_t = 3 \cap W_{\Delta t} = 0) + P(W_t = 2 \cap W_{\Delta t} = 1) + P(W_t = 1 \cap W_{\Delta t} = 2) + \\ &+ P(W_t = 0 \cap W_{\Delta t} = 3) = \\ &= P(W_t = 3) \cdot P(W_{\Delta t} = 0) + P(W_t = 2) \cdot P(W_{\Delta t} = 1) + P(W_t = 1) \cdot P(W_{\Delta t} = 2) + \\ &+ P(W_t = 0) \cdot P(W_{\Delta t} = 3) \end{aligned}$$

Substituindo-se os valores obtidos anteriormente, obtém-se:

$$P(W_{t+\Delta t} = 3) =$$

$$\begin{aligned}
&= P(W_t = 3) \cdot P(W_{\Delta t} = 0) + e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda^2 t^2}{2} \cdot P(W_{\Delta t} = 1) + e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot P(W_{\Delta t} = 2) + e^{-\lambda t} P(W_{\Delta t} = 3) = \\
&= P(W_t = 3) \cdot \left[ 1 - P(W_{\Delta t} = 1) - \sum_{k=2}^{\infty} P(W_{\Delta t} = k) \right] + e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda^2 t^2}{2} \cdot P(W_{\Delta t} = 1) + e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot P(W_{\Delta t} = 2) + \\
&+ e^{-\lambda t} P(W_{\Delta t} = 3)
\end{aligned}$$

Pode-se escrever, portanto, que:

$$\begin{aligned}
&P(W_{t+\Delta t} = 3) - P(W_t = 3) = \\
&= - P(W_t = 3) \cdot \left[ P(W_{\Delta t} = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(W_{\Delta t} = k) \right] + e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda^2 t^2}{2} \cdot P(W_{\Delta t} = 1) + e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot P(W_{\Delta t} = 2) + \\
&+ e^{-\lambda t} P(W_{\Delta t} = 3)
\end{aligned}$$

Dividindo por  $\Delta t$  ambos os membros da igualdade acima e levando ao limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , chega-se a:

$$P'(W_t = 3) = -P(W_t = 3) \cdot [\lambda + 0] + e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda^2 t^2}{2} \cdot \lambda + e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot 0 + e^{-\lambda t} \cdot 0$$

$$\text{ou, } P'(W_t = 3) = -P(W_t = 3) \cdot \lambda + e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda^3 t^2}{2}$$

A solução desta última equação pode ser obtida, partindo-se da solução de  $P'(W_t = 3) = -P(W_t = 3) \cdot \lambda$ , que é o mesmo tipo de equação obtido antes; assim,  $P(W_t = 3) = e^{-\lambda t} \cdot c_6$ .

A determinação do valor de  $c_6$  é feita de modo análogo ao que foi feito para  $c_4$ . Note que  $P(W_t = 3) = e^{-\lambda t} \cdot c_6$ , deve ser a solução da equação:

$$P'(W_t = 3) = -P(W_t = 3) \cdot \lambda + e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda^3 t^2}{2} \quad (9)$$

e para tal,  $c_6$  deve ser função de  $t$ . Admitindo  $c_6 = c(t)$ , tem-se:

$$P(W_t = 3) = e^{-\lambda t} \cdot c(t) \text{ e conseqüentemente, } P'(W_t = 3) = -\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c(t) + e^{-\lambda t} \cdot c'(t)$$

Substituindo os dois resultados na equação (9), pode-se encontrar o valor de  $c(t)$ . De fato,  $-\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c(t) + e^{-\lambda t} \cdot c'(t) = -\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot c(t) + e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda^3 t^2}{2}$ , de onde se tem:

$$c'(t) = \frac{\lambda^3 t^2}{2}, \text{ que integrando, chega-se a: } c(t) = \frac{\lambda^3 t^3}{2 \cdot 3} + k.$$

$$\text{Dessa forma, } P(W_t = 3) = e^{-\lambda t} \cdot c_6 = e^{-\lambda t} \cdot c(t) \Rightarrow P(W_t = 3) = e^{-\lambda t} \cdot \left( \frac{\lambda^3 t^3}{3 \cdot 2} + k \right),$$

onde  $k$  é uma constante real.

$$\text{Como } P(W_0 = 3) = 0, \text{ tem-se que: } 0 = e^{-\lambda \cdot 0} \cdot \left( \frac{\lambda^3 0^3}{3 \cdot 2} + k \right) \Rightarrow k = 0.$$

$$\text{Assim, a probabilidade procurada é: } P(W_t = 3) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^3}{3!}.$$

Apoiado nos resultados anteriores, pode-se fazer a conjectura de que a distribuição de probabilidades da variável aleatória  $W_t$ : número de partículas emitidas em um intervalo de duração  $t$  é dada pela fórmula:

$$P(W_t = k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

A fórmula é a representação algébrica dos valores da Tabela 9.

**Tabela 9. Distribuição de probabilidades da variável aleatória  $W_t$**

$W_t$	0	1	2	3	4	...
$P(W_t)$	$e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!}$	$e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^1}{1!}$	$e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^2}{2!}$	$e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^3}{3!}$	$e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^4}{4!}$	...

A fim de constatar que a conjectura feita define uma distribuição de probabilidades, é necessário verificar se a soma das probabilidades é igual a um.

$$\text{De fato: } P(W_t = 0) + P(W_t = 1) + P(W_t = 2) + P(W_t = 3) + P(W_t = 4) + \dots =$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} + e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^1}{1!} + e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^2}{2!} + e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^3}{3!} + e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^4}{4!} + \dots =$$

(colocando-se  $e^{-\lambda t}$  em evidência e usando-se o resultado do desenvolvimento em série de Mac Laurin da função  $e^{\lambda t}$ , tem-se o resultado a seguir)

$$= e^{-\lambda t} \left[ \frac{(\lambda t)^0}{0!} + \frac{(\lambda t)^1}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \frac{(\lambda t)^4}{4!} + \dots \right] = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} = e^0 = 1.$$

A variável aleatória discreta  $W_t$  definida por: número de partículas emitidas em um intervalo de duração  $t$  tem distribuição de probabilidades dada pela fórmula:

$$P(W_t = k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

e é definida como sendo uma variável aleatória discreta com distribuição de Poisson e parâmetro  $\lambda t$ , cuja representação é:  $W_t \sim P(\lambda t)$ .

### As Hipóteses de Poisson

As cinco hipóteses que foram necessárias, a fim de se construir o Modelo de Poisson são conhecidas com o nome de Hipóteses de Poisson ou Postulados de Poisson e serão enunciadas a seguir:

**H<sub>1</sub>. A distribuição do número de emissões é a mesma para todos os intervalos da partição.** As variáveis aleatórias associadas ao número de emissões em intervalos de tempo não sobrepostos são independentes.

**H<sub>2</sub>. Os números de ocorrências registrados nos intervalos de tempo da partição são independentes entre si.** O número de partículas emitidas tem a mesma distribuição, em qualquer intervalo de tempo; ele depende apenas do comprimento do intervalo e não de seus extremos.

**H<sub>3</sub>. Em um intervalo de pequena duração, a probabilidade de se obter uma emissão é diretamente proporcional ao comprimento do intervalo.** Em um intervalo suficientemente pequeno, a probabilidade de haver só uma emissão é diretamente proporcional ao comprimento do intervalo:  $P(W_{\Delta t} = 1) = \lambda \cdot \Delta t$ .

**H<sub>4</sub>. Em um intervalo de pequena duração a probabilidade de duas ou mais emissões é desprezível.** Em um intervalo suficientemente pequeno, a probabilidade de haver duas ou mais emissões é desprezível, isto é,  $P(W_{\Delta t} = k) \cong 0$ , para todo  $k \geq 2$ .

**H<sub>5</sub>. A probabilidade de nenhuma ocorrência em um intervalo de tempo nulo é um.** Chamada condição inicial do modelo, se  $t = 0$ , (comprimento do intervalo de tempo é zero) com certeza não teremos emissões, isto é,  $P(W_0 = 0) = 1$ . Como consequência,  $P(W_0 = k) = 0$ , para todo  $k \geq 1$ .

**Técnica didática:** debate científico em sala de aula usual. A professora comunicará aos alunos que não há necessidade de anotar as informações que serão apresentadas, pois, ao final, uma cópia lhes será entregue. De acordo com a necessidade e possibilidade, a professora deverá questionar os alunos a respeito das sugestões, em cada passo da construção do Modelo de Poisson, tendo o cuidado de fazer todas as passagens intermediárias. Aspectos históricos sobre Siméon-Denis Poisson e sua obra serão apresentados ao longo da atividade; um breve resumo sobre o tema encontra-se no Apêndice A.

**Bloco tecnológico/teórico e análise a priori:**

A construção do Modelo de Poisson envolve passagens artificiais e a utilização de técnicas do Cálculo Diferencial e Integral que, apesar de já terem sido objeto de estudo dos alunos em questão, o piloto revelou que na maioria das vezes não estão disponíveis. Decidiu-se, assim, por um debate científico, utilizando as conjecturas obtidas nas situações experimentais, que permitem a participação dos alunos com sugestões e respostas.

A opção pela sala de aula usual tem o propósito de que professora e alunos participem, conjuntamente, da construção do Modelo de Poisson. Nesse ambiente, o quadro-negro possibilita que, durante a dedução, informações anteriores estejam disponíveis, facilitando o acompanhamento e as justificativas necessárias em cada passagem.

A decisão de elaborar um texto com o conteúdo que será desenvolvido na construção do Modelo Teórico, para que os alunos não precisem anotar as informações já foi adotada e valorizada explicitamente pelos alunos do projeto piloto. A cópia, referente ao material da apresentação, só será entregue aos alunos ao final, pois, pretende-se que eles dêem suas próprias sugestões durante o desenvolvimento do estudo.

A tarefa tem o objetivo de deduzir a fórmula da distribuição de Poisson. Com base no experimento piloto, espera-se que vários alunos não só acompanhem o desenvolvimento, mas participem de sua elaboração, com sugestões, respostas aos questionamentos e arguições em relação às passagens efetuadas. Admite-se que o fato de os alunos não se preocuparem em fazer anotações, durante o desenvolvimento, possa favorecer o acompanhamento.



3. No final da Ficha 5, você encontra as Hipóteses (ou Postulados) de Poisson. Qual a utilidade dessas hipóteses na construção do Modelo Teórico?
4. Em que situações você acha que se pode usar o Modelo de Poisson? Cite alguns exemplos.
5. Esboce sua opinião sobre o encontro de hoje: (por favor, seja o mais sincero possível em suas observações, pois elas são muito importantes!)
  - a) o que você gostou?
  - b) o que você não gostou ou não entendeu?
  - c) qual parte você achou de fundamental importância?
  - e) explicita suas críticas e sugestões.

**Técnica didática:** Propor, coletivamente, que os alunos respondam, individualmente, todas as questões da Ficha 6, reafirmando que não serão considerados acerto e erro nas respostas.

**Bloco tecnológico/teórico e análise a priori:**

A opção por respostas individuais visa a avaliar a concepção de cada aluno em relação aos aspectos pretendidos na Ficha 6. A explicitação de que ele não será avaliado em termos de acerto e erro, e sim, quanto à concepção que ele foi capaz de construir, faz parte do contrato didático estabelecido.

A tarefa procura avaliar se a técnica adotada na construção do Modelo Teórico atingiu o objetivo de preparar o aluno, em alguns aspectos, aqueles presentes na Ficha 6, para a exploração, generalização e aplicação do Modelo de Poisson, visados nos encontros subseqüentes.

A seguir, são apresentadas as respostas de cada item da referida ficha, com exceção do item 5, como também os objetivos e expectativas.

1. Com esse item, pretende-se verificar se os alunos diferenciam as duas representações e, portanto, que a distribuição de probabilidades da variável aleatória depende da duração do intervalo de tempo. Poucos alunos devem responder adequadamente, pois eles tiveram alguma informação do que  $\lambda$  representa apenas no texto sobre material radioativo. A resposta deve mencionar

que  $\lambda t$  representa o número médio de emissões no intervalo de tempo de duração  $t$  e  $\lambda$  representa esse mesmo número, mas, por unidade de tempo. Paralelamente, a teoria envolvida na construção desse Modelo pode trazer dificuldades que desviem a atenção do aluno; em todo caso, pretende-se verificar qual interpretação, eles darão a esses elementos. Na próxima etapa de modelagem, essas propriedades serão estudadas.

**2.** A questão tem o objetivo de salientar que para o uso do Modelo de Poisson é suficiente conhecer o número médio de ocorrências do evento e que essa informação pode ser obtida a partir dos valores experimentais que foram colhidos. A resposta deve se referir ao número médio ou ao valor de  $\lambda t$ , ou ainda, ao valor de  $\lambda$ . A maioria dos alunos deve chegar a essa conclusão sem maiores dificuldades.

**3.** Neste item, pretende-se que os alunos percebam que sem essas hipóteses não seria possível a construção do Modelo Teórico e que, para se pensar em usá-lo em uma determinada situação deve-se analisar a validade das mesmas. A resposta deve citar a necessidade das hipóteses na construção do Modelo Teórico e, em uma situação, em que elas forem válidas, o Modelo de Poisson é sugerido para seu estudo. Espera-se que os alunos refiram-se a necessidade delas na construção do Modelo Teórico, mas não à obrigatoriedade de que elas sejam válidas, a fim de se utilizar o referido Modelo.

**4.** A questão tem o objetivo de verificar se os alunos são capazes de citar situações em que o Modelo Teórico possa ser indicado, e como eles justificam sua aplicação. A resposta deve se referir a situações em que as Hipóteses de Poisson possam ser validadas ou a experimentos, cujas ocorrências são casuais, e pode-se obter o número médio por observação, como por exemplo, o número de chamadas telefônicas que chegam a uma central. Não se espera que eles cheguem a explicitar exemplos que não sejam referentes à emissão de partículas por uma fonte radioativa; pode ser que citem outros elementos radioativos, com intervalos de observação distintos daqueles utilizados nos experimentos.

Finalizando o encontro, o material de posse dos alunos será recolhido, a fim de avaliar a necessidade de possíveis mudanças nas próximas fases.

### 3.2.3.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO PRETENDIDOS

O debate científico deve propiciar que a construção do Modelo de Poisson seja acompanhada por todos os alunos. A discussão coletiva sobre a Ficha 6 deve possibilitar que os alunos apresentem argumentos para suas respostas e conheçam as interpretações dos colegas, enriquecendo as próprias concepções ou corrigindo-as quando for o caso. Pretende-se verificar, também, se eles sugerem a verificação da validade dos Postulados de Poisson para a aplicação do modelo teórico. Ao final do encontro, a explicitação das conclusões viabiliza que o saber, resultado das trocas, passe a fazer parte da cultura da classe. Nesse encontro, dentre os elementos de significado institucional de referência, aqueles pretendidos estão apresentados no Quadro 9.

**Quadro 9. Elementos de significado institucional pretendidos**

PRÁXIS	LINGUAGEM	LOGOS
<p><u>Ações</u> construção do modelo teórico a partir de considerações relacionadas aos experimentos realizados.</p>	<p><u>Linguagem</u> distribuição de Poisson, Postulados ou Hipóteses de Poisson, número médio de ocorrências, modelo teórico. <math>W_t \sim P(\lambda t);</math> <math>P(W_t = k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}</math></p>	<p><u>Conceitos</u> limite, integral, exponencial, fatorial, independência, exclusividade, desenvolvimento em série de Mac Laurin, distribuição de probabilidades. <u>Propriedades</u> para usar o Modelo de Poisson basta conhecer o número médio de ocorrências do evento; importância dos Postulados de Poisson na construção do modelo teórico. <u>Argumentos</u> demonstrações formais.</p>

### 3.2.4 A QUARTA ETAPA - ESTUDO MATEMÁTICO – Laboratório de Informática

Em relação ao estudo matemático, Henry (1997) escreve:

**Quadro 10. Quarta etapa de modelagem**

ETAPA	OBJETO DE AÇÃO	ATIVIDADE ESPERADA
Estudo Matemático	Propriedades do Modelo Matemático, decorrentes das hipóteses e das teorias matemáticas usadas.	Demonstração de resultados teóricos internos ao Modelo Matemático. Enunciado formal de uma resposta ao problema matemático proposto.

Fonte: Henry (1997, p. 82).

Nesta etapa, pretende-se estudar as propriedades do Modelo Matemático construído, explorando a representação em tabela e gráfica da distribuição de probabilidades, para alguns valores do parâmetro, devidamente selecionados, a fim de que os objetivos sejam alcançados. O ambiente escolhido é o Laboratório de Informática e o trabalho será desenvolvido pelas duplas, pois, admite-se que as trocas favoreçam a identificação de tais propriedades. Dando início ao encontro, a Tarefa 4.1 será proposta aos alunos.

**Tarefa 4.1** Realizar as atividades propostas na Ficha 7, em dupla, e salvar no disquete; responder o item 6 individualmente.

#### FICHA 7 – Explorando o modelo teórico

(códigos dos crachás) **Dupla** \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_

O Modelo Teórico que foi estudado no último encontro é o Modelo de Poisson; no caso estudado, a variável aleatória  $W_t$ , número de partículas emitidas por uma fonte radioativa em um intervalo de duração  $t$ , tem distribuição de probabilidades dada pela lei:  $P(W_t = k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ , para  $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ , onde  $\lambda$  é um número real positivo; diz-se que  $W_t$  tem distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda t$  e indica-se:  $W_t \sim P(\lambda t)$ .

Utilizando a planilha, execute os seguintes itens: (salve no disquete)

1. Considere que  $W_t \sim P(0,5)$ , isto é,  $\lambda t = 0,5$ . Do estudo que foi feito sabe-se que a variável aleatória  $W_t$  pode assumir os valores: 0, 1, 2, 3, .... .

a) Nomeie a planilha 1, isto é, clique duas vezes em plan 1 (abaixo, no lado esquerdo) e digite P(0,5). Centralize toda a planilha, clicando no canto esquerdo superior (no quadradinho cinza entre o **1** e o **A**) e em centralizar. Na planilha, digite na coluna A valores de  $W_t$ : 0, 1, 2, ..., até 10. Na coluna B, obtenha as probabilidades respectivas, usando a função Poisson; para tal selecione a célula da coluna B ao lado da célula do zero e, a seguir, selecione  $f_x$ / estatística/Poisson (em número de eventos, selecione a célula do zero, em média, digite o valor do parâmetro da distribuição, 0,5; lembre que, em cumulativo, deve-se digitar FALSO, a fim de se obter a probabilidade do ponto e não a acumulada), clique ok. Selecione a célula de B, com o valor obtido, segure e arraste para obter as

demais probabilidades. Formate a coluna B para quatro casas decimais. Use a calculadora e a fórmula acima a fim de validar uma dessas probabilidades.

**b)** Complete: Para valores da variável superiores a dez, com aproximação de quatro casas decimais, as probabilidades valem aproximadamente \_\_\_\_\_ .

**c)** Faça o gráfico correspondente aos valores, cujas probabilidades não se anularam.

**d)** O valor da variável aleatória  $W_t$  com probabilidade máxima é: \_\_\_\_\_ .

**e)** Determine, em sua planilha, o valor esperado da variável aleatória  $W_t$ , **aproximado**, usando os valores que têm probabilidade não nula, na sua aproximação. Use a planilha para fazer os cálculos e formate para quatro casas decimais.

**f)** Determine, na sua planilha, a variância e o desvio padrão com aproximação para quatro casas decimais.

**g)** Complete: nesse exemplo, a média vale \_\_\_\_\_ e a variância vale \_\_\_\_\_, portanto, nesse caso, média e variância são \_\_\_\_\_ .

**h)** Como se sabe, aproximadamente 99% dos valores da variável pertencem ao intervalo:  $[E(W_t) - 3.DP(W_t) ; E(W_t) + 3.DP(W_t)]$ . Determine esse intervalo usando a planilha para fazer os cálculos; o intervalo obtido, com aproximação de quatro casas decimais é: ( \_\_\_\_\_ ); observe no gráfico e/ou na tabela dos valores, se o fato é aproximadamente verdadeiro.

**2.** Considere  $W_t \sim P(5,8)$ .

**a)** Nomeie a planilha 2, digite P(5,8). Digite na coluna A valores de  $W_t$ : 0, 1, 2, ..., até 22. Na coluna B, obtenha as probabilidades respectivas, usando a função Poisson e formate a coluna B para quatro casas decimais.

**b)** Complete: Para valores da variável superiores a 22, com aproximação de quatro casas decimais, as probabilidades valem aproximadamente \_\_\_\_\_ .

**c)** Faça o gráfico correspondente aos valores, cujas probabilidades não se anularam.

**d)** O valor da variável aleatória  $W_t$  com probabilidade máxima é: \_\_\_\_\_ .

e) Complete: nesse exemplo, a média vale \_\_\_\_\_ e a variância vale \_\_\_\_\_, portanto, nesse caso, média e variância são \_\_\_\_\_.

f) Determine o intervalo  $[E(W_t) - 3.DP(W_t) ; E(W_t) + 3.DP(W_t)]$  usando a planilha para fazer os cálculos e observe o resultado no gráfico; o intervalo obtido, com aproximação de quatro casas decimais é: (\_\_\_\_\_).

3. Considere  $W_t \sim P(18,7)$ .

a) Nomeie a planilha 3, digite  $P(18,7)$ . Digite na coluna A valores de  $W_t$ : 0, 1, 2, ..., até 40. Na coluna B, obtenha as probabilidades respectivas, usando a função Poisson e formate a coluna B para quatro casas decimais.

b) Complete: Para valores da variável superiores a 40, com aproximação de quatro casas decimais, as probabilidades valem aproximadamente \_\_\_\_\_.

c) Faça o gráfico correspondente aos valores, cujas probabilidades não se anularam.

d) O valor da variável aleatória  $W_t$  com probabilidade máxima é: \_\_\_\_\_.

e) Complete: nesse exemplo, a média vale \_\_\_\_\_ e a variância vale \_\_\_\_\_, portanto, nesse caso, média e variância são \_\_\_\_\_.

f) Determine o intervalo  $[E(W_t) - 3.DP(W_t) ; E(W_t) + 3.DP(W_t)]$ , usando a planilha para fazer os cálculos e observe o resultado no gráfico; o intervalo obtido, com aproximação de quatro casas decimais, é: (\_\_\_\_\_).

4. Considere agora que  $W_t \sim P(47,89)$ . Sem fazer cálculos ou gráfico, complete os seguintes itens, de acordo com o que você observou nos resultados anteriores:

a) O valor esperado de  $W_t$  é aproximadamente \_\_\_\_\_.

b) A variância de  $W_t$  é aproximadamente: \_\_\_\_\_.

c) O valor da variável com probabilidade máxima é aproximadamente \_\_\_\_\_.

d) Determine, com o auxílio da calculadora o intervalo real que contém aproximadamente 99% dos valores com probabilidades não desprezíveis, isto é, possíveis de serem observadas: O intervalo é \_\_\_\_\_.

5. Os três exemplos possibilitam que se faça as seguintes conjecturas:

a) Uma variável aleatória  $W_t \sim P(\lambda t)$ , tem valor esperado próximo de \_\_\_\_\_.

e variância próxima de \_\_\_\_\_ .

b) Os valores de uma variável aleatória  $W_t \sim P(\lambda t)$  prováveis de ocorrer pertencem ao intervalo: \_\_\_\_\_ .

c) O valor de uma variável aleatória  $W_t \sim P(\lambda t)$  que tem probabilidade máxima é um valor próximo de \_\_\_\_\_ .

d) O intervalo que contém 99% dos valores da variável com probabilidades não desprezíveis é aproximadamente \_\_\_\_\_ .

### FICHA 7 (continuação – parte individual)

(coloque o código do seu crachá) **Aluno** \_\_\_\_\_

6. Esboce sua opinião sobre o encontro de hoje.

a) o que você gostou?

b) o que você não gostou ou não entendeu?

c) qual parte você achou de fundamental importância?

e) explicita suas críticas e sugestões.

f) o que você acha do trabalho em dupla?

**Técnica didática:** organizar as duplas diante de um computador e entregar a cada dupla o disquete e a Ficha 7; o item 6, que se encontra em folha separada, deverá ser entregue a cada aluno, para que responda individualmente. Pedir aos alunos para realizarem as atividades propostas na Ficha 7 e acompanhar seu desenvolvimento.

### Bloco tecnológico/teórico e análise a priori:

O trabalho em dupla, com um aluno de cada curso, pode propiciar um melhor rendimento, já que um dos membros estuda Computação; além disso, no Curso de Probabilidade e Estatística todos os participantes já tiveram alguma experiência com a manipulação do aplicativo.

O acompanhamento da professora no desenvolvimento das atividades limitar-se-á ao esclarecimento de alguma possível dificuldade com a manipulação do aplicativo, sem interferir nos resultados que se pretende avaliar.

O material recolhido servirá para análise do encontro a fim de avaliá-lo e verificar a necessidade de alguma alteração nos encontros subseqüentes.

Esta atividade tem como objetivo que os alunos façam conjecturas em relação a algumas propriedades do Modelo de Poisson, quais sejam: o parâmetro do modelo coincide com o valor esperado e com a variância, a probabilidade máxima é próxima ao valor esperado e os valores da variável com probabilidades não desprezíveis, isto é, passíveis de serem observadas, são, aproximadamente, aquelas que pertencem ao intervalo real delimitado pelos valores do valor esperado menos três desvios padrão e do valor esperado mais três desvios padrão. O uso da representação gráfica pode favorecer a visualização das propriedades relacionadas à probabilidade máxima, ao valor esperado e ao intervalo de valores com probabilidades não desprezíveis, conforme apontam os resultados de Batanero, Tauber e Sánchez (2001).

A escolha da variável didática, parâmetro do modelo ( $\lambda t$ ) na elaboração dessa tarefa é de suma importância; a opção por valores não inteiros visa a não caracterização de que a probabilidade máxima ocorre em um determinado e possível valor da variável. Três valores para o parâmetro foram selecionados: 0,5; 5,8 e 18,7; o primeiro, menor que um, representando os experimentos ditos raros, e os outros com valores maiores que um, porém, respeitando o tempo didático e minimizando as dificuldades de visualização da representação gráfica e da tabela; decidiu-se por controlar a variável didática, número de casas decimais, com o objetivo de que os valores da média e variância obtidos coincidissem.

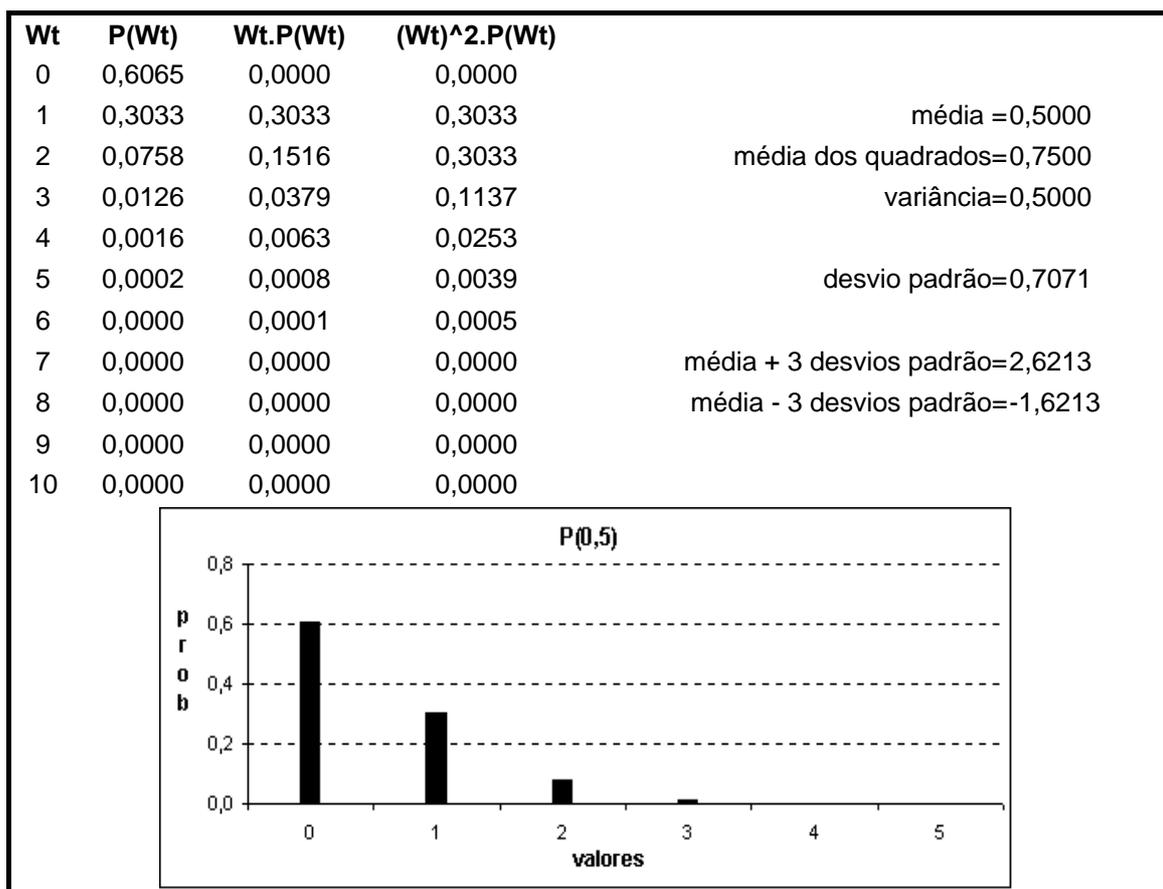
A seguir, são apresentados os objetivos, as expectativas e a resposta para cada item da Ficha 7.

1. A escolha inicial de um número menor que um para o parâmetro do modelo tem o propósito de colocar em evidência que, a partir de um certo valor da variável, as probabilidades tendem a se anular, justificando assim a possibilidade de que um modelo teórico, no qual a variável pode assumir valores de zero a infinito, possa se ajustar à uma situação da realidade. Além disso, com essa opção, não existem probabilidades tendendo a zero para os menores valores da variável.

Pretende-se que os alunos comecem a atribuir ao parâmetro do modelo um significado pessoal mais amplo do que aquele apresentado na Ficha 6, ao

observar que, nesse exemplo, ele coincide com o valor esperado; ainda mais, a conjectura de que média e variância têm valores aproximados, feita na Ficha 4, é validada nesse caso. Alguns alunos podem precisar da ajuda da professora no que se refere à introdução das fórmulas na planilha.

As respostas para os itens (a), (c), (e) e (f) que deverão ser salvas no disquete são apresentadas na Figura 20.



**Figura 20. Modelo de Poisson com parâmetro 0,5**

No item (b), as probabilidades valem aproximadamente zero e no item (d), o valor com a probabilidade máxima é zero; no item (g), média e variância coincidem e no item (h), o intervalo é:  $[0 ; 2,6213]$ . Em relação ao intervalo é esperado que muitos alunos citem  $[-1,6213 ; 2,6213]$  que corresponde aos valores obtidos com os cálculos, sem que reflitam que a variável aleatória não assume valores negativos.

2. A mudança do valor do parâmetro de 0,5 para 5,8 tem a intenção de ajudar os alunos a perceberem que o valor da variável, a partir do qual as probabilidades são desprezíveis, torna-se maior com o aumento do parâmetro, pois este coincide

com o valor esperado da variável aleatória. Além desse aspecto, os alunos podem perceber que o valor da variável com probabilidade máxima é próximo ao do valor esperado e que o intervalo real que contém os valores da variável com probabilidade não desprezível depende do valor esperado e da dispersão, ou seja, do desvio padrão. Nesse caso, tem-se reforçada a conjectura de que valor esperado e variância coincidem exatamente.

Os alunos devem realizar esta tarefa com relativa facilidade, pois, as dificuldades em relação à manipulação do aplicativo, se existiram, devem ter sido sanadas no item 1. As respostas para os itens (a), (c), (e) e (f) que serão salvas no disquete são apresentadas na Figura 21. No item (b), as probabilidades valem, aproximadamente, zero e no item (d), o valor com probabilidade máxima é cinco; no item (g), média e variância coincidem e no item (h), o intervalo é: [0 ; 13,0249].

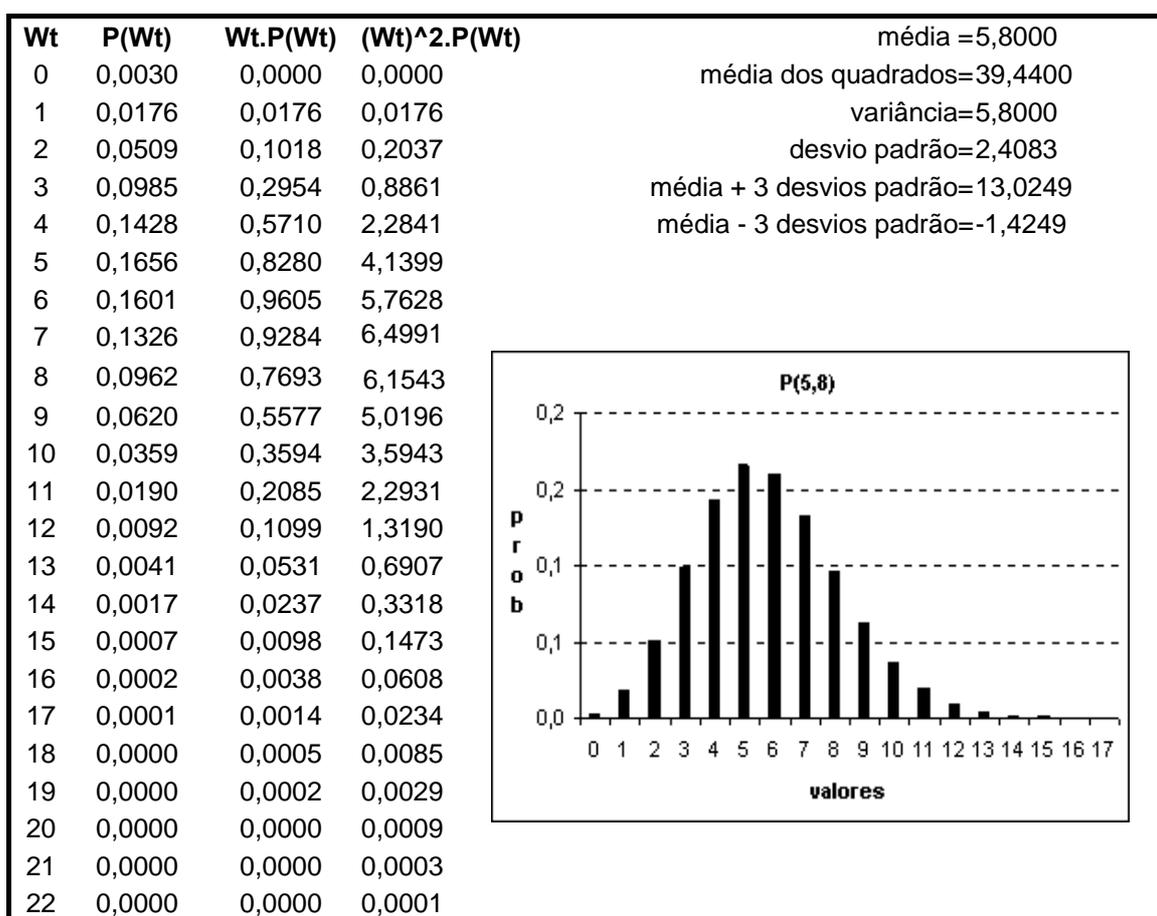


Figura 21. Modelo de Poisson com parâmetro 5,8

3. O aumento do valor do parâmetro e, conseqüentemente, do valor esperado tem o objetivo de que os alunos percebam que os valores da variável com probabilidade desprezível não se limitam àqueles maiores que um determinado

número, mas também aos próximos a zero. Nesse caso, novamente são reforçadas as propriedades em relação ao valor da variável com probabilidade máxima e a coincidência do valor esperado com a variância.

