-

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
DOUTORADO

PATRICIA PUJOL GOULART CARPES

CONHECIMENTOS DIDÁTICO-MATEMÁTICOS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE NÚMEROS RACIONAIS

Santa Maria/RS
2019

PATRICIA PUJOL GOULART CARPES

CONHECIMENTOS DIDÁTICO-MATEMÁTICOS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE NÚMEROS RACIONAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Eleni Bisognin

Santa Maria/RS

2019

Universidade Franciscana

ÁREA DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

A COMISSÃO EXAMINADORA, ABAIXO-ASSINADA, APROVA A TESE:

CONHECIMENTOS DIDÁTICO-MATEMÁTICOS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE NÚMEROS RACIONAIS

Elaborada por

PATRICIA PUJOL GOULART CARPES

COMISSÃO EXAMINADORA:

Eleni Bisognin

Profª. Drª. Eleni Bisognin – Universidade Franciscana

Presidente

Profª. Drª. Carmen Teresa Kaiber – Universidade Luterana do Brasil

Liane T. W. Roos

Profª. Drª. Liane Teresinha Wendling Roos – Universidade Federal de Santa Maria

Silvia Maria de Aguiar Isaia

Profª. Drª. Silvia Maria de Aguiar Isaia – Universidade Franciscana

Profª. Drª. Denise Kriedte da Costa - Universidade Franciscana

Santa Maria, 24 de outubro de 2019.

C297c Carpes, Patricia Pujol Goulart

Conhecimentos didático-matemáticos do professor de matemática para o ensino de números racionais / Patricia Pujol Goulart Carpes ; orientação Eleni Bisognin – Santa Maria : Universidade Franciscana – UFN, 2019.

265 f. : il.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Universidade Franciscana – UFN

1. Programa formativo de professores 2. Ensino e aprendizagem dos números racionais 3. Idoneidade didática 4. Conhecimentos didático-matemáticos 5. Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática I. Bisognin, Eleni II. Título.

CDU 51

Elaborada pela Bibliotecária Eunice de Olivera CRB/10 – 1491

UNIVERSIDADE FRANCISCANA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
DOUTORADO

A COMISSÃO EXAMINADORA, ABAIXO-ASSINADA, APROVA A TESE:

CONHECIMENTOS DIDÁTICO-MATEMÁTICOS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE NÚMEROS RACIONAIS

Elaborada por

PATRICIA PUJOL GOULART CARPES

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Eleni Bisognin

Prof. Dr. Carmen Teresa Kaiber

Prof. Dr. Liane Teresinha Wendling Roos

Prof. Dr. Silvia Maria de Aguiar Isaia

Prof. Dr. Denise Kriedte da Costa

Prof. Dr. Vanilde Bisognin
Suplente 1

Prof. Dr. Thais Scotti do Canto Dorow
Suplente 2

Dedicatória

Dedico este estudo à minha família, aos meus professores,
aos meus alunos, ao PPGECIMAT e Escolas/Universidade onde atuo(ei) que
me impulsionaram para que esse trabalho fosse desenvolvido.

RESUMO

Os conhecimentos que envolvem o trabalho do professor de Matemática ao ministrar suas aulas devem levar em consideração diferentes dimensões de acordo com a perspectiva do sistema modular Conhecimentos Didáticos Matemáticos (CDM) desenvolvido por Godino e colaboradores, que interpreta e organiza os conhecimentos do professor a partir de três dimensões, a saber: dimensão matemática, dimensão didática e dimensão meta didático-matemática. O presente estudo visa investigar o desenvolvimento dos conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais junto a um grupo de professores de Matemática com base no sistema CDM. Para tal organizamos um curso formativo e investigativo com professores de Matemática da rede municipal de ensino de Itaqui (RS) versando sobre o objeto matemático número racional nos anos finais do Ensino Fundamental. O curso foi organizado em nove encontros presenciais e sequenciais, perfazendo 36 horas, e discorreu sobre os conhecimentos didático-matemáticos do professor ao ensinar especificamente o tema por meio de portfólios construídos pelos professores. A pesquisa de base qualitativa, teve seus dados analisados a partir do Guia de Avaliação da Idoneidade Didática de Processos de Instrução em Educação Matemática (GVID-IDM) no qual aponta componentes e indicadores para analisar e avaliar cursos de formação de professores por meio das dimensões do CDM que está embasado no EOS (Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e Instrução Matemática) de Godino e colaboradores. Os dados apontam que os professores possuem pouca familiaridade no trânsito entre significados dos números racionais e suas representações. Como também, não estão familiarizados com a metodologia da Resolução de Problemas. Os portfólios construídos pelos professores durante o curso de formação serviram para orientar a proposta da formação, organizar as atividades/pensamento dos professores, as interações e as trocas de experiências quanto as atividades e dificuldades dos professores e dos alunos no ambiente de sala de aula. Eles propiciaram também uma reflexão/apoio sobre os conhecimentos mobilizados sobre os números racionais. As atividades desenvolvidas no curso foram centradas na elaboração e encaminhamentos do professor para elucidar dúvidas recorrentes dos alunos ou conflitos epistêmicos e cognitivos. Por fim, ponderamos que a articulação coerente e sistêmica das dimensões, nesse processo de formação continuada de professores de Matemática, se revela como um ambiente propício de aprimoramento dos conhecimentos didático-matemáticos dos professores e como uma teoria que subsidia e orienta uma proposta de ensino e aprendizagem dos números racionais para os anos finais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Programa formativo de professores. Ensino e aprendizagem dos números racionais. Idoneidade didática. Conhecimentos didático-matemáticos. Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática.

ABSTRACT

The knowledge that involves the work of the Mathematics teacher when teaching his classes should take into account different dimensions according to the perspective of the modular system CDM (Didactic-Mathematical Knowledge – DMK in English) developed by Godino and collaborators, which interprets and organizes the teacher's knowledge from of three dimensions, namely: mathematical dimension, didactic dimension and meta didactic-mathematical dimension. The present study aims investigate the development of Didactic-Mathematical Knowledge about rational numbers in a group of Mathematics teacher based on system CDM. For this, we organized a training and investigative course with mathematics teachers from the municipal schools of Itaqui (RS) dealt with the mathematical object "rational number" for the final years of elementary school. The course was organized in nine face-to-face and sequential meetings, totaling 36 hours and discussed the teacher's didactic-mathematical knowledge by specifically teaching the theme and using portfolios built by the teachers. The qualitative research had its data were analyzed from the Guide to Evaluate the Didatic Suitability of Mathematical Education Instruction Processes (GVID-IDM) which points out components and indicators to analyze and evaluate teacher education courses by the dimensions of the CDM and that is based on the EOS (Onto-Semiotic Approach – OSA in English) of Godino and collaborators. The data indicate that teachers have little familiarity in the transit between meanings of rational numbers and their representations. In addition, they are unfamiliar with the Problem Solving methodology. The portfolios built by the teachers during the training course served as a guide for the proposed formation, to organize the teachers' activities / thinking, and orientate the interactions and the exchange of experiences between the teachers and students in the classroom environment. They also provided a reflection / support on the knowledge mobilized on rational numbers. The activities developed in the course were focused on teacher preparation and referrals to elucidate recurring student doubts or epistemic and cognitive conflicts. Finally, we consider that the coherent and systemic articulation of the dimensions, in this process of continuous formation of Mathematics teachers, reveals itself as a favorable environment for the improvement of teachers' didactic-mathematical knowledge. Beyond this is a theory that supports and guides a proposal for teaching and learning rational numbers for the final years of elementary school.

Keywords: Teacher Training Program. Teaching and learning of rational numbers. Didactic suitability. Didactic-mathematical knowledge. Onto-semiotic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Minha trajetória profissional é composta por dois momentos: um deles no Ensino Fundamental da Rede Pública, onde lecionei aulas de Matemática por quatro anos e o outro no Ensino Superior Público no qual há mais de quatro anos ministro aulas, principalmente, aos licenciandos em Matemática. Durante esse período, em diferentes etapas da educação, são notáveis e cada vez mais recorrentes as dificuldades apresentadas pelos alunos quando o objeto de estudo são os números racionais ou conteúdos que os envolvem.

Inicialmente trabalhando com alunos de 6º e 7º ano do Ensino Fundamental sobre números racionais, a preocupação como docente estava centrada no estudante compreender as partes de um todo e a sua representação na forma fracionária, figural e, posteriormente, a decimal. Na sequência das aulas e de ano para outro ainda sendo professora dos mesmos alunos, percebia a não compreensão por eles do número racional nas suas diferentes representações. Ressalto que a forma de percentual não era estimulada por não fazer parte do currículo da Escola.

O incômodo nesta lacuna, tanto de aprendizagem como de ensino, aflorou quando o meu “trabalho” passou a ser formar professores de Matemática e que os mesmos também apresentavam dificuldades na compreensão e operações com os números racionais.

Atuando como coordenadora de área do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), recebi relatos e angústias de bolsistas sobre suas próprias defasagens e dos seus alunos (da Escola conveniada ao Programa) quanto às dificuldades de ensino e aprendizagem envolvendo as frações e/ou os números decimais. E foi, neste momento, que se criou um fio condutor para investigar, juntamente com os bolsistas, o processo de ensino e aprendizagem para a compreensão dos números racionais na Educação Básica.

No início dos estudos o ponto que mais me instigou foram os trabalhos de Kieren (1975) quando apontou que os números racionais são constituídos de diferentes construtos e que sua compreensão mais ampla depende do entendimento de diferentes significados. E, ainda, como as frações e os números racionais estão presentes em diversas situações, Kieren (1980) indicou cinco ideias básicas para a compreensão dos números racionais, sendo a parte/todo, o quociente, o operador, a medida e a razão.

Considero que essas ideias me instigaram, pois, durante minha formação inicial e no período em que lecionei na Educação Básica, não me era explícita a compreensão dos números racionais por meio dos seus diferentes significados. Logo, a partir desses estudos, percebi uma possibilidade de investigação de como levar esse conhecimento aos professores de Matemática e aprimorá-lo em suas práticas de ensino.

Revisitando a literatura encontramos[1] também as contribuições de Behr, Post (1992), Behr, Lesh, Post, Silver (1983) e Behr et al (1984) quanto a uma base conceitual que permitiu identificar os principais problemas que envolvem os números racionais e as soluções que os estudantes dão a eles. Os autores complementam que o conceito de número racional está entre as ideias Matemáticas mais importantes e complexas durante a Educação Básica.

> Sua importância pode ser vista de diferentes perspectivas: a) de uma perspectiva prática, a capacidade de lidar efetivamente com este conceito melhora consideravelmente a capacidade de compreender e lidar com situações e problemas da realidade; b) de uma perspectiva psicológica, os números racionais constituem um cenário rico dentro do qual a criança pode desenvolver e expandir estruturas mentais para continuar seu desenvolvimento intelectual e c) de uma perspectiva matemática, o entendimento dos números racionais fornece a base sobre a qual as operações algébricas elementares podem se fundamentar. (BEHR; LESH; POST; SILVER,1983, p. 91)

Na sequência, Romanatto (1997) em sua tese de doutorado intitulada “Número racional: relações necessárias à sua compreensão” discorre que a plena compreensão dos números racionais passa por um trabalho significativo em todos os contextos em que tal assunto se faz presente. E, ainda, propõe que

> O número racional, para sua efetiva compreensão, deveria ser visto como uma teia de relações nele incidente ou dele emergente. Dos mais variados contextos em que o número racional está presente deve emergir ou incidir uma teia de relações que possibilitará sua plena compreensão. No processo de ensinar e aprender, o mais importante deverá ser o trabalho com essa teia de relações, e assim é que se dará o efetivo entendimento desse conteúdo matemático, que quando referido a um contexto particular, implicará algumas relações e outras não. (p.112)

O autor aponta que, com os números racionais, a ideia de conjunto nos naturais deve ser ampliada para abranger não apenas outros tipos de problemas, mas outros contextos. Ainda nos números naturais, poderia ser explorada, por exemplo, a divisão como uma partição e quantidade (medida) para após a operação ser recuperada e ampliada em diferentes contextos nos racionais.

Romanatto (1997) aponta, também, para um ensino voltado para as representações dos números racionais (sendo que as primeiras ideias das crianças devem ser falando, mostrando, desenhando para, na sequência, os representarem na forma escrita – fracionário, decimal, percentual) já que uma representação pode ter limitação de notação. Por exemplo, $\frac{2}{3}$ na reta

[1] Até então, no texto, usamos a primeira pessoa do singular para apresentar a autora. Na sequência, o verbo está na primeira pessoa do plural.

numérica, para alguns alunos pode ser entre o 2 e 3. O que na forma decimal 0,6666 pode facilitar sua localização correta.

As produções com área temática no ensino e/ou aprendizagem dos números racionais abordam suas diferentes representações e significados, assim como dificuldades e erros nesse processo. Silva (1997) em seus estudos aponta dois obstáculos epistemológicos para compreensão das frações, sendo a) o aluno aceitá-las como um número e b) querer aplicar os conhecimentos dos números naturais com frações. Um erro comum é considerar que se $2 < 3$, então $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$.

Onuchic e Alevatto (2008), apontam em suas pesquisas a importância do ensino que explore a multiplicidade de significados/personalidades dos racionais ao expressar

> Nossas experiências, em oficinas de formação de professores em que esta forma de trabalho foi implementada, têm mostrado que as diferentes "personalidades" dos números racionais muitas vezes são desconhecidas, ou mal compreendidas, ou ignoradas ou trabalhadas apenas superficialmente em sala de aula. Não raro, razões são consideradas como frações, uma vez que, a partir de seu símbolo, a notação barra fracionária, induzem a um tratamento semelhante. É necessário que se tenha um real conhecimento e que se reflita cuidadosamente sobre suas diferenças. Não se trata de apresentar nomes (ponto racional, quociente, fração, operador, razão), muito embora a nomenclatura matemática seja, em muitos casos, de extrema relevância. O fundamental é permitir que os alunos desenvolvam compreensões sobre estes conceitos, dando-se-lhes a oportunidade de encontrar os diferentes significados dentro de uma variedade de problemas. (ONUCHIC; ALEVATTO, 2008, p. 99-100)

Pelo menos duas informações importantes citadas pelas autoras nos chamam atenção. Uma delas é que os professores não têm domínio da multiplicidade de significados que envolvem os números racionais. Campos, Magina e Nunes (2006) apontam em seus estudos que, mesmo que os professores sejam capazes de resolver problemas com frações em diferentes situações, não as empregam em seu trabalho, isto é, lançam um número de situações limitadas para ensinar e ajudar seus alunos a superarem possíveis dificuldades ou concepções errôneas.

Complementando essa informação, vários estudos apontam para a prevalência de um significado em detrimento dos outros. As produções de Silva (1997) e Magina e Campos (2008) identificaram que professores brasileiros das séries iniciais costumam empregar situações de parte/todo como o principal contexto para o ensino de frações. Nunes e Bryant (1997) apontam que esta técnica de contagem dupla (parte/todo) leva os alunos a desenvolverem um raciocínio sobre frações baseado principalmente na percepção, em detrimento das relações lógico-matemáticas envolvidas, deste modo, não acarretando numa compreensão ampla dos números racionais.

A segunda informação que destacamos de Onuchic e Alevatto (2008), diz respeito à multiplicidade de significados dos números racionais, mas, principalmente, à oportunidade de encontrar os diferentes significados/conceitos/personalidades em situações de contextos diversos. Neste trabalho são adotados os significados definidos por Kieren (1988). Entretanto, há várias classificações dos números racionais dependendo do aporte teórico adotado. A ideia que permanece em todos os estudos é a diversidade de situações-problemas em que os números racionais são encontrados.

Nos últimos anos, as pesquisas de teses de doutorado com temática “números racionais” dirigidas à formação continuada de professores tiveram como público alvo principalmente os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 5º ano), muito provavelmente por ser nesta etapa da educação que são trabalhadas as primeiras ideias sobre números racionais. Esse fato requer atenção, pois são os primeiros entendimentos que os alunos têm e, também, pela formação inicial que os pedagogos recebem de Matemática.

Carpes, Pigatto e Bisognin (2017) realizaram um mapeamento de 11 teses em Programas de Pós-Graduação em Ensino/Educação Matemática brasileiros que versavam sobre o objeto número racional entre os anos de 1997 a 2017. As autoras supracitadas apontam que o baixo número de produções sobre o tema retrata que poucas pessoas se envolvem com esse tema de estudo e, desse modo, acarreta um panorama geral não tão favorável à discussão, divulgação e compreensão dos números racionais.

Ainda neste estudo, as autoras apresentam um quantitativo das produções com o foco dos estudos, sendo sete voltadas ao ensino (ou ensino e aprendizagem) e quatro à formação inicial ou continuada de professores, nas pesquisas com foco no ensino e aprendizagem, as etapas consideradas são Ensino Fundamental anos iniciais (4) e anos finais (3). Quanto à abordagem dessas produções, apenas uma trata dos significados dos números racionais, três das representações e três das operações.

Em estudo complementar ao supracitado e na intenção de melhor detalhar as produções desenvolvidas sobre números racionais em um processo de formação continuada de professores, que é o foco deste trabalho, apresentamos, a seguir, as pesquisas mais recentes [2] no intuito de mapear o panorama atual sobre a temática.

A tese de Silva (2005) trata das concepções de um grupo de professores de matemática sobre números fracionários e aprendizagem de alunos da 5ª série, assim como da autonomia e dificuldades em possíveis mudanças de suas concepções em uma formação continuada. A autora apresenta em seus resultados que os professores constroem para a 5ª série Organizações Matemáticas para números fracionários muito rígidas, com tipos de tarefa que associam

[2] As teses foram buscadas no endereço eletrônico do Banco de Teses e Dissertações da Capes ou no próprio repositório das Instituições de Ensino Superior no mês de dezembro de 2017. Essa busca resultou em 4 teses.

sobretudo a concepção parte/todo em contextos de superfícies, mobilizando a técnica da dupla contagem das partes e, com menos incidência, a concepção de razão. Constata mudanças nos sentimentos e emoções dos professores, propiciando modificações em suas concepções do conteúdo e indícios de mudanças em suas práticas de ensino e de como observar seus alunos em ação. Por fim, a autora explicita a necessidade de os professores desenvolverem autonomia e reflexão a respeito do conteúdo e de suas práticas docentes.

A tese de Silva (2007) busca analisar fatores que podem intervir no desenvolvimento profissional dos professores dos anos iniciais como resultado de uma formação continuada, com a finalidade de discutir questões relacionadas à representação fracionária de números racionais e seus diferentes significados. Os resultados da pesquisa apontam para as dificuldades do conhecimento matemático do professor, sendo proposto um enfoque mais amplo do conceito de números racionais, assim como para análise dos diferentes significados e representação fracionária em cursos de formação inicial e continuada. Por fim, a autora conclui que, para romper crenças e concepções dos professores sobre a Matemática e, especificamente, de frações, é necessária uma constante reflexão sobre a prática, principalmente em ambientes de trabalho colaborativo.

Rogeri (2015), em sua tese, investiga a ampliação da base de conhecimentos de um grupo de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental para ensinar números racionais, especialmente na representação decimal, por meio de uma formação continuada, cujos pressupostos foram as reflexões compartilhadas sobre a práticas docentes e dificuldades de aprendizagem de noções relativas a esse tema. Os dados da pesquisa apontam para concepções inconsistentes sobre números racionais e seu ensino. A autora constata que o processo de formação ampliou, por meio de discussões e reflexões, a imagem conceitual e a base de conhecimentos dos professores para o ensino dos racionais, assim como, apontou para a necessidade de haver, em cursos formativos, uma articulação entre diferentes abordagens, estratégias e materiais para o processo de ensino e aprendizagem dos racionais, representados na forma decimal.

Soares (2016), em sua tese, investiga os conhecimentos didático-matemáticos mobilizados por um grupo de professores dos anos iniciais em um processo de formação continuada sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico. Os dados apresentados indicam que os professores possuem a formação mínima exigida para a docência, entretanto os docentes mostram dificuldades relacionadas ao conhecimento específico de frações e números decimais, assim como, empregam em seu trabalho recursos manipulativos, porém apresentam dificuldades com o emprego de tecnologias digitais. E, ainda, os professores não empregam as diferentes formas de representação das frações. A autora acrescenta que foi possível identificar que a experiência do professor contribui para o conhecimento didático-matemático.

Diante do alcance das produções apresentadas, tratamos também de considerar como os documentos curriculares oficiais propõem e organizam o objeto matemático número racional na Educação Básica, atualmente (a descrição encontra-se no próximo capítulo). Neste momento, a educação no País vem sofrendo alterações importantes no seu aspecto curricular a partir da promulgação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Com o caráter de lei, a BNCC (BRASIL, 2017) dispõe o mínimo de objetos de conhecimento que devem ser abordados com os alunos da Educação Básica. Desta forma, os educandários públicos e privados do País devem se adequar ao novo documento curricular. Mas, principalmente, o professor é quem faz acontecer realmente, deve ser detentor desse conhecimento.

Em se tratando das dificuldades de compreensão dos números racionais, suas operações e algoritmos, somos cientes que não é um fator que gera a não aprendizagem do aluno. Diferentes dimensões tornam um processo de ensino e aprendizagem idôneo. O professor deve ter em mente que um processo idôneo requer conhecimentos específicos, tais como o conhecimento de referência, o planejado e o possível de ser alcançado na faixa de estudo do aluno por exemplo. Ou, ainda, os recursos e métodos que potencializam a aprendizagem do aluno.

Assim, tratamos, neste trabalho, de considerar os conhecimentos do professor para ensinar os números racionais via um processo idôneo, onde as diferentes dimensões são consideradas para que o ensino tenha uma maior idoneidade didática possível. Isto é, considerar os conhecimentos didáticos e matemáticos do professor que interferem na aprendizagem do aluno em sala de aula de um tópico específico de Matemática.

Diante desse contexto, o interesse nesta investigação se centra em quatro vertentes, as quais justificam a necessidade deste estudo, ao menos localmente, sobre a formação continuada com professores de Matemática.

- A persistência na problemática tanto na aprendizagem dos estudantes como dos professores de Matemática do Ensino Fundamental;
- A necessidade de aprimorar o conhecimento especializado do professor, ciente de que o conhecimento comum é insuficiente no processo de ensino;
- A pertinência e importância em investigações sobre o tema, apontadas em produções nacionais e internacionais e;

- As alterações curriculares que estão ocorrendo no País como a Base Nacional Curricular Comum (BNCC), que necessitam serem discutidas com os professores para sua aplicação nas aulas de Matemática.

1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

As discussões apresentadas acima reforçam a necessidade de estudo do ensinar e aprender sobre o objeto matemático número racional. É explícito nos estudos que a compreensão dos números racionais perpassa pela multiplicidade dos seus significados, assim como, a BNCC propõe o estudo dos números racionais por meio dos seus significados.

O que nos leva a considerar pertinente neste estudo são os conhecimentos didático-matemáticos que o professor de Matemática deve possuir ao ministrar suas aulas e acompanhar os erros, as concepções errôneas ou a aprendizagem dos seus alunos quanto ao tema proposto. Neste sentido, buscamos como aporte teórico os Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM) do professor de Matemática proposto por Pino- Fan e Godino (2015).

O CDM é um sistema de categorias que possibilita analisar os conhecimentos do professor de Matemática. Em especial se propõe a descrever, analisar e avaliar os conhecimentos didático-matemáticos dos professores a partir das dimensões: a matemática, a didática e a meta didático-matemática. Estas dimensões se complementam no exercício de buscar a melhor idoneidade didática possível, pois observam com maior amplitude os conhecimentos do professor, tais como: o matemático (conhecimento comum e ampliado), didático (conhecimento especializado, currículo e contexto) e o meta didático-matemático (conhecimento das normas, metanormas, reflexão da prática e a avaliação da idoneidade didática).

Assim, estabelecemos como questão norteadora deste estudo:

- Como mobilizar conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais num grupo de professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental durante um curso formativo com base no CDM?

A proposta de formação continuada com professores tem como aporte teórico o sistema CDM, que é baseado nos constructos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), desenvolvido por Godino e colaboradores. No capítulo do referencial teórico são apresentados os modelos (EOS e CDM) e as motivações para as escolhas teóricas neste estudo.

1.2 OBJETIVOS

Dada a problemática desta investigação, propomos, a seguir, o objetivo geral desse estudo.

1.2.1 Objetivo geral

Investigar os conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais junto a um grupo de professores de Matemática durante um curso formativo com base no sistema CDM.

1.2.2 Objetivos específicos

Do objetivo geral, propomos os seguintes objetivos específicos a serem atingidos:

- Investigar os conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais que os professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental possuem;
- Elaborar e aplicar um curso formativo e investigativo com professores de Matemática envolvendo os conhecimentos didático-matemáticos sobre o objeto número racional, sob a perspectiva do CDM para uma maior idoneidade didática.
- Avaliar o curso formativo e investigativo com professores de Matemática por meio da análise dos portfólios construídos pelos professores.

A seguir são apresentados os aportes teóricos adotados para esta investigação. O referido capítulo é constituído de três tópicos: um sobre os números racionais e adotado como conhecimento referencial durante a formação com os professores de Matemática e os outros dois tópicos, referente ao EOS e CDM, que embasam a análise e avaliação do curso formativo e investigativo com temática nos números racionais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Pesquisas nacionais e internacionais apontam para as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais. É importante observar que estas dificuldades muitas vezes partem da própria complexidade do conjunto dos números racionais, revelando que a passagem do campo dos números naturais para os racionais não é imediata para os alunos.

Na possibilidade de compreender como se dá a construção dos números racionais e, ainda, como os seus diferentes significados e representações se inter-relacionam nesse processo, buscamos neste capítulo a fundamentação teórica para tal, na preocupação em saber como se dá um processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo específico de Matemática, alicerçarmo-nos nas ideias de Godino (2017) e seus colaboradores quanto ao modelo do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS). E, na sequência, discutimos os conhecimentos pertinentes ao professor de matemática na sua prática de ensino a partir do modelo de conhecimentos didático-matemáticos (CDM).

2.1 OS NÚMEROS RACIONAIS: CONCEPÇÕES, SIGNIFICADOS E REPRESENTAÇÕES

Os estudos de Kieren (1988) apresentam um modelo teórico (dinâmico e interativo) de construção do conhecimento matemático, mas específico para o conhecimento do número racional, no qual estabelece uma sequência em relação aos diferentes construtos. Neste modelo há a suposição de uma rede ideal[3] do conhecimento pessoal de um número racional organizados em seis níveis. O modelo inicia da ideia que os conceitos matemáticos são construídos através de esquemas que emergem de situações contextualizadas (KIEREN, 1988). O primeiro nível, mais simples, contém construtos que são muito locais e relativos ao cotidiano (a pessoa compreende um meio, um terço,...). O segundo nível compreende os construtos de partição, equivalência e formação de unidades divisíveis. O terceiro nível compreende os construtos de medida, quociente, razão e operador. O quarto nível compreende o conhecimento de relações funcionais e escalares das quais depende o construto mais formal de fração e equivalência de um número racional. O quinto nível sintetiza os construtos de números racionais e relaciona noções para gerar um construto geral do campo conceitual multiplicativo e o reconhecimento do número racional como um elemento de um campo quociente infinito. O sexto nível é o mais

[3] A rede ideal do conhecimento está presente na compreensão de um número racional, como elementos de um campo de quocientes que é o nível mais alto de conhecimento - permite provar teoremas sobre a estrutura do sistema matemático ou explicar fenômenos dos níveis anteriores da rede (KIEREN, 1988).

alto, no qual uma pessoa é capaz de explicar vários fenômenos, demonstrar teoremas e transitar com habilidade entre os níveis anteriores.