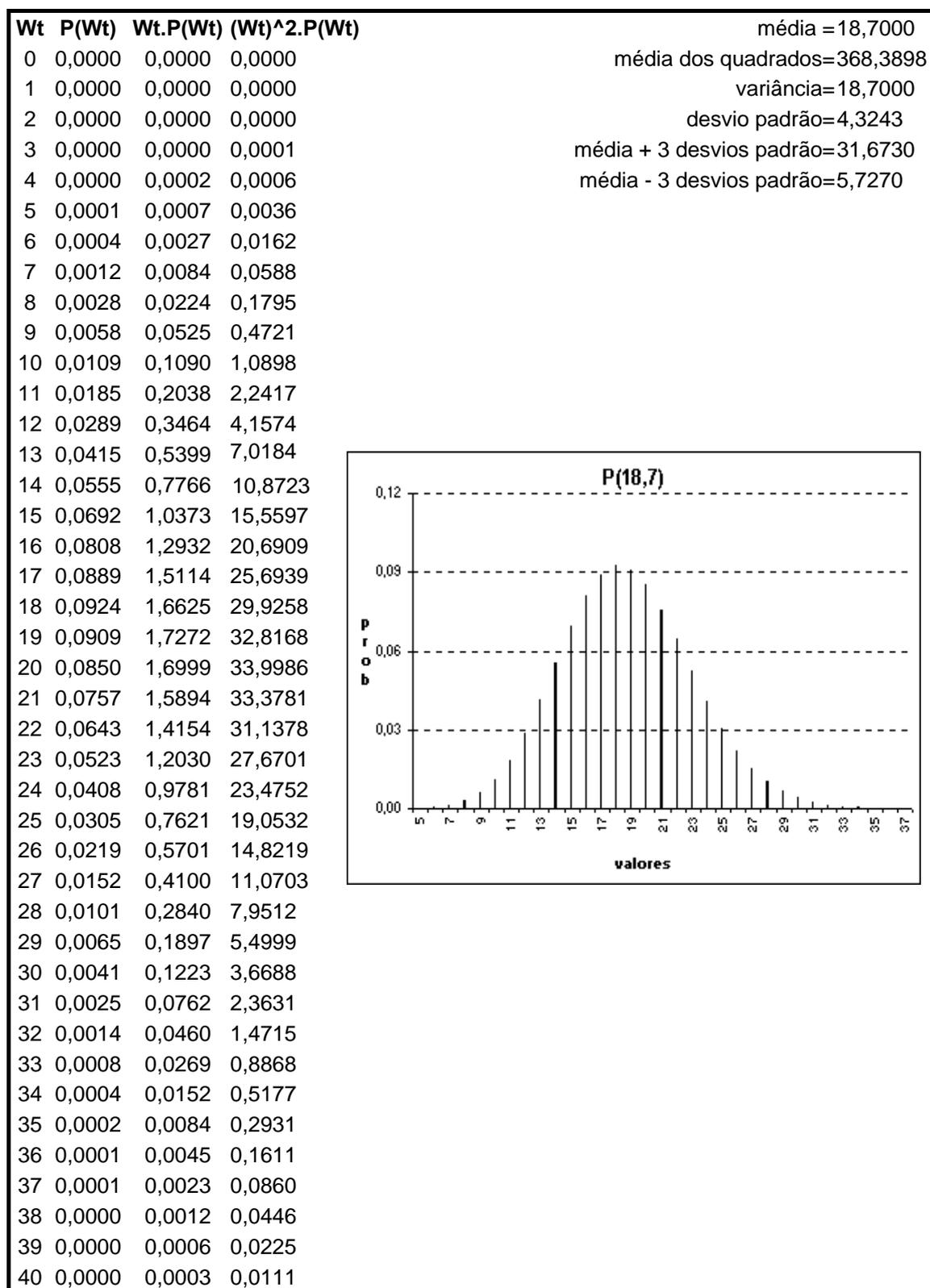


Figura 22. Modelo de Poisson com parâmetro 18,7

As respostas para os itens (a), (c), (e) e (f) que serão salvas no disquete estão apresentadas na Figura 22. No item (b), as probabilidades valem aproximadamente zero e no item (d), o valor com probabilidade máxima é dezoito; no item (g), média e variância coincidem e no item (h), o intervalo é: [5,7270 ; 31,6730].

4. O valor 47,89, dando continuidade ao crescimento do valor atribuído ao parâmetro, pretende favorecer que os alunos sejam capazes de usar as conjecturas sugeridas nos itens anteriores. Pretende-se avaliar se elas foram feitas e se os alunos são capazes de usá-las adequadamente, além de prepará-los para a próxima questão. Não se espera dificuldade na execução deste item, por analogia ao ocorrido no projeto piloto.

A resposta deve conter que o valor esperado é 47,89, que a variância é 47,89, que a probabilidade máxima deve ocorrer no valor 47 ou 48 e que o intervalo [27,1292 ; 68,6508] contém aproximadamente 99% dos valores da variável com probabilidade significativa.

5. A escolha de  $\lambda t$  para representar o parâmetro do modelo é justificada pelo modelo teórico desenvolvido e procura verificar se os alunos são capazes de generalizar, formalmente, as conjecturas anteriores.

A resposta deve mencionar que o valor esperado e a variância são iguais a  $\lambda t$ , que os valores da variável aleatória com probabilidades significativas pertencem, aproximadamente, ao intervalo:  $[\lambda.t - 3.\sqrt{\lambda.t}; \lambda.t + 3.\sqrt{\lambda.t}]$  e que o valor da variável com probabilidade máxima é próximo de  $\lambda t$ .

### 3.2.4.1 AVALIAÇÃO

A avaliação desta etapa será fundamentada nas respostas da Ficha 7, incluindo a parte individual, nos conteúdos dos disquetes e nas anotações dos observadores. O item 6, da referida Ficha, tem uma questão a mais, em relação às fichas anteriores que se refere à opinião do aluno a respeito do trabalho em dupla que também se pretende avaliar.

### 3.2.4.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS

A discussão coletiva tem a vantagem de o aluno não só expor as suas concepções como também ouvir a de seus colegas podendo corrigi-las ou complementá-las, além de argumentar sobre elas. A institucionalização tem o objetivo de discernir entre o conhecimento que deve ser fixado e o que deve, ou pode, ser descartado. Caso as propriedades visadas não sejam citadas pelos alunos, a professora deve propor questões que provoquem desequilíbrios e conseqüente reflexão, como por exemplo: se uma fonte emite 600 partículas por minuto, qual a probabilidade de ela emitir exatamente uma partícula em um dado minuto? A respeito da validade do intervalo construído, são esperadas discussões, nos vários itens, em relação aos 99% dos valores que ele deve conter, como também quanto aos números negativos que aparecem em sua determinação, embora os alunos já tenham feito uso da construção de tais intervalos no estudo das variáveis discretas e discutido a relação entre este aspecto e a simetria da distribuição de freqüências. Não se espera contestações quanto aos resultados de que média, variância e parâmetro coincidem exatamente e que a probabilidade máxima ocorre para um valor da variável próximo da média. Apenas algumas dificuldades na manipulação do aplicativo podem ocorrer, embora eles já o tenham usado no curso de Estatística.

Os elementos de significado institucional pretendidos nesta etapa encontram-se sintetizados no Quadro 11.

**Quadro 11. Elementos de significado institucional pretendidos**

PRÁXIS	LINGUAGEM	LOGOS
<u>Ações</u> representação gráfica com o auxílio de aplicativo ou calculadora; comparação de variáveis aleatórias com distribuição de Poisson com diferentes parâmetros: comparação das representações em tabelas e gráficas das médias, das variâncias, dos valores das variáveis com probabilidade máxima e dos intervalos de valores com probabilidades não desprezíveis.	<u>Linguagem</u> média, probabilidade desprezível, parâmetro, distribuição de Poisson $[E(Wt)-3.DP(Wt) , E(Wt)+3.DP(Wt)]$ .	<u>Conceitos</u> média, variância, desvio padrão. <u>Propriedades</u> relação entre parâmetro, média e dispersão; valor da variável com probabilidade máxima; intervalo de números reais que contém valores da variável com probabilidades não desprezíveis; decréscimo das probabilidades à medida que os valores da variável se distanciam daquele de probabilidade máxima; <u>Argumentos</u> comparação de resultados particulares e generalização

### 3.2.5 A QUINTA ETAPA-CONFRONTAÇÃO MODELO/REALIDADE- Laboratório de Informática

A quinta etapa de modelagem, definida por Henry (1997) como Modelo/Realidade tem, de acordo com o autor, as características apresentadas no Quadro 12.

**Quadro 12. Quinta etapa de modelagem**

ETAPA	OBJETO DE AÇÃO	ATIVIDADE ESPERADA
Confrontação Modelo- Realidade	Formulação em termos correntes dos resultados obtidos. Recontextualização. Confrontação do Modelo completado por esses resultados com as informações acessíveis da realidade.	Comparação dos resultados numéricos ou qualitativos com os dados experimentais correspondentes. Avaliação da margem de erro e da aceitabilidade do Modelo.

Fonte: Henry (1997, p. 82).

As duplas, uma por computador, irão comparar os resultados obtidos no primeiro experimento com aqueles do Modelo Teórico, utilizando o valor médio, obtido experimentalmente, como estimativa do parâmetro desconhecido. Nesta comparação, serão usados os registros de representação tabela e gráfico que poderão contribuir na interpretação e visualização dos resultados visados. A manipulação desses objetos ostensivos pode favorecer a apreensão e ampliação do significado dos conceitos envolvidos, como salientam Bosch e Chevallard (1999).

O teste qui-quadrado será empregado com o objetivo de avaliar a margem de erro e decidir pela aceitabilidade, ou não, do Modelo Teórico como uma aproximação dos resultados observados na experimentação (teste de aderência). Nesta tarefa o uso do aplicativo favorece a obtenção do qui-quadrado calculado e crítico (função INV.QUI ou CHIINV), restando ao aluno interpretar os valores obtidos e escrever a conclusão. Os resultados de Batanero, Tauber e Sánchez (2001) sugerem ser possível a aprendizagem de noções básicas sobre distribuições de probabilidade, dirigida a alunos que não possuem amplos conhecimentos prévios em Estatística, pois os cálculos podem ser levados a cabo com o uso de aplicativos; Batanero acrescenta:

Nossa análise mostra, com clareza, a complexidade conceitual dos testes estatísticos e a atenção particular que se deve dar ao ensino da inferência, se quisermos prevenir nossos estudantes de

futuras faltas de compreensão, como as descritas por Vallecillos (1999) [...] posto que os computadores tornam possível uma variedade de cálculos e representações gráficas, Moore (1997) recomenda dar aos estudantes a oportunidade de ter a experiência de trabalhar com dados e problemas reais. (BATANERO, 2000, p.17).<sup>30</sup>

As observações evidenciam que há a necessidade de se dar especial atenção à função semiótica dos ostensivos qui-quadrado calculado e crítico, como também a importância de se trabalhar com resultados experimentais.

Dando início aos trabalhos do quinto encontro, será entregue uma cópia da Ficha 8, que contém a demonstração de que não só é uma conjectura a coincidência dos valores da média, variância e parâmetro da distribuição, mas, um resultado matematicamente comprovado. Os alunos deverão ler a referida Ficha e levantar os possíveis pontos de desentendimento para serem discutidos e esclarecidos.

#### FICHA 8 – Esperança e variância do Modelo de Poisson

Conforme já foi trabalhado em outros modelos (Bernoulli e Binomial), para completar o estudo, está faltando determinar as fórmulas para a média, variância e desvio padrão, embora você já tenha feito conjecturas a esse respeito.

#### O valor esperado de $W_t \sim P(\lambda t)$

Como se sabe o valor esperado de uma variável aleatória discreta é dado pela média dos valores da variável, ponderados pelas respectivas probabilidades, obtendo-se um ponto de equilíbrio dos valores. Assim sendo, no caso de uma variável aleatória  $W_t \sim P(\lambda t)$ , tem-se:

Tabela 10. Distribuição de probabilidades da variável aleatória  $W_t$

$W_t$	0	1	2	3	4	...
$P(W_t)$	$e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!}$	$e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^1}{1!}$	$e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^2}{2!}$	$e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^3}{3!}$	$e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^4}{4!}$	...

Dessa forma,

$$E(W_t) = 0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} + 1 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^1}{1!} + 2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^2}{2!} + 3 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots =$$

<sup>30</sup> Tradução nossa.

$$= e^{-\lambda t} \cdot \left[ 1 \cdot \frac{(\lambda t)^1}{1.0!} + 2 \cdot \frac{(\lambda t)^2}{2.1!} + 3 \cdot \frac{(\lambda t)^3}{3.2!} + \dots \right] = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \left[ \frac{(\lambda t)^0}{0!} + \frac{(\lambda t)^1}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots \right] =$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot e^{\lambda t} = \lambda t.$$

### A variância de $W_t \sim P(\lambda t)$

A variância, de uma variável aleatória discreta, mede a dispersão dos valores da variável, em torno da média dos mesmos. Assim, define-se:  $\text{Var}(W_t) = E\{[X - E(X)]^2\}$ , da qual se deduz, usando propriedades do valor esperado, que a variância pode ser determinada, de modo mais rápido e preciso, por:  $\text{Var}(W_t) = E(W_t^2) - [E(W_t)]^2$ . Assim, tem-se que:

$$E(W_t^2) = 0^2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} + 1^2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^1}{1!} + 2^2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^2}{2!} + 3^2 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots =$$

$$= e^{-\lambda t} \left[ 1^2 \cdot \frac{(\lambda t)^1}{1.0!} + 2^2 \cdot \frac{(\lambda t)^2}{2.1!} + 3^2 \cdot \frac{(\lambda t)^3}{3.2!} + \dots \right] =$$

$$= e^{-\lambda t} \lambda t \left[ 1 \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} + 2 \cdot \frac{(\lambda t)^1}{1!} + 3 \cdot \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots \right] =$$

$$= e^{-\lambda t} \lambda t \left[ \left( \frac{(\lambda t)^0}{0!} + \frac{(\lambda t)^1}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots \right) + \left( 1 \cdot \frac{(\lambda t)^1}{1!} + 2 \cdot \frac{(\lambda t)^2}{2!} + 3 \cdot \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \dots \right) \right] =$$

$$= e^{-\lambda t} \lambda t \cdot [(e^{\lambda t}) + (\lambda t \cdot e^{\lambda t})] = \lambda t + (\lambda t)^2.$$

Portanto,  $\text{Var}(W_t) = E(W_t^2) - [E(W_t)]^2 = \lambda t + (\lambda t)^2 - (\lambda t)^2 = \lambda t$ .  
Conseqüentemente, o desvio padrão será:  $DP(W_t) = \sqrt{\text{Var}(W_t)} = \sqrt{\lambda t}$ .

A coincidência:  $E(W_t) = \text{Var}(W_t) = \lambda t$  é uma característica peculiar do Modelo de Poisson.

Após os esclarecimentos em relação à Ficha 8, dando continuidade ao encontro, será proposta a Tarefa 5.1, objetivando a confrontação entre Modelo e Realidade. Serão entregues os disquetes, para que as duplas possam salvar os arquivos referentes a essa atividade.

**Tarefa 5.1** Desenvolver os itens propostos na Ficha 9 e salvar no disquete que

lhe foi entregue.

### FICHA 9 – Comparando prático e teórico

(códigos dos crachás) **Dupla** \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_

1. Na planilha, criar uma tabela com os valores da variável aleatória e respectivas probabilidades; a variável aleatória deverá ter distribuição de Poisson com média estimada pelo valor que você obteve no quarto experimento (com tempo de 1 segundo) no Laboratório de Física Nuclear. Vocês têm essa informação na Ficha 5 e na cópia impressa do disquete correspondente. Formatem as células das probabilidades para três casas decimais.
2. Na mesma planilha, em uma coluna digitem as freqüências observadas no quarto experimento e as respectivas freqüências esperadas, admitindo-se que a variável tem distribuição de Poisson; utilizem as probabilidades que vocês já calcularam para obtenção das freqüências esperadas, introduzindo a fórmula na planilha. Lembrem que foram colhidos 100 valores na experimentação; formatem as células desses valores para uma casa decimal.
3. Façam o gráfico de colunas das freqüências observadas e esperadas; não esqueçam de colocar os valores da variável como rótulo do eixo das abscissas.
4. Usem o teste qui-quadrado para comparar os valores obtidos na prática (observados) e os teóricos (esperados). Se vocês obtiverem freqüências esperadas menores que cinco, lembrem de somar algumas para uso do teste. Escrevam a conclusão, considerando o nível  $\alpha = 5\%$ .

### FICHA 9 (continuação – parte individual)

(Coloque o código do seu crachá) **Aluno** \_\_\_\_\_

5. Esboce sua opinião sobre o encontro de hoje: (por favor, seja o mais sincero possível em suas observações, pois elas são muito importantes!)
  - a) o que você gostou?
  - b) o que você não gostou ou não entendeu?
  - c) qual parte você achou de fundamental importância?
  - e) explicitem suas críticas e sugestões.

f) o que você está achando de trabalhar em dupla? Cite vantagens e desvantagens, se existirem.

**Técnica didática:** Distribuir a Ficha 9 e o disquete para as duplas e acompanhar o desenvolvimento da atividade. Apresentar esclarecimentos apenas quando forem solicitados, a fim de não interferir nos resultados. Avisar que o item 5 é para ser respondido individualmente.

### **Bloco tecnológico/teórico e análise a priori:**

O trabalho livre dos alunos e em dupla pode propiciar que os conhecimentos necessários para a realização da tarefa possam ser recuperados, tanto no que diz respeito à manipulação do aplicativo como na utilização do teste de aderência qui-quadrado, pois estes já foram objetos de estudo no curso de Probabilidade e Estatística. A resposta individual do item 5, objetiva que cada aluno tenha liberdade de se expressar sobre o encontro e o trabalho em dupla.

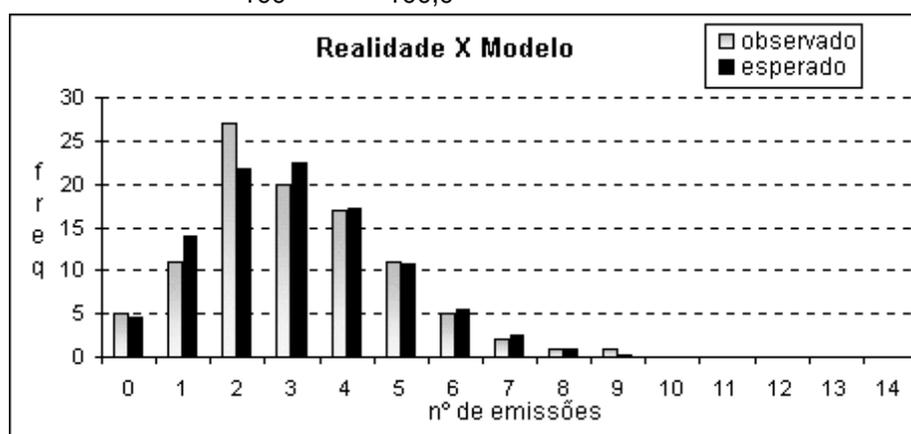
Não serão apresentadas as respostas aos itens da Ficha 9 pois estas dependem dos resultados experimentais, no momento não colhidos. Uma ilustração do que se pretende, encontra-se na Figura 23, valendo-se do exemplo apresentado na Ficha 3.

No item 1, o uso do computador é uma ferramenta didática eficiente pela agilidade na obtenção dos resultados e, sobretudo, por permitir que os valores das probabilidades sejam obtidos, até chegar às desprezíveis. Nesse momento, tem-se uma primeira validação dessa propriedade das variáveis com distribuição de Poisson, que os alunos estudaram no quarto encontro. É importante observar a escolha didática do quarto experimento realizado, pois, tendo ele o intervalo entre as observações de um segundo, pode permitir uma aproximação com uma variável aleatória discreta e conseqüente validação, quando da aplicação do teste de aderência. Pode ser que, para alguma dupla esse fato não aconteça, já que os valores serão colhidos, posteriormente, e os resultados não podem ser previstos. O objetivo é calcular as probabilidades e, a seguir, obter as freqüências esperadas. A aproximação para três casas decimais pretende facilitar a determinação das freqüências esperadas.

No item 2, objetiva-se que os alunos comecem a visualizar a aproximação,

ou não, entre os valores nos dois conjuntos de freqüências, por meio do objeto ostensivo tabela. Espera-se que alguns alunos tenham dificuldade no uso da função freqüência, como ocorreu no piloto. A professora poderá intervir em auxílio à manipulação dessa ferramenta. A opção por cem observações também é uma escolha didática, cujo objetivo é a obtenção da maioria das freqüências superiores a cinco e conseqüente possibilidade do uso do teste qui-quadrado, além de facilitar a determinação das freqüências esperadas. Alguns alunos podem necessitar de ajuda na introdução de fórmulas na planilha.

valor da variável	Poisson 3,09	freq. observadas	freq esperadas	freq. esp. corrigidas	freq. obs. corrigidas	qui-quad. calculado
0	0,046	5	4,6	4,6	5	0,044465
1	0,141	11	14,1	14,1	11	0,666015
2	0,217	27	21,7	21,7	27	1,281977
3	0,224	20	22,4	22,4	20	0,252004
4	0,173	17	17,3	17,3	17	0,004678
5	0,107	11	10,7	10,7	11	0,009484
6	0,055	5	5,5	9,3	9	0,011262
7	0,024	2	2,4			
8	0,009	1	0,9			
9	0,003	1	0,3			
10	0,001	0	0,1			
11	0,000	0	0,0			
12	0,000	0	0,0			
13	0,000	0	0,0			
14	0,000	0	0,0			
		100	100,0			
						qui-quad. calculado = 2,269884
					5 gl	5%
					qui-quad. crítico =	11,07048



Conclusão:

Ao nível de 5%, como qui-quadrado calculado é menor que o crítico, não há evidências para rejeitar a hipótese de que os valores observados seguem o Modelo de Poisson com parâmetro 3,09.

**Figura 23. Comparação: Realidade e Modelo Poisson**

No item 3, os alunos devem usar outro objeto ostensivo para representar as freqüências observadas e esperadas: o gráfico. Para Bosch e Chevallard

(1999), a representação gráfica é mais próxima do raciocínio que a algébrica e, nesse caso, evidencia a comparação entre ambas. Não se espera que os alunos apresentem dificuldade na realização desta tarefa, pois eles já construíram gráficos em vários momentos do curso de Probabilidade e Estatística e no estudo em questão.

O item 4 tem o objetivo de validar cientificamente, ou não, a conjectura que pode ter sido feita visualmente, da aproximação entre as frequências esperadas e observadas, por meio da representação gráfica, no item anterior. O uso do aplicativo tem a vantagem de agilizar a obtenção do valor do qui-quadrado crítico, dispensando a busca em tabelas de livros, além de permitir que todos os cálculos sejam efetuados na própria planilha. O piloto revelou que os alunos têm dificuldades relacionadas à introdução das fórmulas, como também no preenchimento das informações ao utilizarem as funções disponíveis no aplicativo. A introdução de estudantes de computação, na composição das duplas, e o preparo anterior na utilização do teste estatístico, no estudo do Modelo Binomial durante o curso de Probabilidade e Estatística, procuram diminuir tais dificuldades, mas alguns alunos podem apresentar problemas no emprego das funções TESTE.QUI (CHITEST, em inglês), DIST.QUI (CHIDIST) ou INV.QUI (CHIINV) e nas conclusões. Conforme mostram os resultados de Batanero, Tauber e Sánchez (2001), argumentação em termos de análise e síntese foi um dos elementos de significado que proporcionaram maior dificuldade. A professora deve estar atenta ao trabalho das duplas e prestar os esclarecimentos necessários, quando estas não forem capazes de concluir a tarefa. É provável que a maioria dos alunos peça ajuda no momento de organizar as frequências esperadas, no caso em que houver valores menores que cinco, para poder usar o teste qui-quadrado, nem que seja para confirmar o que eles fizeram.

### 3.2.5.1 AVALIAÇÃO

A avaliação da etapa será fundamentada nas respostas da Ficha 9 e respectivo material do disquete, nas anotações dos observadores e nas considerações da professora em relação ao desenvolvimento das atividades propostas.

### 3.2.5.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS

A apresentação e discussão das respostas da Ficha 9 pelas duplas pode ser mais consistente, pois o aluno tem um companheiro para compartilhar os argumentos. A possibilidade de ter outra dupla, que realizou o mesmo experimento e, portanto, a mesma tarefa que possa concordar ou não, pode favorecer uma contestação ou complementação mais confiante, já que esta não é do professor. A mudança, em relação ao contrato didático usual, pode tornar as apresentações mais espontâneas.

Na confrontação das respostas da Ficha 9, podem ocorrer diferenças que precisam ser esclarecidas; para tal, a professora deverá fazer, antecipadamente, a tarefa para os quatro conjuntos de valores que foram obtidos com os contadores. Quando tais diferenças existirem, todos poderão participar da discussão e a professora deverá intervir apenas quando o impasse não for solucionado. O objetivo é dar oportunidade aos alunos de apresentarem sua interpretação em relação ao teste estatístico realizado e ouvir a de seus colegas, que pode favorecer a ampliação e fixação do valor semiótico desse objeto, já que a relação pessoal a um objeto ostensivo é produto de uma construção institucional e, assim, resultado de uma aprendizagem (BOSCH; CHEVALLARD, 1999). Os elementos de significado institucional pretendidos estão no Quadro 13.

**Quadro 13. Elementos de significado institucional pretendidos**

PRÁXIS	LINGUAGEM	LOGOS
<p><u>Situações</u> ajuste a uma distribuição de dados empíricos, como modelo teórico aproximado.</p> <p><u>Ações</u> estimação do parâmetro do modelo teórico a partir dos valores obtidos na experimentação; cálculo da frequência esperada sob a hipótese de que o modelo é de Poisson; comparação das frequências esperadas e observadas por meio de tabelas; gráficos e uso do teste de aderência qui-quadrado, com conclusão e análise.</p>	<p><u>Linguagem</u> tabela e gráfico de barras; parâmetro, distribuição de Poisson, valor esperado, teste qui-quadrado, frequência esperada, frequência observada, qui-quadrado calculado, qui-quadrado crítico, nível de significância, não rejeitar a hipótese;</p> $P(W_t=k) = \frac{(\lambda.t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda.t}$ <p>INV.QUI (CHIINV, em inglês).</p>	<p><u>Conceitos</u> valor esperado, variância, desvio padrão, teste qui-quadrado, qui-quadrado crítico, qui-quadrado calculado, nível de significância.</p> <p><u>Propriedades</u> decréscimo das probabilidades dos valores da variável aleatória que se distanciam daquele de probabilidade máxima.</p> <p><u>Argumentos</u> validação do ajuste do modelo teórico aos valores empíricos por meio do teste de aderência qui-quadrado; demonstrações formais e informais; sínteses.</p>

De acordo com o significado institucional de referência do Modelo de Poisson, o resultado do teste qui-quadrado para todas as duplas deve implicar a não rejeição da aderência do modelo teórico aos valores observados. Caso isso não aconteça, a rejeição será colocada em discussão, o que poderá ampliar os objetivos visados.

### 3.2.6 A SEXTA ETAPA – GENERALIZAÇÃO E PREVISÕES – Sala de aula usual

Nessa etapa de modelagem, Henry (1997) salienta que a apreciação da validade e da generalidade é tarefa de especialista e não mais de matemático. No presente estudo, adota-se a interpretação de que, nessa fase, os alunos apliquem o Modelo de Poisson a situações típicas de livros didáticos; dessa forma, pode-se considerar que se está fazendo uma generalização da aplicação do modelo estudado, pois as situações são diferentes daquelas estudadas, quais sejam, emissões de partículas por fontes radioativas. Em relação à sexta etapa, o autor considera as características apresentadas no Quadro 14.

**Quadro 14. Sexta etapa de modelagem**

ETAPA	OBJETO DE AÇÃO	ATIVIDADE ESPERADA
Generalização e previsões	Extensão da validade do Modelo a outras situações análogas, condições e generalizações. Previsão dos resultados nas novas situações.	A apreciação da validade e da generalidade do Modelo supõe um conhecimento de especialista da situação estudada. Não é mais uma tarefa do matemático. O especialista relativizará as conclusões, explicações e generalizações resultantes do estudo matemático em função das hipóteses do Modelo.

Fonte: Henry (1997, p. 83).

O ambiente é a sala de aula usual e os problemas serão propostos para serem resolvidos pelas duplas, explorando, assim, a aplicação do Modelo de Poisson a novos contextos; nesse encontro, será introduzida também a aproximação Poisson ao Modelo Binomial.

**Tarefa 6.1** Resolver os problemas propostos na Ficha 10.

#### FICHA 10 – Aplicando o Modelo de Poisson

(códigos dos crachás) Dupla \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_

O modelo teórico que foi construído é o de Poisson e no exemplo estudado, a variável aleatória  $W_t$ , número de partículas emitidas por uma fonte radioativa em um intervalo de duração  $t$ , tem distribuição de probabilidades dada pela lei:  $P(W_t = k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}$  para  $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ , onde  $\lambda t$  é o número médio de emissões por essa fonte no intervalo de duração  $t$ . No caso, diz-se que  $W_t$  tem distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda t$  e indica-se:  $W_t \sim P(\lambda t)$ ; sendo assim, basta conhecer o valor de  $\lambda t$  para que o modelo possa ser aplicado. O valor esperado de  $W_t$  é  $\lambda t$  e coincide com a variância, isto é:  $E(W_t) = \text{Var}(W_t) = \lambda t$ .

Algumas hipóteses, conhecidas como Postulados de Poisson, foram admitidas, para que o modelo pudesse ser construído; considerando uma partição do intervalo de tempo de observação da variável, as hipóteses são as seguintes:

**H<sub>1</sub>. A distribuição do número de emissões é a mesma para todos os intervalos da partição.** O número de partículas emitidas depende apenas do comprimento do intervalo de tempo e não de seus extremos.

**H<sub>2</sub>. Os números de ocorrências registrados nos intervalos de tempo da partição são independentes entre si.** As variáveis aleatórias associadas ao número de emissões em intervalos de tempo não sobrepostos são independentes.

**H<sub>3</sub>. Em um intervalo de pequena duração, a probabilidade de se obter uma emissão é diretamente proporcional ao comprimento do intervalo.**  
 $P(W_{\Delta t} = 1) = \lambda \cdot \Delta t$ .

**H<sub>4</sub>. Em um intervalo de pequena duração, a probabilidade de duas ou mais emissões é desprezível.**  $P(W_{\Delta t} = k) \cong 0$ , para todo  $k \geq 2$ .

**H<sub>5</sub>. A probabilidade de nenhuma ocorrência em um intervalo de tempo nulo é um.** Chamada condição inicial do modelo, se  $t = 0$ , (comprimento do intervalo de tempo é zero) com certeza, não se tem emissões, isto é,  $P(W_0 = 0) = 1$ . Como conseqüência,  $P(W_0 = k) = 0$ , para todo  $k \geq 1$ .

1. Fundamentando-se na validade dessas hipóteses e no modelo construído,

dentre as variáveis aleatórias, definidas abaixo, indique aquelas que podem ser estudadas, usando a distribuição de Poisson. (coloque um X sobre a letra do item escolhido)

- a) número de partículas  $\beta$  emitidas por uma fonte radioativa a cada 10 segundos.
- b) altura dos alunos matriculados no primeiro ano de determinado curso.
- c) número de lançamentos de uma moeda, até que ocorra a primeira cara.
- d) número de telefonemas que chegam a uma central telefônica por minuto.
- e) volume líquido em garrafas de dois litros de coca-cola.
- f) número de defeitos, quando se aplica fundo anticorrosivo manualmente (pequenas bolhas na pintura) em chapas de aço de dois metros quadrados.
- g) número de caras em cinco lances de uma moeda honesta.
- h) número de cortes em um rolo de fita magnética com comprimento de 200 pés.
- i) número de peças defeituosas em um lote de 5.000 peças.
- j) número de aviões que chegam a um aeroporto, em momentos de pico, por minuto.

**2.** Para se pensar em usar o Modelo de Poisson no estudo de uma característica, em um experimento aleatório, esta característica deve se referir à contagem ou à medida?

**3.** Considere que se queira estudar o número de chamadas de emergência recebidas por certo Posto de Bombeiros.

- a) O que é necessário admitir, para que se possa usar o Modelo de Poisson (teórico) nesse estudo?
- b) Digamos que seja indicado o uso do Modelo de Poisson para se estudar o número de chamadas de emergência recebidas pelo Posto de Bombeiros. O que é necessário conhecer, para que o Modelo de Poisson possa ser aplicado e como você faria para determiná-lo?
- c) Considerando que a variável aleatória discreta  $W_2$ : número de chamadas de emergência recebidas pelo Posto de Bombeiros em dois dias, tem Distribuição de

Poisson com parâmetro 2,6, isto é,  $W_2 \sim P(2,6)$ , tem-se que  $\lambda \cdot t = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $t = \underline{\hspace{2cm}}$  e, portanto,  $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$ . Descreva o que representam:  $\lambda \cdot t$  e  $\lambda$ .

4. Considere que em um processo de fabricação de placas de vidros, produzem-se pequenas bolhas que se distribuem aleatoriamente pelas placas, com uma densidade média de 0,4 bolha / m<sup>2</sup>.

a) O que você faria para avaliar se o número de bolhas em tais placas de um metro quadrado segue o Modelo de Poisson?

b) Admitindo que a resposta ao item (a) seja afirmativa, isto é, que se chegue à conclusão de que o número de bolhas em tais placas segue o Modelo de Poisson, qual o número esperado (média) de bolhas em uma placa de vidro de três metros de comprimento por dois metros de largura?

c) Com o resultado obtido em (b), qual a distribuição de probabilidades da variável aleatória, número de bolhas em uma placa de 3m por 2m, escolhida aleatoriamente da produção?

d) Com o resultado de (c), determine a probabilidade dessa placa não apresentar nenhuma bolha.

e) Outra placa, obtida no mesmo processo de fabricação, tem dimensões: 1,3m por 2,4m.

(i) Qual o número esperado de bolhas nessa placa?

(ii) Qual a distribuição de probabilidades da variável aleatória, número de bolhas em uma placa de 1,3m por 2,4m?

(iii) Determine a probabilidade de uma dessas placas, escolhida ao acaso, apresentar, pelo menos, uma bolha.

(iv) Qual a variação do número de bolhas em aproximadamente 99% dessas placas? (cite um intervalo)

(v) Determine a probabilidade de uma dessas placas, escolhida ao acaso, apresentar 300 bolhas.

(vi) Qual o número mais provável de bolhas que se pode ter em uma dessas placas?

5. De experimentos realizados anteriormente, sabe-se que o número médio de partículas emitidas por determinada fonte radioativa é 3,25 partículas por segundo. Determine a probabilidade dessa fonte emitir:

- a) exatamente cinco partículas em um dado segundo;
- b) até três partículas por segundo;
- c) exatamente oito partículas em dois segundos;
- d) pelo menos uma partícula em dois segundos;
- e) mais de duas partículas em três segundos;
- f) trezentas partículas em três segundos.

6. No estudo do desempenho de uma central de computação, o acesso à Unidade Central de Processamento (CPU) é assumido ser Poisson, com média de quatro requisições por segundo. Essas requisições podem ser de várias naturezas, tais como: imprimir um arquivo, efetuar um certo cálculo ou enviar uma mensagem pela Internet, entre outras. (MAGALHÃES; LIMA, 2004, p. 90).

- a) Escolhendo-se, ao acaso, um intervalo de um segundo, qual é a probabilidade de haver mais de dois acessos à CPU?
- b) Considerando um intervalo de dez segundos, escolhido ao acaso, qual a probabilidade de haver cinquenta acessos?

7. Em uma estrada há, em média, dois acidentes a cada 100km. Qual a probabilidade de que em:

- a) 250km ocorram pelo menos três acidentes?
- b) 300km ocorram não mais do que dois acidentes?

8. Em uma fita de som há, em média, um defeito a cada 200 pés. Qual a probabilidade de que:

- a) em 500 pés não aconteça defeito?
- b) em 800 pés ocorram pelo menos três defeitos? (MORETTIN, 1999, p. 114).

9. O número de mortes por afogamento em fins de semana, em uma cidade praiana, é, em média, duas mortes para cada 50.000 habitantes. Qual a

probabilidade de que:

- a) em 200.000 habitantes ocorram cinco mortes?
- b) em 112.500 habitantes ocorram no mínimo duas mortes?
- c) Qual, aproximadamente, o número mais provável de mortes por afogamento, em 112.500 habitantes?
- d) Dentre 100.000 habitantes, determine o número mínimo e máximo de mortes por afogamento, prováveis de ocorrer. (MORETTIN, 1999, p. 114, adaptado).

### FICHA 10 (continuação – parte individual)

(Coloque o código do seu crachá) **Aluno** \_\_\_\_\_

**10.** Esboce sua opinião sobre o encontro de hoje: (por favor, seja o mais sincero possível em suas menções, pois elas são muito importantes!)

- a) o que você gostou?
- b) o que você não gostou ou não entendeu?
- c) qual parte você achou de fundamental importância?
- e) explicite suas críticas, sugestões e comentários em geral.
- f) o que você está achando de trabalhar em dupla? Cite vantagens e desvantagens, se existirem.

**Técnica didática:** Solicitar que as duplas resolvam a primeira situação e aguardem que todos terminem para pedir que uma das duplas apresente a resposta e as outras se manifestem a respeito; se houver desacordo, as duplas não deverão alterar suas respostas e todos os alunos poderão opinar, até que se chegue a um consenso. Na seqüência, o mesmo procedimento deverá ser adotado para as demais situações. A professora não interferirá no trabalho dos alunos e, quando solicitada, limitar-se-á a pedir às duplas que resolvam da melhor maneira que puderem. Será permitido o uso de calculadoras. Ao final de cada problema, a professora institucionalizará as conclusões, para que possam fazer parte do conhecimento a ser retido.

### **Bloco tecnológico/teórico e análise a priori:**

A opção de não interferir nas resoluções fundamenta-se nas hipóteses de

que os encontros anteriores tenham dado condições aos alunos de executarem a tarefa proposta e de que as trocas, que o trabalho em dupla pode propiciar, devem permitir que cada dupla tenha condições de resolver todos os problemas. A calculadora é indispensável, para que os alunos possam levar a cabo suas tarefas.

A decisão de propor um a um os problemas e discutir cada um deles, coletivamente, ao ser finalizado por todos, visa a corrigir, imediatamente, possíveis interpretações equivocadas, para que estas não sejam fixadas nos itens subsequentes. A imposição de não alteração das respostas tem a finalidade de permitir o reconhecimento das interpretações e soluções iniciais e sua evolução no transcorrer dos exercícios.

A tarefa tem o objetivo de verificar se os alunos são capazes de fazer a extensão da validade do Modelo de Poisson a outras situações, como também prever seus resultados. Embora Henry (1997) cite que a identificação de situações em que o modelo criado pode ser usado é trabalho de um especialista, espera-se que a partir dos Postulados esta tarefa possa ser levada a cabo.

A solução, o que se espera do trabalho das duplas e os objetivos específicos para cada item da Ficha 10 são apresentados no que se segue.

**1.** Este item, além de buscar saber se os alunos são capazes de identificar corretamente as situações nas quais o modelo criado pode ser usado, pretende verificar quais são os elementos em que eles se baseiam nessa seleção, que podem ser os Postulados ou uma comparação com a variável estudada ou algum outro elemento que poderá ser indicado pelas anotações dos observadores.

Devem ser selecionadas as opções (a), (d), (f), (h) e (j), por se referirem ao número de ocorrências em intervalos de tempo, como foi o caso da experimentação. É esperado que todos os alunos selecionem as opções (a), (d) e (j), mas pode ser que algum aluno selecione todas as opções que se inicia por "número de", caracterizando, assim, todas as variáveis discretas.

**2.** O item tem o objetivo de verificar se os alunos identificam a variável aleatória com distribuição de Poisson, como sendo discreta e ao mesmo tempo reforçar a informação. A resposta deve mencionar que a característica é proveniente de

contagem.

**3. a)** O item busca averiguar se os alunos consideram a necessidade dos Postulados na construção do modelo teórico e, portanto, a validação dos mesmos nas situações em que se deseja aplicá-lo, além de avaliar um aspecto da etapa de construção do modelo teórico no processo de modelagem. A resposta deve fazer referência aos Postulados de Poisson, mas não se espera que os alunos traduzam os Postulados para a situação em questão; a professora deverá propor a tarefa na apresentação coletiva das respostas.

Alguns alunos podem dizer que não entenderam a questão; a professora deverá solicitar à dupla que coloque sua interpretação, reafirmando o contrato didático assumido em todos os questionários, qual seja, que o aluno deve expressar sua opinião e que não se pretende avaliar em termos de certo e errado, mas apenas colher informações para serem analisadas.

**b)** Com este item, pretende-se investigar quais elementos são considerados essenciais, pelos alunos, a fim de que o Modelo de Poisson possa ser aplicado e, de certa forma, avaliar se os objetivos da primeira etapa de modelagem foram atingidos no processo desenvolvido. A resposta deve mencionar que é preciso conhecer o número médio de chamadas de emergência recebidas por esse Posto de Bombeiros, em um intervalo de tempo, que pode ser, por dia, por hora, por semana, ou qualquer outro; para determiná-lo, é preciso colher várias observações em relação ao intervalo considerado e calcular a média, a fim de obter uma estimativa do parâmetro do modelo que será tanto mais precisa quanto mais observações forem colhidas. Vários alunos devem citar a necessidade da coleta de observações e fazer a média deles para estimar o parâmetro, mas não se espera que façam referência à duração do intervalo de tempo ou à precisão. Os alunos podem recorrer à fase da experimentação na busca de elementos para sua resposta.

**c)** No item, busca-se verificar se os alunos são capazes de discernir entre os dois objetos ostensivos,  $\lambda$  e  $\lambda.t$ , o que poderá trazer benefícios aos itens subseqüentes. Pretende-se, ainda, comparar essas descrições com aquelas apresentadas na Ficha 6.  $\lambda.t$  deve ser definido como o número médio de chamadas recebidas pelo Posto de Bombeiros em dois dias, que  $t$  é dois dias e,

conseqüentemente, que  $\lambda$  é o número médio de chamadas recebidas pelo Posto por dia, ou seja, 1,3.

**4. a)** Com este item, objetiva-se avaliar quais etapas do processo de modelagem podem ser identificadas nas respostas dos alunos. A resposta pode se referir aos Postulados de Poisson e, também, à coleta de valores, a fim de compará-los com aqueles teóricos do Modelo de Poisson, valendo-se do teste de aderência qui-quadrado no processo decisório. Alguns alunos poderão citar os Postulados ou a coleta de valores experimentais, para serem comparados com os teóricos, mas não se espera uma resposta completa. Caso aconteça, poder-se-á considerar que essa dupla tem uma ótima capacidade de síntese de todo o trabalho desenvolvido que, segundo Batanero, Tauber e Sánchez (2001) é um dos elementos do significado que pode proporcionar maior dificuldade.

**b)** Este item tem a intenção de investigar se os alunos transportam a validade do Modelo de Poisson, introduzido com intervalo de tempo para o de área. As anotações dos observadores serão muito importantes, para que se possa analisar se essa dificuldade teve lugar e avaliar se todo o processo foi suficiente para os alunos superá-la. A placa mede 3m por 2m, que equivale a  $6\text{m}^2$ ; como o valor esperado é uma função linear, o número médio de bolhas nessa placa será  $0,4 \cdot (6) = 2,4$  bolhas. Os alunos não devem ter dificuldade na determinação desse número, já que usaram essa propriedade da média na Ficha 4. A escolha da variável didática 0,4 deve-se à sua viabilidade na prática e para romper a forte tendência, identificada no piloto, de que esse número precisa ser inteiro. A opção por apresentar esse número médio por metro quadrado, ou seja, pela unidade de medida, visa a facilitar, nesse primeiro momento, a determinação da média nos  $6\text{m}^2$ , como foi solicitado.

**c)** Este item pretende verificar se os alunos identificam o parâmetro, como sendo a média da variável aleatória, ou seja, se a etapa de exploração do Modelo Teórico foi suficiente para os alunos lembrarem do resultado. A distribuição é de Poisson com parâmetro 2,4, isto é,  $W_6 \sim P(2,4)$ . Não se espera dúvidas em relação a essa questão, como também a apresentação do objeto ostensivo  $W_6 \sim P(2,4)$ . A manutenção da variável didática 3m por 2m, do item anterior, tem o objetivo de não ser mais um fator a interferir no raciocínio.

**d)** A escolha da variável didática: probabilidade de nenhuma bolha, mantendo o parâmetro dos itens anteriores, tem o objetivo de facilitar o cálculo e não envolver qualquer outra dificuldade que não seja a aplicação imediata da fórmula. Deve-se calcular a probabilidade da variável aleatória assumir o valor zero, usando a fórmula deduzida na construção do Modelo de Poisson:

$$P(W_6 = 0) = e^{-2,4} \cdot \frac{2,4^0}{0!} = 0,0907$$

No momento, não se pretende avaliar se os alunos memorizaram a fórmula, pois esta se encontra no início da Ficha em questão, mas verificar se eles são capazes de aplicá-la na situação proposta. Além disso, se o aluno fizer um cálculo errado e encontrar uma resposta absurda deseja-se investigar se ele é capaz de identificá-la e corrigi-la; o fato poderá ser constatado nas anotações dos observadores.

**e)** Este item tem como intenção principal avaliar se o aluno percebe a mudança do parâmetro do modelo, isto é, uma nova variável deverá ser definida, já que mudou o intervalo entre as observações. Acrescentam-se, ainda, novas dificuldades que se pretende averiguar se os alunos são capazes de superar, quais sejam: a interpretação adequada do termo pelo menos uma e da probabilidade complementar, o uso do intervalo que considera três desvios padrão de cada lado da média, como sendo aquele que contém, aproximadamente, 99% dos valores prováveis de ocorrer, a identificação de 300 bolhas como tendo probabilidade desprezível, sem calculá-la, e, finalmente, a citação de um valor próximo ao esperado como sendo o número mais provável de bolhas que se pode obter.

As respostas são:

**(i)**  $(1,3) \cdot (2,4) = 3,12\text{m}^2$  e como se tem  $0,4$  bolha/ $\text{m}^2$ , se espera

$(3,12) \cdot (0,4) = 1,248$  bolha nessa placa;

**(ii)** a distribuição é de Poisson com parâmetro 1,248;

**(iii)**  $P(W_{3,12} \geq 1) = 1 - P(W_{3,12} < 1) = 1 - P(W_{3,12} = 0) =$

$$= 1 - e^{-1,248} \frac{1,248^0}{0!} = 1 - 0,2871 = 0,7129;$$

(iv) como  $DP(W_{3,12}) = \sqrt{1,248} = 1,1171$  tem-se:

$[1,248 - 3.(1,1171) ; 1,248 + 3.(1,1171)]$  e como a variável não pode assumir valores negativos, o intervalo será:  $[0 ; 4,5994]$ ;

(v) a probabilidade é zero;

(vi) o mais provável é próximo de uma bolha.

Admite-se que os alunos tenham superado a dificuldade imposta pela mudança do intervalo de tempo para área nos problemas anteriores e resolvam a atividade proposta adequadamente. A escolha das variáveis didáticas: o tamanho da placa e a probabilidade pedida que envolve o termo pelo menos uma são essenciais aos objetivos visados, visto que Girard (1997) observou que expressões desse tipo podem trazer dificuldades na interpretação. Os alunos podem se valer das etapas de construção e exploração do modelo teórico na realização da tarefa.

5. O item pretende averiguar se os alunos percebem a mudança do parâmetro do modelo e a interpretação dos termos: até três, pelo menos uma e mais de duas, além de repetir o uso do Modelo de Poisson com a finalidade de contribuir para a memorização da fórmula e de algumas propriedades.

As respostas são as seguintes:

(a) sendo  $W_1$  o número de emissões em um segundo,  $W_1 \sim P(3,25)$  e

$$P(W_1 = 5) = e^{-3,25} \frac{3,25^5}{5!} = 0,1172;$$

(b)  $P(W_1 \leq 3) = P(W_1 = 0) + P(W_1 = 1) + P(W_1 = 2) + P(W_1 = 3) =$

$$= e^{-3,25} \frac{3,25^0}{0!} + e^{-3,25} \frac{3,25^1}{1!} + e^{-3,25} \frac{3,25^2}{2!} + e^{-3,25} \frac{3,25^3}{3!} = 0,5914;$$

(c) sendo  $W_2$  o número de emissões em dois segundos,  $W_2 \sim P(6,5)$  e

$$P(W_2 = 8) = e^{-6,5} \frac{6,5^8}{8!} = 0,1188;$$

$$(d) P(W_2 \geq 1) = 1 - P(W_2 < 1) = 1 - P(W_2 = 0) =$$

$$= 1 - e^{-6,5} \frac{6,5^0}{0!} = 1 - 0,0015 = 0,9985;$$

(e) sendo a variável  $W_3$  o número de emissões em três segundos,  $W_3 \sim P(9,75)$  e

$$P(W_3 > 2) = 1 - P(W_3 \leq 2) = 1 - P(W_3 = 0) - P(W_3 = 1) - P(W_3 = 2) =$$

$$= 1 - e^{-9,75} \frac{9,75^0}{0!} - e^{-9,75} \frac{9,75^1}{1!} - e^{-9,75} \frac{9,75^2}{2!} = 0,9966;$$

(f) zero, pois esta probabilidade é desprezível.

Os alunos devem resolver a questão sem maiores dificuldades, considerando que as institucionalizações das situações anteriores já foram feitas, embora se admita que isso possa ocorrer somente depois de algumas discussões entre os membros de cada dupla.

As variáveis didáticas, como a reutilização do contexto da experimentação, com intervalos de um, dois e três segundos pretendem que os alunos se valham do experimento realizado, a fim de executar adequadamente a tarefa. A organização dos itens, pedindo inicialmente o cálculo da probabilidade para um determinado número de ocorrências e depois para um intervalo tem o objetivo de apresentar uma dificuldade por vez, a fim de identificar aquela que não tenha sido superada.

6. Neste item, procura-se avaliar a reação dos alunos ao se depararem com uma situação típica de livros didáticos e com a ordem de grandeza dos cálculos. Os alunos podem se valer de propriedades estudadas, a fim de responderem suas possíveis indagações.

As respostas são:

$$(a) \text{ sendo } W_1 \sim P(4), P(W_1 > 2) = 1 - P(W_1 \leq 2) =$$

$$= 1 - P(W_1 = 0) - P(W_1 = 1) - P(W_1 = 2) = 1 - e^{-4} \frac{4^0}{0!} - e^{-4} \frac{4^1}{1!} - e^{-4} \frac{4^2}{2!} = 0,7619;$$

$$(b) \text{ sendo } W_{10} \sim P(40), P(W_{10} = 50) = e^{-40} \frac{40^{50}}{50!} = 0,0177.$$

Os alunos devem realizar o item (a) sem dificuldade, mas, no item (b) são esperados questionamentos relacionados aos cálculos. A professora limitar-se-á a solicitar que eles pensem nas propriedades do Modelo de Poisson e encontrem uma resposta que achem adequada, salientando, mais uma vez as regras do contrato didático assumido explicitamente.

7. No item, o propósito é verificar se o fato da variável aleatória referir-se a número de acidentes por quilômetro, dificulta a transferência dos conhecimentos adquiridos e, ainda, se a escolha didática em informar a média a cada cem quilômetros é corretamente administrada na determinação do parâmetro do modelo. Acrescenta-se, também, que se pretende observar a interpretação dos termos: pelo menos três e não mais do que dois e avaliar a evolução dos alunos na interpretação de termos desse tipo.

As respostas são as seguintes:

$$(a) \text{ sendo } W_{250} \sim P(5), \text{ então } P(W_{250} \geq 3) = 1 - P(W_{250} < 3) =$$

$$= 1 - P(W_{250} = 0) - P(W_{250} = 1) - P(W_{250} = 2) =$$

$$= 1 - e^{-5} \left( \frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} \right) = 1 - e^{-5} (18,5) = 0,8753;$$

$$(b) \text{ sendo } W_{300} \sim P(6), P(W_{300} \leq 2) = P(W_{300} = 0) + P(W_{300} = 1) + P(W_{300} = 2) =$$

$$= e^{-6} \left( \frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} \right) = e^{-6} (25) = 0,0620.$$

8. Novamente, um problema apresentado em um livro didático é proposto. As soluções para essa questão são as seguintes:

$$(a) \text{ sendo } W_{500} \sim P(2,5), P(W_{500} = 0) = e^{-2,5} \left( \frac{2,5^0}{0!} \right) = e^{-2,5} = 0,0821;$$

$$(b) \text{ sendo } W_{800} \sim P(4), P(W_{800} \geq 3) = 1 - P(W_{800} < 3) =$$

$$= 1 - P(W_{800} = 0) - P(W_{800} = 1) - P(W_{800} = 2) =$$

$$= 1 - e^{-4} \left( \frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} \right) = 1 - e^{-4} (13) = 0,7619.$$

Pretende-se verificar se os alunos fazem uso da discussão da situação anterior para resolverem o problema e se houve evolução na resposta.

**9.** As adaptações feitas referem-se ao item (b), no qual, pelo menos três foi substituído por no mínimo duas e aos itens (c) e (d) que foram acrescentados, pois se pretende averiguar se as discussões da Ficha 7, em relação aos valores negativos que apareceram na determinação do intervalo, foram adequadamente interpretadas. As respostas são:

(a) sendo  $W_{200000} \sim P(8)$ ,  $P(W_{200000} = 5) = e^{-8} \left( \frac{8^5}{5!} \right) = 0,0916$ ;

(b) sendo  $W_{112500} \sim P(4,5)$ ,  $P(W_{112500} \geq 2) = 1 - P(W_{112500} < 2) =$   
 $= 1 - P(W_{112500} = 0) - P(W_{112500} = 1) = 1 - e^{-4,5} \left( \frac{4,5^0}{0!} + \frac{4,5^1}{1!} \right) = 0,9389$ ;

(c) sendo  $W_{112500} \sim P(4,5)$ , então, o número mais provável é próximo de quatro ou cinco mortes por afogamento e calculando as duas probabilidades, chega-se a quatro mortes por afogamento;

(d) sendo  $W_{100000} \sim P(4)$ , então,  $4 - 3.(2) = -2$  e como a variável não pode assumir valor negativo, o número mínimo, aproximadamente, é nenhuma morte por afogamento; já o número máximo é próximo de  $4 + 3.(2) = 10$  mortes por afogamento.

**10.** O item busca as opiniões individuais e por esse motivo é entregue em folha separada, já que a tarefa é proposta para as duplas. Convém observar que, no item (e), foram acrescentados os termos: comentários em geral, com a pretensão de obter opiniões que o aluno queira manifestar.

### 3.2.6.1 CURIOSIDADE DO MODELO DE POISSON

Por meio desse tópico, pretende-se apresentar aos alunos a aproximação entre os modelos Binomial e Poisson. No início, será questionada a semelhança das duas representações gráficas para apenas, posteriormente, serem propostas várias construções gráficas dos dois modelos, como lição extra-classe, antes do

próximo encontro. O estudo será feito a título de complementação por ser um dos elementos de significado institucional de referência identificado nesta pesquisa. Não se pretende estabelecer critérios, para que a aproximação possa ser usada, mas discutir condições que possam favorecê-la. Com esse objetivo, a Tarefa 6.2 será proposta aos alunos.

**Tarefa 6.2** Executar na planilha as atividades propostas na Ficha 11 e imprimir uma cópia para o próximo encontro.

### FICHA 11 – Comparando Binomial e Poisson

(código dos crachás) **Dupla** \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_

**1. a)** Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição Binomial com parâmetros 20 e 0,2, isto é,  $X \sim B(20 ; 0,2)$ . Digitar na primeira coluna os valores de  $X$  e na segunda coluna obter as respectivas probabilidades, usando a função DISTRBINOM. (nomeie a planilha como: B(20 ; 0,2))

**b)** Para se definir uma variável aleatória  $W_t$ , com distribuição de Poisson, cujas probabilidades aproximem-se daquelas determinadas com o Modelo Binomial, deve-se impor que as médias das duas variáveis sejam iguais; assim sendo, a média de  $W_t$ , que é o parâmetro do Modelo Poisson, deverá ser  $\lambda.t = n.p = 20.(0,2) = 4$ . Na terceira coluna, obtenha as probabilidades respectivas usando a função POISSON, disponível no aplicativo.

**c)** Construa uma representação gráfica (colunas) das duas distribuições de probabilidades nessa planilha. (não esqueça de colocar os valores da variável como rótulo do eixo das abscissas). Observe visualmente a aproximação dos dois modelos que você obteve.

**2.** Repita o exercício 1, itens (a), (b) e (c), para o caso em que  $X \sim B(20 ; 0,6)$ . (não esqueça de nomear a planilha). Use a mesma escala do exercício 1 no eixo das ordenadas.

**3.** Repita o exercício 1, itens (a), (b) e (c), para o caso em que  $X \sim B(20 ; 0,9)$ . Use a mesma escala do exercício 1 no eixo das ordenadas.

**4.** Repita o exercício 1, itens (a), (b) e (c), para o caso em que  $X \sim B(30 ; 0,2)$ . Use a mesma escala do exercício 1 no eixo das ordenadas.

5. Repita o exercício 1, itens (a), (b) e (c), para o caso em que  $X \sim B(40 ; 0,2)$ . Use a mesma escala do exercício 1 no eixo das ordenadas.
6. Repita o exercício 1, itens (a), (b) e (c), para o caso em que  $X \sim B(60 ; 0,01)$ .
7. Comparando os gráficos que foram obtidos, qual a conjectura que se pode fazer em relação à melhor aproximação entre os Modelos: Binomial e Poisson?

**Técnica didática:** A Ficha 11 será proposta como lição extra-classe e os alunos poderão realizá-la individualmente ou em dupla. Deve-se salientar a importância dela ser realizada para o próximo encontro e a utilização da mesma escala no eixo das ordenadas, a fim de viabilizar a comparação objetivada.

### **Bloco tecnológico/teórico e análise a priori:**

O emprego do aplicativo é fundamental para que os alunos possam levar a cabo a tarefa sem a necessidade de fazerem exaustivos cálculos que poderiam dispersar a atenção em relação aos objetivos. Além disso, a representação gráfica facilita a comparação desejada pela imediata visualização que ela fornece.

Não se espera que os alunos tenham dificuldade na realização dessa tarefa, pois fizeram uso da função DISTRBINOM no curso de Probabilidade e Estatística e da função POISSON durante o projeto, como também tiveram várias oportunidades de construir gráficos de colunas na planilha.

Na questão 7 não se pretende institucionalizar limites aos parâmetros, a fim de que a aproximação possa ser usada, como o fazem os livros didáticos, mesmo porque eles não concordam sob esse aspecto; no livro de Guimarães e Cabral (1997), a aproximação é indicada nos casos em que  $n \geq 20$  e  $n.p < 7$ ; no livro de Morettin (1999), quando  $n > 30$ ,  $p < 0,1$  e  $\lambda \leq 10$ ; no livro de Bussab e Morettin (2004), quando  $n.p \leq 7$ ; no livro de Spiegel (1993), quando  $n \geq 50$  e  $n.p < 5$ , apenas para citar alguns exemplos. Pretende-se, sim, discutir a importância dessa aproximação, quando não se tem equipamento disponível para os cálculos binomiais e que ela melhora quando o valor do número de repetições cresce e o da probabilidade de sucesso decresce, devendo ser usada, quando não se tem a alternativa dos cálculos exatos.

A solução da Ficha 11 está representada nas Figuras 24 a 29.

1.  $B(20; 0,2) \Rightarrow n = 20$  e  $p = 0,2$ ; assim,  $\lambda t = n.p = 20.(0,2) = 4 \Rightarrow P(4)$ .

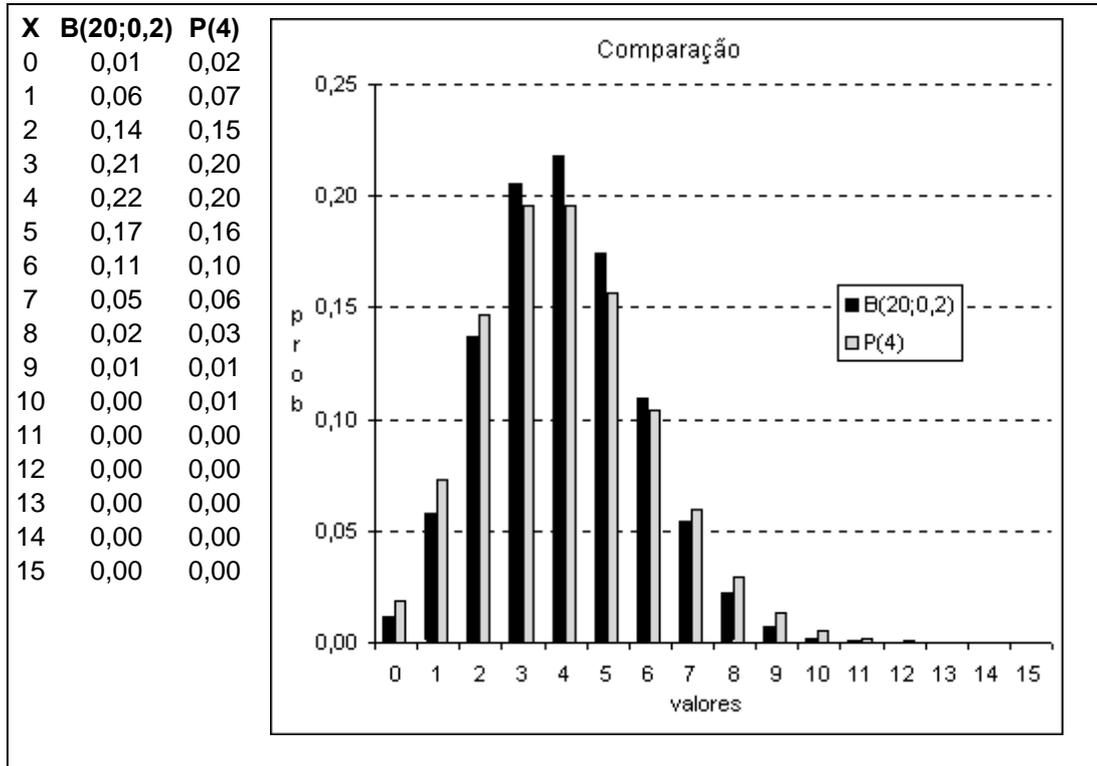


Figura 24. Comparação B(20; 0,2) e P(4)

2.  $B(20; 0,6) \Rightarrow n = 20$  e  $p = 0,6$ ; assim,  $\lambda t = n.p = 20.(0,6) = 12 \Rightarrow P(12)$ .

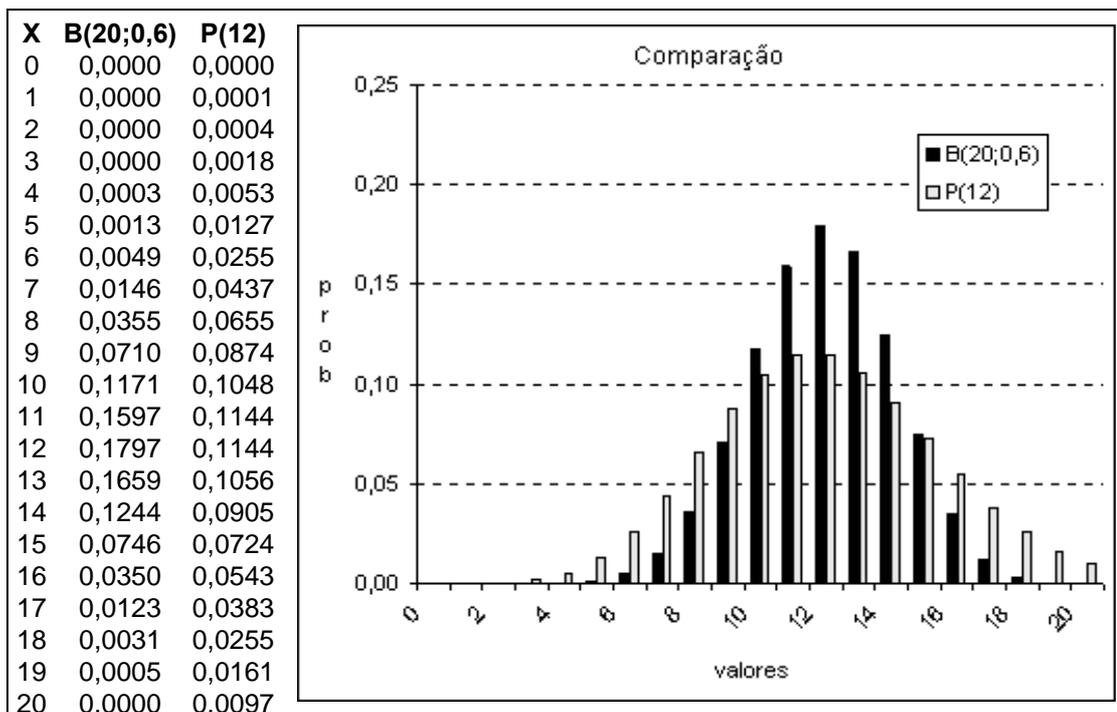


Figura 25. Comparação B(20; 0,6) e P(12)

3.  $B(20; 0,9) \Rightarrow n = 20$  e  $p = 0,9$ ; assim,  $\lambda t = n.p = 20.(0,9) = 18 \Rightarrow P(18)$ .

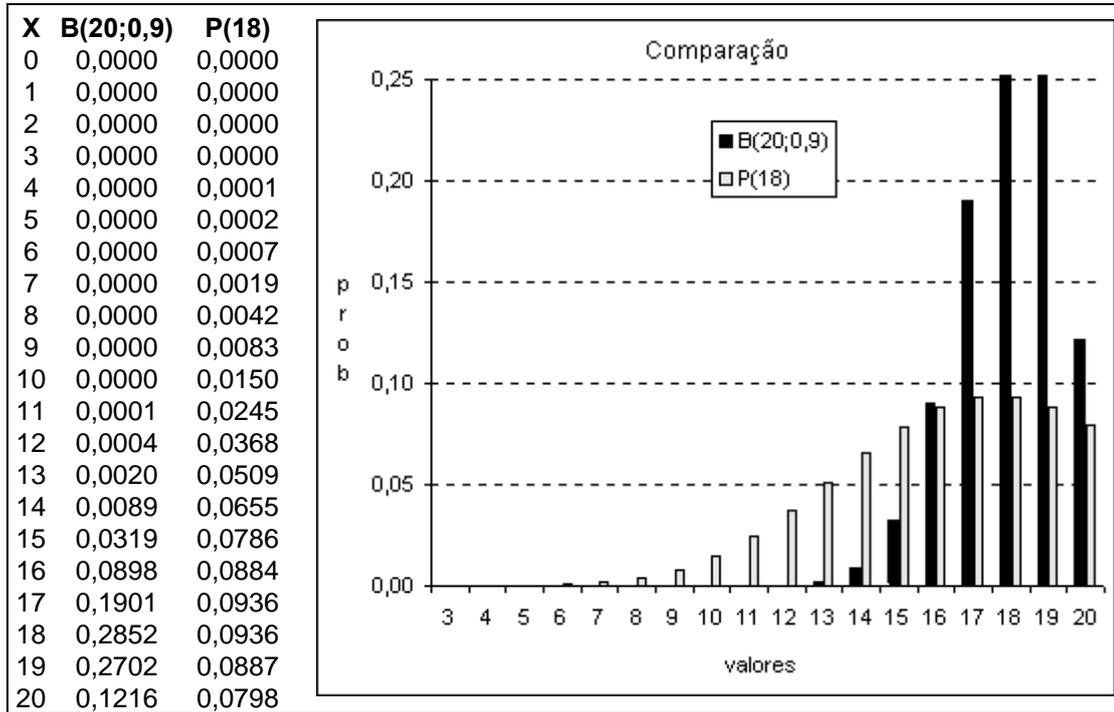


Figura 26. Comparação B(20; 0,9) e P(18)

4.  $B(30; 0,2) \Rightarrow n = 30$  e  $p = 0,2$ ; assim,  $\lambda t = n.p = 30.(0,2) = 6 \Rightarrow P(6)$ .

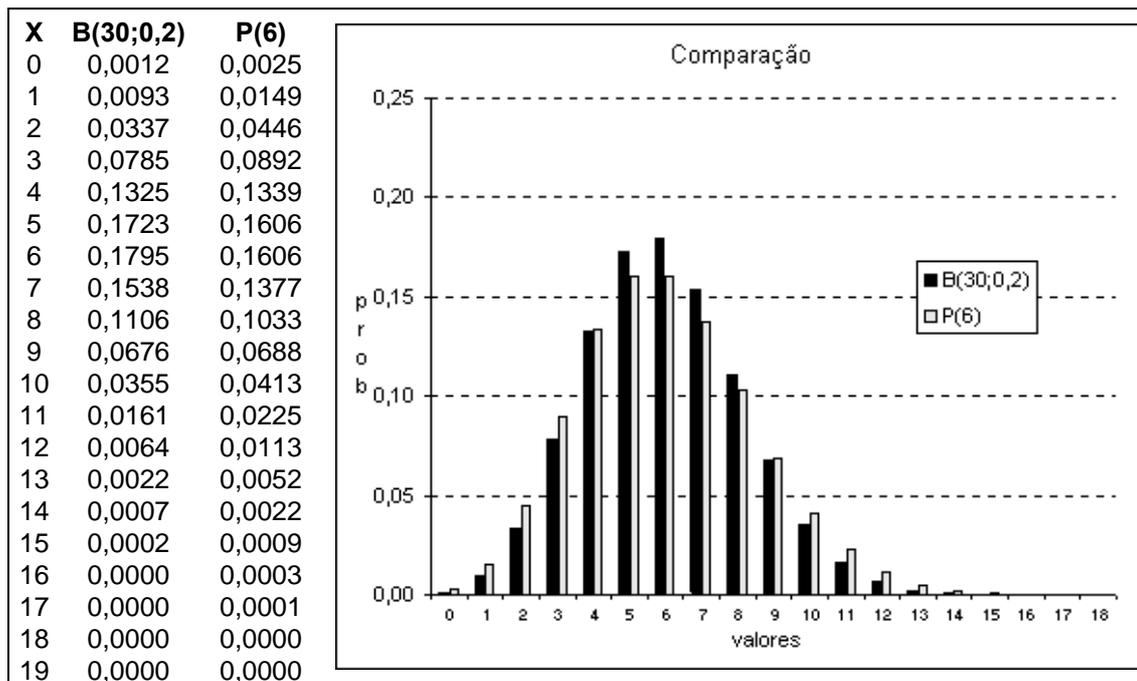


Figura 27. Comparação B(30; 0,2) e P(6)

5.  $B(40; 0,2) \Rightarrow n = 40$  e  $p = 0,2$ ; assim,  $\lambda t = n.p = 40.(0,2) = 8 \Rightarrow P(8)$ .

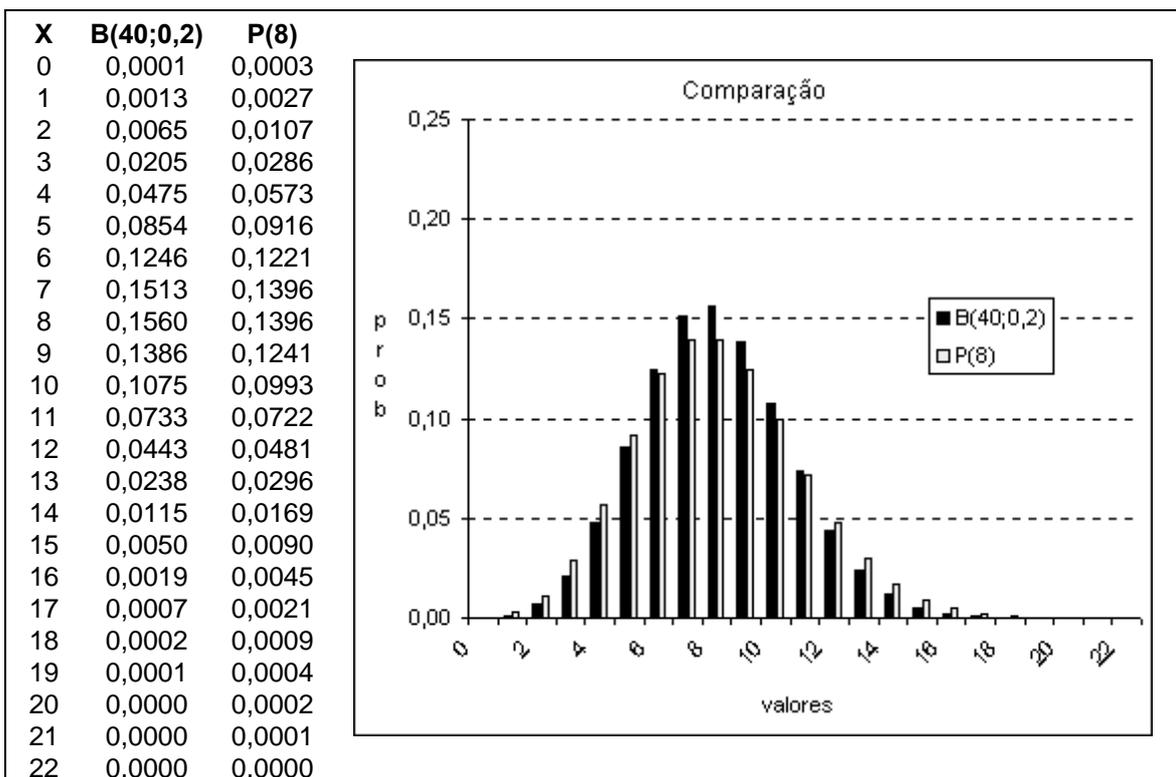


Figura 28. Comparação B(40; 0,2) e P(8)

6.  $B(60; 0,01) \Rightarrow n = 60$  e  $p = 0,01$ ; assim,  $\lambda t = n.p = 60.(0,01) = 0,6 \Rightarrow P(0,6)$ .

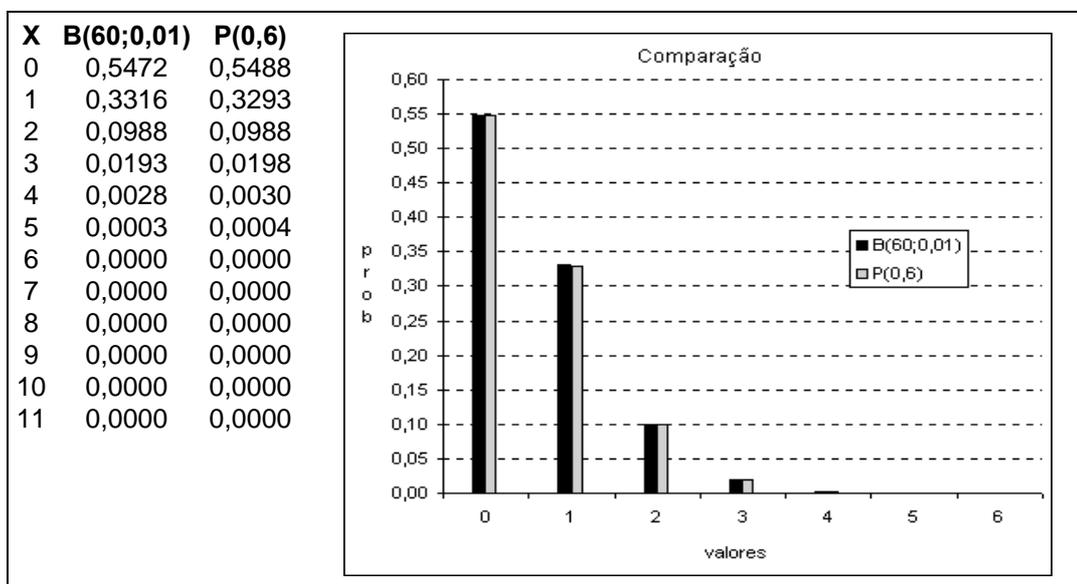


Figura 29. Comparação B(60; 0,01) e P(0,6)

Em relação aos valores dos parâmetros do Modelo Binomial, as escolhas didáticas são importantes para favorecer não só a comparação, como também as conclusões que se deseja obter. Inicialmente, foi mantido o mesmo valor do

número de repetições, variando a probabilidade (B(20; 0,2), B(20; 0,6), B(20; 0,9)) para depois manter a probabilidade e diversificar o número de repetições (B(20; 0,2); B(30; 0,2); B(40; 0,2)); finalmente, um último caso, B(60; 0,01), foi considerado, objetivando a conclusão final. As Figuras 24, 25, 26, 27 e 28 têm as mesmas escalas para o eixo das ordenadas nos gráficos construídos, a fim de viabilizar uma comparação entre eles.