Kieren (1988) propõe ainda um modelo de conhecimento do número racional representados por quatro anéis concêntricos. O modelo de Kieren parte do anel interno, que consiste no nível de conhecimento comum adquirido no decorrer da vida. O próximo anel consiste no conhecimento de nível intuitivo (conhecimento escolar, uso comum de ferramentas, da imaginação e uso informal da linguagem). O terceiro anel consiste no conhecimento de nível técnico (símbolos e algoritmos). O quarto anel consiste no conhecimento de nível axiomático do sistema.

Segundo Kieren (1988), um aluno só desenvolve seu conhecimento de números racionais se for capaz de tomar decisões e de resolver problemas em cada um dos níveis. Entretanto o último nível só é acessível aos alunos com escolaridade mais avançada. O autor ressalta que não existe uma separação rígida entre os níveis de conhecimento, mas que o número racional deve ser visto primeiramente, como um conhecimento humano para depois ser visto como uma construção lógica formal.

Behr et al (1983, 1984), apontam que para os alunos compreenderem os números racionais, devem, primeiramente, desenvolver uma concepção básica do que é um número racional para depois prosseguirem através de uma sequência de tópicos dentro de cada vertente dos números racionais que se baseiam em concepções matemáticas importantes.

Há diversos significados para os números racionais, no entanto, "existem vários elementos unificadores que os ligam" (WHEELDON, 2008, p.24). Martinie (2007) considera concepções importantes em torno das quais os alunos desenvolvem e constroem o conceito de número racional. Das autoras supracitadas, as referidas concepções são o raciocínio multiplicativo, a densidade e valor de posição, a partição, a equivalência e ordenação e as estruturas comuns para adicionar ou subtrair.

O **raciocínio multiplicativo** é diferente do raciocínio aditivo para Lamon (2006), isto é, existem quantidades absolutas e relativas. A primeira, baseada no pensamento aditivo e a segunda, ao pensamento multiplicativo. Lamon apresenta como exemplo, para ilustrar a diferença entre os raciocínios uma caixa com 4 balas e outra com 10 balas. Para responder a pergunta "Quantas balas a segunda caixa tem a mais que a primeira?" os alunos devem usar o raciocínio aditivo. Já a pergunta "Que parte de uma dúzia representam as balas de cada caixa?" os alunos devem empregar o raciocínio multiplicativo. Behr e Post (1992), compreendem que o raciocínio multiplicativo é relativo a algo, as quantidades são relativas.

A **densidade e valor de posição** do número racional indicam a compreensão de que existe uma relação entre o numerador e o denominador, logo cada fração deve ser vista como uma única quantidade e não como dois números distintos (WHEELDON, 2008). Sem esta noção é difícil compreender que entre dois racionais existe outro racional, ou seja, a noção de densidade (MARTINIE, 2007). Segundo Martinie (2007), quando é proposto ao aluno registrar um número na reta numérica fica mais fácil compreender essa concepção. Post, Wachesmuth, Lesh e Behr (1985), apontam que a ordenação e comparação obriga o aluno a um conjunto de conhecimentos complexos, a saber: a grandeza da fração depende da relação entre os seus termos; existe uma relação inversa entre o número de partes do todo e o tamanho das partes e; diante de duas frações com o mesmo denominador, suas respectivas grandezas têm uma relação direta com o número de partes tomadas.

A ideia de **unidade** é complexa e está relacionada à interpretação da unidade – *unitizing*. Lamon (2006) considera importante que os alunos aprendam a trabalhar com unidades de vários tipos – contínua, discreta e as compostas. A noção de *unitizing* é ampla e abarca também a ideia de decompor e recompor a unidade, essencial para compreensão completa do significado parte/todo.

A **partição** é dada como a divisão de uma quantidade contínua em partes iguais (MARTINIE, 2007).

A **equivalência e ordenação** estão relacionadas à quantidade (densidade e valor posicional). É preciso compreender que os números racionais podem ser comparados e ordenados. Ao comparar duas frações, podem surgir os casos: a) ambas têm o mesmo denominador (a maior é a que tiver maior numerador); b) ambas têm o mesmo numerador (a maior é a que tiver menor denominador) e; c) os denominadores e numeradores são distintos (usar frações equivalentes) (LAMON, 2006).

As estruturas comuns para adicionar ou subtrair frações devem ser compreendidas pelos alunos, pois, o denominador determina o tamanho das partes e por isso tem de ser o mesmo em ambas as frações (WHEELDON, 2008).

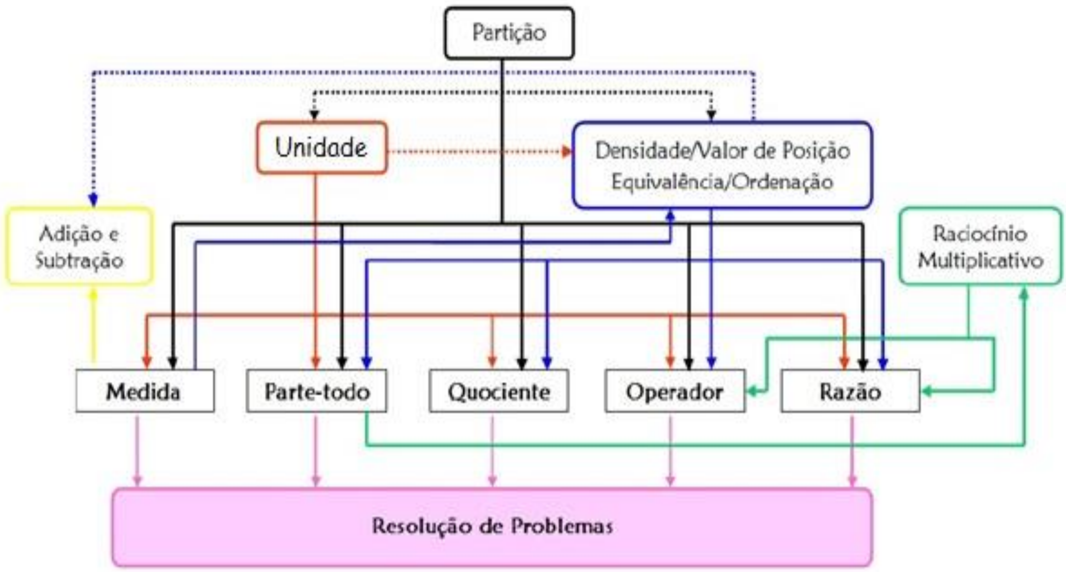
A construção do conceito de número racional é um processo complexo e lento, logo requer tempo e o estabelecimento de múltiplas conexões entre seus significados e representações (BEHR; POST, 1992, CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI, 2006).

Assumiremos que os números racionais, conforme Behr et al, (1992, p.296), "são elementos de um campo infinito de quocientes que consiste em classes de equivalência e os elementos dessas classes de equivalência são frações". Além disso, conforme Lamon (2007) há distinção entre os termos frações e números racionais. Frações são uma representação possível dos racionais.

Pelas várias contextualizações que os números racionais permeiam, seus significados são distintos. Kieren (1980) aponta que a compreensão completa dos racionais requer não só a compreensão de cada um dos significados separados, mas como eles se relacionam. Os construtos (ou significados) dos números racionais dados pelo autor são parte/todo, quociente, medida, operador e razão.

A figura 1 ilustra o modelo teórico de Behr et al (1983), que esquematiza a transversalidade que envolve a compreensão do número racional, isto é, a capacidade de resolver problemas que envolvem os diferentes significados depende da compreensão das concepções fundamentais para o entendimento dos números racionais.

Figura 1 - Modelo de transversalidade para a compreensão do número racional[4]



Fonte: adaptado de Ventura (2013, p.61).

O modelo de transversalidade criado para a compreensão do número racional indica que

- A partição e unidade são a base para desenvolver o conhecimento de todos os significados dos números racionais, assim como, a noção de partição é fundamental para que a compreensão da unidade, equivalência e ordenação possa se desenvolver.

[4] Neste estudo consideramos *unitizing* como a ideia do todo, de unidade.

- A noção de equivalência/ordenação/densidade de frações é fundamental para que os alunos consigam somar e subtrair frações e que o significado de medida pode auxiliá-los.
- O significado parte/todo é base para o raciocínio multiplicativo e fundamental para a compreensão dos significados razão e operador. Por ser base para os outros, o significado parte/todo é o mais explorado e, muitas vezes, o único trabalhado em sala de aula (MAGINA; CAMPOS, 2008).
- A compreensão dos cinco significados é a base para que o aluno consiga resolver problemas que envolvam números racionais.

A seguir são apresentados e exemplificados os cinco significados dos números racionais. Vale ressaltar que Kieren aponta a noção de número racional como um construto teórico, isto é, que se pode construir a partir de noções mais simples, os subconstrutos (RODRIGUES, 2005). Deste modo, neste trabalho, usamos como sinônimos as palavras significados, interpretações, personalidades ou construtos do número racional.

Também, vale ressaltar, que na literatura, de acordo com o aporte teórico adotado, há uma multiplicidade de significados atribuídos ao número racional do ponto de vista pedagógico. Porém, neste trabalho, usaremos cinco significados do número racional, a saber: a) parte/todo, b) quociente, c) medida, d) operador e e) razão definidos por Kieren (1988), e os aprofundamentos dados por Lamon (2006).

Primeiramente consideremos a pergunta: o que representas o número $\frac{1}{2}$? Para muitos pode apenas indicar uma parte de duas em que a unidade foi dividida. Entretanto, outras interpretações poderiam ser empregadas dependendo da situação que é proposta. Por exemplo, num pacote de 12 bolachinhas, $\frac{1}{2}$ representa que quantidade de bolachinhas? Numa corrida de 1000 metros, a partir de $\frac{1}{2}$ da prova há a troca de bastão. Indique a distância percorrida com o primeiro bastão. Ou, ainda, determine a velocidade média de uma pessoa durante uma caminhada, sabendo que percorreu 1 quilômetro em duas horas. Também pode, apenas indicar uma divisão, um bolo dividido para 2 crianças. Na sequência, é detalhado cada significado do número racional.

O significado base, e normalmente o primeiro a ser explorado em sala de aula, é o **parte/todo**, apresentado sob a forma $\frac{1}{n}$ em que esta fração representa uma ou mais partes da unidade, que foi dividida em parte iguais (LAMON, 2006). Desta forma, a fração indica a comparação entre o numerador (número de partes que se toma da unidade dividida) e o denominador (número total de partes em que a unidade foi dividida).

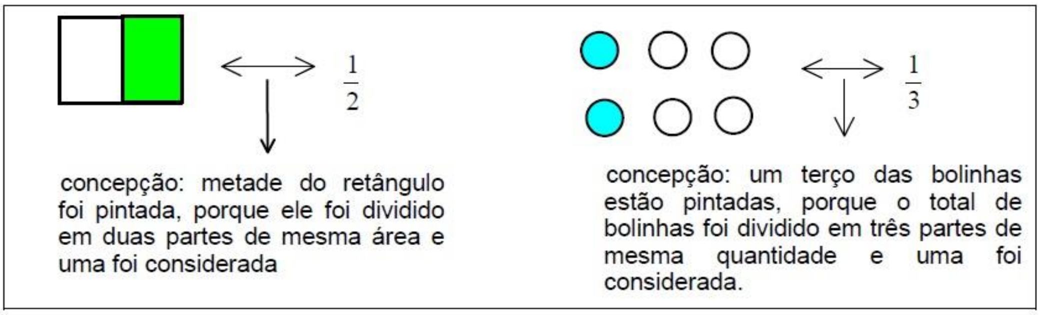
O significado parte/todo é fundamental para o desenvolvimento de outros significados, no qual os alunos devem conceber a noção de partição (em partes/fatias iguais) e, também a ideia entre partes/fatia e todo: as fatias juntas devem reconstituir o todo; quanto mais fatias tem o todo, menor é cada fatia; independente da forma, tamanho ou orientação das fatias, a relação entre as fatias e o todo é conservada (CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZZI, 2006). Com esse pensamento o aluno retoma/cria o entendimento de unidade de referência (discreta ou contínua), conseguindo reorganizá-la (reconstruir ou unir) e, ainda, que o todo representa um inteiro.

Para Kieren (1976)[5], há três ideias importantes envolvidas no significado parte/todo.

> - Para a noção de unidade e sua divisão arbitrária, a criança deveria perceber que a unidade é invariante sob partição, e deveria perceber também que a unidade pode ser dividida em qualquer número de partes congruentes;
> - a criança deveria ser capaz de conceituar relações parte-todo nesse contexto e de reconhecer equivalências surgindo de partições da unidade (1/2 = 3/6);
> - a criança deveria desenvolver o conceito de uma relação de ordem, o que, por sua vez, envolve as habilidades de ordenar a realidade física e de usar corretamente a simbologia (KIEREN, 1976, p. 125).

Nos estudos de Silva (2005), a autora considera que, para o sujeito compreender a noção de parte/todo, ele deve relacionar um ou mais registros escritos ou figuras geométricas ou criar relações pertinentes como as exemplificadas na figura 2.

Figura 2 - Representações do significado parte/todo



Fonte: Silva (2005, p. 106)

---

[5]The first is the notion of a unitand its arbitrary division.The child must realize that the uLl.it isinvariant under partitioning, and he must also realize that one canpartition the unit into any number of congruent parts.Second, thechild must be able to conceptualize part-whole relationships in thiscontext and recognize equivalent settings arising from partitioning ofthe unit (1/2 = 3/6).Third, the child must develop the concept of anorder relation.This involves both the ability to order physical realityand the ability to use correctly the symbolic order statements.

A autora aponta que uma das técnicas mais empregadas para a compreensão do significado parte/todo é da dupla contagem das partes – identificar e quantificar, que possui limitações, pois o aluno pode confundir parte-parte e parte-todo, perceber apenas uma rotina de nomear uma parte e o todo, por exemplo. Outra situação que causa estranheza aos alunos são as frações impróprias, o quociente é maior que 1, quando analisadas apenas no contexto parte/todo.

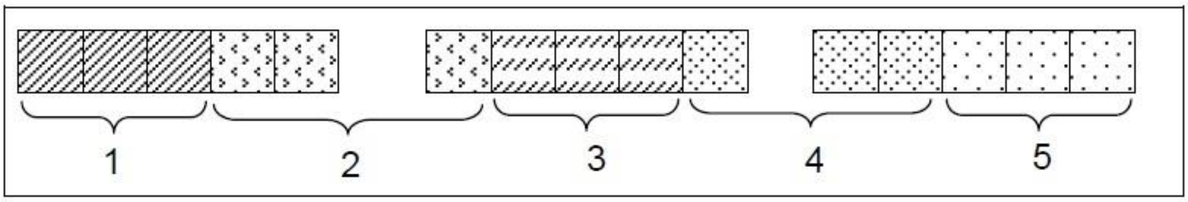
O significado de **quociente** remete à ideia de partilha, em que a fração $\frac{a}{b}$ indica o quociente $a{:}\,b, b \neq 0$. Neste significado, o entendimento de dividendo e divisor da operação de divisão devem estar claros, pois dividir em partes iguais é a base para que se compreendam os racionais como quocientes (LAMON, 2006). Desta forma, a pode ser maior, igual ou menor que b. A critério de exemplificação do significado quociente, podemos ter 3 bolos para 4 crianças ou 4 bolos para 3 crianças. Pelo exemplo dado, nota-se que o significado quociente extrapola o parte/todo, uma vez que existem duas variáveis, bolos e crianças (SILVA, 2005).

Behr e Post (1992), ressaltam a importância das frações equivalentes para uma compreensão mais ampla do significado quociente. Ainda explorando o exemplo acima, 3 bolos para 6 crianças ou 1 bolo para 2 crianças, cada criança receberia o mesmo quociente (quantidade) de bolo, a metade ou 0,5.

Silva (2005, p. 121) aponta duas técnicas que mobilizam o significado quociente para distribuição de grandezas, sendo "a partitiva – quando são dados as quantidades de inteiros e o número de partes em que se quer dividir essa quantidade e pede-se o valor de cada parte – ou por cotas – quando são dadas as quantidades de inteiros e o valor de cada parte e pede-se a quantidade de partes possíveis". O exemplo supracitado é um caso da técnica partitiva. O caso de cotas é exemplificado abaixo.

A autora apresenta a situação "Quantas crianças receberão chocolate, se distribuirmos 3 chocolates, igualmente, de forma que cada uma receba $\frac{3}{5}$." A resposta oferecida a essa questão está ilustrada na figura 3.

Figura 3 - Solução do problema a partir do significado quociente, emprego de cota.



Fonte: Silva (2005, p. 124)

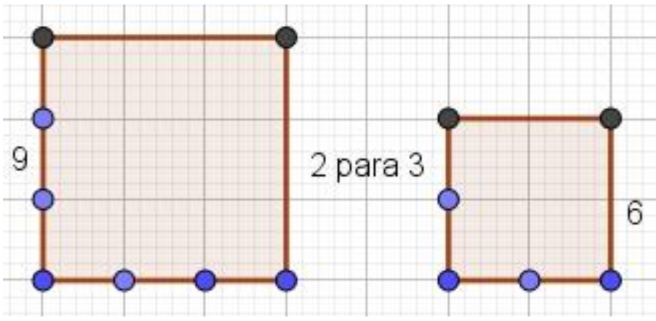
O significado **operador** está associado à ideia de modificar uma grandeza contínua, tanto aumentar quanto diminuir considerando a fração imprópria ou própria respectivamente. Ideia equivalente quando a grandeza é discreta (LAMON, 2006).

Ainda segunda a autora, este significado potencializa o aluno interpretar o multiplicador fracionário de pelo menos duas formas: $\frac{2}{5}$ significa 2 de ($\frac{1}{5}$ da unidade) ou $\frac{2}{5}$ significa $\frac{1}{5}$ de (duas vezes a unidade). Assim como, para calcular $\frac{2}{5}$ de uma quantidade, o aluno pode multiplicar a fração pela quantidade ou multiplicar por 2 e dividir por 5 ou dividir por 5 e multiplicar por 2 e o resultado dos três cálculos são iguais.

Silva (2005) discorre sobre técnicas empregadas para desenvolver o significado operador, a saber, transformar grandezas pela ação de um operador fracionário, transformar grandezas pela ação de dois operadores fracionários, determinar um operador que faz certa transformação, comparar operadores, comparar estados iniciais e finais, determinar o operador que desfaz uma ação, dentre outros.

A fim de exemplificação, são apresentadas duas situações propostas pela autora no qual o significado operador foi empregado. “Construir um quadrado cujo lado tenha $\frac{2}{3}$ da medida do quadrado dado" conforme figura 4.

Figura 4 - Situação que foi empregado o significado operador.



Fonte: adaptado de Silva (2005, p. 134)

A solução desta situação pode partir do significado parte/todo, de realizar a partição em 3 fatias iguais e considerar duas, ou considerando a medida do lado 9, dividir por 3 e, após, multiplicar por 2. Assim como, empregar o significado de razão, isto é, $\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$.

A segunda situação proposta pela autora: “Determine a metade de um quinto de um segmento dado”. Uma possibilidade de resposta levaria em conta os significados de parte/todo e medida tendo sua interpretação na reta numérica e considerando uma unidade de comprimento para a solução da questão. Na qual o aluno deve dividi-la em 5 partes iguais e considerar a metade, logo $\frac{1}{2}.\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$.

O significado **medida** possibilita ao aluno identificar a unidade de medida, determinar um comprimento e medir um comprimento através da repetição da unidade de medida – iteração (LAMON, 2006). A autora acrescenta que, a partir desse significado, podem ser explorados também, a unidade e a partição por meio de divisões sucessivas de uma unidade.

A utilização da reta numérica pode ajudar o aluno a compreender o significado medida em contextos de equivalência (LLINARES; SANCHEZ, 2000), assim como, é importante que reconheçam medidas em diferentes locais da reta numérica, acarretando contribuições ao entendimento de ordenação, equivalência e somas de frações (LAMON, 2006; BEHR ET AL, 1992). No entanto, Lamon (2006) reconhece que efetuar divisões sucessivas da unidade não é um processo fácil aos alunos. Assim, este significado deve ser introduzido depois de terem experiência com outros significados, parte/todo e quociente.

Silva (2005) apresenta exemplos de tarefas que podem ser consideradas para explorar o significado de medida dos números racionais. As tarefas são classificadas em quatro tipos, a saber: determinar medidas de comprimento de um objeto, determinar medidas em seguimentos divididos em partes iguais, determinar medidas em segmentos não divididos em partes de mesma medida e reconstituição da unidade.

Uma situação exposta pela autora para compreensão desse significado solicita medições de comprimento, assim permitirá ao aluno a constatação da necessidade da divisão da unidade escolhida para quantificar o comprimento em jogo, por exemplo, usar tiras de papel para facilitar a divisão da unidade.

O significado **razão** do número racional surge da relação de duas quantidades, sendo necessário o raciocínio multiplicativo. Lamon (2006), afirma que se deve fazer uma distinção entre a noção de razão parte/parte (duas partes de um todo “ratio”) e a razão de grandezas de tipos diferentes (“rate”), dando origem a uma nova grandeza.

Silva (2005) discute que o significado razão não permite associar a ideia de partição como os outros significados, mas a ideia de comparação entre duas grandezas. Exemplifica que $\frac{2}{3}$ representa a razão 2 para 3. A autora apresenta os tipos de tarefas que associa ao significado razão com as seguintes situações: todo/todo – quando compara as quantidades de dois inteiros; parte/parte – quando compara as quantidades de duas partes de um inteiro ou partes de dois inteiros ou, ainda, parte/todo.

Uma situação proposta em Silva (2005, p.126) é dada por "Uma miniatura de um objeto tem 12 cm de comprimento. Se na realidade esse objeto tem 60 cm de comprimento, qual foi a escala utilizada?" A razão neste caso pode ser utilizada para a definição de escala (a razão entre a medida de um comprimento em uma miniatura e a medida correspondente do objeto real) e a ideia de ampliação e redução.

Diante da exposição dos significados dos números racionais, percebemos a riqueza de ideias envolvidas e as diferentes contextualizações em que podem estar envolvidos. Além da compreensão de cada significado, é preciso observar e explorar as ligações que os significados possuem – alguns exemplos supracitados oportunizaram essa visão e vão ao encontro dos estudos de Kieren (1988) que considera ser necessário o entendimento de cada significado e de suas conexões para uma completa compreensão do número.

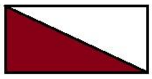
O significado parte/todo normalmente é o primeiro a ser explorado e muitas vezes o único (MAGINA; CAMPOS, 2008). Charalambous e Pitta-Pantazzi (2006) acrescentam que, mesmo que haja compreensão do significado parte/todo, se o ensino não for além desse significado, os alunos podem encontrar dificuldades na aquisição dos outros e dificilmente serão sanadas essas dificuldades.

Há diversas discussões sobre qual a melhor maneira de iniciar a compreensão dos números racionais, pois um significado deve ser o ponto de partida. Para Lamon (2007), apesar dos significados se relacionarem entre si e cada um ter suas características particulares, nem todos são um bom ponto de partida. Os significados quociente e operador são menos poderosos que os significados de medida, parte/todo e razão para iniciar a aprendizagem dos racionais.

Além da compreensão dos significados dos racionais, vemos como necessário o estudo das suas representações, visto que os números racionais não são apenas as frações ou os decimais e, ainda, a interpretação de uma situação pode ser mais simples a um indivíduo ou institucionalmente numa representação do que em outra.

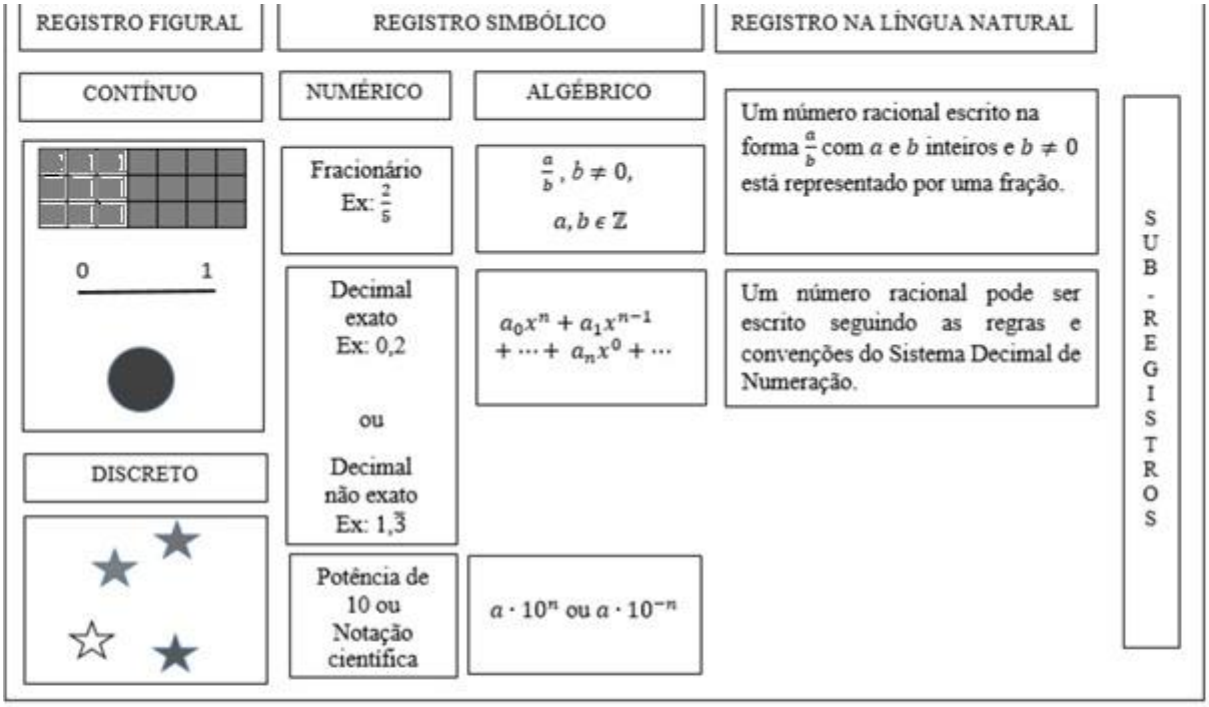
Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998, p. 67) a escrita de quantidades equivalentes possibilita melhor compreensão dos racionais, pois o aluno pode "representar por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias, por exemplo $\frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \ldots$".