Ao final do encontro, os alunos serão avisados que farão um teste final.

### 3.2.6.2 AVALIAÇÃO

A avaliação desta etapa será fundamentada sobretudo nas respostas da Ficha 10 e nas anotações dos observadores.

### 3.2.6.3 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS

Dentre os elementos de significado institucional de referência, constam como pretendidos aqueles sintetizados no Quadro 15.

**Quadro 15. Elementos de significado institucional pretendidos**

PRÁXIS	LINGUAGEM	LOGOS
<p><u>Situações</u> situações relacionadas a outras áreas do conhecimento como, por exemplo, a Física sob determinadas condições.</p> <p><u>Ações</u> resolução de problemas semelhantes àqueles apresentados nos livros didáticos, com auxílio de calculadora, ou aplicativo.</p>	<p><u>Linguagem</u> número médio de ocorrências, parâmetro, distribuição de Poisson, Postulados de Poisson, hipóteses de Poisson, hipóteses de Poisson, número mais provável.</p> <p><math>W_t \sim P(\lambda t)</math>,</p> <p><math>P(W_t=k) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}</math>,</p> <p><math>[E(W_t) - 3 \cdot DP(W_t), E(W_t) + 3 \cdot DP(W_t)]</math></p>	<p><u>Conceitos</u> número médio, valor esperado (média), distribuição de probabilidades, probabilidade complementar, probabilidade desprezível, pelo menos uma, mais de duas, até três, pelo menos três.</p> <p><u>Propriedades</u> valor esperado é uma função linear; intervalo que contém valores da variável com probabilidades não desprezíveis; valor da variável com probabilidade máxima;</p> <p>decremento das probabilidades conforme os valores da variável aleatória distanciam-se daquele de probabilidade máxima.</p> <p><u>Argumentos</u> validação gráfica.</p>

### 3.2.7 O ÚLTIMO ENCONTRO - TESTE FINAL – Laboratório de Informática

O último encontro não faz parte do processo de modelagem proposto neste estudo, embora, inicialmente, pretenda-se discutir a aproximação entre os dois modelos para finalizar o estudo. O principal objetivo deste tópico é aplicar um teste final de avaliação com questões, para serem levadas a cabo com ou sem o uso do aplicativo e outra que o exige. Por esse motivo, o ambiente será o Laboratório de Informática.

No início das atividades, será citada para apresentação e discussão a Tarefa 6.2 que, depois de concluída será complementada com a entrega da Ficha 12 que traz a demonstração da coincidência exata entre os Modelos Binomial e Poisson sob determinadas condições. As duas situações que aparecem no final da Ficha serão colocadas para o grupo e corrigidas na seqüência.

#### FICHA 12 – Aproximação Poisson do Modelo Binomial

Seja a variável aleatória  $Y \sim B(n, p)$ ; a distribuição de probabilidades de  $Y$  é dada pela lei:  $P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ , onde  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $p$  é a probabilidade de sucesso e  $q$  a de fracasso, isto é,  $q = 1 - p$ . Uma maneira de se obter valores aproximados para essas probabilidades é apresentada a seguir.

Considere a mudança de variável:  $np = \lambda.t$ . Tem-se então:  $p = \frac{\lambda.t}{n}$  e portanto,  $q = 1 - \frac{\lambda.t}{n}$ . Substituindo esses valores em  $P(Y=k)$  vem:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda.t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda.t}{n}\right)^{n-k}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Calculando o limite quando  $n \rightarrow \infty$ , em ambos os membros da igualdade acima, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda.t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda.t}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(\lambda.t)^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda.t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda.t}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{(\lambda.t)^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n.(n-1).(n-2)....(n-k+1).(n-k)!}{n^k . (n-k)!} \left(1 - \frac{\lambda.t}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{(\lambda.t)^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{\lambda.t}{n}\right)^n = \frac{(\lambda.t)^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda.t}{n}\right)^n$$

Efetuada – se a mudança de variável :  $\frac{\lambda.t}{n} = \frac{1}{x}$ , tem - se que  $x \rightarrow \infty$

quando  $n \rightarrow \infty$  e que  $n = x.(\lambda.t)$ ; assim,

$$\frac{(\lambda.t)^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda.t}{n}\right)^n = \frac{(\lambda.t)^k}{k!} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x.(\lambda.t)} = \frac{(\lambda.t)^k}{k!} \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \right]^{\lambda.t} =$$

$$= \frac{(\lambda.t)^k}{k!} \left(\frac{1}{e}\right)^{\lambda.t} = \frac{(\lambda.t)^k}{k!} \cdot (e^{-1})^{\lambda.t} = \frac{(\lambda.t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda.t} = P(W_t = k), \text{ onde } W_t \sim P(\lambda.t)$$

Concluindo, as probabilidades num Modelo Binomial coincidem exatamente com as respectivas probabilidades em um Modelo de Poisson em que  $\lambda.t = n.p$ , no limite, quando  $n$  tende a infinito. As probabilidades nos dois modelos são próximas quando  $n$  for “grande” e  $p$  “pequeno”, ou seja, nos casos dos chamados eventos raros.

Veja um exemplo apresentado em Morettin (1999, p.116-117):

Um técnico visita os clientes que compraram assinatura de um canal de TV para verificar o decodificador. Se a probabilidade de defeito for de 0,0035, qual a probabilidade de que em 2.000 visitas ocorra no máximo um defeito?

Seja a variável aleatória  $Y$ : número de decodificadores defeituosos entre os 2.000 verificados. Tem-se que  $Y \sim B(2.000 ; 0,0035)$ . Deve-se calcular  $P(Y \leq 1) =$

$$= P(Y = 0) + P(Y = 1) =$$

$$= \binom{2.000}{0} \cdot 0,0035^0 \cdot 0,9975^{2000} + \binom{2.000}{1} \cdot 0,0035^1 \cdot 0,9975^{1999} \approx$$

$$\approx 0,000901 + 0,006327 = 0,007228 \text{ (esses cálculos foram feitos na planilha).}$$

Usando a aproximação pelo Modelo de Poisson, tem-se:  $\lambda.t = 2000 \cdot 0,0035 = 7$ .

$$P(W_t \leq 1) = P(W_t = 0) + P(W_t = 1) = e^{-7} \left( \frac{7^0}{0!} + \frac{7^1}{1!} \right) = 0,007295.$$

Utilize a aproximação pelo Modelo de Poisson nas seguintes situações

(você pode usar a calculadora ou a própria planilha).

1. Se 3% das lâmpadas fabricadas por uma companhia são defeituosas, determinar a probabilidade de, em uma amostra de 100 lâmpadas, duas ou menos serem defeituosas. (SPIEGEL, 1993, p. 212).
2. Uma companhia de seguros descobriu que só cerca de 0,1% da população está incluída em certo tipo de acidente a cada ano. Se seus 10.000 segurados forem escolhidos, ao acaso, na população, qual será a probabilidade de que não mais do que cinco de seus clientes venham estar incluídos em tal acidente no próximo ano? (MEYER, 2003, p. 210).

A leitura e posteriores esclarecimentos tem como justificativa o fato da demonstração ser artificiosa e, portanto, não se espera que os alunos sejam capazes de desenvolvê-la sem ajuda. A institucionalização das conclusões antes de propor os dois problemas visa a elaborar um início de técnica de resolução para situações desse tipo e evitar possíveis equívocos de interpretação. A seguir, são apresentados alguns comentários a respeito das duas situações propostas.

1. As escolhas didáticas dos valores dos parâmetros:  $p = 0,03$  e  $n = 100$  e das probabilidades até dois têm o objetivo de que o cálculo seja imediato, mesmo com o uso da calculadora, embora a dupla possa optar pelo uso da planilha.

Considerando a variável aleatória  $Y$ : número de lâmpadas defeituosas entre 100 da amostra tem-se  $n = 100$  e  $p = 0,03$  e, portanto,  $Y \sim B(100; 0,03)$ ; para o cálculo aproximado deve-se impor que  $\lambda \cdot t = n \cdot p = 100 \cdot (0,03) = 3$ , ou seja,  $W_t \sim P(3)$ . Assim, a probabilidade pedida:  $P(Y \leq 2)$  pode ser calculada, aproximadamente, por  $P(W_t \leq 2) = P(W_t=0) + P(W_t=1) + P(W_t=2) =$

$$= e^{-3} \left( \frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} \right) = e^{-3} (8,5) = 0,42319.$$

2. As escolhas didáticas: 10.000 e 0,1% aos parâmetros e até cinco às probabilidades têm a intenção de verificar se os alunos optam pelo uso do aplicativo na resolução desse problema. Considerando a variável aleatória  $Y$ : número de clientes incluídos em tal acidente dentre os 10.000 escolhidos ao acaso tem-se  $Y \sim B(10.000; 0,001)$ . Assim, na aproximação deve-se ter  $\lambda \cdot t = n \cdot p = 10.000 \cdot (0,001) = 10$  e, portanto, a variável aleatória aproximada com

distribuição de Poisson será:  $W_t \sim P(10)$ . A probabilidade pedida  $P(Y \leq 5)$  pode ser aproximada por  $P(W_t \leq 5)$ .

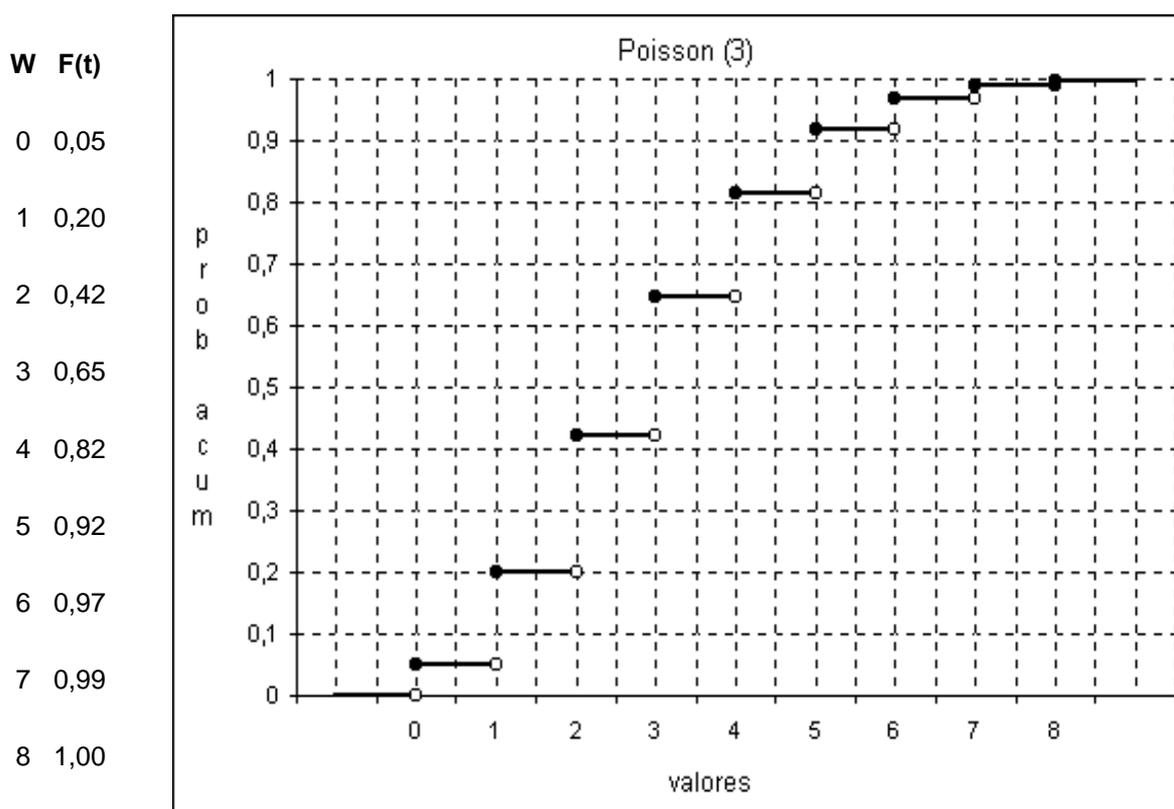
$$P(W_t \leq 5) = P(W_t=0) + P(W_t=1) + P(W_t=2) + P(W_t=3) + P(W_t=4) + P(W_t=5) =$$

$$= e^{-10} \left( \frac{10^0}{0!} + \frac{10^1}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \frac{10^4}{4!} + \frac{10^5}{5!} \right) = e^{-10} (1477,67) = 0,067086.$$

A título de ilustração, logo a seguir, será distribuída a Ficha 13 que contém a representação gráfica da distribuição de probabilidades acumulada da variável aleatória de Poisson com parâmetro três; ela não foi utilizada neste trabalho, pois o gráfico de colunas possibilita melhor visualização nas comparações e objetivos visados.

### FICHA 13 – Função repartição

#### Representação gráfica da distribuição de probabilidades acumulada



Os comentários sobre a Ficha 13 limitar-se-ão ao conceito de probabilidade acumulada, suas propriedades e às estratégias utilizadas na construção gráfica.

## 3.2.7.1 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL PRETENDIDOS

## Primeira parte do encontro (antes do teste final)

Na primeira parte da sessão, em que se pretende discutir a aproximação entre os Modelos Binomial e Poisson, dentre os elementos de significado de referência, citados no Capítulo 2, o Quadro 16 apresenta uma lista daqueles pretendidos nesta fase do estudo.

**Quadro 16. Elementos de significado institucional pretendidos com a aproximação Poisson ao Modelo Binomial**

PRÁXIS	LINGUAGEM	LOGOS
<p><u>Situações</u> aproximação Poisson ao Modelo Binomial</p> <p><u>Ações</u> resolução de problemas de aproximação Poisson ao Modelo Binomial.</p>	<p><u>Linguagem</u> tabelas e gráficos de barras e função acumulada; <math>W_t \sim P(\lambda, t)</math> <math>P(W_t=k) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} e^{-\lambda \cdot t}</math> <math>E(W_t)</math> <math>Var(W_t)</math> <math>DP(W_t)</math>.</p>	<p><u>Conceitos</u> no máximo um, não mais do que cinco, limite, exponencial, fatorial, distribuição de probabilidades, função distribuição de probabilidades acumulada (função repartição ou escada), distribuição Binomial.</p> <p><u>Propriedades</u> uma variável aleatória <math>Y \sim B(n, p)</math> se aproxima de <math>W_t \sim P(n, p)</math> quando <math>n</math> cresce e <math>p</math> diminui; as probabilidades obtidas nos Modelos Binomial e Poisson coincidem exatamente no limite, quando o número de repetições tende a infinito e as médias coincidem.</p> <p><u>Argumentos</u> demonstrações formais e informais; validação gráfica; comparações de resultados particulares com generalizações. demonstrações formais e informais; validação gráfica; comparações de resultados particulares com generalizações.</p>

Dando continuidade ao encontro, cada aluno será colocado diante de um computador, a fim de responder o teste final.

**Tarefa 7.1** Realizar as atividades propostas na Ficha 14.

## FICHA 14 – Teste final

(coloque o código de seu crachá) **Aluno** \_\_\_\_\_

1. Assinale todas as alternativas com as quais você concorda.

Construir um Modelo Matemático associado a um experimento aleatório

a) é elaborar uma ou mais equações matemáticas que possibilitem o estudo de uma característica que se queira observar.

- b)** serve para fazer previsões a respeito de valores futuros.
- c)** proporciona uma aproximação aos valores observados na realização de uma experiência.
- d)** consiste em determinar equações matemáticas que possibilitem a determinação de valores iguais aos obtidos experimentalmente.
- e)** exige, muitas vezes, que algumas hipóteses sejam admitidas, a fim de se poder determiná-lo.
- f)** é obter uma representação abstrata de algum aspecto da realidade observada.

**2.** Assinale todas as alternativas com as quais você concorda.

Para definir completamente uma distribuição de Poisson, é suficiente conhecer:

- a)** a moda; **b)** a média; **c)** a mediana; **d)** a variância; **e)** o desvio padrão

**3.** Se uma variável aleatória  $W_t$  tem distribuição de Poisson com parâmetro 16, complete as afirmações abaixo:

- a)**  $W_t$  pode assumir os valores: \_\_\_\_\_
- b)** O valor esperado (média) de  $W_t$  é \_\_\_\_\_
- c)** A variância de  $W_t$  é \_\_\_\_\_
- d)** O desvio padrão de  $W_t$  é \_\_\_\_\_
- e)** O valor de  $W_t$  com probabilidade máxima é próximo de \_\_\_\_\_
- f)** O intervalo que contém os valores de  $W_t$  com probabilidades significativas, isto é, não desprezíveis, é aproximadamente: \_\_\_\_\_
- g)** Os valores de  $W_t$ , maiores que a média, conforme aumentam, têm suas probabilidades cada vez \_\_\_\_\_

**4.** Sendo  $W_2 \sim P(8,2)$ , complete:

- a)**  $W_1 \sim P( \quad )$ ; **b)**  $W_4 \sim P( \quad )$ ; **c)**  $E(W_4) = \quad$ ; **d)**  $\text{Var}(W_4) = \quad$ ; **e)**  $P(W_4 = 3) = \quad$
- f)** moda de  $W_4$  é um valor próximo de \_\_\_\_\_

**5.** Complete: Na representação por meio de um gráfico de colunas de uma distribuição de probabilidades, os valores da variável aleatória são situados no

eixo \_\_\_\_\_ e as respectivas probabilidades no eixo \_\_\_\_\_ .

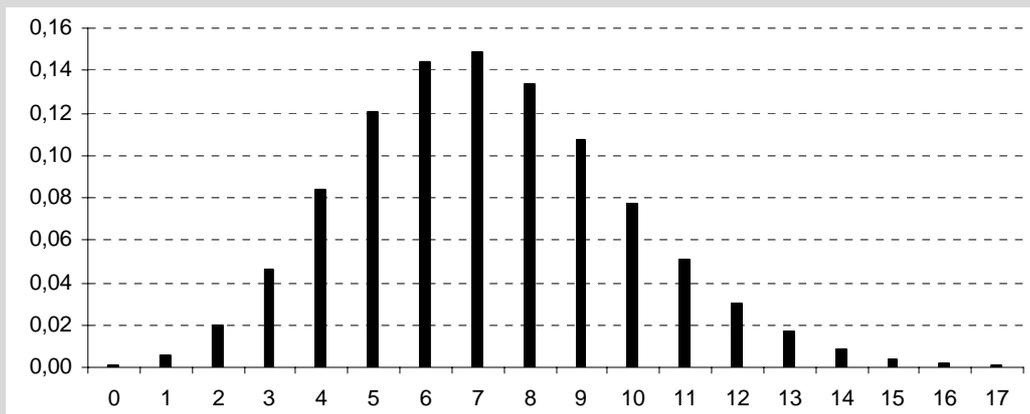
**6.** Assinale as situações que podem ser estudadas, usando o Modelo de Poisson:

- a)** peso dos alunos de uma escola em um determinado período letivo.
- b)** número de guarda-chuvas que uma loja vende por dia.
- c)** volume de água em piscinas de tamanho olímpico.
- d)** número de defeitos em rolos de cinco metros de fita de aço produzidos por uma indústria.
- e)** número de vezes que ocorre a face três, em dez lances de um dado honesto.
- f)** tempo de espera na fila de um determinado banco.
- g)** número de acidentes "na rodovia da morte" em um fim de semana.
- h)** número de vezes que uma pessoa realiza o teste prático, a fim de obter a habilitação de motorista amador.

**7.** Na fabricação de peças de determinado tecido, aparecem defeitos, ao acaso, na média de dois defeitos a cada  $20\text{m}^2$ . Supondo uma distribuição de Poisson para os defeitos e selecionando, aleatoriamente, recortes de tecido da produção, pede-se:

- a)** o número médio de defeitos em  $50\text{m}^2$ ;
- b)** a probabilidade de haver exatamente quatro defeitos, em  $50\text{m}^2$ ;
- c)** a probabilidade de haver pelo menos dois defeitos em  $10\text{m}^2$ ;
- d)** o número mais provável de defeitos em  $10\text{m}^2$ ;
- e)** aproximadamente, o número máximo e o número mínimo de defeitos em  $10\text{m}^2$ ;
- f)** a probabilidade de haver mais de quinze defeitos em  $10\text{m}^2$ ;

**8.** Estudando o número de erros nas páginas de determinado jornal concluiu-se que se pode considerar que a variável aleatória  $W_{10}$ , número de erros em dez páginas do jornal, escolhidas ao acaso, tem distribuição de Poisson, representada no gráfico a seguir:



Complete:

a) no eixo das abcissas (eixo dos x) são representados \_\_\_\_\_

b) no eixo das ordenadas (eixo dos y) são representadas \_\_\_\_\_

c) o número médio de erros em dez páginas é aproximadamente \_\_\_\_\_

d)  $W_{10} \sim P(\text{_____})$ .

9. O departamento de recursos humanos de uma empresa entrevista, em média, 3,4 candidatos a emprego por hora. Admitindo que o número de entrevistas segue uma distribuição de Poisson, pede-se:

a) a probabilidade de mais de dois candidatos serem entrevistados em meia hora;

b) número médio de entrevistas em 45 minutos.

10. Em um curso universitário sabe-se que apenas 2% dos alunos são do sexo feminino. Escolhendo-se, ao acaso, 30 estudantes, qual a probabilidade de se obter exatamente sete do sexo feminino? Use a distribuição de Poisson para obter um valor aproximado da probabilidade pedida.

11. Digite os valores que representam números de telefonemas recebidos por uma central telefônica a cada minuto na planilha, e use o teste qui-quadrado, com um nível de 5%, para avaliar a aderência dos valores observados ao Modelo de

Poisson; escreva sua conclusão. Lembrete:  $\chi^2 = \sum_i \frac{(F_{oi} - F_{ei})^2}{F_{ei}}$ .

Número de telefonemas	0	1	2	3	4
Freqüência	25	37	21	12	5

**Técnica didática:** Fazer a entrega da Ficha 14 individualmente e reafirmar a importância, para os objetivos desta pesquisa, que nenhum item fique sem resposta.

**Bloco tecnológico/teórico e análise a priori:**

A justificativa por não permitir que o aluno consulte colegas ou a professora e solicitar que ele responda todos os itens é porque se pretende avaliar a eficiência do método de ensino desenvolvido e o significado pessoal que ele foi capaz de adquirir, quer seja aprendizagem ou erro de aprendizagem.

Esta tarefa tem o objetivo específico de levantar os elementos de significado pessoal declarado pelos alunos ao final do processo de modelagem. Em comparando esses elementos e aqueles de significado institucional pretendidos, poder-se-á fazer um tipo de avaliação do presente trabalho.

Na seqüência, são apresentadas as respostas, as expectativas e os objetivos a cada item da Ficha 14.

1. Vários alunos devem selecionar os itens (a), (c) e (e), por identificar alguns termos que fizeram parte do estudo, como: equações matemáticas, aproximação aos valores, hipóteses admitidas; outros, pelo mesmo motivo podem assinalar o item (d) e, nesse caso, tem-se a evidência de um erro de aprendizagem. As alternativas a serem assinaladas são (a), (b), (c), (e) e (f). A questão tem como finalidade verificar quais desses elementos os alunos identificam na construção de um Modelo Matemático associado a um experimento.

2. Em várias oportunidades, foi salientada que a única informação necessária para o uso do Modelo de Poisson é a média; deseja-se verificar se essa característica peculiar é evidenciada pelos alunos.

3. Vários alunos não devem encontrar dificuldade para responder todos os itens. A escolha didática do valor do parâmetro igual a dezesseis é para facilitar o cálculo da raiz quadrada (desvio padrão) e, também, para que a determinação do intervalo não dê valor negativo, dificuldade que não se deseja avaliar nesse momento. Se  $W_t$  tem distribuição de Poisson com parâmetro dezesseis, pode assumir os valores 0, 1, 2, 3, ... ; o valor esperado e a variância coincidem e são iguais a dezesseis; o desvio padrão, conseqüentemente é quatro; a variável tem

probabilidade máxima próxima ao valor 16; o intervalo com valores da variável com probabilidade não desprezível de ocorrerem é  $[16 - 3.(4) ; 16 + 3.(4)]$ , ou seja,  $[4 ; 28]$ ; finalmente, os valores da variável tendem a diminuir ao se distanciarem da média. Com essas respostas, várias propriedades do Modelo de Poisson, aquelas relacionadas ao que foi exposto, poderão ser identificadas como fazendo parte do conhecimento dos alunos, ou não.

4. A escolha de um valor não inteiro para o parâmetro do modelo tem o objetivo de avaliar, se os alunos fazem a mudança do parâmetro corretamente. A passagem inicial por  $W_1$  visa que o aluno calcule primeiro o valor de  $\lambda$  para depois obter o de  $\lambda.t$ . Se  $W_2 \sim P(8,2)$ , então,  $\lambda$  vale 4,1. Assim, para  $t = 1$ ,  $\lambda.t = 4,1$  e  $W_1 \sim P(4,1)$ ; para  $t = 4$ ,  $\lambda.t = 16,4$  e  $W_4 \sim P(16,4)$ ,  $E(W_4) = \text{Var}(W_4) = 16,4$ ; assim, a probabilidade pedida será:

$$P(W_4 = 3) = e^{-16,4} \frac{16,4^3}{3!} = 0,000000075.(735,1573333) = 0,000055456.$$

5. A representação do gráfico de colunas que foi usada durante os encontros, deve situar os valores da variável no eixo das abscissas e as respectivas probabilidades no eixo das ordenadas. Embora seja um aspecto relativamente simples, o piloto evidenciou que os alunos tinham o costume de não prestar atenção, ao que estão representando nos eixos e acabavam trocando ao colocar os títulos nos eixos. Pretende-se verificar se esse erro que pode ocorrer durante o desenvolvimento desse estudo, é consciente ou apenas falta de atenção.

6. Apesar das dificuldades que essa questão possa sugerir, salientadas por Henry (1997), busca-se averiguar se os alunos identificam a variável aleatória com distribuição de Poisson como sendo discreta e referindo-se a um intervalo quer seja de tempo, comprimento, volume, área, etc. Como esse tipo de problema já fez parte de um dos questionários no estudo, não se espera dificuldade na identificação correta das situações. As situações a serem assinaladas são: (b), (d) e (g).

7. Nessa questão, as escolhas didáticas visam a avaliar um elemento de significado por vez e em ordem crescente de dificuldade. Assim, a informação da média de dois defeitos a cada  $20m^2$  e o pedido para  $50m^2$  facilita o cálculo para

1m<sup>2</sup> e a determinação a seguir para os 50m<sup>2</sup>, acarretando como resposta um número inteiro. Pedir a probabilidade de exatamente quatro pretende verificar se a fórmula é lembrada e utilizada adequadamente; só depois é pedida a probabilidade de haver pelo menos dois defeitos, mas os 10m<sup>2</sup> são mantidos, a fim de que se possa avaliar a interpretação do termo pelo menos dois. Os itens subsequentes mantêm os 10m<sup>2</sup> a fim de se avaliar especificamente o número mais provável, o mínimo e o máximo, para logo em seguida, tendo este último, inferir a probabilidade de haver mais de 15 defeitos. Como o valor esperado é uma função linear, a média de dois defeitos a cada 20m<sup>2</sup> equivale a 0,1 defeito a cada metro quadrado ( $\lambda = 0,1$ ). Assim em 50m<sup>2</sup>, espera-se  $\lambda.t = 0,1.(50) = 5$  defeitos. A probabilidade de haver quatro defeitos em 50m<sup>2</sup> será então:

$P(W_{50} = 4) = e^{-5} \frac{5^4}{4!} = 0,006738.(26,041667) = 0,175467$ . Em 10m<sup>2</sup>, o valor esperado é  $\lambda.t = 0,1.(10) = 1$  e a probabilidade pedida será:

$$P(W_{10} \geq 2) = 1 - P(W_{10} < 2) = 1 - P(W_{10}=0) - P(W_{10}=1) = 1 - e^{-1} \left( \frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} \right) =$$

$= 1 - 2e^{-1} = 1 - 2.(0,367879) = 0,264241$ . O mais provável de ocorrer é um defeito, sendo zero o mínimo ( $1 - 3.(1) = -2$ ) e 4 o máximo de defeitos ( $1 + 3.(1) = 4$ ); conseqüentemente, a probabilidade de haver mais de quinze defeitos em 10m<sup>2</sup> é desprezível, podendo-se aproximar para zero.

**8.** A questão pretende investigar se o gráfico facilita a identificação dos elementos representados nos eixos e pode ser comparada com a resposta do quinto item. Além disso, pode-se verificar se essa representação favorece a determinação da média e, conseqüentemente, do parâmetro do modelo. No eixo das abscissas, são representados os valores da variável e no eixo das ordenadas os valores das probabilidades. O número médio de erros em dez páginas é, aproximadamente, sete e  $W_{10} \sim P(7)$ .

**9.** A opção de fornecer o número médio em uma hora tem o objetivo de tornar imediata a determinação de  $\lambda$ . O item (a) pede a probabilidade em uma hora, a fim de verificar se o aluno percebe a necessidade de calcular a média. A mudança para 45 minutos, em (b), pretende averiguar se as mudanças de unidade e

variável são percebidas e efetuadas corretamente.

A informação de 3,4 candidatos por hora fornece  $\lambda = 3,4$  e sendo  $t = 1/2$  tem-se  $\lambda t = 3,4.(1/2) = 1,7$ . Assim,  $W_{1/2} \sim P(1,7)$  e a probabilidade pedida será:

$$P(W_{1/2} > 2) = 1 - P(W_{1/2} \leq 2) = 1 - P(W_{1/2} = 0) - P(W_{1/2} = 1) - P(W_{1/2} = 2) =$$

$$= 1 - e^{-1,7} \left( \frac{1,7^0}{0!} + \frac{1,7^1}{1!} + \frac{1,7^2}{2!} \right) = 1 - e^{-1,7} (4,145) =$$

$$= 1 - 0,182684.(4,145) = 0,242777.$$

Como 45 minutos corresponde a  $t = 3/4$  e, portanto,  $\lambda.t = 3,4.(3/4) = 2,55$ ; assim o número médio é 2,55 entrevistas em 45 minutos.

**10.** A questão sobre a aproximação Poisson tem a intenção de verificar se o aluno é capaz de resolver os exercícios desse tipo que aparecem nos livros didáticos. Não se pretende avaliar se ele é capaz de decidir pela aproximação ou não dos dois modelos, pois este aspecto não foi visado neste estudo. As escolhas das variáveis, como o cálculo da probabilidade para um único valor e o número de estudantes igual a trinta têm a intenção de que os cálculos possam ser efetuados com a calculadora. A escolha de um número da ordem de  $3 \times 10^{-6}$  tem o propósito de que o aluno observe o valor do parâmetro do modelo, questione se a resposta está correta, tendo em vista o valor encontrado, e perceba que ela pode ser desprezível. Sendo a variável  $Y$ : número de estudantes do sexo feminino dentre os 30 que foram selecionados aleatoriamente, tem-se que  $Y \sim B(30 ; 0,02)$ . Para se obter uma resposta aproximada, usando o Modelo de Poisson, deve-se considerar  $W_t \sim P(\lambda t)$ , onde  $\lambda.t = n.p = 30.(0,02) = 0,6$ . Assim, a probabilidade pedida será:

$$P(W_t = 7) = e^{-0,6} \frac{0,6^7}{7!} = 0,548812.(0,000006) = 0,000003048.$$

**11.** Nessa tarefa, deseja-se verificar se os alunos obtêm sucesso ao usar a função Poisson, calcular as freqüências esperadas, inserir a fórmula do qui-quadrado na planilha, determinar o qui-quadrado crítico e sintetizar a conclusão. Por meio da observação, as dificuldades e suas origens, caso existam, podem ser identificadas. A escolha de fornecer as freqüências em lugar dos valores originais

para serem organizados tem a intenção de diminuir o tempo para a aplicação do teste. A resposta obtida na planilha é apresentada na Figura 30. Optou-se pela apresentação na própria Ficha da fórmula para se determinar o qui-quadrado calculado, caso esta não seja lembrada por algum sujeito, pois não se objetiva, neste estudo, sua memorização.

<b>Xi</b>	<b>Foi</b>	<b>Xi*Foi</b>	<b>P(1,35)</b>	<b>Fei</b>	<b>(Foi-Fei)^2/Fei</b>
0	25	0	0,25924	25,92402606	0,032935631
1	37	37	0,349974	34,99743519	0,114587421
2	21	42	0,236233	23,62326875	0,291303418
3	12	36	0,106305	10,63047094	0,176437136
4	5	20	0,035878	3,587783942	0,55587355
	100	135		qui-quad. Obs.	1,171137157
média	observada =	1,35	nível 5%	graus de lib.	5-1-1=3
				qui-quad. Crít.	7,814724703

Conclusão: Como o qui-quadrado calculado é inferior ao crítico pode-se concluir que, ao nível de 5%, não há evidências para se rejeitar a hipótese de que os valores podem ser aproximados pelo Modelo de Poisson.

**Figura 30. Teste qui-quadrado obtido na planilha**

### 3.2.7.2 ELEMENTOS DE SIGNIFICADO INSTITUCIONAL AVALIADOS

No que se segue, os principais elementos de significado institucional avaliado em cada questão do teste final são apresentados.

1. Características de um Modelo Matemático associado a um experimento aleatório.
2. Para usar o Modelo de Poisson, basta conhecer o número médio de ocorrências.
3. Valor da variável com probabilidade máxima; intervalo de números reais que contêm valores da variável com probabilidades não desprezíveis; decrescimento das probabilidades conforme os valores da variável aleatória se distanciam daquele de probabilidade máxima; relação entre parâmetro, média e dispersão.
4. Relação entre parâmetro, média e dispersão; relação entre parâmetro do modelo e intervalo de observação; valor da variável com probabilidade máxima.
5. Representação de freqüências e probabilidades em gráfico de colunas.

6. Identificação de situações que podem ser estudadas usando o Modelo de Poisson.
7. Relação entre parâmetro do modelo e intervalo de observação; valor da variável com probabilidade máxima; intervalo de números reais que contém valores da variável com probabilidades não desprezíveis; interpretação do termo pelo menos dois; resolução de problemas semelhantes àqueles apresentados nos livros didáticos, com auxílio de calculadora, ou aplicativo.
8. Representação de freqüências e probabilidades em gráfico de colunas e determinação, a partir deste, do parâmetro do modelo; coincidência entre os valores da média e parâmetro do modelo.
9. Resolução de problemas semelhantes àqueles apresentados nos livros didáticos, com auxílio de calculadora ou aplicativo; relação entre parâmetro do modelo e intervalo de observação, determinação da média.
10. Resolução de problemas semelhantes àqueles apresentados nos livros didáticos, com auxílio de calculadora ou aplicativo. Aproximação entre os Modelos Binomial e Poisson.
11. Cálculo da freqüência esperada sob a hipótese de que o modelo é de Poisson; comparação das freqüências esperadas e observadas por meio de tabelas, gráficos e uso do teste de aderência qui-quadrado com conclusão e análise.

No capítulo que se segue, será descrita a fase experimental do presente projeto, isto é, os comentários sobre a aplicação da seqüência de ensino elaborada com as devidas alterações que se fizerem necessárias, se existirem.

## CAPÍTULO 4

# EXPERIMENTAÇÃO

Neste capítulo um relato da aplicação do projeto de ensino é apresentado. No início, tem-se a caracterização dos sujeitos que participaram da pesquisa, de acordo com as informações obtidas na Ficha de Identificação e, a seguir, são descritas as sessões que foram desenvolvidas com os alunos, de modo que as alterações, em relação ao que estava previsto, como também aquelas que a análise a posteriori após cada encontro tenha sugerido, possam ser exibidas e justificadas. A própria pesquisadora desempenhou o papel de professora no desenvolvimento das atividades, sendo estas acompanhadas por observadores, mas, não gravadas ou filmadas, por imposição dos alunos participantes.

Ao final de cada encontro, as anotações dos observadores e o material de posse dos alunos foram recolhidos, a fim de que pudessem ser analisados pela pesquisadora, antes da sessão seguinte, além de evitar que algum aluno esquecesse de trazê-lo ou o alterasse. Com tal procedimento, ficou descartada a possibilidade dos participantes fazerem uma revisão ou complementação fora dos horários previstos para desenvolvimento do projeto.