Segundo Duval (2003), o que difere a Matemática de outras áreas do conhecimento é sua abstração desencadeada por processos de generalizações. O conhecimento matemático necessita de uma representação para se desenvolver e/ou compreender. Especificamente com os números racionais, por exemplo, a quantidade um meio pode ser escrita por diferentes registros, a saber:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = 0{,}5 = 50\%$ ou 

Maranhão e Igliori (2013) elaboraram as possíveis representações do número racional, sendo a figural, a simbólica e a língua natural para grandezas contínuas ou discretas. A figura 5 exemplifica cada tipo de registro.

Figura 5 - Representações do número racional



Fonte: adaptado de Maranhão e Igliori (2013)

É uma preocupação nesta pesquisa que o aluno consiga transitar entre os diferentes registros de representação semiótica. Como já ressaltado nos estudos de Mariani (2006), o entendimento de um registro não significa que o aluno compreende todas as representações.

Em se tratando dos documentos curriculares oficiais brasileiros, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.66) já apontam: "o estudo dos números racionais nas suas representações fracionária e decimal, merecem especial atenção no terceiro ciclo, partindo da exploração de seus significados, tais como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador." A partir da promulgação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), documento normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao logo das etapas e modalidades da Educação Básica, buscamos identificar a construção proposta para a compreensão dos números racionais nos anos finais do Ensino Fundamental.

Primeiramente, a BNCC aponta que o trabalho pedagógico deve ser orientado para desenvolver competências, isto é, os alunos devem saber (constituição dos conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e saber fazer (mobilização dos conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas do cotidiano). Vale ressaltar que neste documento competência é "definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2017, p.10).

A BNCC propõe cinco unidades temáticas para a matemática: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e estatística e probabilidade. Tomando como foco os números racionais que estão na unidade temática "números", apresentamos no Quadro 1, os objetos de conhecimento e objetivos dispostos na BNCC para o 5º, 6º e 7º ano do Ensino Fundamental.

Quadro 1 - Desenvolvimento dos objetos de conhecimento e objetivos para os números racionais

5º ano – Objetos de conhecimento	Objetivos

• Números racionais expressos na forma decimal e sua representação na reta numérica • Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica • Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência • Cálculo de porcentagens e representação fracionária • Problemas: adição e subtração de números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita e Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais	Ler, escrever e ordenar números racionais na forma decimal com compreensão das principais características do sistema de numeração decimal, utilizando, como recursos, a composição e decomposição e a reta numérica. Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso. Identificar frações equivalentes. Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica. Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros. Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
6º ano – Objetos de conhecimento	Objetivos
• Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal; • Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; Cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações;	Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica; Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de

• Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais;	números naturais e números racionais em sua representação decimal; Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes; Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica; Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora; Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária; Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora;
7º ano – Objetos de conhecimento	Objetivos
• Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador • Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza. Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.

	Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Fonte: BNCC (2017, p. 292- 293, p. 300-301, p. 304-305)

Nos anos seguintes (8º e 9º ano) os objetos de conhecimento que envolvem os números racionais não exploram a sua compreensão e sim, um aprimoramento, elevando sua complexidade até o campo dos números reais no último ano do Ensino Fundamental. Por exemplo, envolvendo os números racionais no 8º ano são abordadas as dízimas periódicas: fração geratriz.

A seguir, é apresentado o modelo Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), que é uma articulação de teorias para balizar o processo de ensino e aprendizagem de tópicos específicos de Matemática. Deste modo, usaremos este modelo para embasar nossa pesquisa em um curso de formação continuada com professores de Matemática com temática os números racionais.

2.2 O ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO

A partir de avaliações internas e externas a aprendizagem dos alunos em matemática tem sido cada vez mais questionada pela defasagem que os dados apontam, o que nos leva a pensar que pontos específicos do processo de aprendizagem não nos revelariam a complexidade envolvida nesse fato.

É notório que muitos fatores interferem nessa situação e isso nos leva, neste trabalho, a buscar um aporte teórico que contemple as diversas dimensões envolvidas no conhecimento matemático e no processo de ensino e de aprendizagem que ocorrem na sala de aula. Deste modo, entendemos que um fator não é desligado do outro e que compreender e avaliar uma atividade matemática requer a união de esforços no sentido de ligar ideias, articular e aprimorar conhecimentos já existentes a um único bem: uma aprendizagem eficiente.

Juan Godino e seus colaboradores vêm desenvolvendo, desde a década de 1990, a partir do seu grupo de pesquisa Teoría y Metodología de Insvestigación en Educación Matemática, na Universidade de Granada, Espanha, o modelo teórico Enfoque Ontossemiótico[6] para o

[6] Os autores dispõem da página eletrônica <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es> com publicações próprias do EOS e produções de terceiros que empregam o EOS em seus estudos. Traduzindo do espanhol para o português o termo

conhecimento e instrução matemática – a cognição matemática baseada na construção modular, ou seja, na articulação de diversas teorias, desde uma aproximação que descrevem como antropológica e ontossemiótica da Matemática e do seu ensino (GODINO; BATANERO, 1994; GODINO, 2002; GODINO; BATANERO; FONT, 2007; FONT; GODINO; GALLARDO, 2013).

Os estudos desse modelo partem da concepção de que diversas teorias, especificamente da Educação Matemática, coexistem para explicar os fenômenos relativos do processo de ensino e aprendizagem de matemática, ocasionando, assim, um obstáculo para a consolidação do campo científico; isto é, diferentes teorias partindo de uma mesma situação podem ser redundantes ou contraditórias ou mais ou menos eficazes que outras. Logo, a proposta é elaborar um sistema de ferramentas conceituais e metodológicas que potencialize a investigação no campo da Educação Matemática através da hibridação de teorias, isto é, a construção de novas teorias a partir de outras, baseada na comparação racional de seus princípios, conceitos chaves, métodos e questões paradigmáticas (GODINO, 2017).

Godino (2012), dispõe o conjunto de noções teóricas do EOS em cinco níveis, a saber, o Sistema de Práticas, as Configurações do Objeto e Processos Matemáticos, as Configurações e Trajetórias Didáticas, a Dimensão Normativa e a Idoneidade Didática. Segundo D'Amore, Font e Godino (2007), esses níveis de análise permitem descrever, explicar e avaliar o processo de ensino e aprendizagem presente no âmbito da sala de aula de Matemática.

Não menos importante do que discorrer sobre a constituição do EOS, iremos, primeiramente, apresentar o modelo construído por Godino e seus colaboradores e, após, de acordo com os criadores, discutiremos a articulação de teorias e os possíveis avanços do modelo EOS. Temos o intuito primeiramente entendermos a construção para, assim, analisarmos como distintas teorias se complementaram no modelo.

Na sequência, são apresentados cada um dos cinco níveis do EOS que permitem um nível de análise dos processos de ensino e aprendizagem em Matemática. Inicialmente o Sistema de Práticas, que é a origem do modelo ontológico, epistemológico e cognitivo relativo ao conhecimento matemático sobre bases antropológicas e semióticas.

O EOS começa com uma formulação de uma ontologia de objetos matemáticos que tem em conta o triplo aspecto da matemática como atividade de resolução de problemas, socialmente compartilhada, como linguagem simbólica e sistema conceitual logicamente

---

Enfoque ontosemiótico dobramos a letra s, ficando, portanto, enfoque ontossemiótico advindo do caso de substituição do hífen.

organizado (GODINO; BATANERO; FONT, 2007). A concepção de objeto matemático não é apenas um conceito ou definição matemática neste modelo, mas sim, com um caráter mais amplo, compreende-se como "toda entidade que participa no processo de *semiosis*, interpretação, ou jogo de linguagem" da atividade matemática (GODINO, 2017, p.4).

Os elementos chaves, epistemológicos e cognitivos do EOS são as noções de práticas, objetos, processos - entendido como a sequência de práticas que emergem dos objetos, e a função semiótica - correspondência entre um objeto antecedente (expressão, significante) e outro consequente (conteúdo, significado) estabelecido por um sujeito (pessoa ou instituição) segundo algum critério ou regra (GODINO; BATANERO; FONT, 2007).

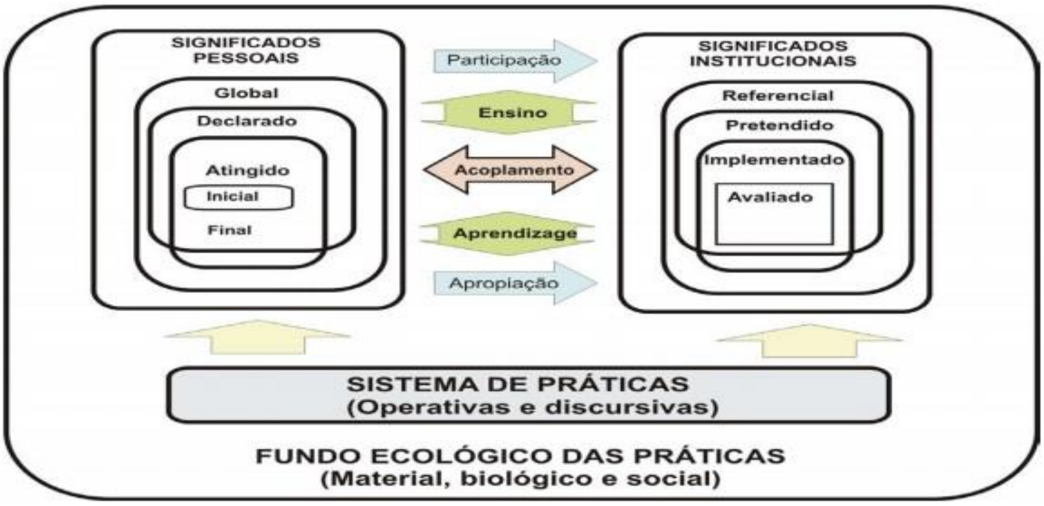
Segundo Godino e Batanero (1994) compreende-se **prática matemática** como toda ação ou expressão (verbal, gráfica, etc) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas. Essas práticas podem ser de uma pessoa ou compartilhadas por uma instituição (pessoas envolvidas em uma mesma classe de situações problemáticas). Desse modo, o estudo da matemática está além da prática particular de um dado problema, mas o **sistema de práticas** (operativas e discursivas) que as pessoas manifestam em sua ação perante tipos de situações problemas (GODINO, 2017).

Em outras palavras, os objetos matemáticos são "qualquer entidade ou coisa a qual nos referimos ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervêm de algum modo na atividade matemática" (GODINO; BATANERO; FONT, 2007, p.14). O significado institucional de um objeto orienta a análise sistemática da literatura, faz a identificação dos diversos significados contextuais dos objetos e sua articulação num significado global ou holístico (GODINO, 2017).

Segundo Godino, Batanero e Font (2007), pela relatividade socioepistêmica e cognitiva dos significados, vistos como sistemas de práticas, os significados institucionais foram classificados em quatro, a saber: o **implementado**, no processo de estudo específico, é o sistema de práticas efetivamente implementadas pelo docente; o **avaliado**, o sistema de práticas que utiliza o docente para avaliar os aprendizes; o **pretendido**, sistema de práticas incluídas no processo de estudo; e o **referencial**, sistema de práticas que se usa como referência para elaborar o significado pretendido. Na instituição de ensino concreta, este significado de referência será uma parte do significado holístico do objeto matemático. E, também, o significado pessoal foi classificado em três tipos, sendo: o **global**, corresponde a totalidade do sistema de práticas pessoais que é capaz de manifestar o potencial do sujeito, relativas a um objeto matemático; o **declarado**, refere-se as práticas efetivamente expressadas a propósito dos testes de avaliação proposto, incluindo tanto as corretas como as incorretas desde o ponto de vista institucional; e o **alcançado**, corresponde as práticas manifestadas que são conforme com a pauta institucional estabelecida. Na análise da troca de significados pessoais que têm lugar em um processo de estudo, interessará ter em conta os significados iniciais ou prévios dos estudantes e os que finalmente alcancem.

A figura 6 ilustra que o significado de um objeto parte de um significado inicial (conhecimentos prévios) e evolui, assim como deve ser considerado o contexto empregado desse mesmo objeto.

Figura 6 - Tipos de significados pessoais e institucionais



Fonte: Godino, Batanero e Font (2007, p.7)

Durante o processo de ensino e aprendizagem, a figura 6, ilustra também, o acoplamento progressivo entre os significados pessoais e institucionais. Desta forma, o ensino implica a participação dos estudantes nas práticas que suportam os significados institucionais e a aprendizagem, em última estância, supõe a apropriação pelos estudantes desses significados (GODINO; BATANERO; FONT, 2007).

Como já apresentado, o objeto matemático é qualquer forma de expressão do conhecimento matemático prestado durante um sistema de prática. No EOS, os objetos matemáticos podem ser classificados em ostensivos (aqueles que podem ser mostrados a outros), como símbolos ou gráficos, e os não ostensivos (não perceptíveis por si mesmo, mas empregados nas atividades matemáticas), como conceitos e proposições que são representados na sua forma textual, oral, gráfica ou gestual (GODINO; BATANERO; FONT, 2007).

Nos sistemas de práticas matemáticas emergem novos objetos que delas provêm e se organizam e estruturam. E ainda, Godino, Batanero e Font (2007, p.8)[7] apontam "se os sistemas de práticas são compartilhados por uma instituição, os objetos emergentes se consideram objetos institucionais, entretanto se tais sistemas correspondem a uma pessoa os consideramos como objetos pessoais". Desta forma, propõem uma tipologia de objetos matemáticos primários (entidades primárias), sendo eles:

- Linguagem refere-se aos termos, expressões, notações, gráficos em seus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc);
- Situações-problema: refere-se às aplicações extra matemáticas, exercícios;
- Conceitos introduzidos mediante definições ou descrições, por exemplo, reta, ponto, número, média, função;
- Proposições: refere-se aos enunciados sobre conceitos;
- Procedimentos: refere-se aos algoritmos, operações, técnicas de cálculo;
- Argumentos: refere-se aos enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos dedutivos ou de outro tipo.

Segundo os autores as entidades primárias ampliam a tradicional distinção entre entidades conceituais e procedimentais, ao passo que as considera insuficientes para descrever os objetos que intervêm e emergem da atividade matemática. Exploram a ideia de que as situações problemas são a origem da atividade, a linguagem representa as outras entidades e serve como instrumento para a ação, os argumentos justificam os procedimentos e proposições que relacionam os conceitos entre si.

No EOS, os objetos matemáticos são considerados a partir de cinco dimensões duais que podem descrever e relacionar várias noções cognitivas propostas em diversas teorias. São consideradas as dimensões: **pessoal-institucional** - a cognição matemática deve contemplar as facetas pessoal e institucional, entre as quais se estabelecem relações dialéticas; **ostensivo-não ostensivo** - entende-se como ostensivo qualquer objeto que é público. Os objetos institucionais e pessoais têm a natureza não ostensiva (não perceptíveis a si mesmos); **expressão-conteúdo** - a relação se estabelece por meio de funções semióticas, entendidas como uma relação entre um antecedente (expressão, significante) e um consequente (conteúdo, significado), estabelecida por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com certo critério ou código de correspondência; **extensivo-intensivo** - é utilizada para explicar uma das características básicas

[7] Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran objetos institucionales, mientras que si tales sistemas corresponden a una persona los consideramos como objetos personales.

da atividade matemática: elementos genéricos. Essa dualidade permite centrar entre o particular e o geral; **unitário-sistêmico** - em algumas circunstâncias os objetos matemáticos participam como entidades unitárias (que se supõe, são conhecidas previamente), enquanto que outras intervêm como sistemas que se devem decompor para seu estudo.

Sintetizando os elementos teóricos do EOS,

> a atividade matemática ocupa o lugar central e sua modelização em termos de sistema de práticas operativas e discursivas. Destas práticas emergem os distintos tipos de objetos matemáticos, que estão relacionados entre si formando configurações. Por último, os objetos que intervêm nas práticas matemáticas e os emergentes das mesmas, segundo o jogo de linguagem em que participam, podem ser considerados desde as 5 facetas ou dimensões duais[8]. (GODINO; BATANERO; FONT, 2007, p.12)[9]

O EOS propõe como uma resposta operativa ao problema ontológico da representação e significação do conhecimento matemático as noções teóricas apresentadas: sistema de práticas, institucionais, processos, entidades emergentes, configurações, atributos contextuais e a noção de função semiótica como entidade relacional básica (GODINO; BATANERO; FONT, 2007). As funções semióticas são fundamentais no processo relacional que se realiza nas práticas matemáticas entre as entidades. Cada função semiótica implica um ato de *semiosis* por uma pessoa e constitui um conhecimento. Segundo Godino, Batanero e Font (2007, p.13), "falar de conhecimento equivale a falar de conteúdo de uma função semiótica (ou muitas), resultando uma variedade de tipos de conhecimentos em correspondência com a diversidade de funções semióticas que se podem estabelecer entre as diversas entidades introduzidas no modelo". Deste modo, se considera que uma pessoa compreende um determinado objeto matemático quando o usa de maneira competente em diferentes práticas.

A partir das ferramentas teóricas desenvolvidas no EOS para as dimensões epistêmica e cognitiva do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, Godino (2017, p.10)[10] apresentou a seguinte questão no intuito de abordar o modelo instrucional, a saber "que tipo de interações didáticas entre pessoas, conhecimentos e recursos se deveriam implementar nos processos instrucionais que permitam otimizar as aprendizagens em Matemática"?

A **configuração didática** é a principal ferramenta para uma análise dos processos de instrução em nível micro, definida como qualquer atividade didática (ensino e aprendizagem)

---

[8] La actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones. Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales.

[9] Todos os trechos de obras em língua estrangeira foram traduzidos pela autora do presente trabalho.

[10] Que tipos de interacciones didacticas entre personas, conocimientos y recursosse deberian implementar en los procesos instruccionales que permitan optimizarlos aprendizajes matematicos?

compreendida entre o início e o fim de uma tarefa desenvolvida pelo estudante, pelo professor ou ambos, assim como os meios planejados ou usados para abordar a tarefa. E, ainda, a sequência de configurações didáticas constitui uma trajetória didática (GODINO, 2017). Uma configuração didática é formada por subconfigurações, sendo: i) uma configuração epistêmica (sistema de práticas, objetos e processos matemáticos institucionais requeridos na tarefa); ii) uma configuração instrucional (sistema de funções docentes, discentes e meios instrucionais e as interações que se utilizam) e; iii) uma configuração cognitiva-afetiva (sistemas de práticas, objetos e processos matemáticos pessoais que descrevem o aprendizado dos componentes afetivos que se acompanham) (GODINO, 2017).

A **dimensão normativa** do EOS leva em consideração as normas, hábitos e convenções, geralmente implícitas, que regulam o processo de ensino e aprendizagem de Matemática e que condicionam a mais ou a menos os conhecimentos que os estudantes constroem.

Em Godino, Font, Wilhelmi e Catro (2009), é abordado o estudo sistêmico e global destas noções teóricas, identificando suas conexões (intersecções e complementariedades), assim como o reconhecimento de novos tipos de normas que aprimoram a análise de aulas de Matemática. Desse estudo, são indicados diferentes dimensões normativas (epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica) que apontam a valorização da pertinência das intervenções de professores e alunos levando em consideração o conjunto de normas que condicionam o ensino e aprendizagem, assim como a sugestão de trocas nos tipos de normas que ajudem a melhorar o funcionamento e controle dos processos de estudo, com vistas a uma evolução dos significados pessoais para os significados institucionais pretendidos.

Segundo Godino (2017), a **idoneidade didática** de um processo de instrução matemática se define como o grau (baixa, média ou alta) desse processo (ou parte dele) e reúne certas características que permitem qualificá-lo como idôneo para conseguir a adaptação entre os significados pessoais alcançados pelos estudantes e os significados institucionais pretendidos ou implementados, tendo em conta as circunstâncias e recursos disponíveis.

Nesse sentido a idoneidade didática articula, de forma coerente e sistêmica, seis dimensões/facetas [11], a saber: epistêmica, ecológica, cognitiva, afetiva, interacional e mediacional sendo as mesmas percebidas a partir do seu grau de idoneidade. A seguir, é feita uma descrição de cada dimensão conforme Godino, Contreras e Font (2006).

[11] Godino (2017) propõe a articulação coerente e sistêmica das 6 dimensões ou facetas (epistêmica, cognitiva, afetiva, ecológica, mediacional e a interacional) para que um processo seja dito idôneo. Neste sentido, dimensão e faceta são considerados termos equivalentes.

Idoneidade epistêmica: se refere ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados (ou pretendidos), a respeito de um significado de referência.

Idoneidade cognitiva: expressa o grau em que os significados pretendidos/implementados estão na zona de desenvolvimento potencial (VYGOTSKI, 1934 apud GODINO, 2017) dos alunos, ou então como a proximidade dos significados pessoais alcançados aos significados pretendidos/implementados.

Idoneidade interacional: um processo de ensino-aprendizagem terá maior idoneidade desde o ponto de vista interacional se as configurações e trajetórias didáticas permitem, por uma parte, identificar conflitos semióticos potenciais (que se podem detectar a *priori*), e por outra parte permitem resolver os conflitos que se produzem durante o processo de instrução.

Idoneidade mediacional: grau de disponibilidade e adequação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem.

Idoneidade emocional: grau de implicação (interesse, motivação) do estudante no processo de estudo. A idoneidade emocional está relacionada tanto com fatores que dependem da instituição como os fatores que dependem basicamente do aluno e de sua história escolar prévia.

Idoneidade ecológica: grau em que o processo de estudo se ajusta ao projeto educativo da escola e da sociedade e aos condicionamentos do entorno em que se desenvolve.

O grau de idoneidade de uma dimensão não garante a idoneidade global do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Como já mencionado, as dimensões devem ser integradas e interagirem durante o processo, o que requer falar da idoneidade didática como critério sistêmico de adequação e pertinência a respeito do projeto educativo global (GODINO; WILHELMI; BENCOMO, 2005). E, ainda,

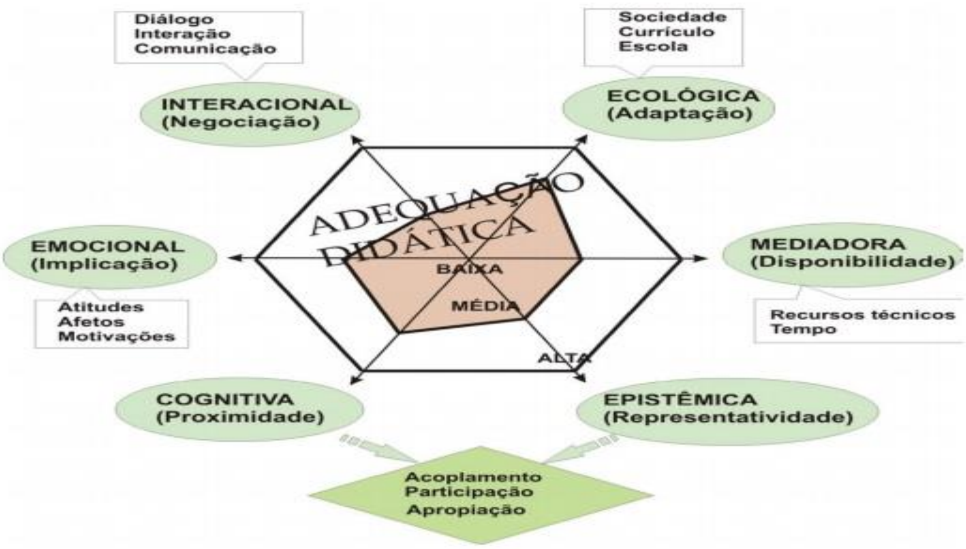
> Todas estas noções as consideramos úteis para a análise de projetos e experiências de ensino. Os distintos elementos podem interagir entre si, o que sugere a extraordinária complexidade dos processos de ensino e aprendizagem. O alcance de uma idoneidade alta em uma das dimensões, por exemplo a epistêmica, pode requerer de capacidades cognitivas que não possuem os estudantes aos que se dirige o ensino. Uma vez alcançado um certo equilíbrio entre as dimensões epistêmica e cognitiva, é necessário que a trajetória didática otimize a identificação e solução de conflitos semióticos. Os recursos técnicos e o tempo disponível também interacionam com as situações – problemas, a linguagem, etc.[12] (GODINO; BATANERO; FONT, 2007, p.17)

A figura 7 ilustra os critérios da idoneidade didática. A idoneidade correspondente a um processo pretendido ou programado é representada mediante um hexágono regular, onde a

[12] Todas estas nociones las consideramos útiles para el análisis de proyectos y experiencias de enseñanza. Los distintos elementos pueden interactuar entre sí, lo que sugiere la extraordinaria complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El logro de una idoneidad alta en una de las dimensiones, por ejemplo la epistémica, puede requerir de capacidades cognitivas que no posean los estudiantes a los que se dirige la enseñanza. Una vez logrado un cierto equilibrio entre las dimensiones epistémica y cognitiva, es necesario que la trayectoria didáctica optimice la identificación y solución de conflictos semióticos. Los recursos técnicos y el tiempo disponible también interaccionan con las situaciones-problemas, el lenguaje, etc.

priori se supõe um grau máximo das idoneidades parciais. O hexágono irregular inscrito corresponderia às idoneidades efetivamente alcançadas na realização de um processo de estudo implementado. (GODINO; BATANERO; FONT, 2007).

Figura 7 - Os critérios da idoneidade didática



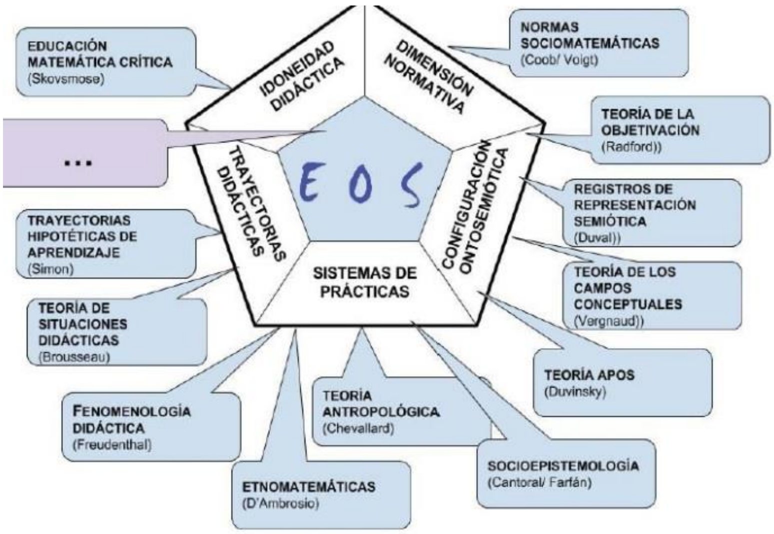
Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, p.24)

Por fim, destacamos, que as ferramentas descritas podem ser aplicadas à análise de um processo de estudo pontual implementado em sala de aula, ao planejamento ou o desenvolvimento de uma unidade didática, em um nível mais global, como pode ser o desenvolvimento de um curso ou uma proposta curricular ou para analisar aspectos parciais de um processo de estudo, como um material didático, um manual escolar, respostas de estudantes a tarefas específicas ou “incidentes didáticos” pontuais (GODINO; BATANERO; FONT, 2007).