Todas as atividades, quando encerradas, tiveram suas respostas expostas, no coletivo, pelos próprios alunos e, depois de discutidas, as conclusões foram institucionalizadas pela professora, para que pudessem fazer parte do conhecimento a ser retido.

## 4.1 OS SUJEITOS DA PESQUISA

Participaram dessa fase do estudo, dezesseis alunos do segundo ano de graduação da mesma Instituição de Ensino Superior onde foi realizado o experimento piloto, sendo oito do curso de Engenharia Elétrica (período noturno e seis anos de duração) e oito de Ciência da Computação (período matutino e duração de quatro anos). A opção por oito duplas deveu-se ao número de contadores Geiger-Mueller (quatro) disponíveis no Laboratório de Física Nuclear da Instituição, o que possibilitou que se tivesse duas duplas por equipamento.

O objetivo, ao adotar metade do número de alunos de cada curso, foi montar as duplas de trabalho com um aluno de cada, pretendendo-se, com isso, favorecer a troca de conhecimentos das duas formações e, conseqüentemente, um melhor aproveitamento, tanto na manipulação do aplicativo como no experimento a ser realizado, fundamentando-se nos resultados de Carvalho e César (2001), citados anteriormente. Durante o período letivo em questão, segundo semestre de 2004, todos os participantes cursavam a disciplina Probabilidade e Estatística, mas apenas os de Engenharia Elétrica tinham em seu currículo Física Moderna que inclui um estudo sobre radiação.

Os motivos de não se ter realizado o projeto com todos os alunos que cursavam a disciplina de Probabilidade e Estatística, em período regular de aulas, foram: cada classe tem número de alunos superior a quarenta que torna inviável a realização da experiência no referido Laboratório de Física Nuclear, as turmas incluem dependentes que já estudaram o Modelo de Poisson e a impossibilidade de montar duplas com alunos dos dois cursos, já que um é matutino e o outro noturno.

Em Probabilidade e Estatística, os alunos estudaram, em suas turmas, durante o primeiro semestre, Estatística Descritiva e os fundamentos básicos da Teoria das Probabilidades e, no segundo semestre, antes da fase experimental deste projeto, variáveis aleatórias discretas, incluindo o cálculo da média, variância e desvio padrão, seguido do Modelo Binomial. Este último foi desenvolvido de acordo com o processo de modelagem, utilizado nesta pesquisa,

e exploração da planilha. Os participantes foram dispensados do curso regular, no que se refere às aulas relativas ao estudo do Modelo de Poisson.

Com base nas informações obtidas na Ficha de Identificação, ao perfil dos sujeitos participantes pode-se acrescentar que a média ( $\mu$ ) das idades é 21,1 anos, com desvio padrão ( $\sigma$ ) igual a 2,4 anos e a idade mediana ( $md$ ) é igual a 20 anos. Em relação a essas variáveis, as diferenças entre os alunos dos dois grupos: Engenharia Elétrica (E) e Ciência da Computação (C) não são expressivas, já que:  $md_E = 20$  anos,  $\mu_E = 20,9$  anos,  $\sigma_E = 2,5$  anos,  $md_C = 20,5$  anos,  $\mu_C = 21,3$  anos e  $\sigma_C = 2,2$  anos.

A distribuição dos alunos quanto ao tipo de Ensino Básico, privado ou público, é apresentada nos valores da Tabela 11 e nela pode-se constatar que o número de alunos do curso de Ciência da Computação que frequentou escola particular é superior ao de Engenharia Elétrica.

**Tabela 11. Distribuição de Frequência quanto ao Ensino Básico**

Tipo de ensino	Engenharia Elétrica		Ciência da Computação	
	Fundamental	Médio	Fundamental	Médio
<b>Privado</b>	2	4	5	6
<b>Público</b>	6	4	3	2

Fonte: Ficha de Identificação apresentada no apêndice D

Metade do número de alunos do curso de Engenharia Elétrica fez cursinho preparatório para o vestibular com duração de um ano e, dentre os de Ciência da Computação, seis o fizeram, sendo que destes, um com duração de quatro meses e outro durante um ano e meio. No que se refere a manterem uma atividade regular paralela ao curso de graduação, no momento do desenvolvimento do presente estudo, observa-se apenas dois alunos de cada grupo trabalhando em: estágio no Laboratório de Informática da própria instituição onde estuda, desenvolvimento de aplicativos, manutenção de equipamentos médicos e administração acadêmica na própria instituição. Metade do número de alunos participantes já ficou em dependência em uma ou mais disciplinas em seus respectivos cursos e quatro de Engenharia e dois de Computação são favorecidos por algum tipo de bolsa, que auxilia a manutenção de seus estudos.

## 4.2 O PRIMEIRO ENCONTRO

A entrega antecipada da ficha de identificação e do texto sobre radioatividade não ocorreu porque só foi confirmada a participação dos dezesseis alunos pretendidos às vésperas do início do desenvolvimento do projeto, que não poderia ser adiado, tendo em vista o término do estudo do Modelo Binomial no curso de Probabilidade e Estatística e, ainda, as atividades relacionadas ao curso de graduação, no qual os alunos estão matriculados.

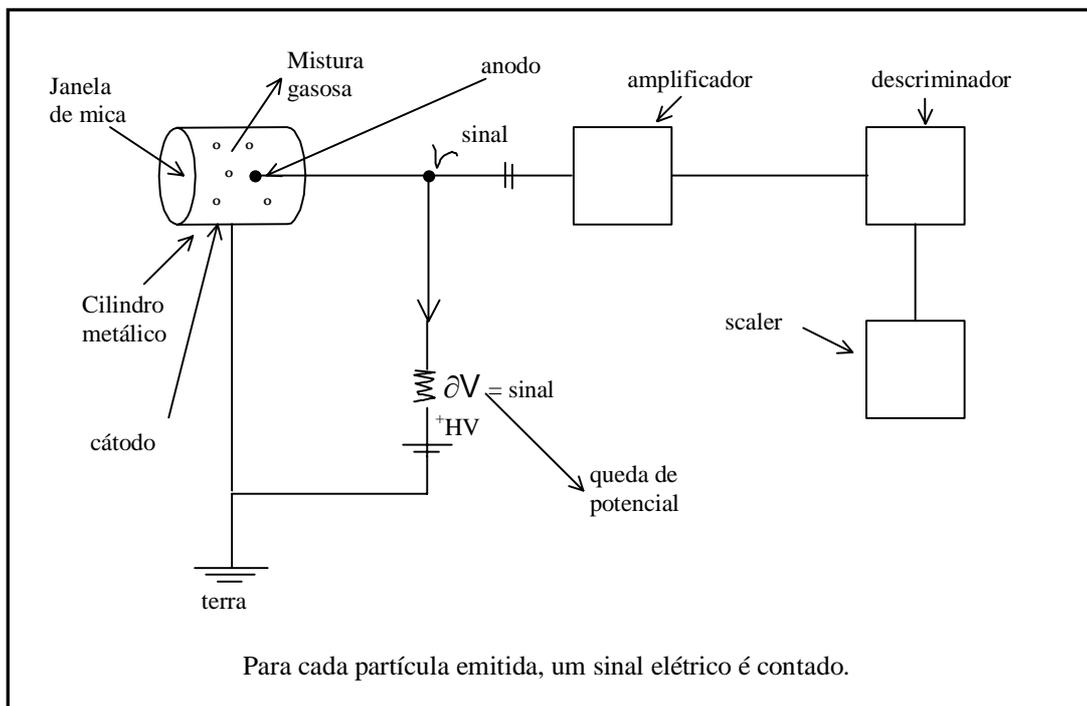
Assim, no início do primeiro encontro, os alunos foram levados a uma sala de aula usual, onde leram e assinaram o termo de compromisso e autorização relacionado ao presente projeto (Apêndice B), responderam a Ficha de Identificação (Apêndice D) e lhes foi entregue uma carta (Apêndice C), comunicando a participação neste estudo, para que pudessem justificar a ausência em seus empregos, nos dias e períodos previstos; mesmo não tendo a informação da necessidade desta, todos receberam a referida carta.

Na seqüência, a professora sorteou um aluno de cada curso (nomes em tiras de papel idênticas e dobradas em duas caixas, uma para Engenharia e outra para Computação, preparadas antecipadamente) a fim de compor as duplas e, a seguir, os crachás foram entregues de modo que o número identificasse a dupla e a letra indicasse o curso de origem do sujeito, sendo A para Engenharia e B para Computação. Dois observadores que, também, participaram do encontro, receberam crachás com os códigos: obs 1 e obs 2.

As fichas de identificação e os termos de compromisso foram recolhidos e os alunos convidados a se dirigirem ao Laboratório de Física Nuclear, onde a professora especialista os aguardava com os equipamentos devidamente organizados e lhes foi entregue o texto sobre material radioativo (Apêndice E). Depois de um período para a sua leitura, o texto foi colocado em discussão e as questões que se referiram ao funcionamento interno do contador Geiger-Mueller foram esclarecidas pela professora de Física, valendo-se de uma representação esquemática construída na lousa (Figura 31).

As demais questões referiram-se ao amplificador, ao discriminador, à

interferência da quantidade de massa no número de emissões e às partículas emitidas, espontaneamente, na sala de aula em razão das paredes de cimento. Após todas serem esclarecidas pela professora de Física, esta explicou, coletivamente, a conduta na manipulação do aparelho para a realização do experimento e apresentou os elementos radioativos disponíveis, todos especialmente embalados com a aparência de um botão e cerca de dois centímetros de diâmetro.



**Figura 31. Esquema de funcionamento do Contador Geiger-Mueller**

Na seqüência, a professora informou que as pretensões com a experimentação eram semelhantes àquelas que eles haviam vivenciado com os lançamentos da moeda visando à construção do Modelo Binomial, valendo-se inclusive do teste qui-quadrado. Em seguida, todos, professoras e alunos, participaram da elaboração dos protocolos experimentais. Nessa tarefa, ficaram definidos o número de observações em cada experiência, para que o teste qui-quadrado pudesse ser usado e a necessidade de mudança do elemento radioativo e do intervalo entre as observações, fatores considerados relevantes, tendo em vista a variável em estudo. As professoras definiram: a voltagem do aparelho (340V), os materiais radioativos que seriam utilizados, a gaveta do contador, onde eles deveriam ser colocados (a mais distante) e os intervalos entre as

observações, para que o tempo didático fosse respeitado e os objetivos atingidos.

As duplas foram orientadas a se dirigirem à frente dos contadores, ficando duas em cada equipamento; assim, as duplas um e dois observaram o contador um; as duplas três e quatro, o contador dois; as duplas cinco e seis, o três e as duplas sete e oito, o contador quatro. Nesse momento os observadores ficaram ao lado dos contadores um e quatro. A professora de Física orientou cada grupo a colocar o material na gaveta do contador, a regular a tensão do aparelho, que precisa ser pausada para não o danificar, a calibrar e conferir o tempo desejado e a disparar o contador para iniciar a contagem, devendo este ser acionado, após a obtenção de cada valor.

Diferente do que se havia planejado, o mesmo material radioativo foi usado nas três primeiras experiências, sendo trocado no quarto experimento, por sugestão da professora de Física; como os tempos previstos foram mantidos, isto é, dois materiais com o mesmo período de tempo entre as observações e um deles em diferentes intervalos, os objetivos visados não foram alterados. Assim, o cobalto 60 ( $^{60}\text{Co}$ ) foi utilizado nos três primeiros experimentos, com tempos de cinco, três e um segundo, respectivamente, e no último, o material observado foi o estrôncio 90 ( $^{90}\text{Sr}$ ), com intervalos de cinco segundos entre as contagens. Em todos os casos foram feitas 100 medições e anotadas na Ficha 1, que já dispunha de 100 espaços, a fim de facilitar a contagem.

Durante a experimentação, o contador dois passou a registrar apenas zero emissão em várias contagens, na realização do terceiro experimento, fato este que chamou a atenção dos alunos, que solicitaram a presença da professora de Física; após uma rápida investigação, verificou-se que o cabo do equipamento havia desconectado da tomada e o problema foi resolvido imediatamente. Os zeros obtidos em seqüência foram abandonados e as observações restantes foram colhidas.

Com a mudança na programação prevista para o encontro, a avaliação (Ficha 2) ficou adiada para o início do próximo. Alguns alunos queriam permanecer com a ficha que continha os valores coletados para serem digitados na planilha, pois sabiam de sua necessidade por experiência anterior em relação ao estudo do Modelo Binomial, pedido este que foi negado pela professora, pois

esta precisava antecipar as análises pretendidas no desenvolvimento do projeto com as observações coletadas.

Alguns alunos, 4A, 8B, 3B e 3A, dos dois cursos, como se pode constatar pelas letras dos códigos de identificação, permaneceram no laboratório a fim de obter mais informações relacionadas ao conteúdo abordado no encontro, em especial, sobre acidentes recentes com radiação, como o de Angra dos Reis, e sobre a identificação de partículas emitidas em ambientes, como a sala de aula. A respeito desse último aspecto, a professora de Física apresentou um aparelho, com a forma e tamanho semelhante a um telefone sem fio, que quando ligado identifica irradiações por meio de um sinal intermitente, e acelera ou desacelera conforme o maior ou menor número de partículas emitidas. Os alunos testaram alguns materiais disponíveis, como: papel, madeira, etc., a fim de verificar a interferência destes, quando colocados entre o material radioativo e o aparelho de identificação. Se não fossem os compromissos da professora de Física, os questionamentos e curiosidades iriam se prolongar por mais tempo.

A título de ilustração e informação, os valores obtidos no primeiro contador, durante a realização dos quatro experimentos, são apresentados nas Figuras 32, 33, 34 e 35.

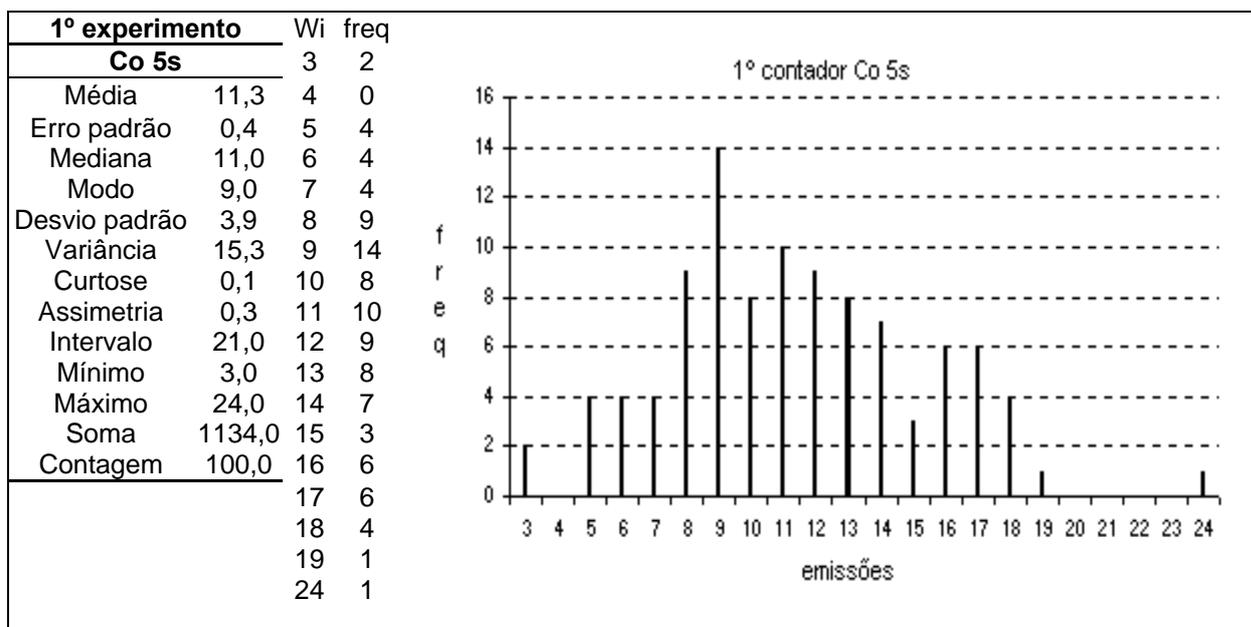


Figura 32. Resultados do primeiro experimento do primeiro contador

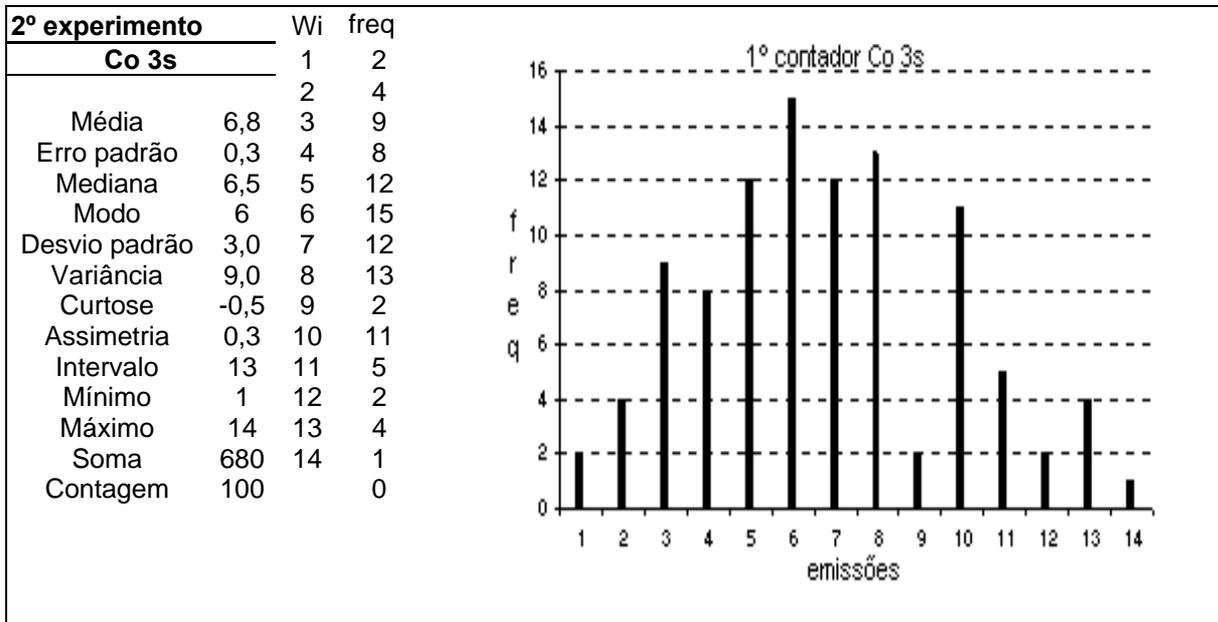


Figura 33. Resultados do segundo experimento do primeiro contador

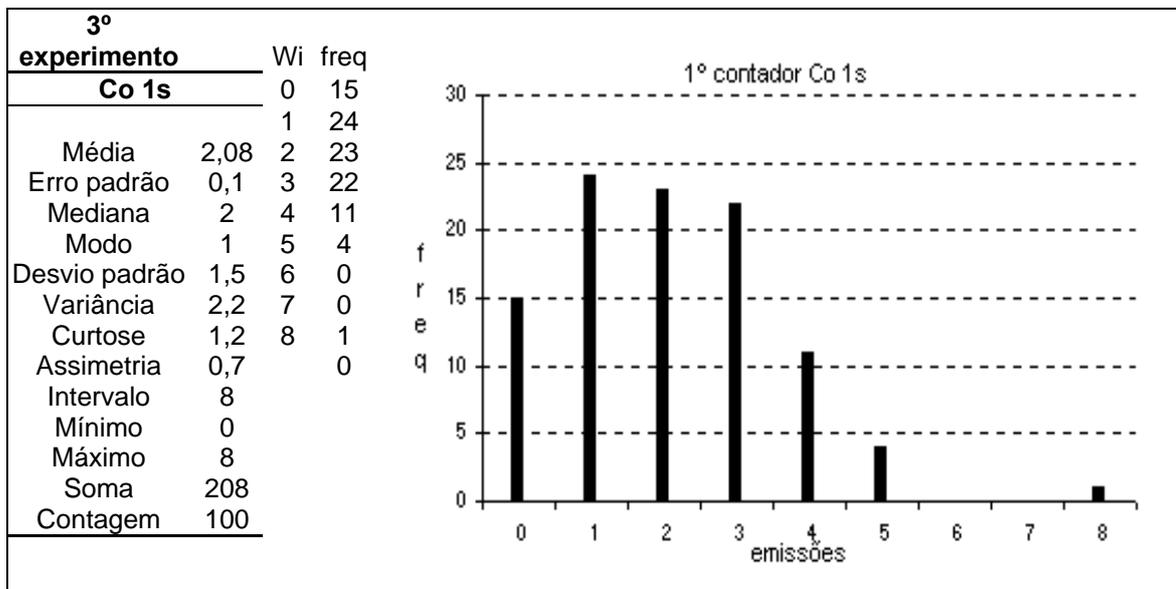
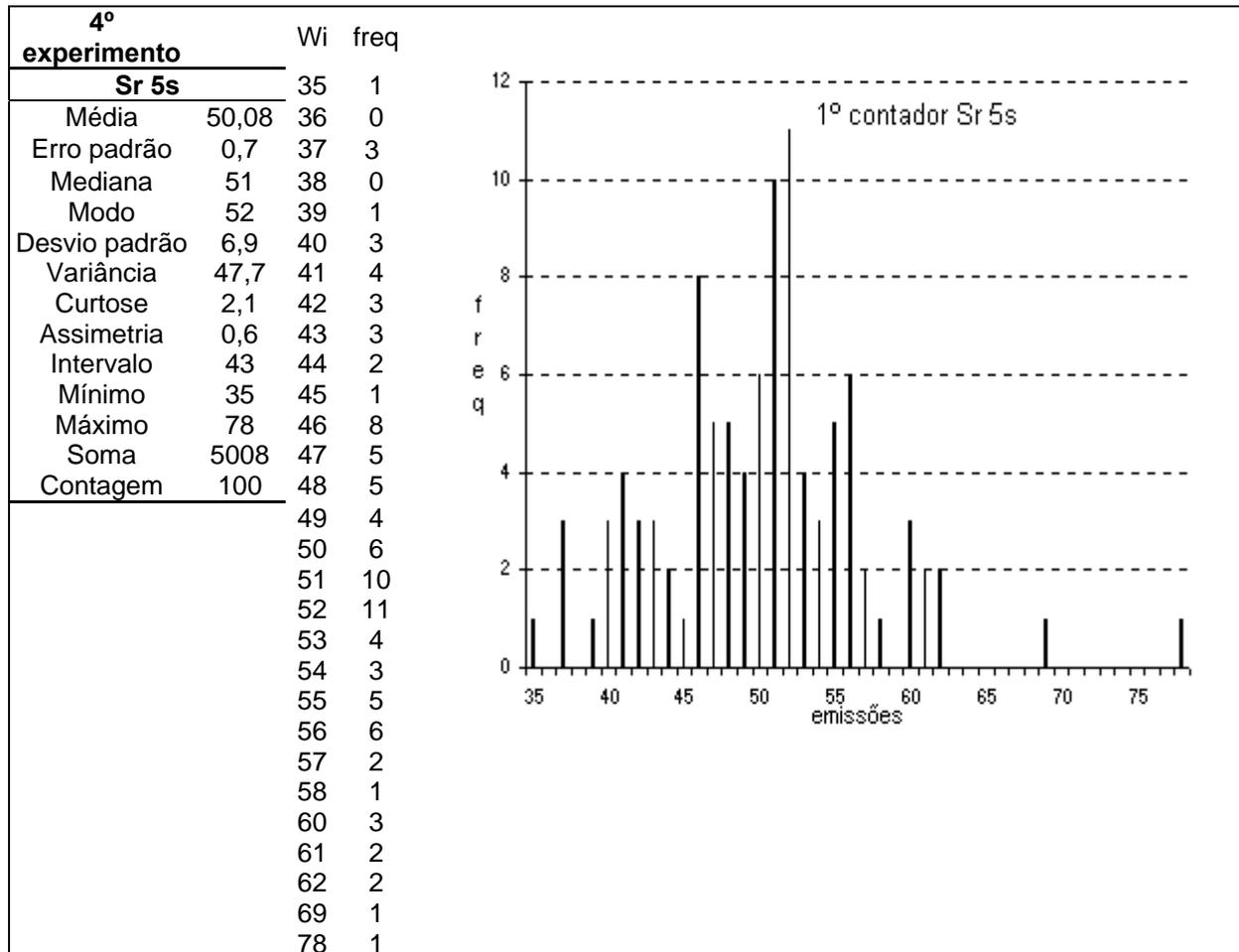


Figura 34. Resultados do terceiro experimento do primeiro contador



**Figura 35. Resultados do quarto experimento do primeiro contador**

A análise preliminar dos resultados obtidos nos quatro experimentos realizados (nos quatro contadores) foi decisiva para se optar a usar os valores obtidos no terceiro experimento na comparação entre observado e esperado segundo o Modelo de Poisson, como se poderá constatar na Ficha 9. Além dos valores de média e variância serem próximos, o caso poderia facilitar a visualização gráfica, em razão do menor número de valores possíveis da variável, confirmando as previsões, quando se fez a escolha dos intervalos entre as observações.

### 4.3 O SEGUNDO ENCONTRO

O ambiente, onde as atividades foram desenvolvidas durante esse encontro, foi o

Laboratório de Informática. No início, os crachás foram entregues aos participantes e observadores: a estes últimos, foram acrescentados mais três, para se obter o acompanhamento do trabalho de mais duplas.

Com a finalidade de completar a primeira etapa do estudo, foi entregue a Ficha 2, que corresponde à avaliação do primeiro encontro. Apesar de um aluno (8A) ter chegado atrasado dez minutos, ele também realizou, individualmente, a tarefa prevista na concepção da seqüência de ensino. Um aluno (2A) faltou ao encontro e seu par trabalhou individualmente nas atividades dessa sessão. Quando todos terminaram de responder o questionário, a professora coordenou a apresentação e discussão das respostas pelos alunos e socializou as conclusões, tendo o cuidado de inibir qualquer alteração nos registros que foram recolhidos logo a seguir.

Dando continuidade ao encontro e iniciando a segunda etapa de modelagem (HENRY, 1997), as duplas foram orientadas a se colocarem diante dos computadores a fim de realizarem a Tarefa 2.1, sendo entregue a Ficha 1, correspondente aos valores obtidos experimentalmente, e a Ficha 3 com a atividade a ser desenvolvida.

Na execução dessa tarefa, o trabalho apresentou mais dificuldades do que o esperado. Embora os alunos já tivessem usado o aplicativo no estudo da estatística descritiva, variável aleatória discreta e Modelo Binomial, durante o curso regular, muitas foram as dificuldades e, conseqüentemente, maior o tempo dispensado na execução da tarefa. Apesar das recomendações da professora, a dupla três não salvou o arquivo durante a execução e, ao final, por falha do programa (operação ilegal), perderam todas as informações; este fato foi acompanhado por um observador.

Por ignorar a necessidade de confirmar, antecipadamente, se a instalação do programa nas máquinas do laboratório tinha sido completa, a opção: estatística descritiva não estava disponível e, portanto, não pode ser utilizada.

A manipulação da função frequência, conforme esperado, foi a que trouxe maior dificuldade, no que se refere à finalização da janela, embora a professora tenha salientado a necessidade de apertar, simultaneamente, as teclas: *ctrl+shift+enter*. Muitos alunos repetiram o processo, várias vezes, sem sucesso

até que um deles chamou a atenção que se deveria manter apertadas as teclas: *ctrl+shift*, em seguida, clicar a tecla *enter*, para só depois soltar as outras duas. Com essa observação, todas as duplas obtiveram as freqüências corretamente.

Na construção dos gráficos, a professora foi requisitada para orientar a manipulação do aplicativo. Como os alunos repetiram a tarefa para os quatro experimentos, as dificuldades descritas foram sanadas ao longo das atividades.

Ao final do período, os materiais foram recolhidos e a sessão foi encerrada; a avaliação da segunda etapa de modelagem, que estava prevista para esse encontro, ficou adiada para o início do próximo.

## 4.4 O TERCEIRO ENCONTRO

Antes do terceiro encontro, a professora acrescentou um quadro com a estatística descritiva a cada arquivo dos disquetes e imprimiu cópia dos mesmos. Como a dupla três fez a atividade (conforme anotação do observador) e perdeu as informações por falha técnica, a professora fez uma cópia do arquivo da dupla quatro, que observou o mesmo contador. As duplas: cinco, sete e oito não finalizaram a tarefa para o quarto experimento por falta de tempo; assim, a professora providenciou uma cópia do arquivo da dupla seis e complementou o arquivo das duplas sete e oito, antes de imprimir.

O ambiente foi a sala de aula usual; no início, todos os participantes, inclusive observadores, receberam seus crachás, cópias dos disquetes referentes à Tarefa 2.1 e a Ficha 4 referente à avaliação da segunda etapa de modelagem.

O sujeito 4A chegou uma hora atrasado, pois, havia sido assaltado, quando se dirigia para o encontro e, praticamente, não participou do estudo, tendo seu parceiro realizado a tarefa individualmente.

Dando continuidade ao encontro, a professora esclareceu que a seqüência da sessão seria feita no quadro-negro e referia-se a um estudo matemático relacionado aos experimentos realizados; acrescentou que todos deveriam

participar do estudo, acompanhando e colaborando com sugestões e questionamentos, e não precisariam fazer anotações, pois, uma cópia lhes seria entregue ao final. Durante esse período, os observadores registraram a participação dos alunos e da professora.

A distribuição de probabilidades da variável aleatória, número de partículas emitidas em um intervalo de duração  $t$ , foi determinada e representada por uma fórmula, definida como sendo de Poisson. Aspectos históricos sobre Siméon-Denis Poisson e seus trabalhos foram apresentados ao longo do estudo. Ao final da construção, uma cópia da Ficha 5 foi distribuída a cada participante e, a seguir, os alunos responderam a Ficha 6, correspondente à avaliação dessa etapa. Depois desta ser recolhida, o encontro foi encerrado.

## 4.5 O QUARTO ENCONTRO

A análise das respostas e comentários dos alunos expressos na avaliação do terceiro encontro (Ficha 6) revelou que alguns alunos tinham dúvidas quanto à construção matemática que havia sido feita; por esse motivo, a professora decidiu retomar parte do estudo no início das atividades, antes de dar continuidade ao que estava previsto. Assim sendo, os alunos foram orientados a se dirigirem, inicialmente, a uma sala de aula usual, onde os participantes receberam seus crachás, sendo refeita a dedução da probabilidade da variável aleatória assumir o valor três, com grande participação de alguns alunos que não tinham dúvidas a respeito. Complementando o trabalho, foi demonstrado que a soma das probabilidades é um e a Ficha 6 foi colocada em discussão. A seguir, as conclusões foram socializadas pela professora.

Nesse momento, o ambiente de estudo foi alterado e todos se dirigiram ao Laboratório de Informática, sendo distribuída a Ficha 7 (exploração do Modelo de Poisson) com os disquetes.

Durante o desenvolvimento das atividades, as dúvidas que se sucederam foram discutidas pelos colegas e socializadas pela professora.

No desenvolvimento do trabalho proposto, o tempo dispensado pelas duplas na execução das tarefas foi diferenciado. Ao final do período previsto para o encontro, a Ficha 7 foi recolhida, embora a maioria dos alunos não a tivessem finalizado.

## 4.6 O QUINTO ENCONTRO

O ambiente desse encontro foi o Laboratório de Informática; o aluno 8A chegou 25 minutos atrasado e os alunos 1B e 3A não compareceram: o primeiro por estar febril e o segundo por ter uma entrevista visando a um emprego; assim, seus parceiros trabalharam individualmente. Depois de entregues os crachás, os disquetes e a Ficha 7, os alunos deram continuidade à Tarefa 4.2, que foi finalizada em cerca de uma hora de trabalho.

Conforme as duplas iam terminando a atividade, a professora questionava-os sobre os resultados encontrados, as conjecturas que poderiam ser levantadas e as conclusões. Quando todos terminaram, as duplas foram convidadas a manifestarem suas respostas e opiniões; em seguida, a professora socializou as conclusões, muitas delas relacionadas às propriedades do Modelo de Poisson.

Dando continuidade à sessão, a professora explicou que a coincidência entre os valores da média, variância e parâmetro do modelo não era apenas uma conjectura, mas, uma propriedade do Modelo de Poisson. Na seqüência, a Ficha 8 foi distribuída a cada aluno para que lesse a dedução das fórmulas da média e da variância.

Um espaço de tempo, para que as dúvidas, em relação à leitura efetuada, pudessem ser levantadas, discutidas e sanadas foi aberto. Socializados todos os resultados, o encontro foi encerrado. A Tarefa 5.1 (comparação entre prático e teórico) ficou adiada para a próxima sessão.

## 4.7 O SEXTO ENCONTRO

O ambiente foi o Laboratório de Informática e logo após a entrega dos crachás a todos os participantes, a Ficha 3, com os respectivos conteúdos dos disquetes impressos, e a Ficha 9, com a atividade a ser desenvolvida, foram distribuídas. O sujeito 2A não compareceu a essa sessão e o seu parceiro trabalhou individualmente.

A análise da professora, em relação ao último encontro, sugeriu mudanças na Ficha 9, no sentido de dar orientações mais detalhadas para seu desenvolvimento; assim, a Ficha 9 (reformulada) entregue aos alunos foi a seguinte:

### FICHA 15 –(FICHA 9 reformulada) – Comparando prático e teórico

#### Comparando Prático e Teórico (código dos crachás) Dupla \_\_\_\_\_ e \_\_\_\_\_

Nesse encontro, pretende-se comparar os resultados observados no terceiro experimento que você realizou, no Laboratório de Física Nuclear, com o Modelo Teórico, ou seja, o Modelo de Poisson que foi construído.

1. No terceiro experimento, a variável aleatória  $W_1$  é definida como \_\_\_\_\_
2. Os valores que você organizou na Ficha 3 e que foram impressos, são os seguintes: (complete a tabela abaixo)

$W_1$

Freq. observada	_____	Total
-----------------	-------	-------

3. Para testar se esses valores seguem uma Distribuição de Poisson, é necessário calcular as freqüências esperadas sob a hipótese de que o Modelo é de Poisson. No Modelo de Poisson, o parâmetro  $\lambda t$  representa \_\_\_\_\_; sendo assim, o valor estimado para  $\lambda t$ , pelos resultados obtidos na experimentação, deverá ser  $\lambda t = \lambda . 1 = \lambda =$  \_\_\_\_\_ .

4. Na planilha, digite as colunas: (não esqueça de salvar no disquete!)

$W_1$	$F_{ob}$
0	
1	
...	...
$\Sigma = 100$	

5. Na próxima coluna, use a função Poisson e obtenha as respectivas probabilidades nesse Modelo. (formate para três casas decimais)

6. A fim de fazer a comparação pretendida, é preciso determinar as freqüências esperadas ( $F_{esp}$ ) respectivas às probabilidades sob o Modelo de Poisson; use a próxima coluna e determine essas freqüências. Você terá na planilha: (não esqueça de salvar!)

$W_1$	$F_{ob}$	Prob. Poisson	$F_{esp}$
0			
1			
...	...	...	...
$\Sigma = 100$			$\Sigma = 100$

7. Para que se possa usar o teste qui-quadrado, é preciso que os valores das freqüências esperadas ( $F_{esp}$ ) não sejam nulos e que no máximo 20% dos valores sejam menores que cinco. Observe os valores que você obteve para as freqüências esperadas e, se necessário, some algumas de modo que o valor seja não inferior a cinco. Lembre que essa mesma operação deverá ser efetuada com as freqüências observadas ( $F_{ob}$ ), para que seja possível a comparação usando o teste qui-quadrado. Na planilha, você terá: (não esqueça de salvar!)

$W_1$	$F_{ob}$	Prob. Poisson	$F_{esp}$	$F_{ei}$	$F_{oi}$
0					
1					
...	...	...	...	...	...
$\Sigma = 100$			$\Sigma = 100$	$\Sigma = 100$	$\Sigma = 100$

8. Faça o gráfico de colunas das freqüências esperadas e observadas que você obteve ( $F_{ei}$  X  $F_{oi}$ ).

Use a própria planilha para determinar o valor do qui-quadrado calculado:

$$\chi_{\text{calc}}^2 = \sum_i \frac{(F_{oi} - F_{ei})^2}{F_{ei}}. \text{ Você terá em sua planilha: (não esqueça de salvar!)}$$

$W_1$	$F_{ob}$	Prob. Poisson	$F_{esp}$	$F_{ei}$	$F_{oi}$	$((F_{oi}-F_{ei})^2)/F_{ei}$
0						
1						
...	...	...	...	...	...	...
	$\Sigma = 100$		$\Sigma = 100$	$\Sigma = 100$	$\Sigma = 100$	$\Sigma = \underline{\hspace{2cm}}$

**9.** Em sua planilha, use a função INV.QUI para determinar o valor do qui-quadrado crítico, com nível de 5%. Lembre-se que o número de graus de liberdade será:  $r - 1 - 1$ , porque o parâmetro do Modelo de Poisson foi estimado.

Complete: o valor do qui-quadrado crítico é: \_\_\_\_\_ (use três casas decimais)

**10.** Compare os valores do qui-quadrado crítico e qui-quadrado calculado e escreva sua conclusão.

Este encontro deu continuidade ao que estava previsto na quinta etapa de modelagem, ou seja, a comparação entre os valores obtidos experimentalmente e com o modelo teórico (Ficha 9), bem como a apresentação, discussão e conclusões, que a seguir foram sintetizados e institucionalizados pela professora.

Por solicitação de alguns alunos, foi retomada a discussão em relação ao intervalo de números reais que contém valores da variável com probabilidade não desprezível, quando este resulta em número negativo (cálculo da média menos três desvios padrão); novamente, a conclusão foi socializada.

Durante a execução da Ficha 9, embora tenha sido reformulada e os alunos já terem feito uso dos conceitos nela envolvidos, como o cálculo do número de graus de liberdade e as condições para uso do teste qui-quadrado (valores das freqüências esperadas), estes aspectos foram colocados em discussão para o grupo e, com o auxílio da professora, foram sintetizados e institucionalizados.

Quando todos finalizaram as atividades propostas na Ficha 9, as duplas foram orientadas a apresentarem suas respostas e conclusões. A professora coordenou essa explanação de modo que cada dupla pudesse comparar os resultados com a outra que tinha observado o mesmo contador e, dessa forma,

fazer um fechamento das soluções encontradas.

Antes da sessão, a professora resolvera a Tarefa 5.3 para os valores obtidos nos quatro contadores e observara que apenas para o caso do segundo contador Geiger-Mueller, justamente aquele que havia sofrido pane durante a experimentação, o resultado do teste não era o esperado. Por esse motivo, as duplas que utilizaram tal equipamento, foram deixadas para o final da apresentação. Quando estas expuseram suas conclusões, a professora pediu para o grupo que manifestasse sua opinião em relação ao motivo de tal acontecimento diferenciado dos demais. Depois de um breve momento de comentários paralelos, o aluno 4A lembrou a falha do equipamento exatamente no momento da coleta de tais observações. A professora lembrou que os zeros obtidos tinham sido descartados. O referido aluno, que é do curso de Engenharia, observou que, em momentos anteriores, poderia ter havido interrupções na passagem da corrente que ocasionaram contagens iguais a zero e que estas não tinham sido descartadas, podendo justificar o aumento do valor do qui-quadrado calculado. Vários alunos opinaram a respeito e a conclusão obtida foi que deveria ser feita uma nova experiência, com o mesmo material, a fim de se obter uma resposta com credibilidade. Finalizadas as apresentações e conclusões, o encontro foi encerrado.

## 4.8 O SÉTIMO ENCONTRO

Nesse encontro, os participantes foram orientados a se dirigirem a uma sala de aula usual, onde foram distribuídos os crachás e a Ficha 10 (aplicação do Modelo de Poisson) que constitui a interpretação dada à sexta etapa de modelagem. Os sujeitos 2A e 2B não compareceram à sessão.

A professora explicitou as regras do contrato didático para o desenvolvimento das atividades: as duplas fariam um único exercício e aguardariam a finalização deste por todos, para, em seguida, apresentar e discutir as soluções, sem, no entanto, alterar a resposta que haviam dado a princípio.

Dentro dessa norma foram resolvidos os cinco primeiros exercícios. Depois disso, a professora comunicou às duplas que estas poderiam resolver os problemas restantes e que estes teriam suas soluções apresentadas e discutidas posteriormente.

A mudança no contrato didático tem duas justificativas: as cinco situações iniciais já abordaram os aspectos essenciais ao desenvolvimento das demais e algumas duplas se sentiam desmotivadas por terminarem rapidamente os exercícios e precisarem aguardar o trabalho dos colegas ser finalizado. Conforme o contratado, quando todos terminaram a resolução dos problemas restantes, estes foram discutidos e as conclusões socializadas.

A professora pôs em discussão a semelhança entre as representações gráficas das distribuições Binomial e Poisson, fato esse explicitado pela dupla 6 quando da exploração do modelo teórico (Ficha 7). Depois de breves comentários e de levantada a questão sobre as condições dessa aproximação, diferente do que fora planejado, cópias das situações propostas na Ficha 11 (comparação entre Binomial e Poisson), elaboradas anteriormente pela professora, foram entregues a cada indivíduo. A aproximação entre os dois modelos foi colocada, novamente, em discussão e, ao final, os alunos, orientados pela professora, elaboraram uma resposta à questão sete da referida Ficha. As justificativas para a entrega da Ficha 11 resolvida são as seguintes: pela programação faltava apenas um encontro e era importante que o teste final fosse aplicado, além de que a execução dessa Ficha não traria novas contribuições ao estudo, mas, sim, sua discussão.

## 4.9 O OITAVO ENCONTRO

O ambiente do oitavo encontro foi o Laboratório de Informática e nele foi visada a aplicação do teste final, com vista à avaliação do trabalho desenvolvido em todo o projeto. No início, com todos os alunos presentes, depois de entregues os crachás aos participantes e aos observadores, a demonstração da coincidência

entre os Modelos Binomial e Poisson, sob determinadas condições (Ficha 12), foi entregue aos alunos para efetuarem a sua leitura. Foi aberto um espaço de tempo para discussão e esclarecimento que, ao ser encerrado, os problemas propostos, foram resolvidos e corrigidos pelo próprio grupo.

A seguir, a professora questionou os alunos a respeito da representação gráfica da distribuição de probabilidades acumulada do Modelo de Poisson e, após algumas considerações mencionadas pelos alunos, um exemplo (Ficha 13) lhes foi entregue, a título de ilustração. A opção pela função distribuição de probabilidades representada por um gráfico de colunas, neste estudo, fundamenta-se na melhor visualização que esta proporciona, quando comparada àquela da função acumulada.

Como última atividade, foi entregue a Ficha 14, que diz respeito ao teste final, para ser resolvida individualmente; estando cada aluno diante de um computador, este pôde optar pelo uso do equipamento, ou não, nos dez primeiros problemas, e o de número onze deveria ser resolvido na planilha e salvo no disquete que lhe foi entregue.

Com o teste, cada sujeito recebeu uma folha em branco para que expressasse suas opiniões sobre o projeto e demais comentários que quisesse manifestar.

Finalizando os trabalhos, a Ficha 14 e os disquetes foram recolhidos e os participantes receberam os agradecimentos da pesquisadora.

# CAPÍTULO 5

## ANÁLISE A POSTERIORI

### VALIDAÇÃO

Neste capítulo, serão apresentados e analisados os elementos colhidos durante a fase de experimentação: as respostas obtidas nas fichas e nos arquivos salvos em disquetes e as anotações dos observadores e da professora.

Em cada etapa do processo de modelagem adotado neste estudo, as atividades foram desenvolvidas com o objetivo de comparar os elementos de significado institucional implementados e aqueles de significado pessoal declarados pelos alunos. Neste tópico, os resultados obtidos serão discutidos, identificando-se nas respostas dos alunos aqueles que estão conforme a pauta institucional estabelecida, ditos logrados e aqueles que não concordam com ela, habitualmente conhecidos como erros de aprendizagem. (GODINO, 2003).

A análise que se sucede, será apresentada de acordo com as etapas de modelagem previstas neste estudo, embora algumas delas tenham ocupado mais de um encontro em seu desenvolvimento.

## 5.1 A PRIMEIRA ETAPA

Nessa primeira etapa da modelagem matemática, o foco principal é a elaboração de um protocolo experimental e sua aplicação. (HENRY, 1997).

Fundamentando-se nas informações obtidas na Ficha 2, em particular, no item sete, pôde-se constatar o interesse no experimento realizado, em especial, na manipulação dos elementos radioativos e nas informações relacionadas ao funcionamento do contador Geiger-Mueller. Embora o projeto estivesse no início de seu desenvolvimento, alguns alunos explicitaram a importância da interação entre os cursos e sugeriram a realização de trabalhos desse tipo com maior frequência no transcorrer da graduação.

Todos os alunos fizeram referência aos elementos relevantes do experimento, mas as descrições evidenciaram dificuldades na expressão das idéias, sobretudo quanto à terminologia específica da teoria envolvida.

Na repetição de um experimento, todos concluíram que os valores seriam distintos, dois deles explicitaram que as médias seriam próximas e um sujeito citou a não existência de relação entre os resultados colhidos.

Na comparação entre os valores do primeiro e quarto experimentos, foi unânime a identificação da dependência do material radioativo observado, sendo que alguns se referiram inadequadamente à quantidade de energia, em lugar do número de partículas emitidas.

A relação entre o número de emissões e o comprimento do intervalo de tempo foi corretamente interpretada pelos alunos e doze responderam que o número de ocorrências seria zero, caso o intervalo tivesse amplitude zero.

A impossibilidade de prever um próximo resultado foi identificada pelos alunos a menos de dois deles que afirmaram a existência de um valor específico para tal; quatro sujeitos citaram a independência dos resultados, um usou o termo aleatório e os demais concluíram que os valores são próximos aos anteriores ou à média.

Só um aluno não especificou o cálculo da média aritmética dos valores

obtidos como estimador do número médio de emissões por intervalo de tempo.

Quanto aos elementos de significado pessoal declarado, o acima exposto permite concluir que os alunos desenvolveram com facilidade a situação proposta, porém apresentaram dificuldade na elaboração do protocolo experimental, não porque não soubessem distinguir os elementos relevantes do experimento, mas sim na utilização adequada de termos específicos da teoria. As noções de média, aleatório e independência foram ampliadas e algumas de suas características puderam ser identificadas nas respostas da maioria dos alunos, mas não de todos, evidenciando a complexidade desse conceito já salientada por outros pesquisadores. A dependência dos resultados em relação ao material e ao intervalo de tempo entre as observações foi explicitada pelos alunos, assim como o seu caráter aleatório.

Finalmente, os registros nas fichas e as anotações dos observadores mostraram que os alunos basearam-se nos resultados experimentais para validar suas respostas. Assim, há evidências de que essa etapa atingiu o objetivo principal: contribuir com fundamentos, observados na ação, aos quais os alunos podem se valer, a fim de justificar e entender o desenvolvimento das sessões subseqüentes.

Apesar da experiência escolhida referir-se a uma área do conhecimento que os alunos não têm domínio, pôde-se observar que esta foi importante para motivar e despertar o interesse, além de contribuir para que os objetivos pudessem ser atingidos. Observa-se, portanto, que não só essa etapa é fundamental no esquema de modelagem em estudo, como concluiu Coutinho (2001), mas também sugere que o experimento a ser realizado deve ser cuidadosamente selecionado, tendo em vista os sujeitos visados no estudo.

## 5.2 A SEGUNDA ETAPA

A exploração dos valores colhidos na fase experimental, por meio da representação gráfica e determinação de medidas como média e variância visam

ao levantamento de conjecturas no contexto particular do experimento.

As variáveis em estudo foram definidas corretamente por todos os alunos. Pode-se concluir que a exploração realizada em planilha eletrônica veio reafirmar e complementar a primeira etapa, garantindo a explicitação, pelas duplas, da dependência do material radioativo e do intervalo de tempo no número de partículas emitidas.

Em relação ao significado de valores aleatórios, foram citados os termos: independente, seqüência, ordem e ligação que, quando comparados ao explicitado na primeira etapa evidenciam uma ampliação dessa noção.

Apesar de alguns erros na digitação dos resultados dos experimentos, a obtenção do número médio de emissões por segundo, nos três experimentos, não apresentou dificuldade; a não coincidência de tais valores foi justificada pela aleatoriedade, sendo utilizados, também, os termos: valores probabilísticos, estatísticos ou não regulares. As anotações dos observadores mostraram que tais alunos empregaram esses termos em substituição a aleatório. Apenas uma dupla respondeu que um deles era o verdadeiro número médio de emissões pela fonte, mas não o especificou.

A aproximação entre os valores da média e variância foi explicitada por cinco duplas; as outras responderam que a diferença entre as duas medidas é diretamente proporcional ao comprimento do intervalo de tempo e que a média e variância não são constantes. Uma dupla considerou a média, por segundo, em todos os casos e concluiu que quanto maior o tempo entre as observações obtém-se um número maior de emissões. Como tais respostas não excluem a conjectura pretendida, da proximidade das duas medidas, pode-se considerar que esse objetivo foi atingido.

Conforme previsto na análise a priori, os alunos apresentaram dificuldades no uso da planilha eletrônica, tanto na obtenção das freqüências, como também na construção dos gráficos. Estas foram sanadas com o auxílio da professora, fato esse constatado no transcorrer da tarefa proposta. Os alunos destacaram: o trabalho com a planilha, a visualização dos valores experimentais por meio da representação gráfica, as informações contidas no Quadro Estatística Descritiva e a apresentação oral e coletiva, com discussão e fechamento, como sendo

aspectos importantes dessa fase.

Nessa etapa de modelagem, pode-se concluir que o trabalho de exploração dos valores obtidos experimentalmente, em particular, a representação gráfica com auxílio de um aplicativo, mostrou-se favorável à emergência das propriedades do modelo, no que tange ao contexto particular dos experimentos realizados; vale mencionar que o uso do computador agilizou a obtenção das representações pretendidas, mas os alunos precisam conhecer e saber manipular o aplicativo antes da sua utilização para não comprometer os objetivos visados.

Nas anotações dos observadores, pôde-se constatar as vantagens do trabalho em dupla, em especial por esta ser formada por um aluno de cada curso (Computação e Engenharia), evidenciando a contribuição de um, no aspecto da manipulação da ferramenta e do outro, no que diz respeito ao experimento realizado, enriquecendo as discussões intraduplas.

### 5.3 A TERCEIRA ETAPA

Com base nos experimentos realizados e na exploração dos resultados colhidos, esta etapa da modelagem matemática tem o objetivo de construir o modelo teórico, no caso, o Modelo de Poisson. Pautados no contexto particular da radioatividade e nos estudos das fases anteriores, as Hipóteses de Poisson foram introduzidas à medida que o desenvolvimento assim o exigiu.

A participação dos alunos, estimulada pela professora durante a construção do modelo pretendido, evidenciou que o conteúdo matemático envolvido poderia trazer dificuldades para seu acompanhamento; assim sendo, a professora fez parte da demonstração, considerando que

é necessário manter as expressões intermediárias e, mesmo que agente manipule os símbolos, é importante encorajar os alunos a traduzir em palavras as expressões simbólicas a fim de enriquecer a expressão e reforçar o sentido dos símbolos (GRUPO AZARQUIEL, 1993, p. 41).<sup>31</sup>

---

<sup>31</sup> Tradução nossa

A avaliação dessa etapa foi fundamentada, nas respostas da Ficha 6. O significado pessoal atribuído a  $\lambda t$  e  $\lambda$ , declarado pelos alunos, evidenciou que a construção realizada não favoreceu a apreensão do significado institucional para eles implementado. Em nenhuma das respostas, a média foi citada, mas apenas o número de partículas emitidas em um intervalo de tempo ou a caracterização da dependência desses elementos em relação ao material e ao tempo.

Na construção do modelo teórico, a necessidade das Hipóteses de Poisson foi identificada por todos os alunos, e os exemplos limitaram-se àqueles relacionados aos experimentos realizados ou à característica da variável aleatória ser discreta, com exceção de dois deles que se referiram ao número de maçãs que caem de uma macieira por unidade de tempo e acidentes de trânsito. Conforme a análise a priori, pôde-se constatar que as situações em que o Modelo de Poisson aplica-se, raramente são citadas de modo espontâneo.

Vários alunos mencionaram a complexidade matemática envolvida na demonstração, mas acharam interessante a aplicação do Cálculo Integral apresentada. A explanação histórica sobre Siméon-Denis Poisson feita pela professora foi valorizada. Houve até quem classificasse de fundamental o próprio questionário, por possibilitar, em sua discussão, um realinhamento das noções em estudo. Um sujeito classificou a aula de mais descontraída do que o normal, por solicitar e permitir a participação dos alunos em seu desenvolvimento, além da apresentação detalhada da demonstração. Conforme mencionado na análise a priori, os conceitos de independência e exclusividade foram confundidos e foi preciso discuti-los e institucionalizá-los.

A análise desta etapa evidencia sua complexidade e a necessidade de esclarecimentos dos conceitos matemáticos e probabilísticos envolvidos, sobretudo aqueles relacionados à determinação da constante de integração, definição de derivada de uma função como limite da razão incremental, variáveis aleatórias independentes, probabilidade da união de eventos mutuamente exclusivos, soma das probabilidades igual a um no caso de variáveis aleatórias discretas. A construção apresentada favoreceu a apreensão das Hipóteses de Poisson e sua importância, mas, não possibilitou a compreensão do parâmetro do modelo, embora a dependência das variáveis tempo e tipo de material tenham

sido identificadas. Acrescenta-se, ainda, o interesse explícito por aspectos históricos relacionados ao estudo, que puderam ser agregados ao desenvolvimento dessa etapa.

## 5.4 A QUARTA ETAPA

Na exploração do modelo teórico, optou-se pela representação em tabelas e gráficas, com auxílio de planilha eletrônica. Apesar dos alunos já terem trabalhado com o aplicativo, pôde-se constatar, nas anotações dos observadores e da professora, a dificuldade na introdução das fórmulas necessárias para o cálculo, tanto ao que se refere à manipulação da ferramenta, como aos conceitos estatísticos envolvidos (valor esperado, variância, desvio padrão). A professora interrompeu a tarefa, quando tais dúvidas surgiram e, no coletivo, questionou o grupo sobre tais noções até que, pouco a pouco, os alunos recuperaram os conceitos estatísticos e suas respectivas fórmulas; a orientação, quanto à utilização do aplicativo, foi dirigida a cada dupla, de acordo com a necessidade.

No que se refere à construção de gráficos, valendo-se da planilha, os questionamentos referiram-se à introdução do rótulo do eixo das abscissas, sendo que duas duplas não o fizeram. Além disso, uma dupla colocou como título do eixo dos valores da variável o tempo, outra limitou todos os gráficos para valores entre zero e cinco e uma dupla não construiu, na planilha, o intervalo de valores com probabilidades não desprezíveis. Esses elementos interferiram em algumas respostas do questionário da Ficha 7, que norteou a presente análise.

Todos os alunos concluíram que, a partir de um certo valor da variável, as probabilidades são desprezíveis, a menos de uma dupla que, ao limitar o gráfico para o caso de parâmetro 18,7, colocou esse número como sendo o tal limite. A probabilidade máxima foi identificada pelas duplas corretamente, a menos daquelas que iniciaram o eixo das abscissas, incorretamente, por um e se valeram da representação gráfica em suas respostas. A coincidência dos valores do parâmetro, média e variância foi consenso de todos.

Na determinação do intervalo de valores da variável com probabilidades não desprezíveis, a menos de uma dupla, todas consideraram o intervalo com limite inferior negativo nos dois primeiros casos ( $\lambda = 0,5$  e  $\lambda = 5,8$ ), não observando que a variável nunca assume tais valores. Houve, também, erros de introdução da fórmula na planilha, que acarretaram intervalos incorretos. Quanto à indução pretendida, no caso do parâmetro do modelo assumir o valor 47,89, pode-se concluir que o objetivo foi atingido a menos de uma dupla que obteve um intervalo errado. A generalização foi feita sem dificuldades pela maioria dos alunos, sendo que duas duplas representaram o intervalo de modo incorreto e uma, dentre estas, o erro.

Nos comentários individuais, o trabalho no Laboratório de Informática foi valorizado por todos como sendo um instrumento que favorece a aprendizagem, como também o trabalho em dupla, sendo salientadas as vantagens do debate sobre as dúvidas, maior confiança nas conclusões e mais agilidade na resolução das situações propostas. Alguns sujeitos explicitaram que as representações gráficas facilitaram a visualização de resultados e que essa atividade trouxe esclarecimentos sobre o parâmetro do modelo.

Na comparação entre os significados institucionais implementados e pessoais declarados, pode-se concluir que eles se aproximaram após o desenvolvimento da tarefa proposta. No que se refere ao intervalo de valores da variável com probabilidades não desprezíveis, poucos sujeitos não o identificaram. As variáveis didáticas escolhidas, valores do parâmetro do modelo, foram adequadas, para que a generalização pretendida fosse obtida e há indícios de que houve aprendizagem, no que se refere ao significado institucional de referência do objeto ostensivo  $\lambda t$ .

O uso de planilhas precisa não só ser introduzido anteriormente, mas também ser explorado intensamente para que não interfira nas noções que se deseja estudar. Nesse encontro, alguns sujeitos não atingiram todos os objetivos visados em razão do uso incorreto das ferramentas disponibilizadas na planilha.

Essa etapa é, portanto, fundamental para a comparação entre modelo e realidade que se pretende realizar, pois é nela que o aluno começa a dar significado ao parâmetro, além de tornar viável a aproximação entre uma variável que assume valores até infinito e um experimento que nunca assume tais valores.

## 5.5 A QUINTA ETAPA

O uso do modelo teórico construído como aproximação dos resultados obtidos experimentalmente, seguido da aplicação de um teste estatístico para a sua validação, ou não, é a interpretação da autora deste estudo, dada à etapa definida como confrontação entre modelo e realidade por Henry (1997). As respostas da Ficha 9 e o respectivo arquivo salvo em disquete fundamentaram a análise que se segue.

Apenas uma dupla não definiu corretamente a variável aleatória estudada e mudou os valores da freqüência observada, tendo corrigido no arquivo do disquete. O fato representa a não inserção da dupla no trabalho desenvolvido até o momento, apesar da participação voluntária. A identificação do parâmetro com a média, depois da etapa anterior, foi unânime, a menos de uma dupla que questionou, como deveria proceder para calcular essa média.

Durante a execução das atividades propostas na planilha, as dificuldades foram muitas e, em vários momentos, a professora interrompeu a atividade e provocou uma discussão coletiva sobre as dúvidas, sendo que, em alguns casos, os conteúdos foram introduzidos e institucionalizados. Os comentários que se seguem, apresentam esses aspectos.

O primeiro problema girou em torno do cálculo das probabilidades do Modelo de Poisson, usando a função disponível na planilha; além da informação da existência desta, a professora também coordenou a discussão sobre o preenchimento da janela correspondente. A determinação das freqüências esperadas foi discutida e solucionada intraduplas, conforme as anotações dos observadores. Na construção do gráfico, com as duas freqüências representadas, houve pedido de auxílio à professora que se limitou a sugerir que selecionassem as duas seqüências na opção: intervalo de dados.

O cálculo do qui-quadrado precisou ser institucionalizado pela professora, inclusive no que se refere às freqüências esperadas menores que cinco. Algumas duplas apresentaram dificuldade para introduzir a fórmula na planilha, solicitando ajuda ou confirmação em relação ao que haviam feito, evidenciando que o uso da

planilha precisa ser repetido muitas vezes para que os alunos dominem sua manipulação. Na determinação do qui-quadrado crítico, fato semelhante ocorreu em relação aos alunos que questionaram o significado do nível de confiança do teste, esclarecido na explicação da professora para o grupo.

Os registros nos disquetes, após as discussões e explicações, foram corretos, a menos de duas duplas que, apesar da observação explícita no item três da referida ficha, não colocaram os valores da variável, como rótulo do eixo das abscissas.

Dentre os comentários dos alunos, foram destacados: a comparação entre os valores do qui-quadrado calculado e crítico para se obter a conclusão, a visualização gráfica dos valores teóricos e experimentais, a identificação da possibilidade de mau funcionamento do equipamento na realização do experimento, o trabalho no Laboratório de Informática e as vantagens da professora sanar as dúvidas durante o desenvolvimento das atividades. Quanto ao trabalho em dupla, continuaram as citações em relação à agilidade na execução das tarefas, as trocas de conhecimentos, as idéias que nunca surgiriam em um trabalho individual e, em razão da ausência de um sujeito em um encontro, a importância de o colega estar presente em todos os momentos e de modo participativo.

Nessa etapa, ficou evidente que o fato dos alunos já terem feito uso de um aplicativo, não garante que este possa ser usado no desenvolvimento de novas noções. É preciso um trabalho anterior exaustivo de exploração e fixação para, só depois, fazer uso deste em novas noções. As dificuldades com o aplicativo prejudicaram o desenvolvimento dessa etapa; também os conceitos estatísticos (teste qui-quadrado: qui-quadrado crítico e calculado, nível de confiança, frequência esperada e observada, etc.), apesar de já introduzidos, necessitaram revisões.

O trabalho em sala de aula usual mostra, constantemente, as dificuldades do aluno que falta para acompanhar o desenvolvimento do curso; pôde-se observar esse fato, quando um aluno explicitou o comprometimento do trabalho em dupla, quando seu colega havia faltado em sessão anterior. Apesar de todos os sujeitos participarem espontaneamente do projeto nem todos se mostraram

compromissados em relação a ele.

Quanto às conclusões do teste estatístico, apesar de coerentes, apenas duas delas puderam ser consideradas corretas; os alunos apresentaram dificuldade para expressar e redigir suas idéias. Algumas duplas registraram a aceitação da hipótese nula, em lugar da não rejeição, embora tenha sido ressaltada pela professora a diferença entre as duas afirmações, em um teste de hipótese. Esta observação é válida, também, para alguns livros didáticos, que não serão citados por uma questão de ética.

Dos elementos de significado pessoal declarados, podem ser considerados erros de aprendizagem, a síntese na conclusão do teste estatístico, para a maioria dos sujeitos e, em alguns casos, a representação gráfica, no que se refere ao rótulo do eixo das abscissas. Os demais elementos de significado implementados nesse encontro podem ser considerados logrados, isto é, de acordo com a pauta institucional.

## 5.6 A SEXTA ETAPA

Nessa fase de generalização foram propostas situações-problema em contextos diferentes daquele em que o Modelo de Poisson foi construído.

As situações que se referiram ao tempo foram identificadas por todas as duplas, como podendo se aproximar do modelo criado, talvez por analogia ao estudo que foi feito, mas, seis duplas selecionaram o item associado à área e sete àquele que diz respeito ao comprimento. As anotações dos observadores revelaram que os Postulados de Poisson foram referência aos alunos na resolução desse item. Houve dupla que selecionou todos os casos de contagem e uma delas, aquele relacionado à altura, evidenciando que a identificação de tais hipóteses é uma tarefa complexa e delicada. (HENRY, 1997).

Os alunos caracterizaram o Modelo de Poisson como proveniente de contagem, provavelmente por conseqüência do experimento realizado, além de explicitar a necessidade da validade das Hipóteses de Poisson e a independência

entre as ocorrências. Conhecer o número médio por intervalo de tempo, a fim de se aplicar o Modelo de Poisson foi citado por três duplas e apenas uma delas referiu-se a repetição do experimento para obtê-lo; todas as demais citaram o número de chamadas e o tempo de duração.

Como previsto, na análise a priori, todas as duplas identificaram corretamente os elementos  $\lambda$  e  $\lambda t$ , justificando que o trabalho desenvolvido nessa etapa foi favorável para a caracterização desses elementos ostensivos.

A validade das Hipóteses de Poisson, a coleta de resultados de várias observações e o número médio foram citados, como necessários para a avaliação da aderência do Modelo de Poisson à situação enunciada. Nenhuma dupla citou o teste qui-quadrado de aderência. A linearidade da média foi corretamente aplicada por todos os sujeitos na determinação do parâmetro do modelo, mesmo na relação área, sugerindo que o trabalho realizado foi favorável, para que a mudança do intervalo de tempo para espaço não trouxesse maiores dificuldades.

Embora a professora tenha sido solicitada por várias duplas, no cálculo da probabilidade da variável aleatória de Poisson, todas obtiveram o resultado corretamente, a menos de uma que confundiu os elementos da fórmula e escreveu:  $P(W_6 = 0) = \frac{e^{-2,4} \cdot 2,4^6}{6!}$ ; talvez, a representação  $W_6$  escolhida não seja a mais adequada, por possibilitar tal confusão. Quatro duplas interpretaram corretamente a probabilidade que envolveu a expressão: pelo menos uma, e uma delas fez a mesma confusão citada em relação aos elementos da fórmula.

A determinação do intervalo que contém valores da variável com probabilidades não desprezíveis foi correta, depois da professora ter questionado o grupo e este participado de sua determinação. O valor do parâmetro do Modelo foi citado por uma dupla como tendo probabilidade máxima, mesmo nos casos em que esse número não era inteiro, evidenciando que, para esses sujeitos, o significado pessoal atribuído a esse elemento difere do institucional implementado.

Várias foram as respostas com arredondamentos incorretos, como por exemplo, 0,9984 para o valor 0,998497 ou 0,996 para 0,99667 ou 0,117 para 0,1178, etc.. Apesar da professora ter chamado a atenção da ocorrência de tais

erros, em vários momentos, inclusive durante o curso regular de Probabilidade e Estatística, eles persistiram até o final da Ficha.

Algumas duplas indicaram a solução limitando-se a substituir os valores na fórmula do modelo sem finalizá-lo. Na interpretação dos termos: pelo menos uma, até três, mais de dois, não mais do que dois, os erros persistiram até o final da atividade. O parâmetro do Modelo foi determinado de acordo com a pauta institucional estabelecida em todos os casos e por todas as duplas, independente da situação referir-se a intervalo de tempo ou comprimento.

Nas anotações dos observadores, pôde-se constatar que os alunos fizeram uso de suas calculadoras nas resoluções dos problemas e, apesar deste ser um instrumento de uso freqüente, nas duas formações, foram obtidas respostas incorretas. Além disso, o caso em que foi pedida a probabilidade da variável, com distribuição de Poisson e parâmetro quarenta, assumir o valor cinqüenta, duas duplas fracassaram na tentativa de utilizarem suas calculadoras na obtenção do resultado pedido.

O acima exposto permite dizer que as Hipóteses de Poisson, introduzidas na criação do modelo teórico, passaram a fazer parte do conhecimento explicitado pelos alunos, porém sua identificação é uma tarefa complexa. O trabalho desenvolvido ampliou o significado dos elementos ostensivos  $\lambda$  e  $\lambda t$ , além daquele de probabilidade máxima. Por outro lado, o estudo realizado não possibilitou a aproximação pretendida entre os significados institucionalizados e aqueles pessoais declarados pelos alunos, no que se refere aos intervalos de valores da variável com probabilidades não desprezíveis e à aplicação da fórmula de Poisson. Há indícios de que a representação adotada não favoreceu sua determinação. Pôde-se constatar, também, que a interpretação de termos como, pelo menos dois, foi dificuldade não superada, reafirmando os achados apontados por Girard (1997).

O encontro foi encerrado no horário estipulado e, por esse motivo, três duplas não finalizaram os dois últimos problemas, embora tenham sido corrigidos.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS E

## CONCLUSÕES

Esta pesquisa enquadra-se no campo da Didática da Matemática e teve como foco de investigação o ensino e a aprendizagem do Modelo de Poisson.

A escassez de pesquisas sobre o tema e por considerar que a complexidade que ele envolve, pode ser minimizada com escolhas adequadas na seqüência de ensino a ser desenvolvida, decidiu-se pela elaboração e aplicação de um projeto didático.

Neste trabalho, não se visou ao ensino formal do Modelo de Poisson, com a introdução pela fórmula, propriedades e aplicações, e sim, sua construção a partir de uma situação experimental, como modelo teórico aproximado.

### **AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ENSINO (TESTE FINAL)**

Uma vez finalizada a experiência de ensino, procedeu-se a aplicação do teste final, cujo objetivo foi descobrir as características principais no significado pessoal que os alunos construíram sobre o Modelo de Poisson. Assim, um questionário, com onze situações, em que a última deveria ser resolvida com o auxílio de um aplicativo, foi proposto aos alunos que responderam individualmente e não lhes foi permitida a consulta a nenhum apontamento ou ficha anteriormente desenvolvida, embora pudessem fazer uso de suas calculadoras ou do

computador, disponível durante toda a avaliação. Dos testes respondidos apenas catorze foram considerados, representando aqueles sujeitos presentes nos encontros.

No que se segue, os resultados de cada questão são apresentados e discutidos e, ao final, os elementos de significado pessoal em acordo com o institucionalizado e os que podem ser considerados erros de aprendizagem são sintetizados.

**Tabela 12. Frequência de respostas da primeira questão**

Item	a (*)	b (*)	c (*)	d	e (*)	f (*)
<b>Frequência</b>	10	1	8	3	12	5

Notas: (\*) indica as opções que devem ser selecionadas.

nos itens sem (\*), os valores indicam o número de alunos que não os selecionaram.

As informações da Tabela 12 confirmam o previsto na análise a priori e permitem concluir que os alunos identificaram a necessidade de se admitir hipóteses e elaborar equações na construção dos modelos matemáticos e que por meio destes obtém-se uma aproximação dos resultados encontrados experimentalmente.

**Tabela 13. Frequência de respostas da segunda questão**

Item	a	b (*)	c	d	e
<b>Frequência</b>	0	14	0	12	7

Notas: (\*) indica a opção que deve ser selecionada.

nos itens sem (\*), os valores indicam o número de alunos que não os selecionaram.

Os valores da Tabela 13 permitem citar que a maioria dos alunos foi capaz de concluir que o conhecimento da média é suficiente para definir a distribuição de Poisson, o que a identifica com o parâmetro do modelo. Alguns alunos selecionaram, também, a variância ou o desvio padrão, provavelmente, por ser imediata a determinação do parâmetro do modelo a partir de qualquer um deles, ou pela relação existente entre eles.

**Tabela 14. Frequência de acertos na terceira questão**

Item	a	b	c	d	e	f	g
<b>Frequência</b>	1	11	9	7	6	3	12

Estas informações evidenciam que, embora os alunos tenham concluído

que as probabilidades diminuem, conforme o valor da variável aumenta (a partir da média), apenas um deles registrou a possibilidade da variável, no modelo teórico, assumir valores até infinito. Talvez, as representações gráficas, que tornam visíveis apenas alguns valores da variável, tenham contribuído para esse resultado.

Poucos alunos foram capazes de lembrar as demais propriedades do Modelo de Poisson envolvidas nesse item; a explicação para tal fato pode ser a opção de não se desenvolver atividades extra-classes e o número reduzido de aplicações do modelo que foram propostas.

Segundo as anotações dos observadores e da professora, vários alunos reclamaram pelo fato de não terem levado a Ficha 10 para casa, a fim de se prepararem para o teste final. Duas justificativas para tal: as fichas não deveriam ser alteradas, após sua discussão e correção, em relação ao que os alunos responderam inicialmente, a fim de se poder analisar essa pré-concepção e, também, porque nos cursos de graduação, usualmente, a maioria dos alunos não executa tarefas fora do horário de aula (ou copiam de seus colegas, sem reflexão) e até não estudam para as provas sob o argumento de falta de tempo. Pretendeu-se, portanto, avaliar o alcance do trabalho desenvolvido apenas com os encontros.

**Tabela 15. Frequência de acertos na quarta questão**

Item	a	b	c	d	e	f
Frequência	12	8	7	6	5	5

Há indícios de que a relação entre o parâmetro do modelo e o tamanho do intervalo considerado ainda não faz parte do conhecimento adquirido por todos os alunos, já que, no primeiro item, alguns alunos foram capazes de determinar corretamente o parâmetro, mas, no segundo houve um maior número de enganos.

Embora cerca da metade do número de sujeitos tenha respondido corretamente os itens (b), (c) e (d), em praticamente todos os casos, obteve-se a coincidência do parâmetro, média e variância. A fórmula do modelo e a propriedade da moda foram lembradas e determinadas sem maiores dificuldades;

o erro encontrado deveu-se a determinação incorreta do parâmetro do modelo.

Todos os alunos identificaram os elementos representados nos eixos coordenados do gráfico da distribuição de probabilidades.

**Tabela 16. Freqüência de respostas na sexta questão**

Item	a	b(*)	c	d(*)	e	f	g(*)	h
<b>Freqüência</b>	7	10	1	11	11	5	12	4

Nota: (\*) indica as opções que devem ser selecionadas.

O item (e), de maior freqüência de erro e característico do Modelo Binomial, pode ter sido selecionado, porque o aluno considerou a possibilidade do uso da aproximação Poisson.

**Tabela 17. Freqüência de acertos na sétima questão**

Item	a	b	c	d	e	f
<b>Freqüência</b>	13	10	3	9	6	8

No caso do intervalo referir-se a área, o parâmetro da distribuição de Poisson foi determinado corretamente, com exceção de um aluno, indicando que o trabalho desenvolvido foi favorável, para que a mudança de intervalo de tempo para o de área não trouxesse dificuldade.

Os alunos foram capazes de determinar as probabilidades usando a fórmula da distribuição de Poisson, porém, quando estas dependeram da interpretação do termo, pelo menos dois, o resultado foi diferente. Há evidências de que é necessário mais do que a repetição de problemas probabilísticos que envolvam tais termos para mudar esse panorama. Durante a fase experimental, quando essa dificuldade veio à tona, foi utilizada a estratégia de se transferir o problema a contextos relacionados a preço de objetos como, por exemplo, um tênis desse tipo custa pelo menos R\$150,00, obtendo-se a correta interpretação por parte dos alunos e posterior resposta adequada ao problema original. Entretanto, os resultados, ora apresentados, indicam que o trabalho realizado não foi suficiente para que todos os sujeitos superassem essa dificuldade que parece ser merecedora de estudos específicos.

Dentre as propriedades do Modelo de Poisson que foram consideradas no estudo, o valor da variável com probabilidade máxima e aqueles com

probabilidades desprezíveis são lembrados com mais facilidade do que aquela que se refere ao intervalo de valores da variável com probabilidades não desprezíveis; talvez, porque esta última envolva o cálculo de uma expressão que depende da média e do desvio padrão.