Após a apresentação do EOS, abordaremos alguns pontos específicos que fundamentam este modelo. Partimos do fato de que o EOS evidencia concordâncias e complementariedades com outras teorias, principalmente com as que fazem parte da escola francesa de Didática da Matemática, tais como a Teoria de Situações Didáticas de Brousseau (1998), Teoria Antropológica da Didática de Chevallard (1992), a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (1995), dentre outras. O EOS é composto por adaptações mais ou menos intensas em alguns dos pressupostos e métodos das teorias já existentes (como as citadas acima). Ressaltamos que os estudos estão em andamento oportunizando novas comparações e aproximações. E, ainda, o EOS é um sistema inclusivo, aberto e dinâmico que leva em conta as diversas dimensões implicadas no processo de ensino e aprendizagem.

A figura 8 ilustra a possibilidade das diversas teorias usadas na Educação Matemática estarem incluídas no EOS; cada uma das teorias parciais do EOS possui características em comum com outras teorias existentes e que, em certo sentido, poderiam ser "acomodadas" no EOS com adaptações mais ou menos intensas em alguns dos pressupostos e métodos das teorias implicadas (GODINO, 2017). A proposta do sistema teórico EOS não é de criar uma nova teoria, mas considerar as diferentes dimensões num processo de investigação no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Segundo Godino (2017, p.17)[13] "preferem descrever com um enfoque, ou sistema teórico, e não como uma teoria local, intermédia ou global".

Figura 8 - Assimilação e acomodação das teorias



Fonte: Godino (2017, p.16)

Uma das principais contribuições do EOS é a visão de objeto matemático (ANDRADE, 2014), pois amplia o entendimento de fazer Matemática tanto pessoal como institucional. Segundo Godino, Font, Contreras e Wilhelmi (2006), o EOS se propõe a articular as aproximações epistemológicas e cognitivas ao estabelecer como hipótese básica que os fatos e fenômenos didáticos têm uma dupla dimensão: pessoal e institucional. Deste modo, em outros aportes, a noção de objeto e significado são amplos, tornando-se pouco útil para analisar fenômenos cognitivos, epistemológicos e semióticos. Assim, foi elaborado um sistema

[13] [...] se prefiere describir como un enfoque, o *sistema teórico*, y no como una teoria local, intermedia o global.

detalhado de categorias de objetos, tendo em conta sua distinta natureza e a função que desempenham, o qual leva os autores a falar de ontossemiótica, e não somente semiótica.

Em síntese, no EOS são assumidos os princípios ontológicos e epistemológicos sobre o conhecimento matemático e sua aprendizagem que concordam com os formulados por Radford (2008a, p.10-12) como próprios das aproximações socioculturais:

> o conhecimento é historicamente gerado durante o curso da atividade matemática dos indivíduos e a produção do conhecimento não responde a um *pilotaje* adaptativo, mas que está imerso em formas culturais de pensamento imbricadas com uma realidade simbólica e material que proporciona a base para interpretar, compreender e transformar o mundo dos indivíduos e os conceitos e ideias que se foram delas.[14]

O modelo de instrução (relação entre ensino e aprendizagem de um conteúdo específico) que se assume está embasado nos princípios da psicologia cultural/discursiva (LERMAN, 2001; RADFORD, 2008b), a qual atribui um papel chave à noção de zona de desenvolvimento potencial. Em consequência, contrariamente aos modelos construtivistas a autonomia dos estudantes no processo de aprendizagem, é um resultado do processo e não um pré-requisito do mesmo. Não obstante, dado o papel central dos problemas e a atividade implicada em sua resolução, que são assumidos na perspectiva antropológica do conhecimento, a busca, seleção e adaptação de boas situações problemas e a implicação dos estudantes na sua resolução é também um princípio de uma instrução matemática significativa.

A sequência de configurações didáticas constitui uma trajetória didática, em que um de seus componentes é o que os outros autores descrevem como "trajetória hipotética de aprendizagem" (SIMON, 1995; SIMON e TZUR, 2004), já que tem em conta não somente os objetivos, tarefas instrucionais e hipóteses sobre o processo de aprendizagem mas também os papéis docentes, discursos e os meios instrucionais implementados.

As normas que regulam o processo de ensino e aprendizagem têm sido objeto de investigação na Educação Matemática, tendo trabalhos nesta temática o interacionismo simbólico de Blumer (1969) e de Cobb e Bauersfeld (1995), bem como Yackel e Cobb (1996) ao introduzirem noções com padrões de interação, normas sociais e sociomatemáticas.

Godino (2012) realiza alguns apontamentos sobre a origem e contribuições do EOS em relação aos marcos teóricos já existentes que a seguir são descritos.

- Dado um objeto O, os conhecimentos que um sujeito possui, podem ser descritos de maneira geral como um sistema de práticas pessoais, concretizado mediante as funções

[14] El conocimiento es historicamente generado durante el curso de la actividad matemática de los indivíduos y la produccion del conocimiento no responde a un pilotaje adaptativo, sino que está inmerso en formas culturales de pensamiento imbricadas con una realidad simbólica y material que proporciona la base para interpretar, comprender y transformar el mundo de los individuos y los conceptos e ideas que se forman de ellas.

semióticas que o sujeito pode estabelecer, em que o objeto O se põe em jogo como expressão ou conteúdo. Se este sistema de práticas se distingue entre as que têm natureza operatória ou procedimental perante uma situação-problema, obtemos um construto com estreita relação com a noção de praxologia (CHEVALLARD, 1999) para uma dimensão pessoal. Ainda é compreendida a dualidade instrumento-objeto de Douady para os conceitos matemáticos.

- Para solução da pergunta "O que significa o objeto função?" o EOS propõe os modos de fazer e dizer perante um tipo de problema. A modelação semiótica-pragmatista do conhecimento permite interpretar a noção de esquema como configuração cognitiva associada a um subsistema de práticas relativas a uma classe de situações e às noções de conceito-em-ação, teorema-em-ação e concepção como componentes parciais constituintes das configurações cognitivas.
- A noção de representação e registros semióticos desenvolvidos por Duval e outros autores, segundo o EOS, tem uma compreensão restrita, ou seja, um tipo particular de função semiótica representacional entre objetos ostensivos (públicos) e não ostensivos (mentais). No EOS, a função semiótica é empregada como uma generalização das correspondências entre quaisquer tipos de objetos e, ainda, contempla outros tipos de dependência entre os objetos.
- No EOS, a noção de sentido compreendido como a correspondência entre um objeto matemático e a classe de situações da qual emerge e dá sentido (significado situacional) está baseada na Teoria de Situações Didáticas de Brousseau. Esta correspondência é fundamental ao contribuir à razão de ser de tal objeto, sua justificação ou origem fenomenológica, mas também tem que levar em conta as correspondências ou funções semióticas entre esse objeto e os restantes componentes operativos e discursivos do sistema de práticas que advém do objeto, entendidos em termos cognitivos ou em termos epistêmicos.
- Os conceitos, esquemas e teoremas-em-ação, propostos pela Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e Teoria de Representações semióticas de Duval se direcionam ao apropriamento dos conhecimentos matemáticos dos alunos. Godino questiona se os dois marcos teóricos são suficientes para um nível microscópico da análise de fenômenos cognitivos e didáticos. Desse modo, no EOS é proposta uma análise mais fina da aprendizagem Matemática dos estudantes por meio da configuração cognitiva, que está subdivida em entidades situacionais, linguísticas, procedimentais,

conceituais, proposicionais e argumentativas. Segundo Godino (2012), o EOS permite um estudo em nível microscópico de fenômenos que podem ser classificados como singulares, de um ponto específico. Para esse tipo de análise o EOS, introduz as dualidades cognitivas: unitária – sistêmica; ostensiva – não ostensiva; extensiva – intensiva; expressão – conteúdo (função semiótica).

Após discussão de alguns marcos teóricos que subsidiam o sistema teórico do EOS e as possibilidades que permite para analisar em nível micro ou macroscópico um fenômeno da área da Educação Matemática, iremos, na seção seguinte, discorrer sobre os conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática proposto por Godino e colaboradores. Com o intuito de atender aos objetivos desse trabalho, focaremos, agora, no papel do professor num ambiente de sala de aula, compreendendo que este estudo se dará num processo de formação continuada com professores de Matemática do Ensino Fundamental, anos finais.

2.3 OS CONHECIMENTOS DIDÁTICO-MATEMÁTICOS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Ao retomar a questão norteadora da pesquisa, como um programa formativo, com base no sistema CDM, como mobilizar conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais num grupo de professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental durante um curso formativo com base no CDM? propusemos alicerçar nossa pesquisa no EOS. Entretanto, para encaminharmos uma resposta a essa pergunta também estamos interessados no papel que o professor assume num ambiente de sala de aula.

Ainda baseados no EOS, Pino-Fan e Godino (2015) elaboraram um sistema de categorias para analisar os conhecimentos do professor de Matemática, chamado de Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM), no qual os autores articulam de maneira sistêmica os estudos de Shulman (1987), Ball, Thames e Phelps (2008) e Schoenfeld e Kilpatrick (2008) entre outros. Na sequência apresentamos uma discussão sobre os conhecimentos pertinentes ao professor, por meio dos modelos[15] que guiam a compreensão do que será explorado, o CDM. Tal articulação é proposta porque Pino-Fan e Godino compreendem que os estudos anteriores tratam dos conhecimentos dos professores

[15] A descrição dos trabalhos de Shulman (1987), Hill, Ball e Schiling (2008) e Schoenfeld e Kilpatrick (2008) é dada por Pino-Fan e Godino (2015).

categorizados de forma global não permitindo uma análise mais detalhada de cada um dos tipos de conhecimento empregados no ensino da Matemática (PINO-FAN; GODINO, 2015).

Shulman (1986) foi um dos primeiros autores a discutir e categorizar os conhecimentos dos professores. Assim, Shulman (1987), propôs sete categorias de conhecimentos base do professor, sendo denominadas: 1) conhecimento do conteúdo; 2) conhecimento pedagógico geral; 3) conhecimento curricular; 4) conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK); 5) conhecimento do estudante e suas características; 6) conhecimento dos contextos educativos; e 7) conhecimentos dos fins, dos propósitos e valores da educação.

O autor supracitado destaca a categoria PCK, pois identifica o "corpo distintivo" para o trabalho do professor. A categoria representa a mescla de conteúdo e pedagogia envolvida na compreensão de um tópico, sua organização, representação e motivação aos interesses e habilidades dos estudantes.

Na sequência, apoiados nos estudos de Shulman (1987), Ball e colaboradores propõem a noção de conhecimento matemático para o ensino (MKT), sigla em inglês, definido como o conhecimento matemático que o professor utiliza na sala de aula para produzir instrução e crescimento no aluno (HILL; BALL; SCHILING, 2008). O MKT é formado por duas categorias que se organizam em subcategorias cada. A primeira categoria do conhecimento do conteúdo inclui as subcategorias: do conhecimento comum do conteúdo, do especializado e do horizonte matemático[16]; a segunda categoria do conhecimento pedagógico do conteúdo que inclui as subcategorias: do conhecimento do conteúdo e estudantes, do conteúdo e ensino e do currículo.

De forma breve, denomina-se conhecimento comum ao conhecimento que possibilita uma pessoa resolver corretamente um problema (ou tarefa matemática), porém não são exclusivos do ensino. O conhecimento especializado, ao contrário do comum, é um conhecimento exclusivo para o ensino. Esta subcategoria oferece um conhecimento além da solução correta, abrange a exatidão das ideias matemáticas ou explicações matemáticas das regras e procedimentos empregados na solução. O conhecimento no horizonte matemático compreende a estrutura, conexões e as práticas matemáticas chaves da situação proposta.

O conhecimento do conteúdo e dos estudantes abarca o conhecimento de como os estudantes pensam, conhecem ou aprendem determinado tema. O conhecimento do conteúdo e do ensino combina o conhecimento do ensino e da Matemática. O conhecimento curricular corresponde ao conhecimento dos materiais curriculares para o ensino do conteúdo assim como o conhecimento da estrutura horizontal e vertical do tema estudado.

[16] O termo é dado pelos autores Pino- Fan e Godino (2015) e traduzido literalmente pela autora deste estudo. O termo compreende a estrutura, conexões e as práticas matemáticas que envolve um conhecimento específico.

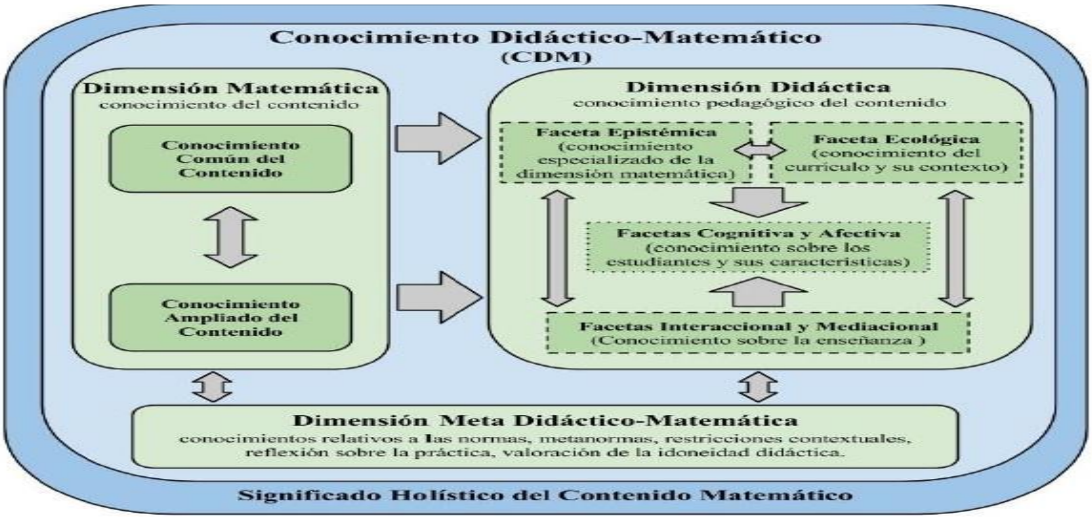
Schoenfeld e Kilpatrick (2008) trataram sobre uma proficiência no ensino de Matemática, que interpreta os conhecimentos e competências que devem ter os professores para que seu ensino possa ser considerado de qualidade. Sendo denominadas sete dimensões para essa proficiência: 1) conhecer a matemática escolar com profundidade e amplitude; 2) conhecer os estudantes como pessoas que pensam; 3) conhecer os estudantes como pessoas que aprendem; 4) planejar e gestar os entornos da aprendizagem; 5) desenvolver as normas da classe e apoiar o discurso da classe como parte do ensino para a compreensão; 6) construir relações que apoiem a aprendizagem; e 7) refletir sobre a própria prática.

Pino-Fan e Godino (2015) apontam que os trabalhos acima expostos apresentam diversos modelos do conhecimento do professor de Matemática, identificando uma visão multifacetada sobre a identificação dos conhecimentos necessários para o ensino. Os autores ainda apontam que pesquisas recentes, como de Rowland y Ruthven (2011), mostram que não há um consenso geral sobre um marco teórico para descrever os conhecimentos dos professores de Matemática, apesar dos avanços importantes quanto à caracterização da estrutura complexa de conhecimentos que deveriam ter os professores para que sua prática de ensino de Matemática seja efetiva.

Diante deste contexto, em Pino-Fan e Godino (2015) se desenvolve um sistema de categorias (ou dimensões) para analisar os conhecimentos dos professores de Matemática, denominado CDM. As categorias elaboradas estão relacionadas com os tipos de ferramentas teóricas de análise do EOS, em que é assumido que cada ferramenta põe em jogo conhecimentos didático-matemáticos.

O modelo CDM interpreta e organiza os conhecimentos do professor a partir de três dimensões, a saber: dimensão matemática, dimensão didática e dimensão meta didático-matemática. A figura 9 ilustra um esquema para o modelo CDM e, então, é descrita cada uma das dimensões.

Figura 9 - Dimensões e componentes do CDM



Fonte: Pino-Fan e Godino (2015, p.98).

A **dimensão Matemática** é composta por duas subdimensões: do conhecimento comum e do conhecimento ampliado, que atende a necessidade de solidificar os conhecimentos dos professores de Matemática em tópicos específicos de Matemática. Os autores entendem como conhecimento comum aquele conhecimento matemático compartilhado pelo professor e pelo aluno, isto é, o conhecimento suficiente para resolver um problema por exemplo. O conhecimento ampliado (redefinido do conhecimento no horizonte matemático dado pelo MKT) é aquele que o professor deve ter sobre as noções matemáticas, saber vincular o objeto de estudo com outras noções matemáticas e encaminhar os alunos a estudos subsequentes (PINO-FAN; GODINO, 2015).

Compreende-se que o conhecimento matemático não é suficiente para o professor na sua prática de ensino e, sim, que o mesmo deve ter conhecimento de diversos fatores que interferem no planejamento e implementação de um conteúdo matemático. Neste contexto, é proposta a **dimensão didática** do CDM. A mesma é composta de seis facetas, a saber: faceta epistêmica (conhecimento especializado de Matemática), faceta cognitiva (conhecimento de aspectos cognitivos dos alunos), faceta afetiva (conhecimento dos aspectos afetivos, emocionais e atitudes dos estudantes), faceta interacional (conhecimento sobre interações presentes na sala de aula), faceta mediacional (conhecimento dos recursos e meios que potencializam a aprendizagem dos alunos) e a faceta ecológica (conhecimento sobre aspectos curriculares, sociais, políticos que influenciam na gestão da aprendizagem dos alunos).

A articulação de concepções envolvidas na faceta epistêmica compreende os conhecimentos da Matemática escolar com maior profundidade e amplitude (SCHOENFELD; KILPATRICK, 2008) como, também, o conhecimento especializado do conteúdo (BALL;

THAMES; PHELPS, 2008). Deste modo, esta faceta leva em conta a ferramenta configuração ontossemiótica do EOS e indica que,

> O professor deve ser capaz de mobilizar diversas representações de um objeto matemático, resolver a tarefa mediante distintos procedimentos, vincular o objeto matemático com outros objetos matemáticos de nível educativo no que se ensina ou de níveis anteriores ou posteriores, compreender e mobilizar a diversidade de significados parciais para um mesmo objeto matemático (que integram o significado holístico para este objeto), proporcionar diversas justificativas e argumentos, e identificar os conhecimentos postos em jogo durante a resolução de uma tarefa matemática[17]. (PINO-FAN; GODINO, 2015, p. 99)

As facetas cognitivas e afetivas estão relacionadas com a forma de pensar, conhecer ou atuar dos estudantes diante de um problema reconhecidas pelo professor. A faceta cognitiva permite ao professor ajustar sua proposta ao grau de significados pessoais dos estudantes aos significados institucionais. E, ainda, nesta faceta são considerados os conhecimentos que o professor deve ser capaz de realizar, tais como: perceber possíveis respostas a um problema dado a partir do seu planejamento ou execução da aula, concepções errôneas, dificuldades numa solução ou vínculo com o objeto matemático de estudo com outros. A dimensão afetiva versa sobre os conhecimentos que ajudam a descrever as experiências e sensações dos estudantes com um dado problema, por exemplo. Ambas as facetas estão relacionadas com as ideias de Shulman (1987) quanto ao conhecimento sobre os estudantes, de Schoenfeld e Kilpatrick (2008) ao conhecer o estudante como uma pessoa que pensa e aprende e de Ball, Thames e Phelps (2008) sobre o conhecimento do conteúdo e dos estudantes.

A faceta interacional envolve os conhecimentos necessários para prever, implementar e avaliar sequências de interações entre os indivíduos para participarem do processo de ensino e aprendizagem, assim como orienta a negociação de significados aos estudantes. Essas interações podem ser professor-aluno, aluno-aluno, professor-recurso, professor-aluno-recurso.

A faceta tem uma de suas bases em Schoenfeld e Kilpatrick (2008), sobre construir relações que promovam a aprendizagem.

A faceta mediacional envolve os conhecimentos que o professor deve ter para avaliar a pertinência no uso de recursos didáticos para potencializar a aprendizagem, assim como o tempo destinado para tal procedimento. A articulação entre as facetas interacional e mediacional, complementam a noção de "conhecimento de conteúdo e ensino" dado por Ball,

---

[17] El profesor debe ser capaz de movilizar diversas representaciones de un objeto matemático, resolver la tarea mediante distintos procedimientos, vincular el objeto matemático con otros objetos matemáticos del nivel educativo en el que se enseña o de niveles anteriores y posteriores, comprender y movilizar la diversidad de significados parciales para un mismo objeto matemático (que integran el significado holístico para dicho objeto), proporcionar diversas justificaciones y argumentaciones, e identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática.

Thames e Phelps (2008). Aos recursos e meios para a gestão da aprendizagem, são agregadas, também, às ideias de Shulman (1987) e Grossman (1990).

A faceta ecológica refere-se aos conhecimentos de currículo de Matemática e relação com outros currículos, assim como, a relação do currículo com aspectos sociais, políticos e econômicos que condicionam o processo de ensino e aprendizagem. Esta dimensão provém do conhecimento curricular de Shulman (1987) e Grossman (1990) quanto ao currículo na horizontal e vertical de um tema.

Pino-Fan e Godino (2015) propõem as seis facetas da dimensão didática para poder analisar, descrever e desenvolver o conhecimento dos professores em diversas fases do processo de ensino e aprendizagem de tópicos de Matemática. Além disso, os professores devem, como parte de seus conhecimentos didático-matemáticos, conhecer e compreender os aspectos envolvidos em cada uma das fases da trajetória didática (estudo preliminar, planejamento, implementação e avaliação).

A dimensão **meta didático-matemático** é composta por duas partes: uma relativa aos conhecimentos sobre os critérios de idoneidade didática e a outra, os conhecimentos sobre as normas e metanormas (epistêmica, ecológica, cognitiva, interacional, afetiva e mediacional), as condições e restrições do ambiente. A idoneidade didática tem o caráter de avaliar o processo de ensino e aprendizagem, isto é, nela está presente a reflexão, a avaliação e a detecção das melhores potencialidades da prática. Segundo Schoenfeld e Kilpatrick (2008), a reflexão habitual da sua própria prática de ensino pode ser o principal mecanismo para melhorar a própria prática. O CDM prevê critérios de idoneidade que permitem ao professor realizar uma reflexão da sua prática. Esses critérios são determinados por meio do sistema EOS, descrito na seção anterior.

A critério de exemplificação do emprego do CDM, Pino-Fan, Godino e Font (2011) propõem um estudo a partir da questão “Que deveria conhecer um professor para que seu ensino de derivada tenha a maior idoneidade didática possível?” Os autores apontam que, para responder a essa questão, é preciso reconstruir um sistema de conhecimentos disponíveis para cada um dos aspectos envolvidos no ensino e aprendizagem de derivada. Assim, de maneira parcial, os autores propõem avançar nesse estudo a partir do significado epistêmico global (histórico-epistemológico) da derivada, que considera relevante ao professor o conhecimento didático-matemático da derivada.

O estudo está baseado no EOS, especificamente via a dimensão epistêmica, onde é tomado o significado global de referência. A dimensão epistêmica é descrita parcialmente a partir de nove problemas encontrados ao longo da história até chegar ao significado holístico da derivada.

Os autores apontam que este estudo serve como ponto de partida para o planejamento de instrumentos de avaliação e desenvolvimento de conhecimentos didático-matemáticos sobre derivada. E, ainda,

> Nossa proposta de reconstrução do significado global da derivada resulta especialmente importante posto que o planejamento, implementação e avaliação dos planos de formação matemática e de processos instrucionais sobre um conteúdo matemático específico, requerem um estudo em profundidade sobre o significado dos objetos matemáticos que compõe deste conteúdo. Tal estudo deve apontar critérios para selecionar problemas e práticas matemáticas a incluir nos planos e processos de formação, segundo as necessidades sociais e profissionais do grupo de pessoas a quem se dirige. Ou seja, é a partir do significado holístico de um objeto, que se determina qual ou quais serão os significados pretendidos, implementados e avaliados, em uma prática educativa específica. Desta maneira, é indubitável que o *significado global da derivada* e peça chave do conhecimento didático-matemático do professor[18]. (PINO-FAN; GODINO; FONT, 2011, p.175)

Na perspectiva de (re)conhecer onde e como o EOS e CDM estão sendo empregados pelos pesquisadores da Educação Matemática em suas produções, recorremos a dois estudos que tratam de mapear o emprego desses modelos, deste modo, apontando tendências ou limitações.

O primeiro estudo é apresentado por Carpes, Pigatto e Bisognin (2018) e propõe um mapeamento de teses de doutorado dos Programas de Pós-Graduação brasileiros, em que elucidam as implicações e contribuições dessas produções inéditas. As autoras supracitadas apontam 10 pesquisas entre os anos de 2012 a 2017, que organizaram em dois eixos: o EOS e o processo de ensino e aprendizagem com 4 produções e o EOS e a formação de professores com 6 produções.

No primeiro eixo, o estudo descreve que as produções que versam ou sobre a adequação didática de um processo vivido por meio de uma sequência de ensino ou análise de documentos que envolvem o processo de ensino e aprendizagem num ambiente de sala de aula. Das produções do segundo eixo, três tratam da formação continuada e analisam a construção/mobilização/reflexão dos conhecimentos didático-matemáticos durante a formação.

[18] Nuestra propuesta de reconstrucción del significado global de la derivada resulta especialmente importante puesto que el diseño, implementación y evaluación de planes de formación matemática y de procesos instruccionales sobre un contenido matemático específico, requieren un estudio en profundidad sobre el significado de los objetos matemáticos que componen dicho contenido. Tal estudio debe aportar criterios para seleccionar los problemas y prácticas matemáticas a incluir en los planes y procesos de formación, según las necesidades sociales y profesionales del grupo de personas a quien se dirigen. Es decir, es a partir del significado holístico de un objeto, que se determina cuál o cuáles serán los significados pretendidos, implementados y evaluados, en una práctica educativa específica. De esta manera, es indudable que el *significado global de la derivada* es pieza clave del conocimiento didáctico-matemático del profesor.

Quanto as outras três produções do segundo eixo, duas analisam a construção/saberes docentes mobilizados a partir do PIBID ou PRODOCÊNCIA e, a última, é ligada as atitudes dos acadêmicos em relação a Estatística.

Ainda no estudo de Carpes, Pigatto e Bisognin (2018), as autoras destacam os resultados das pesquisas que versam sobre formação continuada de professores na perspectiva do EOS, ressaltando, desta maneira, a possibilidade de análise e/ou avaliação de curso formativo por meio do EOS e/ou CDM. As autoras apontam que a ferramenta teórica Idoneidade Didática do EOS serviu como critério para analisar os dados levantados durante os cursos formativos.