**Tabela 18. Frequência de acertos na oitava questão**

Item	a	b	c	d
<b>Frequência</b>	9	11	8	4

Embora na quinta questão quase todos os alunos tenham explicitado adequadamente os elementos representados nos eixos coordenados, o mesmo não se pode afirmar, quando se oferece a representação gráfica e pede-se para indicar os elementos neles expressos, mesmo no caso de se ter os rótulos especificados. Observa-se que, apesar do trabalho realizado com a construção de gráficos, a leitura destes é, ainda, repleta de falhas. Há evidências de que o significado pessoal atribuído a esse tipo de representação não é aquele institucional, que se tem como referência, para sujeitos nesse nível de escolaridade.

A relação entre o parâmetro do modelo e a média pôde ser identificada na resposta de dez alunos, embora nem todos tivessem encontrado o valor correto.

**Tabela 19. Frequência de acertos na nona questão**

Item	a	b
<b>Frequência</b>	3	12

Embora apenas três alunos tenham acertado o cálculo da probabilidade envolvendo o termo, mais de dois, o parâmetro do modelo foi determinado corretamente por doze sujeitos, evidenciando que a propriedade da coincidência entre média e parâmetro é conhecimento da maioria dos participantes.

Embora se tenha apresentado a aproximação entre os dois modelos, Binomial e Poisson, por meio de uma comparação gráfica e a não pretensão em definir critérios para sua utilização, a aplicação na situação apresentada teve um bom índice de acerto, dez que corrobora a expectativa de que essa tarefa é bastante simples de ser executada. Conforme a análise a priori, alguns sujeitos completaram a questão, salientando que a probabilidade obtida poderia ser

considerada desprezível.

Quanto à última questão do teste, a ser desenvolvida com o auxílio da planilha, nove sujeitos encontraram corretamente os valores do qui-quadrado observado e crítico; apesar da resposta acertada, os argumentos não foram suficientes para a conclusão apresentada, confirmando que este é um dos elementos de significado que proporciona maior dificuldade de compreensão, como já foi salientado por Batanero, Tauber e Sánchez (2001). Poucos alunos fizeram uso da representação gráfica, a fim de visualizar a aproximação entre os resultados experimentais e teóricos, embora alguns tenham questionado a professora sobre tal exigência na tarefa proposta; como a resposta deu liberdade para o aluno tomar a decisão, a maioria entendeu que esta era desnecessária na resolução da atividade.

As anotações dos observadores evidenciaram que a determinação da frequência esperada e do qui-quadrado crítico foram motivo de reflexão e tentativas, tanto no que se refere ao conteúdo envolvido quanto à manipulação do aplicativo. Em vários momentos, os alunos solicitaram a presença da professora a fim de confirmar ou questionar sobre suas concepções, embora esta os tenha orientado a tomarem as decisões que achassem adequadas. Assim, pode-se concluir que, apesar do bom número de acertos, os alunos necessitam repetir várias vezes esse tipo de tarefa, para se sentirem seguros em suas decisões, sobretudo no que se refere à argumentação sobre os resultados encontrados.

No que se segue, as concordâncias e as diferenças entre o significado institucional avaliado e o pessoal construído pelos alunos participantes são sintetizadas.

### **Concordâncias entre o significado institucional avaliado e o pessoal construído pelo grupo**

Os alunos responderam corretamente cerca de 65% do teste final, o que indica que vários dos elementos de significado considerados no ensino parecem fazer parte do significado pessoal adquirido pelos alunos; apenas para se ter um

elemento de comparação, o trabalho desenvolvido por Batanero, Tauber e Sánchez (2001) sobre o Modelo Normal, teve índice de acerto em torno de 70%. A seguir, são apresentados os elementos que os estudantes demonstraram uma melhor compreensão.

*Situação.* Um bom número de alunos aplicou corretamente o Modelo de Poisson nos três tipos de situações propostas no teste: aproximação Poisson a um problema Binomial, resolução de problemas com contextos em outras áreas do conhecimento e ajuste a uma distribuição de dados empíricos, como modelo teórico aproximado.

*Linguagem.* Os alunos reconheceram os termos verbais associados aos conceitos introduzidos, como: aleatório, modelo matemático, hipóteses do modelo, parâmetro, média, teste qui-quadrado, nível de significância, etc., mostrando um domínio razoável dos elementos ostensivos verbais e simbólicos. Quanto aos elementos ostensivos gráficos, os alunos foram capazes de reconhecer as convenções de representação da distribuição de probabilidades, além de nela identificar a média, isto é, o parâmetro do modelo.

*Ações.* No teste, poucos elementos desse tipo foram avaliados, já que nele, praticamente, não se solicitou a realização de ações. Mesmo assim, no pouco que foi avaliado, um número razoável de alunos (em torno de dez) foi capaz de estimar o parâmetro do modelo teórico com base nos valores experimentais tabelados, calcular as frequências esperadas sob a hipótese de que o modelo é de Poisson, comparar frequências esperadas e observadas por meio do teste de aderência qui-quadrado, resolver problemas semelhantes àqueles apresentados nos livros didáticos com auxílio de calculadora, resolver o problema de aproximação Poisson ao Modelo Binomial, identificar situações que podem ser estudadas com o Modelo de Poisson.

*Conceitos.* Dentre os conceitos avaliados no teste, pode-se destacar, como fazendo parte do conhecimento explicitado: a média do Modelo de Poisson, o parâmetro e as probabilidades desprezíveis e máxima.

*Propriedades ou atributos.* As propriedades do Modelo de Poisson que tiveram maior índice de acerto em suas aplicações e, portanto, podem ser consideradas

como conhecimentos adquiridos, foram: a suficiência da média na identificação do Modelo de Poisson, a coincidência da média, variância e parâmetro, a linearidade da média nas situações de tempo, comprimento e espaço e o decrescimento das probabilidades conforme os valores da variável distanciam-se da média.

*Argumentos.* O teste não exigiu justificativa das respostas, a menos da última questão, na qual os alunos basearam-se nos valores do qui-quadrado crítico e calculado, a fim de fundamentarem sua conclusão.

### **Diferenças entre o significado institucional avaliado e o significado pessoal declarado**

Nem todas as questões do teste final foram respondidas corretamente; assim, pode-se encontrar algumas com baixas porcentagens de acerto, denotando desajustes em relação ao significado institucional pretendido no ensino. A seguir, tais erros de aprendizagem são apresentados.

*Situação.* Muitos alunos não foram capazes de perceber a utilidade de um modelo matemático nas previsões de dados futuros, talvez, por não ter sido abordado diretamente no ensino.

*Linguagem.* Pôde-se identificar claramente o problema relacionado à representação simbólica da variável aleatória com distribuição de Poisson escolhida no estudo, qual seja  $W_t \sim P(\lambda t)$ . Mesmo no desenvolvimento da seqüência, observou-se que essa opção provocou dúvidas em sua utilização e interpretação, mas, naquele momento não era possível modificá-la. A escolha para usar uma letra com um índice, pretendeu diferenciar as variáveis aleatórias quando o intervalo de tempo é alterado; porém, como o parâmetro do modelo é  $\lambda t$ , o valor colocado como índice não é aquele utilizado na fórmula. Assim, se  $W_1 \sim P(3,2)$ , então  $W_3 \sim P(9,6)$  e a probabilidade da variável  $W_3$  assumir o valor 5 é dada por:  $P(W_3 = 5) = \frac{e^{-9,6} 9,6^5}{5!}$ . Talvez, o uso da representação:  $W_{\lambda.t} \sim P(\lambda.t)$  possa ser mais adequado, para evitar as confusões observadas.

Outro aspecto, motivo de erro, foi a interpretação de expressões como: mais de dois e pelo menos dois; estas, quando aplicadas a problemas que envolvem probabilidade, são motivos de muitas falhas, pois podem depender também do cálculo de probabilidades complementares, que é outro fator de dificuldade. Girard (1997) discute esses aspectos em seu trabalho.

*Conceito.* Em particular, o conceito de moda, que se admitia conhecido, foi motivo de dificuldade, pois, em outros momentos, os alunos foram capazes de identificar o valor da variável com probabilidade máxima e, no caso em que a noção foi substituída pelo conceito de moda, a porcentagem de erro foi bem maior.

Os fundamentos de um teste de hipótese foram introduzidos no curso de graduação na disciplina de Probabilidade e Estatística, quando do estudo do Modelo Binomial e retomados durante a presente pesquisa. Embora já se tenha colocado em discussão o significado de se aceitar uma hipótese nula, durante a fase experimental, e concluído que se deve optar pela não rejeição da hipótese, muitas foram as respostas desse tipo. Há indícios de que, durante uma prova ou outro tipo de cobrança, existem momentos em que os alunos usam os conhecimentos que estão estabilizados, como é o caso de: se uma hipótese não é rejeitada, então ela é aceita. Os comentários alertam para a necessidade de que os conceitos que se admite que o aluno tenha domínio, muitas vezes, precisam ser revistos em situações de resolução de problemas, para serem, então, considerados disponíveis.

*Propriedades ou atributos.* Apesar da exploração dos valores da variável com probabilidades desprezíveis, muitos alunos não foram capazes de identificar que a variável com distribuição de Poisson assume valores de zero a infinito, limitando-os ao valor do parâmetro do modelo. Talvez, o estudo que foi feito, valendo-se da representação gráfica, em que a visualização é limitada a alguns valores, tenha induzido a resposta dada pelos alunos. Há uma outra interpretação, para que esse tipo de erro tenha ocorrido: os alunos podem ter entendido que a pergunta referia-se a valores com probabilidades não desprezíveis, mas, também nesse caso, não justifica a resposta errônea. Estas observações evidenciam a necessidade de um trabalho diferenciado que explore tal propriedade, pois, nem a construção do modelo teórico foi suficiente para os

alunos superarem essa dificuldade, que é reafirmada, quando se pensa nas aplicações do modelo.

Mesmo tendo construído o intervalo dos valores da variável com probabilidade não desprezível, este, muitas vezes, foi definido de modo incorreto. O trabalho desenvolvido não foi suficiente para a aquisição dos elementos que o definem, pois, alguns alunos colocaram um desvio padrão de cada lado da média ou apenas o intervalo definido por:  $[-3.\sigma; +3.\sigma]$ , o que mostra que essa propriedade não faz parte do conhecimento de tais sujeitos.

*Validação.* Embora a justificativa das respostas não tenha sido uma exigência do teste final, pôde-se constatar na última questão a grande dificuldade dos alunos em expressar suas idéias; o vocabulário foi limitado e as frases elaboradas não traduziram adequadamente as idéias que estavam subjacentes.

O teste final permitiu uma boa avaliação do significado institucional implementado no ensino e aquele que os alunos adquiriram, sem se tornar exaustivo.

## **RESULTADOS EM RELAÇÃO AOS FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS**

A Engenharia Didática (DOUADY, 1987; ARTIGUE, 1988) foi a metodologia de pesquisa adotada, por possibilitar o realinhamento das atividades, após cada etapa de seu desenvolvimento e permitir a validação por meio da confrontação entre análise a priori e a posteriori que, por esse motivo, tiveram de ser detalhadas.

O projeto de engenharia foi fundamentado nos pressupostos da Modelagem Matemática em uma interpretação das etapas, propostas por Henry (1997), transformadas em tarefas e apresentadas conforme a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1992, 1999, 2002). Nessa perspectiva, os alunos foram engajados em um processo de modelagem, no qual realizaram a

experiência de contagem de partículas radioativas e fizeram um estudo descritivo dos valores obtidos, nos quais puderam fundamentar a construção do Modelo de Poisson. Na seqüência, o modelo criado foi explorado e validado na confrontação das observações com os valores obtidos com a teoria desenvolvida, valendo-se de um teste de hipótese. O uso do computador, como ferramenta didática, acompanhou o desenvolvimento das atividades à medida que pode favorecer a finalização dos cálculos e as representações gráficas com maior precisão e agilidade, tornando viável o tempo didático disponível.

Houve a preocupação em oferecer condições aos alunos para conhecerem e acompanharem o estudo do Modelo de Poisson; tal aspiração acarretou no uso da Teoria das Funções Semióticas, na qual o significado dos objetos matemáticos é relacionado com as práticas dos sujeitos, possibilitando que se fale em significado pessoal e institucional de um objeto. Assim, os elementos de significado institucional de referência foram obtidos de uma análise de livros didáticos (apresentada em termos da Teoria Antropológica do Didático), que orientou as escolhas daqueles pretendidos, que fizeram parte da organização das tarefas propostas no ensino e que foram implementados.

Nesta pesquisa, a análise dos resultados foi norteada, também, pela Teoria das Funções Semióticas, valendo-se da comparação entre o significado institucional avaliado e aquele pessoal declarado pelos alunos, explicitando os de acordo com a pauta institucional e os considerados erros de aprendizagem, categorizados em seis componentes da cognição matemática: situações, linguagem, ações, conceitos, propriedades ou atributos e argumentações.

A pesquisa foi desenvolvida com dezesseis sujeitos, do segundo ano de graduação dos cursos de Engenharia Elétrica e Ciência da Computação de uma instituição particular de ensino superior, no ano de 2004. Durante o estudo, os alunos trabalharam em dupla, sendo esta composta de um sujeito de cada curso.

As análises da seqüência de ensino desenvolvida e da amostra de livros didáticos revelaram a complexidade do significado e da compreensão do conceito de Modelo de Poisson, que não se limita à sua definição, mas envolve vários elementos que o estudante deve reconhecer e ser capaz de determinar e relacionar na resolução das situações que envolvem o modelo estudado.

## RESULTADOS EM RELAÇÃO ÀS HIPÓTESES DE PESQUISA

A comparação entre as análises a priori e a posteriori dos resultados obtidos em cada uma das etapas do processo de Modelagem Matemática desenvolvido no estudo evidenciou que as orientações sugeridas em Henry (1997) puderam ser interpretadas e adaptadas para a natureza do estudo do Modelo de Poisson. Assim, na primeira etapa, realidade, os alunos leram e discutiram um texto sobre radioatividade, conteúdo relacionado ao experimento a ser realizado, elaboraram um protocolo experimental e colocaram-no em ação. Na segunda etapa, modelo pseudo-concreto, realizaram um estudo descritivo dos valores obtidos experimentalmente com o auxílio de um aplicativo. Na terceira etapa, modelo matemático, participaram ativamente da construção do modelo teórico, com questões e sugestões, valendo-se do estudo realizado com a emissão de partículas na fundamentação das hipóteses de Poisson. Na quarta etapa, estudo matemático, o modelo criado foi explorado, com o auxílio do aplicativo já utilizado, para valores do parâmetro cuidadosamente selecionados a fim de que as conjecturas das propriedades visadas pudessem ser levantadas. Na quinta etapa, confrontação modelo-realidade, os valores observados na experimentação foram comparados àqueles correspondentes obtidos com o modelo teórico construído por meio da representação gráfica e posterior teste estatístico, com conclusão a respeito da aceitabilidade do modelo. Assim, na sexta e última etapa, generalização e previsões, situações, distintas daquela em que o modelo foi criado, foram propostas a fim de que o Modelo de Poisson pudesse ser aplicado, incluindo, a aproximação ao Modelo Binomial.

Os resultados obtidos mostraram que o uso do computador favorece pela agilidade na obtenção das respostas e das representações em tabelas e gráficos, minimizando o tempo didático; porém, seu emprego requer domínio na manipulação da ferramenta que se pretende utilizar. É preciso evitar que, além do conteúdo em estudo, o uso do aplicativo faça parte da aprendizagem, simultaneamente, sob pena de comprometê-la.

O trabalho em dupla, sugerido por Carvalho e César (2001), possibilitou que as discussões no desenvolvimento das atividades exigissem argumentações fundamentadas, a fim de obter o convencimento do parceiro. A composição das duplas com um aluno de cada curso, Engenharia Elétrica e Ciência da Computação, conforme previsto na análise a priori, permitiu que as informações das duas formações se complementassem e ampliassem os conhecimentos abordados e os questionamentos relacionados, além de ter sido, durante o processo, valorizada por todos os alunos.

A parte histórica e epistemológica do estudo evidenciou a importância da estratégia de ensino adotada e orientou os procedimentos para que as dificuldades apontadas fossem trabalhadas de modo diferenciado na tentativa de superá-las. A realização do experimento de emissão de partículas radioativas e posteriores procedimentos nas etapas subsequentes parecem ter favorecido uma primeira concepção do acaso que, aos poucos, foi ampliada. A confusão entre os conceitos de eventos exclusivos e independentes que apareceu na construção do modelo teórico foi discutida e institucionalizada, não sendo identificados problemas posteriores em relação aos dois conceitos. A opção pela realização do experimento e posterior comparação dos valores obtidos com os teóricos correspondentes pode ter colaborado, para que os conceitos de frequência e probabilidade fossem adequadamente empregados. Desse modo, observa-se que o trabalho desenvolvido parece ter sido suficiente para a distinção entre probabilidade e frequência. Os poucos momentos em que os fatos históricos foram citados mostraram-se suficientes para fazer transparecer o interesse e a motivação que eles podem despertar no desenvolvimento do estudo.

## **A QUESTÃO DE PESQUISA E SUGESTÕES PARA O ENSINO DO TEMA**

Esta pesquisa permite concluir que o uso da Modelagem Matemática pode favorecer o ensino e a aprendizagem do Modelo de Poisson por possibilitar que

vários de seus elementos de significado fossem colocados em jogo, podendo favorecer o desenvolvimento de competências na obtenção e aplicação de técnicas e a compreensão do objeto em estudo, como um processo progressivo, mental, social e interativo. A análise dos resultados obtidos ao final de cada etapa do processo de modelagem e no teste final sustentam a afirmação de que todas as seis etapas foram fundamentais, para que muitos dos elementos considerados no estudo pudessem fazer parte do conhecimento adquirido pelos sujeitos participantes; dentre eles, destacam-se:

- determinar o parâmetro do modelo baseado em valores obtidos experimentalmente ou de situações-problema;
- identificar o valor da variável com probabilidade máxima;
- determinar as frequências esperadas sob a hipótese do modelo ser de Poisson;
- calcular o qui-quadrado crítico e observado e compará-los, a fim de identificar se o Modelo de Poisson é ou não inadequado para representar a realidade observada;
- identificar situações em que o Modelo de Poisson possa ser utilizado;
- identificar características na construção de um modelo matemático;
- determinar probabilidades de variáveis aleatórias com distribuição de Poisson;
- identificar a coincidência entre média, variância e parâmetro de uma variável com distribuição de Poisson.

Essas aquisições podem ter sido favorecidas pelas escolhas feitas nesta pesquisa, dentre as quais foram salientadas pelos próprios sujeitos participantes: a discussão e correção de cada tarefa ao seu final, o esclarecimento das dúvidas durante o processo, o detalhamento nas demonstrações formais, a mudança de ambiente e o trabalho desenvolvido nos Laboratórios de Física Nuclear e de Informática e, finalmente, o trabalho em dupla. Em relação a este último, os alunos referiram-se a: possibilidade de troca de informações, no caso ainda mais favorecida por ser formada com um aluno de cada curso, necessidade de

argumentar com o par sobre as soluções, garantindo maior confiabilidade e surgimento de questões que, em um trabalho individual, jamais seriam levantadas.

O estudo detectou, também, que alguns elementos de significado proporcionaram maior dificuldade de compreensão; dentre eles, pode-se destacar:

- identificar os elementos na representação simbólica utilizada:  $W_t \sim P(\lambda t)$  e 
$$P(W_t = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!};$$
- interpretar expressões do tipo: pelo menos dois, mais de dois, no máximo três, etc.;
- expressar, adequadamente, a conclusão de um teste de hipótese;
- definir e determinar o intervalo de valores da variável com probabilidades não desprezíveis;
- usar opções do menu da planilha eletrônica.

Estes elementos devem ser cuidadosamente considerados quando da reaplicação da seqüência de ensino apresentada, no sentido de oferecer condições aos alunos de superá-las, mesmo no caso de alguns desses pontos constarem de estudos precedentes.

Na pesquisa realizada, não foi possível encontrar uma forma de construir o Modelo de Poisson, sem apelar para a solução de equações diferenciais lineares homogêneas e não homogêneas de primeira ordem, como pretendido. Mas, a experiência realizada e o encaminhamento que foi feito mostraram que, com alguns conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral, os alunos foram capazes de acompanhar o desenvolvimento realizado.

Quanto ao tempo didático dispensado no processo apresentado, este pode ser minimizado, tendo em vista que, em um curso regular, pode-se preparar os alunos em vários aspectos antecipadamente como, por exemplo, na exploração da planilha e no uso das mesmas etapas em modelos menos complexos, como o Binomial. As avaliações, ao final de cada etapa, primordial na pesquisa, podem

ser descartadas e dessa forma agilizar o desenvolvimento do estudo, visto que o professor pode fazê-las no decorrer das atividades, no período de aula ou extra-classe. Nesta tese, optou-se pela não existência de estudos fora dos encontros, por considerar que trariam diferenças no rendimento de acordo com a dedicação de cada sujeito nessa tarefa, além de considerar que, mesmo em um curso regular, poucos são os alunos que se engajam, de forma adequada, neste tipo de atividade.

Um aspecto, em particular, foi motivo de dificuldade no transcorrer deste estudo: a representação adotada para a variável aleatória com distribuição de Poisson, qual seja,  $W_t$ . A sugestão que se faz é a utilização de outro tipo de representação simbólica que possa favorecer a determinação e emprego do modelo como, por exemplo,  $W_{\lambda,t}$ .

## QUESTÕES LEVANTADAS - SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Observa-se que a falta de pesquisas, com grupos de alunos, sobre o ensino e aprendizagem do Modelo de Poisson, permite concluir que as informações contidas nesta tese possam representar contribuições iniciais, não só àqueles que pretendem investigar sobre o tema, mas também para desenvolver um trabalho com Modelagem Matemática.

Nesta tese, a opção pelo estudo do Modelo de Poisson foi, particularmente, em razão da complexidade que ele envolve. A sugestão que se faz é da aplicação desse mesmo processo no ensino e aprendizagem de outros modelos de distribuição de probabilidades. Posto que a amostra de estudantes que participaram do estudo foi bastante reduzida, sugere-se que novos grupos sejam submetidos ao desenvolvimento feito com as adaptações necessárias. Particular interesse deve ser dado ao problema da interpretação de termos como: ao menos, no máximo, não mais, etc., salientado, também, por outros pesquisadores. Deve ser observado que, além da simples interpretação dos

termos supra citados, outros aspectos estão envolvidos, como: a probabilidade complementar, a soma das probabilidades igual um e os valores possíveis da variável aleatória discreta, entre outros, que podem ser detectados. As estratégias aqui utilizadas não foram suficientes para ajudar os sujeitos a superarem tais dificuldades que parecem ser merecedoras de pesquisas específicas.

Os resultados encontrados permitem contestar aqueles que justificam a introdução do Modelo de Poisson, como aproximação do Modelo Binomial, pela dificuldade dos elementos matemáticos envolvidos. O trabalho realizado mostrou ser possível que os alunos acompanhem sua construção e que, dessa forma, seu emprego na resolução de problemas de aproximação, é feito sem dificuldades. No entanto, a questão que se coloca neste estudo é: se o Modelo de Poisson é introduzido como aproximação do Modelo Binomial, os alunos são capazes de resolver as situações que não se referem a tal aproximação? E ainda, como é feita a passagem para os problemas, cuja única informação é a média? Será que os alunos conhecem e entendem os limites envolvidos na demonstração da aproximação muito mais facilmente do que o trabalho que foi desenvolvido neste estudo? A fixação de limites para os valores dos parâmetros do Modelo Binomial, a fim de que a aproximação Poisson possa ser usada, também pode ser contestada. Além da análise de livros didáticos efetuada, ter mostrado que não há homogeneidade na determinação desses valores, o número cada vez maior de alunos com acesso ao uso de um computador torna essa discussão menos significativa. Desse modo, o encaminhamento dado nesta tese, comparando os dois modelos para valores dos parâmetros estrategicamente selecionados, mostrando a proximidade sob determinadas condições (aumento do número de repetições e diminuição da probabilidade de sucesso) e só depois, exibir a demonstração formal da coincidência de ambos foi suficiente para garantir a correta aplicação do resultado; o uso da aproximação ficou condicionado, também, à disponibilidade de equipamento para o cálculo. No momento atual, esta parece ser uma boa maneira de focar a importante propriedade da relação entre os dois modelos.

Conforme relatos posteriores dos alunos que tiveram oportunidade de participar, tanto do projeto piloto como daquele descrito e analisado nesta tese, o

trabalho realizado trouxe contribuições para sua formação geral, que nenhum outro curso foi capaz de alcançar. Como autora deste estudo, posso afirmar que o desenvolvimento desta tese possibilitou um avanço substancial em minha formação de professora, pois, vários foram os momentos de reflexão quanto à prática de sala de aula e aos conhecimentos adquiridos em relação ao objeto de estudo em questão. Espero que esta pesquisa possa oferecer contribuições àqueles que estudam e preocupam-se com a Educação Matemática, em particular, com a Educação Estatística.

# REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La pensée sauvage, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

BARBOSA, J. C. *Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores*. 2001. 253f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Instituto de geociências e ciências exatas, Rio Claro, 2001.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BATANERO, C.; SERRANO, L. La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. *UNO*, Revista de la didáctica de las matemáticas, n. 5, p. 15-28, 1995.

BATANERO, C. Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, n. 25, p. 41-58, 2000. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones.htm>>. Acesso em: 27 jul. 2004.

BATANERO, C. Aleatoriedad, modelización, simulación. In actas: X JORNADAS SOBRE EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, Zaragoza: ICE, 2001, p. 119-130. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones.htm>>. Acesso em: 25 mar. 2002.

BATANERO, C.; TAUBER, L. M.; SÁNCHEZ, V. Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos. *Cuadrante*, v. 10, n. 1, p. 59-92, 2001. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones.htm>>. Acesso em: 10 ago. 2004.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2000.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La pensée sauvage, v. 19, n. 1, p. 77-124, 1999.

BOYER, C. B. *História da matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BROUSSEAU, G. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. *Estatística Básica*. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2004.

CARVALHO, C.; CÉSAR, M. 2001. *Aprender estatística através de trabalho colaborativo*: dados referentes ao 7º ano de escolaridade. Disponível em: <[http://www.caib.es/ibae/esdeveniment/jornades\\_10\\_01/doc/Artigo%20Espanha.doc](http://www.caib.es/ibae/esdeveniment/jornades_10_01/doc/Artigo%20Espanha.doc)>. Acesso em: 04 ago. 2004.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La pensée sauvage, v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La pensée sauvage, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. Aspectos problemáticos de la formación docente. In: XVI JORNADAS DEL SI-IDM, Huesca: grupo DMDC del SEIEM, 2001.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude. 3: ecologie et regulation. In: ACTES DE LA 11<sup>e</sup> ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, 2002, CD-ROM.

COURNOT, A. -A. *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*. Paris: Hachette, 1843. Disponível em: <<http://gallica.bnf.fr>>. Acesso em: 23 fev. 2005.

COUTINHO, C. *Introduction aux situations aléatoires dès le collège: de la modélisation à la situation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique cabri-géomètre II*. 2001. 330f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)—Universidade Joseph Fourier, Grenoble, 2001.

D'AMBRÓSIO, U. *Dos fatos reais à modelagem: uma proposta de conhecimento matemático e modelos como estratégia de conhecimento*. 1999. Disponível em: <<http://vello.sites.uol.com.br/ubi.htm>>. Acesso em: 29 nov. 2003.

DANTAL, B. Les enjeux de la modélisation en probabilités. In: CHAPUT, B.; HENRY, M. *Enseigner les probabilités au lycée*. Reims: IREM de Reims, 1997, p. 57-59.

DOUADY, R. L'ingénierie didactique un instrument privilégié pour une prise en compte de la complexité de la classe. In: *PME, XI*, Montréal, 1987, p. 222-228.

DUVAL, R. Basic issues for research in mathematics education. In: *PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS*. XXII, Arizona, 2000.

FELLER, W. *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. 1. ed. México: Limusa-Wiley, 1973, v. 1.

GALLEGO, D. C. La codeterminación entre las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas: pestalozzi y la enseñanza mutua. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La pensée sauvage, v. 24, n. 1, p. 11-44, 2004.

- GIRARD, J. C. Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités. In: CHAPUT, B.; HENRY, M. *Enseigner les probabilités au lycée*. Reims: IREM de Reims, 1997, p. 215-223.
- GIRARD, J. C. Modélisation et simulation. In: HENRY, M. *Autour de la modélisation en probabilités*. Presses universitaires Franc-Comtoises, 2001, p. 143-151.
- GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado Institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La pensée sauvage, v.14, n. 3, p. 325-355, 1994. Disponível em: <[http://www.ugr.es/local/jgodino/indice\\_tfs.htm](http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm)>. Acesso em: 15 ago. 2003.
- GODINO, J. D. Mathematical concepts, their meaning and understanding. In: PUIG, L.; GUTIÉRREZ, A. PROCEEDINGS OF THE 20<sup>th</sup> CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. Valência, v. 2, p. 417-424, 1996.
- GODINO, J.; BATANERO, C. Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In: SIERPINSKA, A.; KILPATRICK, J. *Mathematics education as a research domain: a search for identity*. Dordrecht: Kluwer, p. 177-195, 1998.
- GODINO, J. D. *Teoría de las funciones semióticas: um enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. 2003. 318f. Monografía (Cátedra da Universidade de Didática da Matemática)-Universidade de Granada, Espanha, 2003. Disponível em: <<http://www.ugr.es/local/godino/>>. Acesso em: 23 nov. 2004.
- GRANGÉ, J. P. Probabilité conditionnelle et indépendance. In: CHAPUT, B.; HENRY, M. *Enseigner les probabilités au lycée*. Reims: IREM de Reims, 1997, p. 339-374.
- GRUPO AZARQUIEL. *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis, 1993.
- GUIMARÃES, R. C.; CABRAL, J. A. S. *Estatística*. Portugal: Mc Graw-Hill, 1997.
- HENRY, M. Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. In: CHAPUT, B.; HENRY, M. *Enseigner les probabilités au lycée*. Reims: IREM de Reims, 1997, p. 77-84.
- HENRY, M.; DANTAL, B. Variables aléatoires et lois de probabilité: utilisation de l'analyse em probabilités. In: CHAPUT, B.; HENRY, M. *Enseigner les probabilités au lycée*. Reims: IREM de Reims, 1997, p. 300-304.
- HENRY, M. Étude d'un problème curriculaire: l'enseignement de la statistique. In: ACTES DE LA 12<sup>e</sup> ÉCOLE D'ÉTÉ DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, France, 2003, CD-ROM.

- KAPLAN, I. *Nuclear Physics*. Tradução de José Goldemberg e Clóvis Goldemberg. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1983.
- MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. *Noções de Probabilidade e Estatística*. 6. ed. São Paulo: EDUSP, 2004.
- MARIE, M. M. *Historie des sciences mathématiques*. Paris: Gauthier-Villars, 1887.
- MARTIN, T. *Probabilités et critique philosophique selon Cournot*. Paris: VRIN, 1996.
- MATOS, J. F. *Modelação matemática*. Lisboa: Universidade aberta, 1995.
- MEHL, S. *Chronomath: une chronologie des mathématiques*. Disponível em: <<http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/accueil.htm>>. Acesso em: 24 mar. 2003.
- MEYER, P. L. *Probabilidade: aplicações à estatística*. Tradução de Ruy de C. B. Lourenço Filho. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2003.
- MILONE, G. *Estatística: geral e aplicada*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.
- MORETTIN, L. G. *Estatística Básica*. 7. ed. São Paulo: Ed. do Brasil, 1999.
- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Biographies*. Disponível em: <<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Poisson.html>>. Acesso em: 21 out. 2002.
- PARZYS, B. Utilisation des arbres dans l'enseignement des probabilités. In: CHAPUT, B.; HENRY, M. *Enseigner les probabilités au lycée*. Reims: IREM de Reims, 1997, p. 225-238.
- POISSON, S. -D. *Traité de physique mathématique: théorie mathématique de la chaleur*. Paris: Bachelier, 1835. Exemplar disponível no IME, USP.
- POISSON, S. -D. *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile: précédés des règles générales du calcul des probabilités*. Paris: Bachelier, 1837. Exemplar disponível na Bibliothèque de mathématiques e d'informatique, École normale supérieure, Paris.
- PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO. 2005. *Guia de livros didáticos 2005: matemática, v. 3*. Disponível em: <[www.mec.gov.br](http://www.mec.gov.br)>. Acesso em: 20 jun. 2004.
- SILVA, C. P. *A matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento*. 2. ed. Curitiba: UFPR, 1992. Disponível em: <<http://www.accefyn.org.co/PubliAcad/Clovis/Clovispdf/7.pdf>>. Acesso em: 24 mar. 2003.

- SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B. Metodologia da resolução de problemas. ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO. 24, Caxambu, 2001.
- SPIEGEL, M. R. *Estatística*. Tradução de Pedro Cosentino. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 1993.
- STIGLER, M. S. 1998. *The history of statistics: The measurement of uncertainty before 1900*. Cambridge: Belknap Harvard.
- STRUIK, D. J. Por que estudar história da matemática? In: GAMA, R. (Org.). *História da técnica e da tecnologia*. QUEIROZ, T. A. (Ed.). Tradução de Célia Regina A. Machado; Ubiratan D'Ambrósio. São Paulo: EDUSP, 1985, v. 4, n. 11, p. 191-215.
- VERGNAUD, G. Epistemology and psychology of mathematics education. In: KILPATRICK, J.; NESHER, P. (Ed.) *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge press, 1994, v. 2, n. 17, p. 14-30.
- ZAQUI, M. *Evolution d'apprehensions probabilistes en situation de simulation*. 1991. 280f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Université de Mons, Institut de mathematique et d'informatique, Hainaut, 1992.
- WIKIPEDIA. Enciclopédia eletrônica. Siméon-Denis Poisson. Disponível em: <<http://www.wikipedia.org/wiki/Simeon-Poisson>>. Acesso em: 24 mar. 2003.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A - Siméon-Denis Poisson (1781-1840)

A seguir, as informações contidas no texto foram obtidas em Boyer (1974), Mehl (on-line), O'Connor e Robertson (on-line), Marie (1887), Wikipedia (on-line), Silva (1992), Stigler (1998) Poisson (1835).



Siméon-Denis Poisson, matemático e físico francês, nasceu em 21 de junho de 1781, em Pithiviers, França.

Durante o século XIV, as universidades de Paris e de Oxford foram os grandes centros científicos do mundo. No século XVIII, a Universidade de Paris, havia tempo que perdera essa posição e as universidades da França não eram os centros de matemática que hoje são.

**Figura 36. Foto de Siméon-Denis Poisson<sup>32</sup>**

Nos anos que antecederam à Revolução Francesa (1789), a maioria dos matemáticos franceses estava associada à igreja ou à classe militar; alguns conseguiam proteção do rei e outros se tornavam professores particulares.

O grande desenvolvimento da matemática na França, nas escolas técnicas do século XVIII, foi direcionado à aplicação da análise à mecânica e sobre navegação. Apesar de parecer que a matemática nesse século ficou estagnada,

<sup>32</sup> Obtida no site: <<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Poisson.html>>. Acesso em: 22 out. 2002.

os matemáticos da França não só contribuíram com novos conhecimentos, como também foram responsáveis por linhas de desenvolvimento que proliferaram no século XIX.

Na França do século XVIII, apenas os jovens de procedência nobre não tinham dificuldades para garantirem uma boa educação; os demais necessitavam de licença para freqüentarem as *Écoles* e esta podia ser obtida por membros influentes na igreja ou na classe militar.

Os pais de Poisson, não eram de procedência nobre, mas seu pai, Siméon Poisson, tinha sido soldado e essa era uma das poucas maneiras de se conseguir algum significativo privilégio institucional da nobreza. Ele serviu como soldado comum nas guerras em Hanoverian, mas desertou, desgostoso com os maus tratos que recebera de seu oficial superior. Quando Siméon-Denis Poisson nasceu, ele ocupava um pequeno cargo administrativo na cidade de Pithiviers; Poisson não era o primeiro filho, mas vários de seus irmãos e irmãs mais velhos morreram ainda criança. Como tinha a saúde frágil, sua mãe contratou uma enfermeira para acompanhá-lo, durante esse período crítico, com medo que ele também falecesse como os irmãos. Assim, conforme relatos, a enfermeira pendurava-o, para que ele não se contaminasse com as impurezas na limpeza da casa, e essa teria sido, talvez, a primeira experiência com pêndulo que o menino vivificara, quando se debatia pendurado. O pai de Poisson dispensava grande parte de seu tempo com o jovem menino, ensinando-o a ler e escrever.

Quando da insurreição parisiense de 14 de julho de 1789, que marcou o início da Revolução Francesa, Poisson tinha oito anos. Como era de se esperar, para alguém que sofrera discriminação com a nobreza, o pai de Poisson ficou entusiasmado com as mudanças políticas e como conseqüência imediata tornou-se presidente do distrito de Pithiviers, que fica na região central da França, cerca de 80km ao sul de Paris; nessa posição, ele poderia ser capaz de influenciar a carreira do filho, para o qual decidira que a profissão de médico poderia proporcionar um futuro seguro. Assim, mandou Poisson à casa de um tio cirurgião, em Fontainebleau, para ser aprendiz de cirurgião. Apesar de ser uma criança talentosa, a idéia não deu certo, provavelmente, por dois motivos: primeiro, porque ele não tinha interesse pela medicina e segundo, pela deficiente

coordenação motora, talvez resultante dos problemas de saúde na infância. Poisson retornou para casa e seu pai voltou a pensar em uma carreira que pudesse garantir o futuro para o filho.

Antes de 1794, havia revistas científicas, mas nenhuma com séria dedicação à matemática. A iniciativa para a fundação de um periódico de matemática veio da *École Polytechnique*, quando começou a publicar seu *Journal*. Pouco depois, em 1810, o primeiro periódico de matemática, *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, foi fundado por um antigo aluno da *École Polytechnique*, Joseph-Diaz Gergonne (1771–1859). Na Alemanha, surgiu um periódico semelhante, iniciado em 1826, por August Leopold Crelle (1780–1855), intitulado, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Os *Annales* de Gergonne não duraram muito tempo e, em 1836, o *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* foi fundado e editado por Joseph Liouville (1809–1882). Em 1865, foi fundada a *London Mathematical Society*, a primeira dedicada, exclusivamente, à matemática e começou a publicação de seus *Proceedings*. A *American Mathematical Society*, organizada em 1888, publica a revista *Mathematical Reviews* até hoje.

No início do século XIX, a maior parte das possibilidades de carreira, para matemáticos, era como professor nas universidades. No primeiro dia do século XIX, um novo planeta ou asteróide, Ceres, foi descoberto, tornando-se objeto de estudo de muitos cientistas da época, inclusive, matemáticos.

Voltando à história de Siméon-Denis Poisson, em 1796, a França já era uma república e seu pai resolveu mandá-lo novamente para Fontainebleau, mas, desta vez, para a *École Centrale*, onde apesar de sua dificuldade motora, ele mostrou ter um grande talento para aprender, especialmente, matemática. Seu professor, M. Billy, admirado com o rápido progresso do aluno, a ponto de se ver obrigado a estudar matemática de alto nível para acompanhar e avaliar o seu desenvolvimento, comparou-o a Jean de La Fontaine (1621-1695), e disse: “Petit Poisson, deviendra grand. Pouvü que Dieu lui prête vie.”

Como conseqüência, Poisson foi orientado a prestar os exames da *École Polytechnique* de Paris, em 1798 e, embora tivesse uma educação menos formal que a maioria dos candidatos, passou em primeiro lugar. Poucos alunos

conseguiram um sucesso tão rápido quanto Poisson, apesar de sua dificuldade para desenhar, fundamental em um curso de engenharia. Apesar disso, pela sua capacidade, em pouco tempo, os professores deixaram que ele seguisse os estudos, de acordo com sua preferência. Além de estudar com entusiasmo e afinco, Poisson encontrava tempo para ir ao teatro e participar de outras atividades sociais.

Em 1800, menos de dois anos de curso, ele publicou dois trabalhos: *Etienne Bézout's method of elimination* e *The number of integrals of an equation of finite differences*, que foram examinados por Sylvestre François Lacroix (1765-1843) e Legendre e recomendados a serem publicados no *Recueil des savants étrangers*. O trabalho sobre diferenças finitas, que Poisson escreveu quando tinha 18 anos, chamou a atenção de Legendre; Poisson achou que a Geometria Descritiva, curso ministrado por Monge, era impossível para ele suceder, pela dificuldade ao desenhar diagramas. Os trabalhos sobre a *Teoria das Equações* e *Teorema de Bezout* foram de tão alto nível, que Poisson foi graduado em 1800, sem fazer os exames finais.

Lagrange foi professor de Poisson no curso de teoria das funções, ficando bastante impressionado com o talento do jovem aluno, tornando-se seu amigo. Poisson é considerado sucessor de Laplace no estudo da mecânica celeste e da atração de esferóides; Laplace, além de professor de Poisson, tornou-se seu amigo e considerava-o como filho.

Imediatamente após terminar o curso, Poisson tornou-se instrutor, por forte recomendação de Laplace. Em 1802, tornou-se professor suplente e, em 1806, já era titular, no lugar de Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830), que tinha sido enviado por Napoleão a Grenoble. Poisson, não participava da política, quando os estudantes da *École Polytechnique* ameaçaram atacar as idéias de Napoleão para o Grand Empire, em 1804; ele manipulou os estudantes a desistirem da idéia, não porque concordava com as idéias de Napoleão, mas porque temia que o fato pudesse afetar a *École Polytechnique*. A administração de Napoleão não sabia dos motivos de Poisson, para tal atitude, mas achou muito bom tê-lo como aliado. Durante esse período, Poisson estudou equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais; em particular ele estudou problemas da física,

como o do pêndulo em um meio resistente e a teoria do som, de modo teórico.

Em 1808, além de professor da *École Polytechnique*, tornou-se astrônomo do Bureau des Longitudes. Em 1809, a *Faculté des Sciences* foi instituída e Poisson foi indicado para ser professor de mecânica racional. Entre 1808 e 1809, publicou importantes artigos com a *Academy of Sciences*: no primeiro deles, *Sur les inégalités des moyens mouvement des planètes*, além de estudar os problemas matemáticos sobre as perturbações dos planetas, que Laplace e Lagrange estavam estudando, usando séries de expansões para derivar soluções aproximadas; no segundo, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*, ele estudou uma consequência direta do método de variação das constantes arbitrárias de Lagrange. Além destes, publicou uma nova edição da *Theorie de la figure de la terre*, de Alexis Claude Clairaut (1713-1765), na qual confirmou a conjectura de Newton-Huygens de que a terra era achatada nos pólos (Christiaan Huygens (1629-1695)). Em 1811 publicou os dois volumes do *Traité de Mécanique*, que foi um excepcional trabalho, pela sua clareza, baseando-se nos apontamentos do curso na *École Polytechnique*.

Em 1811, Etienne Louis Malus (1775-1812) estava com uma doença terminal, e iria deixar uma vaga na seção de física do Instituto. Para assumir a vaga, os candidatos deveriam apresentar uma solução para o seguinte problema de eletricidade: determinar, por cálculo, e confirmar experimentalmente, o modo pelo qual a eletricidade é distribuída sobre a superfície de corpos esféricos considerados isolados ou na presença de outro; por exemplo, na superfície de duas esferas eletrizadas na presença uma da outra. Para simplificar o problema, a Classe pediu somente por um exame dos casos onde a eletricidade espalhada em cada superfície permanece sempre da mesma espécie. Poisson já tinha um grande progresso sobre o problema, quando em 24 de fevereiro de 1812, Malus faleceu; ele submeteu a primeira parte de sua solução a Academia em 9 de março, com o título: *Sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs* e obteve sucesso, passando a ser membro do Instituto.

Durante esse período, estudou o potencial no interior de massas em atração, produzindo resultados que encontraram aplicações em eletrostática. Ele produziu trabalhos em eletricidade, magnetismo, superfícies elásticas, velocidade

do som em gases, propagação do calor e vibrações elásticas. Fourier fez algumas objeções, que Poisson corrigiu, posteriormente, nas memórias de 1820 e 1821.

Em 1815, tornou-se examinador da *École Militaire de Saint Cyr* e em 1816, tornou-se examinador para os exames finais da *École Polytechnique*. Em 1817, Poisson casou-se com Nancy de Bardi e achava que a vida em família iria pressioná-lo de alguma maneira, mas sobreviveu a isso e continuou a produzir.

Em 1820, tornou-se conselheiro da Universidade e em 1827, geômetra do *Bureau des Longitudes* em sucessão a Laplace. Poisson nunca gostou de se manifestar politicamente, embora seu pai tenha sofrido com os maus tratos da classe aristocrata e o tenha doutrinado na primeira república. Motivado pelos Bourbons, seu ódio a Napoleão levou-o a tornar-se um Legitimista; dizem que essa atitude teria sido mais pela sua simplicidade de caráter do que por força política sendo dissuadido a ser voluntário da luta por essa causa. Posteriormente, sua fidelidade foi reconhecida, e ele recebeu o título de Barão em 1821, embora nunca o tenha usado. Na Revolução de Julho de 1830, durante o governo de Louis Philippe (1773-1850), a revogação de suas honras estava sendo feita no conselho de ministros, quando Dominique François Jean Arago (1786-1853) convidou-o para jantar no *Palais Royale*, onde ele foi reconhecido e recebido com todas as honras; imediatamente, a revogação foi cancelada e sete anos mais tarde, ele se tornou *peer of France*, não por razões políticas, mas, por ser um representante da França na ciência.

Em 1835, é publicado o livro: *Traité de Physique Mathématique de la chaleur*<sup>33</sup>, no qual, na segunda página, tem-se um relato das muitas ocupações de Poisson na época:

Membre de l'Institut, du Bureau des Longitudes et de l'Université de France; des Sociétés Royales de Londres et d'Édimbourg; des Académies de Berlin, de Stockholm, de Saint-Pétersbourg, de Boston, de Turin, de Naples, et de plusieurs autres villes d'Italie; de l'Université de Wilna; des sociétés italienne, astronomique de Londres, philomatiques de Paris et de Varsovie, et de la Société des Sciences d'Orléans.

Na terceira página, Poisson, faz um resumo sobre as pretensões do livro:

Cette théorie mathématique de la Chaleur formera la seconde

<sup>33</sup> Um exemplar pode ser encontrado na biblioteca central da Escola Politécnica na USP.

partie d'un *Traité de Physique Mathématique*, où je me propose de considérer successivement, sans m'astreindre à aucun ordre arrêté d'avance, les diverses questions de la Physique auxquelles je pourrai appliquer l'analyse. La première partie de ce *Traité* est la *Nouvelle théorie de l'action capillaire*, publiée en 1831.

Em 1837, um importante trabalho de Poisson na Teoria das Probabilidades, *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et matière civile, précédées des règles générales du calcul des probabilités*<sup>34</sup> é publicado. Nesse livro, em relação à generalização da lei dos grandes números de Bernoulli, Poisson considera  $m$  como o número de vezes que um evento  $E$  ocorre em  $\mu$  tentativas e supõe que  $p_i$  seja a chance de que  $E$  ocorra na  $i$ -ésima tentativa.

Assim, a diferença entre  $\frac{m}{\mu}$  e  $p' = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_\mu}{\mu}$  converge a zero quando  $\mu$

crece; isto é, a chance de que  $\frac{m}{\mu} - p'$  difira de zero, por mais que um dado  $\xi$ ,

decrece, tendendo a zero, quando  $\mu$  aumenta. O caso em que  $p_1 = p_2 = \dots = p_\mu$  é essencialmente a lei dos grandes números de Bernoulli. No referido trabalho, Poisson refere-se à formação de veredictos de júri entre os anos de 1825 a 1830, na França, época em que o júri era composto por doze membros e a decisão era dada por uma maioria de sete votos (em 1831, as regras mudaram e a decisão era definida por uma maioria de oito votos, dentre os doze membros). A contribuição de Poisson foi determinar os efeitos do tamanho do júri, no veredicto correto, e a definição da maioria para a condenação. A seguir, o desenvolvimento de uma pequena parte desse estudo é apresentada.

Poisson supõe que existe uma chance  $k$ , de que o acusado seja culpado (conseqüentemente,  $1 - k$  de ser inocente) e que  $k$  pode, em grandes populações, ser considerado como a proporção de culpados entre os acusados; ele supõe também, que os jurados decidem cada caso independentemente e que a chance de se obter um veredicto correto é  $u$ . Assim, usando a notação atual, se  $X$  é a variável aleatória: número de jurados que dão o veredicto correto dentre  $n$ , então

$X \sim B(n, u)$  e  $P(X \leq i) = \sum_{j=0}^i \binom{n}{j} u^j (1-u)^{n-j}$  é a probabilidade de que não mais de

<sup>34</sup> Um único exemplar foi encontrado na Bibliothèque de mathématiques et d'informatique na École normale supérieure em Paris.

$i$  jurados, dentre os  $n$ , dêem o veredicto correto.

Como, entre 1825 e 1830, o júri decidia por uma maioria de sete votos e ainda, considerando  $k$ , como a probabilidade de um acusado ser culpado, tem-se que a probabilidade de condenação de um culpado é dada por:

$$P(X \geq 7) = \sum_{i=7}^{12} \binom{12}{i} u^i (1-i)^{12-i}$$

e a condenação de um inocente, é dada por:

$$P(X \leq 5) = \sum_{i=0}^5 \binom{12}{i} u^i (1-i)^{12-i}$$

Dessa forma, a probabilidade de condenação de um acusado é dada por:  $\gamma = kP(X \geq 7) + (1-k)P(X \leq 5)$ , que pode ser

estimado por  $\frac{m}{\mu}$ , onde  $m$  é o número de condenados, dentre um grande número

$\mu$ , de julgados. O Intervalo de Confiança para  $\gamma$ , que Poisson deduz, usando a

distribuição normal padrão, é  $\left( \frac{m}{\mu} - \alpha \sqrt{\frac{2m(\mu - m)}{\mu^3}}, \frac{m}{\mu} + \alpha \sqrt{\frac{2m(\mu - m)}{\mu^3}} \right)$  onde

$\alpha$  é tal que:  $P\left(-\alpha \leq \frac{Z}{\sqrt{2}} \leq \alpha\right) = \delta$ , sendo  $Z \sim N(0, 1)$ .

Como ilustração, a seguir, é apresentada a análise que Poisson fez dos valores da Tabela 20.

**Tabela 20. Razão de condenação na França, nos anos de 1825 a 1830**

Ano	Nº de acusados	Nº de condenados	Razão de condenação
1825	6652	4037	0,6068
1826	6988	4348	0,6222
1827	6929	4236	0,6113
1828	7396	4551	0,6153
1829	7373	4475	0,6069
1830	6962	4130	0,5932
Total	42300	25777	-

Fonte: Poisson (1837, p. 371).

Poisson considera  $\mu$  como a soma dos acusados durante os seis anos e  $m$ , a soma dos condenados nesses seis anos. Assim,  $\mu = 42300$ ,  $m = 25777$ ,

$$\frac{m}{\mu} = 0,6094 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{2m(\mu - m)}{\mu^3}} = \sqrt{0,000011255} = 0,0033548 = 0,00335;$$

considerando,  $\alpha = 2$ ,

$$P\left(-2 \leq \frac{Z}{\sqrt{2}} \leq 2\right) = P(-2\sqrt{2} \leq Z \leq 2\sqrt{2}) = P(-2,83 < Z < 2,83) = 2(0,497673) = 0,9953;$$

logo, o Intervalo de Confiança para  $\gamma$ , com nível de 99,53%, será:

$$(0,6094 \pm 2(0,00335)), \text{ ou seja, } (0,6161 ; 0,6027).$$

No livro, Poisson faz comparações considerando os anos de 1825 a 1827 e 1828 a 1830, entre Paris e toda a França; compara ainda crimes contra pessoas e contra propriedades. O resto da investigação de Poisson, foca o efeito da mudança da definição de maioria em 1831, a determinação da probabilidade de culpado e a chance da decisão correta. Toda essa preocupação com julgamentos e veredictos reflete as condições da época na França.

Em 1839 é publicado o livro: *Mémoire sur le mouvement des projectiles dans l'air, en ayant égard à leur rotation de la Terre*. Neste, como ele mesmo observa, as pesquisas resultam de várias memórias do autor na *Académie des Sciences*, inseridas nos cadernos XXVI e XXVIII do *Journal de l'École Polytechnique*, sobre o estudo da influência da rotação da Terra sobre o movimento de um projétil lançado no ar.

Entre tantas atividades e tantas publicações, talvez duas frases, do próprio Poisson, possam explicar como ele conseguia combinar tanta coisa: “La vie n'est bonne que deux choses – à faire des mathématiques et a les professeur. La vie c'est le travail”.

Uma lista dos quase 400 trabalhos de Poisson, feita por ele mesmo, encontra-se no livro de M. Maximilien Marie (1887). A vila Pithiviers ergueu uma estátua em homenagem a Poisson em 1851. Em Paris, uma rua o homenageia com seu nome: Rua Denis Poisson.

O responsável pela construção da Torre Eiffel, em Paris, foi Gustave Eiffel; sua construção iniciou-se em 1885 e foi inaugurada em 1889. Para homenagear os grandes cientistas franceses, ele incluiu o nome de 72 deles em placas, em

volta do primeiro andar. As quatro faces desse andar, nomeadas: *Trocadéro*, *Grenelle*, *École Militaire* e *Paris* ganharam as placas com os nomes desses cientistas. O nome de Poisson consta na placa de número 53 e está na face denominada *École Militaire*. Com a pintura da Torre, na virada do século, os nomes desapareceram, mas, em 1986-1987, foram restabelecidos.

Sir Geoffrey Copley, em 1709, instituiu o prêmio, *Copley Medal of Royal Society of London*, no qual ele doava, anualmente, uma quantidade em dinheiro à Sociedade, a fim de ser usada no desenvolvimento de experimentos. Essa premiação durou até 1736, quando o prêmio seria dado à pessoa, cujo experimento tivesse a melhor aprovação pelos membros da Sociedade. Além disso, uma medalha, seria dada tanto à mais importante descoberta científica como para a maior contribuição feita por um experimento. Em 1831, as condições de premiação mudaram novamente, e o autor da pesquisa que o *Concil of the Society* considerasse a melhor, seria merecedor de todas as honras. Poisson, em 1832, foi o escolhido para ser premiado por esse conselho. Em 1881, Sir Jpseph Copley, doou uma quantidade de dinheiro para cobrir os custos da *Copley Medal*, que é destinada para um trabalho científico em qualquer campo. Em 25 de abril de 1840, Siméon-Denis Poisson faleceu na cidade de Sceaux, França.

## APÊNDICE B - Termo de compromisso e autorização

São Paulo, 20 de setembro de 2004.

Venho, por meio deste, atestar que minha participação na fase experimental do projeto de Doutorado em Educação Matemática da PUC-SP, da professora Maria Inez Rodrigues Miguel é voluntária e que não sofri qualquer tipo de pressão com tal finalidade.

Estou ciente das datas e horários que devo comparecer aos encontros para a realização do referido projeto, qual seja, das dezesseis às dezoito horas, nos próximos dias 20, 23, 27, e 30 de setembro e 4, 7, 14 e 18 de outubro do corrente ano, portanto, às segundas e quintas, do dia 20 de setembro a 18 de outubro, com exceção do dia 11 de outubro, por ser véspera de feriado.

Fui informado, também, da importância de minha pontualidade e frequência a todos os encontros, sob pena de comprometer a fase experimental do referido projeto.

Estando de acordo com a utilização dos resultados na tese da referida professora e ciente de que não serei identificado, subscrevo-me,

---

## APÊNDICE C - Carta comunicado de participação

São Paulo, 16 de setembro de 2004.

Caro responsável,

Venho, por meio deste, comunicar que o(a) aluno(a) \_\_\_\_\_, Matriculado(a) no curso de (Ciência da Computação) (Engenharia Elétrica), vai participar da fase experimental de meu projeto de Doutorado em Educação Matemática.

Os encontros dar-se-ão das 16 horas às 18 horas, nos próximos dias 20, 23, 27 e 30 de setembro e 4, 7, 14 e 18 de outubro do corrente ano, portanto, às segundas e quintas, do dia 20 de setembro a 18 de outubro, com exceção do dia 11 de outubro, por ser véspera de feriado.

Saliento a necessidade de que os alunos sejam pontuais e que não falem a nenhum dos encontros, sob pena de comprometer a fase experimental do referido projeto.

Agradeço, antecipadamente, sua cooperação, no sentido de viabilizar a participação do(a) aluno(a), supra citado(a), neste projeto, que acredito poderá trazer valiosas contribuições para a sua formação.

Sem mais,

---

*Maria Inez Rodrigues Miguel*

---

## APÊNDICE D - Ficha de identificação

Número e letra de identificação do seu crachá: \_\_\_\_\_ (a ser preenchido no primeiro encontro). Idade: \_\_\_\_\_ anos.

Você tem algum tipo de bolsa de estudos, qual? \_\_\_\_\_

Ensino Fundamental: \_\_\_\_\_ (particular ou público).

Ensino médio: \_\_\_\_\_ (particular, público, técnico, ...).

Você fez cursinho pré-vestibular? \_\_\_\_\_ (sim ou não). Qual? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_. Com que duração? \_\_\_\_\_.

Curso de graduação: \_\_\_\_\_ (Engenharia ou Computação).

No 1º ano de seu curso você ficou de dependência em alguma disciplina? \_\_\_\_\_  
(sim ou não). Em quais matérias? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_. (pode colocar só a sigla).

Você trabalha? \_\_\_\_\_ (sim ou não). Se sim, em quê? \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

(escreva sucintamente a atividade que você desempenha).

## APÊNDICE E - Texto sobre radioatividade

Este texto foi escrito com base em Kaplan (1983) e revisado pelas professoras da cadeira de Física Nuclear da Instituição de ensino onde se realizou o projeto piloto e a fase experimental desta tese.

A teoria atômica tem suas origens relacionadas à investigação da emissão de partículas  $\alpha$  e  $\beta$  por certos átomos. A Física Nuclear e a radioatividade estão intimamente ligadas; é importante medir transformações radioativas com alta precisão e descrevê-las quantitativamente.

Em 1874, Stoney sugeriu o nome de elétron à quantidade de eletricidade que precisa passar por uma solução, de modo a liberar um átomo de hidrogênio ou de qualquer substância univalente; porém, o nome elétron foi aplicado às próprias cargas negativas e esse uso tornou-se geral.

Em 1895, Roentgen descobriu os raios X, que são produzidos quando um feixe de raios catódicos atinge um alvo e, posteriormente, mostrou-se que esses raios são radiações eletromagnéticas como a luz. Em 1896, Becquerel descobriu que cristais de sal de urânio emitiam raios parecidos aos raios X; em seguida, foram identificados mais dois outros elementos radioativos: o polônio e o rádio.

Existem radiações naturais e provocadas. Pode ser mostrado que existem três tipos de radiações naturais: raios  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Na Figura 37 um esboço da emissão desses raios é apresentado.

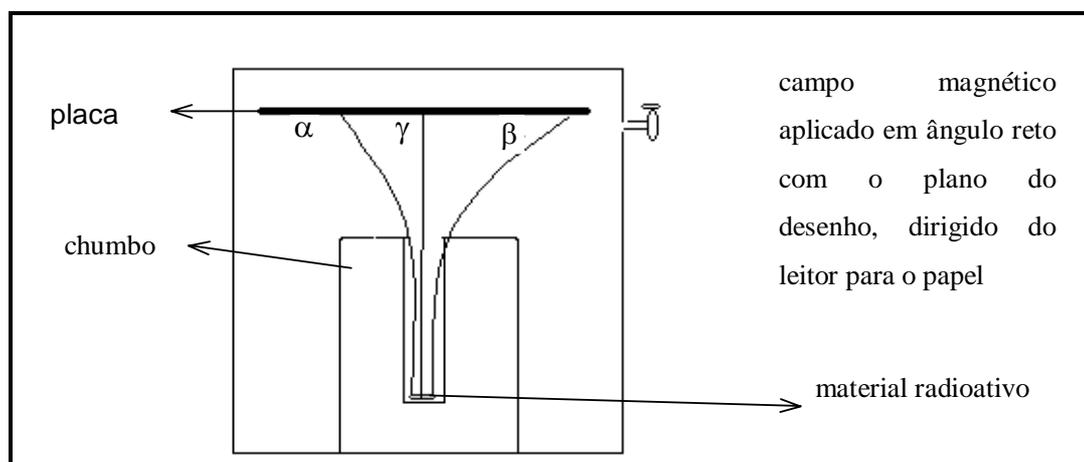


Figura 37. Emissão de raios  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

O estudo químico das substâncias radioativas mostrou que a radioatividade natural é causada por uma desintegração espontânea dos átomos radioativos em outros átomos, mas existem também as radioatividades artificiais que são produzidas em laboratório por meio de reações nucleares.

O estudo da radioatividade depende da determinação do número de partículas que chegam em um detector, por unidade de tempo, e suas energias. Os instrumentos para tal têm como base a ionização das moléculas do material, provocada pela passagem de uma partícula carregada por meio deste; uma dada amostra de substância radioativa emite um número definido de raios, por unidade de tempo. O mais freqüente é a emissão de raios  $\alpha$  e  $\gamma$ , ou então  $\beta$  e  $\gamma$ ; são raríssimos os elementos que emitem  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , porém, pode existir elemento que só emite raios  $\alpha$  ou elemento que só emite raios  $\beta$ ; não existe elemento que só emite raios  $\gamma$ . Existem três tipos de detectores elétricos: câmara de ionização, contador proporcional e contador Geiger-Mueller.

O contador Geiger-Mueller, também conhecido como contador Geiger, opera em determinada faixa de tensão que depende da geometria do contador (raio do fio anodo) e da pressão do gás de enchimento; ele pode medir raios  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , e X.

A base da teoria da desintegração radioativa é a descrição quantitativa do crescimento e decaimento radioativos. Um indício da maneira pela qual uma substância radioativa é produzida a partir de outra foi fornecido por experiências antigas. Crookes (1900) descobriu que um pequeno resíduo de um sal de urânio mostrou ser altamente radioativo; ele o denominou de urânio X (UX). Becquerel descobriu que, se o UX e frações de urânio fossem mantidos separados por algum tempo, a atividade do UX diminuía enquanto a da fração do urânio aumentava. Resultados parecidos foram obtidos com o tório (ThX).

A intensidade da radioatividade, chamada atividade (A), é proporcional ao número de átomos que se desintegram por unidade de tempo. Assim, o decréscimo por unidade de tempo, no número de átomos de um elemento radioativo, por causa da desintegração, é proporcional ao número de átomos que ainda não se desintegraram, e este fator de proporcionalidade é a constante de

desintegração ( $\lambda$ ) e é característica da substância radioativa particular.

Schweidler (1905) supôs que a desintegração de um átomo de um elemento radioativo está sujeita às leis da probabilidade e que a probabilidade de um átomo se desintegrar em um intervalo de tempo  $\Delta t$  é independente da história passada do átomo e é a mesma para todos os átomos do mesmo tipo. A probabilidade de desintegração depende somente da duração do intervalo de tempo e, para intervalos suficientemente pequenos, é proporcional a  $\Delta t$ , isto é, sendo  $X$  o tempo para que um átomo se desintegre, então  $P(X \leq \Delta t) \cong \lambda \cdot \Delta t$ .

Um nuclídeo radioativo pode ser caracterizado pela razão na qual se desintegra, ou pela constante de desintegração, ou pela meia-vida, ou ainda, pela vida média.

A meia-vida ( $T$ ) é o tempo necessário para que metade dos átomos radiativos se desintegrem; após uma meia vida,  $\frac{N(T)}{N_0} = \frac{1}{2}$  onde  $N_0$  é o número de átomos radioativos inicialmente e  $N(T)$  é o número de átomos radioativos presentes no instante  $T$ . Após  $n$  meias-vidas ( $t = n \cdot T$ ), a fração da atividade remanescente é  $(1/2)^n$ ; essa fração nunca se anula, mas se torna muito pequena. Após sete meias-vidas, a atividade é  $1/128$ , ou menos que 1% da atividade inicial e após dez meias-vidas, a atividade é  $1/1024$ , ou cerca de 0,1% da atividade inicial e é, em geral, desprezível em comparação ao valor inicial. Assim, a meia-vida pode ser determinada experimentalmente, medindo-se a atividade como função do tempo, como no caso da constante de desintegração.

A fim de encontrar uma relação entre a meia-vida ( $T$ ) e a constante de desintegração ( $\lambda$ ), considere a variável  $X$  definida por: tempo para que um átomo radioativo se desintegre;  $X$  pode ser considerada, então, uma variável aleatória que pode assumir qualquer valor  $t \in \mathbb{R}^{>0}$ .

Seja  $g$  a função:  $g: \mathbb{R}^{>0} \rightarrow [0, 1]$ , definida por:  $g(t) = P(X > t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^{>0}$ , isto é, a probabilidade de que o tempo para um átomo radioativo se desintegrar seja maior que  $t$ .

Sendo  $t$  e  $s$  positivos, tem-se:  $g(t + s) = P(X > t + s)$ , isto é, a probabilidade

de que o tempo para um átomo se desintegrar seja maior que  $t + s$ , ou em outras palavras, o átomo não se desintegra antes do instante  $t + s$ ; isso só é possível se o átomo não se desintegrou no intervalo  $[0, t[$  e, também, o átomo não se desintegrou no intervalo  $[t, t + s[$ , que tem duração  $s$ . Em probabilidade, pode-se traduzir essa idéia, escrevendo:  $P(X > t + s) = P(X > t \cap X > s)$ ; como os intervalos de tempo não são sobrepostos, segue que:

$$P(X > t \cap X > s) = P(X > t) \cdot P(X > s) = g(t) \cdot g(s)$$

Logo, tem-se que  $g(t + s) = g(t) \cdot g(s)$ , para todo  $t$  e  $s$  reais positivos; essa propriedade da função  $g$  traz uma consequência imediata:

sendo  $t = 1$  e  $s = 1$ , tem-se:  $g(2) = g(1 + 1) = g(1) \cdot g(1) = [g(1)]^2$ ;

sendo  $t = 2$  e  $s = 1$ , tem-se:  $g(3) = g(2 + 1) = g(2) \cdot g(1) = [g(1)]^2 \cdot g(1) = [g(1)]^3$ ;

por recorrência, tem-se que  $g(n) = [g(1)]^n$ , para todo  $n$  inteiro positivo.

Analogamente, sendo  $t = 1/2$  e  $s = 1/2$ , tem-se  $g(1) = g(1/2 + 1/2) = g(1/2) \cdot g(1/2) = [g(1/2)]^2$ , que equivale a dizer que  $g(1/2) = \sqrt{g(1)} = [g(1)]^{1/2}$  e, também, por recorrência, para qualquer racional positivo  $r$ ,  $g(r) = [g(1)]^r$ .

Considerando duas séries adjacentes de racionais convergindo na direção de  $t$ , uma crescente e outra decrescente, pode-se provar que para todo  $t$  real positivo,  $g(t) = [g(1)]^t$ ; tal demonstração foge aos propósitos deste estudo e será omitida.

Conforme foi visto,  $P(X \leq \Delta t) \cong \lambda \cdot \Delta t$ , onde  $\Delta t$  é um intervalo suficientemente pequeno; assim,  $g(\Delta t) = P(X > \Delta t) = 1 - P(X \leq \Delta t) = 1 - \lambda \cdot \Delta t$  e por outro lado, temos também que  $g(\Delta t) = [g(1)]^{\Delta t}$ ; derivando  $g(\Delta t)$ , em relação à  $\Delta t$ , nos dois casos, tem-se  $g'(\Delta t) = -\lambda$  e  $g'(\Delta t) = [g(1)]^{\Delta t} \ln g(1)$ . Considerando  $\Delta t \rightarrow 0$ , tem-se:  $g'(0) = -\lambda$  e  $g'(0) = \ln g(1)$ . De onde se pode obter  $-\lambda = \ln g(1)$ , ou seja,  $e^{-\lambda} = g(1)$ .

Como  $g(t) = [g(1)]^t$  tem-se:  $g(t) = (e^{-\lambda})^t = e^{-\lambda \cdot t}$  ou  $P(X > t) = e^{-\lambda \cdot t}$ .

Quando  $t = T$ , 50% dos átomos já se desintegraram e, portanto, a probabilidade de um átomo, escolhido ao acaso dentre aqueles iniciais, se desintegrar até o instante  $t = T$  é  $1/2$ . Pode-se escrever então que:  $P(X \leq T) = 1/2$ , ou equivalentemente,  $P(X > T) = 1 - 1/2 = 1/2$ , ou seja,  $e^{-\lambda \cdot T} = 1/2$ .

Aplicando logaritmo neperiano em ambos os membros da última igualdade têm-se:

$$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\lambda \cdot T} \Rightarrow \ln 2^{-1} = -\lambda \cdot T \cdot \ln e \Rightarrow -\ln 2 = -\lambda \cdot T \Rightarrow \ln 2 = \lambda \cdot T \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda} \cong \frac{0,693}{\lambda}.$$

Dessa forma, a relação existente entre a meia-vida  $T$  e a constante de desintegração  $\lambda$  é dada por:  $T = \frac{\ln 2}{\lambda} \cong \frac{0,693}{\lambda}$ .

A vida média, ou expectativa de vida ( $\tau$ ) dos átomos de uma espécie radioativa é dada pela soma dos tempos de existência de todos os átomos, dividida pelo seu número inicial. Encontrando uma relação entre  $\lambda$ ,  $T$  e  $\tau$ :

Considere um intervalo de tempo, de pequena duração:  $[t, t + \Delta t]$ , isto é,  $\Delta t$  é suficientemente pequeno. Tem-se, portanto,

$X$ : variável aleatória: tempo para que um átomo radioativo se desintegre;

$N_0$ : número de átomos radioativos presentes no instante inicial  $t = 0$ ;

$N(t)$ : número de átomos radioativos presentes no instante  $t$ ;

$N(t + \Delta t)$ : número de átomos radioativos presentes no instante  $t + \Delta t$ .

Para que um átomo radioativo esteja presente no instante  $t$  é necessário que o tempo para que esse átomo se desintegre seja maior que  $t$ ; conforme calculado anteriormente, a probabilidade de que um átomo radioativo esteja presente no instante  $t$ , ou seja, tenha um tempo de existência superior a  $t$ , é dada por:  $P(X > t) = e^{-\lambda \cdot t}$  que, também, representa a porcentagem de átomos radioativos presentes no instante  $t$ .

Assim,  $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$  e  $N(t + \Delta t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot (t + \Delta t)}$  e, portanto, o número de átomos que se desintegrou no intervalo  $[t, t + \Delta t]$  é dado por:

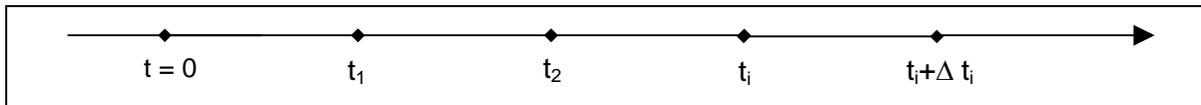
$$N(t) - N(t + \Delta t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} - N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot (t + \Delta t)} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} - N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta t} =$$

$$= N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot [1 - e^{-\lambda \cdot \Delta t}] = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot P(X \leq \Delta t).$$

Como foi visto anteriormente, quando o intervalo de tempo é suficientemente pequeno, a probabilidade de que um átomo radioativo se desintegre é proporcional ao comprimento do intervalo, isto é,  $P(X \leq \Delta t) \cong \lambda \cdot \Delta t$ , onde  $\lambda$  é um real positivo. Substituindo esse resultado na última equação, vem:

$$N(t) - N(t + \Delta t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot \lambda \cdot \Delta t.$$

Considere, agora, uma partição do tempo, como na Figura 38:



**Figura 38. Partição do tempo**

Pelo resultado anterior, em cada um dos intervalos da partição, tem-se:

$N(t_i) - N(t_i + \Delta t_i) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_i} \cdot \lambda \cdot \Delta t_i$  átomos radioativos que se desintegraram nesse intervalo. Considere  $d_i$ , tal que  $t_i < d_i < t_i + \Delta t_i$ , o instante em que esses átomos se desintegraram. Assim, cada um desses  $N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_i} \cdot \lambda \cdot \Delta t_i$  átomos radioativos têm tempo de existência igual a  $d_i$ .

Como na definição de vida média deve-se somar os tempos de existência de todos os átomos radioativos e dividir pelo seu número inicial, tem-se que a vida

média pode ser dada pela Soma de Riemann:  $\tau \cong \frac{\sum_{i=1}^{\infty} d_i \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_i} \cdot \lambda \cdot \Delta t_i}{N_0}$ . A fim de

melhorar a aproximação, pode-se diminuir o comprimento de cada intervalo, isto é, diminuir todos os  $\Delta t_i$ , ou seja, calcular o limite, quando o máximo dos  $\Delta t_i$  tende a zero. Tem-se, então:

$$\tau = \lim_{\text{máx.} \Delta t_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} d_i \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_i} \cdot \lambda \cdot \Delta t_i}{N_0}, \text{ que é igual a:}$$

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} t \cdot N_0 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt}{N_0} = \lambda \cdot \int_0^{\infty} t \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt.$$

Usando integração por partes, sendo:

$$u = t \Rightarrow du = dt \quad e$$

$$dv = e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt \Rightarrow v = \int e^{-\lambda \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{-\lambda} \int e^{-\lambda \cdot t} (-\lambda \cdot dt) = -\frac{e^{-\lambda \cdot t}}{\lambda}, \text{ tem-se:}$$

$$\tau = \lambda \cdot \left\{ \left[ t \cdot \left( -\frac{e^{-\lambda \cdot t}}{\lambda} \right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left( -\frac{e^{-\lambda \cdot t}}{\lambda} \right) \cdot dt \right\} = \left( -\frac{t}{e^{\lambda \cdot t}} \right)_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Sendo assim, a vida média é o inverso da constante de desintegração:

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad e, \text{ portanto, } T = 0,693 \tau = \frac{0,693}{\lambda}.$$

Como resultado das pesquisas físicas e químicas sobre os elementos radioativos que ocorrem na natureza, provou-se que cada nuclídeo radioativo é um membro de uma de três longas cadeias radioativas, chamadas de série do urânio, do actínio e do tório.