De modo geral, as seis dimensões, epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica, foram analisadas. As dimensões epistêmica-cognitiva serviram como parâmetro para analisar os conhecimentos didático-matemáticos dos professores, desse modo, permitindo refletir, ampliar ou construir novos conhecimentos, abordar as dificuldades de ensino e, ainda, o grau de complexidade adequado dos conceitos matemáticos abordados. A mediacional serviu para analisar o emprego adequado de recursos didáticos (materiais concretos ou digitais) para potencializar a aprendizagem dos alunos. A interacional promoveu a capacidade do professor de resolver conflitos semióticos durante as aulas (vivenciar atividades, busca de soluções, comunicação e validação das soluções em grande grupo, cooperação), reflexão da prática e trocas de experiências. A afetiva envolveu o grau de comprometimento durante a formação, dificuldades e crenças dos professores sobre a Matemática. A ecológica permitiu problematizar soluções de aprendizagem que contribuam para um aluno com atitude criativa, crítica e reflexiva via a Matemática e a articulação com outras matérias.

A partir desse estudo, verificamos que o EOS e o CDM têm servido como aporte teórico de distintas produções. E, ainda, que está sendo empregado para análise de sequência, de cursos de formação e documentos curriculares conforme propõem Godino e seus colaboradores.

Kaiber, Lemos e Pino-Fan (2017) realizaram um estudo da arte a partir de produções que empregaram o EOS, no âmbito da Educação Matemática, em que foram mapeadas as pesquisas desenvolvidas na América Latina e apresentadas em três anais de eventos: Reunião Latinoamericana de Matemática Educativa – RELME, Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM e Congresso Iberoamericano de Educação Matemática – CIBEM entre 2006 e 2017, que gerou 188 artigos.

Os autores organizaram categorias para apresentar os dados desta pesquisa, a saber: 1) Dimensão-Área da Didática da Matemática Investigada; 2) Nível de Análise - Constructos teórico-metodológicos do EOS tomados como referência; 3) Objeto matemático principal em estudo; e 4) País onde a investigação teve lugar.

A primeira categoria foi dividida em três subcategorias, sendo investigações com foco no processo de ensino e aprendizagem com 55% de frequência, investigações voltadas para o processo de formação de professores (inicial ou continuada), com 36% de frequência, e investigações para análise de documentos curriculares ou livros didáticos, com 9% de frequência.

A partir das três subcategorias que os autores supracitados criaram, percebemos o quão dinâmico e eficiente o EOS tem se prestado nas investigações da Educação Matemática. A primeira subcategoria contempla o ensino e aprendizagem de um conteúdo ou objeto matemático específico e/ou discussão para sua melhoria, planejamento e análise de atividades e superação de dificuldades.

A segunda subcategoria, tanto na formação inicial como na continuada, aborda questões didáticas sobre o objeto matemático e atenta para a vertente de estudo dos tipos de conhecimentos e competências do professor para um processo idôneo de ensino e aprendizagem de Matemática, assim como, aborda um refinamento do CDM e aplicações do modelo.

A terceira categoria, menos explorada, mas com potencial significativo de análise, tomou discussões sobre orientações curriculares, currículos de Cursos de Graduação e da Educação Básica e de livros didáticos via a Idoneidade Didática do EOS.

Esse estudo aponta para a diversidade de conteúdos ou objetos matemáticos investigados organizados em subcategorias e frequência, sendo álgebra - 17%, cálculo diferencial e integral - 18%, números e operações - 12%, estatística e probabilidade - 11%, geometria - 12%, resolução de problemas - 6% e pesquisas sem foco no objeto matemático - 24%. Assim como, identificaram os países latino-americanos que produzem pesquisas com aporte teórico do EOS. O México, com 34%, está na primeira colocação (país que mais recebeu eventos específicos e possui redes de colaboração com grupos espanhóis), seguida da Venezuela, com 15,6% e do Brasil, com 5,3% das pesquisas.

Kaiber, Lemos e Pino-Fan apontam, ainda, que dos três eventos tomados como referência, a partir de 2015, há um aumento significativo das produções que usam o EOS como aporte teórico. O motivo apresentado pelos autores é o ”caráter flexível e modular que permite utilizar tanto aspectos parciais do EOS, como complementar, de forma pertinente as noções teórico-metodológicas do EOS com constructos de outras teorias.” (KAIBER; LEMOS; PINO-FAN, 2017, p.17).

Por fim, os autores evidenciam as potencialidades e limitações das ferramentas teóricas do EOS. As produções que se detiveram em análises detalhadas (micro) de alguma das seis facetas (dimensões) se destacaram nas potencialidades do modelo. Entretanto, quando a busca foi orientada para aspectos mais amplos (macro), foi possível indicar limitações. Os autores ressaltam que já há estudos complementares e em andamento sobre as limitações do modelo.

3 METODOLOGIA

O capítulo apresenta os procedimentos metodológicos da pesquisa. São explicitadas as escolhas metodológicas, as fases da investigação, o local, os sujeitos participantes e os instrumentos de coleta de dados. As ações são coordenadas para alcançar o objetivo geral de investigar o desenvolvimento dos conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais junto a um grupo de professores de Matemática com base no sistema CDM e os objetivos específicos propostos para a investigação, sendo: investigar os conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais que os professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental possuem; elaborar e aplicar um curso formativo e investigativo com professores de Matemática envolvendo os conhecimentos didático-matemáticos sobre o objeto número racional, sob a perspectiva do CDM para uma maior idoneidade didática e; orientar e avaliar o curso formativo e investigativo com professores de Matemática por meio da análise dos portfólios construídos pelos professores.

Assim, tomamos como aporte teórico os Conhecimentos Didático-Matemáticos (CDM) desenvolvido por Godino e colaboradores para determinar os conhecimentos pertinentes ao professor de Matemática ao lecionar sobre o objeto matemático número racional. O CDM do professor é baseado no modelo do EOS e faz uso de seis dimensões (epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica) para conhecer e compreender os aspectos envolvidos em cada uma das fases da trajetória didática (sendo composta pelo estudo preliminar, planejamento, implementação e avaliação).

3.1 DELINEAMENTO DA PESQUISA

Os procedimentos metodológicos foram escolhidos a partir do objetivo e questão norteadora da pesquisa, apresentados nas seções anteriores do estudo. A metodologia de pesquisa escolhida segue uma abordagem qualitativa que, conforme Borba (2004), tem um entendimento dinâmico e está sendo empregado por diferentes linhas de pesquisa na área da Educação Matemática.

> O que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa prioriza procedimentos descritivos à medida que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado "verdadeiro", dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado. Isso não quer dizer que se

> deva ignorar qualquer dado do tipo quantitativo ou mesmo qualquer pesquisa que seja feita baseada em outra noção de conhecimento. (BORBA, 2004, p.2)

Bogdan e Biklen (1994, p. 47) retomam o entendimento de dados quantitativos numa pesquisa de base qualitativa e complementam,

> Embora os dados quantitativos recolhidos por outras pessoas (avaliadores, administradores e outros investigadores) possam ser convencionalmente úteis tal como foram descritos, os investigadores qualitativos dispõem-se à recolha de dados quantitativos de forma crítica. Não é que os números por si não tenham valor. Em vez disso, o investigador qualitativo tende a virar o processo de compilação na sua cabeça perguntando-se o que os números dizem acerca das suposições das pessoas que o usam e os compilam. [...] Os investigadores qualitativos são inflexíveis em não tomar os dados quantitativos por seu valor facial.

Assim, essa pesquisa intenta descrever e analisar os fenômenos que ocorreram num processo de formação continuada de professores de Matemática de forma a contemplar as características, os valores, as dificuldades num viés qualitativo. Segundo Borba (2004) na pesquisa qualitativa o conhecimento está impregnado de valores, de intenção, história do pesquisador ou condições políticas-sociais, reconhecendo, dessa forma, que o investigador não é neutro nesta análise. Isto é, mantém contanto direto com o ambiente da pesquisa, com os sujeitos envolvidos e com os problemas de estudo propostos.

A busca nessa pesquisa é pela qualidade, estabelecida e inerente ao objeto de estudo. Em outras palavras Bicudo (2012) evidencia sobre o estudo qualitativo que este

> [...] permite colocar em relevo o sujeito do processo, não olhado de modo isolado, mas contextualizado social e culturalmente, mais do que isso e, principalmente, de trabalhar concebendo-o como já sendo sempre junto ao mundo e, portanto, aos outros e aos respectivos utensílios dispostos na circunvizinhança existencial, constituindo-se, ao outro e ao mundo em sua historicidade. (p.17)

Os dados apontados são próprios dos sujeitos da pesquisa e do contexto sociocultural de que participam e que, via uma análise qualitativa, oportuniza sua compreensão e discussão. Nesta ótica, o pesquisador é passível de apontar limitações e potencialidades na sua análise, assim como não possui um roteiro pré-determinado, rígido, a ser seguido.

3.2 LOCAL E SUJEITOS DA PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida na Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), no município de Itaqui, RS. Para tal, foi firmado um termo de cooperação e autorização entre a pesquisadora e a Secretaria de Educação de Itaqui (Anexo 2). Neste instrumento foi acordado entre as partes que: a pesquisadora ofertaria um curso de formação continuada aos professores de Matemática do Município e caberia à Secretaria de Educação do Município a disponibilização de carga horária dos docentes para formação. Assim, a Secretaria de Educação organizou que, no ano de 2018, todos os professores de Matemática tivessem a carga horária destinada ao planejamento de atividades no mesmo dia, segunda-feira, deste modo, facilitando a participação dos docentes, a organização das escolas e não os sobrecarregando. Vale ressaltar que a autora deste estudo é docente da UNIPAMPA e foi pesquisadora e formadora neste curso, assim como, ressaltamos que os professores participantes estavam cientes e de acordo com a proposta conforme Termo de Livre Esclarecimento (Anexo 1A para 2017 e Anexo 1B para 2018). O projeto de tese foi aprovado pelo Comitê de Ética da Universidade Franciscana sob o parecer número 2.752.490.

Assim, o presente estudo abarcou um projeto maior, de extensão, intitulado "*Professor de matemática em formação: construindo novos conceitos*", que foi desenvolvido entre os anos de 2017 e 2018 na UNIPAMPA, campus Itaqui. Em 2017, foram organizados quatro encontros, sendo um encontro parte deste estudo e detalhado no próximo capítulo. Em 2018, foram previstos 12 encontros, sendo 9 deles para desenvolver esta pesquisa. O restante dos encontros foi desenvolvido por docentes e discentes da UNIPAMPA. O primeiro encontro tratou sobre formação de professores num contexto geral, o segundo encontro teve como tema o nível de rigor matemático necessário e suficiente para professores e alunos do Ensino Fundamental e o terceiro encontro abordou possibilidades de ensino de Geometria por meio do *software* GeoGebra.

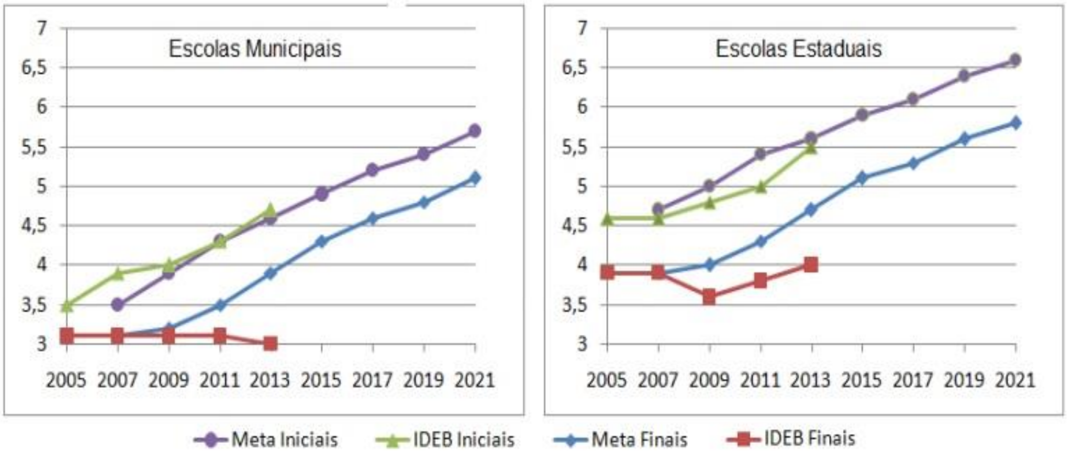
O curso ocorreu na sede da UNIPAMPA, campus Itaqui, durante o segundo semestre de 2018, em uma sala de aula ou laboratório de informática. A sequência de encontros foi quinzenal. O detalhamento de cada encontro é proposto no item a seguir.

O curso de formação continuada de professores teve caráter investigativo, além de formativo, pois pretendeu dar conta das duas questões norteadoras deste estudo. Para tal foram propostos nove encontros com temática nos números racionais. Os sujeitos da pesquisa foram os professores de Matemática do município. Destacamos que não acarretou riscos maiores aos participantes da pesquisa que os existentes na vida cotidiana. Assim como, destacamos, que a formação continuada fez parte do calendário escolar da Prefeitura Municipal de Itaqui. Assim, os professores tiveram a oportunidade de participar das formações. Entretanto, têm a liberdade de participar ou não da pesquisa ou de sua desistência a qualquer momento sem prejuízo a qualquer parte envolvida.

A cidade de Itaqui possui 16 escolas[19], sendo 6 da Educação Infantil, 10 do Ensino Fundamental, com 840 alunos na Educação Infantil e 3092 no Ensino Fundamental. São 29 professores de Matemática[20] que lecionam entre o 6º ao 9º ano, atendendo 1054 alunos. Todos os professores de Matemática do município têm ingresso via concurso público, isto é, são servidores do município e todos com formação específica, licenciatura em Matemática.

O IDEB do munícipio para os anos finais do Ensino Fundamental não tem alcançado a meta nos últimos anos conforme ilustrado na figura 10.

Figura 10 - IDEB das escolas de Itaqui



Fonte: Leon, Parolin e Carpes (2016)

O IDEB das escolas municipais de Itaqui manteve-se acima da meta prevista, considerando os anos iniciais do Ensino Fundamental. Já os anos finais mantiveram um IDEB em queda constante, e, portanto, se distanciando cada vez mais da meta, chegando a uma diferença de 0,9 ponto em 2013. Vale ressaltar, que muitos professores da rede municipal de ensino são também professores da Rede Estadual.

Uma situação que aponta e ressalta a importância de qualificação dos profissionais da educação do Município está no próprio IDEB de 2011, que colocou a cidade de Itaqui (RS) em atenção no país a partir da seguinte manchete[21] do site G1 RS, divulgando: No outro extremo, o pior índice foi registrado por uma escola de Itaqui, na Fronteira Oeste. O colégio obteve nota 1,7 e ficou na 30.727 colocação. Para a cidade e, principalmente, para quem atua na Escola, foi

[19] Dados referentes ao ano de 2017 e informado pela Secretaria Municipal de Educação de Itaqui. A população de Itaqui, de acordo com o último Censo, é de aproximadamente 29 mil pessoas.
[20] No município há 34 matrículas de professores de matemática, porém 4 professores têm duas matrículas.
[21] A reportagem completa está disponível no endereço eletrônico <http://g1.globo.com/rs/rio-grande-do-sul/noticia/2012/08/nota-do-ensino-no-rio-grande-do-sul-fica-abaixo-da-projecao-do-mec.html>.

constrangedor receber a notícia publicamente. A Escola está localizada em uma região de vulnerabilidade social.

3.3 INSTRUMENTOS E PROCEDIMENTOS DE COLETA DE DADOS

Os dados foram levantados a partir do curso formativo e investigativo com professores de Matemática do Município e, ainda, a partir de documentos oficiais da Secretaria de Educação de Itaqui, especialmente a proposta curricular da prefeitura e os Projetos Políticos Pedagógicos (PPP), ou documento equivalente, das escolas de Ensino Fundamental do Município.

O curso, organizado em nove encontros presenciais e sequenciais, com duração de quatro horas cada, explorou o objeto matemático números racionais do ponto de vista pedagógico, isto é, a mobilização de conhecimentos didático-matemáticos ao ensinar números racionais nos anos finais do Ensino Fundamental. O Quadro 2 apresenta os temas e ações planejadas para cada encontro.

Quadro 2 - Temas e ações desenvolvidos de cada encontro do Curso

Nº	Temas	Ações planejadas
1	- Justificativa e estrutura do Curso. - Dificuldades no processo de ensino e aprendizagem. - Os conhecimentos existentes dos professores ao ensinar números racionais.	- Apresentar a proposta do Curso. - Ilustrar algumas dificuldades de aprendizagem sobre números racionais apresentadas na literatura. - Levantar e discutir as dificuldades apresentadas no ambiente de sala de aula dos próprios professores participantes conforme Questionário 1 (Apêndice D). - (Re)Conhecer os conhecimentos didático-matemáticos dos professores ao ensinar números racionais.
2	- Os significados dos números racionais. - Os conhecimentos existentes dos professores ao ensinar números racionais.	- Explanar os significados dos números racionais. - Compreender os números racionais a partir de seus significados, proposta de Kieren (1988). - (Re)Conhecer os conhecimentos didático-matemáticos dos professores quanto aos significados dos números racionais conforme Questionário 2 (Apêndice D).
3	- Os significados dos números racionais. - Unidade, comparação, ordenação e equivalência de números racionais. - Resolução de problemas.	- Retomar a compreensão e discussão dos significados dos números racionais via exercícios dos livros didáticos. - Compreender a unidade, ordenação e equivalência por meio dos significados dos números racionais com atividades organizadas em *applets*. - Explorar a metodologia de Resolução de Problemas para o ensino dos números racionais.
4	- Material didático: Frac Soma e jogos didáticos - O conhecimento didático-matemático do professor	- Compreender o recurso Frac Soma. - Desenvolver atividades para compreensão dos números racionais por meio do Frac Soma. - Compreender o CDM proposto por Godino et al (2012) - Identificar e refletir esses conhecimentos na prática do professor em sala de aula.
5	- O emprego de jogos em sala de aula	- Discutir os momentos do jogo pedagógico em sala de aula proposto por Grando (2000).

	- Uso de jogos para o ensino de Matemática:	- Compreender os recursos: jogo do varal dos números racionais e bingando com os racionais.
6	- Construção dos racionais em documentos curriculares oficiais.	- Identificar e discutir a construção dos números racionais nas grades curriculares (GC) das escolas do município. - Conhecer e comparar a construção dos números racionais na BNCC e GC das escolas municipais. - Leitura e discutição de entrevistas de alguns estudiosos sobre a BNCC.
7	- Sequência de ensino baseada nas habilidades e competências propostas na BNCC; - A resolução de problemas como uma habilidade.	- Apresentar e discutir uma sequência de ensino que explore o tema números racionais via seus significados. - Compreender a resolução de problemas e suas etapas;
8	- Criação de problemas.	- Desenvolver a habilidade de criação de problemas baseado em Malaspina (2017). - Desenvolver atividades para criar problemas por variação ou elaboração, como também, via histórias em quadrinhos.
9	- Avaliação e Autoavaliação do curso de formação continuada	- Avaliar o curso de formação; - Autoavaliar o seu desempenho (participante) durante o curso de formação. - Discutir com o grande grupo as potencialidades e limitações do curso. - Confraternizar os momentos vividos, os conhecimentos adquiridos, as pessoas conhecidas...

Fonte: da pesquisa

Os instrumentos para a coleta de dados desta investigação foram as observações do formador durante os encontros, os áudios e vídeos dos encontros e os registros escritos dos professores participantes. Como este trabalho intentou contribuir com a prática de sala de aula do professor de Matemática, optamos em organizar os registros dos professores por meio da formação e da reflexão do seu trabalho. Desta forma, foi proposta a construção de um portfólio de cada professor durante os encontros do curso.

O portfólio foi usado como alternativa para o professor (formador) avaliar a aprendizagem dos seus estudantes (professores), bem como conduzi-los a autorreflexão e posterior autoavaliação (CROCKETT, 1998). Os instrumentos que podem constituir um portfólio são amostras de exemplos, documentos, gravações ou produções que evidenciam habilidades, atitudes e/ou conhecimentos ou aquisições obtidas pelo estudante em um espaço de tempo (CROCKETT, 1998).

Além de ter o caráter avaliativo do professor, o portfólio foi proposto como um meio organizador do trabalho pedagógico, pois foi o elo entre planejamento, implementação e avaliação durante todo o processo. Neste contexto, cabe destacar, que o ambiente de formação deve propiciar aos professores o seu desenvolvimento profissional, a autonomia intelectual e condições adequadas de trabalho (MURPHY, 1997), possibilitando, assim, parte das produções do portfólio, uma reflexão do professor sobre as possibilidades de uso ou não com seus alunos (do próprio portfólio ou atividades desenvolvidas).

Segundo Villas Boas (2005, p.295), o portfólio

> Não é uma avaliação classificatório ou punitiva. Analisa-se o progresso do aluno. Valorizam-se todas as suas produções: analisam-se as últimas comparando-as com as primeiras, de modo que se perceba o avanço obtido. Isso requer que a construção do portfólio se baseie em propósitos de cuja a formulação o aluno participe, para que se desenvolva o sentido de "pertencimento."

Diante deste contexto, o portfólio teve caráter dinâmico e teve estreita ligação entre os sujeitos envolvidos. Segundo Rosa et al (2013)

> O educador necessita estabelecer um diálogo inicial com os alunos a respeito do próprio portfólio; estimulando os alunos a buscarem desvendar o que significa essa estratégia. Mediante isso, precisa conciliar objetivos e formas segundo os quais os alunos devam estruturar seus registros. Na literatura, não há indicação de modelos ou formas específicas para se fazer um portfólio; isso deve ser discutido no grupo, aliás com o grupo. Veja que já inicia nessa etapa o respeito pelo outro, ao se discutir coletivamente como acontecerá o processo de avaliação mediante portfólio; o que pode ser construído; que conteúdo contemplar; como fazer os registros, incluir artefatos visuais, músicas, fotos, textos de outras disciplinas, família, relatos de colegas de trabalho, experiências vividas pelos estudantes fora do ambiente escolar, o seu próprio relacionamento com o grupo da escola. Tudo pode ser construído e desconstruído a partir desse diálogo. (p.187).

Entendemos que o professor ao planejar suas aulas busca materiais de apoio. Neste sentido, ele terá seu próprio portfólio para elaborar/adaptar/recriar suas aulas sobre números racionais ou, ainda, em conteúdos que envolvem o tema.

Cada portfólio é único, pois foi construído a partir das dificuldades do professor (ou dos seus alunos), seus encaminhamentos, exemplos ou sequência de ensino. A formadora reteve os portfólios até o final do curso, após os digitalizou e entregou a cada professor participante. E, ainda, foram utilizados recursos didáticos como o *data show* e o quadro branco para exposição e discussão, com o grande grupo, das questões propostas no material de apoio. A avaliação do curso pelos professores deu-se na forma de uma entrevista grupal retomando as atividades/propostas do portfólio.

Segundo Bodgan e Biklen (1994, p.138) a entrevista grupal pode ser útil para transportar o entrevistador para o mundo dos sujeitos, "nesta situação, várias pessoas juntas são encorajadas a falarem sobre um tema de interesse". Nesta perspectiva, compreendemos que uma entrevista com todos juntos, no sentido de uma conversa, retomando pontos específicos do curso tais como os recursos didáticos adotados, o ritmo (tempo) das atividades em cada encontro, pontos fortes ou fracos, o que se espera de uma formação continuada e os alcances desta formação. Ressaltamos que todo o curso foi gravado (vídeo e áudio).

3.4 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS

A análise de dados foi realizada por meio do sistema de categorias do CDM que está baseado no modelo do EOS desenvolvido por Godino (2017) e colaboradores, já apresentados na seção anterior. Deste modo, nos propusemos a analisar os conhecimentos didático-matemáticos mobilizados no curso de formação continuada com professores de Matemática.

O CDM é constituído de três dimensões, a saber, os conhecimentos: a) matemáticos, b) didáticos e c) meta didático-matemáticos. O levantamento de dados, referente aos três itens, foi feito a partir das observações do formador e do portfólio construído por cada professor participante durante a primeira e segunda etapas. Godino (2009) propõe um "guia" para avaliação e desenvolvimento do conhecimento didático matemático do professor. Adequando ao ambiente e às condições dos participantes, este guia pode ser utilizado para "i) a avaliação de situações introdutórias em processos formativos para o desenvolvimento de competências profissionais, ii) como questionário de autoavaliação e reflexão do professor sobre aspectos relevantes de sua própria prática, e iii) como instrumento de um avaliador externo para avaliar um processo de estudo implementado" (GODINO, 2009, p. 13).

Contudo, sendo específico dessa investigação e embasado neste guia, tomamos os componentes e indicadores da idoneidade de programas de formação de professores para a análise dos dados, propostos por Godino et al (2013). Neste estudo os autores supracitados incluíram princípios didático-matemáticos relativos às seis facetas implicadas em um processo de instrução Matemática. Desse modo, se o professor adquire competência[22] em aplicar este "instrumento" pode ter facilitada sua tarefa de planejar, implementar e avaliar processos instrucionais idôneos.

O Quadro 3 apresenta os componentes que devem ser considerados para o planejamento, implementação e avaliação de um processo de formação de professores, chamado de GVID-IDM (Guia de Avaliação da Idoneidade Didática de Processos de Instrução em Educação Matemática).

[22] O uso do termo competência tem penetrado fortemente no discurso da educação matemática, sobre tudo no âmbito do desenvolvimento curricular, da prática de ensino e de avaliação, onde se fala com frequência de "ensinar por competência". Nesse contexto, competência é a capacidade de afrontar um problema complexo, ou de resolver uma atividade complexa. [...] No caso das competências matemáticas, em diversos trabalhos Godino e colaboradores tem atribuído a noção de conhecimento o caráter holístico que o enfoque pedagógico/curricular atribui a noção de competência, sendo, por tanto, noções equivalentes. (GODINO et al, 2012)

Quadro 3 - Componentes do GVID-IDM

FACETA EPISTÊMICA Conteúdo didático-matemático, entendido desde o ponto de vista institucional
Conteúdo matemático: problemas, linguagem, conceito, procedimentos, proposições, argumentos, conexões.
Conteúdo cognitivo: conhecimentos prévios, adaptações curriculares, aprendizagem do conteúdo matemático por parte dos alunos.
Conteúdo afetivo: interesses, atitudes, emoções a aprendizagem do conteúdo matemático dos alunos.
Conteúdo interacional: modos de interação e o discurso no processo de ensino e aprendizagem da matemática.
Conteúdo mediacional: uso de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem da matemática.
Conteúdo ecológico: currículo, inovação didática, adaptação sócio-profissional, conexões interdisciplinares.

Outras facetas implicadas na formação em educação matemática
FACETA COGNITIVA: aprendizagem do conteúdo didático-matemático pelos professores.
FACETA AFETIVA: crenças, interesses, atitudes, emoções dos professores para a aprendizagem do conteúdo Didático-matemático.
FACETA INTERACIONAL: modos de interação e discurso no processo de formação de professores
FACETA MEDIACIONAL: uso de recursos tecnológicos no processo de formação de professores.
FACETA ECOLÓGICA: currículo, inovação didática em formação de professores, conexões interdisciplinares.

Fonte: Adaptado de Godino et al (2013, p. 9)

Godino et al (2013) propõem indicadores para cada uma das facetas implicadas num processo de formação de professores, primeiramente considerando a idoneidade epistêmica (composta de conteúdo matemático, ecológico, cognitivo, mediacional, interacional e afetivo)

> A idoneidade epistêmica se alcança quando se prevê, organiza e agrega que o professor conheça, compreenda e domine o conhecimento especializado do conteúdo e o que se refere a variedade de situações problemas, linguagens, estruturas, argumentações e conexões, para o nível educativo em que o professor exerce seu trabalho (conhecimento comum) e o tratado no "horizonte matemático" corresponde, isto é, a articulação com o nível educativo posterior.
> A idoneidade ecológica se conseguirá mediante a leitura e discussão de fontes documentais e estudo de casos de boas práticas que contemplem a inovação, interdisciplinaridade, o desenvolvimento do pensamento crítico e de valores democráticos através do estudo da matemática.
> A idoneidade cognitiva deve contemplar a psicologia da aprendizagem matemática, os princípios gerais da aprendizagem de cada conteúdo, compreender e justificar fatos/passos da aprendizagem e apoiar marcos teóricos, desenvolver instrumentos de avaliação pertinentes.
> A idoneidade afetiva para ser considerada alta requer do professor conhecimento e compreensão do interesse, necessidades, atitudes e emoções na aprendizagem da matemática, assim como competência para criar entornos de aprendizagem que sejam de interesse para o estudante.
> A idoneidade interacional será alta quando o professor desenvolver competência para a comunicação adequada do conteúdo matemático, identificar e resolver conflitos de

> significado e dificuldades de aprendizagem relacionadas com o modo de interação em aula, desenvolver competência para a avaliação formativa dos alunos.
> A idoneidade mediacional será alta quando o professor conhecer o papel dos recursos manipulativos e informáticos para a aprendizagem da matemática, suas limitações e possibilidades e desenvolver competência para gestar o tempo de ensino. (p. 9-18)[23]

O processo de formação de professores deve levar em conta a aprendizagem (conhecimentos institucionais sobre o ensino e aprendizagem de Matemática – faceta epistêmica), mas, também, as outras facetas que envolvem a formação de professores.

Godino et al (2013) propõem, como principal indicador para a faceta cognitiva, o ganho efetivo na expectativa de aprendizagem sobre a educação Matemática, em que a avaliação formativa e somativa devem aplicar o sistema de métodos e técnicas usuais da investigação Matemática (provas escritas, questionários, guias de observação e entrevista).

A faceta afetiva, que abrange as atitudes, motivações e crenças, tem como um indicador a motivação inicial pela seleção e casos para análise e implementação de atividades relacionadas com a prática de ensino, assim como a conexão entre teoria e prática que indiretamente induz a motivação e interesse dos alunos. E, ainda, deve contemplar a avaliação de crenças e valores dos professores em formação sobre a Matemática e seu ensino, a reflexão sobre elas e possível avaliação.

A faceta interacional tem como indicador o desenvolvimento de competências comunicativas e o trabalho autônomo durante o processo de formação levando em consideração o planejamento, implementação e avaliação do plano formativo.

A faceta mediacional tem como indicador o uso de recursos manipulativos e informáticos de maneira pertinente e oportuna para a aprendizagem de temas matemáticos específicos.

---

[23] La idoneidad epistémica en los procesos de formación de profesores se alcanza cuando se prevé, organiza y logra que el profesor conozca, comprenda y domine el conocimiento especializado del contenido en lo que se refiere la variedad de situaciones problemas, lenguajes, estructuras, argumentaciones y conexiones, para el nivel educativo en el que profesor ejerce su labor (conocimiento común) y el tratado en el "horizonte matemático" correspondiente, esto es, la articulación con el nivel educativo posterior. La idoneidad ecológica se conseguirá mediante la lectura y discusión de fuentes documentales y el estudio de casos de buenas prácticas que contemplen la innovación, interdisciplinariedad, el desarrollo del pensamiento crítico y de valores democráticos a través del estudio de las matemáticas. La idoneidad cognitiva conocer la "psicología del aprendizaje matemático", los principios generales y los detalles del aprendizaje de cada contenido particular (maneras progresivas de conocer y comprender los objetos matemáticos específicos; errores, obstáculos y dificultades recurrentes). [...] alta idoneidad afectiva requiere del profesor conocimiento y comprensión del papel de la dimensión afectiva (intereses, necesidades, actitudes, emociones) en el aprendizaje de las matemáticas, así como competencia para crear entornos de aprendizaje que sean de interés para el estudiante. La idoneidad interaccional alta requiere el profesor hace una presentación adecuada del tema, identificar y resolver conflictos de significado y dificultades de aprendizaje relacionadas con los modos de interacción en el aula, desarrollar competencia para la evaluación formativa de los aprendizajes. La idoneidad mediacional alta requiere el profesor conocer el papel de los recursos manipulativos e informáticos en el aprendizaje matemático, sus posibilidades y limitaciones y desarrollar competencia para la gestión del tiempo de enseñanza.

A faceta ecológica tem como indicador se os conteúdos, implementação e avaliação estão de acordo com o currículo estabelecido; as ações formativas consideram os resultados de investigações prévias sobre formação de professores (uso de novas tecnologias em particular), as atividades formativas giram ao redor da formação e desenvolvimento profissional do professor (integrando as outras matérias e áreas disciplinares) e contemplam valores democráticos e o pensamento crítico.

No intuito de contemplar os componentes e indicadores do GVID-IDM de Godino et al (2013), apresentamos no quadro 4 como o curso formativo foi planejado. Vale ressaltar, que não foi considerado pontualmente (uma atividade específica) para analisar ou avaliar uma dimensão, mas, as atividades descritas no quadro serviram de parâmetro.

Quadro 4 - Atividades desenvolvidas para contemplar os componentes e indicadores do GVID-IDM

Dimensões	Atividades desenvolvidas
Epistêmica	Compreensão dos números racionais por meio de seus significados e suas diferentes representações. Levantamento e discussão sobre dificuldades de ensino e aprendizagem. Análise do livro didático para identificação dos diferentes significados dos racionais. Compreensão da ordenação, comparação, equivalência e unitarização por meio dos significados dos racionais.
Cognitiva	Superação das dificuldades de ensino e aprendizagem dos racionais. Conhecimento de outros métodos de ensino, por exemplo, a resolução de problemas. Desenvolvimento/elaboração de sequências de ensino sobre os significados e representações dos racionais.
Ecológica	Estudo da BNCC, das grades curriculares das Escolas e do CDM. Estudo de texto que trate sobre os documentos curriculares, especificamente, a BNCC – habilidades e competências.
Mediacional	A pertinência e adequação de jogos didáticos em sala de aula. Estudo de jogos relacionados ao tema para potencializar a aprendizagem. Estudo da metodologia de resolução de problemas.
Afetiva	Estudo de casos teóricos e particulares dos professores; Discussão a partir dos anseios dos professores quanto ao tema de estudo e da sua realidade escolar.

Interacional	A construção do portfólio individual e sua socialização. A (re)elaboração e reflexão de ideias por meio do curso. Assim como, avaliação do próprio curso e sua autoavaliação.

Fonte: da pesquisa.

Desta maneira, consideramos as seis facetas para descrever, analisar e avaliar o curso de formação continuada com professores de Matemática do município de Itaqui. Relembrando que as facetas epistêmica e cognitiva abrangem o conhecimento comum, ampliado e especializado do professor, portanto, abraçando as três categorias do CDM para análise e avaliação.

A presente tese intenta mobilizar a compreensão dos números racionais através da articulação dos seus significados e diferentes representações, a partir de um curso formativo e investigativo com professores de Matemática sob a perspectiva do CDM. A fim de responder a questão norteadora desta investigação, buscamos como conhecimento referencial o aporte teórico da pesquisa (apresentado anteriormente) com estreita vinculação e discussão com os professores de Matemática durante o curso, sobre as reais necessidades e dificuldades do processo de ensino e aprendizagem ao tema números racionais. Desse modo, verificamos como o ensino dos números racionais, por meio dos seus significados e representações, pode ter a melhor idoneidade didática.

4 A FORMAÇÃO CONTINUADA COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos os resultados alcançados por meio do curso formativo e investigativo com os professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. Os dados analisados são organizados em duas seções, sendo: Primeiros Resultados onde desenvolvemos uma formação para sondar os professores quanto aos conhecimentos epistêmicos e cognitivos no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais e a necessidade/interesse em um estudo aprofundado sobre a temática. E, deste modo, na seção seguinte os resultados do curso formativo e investigativo.

4.1 PRIMEIROS RESULTADOS

Durante o ano de 2017 foi desenvolvido o Projeto[24] de Extensão "*Professor reflexivo em formação continuada: construindo novas perspectivas metodológicas em um ambiente de sala de aula*", sob a coordenação do professor Alex Sandro Gomes Leão, que teve por intuito promover debates teóricos sobre aquisição de conhecimento, metodologias de ensino e emprego de recursos didáticos a fim de potencializar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Para tanto, foram organizados quatro encontros durante o ano sendo que em cada encontro havia formadores distintos. As formações ocorreram no horário de planejamento dos professores de Matemática do município de Itaqui, Rio Grande do Sul.

Em um desses encontros foi proposto pela autora do presente trabalho uma oficina intitulada "*Interpretando os números racionais*" com duração de quatro horas, que teve por objetivo abordar atividades que potencializem os significados e representações dos números racionais, assim como propor alguns métodos para o ensino deste objeto matemático. A oficina foi organizada de modo a contemplar o documento curricular BNCC, especificamente o eixo *Números*, os significados e representações dos números racionais a partir de situações-problema e, após, uma discussão com os participantes versando sobre a necessidade do emprego de problemas para abordar os significados, o pouco interesse dos alunos por uma metodologia via problemas, a necessidade de formação continuada aos professores retratando as dificuldades de compreensão dos números racionais, o desconhecimento dessa teoria na prática de ensino e novas metodologias.

Os dados dessa oficina formativa e investigativa foram coletados a partir de um questionário com seis perguntas (apêndice A), sendo as cinco primeiras versando sobre os

[24] Sob o registro 05.024.16 da Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui.

significados e representações dos números racionais e a última, de caráter pessoal, questionando sobre suas propostas de ensino do tema tratado com seus alunos. Além disso, observações da formadora durante a oficina com os professores de Matemática do Ensino Fundamental (EF) também servem de apoio à análise dos dados.

As questões foram adaptadas de pesquisas na área, empregadas aos professores, com o intuito de verificar o conhecimento especializado, isto é, seus conhecimentos matemáticos (ao resolverem as questões) e didáticos (procedimentos para a solução e tipos de representações), bem como nas discussões, apresentação de suas possíveis dificuldades de ensino e aprendizagem de seus alunos quanto ao tema.

Vale ressaltar, que havia um convênio entre a Prefeitura Municipal de Itaqui e a Universidade Federal do Pampa em várias ações de interesse de ambas. Uma das ações foi o projeto de extensão envolvendo professores e acadêmicos da UNIPAMPA e professores da rede municipal de ensino. Assim, todos os professores de Matemática do município eram convocados para o curso de formação continuada (por meio do projeto de extensão). Os professores de Matemática que não estavam em planejamento no dia do encontro eram liberados de cumprir sua carga horária na escola pela secretária municipal de educação para participar da formação.

Neste encontro, participaram 14 professores de Matemática. Os questionários foram respondidos anonimamente e foi esclarecido aos professores participantes que o curso tinha caráter formativo e investigativo. Deste modo, os professores assinaram um termo de esclarecimento livre e esclarecido, permitindo que os registros dos protocolos desenvolvidos na oficina pudessem ser usados para fins de pesquisa científica. Os termos se encontram de posse da autora e, no anexo 1 há o modelo do termo preenchido pelos professores.

Além dos objetivos supracitados para esta oficina, a autora tinha por intuito também, através das problematizações, verificar o desempenho dos professores nas soluções apresentadas, desse modo, evidenciando ou não, a necessidade da futura formação continuada sobre o tema, principalmente a critério das dimensões epistêmica e cognitiva do CDM dos professores de Matemática. A autora tinha também interesse nas dimensões afetiva e interacional dispensadas pelos professores a esse tema, ou seja, o interesse de participação na formação com tema números racionais e as possíveis dificuldades de ensino e aprendizagem do tema.

A partir dos protocolos dos professores e observações da autora apresentamos os resultados obtidos durante essa formação. Destacamos que todos os professores participantes têm formação em nível de graduação, sendo 12 de licenciatura em Matemática (curta ou plena) e 2 em ciências da natureza. Além disso, apenas uma docente tem menos de 5 anos de atuação na área e mais da metade dos professores tem acima de 11 anos de experiência.

Duas questões foram mais desafiadoras aos professores, o que não foi proposital. Todas as questões poderiam ser desenvolvidas por alunos do 6º ao 9º ano do EF. Uma se tratava do significado operador, questão 3, figura 11. O professor poderia empregar a representação figural para solucionar a questão. A outra questão envolvia o significado de razão, pergunta número 4, figura 11, implicitamente o enunciado envolvia uma representação em fração, entretanto a representação figural poderia facilitar a compreensão. Em ambas as questões, nenhum professor apresentou resposta condizente, demonstrando não terem compreendido o enunciado da questão, ou então, limitações dos significados do número racional.

Figura 11 - Questões número 3 e 4

3) Represente geometricamente $\frac{2}{3}$ de quatro tipos distintos.

4) Duas jarras contem misturas de álcool e água nas razões de $\frac{3}{5}$ na primeira jarra e de $\frac{3}{7}$ na segunda. Juntando-se o conteúdo das duas jarras qual será a razão entre álcool e água na mistura resultante?

Fonte: excerto do Apêndice A

Quando ambas as questões foram expostas no quadro para discussão com o grande grupo, na questão 3 ficou evidente a não compreensão do número $\frac{2}{3}$ como operador por parte dos professores, algo que transforma uma quantidade. Dos que apresentaram solução foi identificado $\frac{2}{3}\ de\ 1$. Entretanto, outra interpretação recorrente $2 \cdot \frac{1}{3}$ não foi determinada. As soluções esperadas de cada questão estão no apêndice B. Na questão 4, ainda durante as discussões com o grande grupo, verificamos a incompreensão do parte/parte e parte/todo. Isto é, não foi entendido que o volume da segunda jarra foi repartido em 10 partes iguais, sendo 3 de álcool e 7 de água. Idem para o volume da primeira jarra. Contudo, por meio das argumentações dos professores, as questões foram solucionadas e foram explicitados os significados dos números racionais envolvidos e suas possíveis representações.

Figura 12 - Questões número 1 e 2

1) Em uma gincana de atletismo da escola, uma das provas era a corrida. João, Mario, Dorval e Carlos eram os representantes das quatro equipes participantes. Após cinco minutos da largada, João havia percorrida 20% da trajetória, Mario $\frac{3}{4}$, Dorval 0,6 e Carlos $\frac{3}{5}$. Sabendo disso, responda as perguntas abaixo.

a) Na reta abaixo, represente o caminho já percorrido da prova por cada participante.

Largada Chegada

b) Quem vai à frente da prova após os cinco minutos da largada? Explique.

c) Se o trajeto da prova de corrida fosse de 500 metros, como você calcularia quantos metros cada participante já percorreu após os cinco minutos da largada? Você saberia calcular de outro modo este resultado?

2) Do salário João, ele gasta $\frac{2}{5}$ com o aluguel. Do que sobrou gasta a metade com alimentação. Da segunda sobra coloca $\frac{1}{3}$ na poupança. Restando R$ 300. Qual o valor do seu salário? É possível determinar o salário de João por quais métodos (representações)?

Fonte: excerto do Apêndice A

As questões 1 e 2, figura 12, são analisadas do ponto de vista de como o professor propõe a solução, tipos de representações, interpretação adotada e soluções corretas (conhecimento especializado). A questão 1 envolvia os significados de medida, parte/todo e operador. A questão 2 envolvia principalmente o significado parte/todo, lembrando que este é o significado mais adotado pelos professores em suas aulas, de acordo com várias pesquisas já apontadas no referencial teórico. Na questão 2, apenas 4 professores determinaram a solução correta, sendo que 2 professoras tomaram a representação de porcentagem, um professor, de fração e um professor, de decimal, nas suas soluções. Apenas o professor que empregou a representação fracionária do número racional adotou o significado parte/todo e outros 3 professores empregaram regra de três. É uma técnica correta de ser utilizada, pois quanto mais se considera do salário, maior é a porcentagem, grandezas diretamente proporcionais. Entretanto, para alunos de 6º e 7º ano do EF pode ser um procedimento limitado, pois geralmente eles ainda não têm conhecimento de regra de três. O que caberia era o entendimento de razão, 2 está para 300 assim como 10 está para 1500. O número 2 representa duas partes das 10 partes do todo.

Cinco professores não responderam à pergunta 2 e não apresentaram justificativa para a não resolução. Quanto aos erros, o mais frequente foi determinar que 20% representam R$ 300,00 consequentemente não determinando o todo correto. Observamos que nem os professores que fizeram corretamente nem os que erraram usaram a representação figural nesta questão.

A identificação de valores na reta numérica, questão 1, não foi realizada corretamente por 9 professores. Quanto ao item (c), as possibilidades para determinar o trajeto já percorrido por cada participante se manteve em multiplicar a fração (ou o decimal) percorrida pelo trajeto total da prova. Ou, ainda, regra de três usando porcentagem.

As questões 2, 3 e 4 são atividades propostas no estudo de Onuchic e Allevato (2008) onde propõem que os significados/personalidades dos números racionais sejam explorados por meio de problemas geradores. Além disso, as autoras apontam que "utilizando a Metodologia de Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a construção de conhecimentos relacionados a esses conceitos se realize de forma mais significativa e efetiva pelos alunos" (p.99). Desta forma, foi discutido com os professores o papel dos significados dos números racionais para sua compreensão e sua exploração via problemas.

Figura 13 - Questão número 5

5) Certo dia durante a aula, a professora estava distribuindo folhas em branco aos alunos para realização de uma atividade. Nesta aula, estavam presentes quatro alunos e a professora tinha, no momento, 3 folhas.

a) cada aluno receberá uma folha?

b) cada aluno receberá pelo menos meia folha? Justifique?

c) qual quantidade de folha cada um receberá? Se recebermos como resposta $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{3}$ do aluno, qual foi sua interpretação da situação proposta?

Fonte: excerto do Apêndice A

Na questão 5, figura 13, ficou compreendido que o aluno não receberia uma folha inteira, mas mais de meia folha. Muitos professores comentaram que não seria justo dar um quarto de folha ao aluno e a outros, meia folha por exemplo. A questão causou estranheza aos professores, pois não acharam uma boa prática dar um quarto de folha (um pedaço) ao aluno para realização de uma atividade (saíram do pensamento matemático envolvido). Os poucos professores que responderam sobre a possível interpretação da resposta $\frac{4}{3}$, justificaram com a ideia de 4 alunos para 3 folhas, ou seja, estariam dividindo os alunos e não as folhas.

Após a discussão das 5 questões, novamente foram levantados questionamentos dos professores quanto ao uso de situações-problema para desencadear os significados dos números racionais. Muitos se queixaram de que os alunos não são receptivos a essa “técnica de ensino”, querem apenas o cálculo, ou seja, o algoritmo, a resposta de imediato. No decorrer da conversa, alguns professores apontaram que os alunos não são acostumados e, por isso, não gostam de pensar ou sair da sua zona de conforto. O que ficou evidente para nós (pesquisadoras) é que precisamos trabalhar com os professores atividades contextualizadas e seus encaminhamentos, seja por meio da metodologia de resolução de problemas ou investigativa. Primeiramente, os professores precisam perceber a conveniência ou eficiência dessas metodologias para daí, sim, fazerem uso no seu dia-a-dia de sala de aula.

Neste sentido, em uma futura formação, as dimensões mediacional e interacional do CDM devem ser desenvolvidas a fim de problematizar e vivenciar métodos e recursos didáticos distintos por hora empregado pelos professores. Como também, a interação entre professor-aluno e aluno-aluno neste novo ambiente de aprendizagem (via diferentes métodos/recursos).

A última questão envolvia respostas pessoais dos professores quanto às representações e significados dos números racionais no seu trabalho em sala de aula. Alguns professores responderam que abordam as representações de forma isolada, cada uma de uma vez, principalmente envolvendo as operações com frações e decimais, alguns apontaram que o registro geométrico é desenvolvido, porém observamos que aqui não foi empregado, assim como, o registro algébrico não foi utilizado (apenas o numérico). Outros responderam que não trabalham diretamente com esse tema, deixando a resposta em aberto.

Quanto à abordagem dos racionais via seus significados, nenhum professor apresentou quais são explorados ou situações de contextualizações. Apenas um professor se referiu ao significado medida, pois explora a reta numérica para auxiliar na ordenação dos números racionais. Cinco professores retomaram o item (a) no item (b) em suas respostas, mencionando as representações e não os significados. Na apresentação da formadora e discussão sobre os significados dos racionais com os professores, estes não demonstraram-se confortáveis com a conversa, com o seu emprego e apresentação das suas práticas de ensino a partir dos significados, o que confere com as respostas apresentadas ao item (6b) pelos professores. Nesse sentido, uma professora respondeu “*Não, percebi que não. Exploro mais os decimais e fracionários*”, referindo-se às representações, quando a pergunta era sobre os significados dos racionais.

Nas pesquisas de Magina e Campos (2008), Soares (2016), Silva (2007) é apontado o pouco conhecimento de professores em processos de formação continuada, quanto aos significados dos números racionais e suas conexões o que neste estudo também se observa. Também, observamos que os professores participantes, demonstravam maior interesse/preocupação em solucionar o problema (conhecimento matemático) ao registrar diferentes encaminhamos de solução ou interpretação de um erro (conhecimento didático). Além disso, Onuchic e Allevato (2008), apontam que

> [...] todos concordam que a exploração desse conhecimento construído com os alunos leva tempo. É preciso que nos conscientizemos da importância de um trabalho sério com números racionais e proporcionalidade, que leve à consolidação de conhecimento essencial, tanto conceitual quanto procedimental. (p.100)

Por fim, vale ressaltar, que a análise desses protocolos não intenta provar os conhecimentos (ou não) dos professores, mas, no momento da resolução dessas situações-problema, tentamos vislumbrar possibilidades de exploração dos números racionais com os professores. Observamos que os professores não costumam fazer uso dos significados dos números racionais e nem de conexões com suas representações simultaneamente, seja por desconhecimento da proposta de Kieren ou pelo não acréscimo dela na prática de sala de aula ou, ainda, outra situação não identificada nesta oficina.

Em se tratando das dimensões epistêmica e cognitiva do CDM, notamos o quanto o conhecimento referencial matemático de números racionais e os didáticos poderiam ser explorados a fim de qualificar a dimensão cognitiva dos professores. Isto é, que concepções errôneas fossem superadas e limitações no processo de ensino do tema pudessem ser abordadas e aprimoradas.

Concebemos que a formação do professor é um processo contínuo de desenvolvimento profissional, isto é, que não se esgota na formação inicial e que a prática reflexiva também gera conhecimento ao professor. Desta forma, a formação continuada é um meio de reelaborar a postura crítica do professor sobre o ensinar a partir de seus conhecimentos e vivências.

O que ficou claro foi o interesse de boa parte dos professores em conhecer melhor a teoria envolvida para a compreensão dos números racionais por meio de seus significados e representações e o limitado conhecimento didático-matemático mobilizado nessa oficina por alguns professores. Portanto, criamos o caminho, o fio condutor entre a temática da pesquisa (os números racionais) e o interesse dos professores de Matemática em estudá-la por meio de uma formação continuada.

4.2 O CURSO FORMATIVO E INVESTIGATIVO COM OS PROFESSORES

Esta seção é destinada para a apresentação e discussão dos resultados alcançados durante o processo de formação. O curso de caráter formativo e investigativo ocorreu durante o segundo semestre do ano de 2018, perfazendo 36 horas, com a participação de 2 a 6 professores por encontro. Ressaltamos que os encontros foram desenvolvidos nos dias de planejamento dos professores, nas segundas-feiras (variando de um a dois por mês). Justificamos a pouca adesão dos professores ao curso ($\frac{7}{29}$ a razão de professores participantes e para o total de professores) pela desvalorização social que os mesmos se encontram (na dimensão afetiva e interacional retomamos essa situação).

No primeiro encontro foi solicitado que cada professor fizesse uma apresentação a fim de traçar um perfil dos mesmos por meio de um questionário. Como também, sondá-los sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais no Ensino Fundamental. Os professores são denominados por Prof. A, Prof. B, ..., Prof. G neste texto. O quadro 5 ilustra as principais características apontadas pelos participantes sendo que todos são licenciados em Matemática.

Quadro 5 - perfil dos professores participantes da formação

Professores	**Idade (em anos)**	**Tempo de serviço**	**Especialista**	**Emprega a resolução de problemas?**	**Aspectos relevantes num processo de formação**
Prof. A	Acima de 45	16 anos	Matemática	Sim	Qualquer recurso.
Prof. B	Entre 30 e 45	18 anos	Interdisciplinaridade	Poucas vezes	Jogos e recursos tecnológicos.
Prof. C	Entre 30 e 45	11 anos	Não possui	Não	Jogos, recursos tecnológicos e resolução de problemas.
Prof. D	Acima de 45	18 anos	Mídias na educação	Sim	Jogos, recursos tecnológicos e resolução de problemas.
Prof. E	Entre 30 e 45	5 anos	Educação Matemática	Poucas vezes	Ferramentas para melhor aplicação das teorias.

Fonte: da pesquisa.

Dois professores não retornaram com o questionário supracitado e nenhum dos professores participantes possui pós-graduação *stricto sensu* (mestrado ou doutorado). Quanto aos professores que empregam a metodologia de resolução de problemas, são sucintos em alegar a relação possível com o cotidiano.

> *(Prof. A): Nada melhor que situações práticas para uma melhor compreensão.*
>
> *(Prof. D): Considero válida essa metodologia, mas é preciso relacionar a fatos ou práticas do dia a dia do aluno.*

Quanto aos professores que não (ou pouco) empregam esta metodologia relacionam ao fato de tornar mais complexo aos alunos os estudos, cientes das dificuldades dos mesmos. Duas falas de professores neste sentido são:

> *(Prof. B): É uma metodologia válida porque instiga o aluno a pensar, desenvolver o raciocínio.*
>
> *(Prof. C): Considero válida, porém não utilizo pela grande dificuldade de interpretação dos alunos.*

Ainda neste instrumento foi questionado aos professores quanto as dificuldades de ensino especificamente sobre números racionais e todas as respostas dos professores vieram no sentido de dificuldades de aprendizagem, ou seja, dos alunos. Desta maneira, mencionaram, de modo geral, a desmotivação do aluno em estudar ao citar

> *(Prof. C): A falta de interesse e dificuldade de interpretação.*
>
> *(Prof. D): Dificuldades em fazer divisões, identificar se o número é racional ou irracional. Demonstram falta de vontade.*

Referente a pergunta quanto às dificuldades de aprendizagem dos alunos apontados pelos professores giram em torno da operação de divisão seja por não compreender a operação (ou o algoritmo), seja pelo não domínio da tabuada. Desta maneira, os professores identificam que

> *(Prof. C): A maior dificuldade (que eu percebi) são nas operações*[25]*, em todos os anos.*
>
> *(Prof. B): Os alunos apresentam dificuldade em identificar que os números racionais são o resultado de uma divisão e organizá-los em ordem crescente e decrescente.*
>
> *(Prof. F): Divisão – tabuada.*
>
> *(Prof. A): Em relação ao que significa a parte que representa a fração.*

O intuito de apresentar estes dados, além de identificar o perfil dos professores, é de contextualizar, tornar mais próximo a formação continuada da realidade escolar. Neste sentido, cabe mencionar a situação em que esses professores estão lidando no ambiente escolar e social.

---

[25] Deixamos em negrito parte das falas dos professores para destacar o que está sendo discutido no texto.

Os próprios relataram no primeiro encontro de formação (e durante todo o curso) a desvalorização da profissão de professor seja pela sociedade (pais e alunos) ou pelo Governo (nas três esferas) e, consequentemente a desmotivação.

Apontado pelos professores, a desvalorização tem duas frentes: uma pela falta de respeito de pais e alunos aos professores, na descrença da posição do professor como “fonte de conhecimento”. A outra frente é pelo parcelamento do salário mensal no qual desestrutura o planejamento familiar e emocional dos professores. Estes relatam mais de ano o pagamento atrasado do salário (e outras vantagens como 13º salário ou auxílio alimentação) tanto do Município quanto do Estado.

Na seção da dimensão afetiva detalhamos os fatos/discussões dos professores quanto a essas duas situações vividas atualmente. Neste momento, salientamos esses casos para explicar a baixa adesão dos professores a essa formação continuada, tendo em vista que há 29 professores de Matemática no Município e apenas 7, alternadamente, participaram. Assim como, inferir algumas dificuldades enfrentadas durante o curso que, de uma forma mais ampla, estão ligadas a desvalorização e desmotivação dos professores.

A princípio estavam organizados 9 encontros para essa formação, porém pelo término do ano letivo e apenas 2 professores participando dos últimos encontros, optamos em não realizarmos o nono e as ações previstas neste encontro foram reorganizadas no oitavo.

O modelo do portfólio no qual constam todas as atividades propostas durante o curso de formação está no Apêndice D. Cada professor construiu o seu portfólio de acordo com as suas dificuldades apontadas (ou dos seus alunos) e seus conhecimentos prévios e emergentes. No último encontro, final do curso, foi entregue os portfólios a todos os professores presentes.

A seguir apresentamos os dados via as seis dimensões que balizam um processo de formação continuada de professores na perspectiva do CDM no intuito de descrever, analisar e avaliar a proposta desenvolvida. Como também, mensuramos o processo vivido a fim de diagnosticar a idoneidade do mesmo.

Nos baseamos no EOS e no CDM, para criarmos uma trajetória didática para desenvolver cada dimensão, isto é, atividades e situações-problema que pudessem potencializar cada dimensão do processo de formação. Como também, as práticas (matemáticas e didáticas) estão absorvidas em cada dimensão.

Vale ressaltar, que os dados não são de um instrumento ou dia de formação (pontuais) para apontar uma dimensão. Em diferentes momentos do curso recolhemos indícios/fatos de cada dimensão que orientam essa proposta.

As dimensões, analisadas a seguir, seguem uma sequência de ideias. Primeiramente a **epistêmica** referente ao conhecimento referencial, a **mediacional** referente aos meios para mobilizar o conhecimento referencial, a **afetiva** para considerar os interesses e motivações dos professores ao estudo de casos de referência e particulares envolvendo os números racionais, a **ecológica** que observa se o conhecimento referencial está de acordo com os documentos curriculares e com as inovações didáticas para o ensino e aprendizagem da Matemática, a **cognitiva** referente ao conhecimento alcançado pelos professores e a **interacional** que identifica as interações do processo formativo e investigativo, assim como a avaliação do mesmo.

4.2.1 Dimensão Epistêmica

A dimensão epistêmica está organizada de forma a contemplar o conhecimento especializado do professor de Matemática ao ensinar números racionais nos anos finais do Ensino Fundamental, tendo em vista os significados institucionais para esta etapa de escolarização. Esse conhecimento envolve o didático e o matemático, isto é, a compreensão dos significados parciais e holístico dos números racionais, possíveis representações, situações-problemas que potencializem a compreensão e operações nas práticas matemáticas, assim como, questionamentos e encaminhamentos pertinentes do professor para elucidar dúvidas ou concepções errôneas/conflitos semióticos.

Para tal organizamos uma trajetória didática ao professor[26], onde percorremos os objetos de estudos: significados dos números racionais (parte/todo, quociente, medida, operador e razão) e as suas concepções fundamentais (equivalência, partição, ordenação, unidade, operações, valor posicional e densidade) baseados nos estudos de Kieren (1988), Behr et al (1983), Lamon (2006) e BNCC (2019).

O início desse estudo parte da definição do conjunto dos números racionais adotada pelo professor. No seu portfólio o professor poderia realizar seu registro e após socializa-lo. A definição correta apresentada e também normalmente empregada nos livros didáticos é a razão $\frac{a}{b}$, onde $a, b \in Z, b \neq 0$.

[26] Sequência de atividades didáticas desenvolvidas pelo aluno/professor ou ambos, assim como os meios planejados ou usados para abordar a tarefa (GODINO, 2017).

(Prof. D): É um conjunto de números positivos, negativos, incluindo o zero e fracionários com dízimas periódicas simples e composta onde abrange os conjuntos naturais e inteiros. Também onde existe em um número fracionário divisão exata.

(Prof. B): Divisão ou o todo (inteiro) em partes.

(Prof. F): É o conjunto formado pelo resultado da divisão de dois números inteiros, sendo que o divisor tem que ser diferente de zero.

(Prof. A): É a divisão de números a:b, onde o denominador será diferente de zero e a um número inteiro.

(Prof. C): Q={a/b, sendo a um número inteiro e b um número inteiro diferente de zero}.

(Prof. G): Conjunto formado por números inteiros a e b com $b \neq 0$*; parte de um todo.*

Iniciamos a formação questionando os professores sobre a definição de número racional, podendo ela ser uma definição não formal (significado pessoal) ou formal do objeto (significado institucional/holístico). Godino, Batanero e Font (2007) apontam que a determinação do significado holístico requer considerar a diversidade de contextos de uso onde se põe em jogo esse objeto. Neste sentido, os significados parciais do objeto poderiam ser explicitados ao responder à questão. Das soluções, percebemos fortemente a ideia de divisão entre números inteiros ou parte de um todo – significados de quociente e parte/todo respectivamente, do objeto.

Das respostas dos professores, percebemos, também conflitos semióticos, por exemplo, ao se referir a divisão por partes e não citar que as partes devem ser iguais ou número fracionário com divisão exata, não considerando o numerador e denominador números inteiros e o denominador diferente de zero. Ao definirem números racionais, os professores empregaram os elementos linguísticos (registros) na linguagem natural e na algébrica.

Durante a socialização dos registros dos professores, a formadora[27] questionou se ao trabalhar com números racionais os alunos entendem a fração como uma divisão já que as definições apresentadas deixam clara a ideia de quociente. Dois professores foram pontuais ao afirmar que a relação não é satisfeita ao citar

(Prof. A): não, não percebe. Não tem essa noção. O aluno não consegue fazer a divisão, o algoritmo (exato ou não), não sabem a tabuada.

(Prof. G): O aluno tem dificuldade na divisão, não reconhece divisão não exata ou menor que 1.

A indagação da formadora tinha também como propósito, investigar se o aluno (e o professor) compreende, por exemplo, ¾ como parte de um todo ou como uma divisão *3:4 =*

[27] A formadora é a própria autora da pesquisa.

0,75. Retomando que no referencial teórico deste trabalho, há pesquisas apontando que normalmente o significado parte/todo é o mais explorado pelos professores. Durante a socialização ficou implícito que o significado explorado pelos professores é o parte/todo e pouca ênfase no significado quociente principalmente no 6º ano. Outro fato que se alia a essa argumentação é que os livros didáticos consultados pelos professores (e aprovados pelo PNLD 2017 a 2019) não definem número racional no 6º e 7º anos. Os livros apresentam a definição no 8º ou 9º anos. Na grade curricular das escolas municipais esse entendimento é proposto no 8º ano para poder determinar os números irracionais.

Após o entendimento de qual conjunto numérico estávamos tratando e exemplificações dos seus elementos, continuamos na perspectiva de (re)conhecer os conhecimentos prévios dos professores participantes e, desse modo, foi proposto uma atividade ilustrada no quadro 6.

Ao responder os dois itens, o professor necessita tanto de conhecimentos do conteúdo específico (matemático) quanto de didáticos (diferentes estratégias, encaminhamentos pertinentes, compreensão do pensamento do aluno). Todos os professores concordaram que a atividade era possível de ser aplicada em suas turmas do Ensino Fundamental, sendo uma questão pertinente para explorar o entendimento de fração.

Sobre o conhecimento matemático esperava-se que as soluções sobre grandezas discretas, comparações de frações, fração como um operador, a ideia de todo (unidade) não determinada no enunciado, os tipos de registros adotados (fração, decimal, porcentagem, natural ou figural), procedimentos (parte/todo, operador, razão ou outro). Enfim, que o professor conseguisse expressar/argumentar de diferentes estratégias e, desta forma, oportunizar a compreensão dos conceitos abordados na atividade.

Quadro 6 - Atividade proposta a fim de verificar os conhecimentos prévios dos professores

Leia o enunciado da questão e verifique a solução encontrada por cada aluno. Após, responda os itens abaixo. **Ana deu um meio de suas balas para sua irmã e Jorge deu também a sua irmã um quarto de suas balas. Quem deu mais balas?** *A aluna 1* apresentou como resposta a essa situação que Jorge deu mais balas, pois deu o dobro de balas que Ana. *A aluna 2* apresentou como resposta que Ana tinha dado mais balas, pois deu a metade de suas balas e Jorge deu menos da metade de suas balas. a) No seu entendimento, qual erro a Aluna 1 cometeu? Escreva como tu explicarias à aluna o erro cometido e quais encaminhamentos daria para a solução correta. b) A resposta da Aluna 2 poderia estar correta, porém sua justificativa não é suficiente para garantir que a resposta esteja correta. O que tu questionarias à aluna para garantir que sua resposta esteja correta?

Fonte: excerto do portfólio.

As respostas dos professores ao item (a) focam principalmente na identificação do erro do aluno que foi considerar um quarto o dobro de um meio. Os encaminhamentos para a solução esperada (correta) foi em direção de dividir as frações (1:2 e 1:4) e mostrar qual é a maior ou simular quantidades de balas. Nos seus registros apresentam:

> *(Prof. C): A aluna 1 considerou apenas o denominador para responder a questão. Eu explicaria que Ana dividiu por 2 a quantidade de balas que tinha e Jorge dividiu por 4. Iria supor que, por exemplo, ambos tinham 20 balas, Ana deu 10 e Jorge deu 5.*
>
> *(Prof. F): O erro foi dizer que Jorge deu o dobro de balas (considerou multiplicar por 2 o denominador), o que na verdade quem deu a metade de suas balas foi Ana e não Jorge.*
>
> *(Prof. B): Ana deu mais balas porque 0,5 > 0,25.*
>
> *(Prof. A): Em princípio exemplificaria um número quantidade que cada um teria de balas. Após faria a representação de ½ e do ¼. Poderia também ser uma representação de figuras para representação de frações.*
>
> *(Prof. G): Dizer que o Jorge deu o dobro de balas que a Ana. O ¼ é a quarta parte da quantidade de balas que Jorge tem, depende da quantidade de balas de cada um.*
>
> *(Prof. D): Erro: a aluna não percebeu que ½ = 0,5 e ¼ = 0,25 e que 0,5 é a metade de um e que zero vírgula vinte e cinco não é nem a metade. Ela cometeu um erro em fazer a divisão e que 0,5 é maior que 0,25 e 0,5 > 0,25.*

Ao responder ao item (a) o Prof. G percebeu que a quantidade de balas não foi dada, logo não havia como dizer quem deu mais. A questão deixa implícito quem é o todo. Apenas o item (b) faz o alerta em operar sobre o todo (quantidade balas) e mesmo assim não podemos garantir que o todo é a mesma quantidade para cada indivíduo. Ana e Jorge podem ter quantidades diferentes de balas, logo quem deu mais pode variar.

Os questionamentos que seriam necessários no item (b) para elucidar a questão foi proposto apenas por um professor *"quanto representa um meio e quanto representa um quarto?" (Prof. F).* Os outros professores apontaram qual seria a resposta correta, sem indicar suas indagações aos alunos, como segue

> *(Prof. G): Vai depender da quantidade de balas de cada um. Exemplo: se Ana tem 2 balas então metade corresponde a 1 bala e se Jorge tem 8 balas então um quarto corresponde a 2 balas.*
>
> *(Prof. C): Que depende do número de balas que cada um tem e se por exemplo a Ana tivesse 20 balas (daria 10) e o Jorge 80 (daria 20), mesmo dando menos da metade ele daria mais balas.*

> *(Prof. A): Daria significados mais concretos para que percebesse a representação das frações propostas.*
> *(Prof. B): Que ½ > ¼, na reta numérica é mais próximo de 1 inteiro.*
> *(Prof. D): Porque 0,25 corresponde uma parte do todo, ou seja, uma fatia dos quatro pedaços de uma pizza e que 0,5 é a metade do todo ou seja a metade da pizza.*

Um professor mencionou a possibilidade de usar a mesma quantidade de balas para responder à questão, porém não é uma informação dada no enunciado. Justamente era isso que o problema investigava implicitamente – o todo. A questão (atividade do quadro 6) espera que o aluno (professor) percebesse que ele não sabe sobre qual quantidade está operando.

Ao final da questão a formadora retomou com os professores a proposta da questão, sendo: uma unidade dividida em duas partes iguais é maior que dividida em quatro partes iguais e, ainda, quanto mais divisões houver, menor será a fatia (fração). Desta forma, estamos operando sobre uma mesma quantidade. Se as quantidades não são iguais (o todo), não há como afirmar que uma fração é maior que outra. Via a questão, o aluno pode investigar quais são as possiblidades da quantidade de balas de Ana ou Jorge e quem deu mais. É uma questão simples ao aluno, mas que pode ter diferentes soluções e cria um ambiente de estratégias, argumentações e soluções aos alunos. Neste sentido, o Prof. F afirmou "*mostra a atenção que o professor tem ao elaborar uma questão. Essa questão nos colocou numa sinuca*".

Por fim, a formadora retomou os conceitos matemáticos envolvidos na questão, como comparação de frações e como comparar, operar com uma fração, compreender o significado de ½ e ¼ na situação, o raciocínio e a justificativa da solução encontrada (buscando desenvolver um letramento matemático).

Ao concluir a análise das respostas dos professores dos itens (a) e (b) do quadro 6, observamos que elucidar a questão é dar exemplos concretos (com quantidades de balas), caso dos Prof. G e Prof. C. Estes demonstram que sabem como chegar na resposta "correta", ou seja, o conhecimento comum (aquele necessário para responder uma questão) é satisfeito. Entretanto, esses e os outros professores não propuseram indagações para a compreensão da questão ou diferentes estratégias/registros que contempla o conhecimento especializado. Ainda, alguns professores se prenderam a ideia de que uma fração é maior que a outra, sem compreender a interpretação das frações na situação proposta, logo não há domínio nem do conhecimento comum.

O quadro 7 ilustra as duas últimas questões abordadas no primeiro encontro e versam sobre dificuldades e possíveis superações no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais. Essas questões já estavam possivelmente respondidas no questionário proposto aos professores para reconhecimento do perfil. Optamos em retomar com o grande grupo essas questões, pois poderia ter algo escrito no questionário e não posto neste momento e vice-versa. Muitas vezes a ideia fica apenas no questionário e o professor tem "receio" em apresentar ao grupo ou, mesmo, durante a conversa entre todos, o professor se sente à vontade de se expor e compartilhar dificuldades ou superações próprias. Gerando, possivelmente, uma reflexão crítica da sua prática.

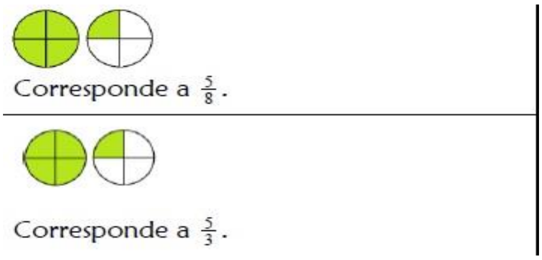
Quadro 7 - Possíveis dificuldades e superações no processo de ensino e aprendizagem dos racionais

c) Quando tu ensinas os números racionais, quais são as dificuldades de aprendizagem mais recorrentes dos alunos?
d) Cite como tu procedes para dirimir a dificuldade do aluno, isto é, do item anterior tome uma situação e comente como tu propões a superação da não compreensão do aluno sobre os números racionais.

Fonte: excerto do portfólio.

Os professores responderam aos itens (c) e (d) no seu portfólio e após foi socializado com o grupo. Para iniciar a discussão com os professores, a formadora apresentou um erro recorrente dos seus alunos no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais, especificamente com frações, exposta na figura 14.

Figura 14 - Ilustração da incompreensão das possíveis representações de uma fração



Fonte: da pesquisa.

A figura 14 ilustra a situação que é dada a representação no registro geométrico (círculo) de uma quantidade (fração) e pede-se que o aluno identifique numericamente essa fração. Dadas as respostas $\frac{5}{8}$ ou $\frac{5}{3}$ percebemos, pelo menos, a não compreensão de todo ou a não compreensão do que o numerador e o denominador indicam numa fração. Cabe ao professor buscar alternativas para determinar a solução correta 1,25 ou $\frac{5}{4}$ nesta situação. Como orientação aos professores foi sugerido uso de recursos didáticos para potencializar a compreensão das partes e todo de uma quantidade, na qual seriam também exploradas nesta formação. O quadro 8 apresenta as dificuldades e superações que os professores apontaram em seu portfólio.

Quadro 8: apresenta as respostas dos professores quanto às questões propostas no quadro 7

	Dificuldade	Superação
Prof. B	Divisão – tabuada. Entender 1 inteiro pode ser dividido em partes iguais.	1 bergamota inteira, 1 bergamota dividida ao meio, 1 bergamota cada gomo corresponde a uma parte do inteiro ou 1 pizza ou 1 bolo.
Prof. F	Conseguir identificar "a fração" como uma divisão, e organizar mentalmente a ordem dos números racionais, qual é o maior e qual é o menor.	Através de atendimentos individuais, e dentro da realidade, utilizando material concreto, onde facilita a visualização do aluno.
Prof. A	É com relação as divisões de números de uma fração. Custam a acreditar que o traço da fração representa uma divisão. Quando da colocação de um número fracionário em uma reta numérica a dificuldade apresentada é justamente a divisão desses números. Procuro dar um significado do todo e uma representação de um desenho ou um material concreto. Ex: a dobradura no papel. Dobrar em partes.	O material concreto é a forma mais utilizada para determinar o resultado do exercício proposto.
Prof. G	A ideia de parte, comparar uma fração com a outra, dividir.	Ilustrando exemplos.
Prof. D	É fazer divisões com números com vírgulas e também a falta de estudo da tabuada.	É tentando explicar de outra maneira para ver se ele entende, também costumo usar modelos em forma de pizza ou porcentagem para melhor esclarecer suas dúvidas ou modelos geométricos (formas).

Fonte: da pesquisa.

O Prof. G começou comentando quais exemplos emprega para elucidar as dificuldades dos seus alunos em comparar frações:

> *Exercício do livro com jarrinha de suco, uma com ½ de suco, outra ¾ suco, ... qual jarra tem mais suco? E menos suco? Há dificuldade em comparar as frações, às vezes, até pensam em olhar para figura apenas e não em realizar um cálculo. Dificuldade também em efetuar 1 divide 2, 1 divide 4, 3 divide 4, dificulta a comparação, pois tem que realizar uma divisão. Ou, ainda, seleciono exercício de receita de bolo, uma receita com frações nas medidas e outra com decimais. Daí qual usa mais farinha? Outra situação é com dinheiro: 5 reais para dividir por 2? Dá 2,50 de cabeça. Eu sempre uso o real é a parte inteiro, os centavinhos são a parte decimal (quebrada, trocadinho).*

Após as colocações do Prof. G, os professores começaram a relatar o uso dos números decimais aos fracionários na percepção que os alunos compreendem melhor no primeiro registro ao segundo. Desse modo, discutiram que

> *(Prof. G): O número decimal é mais fácil de visualizar, então tento transformar para decimal para marcar na reta numérica. Como a formadora disse, o decimal é mais empregado, uso mais.*
>
> *(Prof. C): Assim acabo trabalhando mais os decimais que as frações, deixo as frações de lado, porque é mais fácil de visualizar a quantidade (a comparação trabalho mais com decimais). As frações trabalho as operações. Comparação de fração: só com denominadores iguais. Não dá tempo de ver tudo, a gente tem que escolher... quando aparece mais uma casa, usa o exemplo da gasolina, nos postos o preço da gasolina é R$ 4,679.*
>
> *Formadora: um aluno em aula me perguntou quanto era em dinheiro R$ 2,599. Quanto precisa ter para comprar o litro da gasolina? São dessas perguntas que surgem compreensões mais eficientes, com significado ao aluno da terceira casa decimal – e não simplesmente dizer são os milésimos.*
>
> *(Prof. D): A gente não fica muito tempo em cima... é bem breve... os livros trazem bastante probleminhas, lembrei do exemplo do bolo que leva ¾ de hora para ficar pronto. É preciso fazer o desenho do ¾ para eles entenderem melhor (não há a noção da quantidade 3/4). Tem pessoas que aprendem mais visualizando que apenas a parte numérica.*
>
> *(Colocações do Prof. G e Prof. D): Melhor maneira de superar as dificuldades é dar exemplos e fazer ilustrações.*
>
> *(Prof. F): Comparar frações na reta numérica, usa os decimais.*
>
> *Formadora: é difícil saber quanto é 3/17, sabemos que é um número menor que 1. Acabamos recorrendo aos decimais.*
>
> *(Prof. A): Os alunos não sabem que 3/17 é menor que 1, não tem essa ideia. Tem que fazer o cálculo no quadro e mostrar que é menor que 1.*
>
> *(Prof. C): É um trabalho que faço na reta numérica usando a calculadora. Torna mais dinâmico, fazem várias divisões, é cansativo para o aluno fazer várias divisões na mão.*
>
> *(Prof. D): Quando digo tragam a calculadora na próxima aula. Pode ser celular? Mas se a diretora ver a gente usando o celular na aula? Mas tem que fazer bom uso. Com toda essa tecnologia e tu não saber usar, não pode. Os livros trazem como usar a calculadora, mas a gente deixa de lado porque tem muita coisa para ser vista. A calculadora não está na grade curricular, então deixasse.*

Durante a fala dos professores percebemos a prevalência do registro dos números racionais na forma decimal. Neste sentido, foi argumentado o uso no cotidiano do aluno que facilita a compreensão, pois ele o emprega, necessita no dia a dia para viver (ou sobreviver). Normalmente, as pessoas têm uma melhor clareza do número na forma decimal à fracionária. O que não ficou claro nessa conversa e trouxe a preocupação da formadora levar para o próximo encontro é porque, então, trabalhar com o registro fracionário já que o decimal só traz benefícios? Benefício compreendido como as pessoas usam no cotidiano esse registro, logo o compreendem melhor. Para identificar ou comparar frações na reta numérica, por exemplo, realizamos a divisão para determinar o decimal e daí determinamos seu valor posicional. Seria apenas uma exigência da grade curricular da escola trabalhar com frações? No encontro 5, ainda nesta dimensão, retomamos essa discussão.

Ao encontro da fala do Prof. C acima quanto ao aluno já estar "preso" em um algoritmo e mesmo assim não o compreendeu, foi questionado aos professores: Muitas vezes o professor de Matemática espera que o professor de anos anteriores proponha atividades com material concreto ao aluno para desenvolver a compreensão do número racional. Entretanto, muitas vezes, nos parece que o aluno carece desse entendimento e já está preso em regras, como o m.m.c. Tu inseres material concreto em suas aulas sobre números racionais? Ou como tu superas a dificuldade apontada nesse item?

> *(Prof. G): Discos de EVA, bolo, pizza. Exemplos, atividades relacionadas com o cotidiano dos alunos.*
>
> *(Prof. C): Não insiro material concreto. Tento superar a dificuldade do mmc através de figuras, com frações equivalentes.*
>
> *(Prof. A): Sim. O material concreto dá uma visualização maior do todo e a parte. Utilizo bastante.*
>
> *(Prof. F): Sim, algumas vezes, como, discos de pizza de EVA, cubos de cartolina, cubos de madeira, mas não é o foco principal, utilizo apenas como uma forma de que eles (alunos) visualizem as regras e teorias. A maior preocupação sempre acaba sendo fazer que saibam apenas com os decimais.*
>
> *(Prof. D): Sim, costumo representar em formas de figuras, fazendo com que eles criam painel juntamente com o professor. Envolvo situações problemas do dia a dia como receitas de bolo, contagem, ou seja, em dinheiro, confecção da reta numérica em cartaz especificando os números inteiros, fracionários e decimais. Comparações fracionários com a quantidade de alunos da turma e quanto representa em fração o número de meninas e meninos que a turma possui.*
>
> *(Prof. B): Geralmente utilizo no nosso sistema monetário. Às vezes, dominó das frações feito no magistério em didática da matemática. Fita métrica – divisão do inteiro em partes – problemas envolvendo tecidos.*

Infelizmente quando o professor disse que usa material concreto não exemplificou o material (se jogo, *applet*, Frac Soma, régua das frações, ...). Apenas um professor citou que não usa materiais concretos e relaciona isso ao fato de não verificar uma melhor compreensão dos alunos quando usam o material ou por falta de tempo de confeccioná-lo ou falta de verba da escola para a compra dos materiais.

Com frequência, os professores não apontam argumentos coerentes para justificar o emprego de recursos didáticos em suas aulas. Desse modo, evidencia que o material não faz parte da compreensão do objeto, mas como algo lúdico (ou apenas uma revisão).

O critério global para a dimensão epistêmica para um programa de formação de professores é dado pela seleção representativa de conhecimentos didático-matemáticos de significados institucionais considerados como pertinentes para um ensino idôneo dos números racionais para a etapa de ensino almejada. Além disso, por meio da sondagem de conhecimentos dos professores e pelas atividades do 1º encontro (atividade quadros 6 e 7), organizamos os próximos encontros a fim de desenvolver os componentes e indicadores desta dimensão do processo de formação.

O segundo encontro iniciou com a formadora expondo as principais dificuldades dos alunos que os professores identificaram. Assim, a formadora colocou: os alunos compreendem os ¾ como parte/todo, mas não que é 3:4. E no decorrer das falas dos professores, como segue abaixo, percebemos que o registro decimal prevalece ao fracionário, porém não há uma compreensão melhor desse registro ao aluno.

> *(Prof. A): A gente vai explicando direitinho, mas quando chega na hora dos decimais os alunos não entendem o porquê 0,1>0,095. É difícil fazer entender essas comparações (uso de casas decimais).*
>
> *Formadora: vocês chegam a unir nas operações frações e decimais?*
>
> *(Prof. A): No 7 ano apenas. No sexto ano explica os decimais, depois os fracionários (separadamente). Já no 7 ano dá mais uma carregada, ao menos comigo.*
>
> *(Prof. C): No 7 ano são os racionais, já com sinais (viram os inteiros). Eu não opero com os dois registros. Até faço trabalharem juntos (decimais e fracionário) para encontrar números reta numérica. Fração em decimal apenas. Justamente pela dificuldade que eles têm nas operações em somar e diminuir. Se eles dominassem bastante as operações seria mais fácil, não teria problema com a divisão, eles transformariam um no outro e faria tranquilo a soma. Mas como têm muita dificuldade, acaba optando em fazer o mais fácil. Infelizmente é isso. Porque se não tu rodas uma turma inteira.*

(Prof. A): Tem dificuldade na parte inteira do decimal; na adição de decimais, não consegue visualizar essa operação (12,9+1,234). Na subtração pior ainda, porque tem que colocar as casas de zero, pedir emprestado.

(Prof. C): Subtração com inteiros é um horror. Até hoje. Não são todos. Se perdem no zero.

Na sequência a formadora questionou os professores sobre o que é essencial para o estudo dos números racionais no 6º ano e no 7º ano do Ensino Fundamental. O intuito da atividade era de verificar o que realmente os professores abordam em sala de aula. Era, também, uma tentativa de verificar se os significados dos números racionais são explorados e em que momento do processo. O quadro 9 apresenta a organização dos conteúdos dada pelos professores (a construção foi feita no quadro com a participação de todos os professores).

Quadro 9 - Conteúdos trabalhados no 6º e 7º anos envolvendo números racionais

6º ano	7º ano
Números decimais (casas decimais, escrita e leitura) Números fracionários (comparação, ordenação, operações)	Números racionais na forma fracionária (positivo e negativos) Reta numérica Número fracionário para decimal Operações Números decimais

Fonte: da pesquisa.

Embora tenha sido estimulada a participação dos professores para a construção do quadro 9, os mesmos não se deteram nessa atividade. Além disso, quando foi abordado sobre a grade curricular de Matemática do município (encontro 6), os professores relataram que a desenvolvem praticamente na sua totalidade. Logo, há mais conceitos sendo explorados do que os mencionados neste quadro. O que gerou discussão entre os professores, neste momento, foi a compreensão de dízimas periódicas, sobre sua compreensão e qual ano seria mais adequado.

(Prof. A): Interessante que tenho 6º, 7º e 8º anos, mas o que eu percebo que as dízimas periódicas, eles têm uma dificuldade imensa em trabalhar e só no conteúdo do 8º ano vai se falar em dízima. Isso deveria ser antes, eu acho, no 7º ano. A noção da dízima entra nos decimais (7º ano).

(Prof. C): No 7º ano a gente dá uma noção. No 8º ano é transformação de dízima em fração. E como se faz para transformar o 0,444... em 4/9? Identificando uma dificuldade.

(Prof. A): Eu me antecipo. Já no 7º ano trabalho dízima periódica. Eu vejo a necessidade de eles chegarem no 8º ano já com um conhecimento formado sobre isso. Não exijo muito.

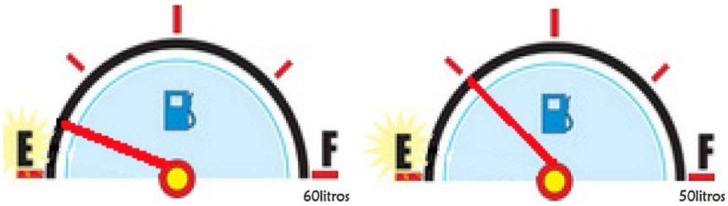
(Prof. C): No ato de passar fração para decimal, falo das dízimas.

A fim de tratar dos significados dos números racionais foi proposto aos professores 3 atividades apresentadas no quadro 10. Cada situação explora um ou mais significados, como também os conhecimentos didáticos dos participantes. Primeiramente os professores responderam às atividades no seu portfólio, após foi explanado sobre os significados dos números racionais (definição) por *slides* e a exemplificação dos mesmos foi a partir das atividades então desenvolvidas (do quadro 10).

Quadro 10 - Atividade para explorar o significado parte/todo.

Ana, Carlos e Pedro são colegas e cursam o 6º ano na escola Todos Alegres. Por serem alunos com bom rendimento escolar receberam um prêmio, ingressos ao cinema.

1) Os pais de Carlos e Pedro foram levá-los de carro. A figura abaixo representa o marcador de combustível dos carros do pai de Carlos com capacidade de 60 litros e Pedro com 50 litros respectivamente. A agulha sobre a letra F representa o tanque de combustível cheio e E vazio.



a) De acordo com a imagem, há mais combustível em qual carro? Justifique.

b) Carlos olhou para o marcador de combustível do carro de seu pai e notou que a agulha estava próxima do vazio, mas não conseguiu determinar se com a quantidade de combustível era possível chegar ao cinema. O GPS do carro informou que ainda faltavam 27 km ao local desejado. O carro do pai de Carlos tem média na cidade de 8 km por litro. Como professora, quais encaminhamentos daria para Carlos solucionar seu problema?

c) De acordo com tuas experiências em sala de aula, consideras que em um tipo de registro (fração, decimal, porcentagem ou geométrico) haveria melhor compreensão da situação proposta? Explique.

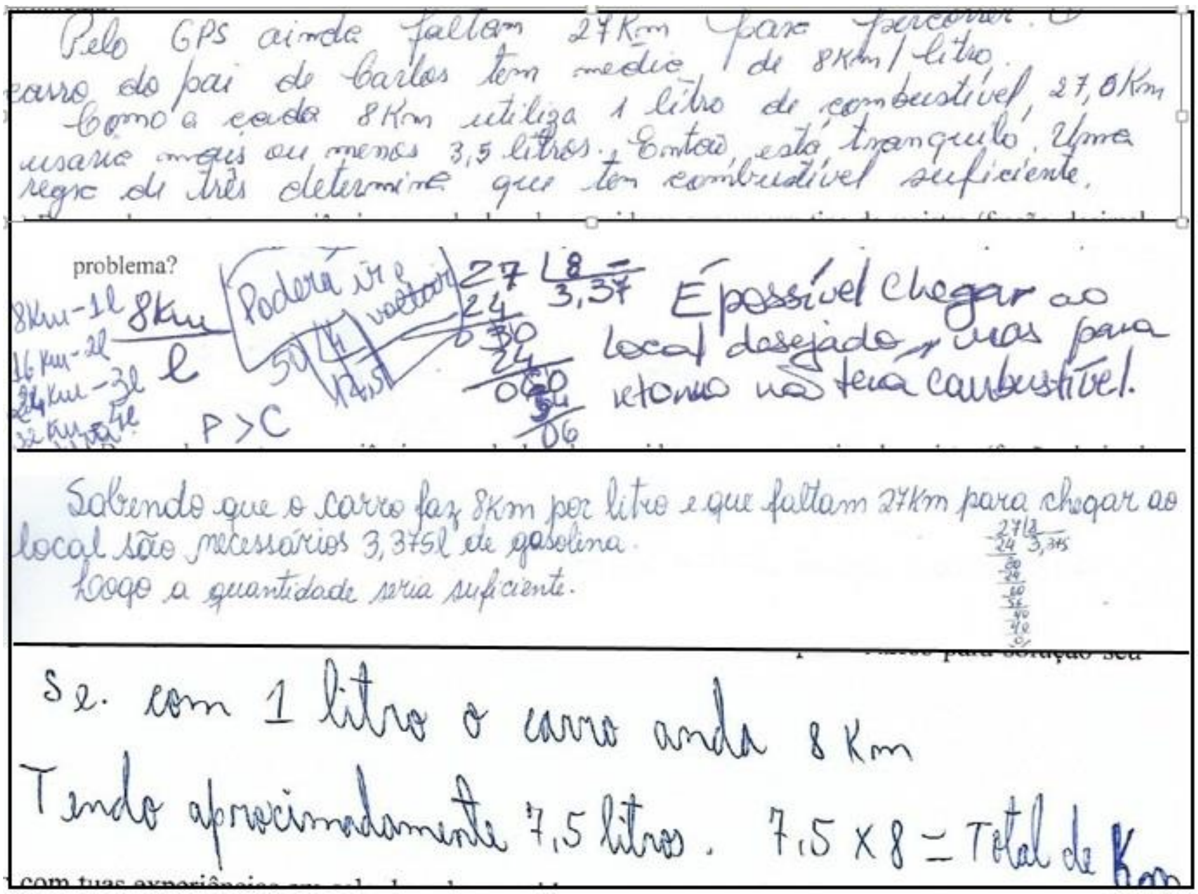
Fonte: excerto do portfólio.

O item (a) foi respondido por todos os professores e tiveram a mesma linha de pensamento em dividir a quantidade de combustível do tanque do pai de Carlos em 4 partes iguais, cada parte com 15 litros, sendo a metade de uma parte 7,5 litros (onde está a agulha). O mesmo procedimento foi feito com a quantidade de combustível no tanque do pai de Pedro, foi dividido em 4 partes iguais, cada parte 12,5 litros. O tanque mais cheio é o segundo. O procedimento adotado pelos professores é do significado de parte/todo (dividir o todo em partes iguais e considerar um número de partes). O significado de operador não foi adotado, onde poderia ter sido realizado o cálculo $\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.60 = 7{,}5l$ ou $\frac{1}{4}.50 = 12{,}5l$.

Vale destacar, que a maioria dos professores ao definirem número racional não usam a ideia de parte/todo, porém foi o primeiro procedimento adotado para a solução da atividade. Lamon (2006) aponta que esse é o primeiro significado do número racional explorado em sala de aula. Sendo que o parte/todo é fundamental para a compreensão dos outros significados, pois daí parte a compreensão de partição, numerador (número de partes que se toma da unidade) e denominador (total de partes que a unidade foi dividida).

O item (b) foi compreendido pelos professores e as soluções estão no quadro 11. Apenas um professor não compreendeu a atividade e calculou a velocidade média do carro. Novamente, percebemos que os professores tiveram a preocupação em determinar a solução e não como elucidar a questão ao aluno.

Quadro 11 - Respostas dos professores à primeira atividade.


Pelo GPS ainda faltam 27Km para percorrer. O carro do pai de Carlos tem media de 8Km/litro. Como a cada 8Km utiliza 1 litro de combustível, 27,0Km usaria mais ou menos 3,5 litros. Então está tranquilo. Uma regra de três determina que tem combustível suficiente.

problema?
8Km - 1l
16Km - 2l
24Km - 3l
32Km - 4l
8Km / l
Poderá ir e voltar
P > C
27 ÷ 8 = 3,37
É possível chegar ao local desejado, mas para retorno não terá combustível.

Sabendo que o carro faz 8Km por litro e que faltam 27Km para chegar ao local são necessários 3,375l de gasolina. Logo a quantidade seria suficiente.

Se com 1 litro o carro anda 8 Km
Tendo aproximadamente 7,5 litros. 7,5 x 8 = Total de Km

Respostas do Prof. A, Prof. B, Prof. C e Prof. F respectivamente. Fonte: excerto do portfólio.

Durante a socialização das respostas dos professores, os mesmos se surpreenderam com as diferentes estratégias usadas para determinar a solução. O Prof. A disse que faria por regra de três para determinar a solução mas acrescentou que talvez não fosse o melhor encaminhamento tendo em vista que os alunos não têm esse conhecimento no 6º ou 7º ano ao trabalharem os números racionais. Assim, a formadora questionou a possibilidade de encaminhar a solução por proporção, fazendo estimativas, isto é, se 1 litro anda 8 km, 2 litros anda 16km, 3 litros anda 24 km e 4 litros anda 32 km. Desse modo a solução é dada por estimativa e não calculando o valor exato necessário para chegar ao destino. Neste sentido, abaixo apresentamos comentários realizados sobre a elaboração da questão.

> *Formadora: de acordo com a questão do problema, uma resposta por estimativa estaria tão certa como o cálculo de divisão (27:8) que dá o resultado certo de litros. Porém a pergunta aceita como resposta uma estimativa e não um valor único. Vale o professor verificar qual foi a pergunta que ele fez, porque às vezes o aluno responde por essa estimativa e o professor dá errado, esperando o cálculo de divisão.*
>
> *(Prof. A): Mas o professor tem que ter a consciência que o raciocínio estava correto.*
>
> *(Prof. B): Mas tem professor que não aceita, quer o cálculo.*
>
> *(Prof. A): Mas tu tens que ver a parte cognitiva do teu aluno, pode até me dar outra solução, diferente que a gente fez aqui até, e chegar numa conclusão correta.*
>
> *Formadora: vocês percebam que eu já fiz a pergunta ampla, eu não fiz justamente para vocês chegarem e me darem uma resposta, deixei ela aberta (resposta). Esse é um tipo de questão que a gente poderia proporcionar mais aos nossos alunos, uma questão um pouco mais aberta, porque quando a gente vai buscar a solução, que foi o que eu fiz com vocês, já saíram diferentes respostas/estratégias. Do meu ponto de vista, enriquece a aula, porque eles conseguem confrontar as ideias deles, a minha está certa, a minha resposta é melhor.*
>
> *(Prof. B): Cada um defendendo a sua tese.*
>
> *Formadora: É interessante porque eles (os alunos) começam a entender o que eles estão fazendo. Não é só dar a resposta. Às vezes eles dão essa resposta (27:8), mas eles não sabem o que indica o quociente 3,375.*
>
> *(Prof. A): Exato.*
>
> *Formadora: o sujeito que te deu essa resposta (estimativa por proporção) talvez te dê uma resposta muito mais completa do que o outro exemplo citado (27:8).*
>
> *(Prof. A): Ele teve a noção, a ideia do que aquilo representa. Acho que por esse lado é uma coisa muito válida.*

A segunda atividade, ilustrada no quadro 12, explora outro significado do número racional, a razão. Este significado não pode ser compreendido como parte/todo, mas como uma grandeza está para outra. Isto é, não devemos associar a ideia de partição e sim de comparação de duas grandezas (SILVA, 2005). As atividades dos quadros 10, 12 e 14 são adaptadas de

Ventura (2013) que foram desenvolvidas numa experiência de ensino com alunos do 5º ano de uma escola em Portugal.

Quadro 12 - atividade para explorar o significado de razão do número racional

2) A vitamina C se encontra nos cítricos, como a laranja, e é essencial para a absorção de ferro e para a recuperação de queimaduras e feridas. Na escola Todos Alegres, foi servido suco de laranja de 2ª a 5ª feira da semana para a turma de Ana, Carlos e Pedro. O suco foi preparado em uma jarra com um litro de água a que adiciona-se determinado número de copos de concentrado de laranja e colheres de açúcar, que foram variando ao longo dos dias.

	2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira
Copos de concentrado de laranja	5	4	4	2
Colheres de açúcar	4	5	3	3

a) Ana achou o suco mais doce na 5ª feira. Matematicamente como ela poderia argumentar essa resposta?
b) Carlos disse que a relação entre o número de colheres de açúcar e o concentrado de laranja na 2ª feira, pode ser representado por 0,9. Ele tem razão?

Fonte: excerto do portfólio.

A questão trouxe dúvidas aos professores, pois compreenderam que havia a razão entre os copos de concentrado para as colheres de açúcar. Entretanto, a razão desejada era a inversa. O quadro 13 apresenta a solução determinada pelos professores e o segundo procedimento apresentado pela formadora. Consequentemente o item (b) é imediato, a relação é de 0,8.

Quadro 13 - procedimentos para resolução da atividade 2 (quadro 12)

2ª	**3ª**	**4ª**	**5ª**
$\frac{4}{5} = 0{,}8$	$\frac{5}{4} = 1{,}25$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$

Simulando que 1 copo de concentrado tenha 200ml, temos

$$\frac{4\ col}{1000\ ml}\ ou\ \frac{5col}{800\ ml}\ ou\ \frac{3col}{800\ ml}\ ou\ \frac{5col}{400\ ml}$$

Fazendo a proporção a cada 400 ml em cada razão, a maior é a última, correspondendo a 5ª feira.

Fonte: da pesquisa

Durante a socialização das soluções encontradas pelos professores, foi ressaltado pela formadora a interpretação da fração $\frac{4}{5}$ não como um parte/todo, mas como a comparação de duas grandezas. Como também, a necessidade do aluno percorrer por diferentes significados do número racional para melhor compreensão (KIEREN, 1980). Deste modo, não ficando limitado a um tipo de interpretação/significado. O que nesta situação, a quem só interpreta a fração como parte de um todo não conseguiria interpretar/compreender a razão proposta.

Também, a formadora destacou que é necessário pensar em diferentes estratégias para responder a atividade. Tendo em vista que o aluno pode buscar outro procedimento/compreensão da atividade. Neste sentido, um exemplo pela formadora é dado usando proporção. A observação foi feita aos professores a fim de aguçar/explorar o conhecimento especializado.

A terceira atividade, ilustrada no quadro 14, explora o significado de quociente. De antemão este significado demonstrou, via o 1º encontro, ser compreendido e explorado em sala de aula.

Quadro 14 - Atividade explorando o significado de quociente do número racional.

3) A turma de Ana, Carlos e Pedro receberam um lanche por apresentarem bom comportamento. A turma se organizou em três mesas com 8, 5 e 4 lugares. A Ana e seu grupo sentaram na mesa com 8 lugares, Carlos e seu grupo sentaram na mesa de 5 lugares e Pedro e seu grupo sentaram na mesa de 4 lugares. Não sobrou assento nas mesas.

A mesa com 8 lugares tinha 7 sanduíches e 16 copos de suco.
A mesa com 5 lugares tinha 4 sanduíches e 10 copos de suco.
A mesa com 4 lugares tinha 3 sanduíches e 8 copos de suco.

a) Após o lanche, Pedro criticou a Carlos que a distribuição do lanche não foi justa, porque uns comeram mais sanduíches que outros. Pedro tem razão? Que quantidade cada grupo comeu?
b) Como procederias para que a distribuição fosse mais junta?
c) A distribuição de copos de suco foi desigual?

Fonte: excerto do portfólio.

A questão 3 foi resolvida no quadro juntamente com todos os professores. Para saber se a distribuição foi justa foi determinado primeiramente a fração que cada grupo comeu de sanduíches, $\frac{7}{8} = 0{,}875$; $\frac{4}{5} = 0{,}8$; $\frac{3}{4} = 0{,}75$ respectivamente. Logo, o grupo que mais comeu foi o primeiro (Ana). A forma mais justa de distribuição foi explorada pela formadora ao unir as pessoas da mesa de Ana e Pedro, obtendo a fração $\frac{10}{12} = 0{,}833\ldots$ que é uma fração mais próxima ao grupo de Carlos (0,8). A distribuição de copos de suco foi a mesma a todos os grupos (2 copos). Os professores não apresentaram dificuldades no último item.

Para iniciar o estudo dos significados parte/todo, medida, quociente, razão e operador a formadora questionou os professores: o que pode significar a fração $\frac{1}{2}$?

Não houve uma resposta formal ao questionamento, as respostas tiveram mais ligadas às representações do que aos significados. Então, a formadora expos em slides as seguintes situações:

- Apenas $\frac{1}{2}$ da turma compareceu.
- É necessário $\frac{1}{2}$ de 30 para ter média no trimestre.
- Tenho um bolo para dividir entre duas pessoas igualmente.
- Se um objeto de 60 cm teve sua miniatura reduzida para 30 cm, qual a escala (razão) considerada?
- Dado um segmento de 1 cm, identifique a metade do segmento.

A formadora leu as situações e buscou identificar o que cada exemplo a fração um meio poderia ser compreendida, ou seja, a turma dividida em duas partes iguais e considera uma delas (significado parte/todo), a fração operada sobre uma quantidade (significado de operador), um bolo dividido em duas partes iguais, 1:2 (significado de quociente), a razão da miniatura para o real 30 está para 60 assim como 1 está para 2 (significado de razão) e a iteração um meio para determinar um comprimento (significado de medida). Neste momento, ouvíamos os passarinhos cantado lá fora (literalmente) de tanto silêncio e atenção dos professores. Realmente, pareceu-nos que o que eles ouviram era completamente novo.

Na sequência foi explanado com os professores cada um dos significados da fração e exemplificações. No apêndice D, que é o modelo de portfólio dos professores, há a descrição das atividades desenvolvidas. Como também, foi discutido com os professores o modelo de transversalidade para a compreensão do número racional (figura 1 da seção do referencial teórico). A seguir apontamos algumas considerações realizadas neste momento.

- Partição e unidade: A compreensão de número racional inicia com a ideia do todo dividido em partes iguais e que independentemente do número de partes iguais o todo não altera. O que acarreta o entendimento do significado parte/todo. Exemplo: Senhores deputados para aprovarmos este projeto serão necessários três quintos dos votos.
- Densidade e equivalência: o significado de medida provém do entendimento das concepções densidade, equivalência e ordenação. Considere a situação "Já comi a quarta parte da barrinha de cereais". O que pode os levar nos seguintes encaminhamentos: A situação considera um tamanho (medida) da barrinha. O sujeito mediu 4 vezes um quarto da barrinha; O sujeito pode considerar que comeu um meio, um terço, dois terços da barrinha, o que leva a considerar que entre dois números racionais há outro e que existe uma ordem (a medida aumenta); Assim como, um quarto da barrinha equivale a dois oitavos.

Sobre as concepções de densidade e equivalência, estas também estão relacionadas com outros significados. Por exemplo, o significado quociente: posso dividir uma barrinha de cereal a 4 pessoas, assim como, posso dividir 2 barrinhas a 8 pessoas. Em ambas as situações cada pessoa receberá a mesma quantidade (equivalência). Como também, posso dividir a barrinha para quantidades diferentes de pessoas, percebendo que quanto mais pessoas, menor será o pedaço da barrinha que cada um receberá (concepção de comparação e densidade, significado quociente).

Via esses entendimentos e como se estrutura (teoricamente) a compreensão dos números racionais, retomamos as 3 atividades anteriores (quadros 10, 12 e 14) para identificarmos os significados e concepções dos números racionais.

Até então, fizemos uso do conhecimento referencial adotado no aporte teórico desse estudo para desenvolver o conhecimento institucional com os professores de Matemática. Compreendendo que a dimensão epistêmica representa os conhecimentos didático-matemáticos institucionais pertinentes para um ensino idôneo. Percebemos que nenhum significado é novo ao professor, mas a forma de abordá-lo concomitantemente trouxe novas interpretações do número racional (fração) no processo de ensino.

Em se tratando do conhecimento especializado do professor e a pertinência/adequação de recursos explorados como o livro didático, propomos uma leitura crítica de como os livros didáticos (aprovados pelo PNLD 2017) apresentam e propõem o estudo dos números racionais no 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. Desse modo, foi solicitado que os professores descrevessem como o livro emprega os significados dos números racionais nas primeiras atividades (exemplos), se há exercícios que normalmente os estudantes têm dificuldade em resolver e, por fim que o professor indicasse se seguiria a proposta do livro sem alterações.

A proposta de identificar os significados nos livros didáticos tem dois propósitos: uma tendo em vista os conteúdos/componentes do GVID-IDM (quadro 3) para alcançar a dimensão epistêmica, ou seja, modos de interação e discurso no processo e ensino e aprendizagem, o currículo, os recursos, as conexões. E o outro propósito é de como os livros são um recurso muito empregado pelos professores participantes, optamos em trabalhar nesse recurso não sendo, assim, disruptivo com as práticas já adotadas pelos professores. Tendo em vista que o professor não vai abandonar o livro (que não foi sugerido nessa formação), é necessário que ele consiga identificar e analisar os conhecimentos desenvolvidos nesse recurso didático.

De modo geral os livros didáticos separam no 6º e 7º anos o estudo dos números fracionários dos decimais. E no 7º ano ainda não os classificam como números racionais. Como também, os professores adotariam o livro didático da escola sem alterações ou alterando alguns exercícios buscando atividades diferenciadas, porém, normalmente, em outros livros didáticos disponíveis. Os exercícios que causam mais dificuldades aos alunos são aqueles que requerem uma leitura e interpretação (os probleminhas) – dificuldades em retirar os dados, determinar o que se pede e falta de interesse nessas atividades.

As atividades iniciais para introduzir o estudo frações trazem, na sua maioria, de forma explícita os significados das frações: parte/todo, quociente, operador, medida e razão. No 6º ano os dois primeiros significados e no 7º ano todos os significados (ou maior parte deles). A questão que fica em aberto é como esses significados são explorados nas atividades (com prevalência de um significado a outros e as concepções fundamentais – como ordenação, densidade, equivalência e comparação não são exploradas explicitamente via os significados, prevalecendo algoritmos/regras).

Para exemplificar o que acima foi mencionado e discutido com os professores, destacamos um livro didático do 7º ano Vontade de saber de Joamir Souza e Patricia Moreno Pataro (tomou-se esse por ser empregado por alguns professores em suas aulas). O capítulo chamado de "Frações" inicia com uma atividade sobre a quantidade de água disponível no planeta Terra, sendo 97,5% de água salgada e aproximadamente $\frac{7}{10}$ de água doce em forma de gelo. A seguir propõe 3 questões, uma de caráter pessoal e as outras tomando o significado de razão e operador de uma fração. As questões envolvem apenas a representação fracionária. Na sequência propõe um enunciado ao leitor no sentido de retomar um conhecimento " *já estudamos em anos anteriores que as frações podem ser utilizadas em diversas situações, representando diferentes ideias. Veja a seguir algumas delas*". De forma explícita o autor apresenta o significado de parte/todo (com imagem de um retângulo), de razão e de quociente. Após aborda a classificação em fração própria (menor que 1) e imprópria (maior que 1) e leitura das frações.

São 12 exercícios propostos aos alunos, sendo 7 envolvendo o significado parte/todo, 1 de quociente, 1 de razão e o restante envolvendo a leitura, número misto e frações decimais. Alguns exercícios de parte/todo poderiam ser resolvidos pelo significado de operador, porém o livro não indica isso explicitamente. Na sequência o autor propõe a concepção de equivalência de frações de modo que é dado uma fração e ao dividir numerador e denominador pelo mesmo número, diferente de zero, a fração resultante é equivalente a primeira. Aos professores esse fato já foi discutido que o significado de quociente não foi explorado (se duas frações são equivalentes elas têm o mesmo quociente). A seguir um diálogo entre formadora e professor quanto ao exposto acima.

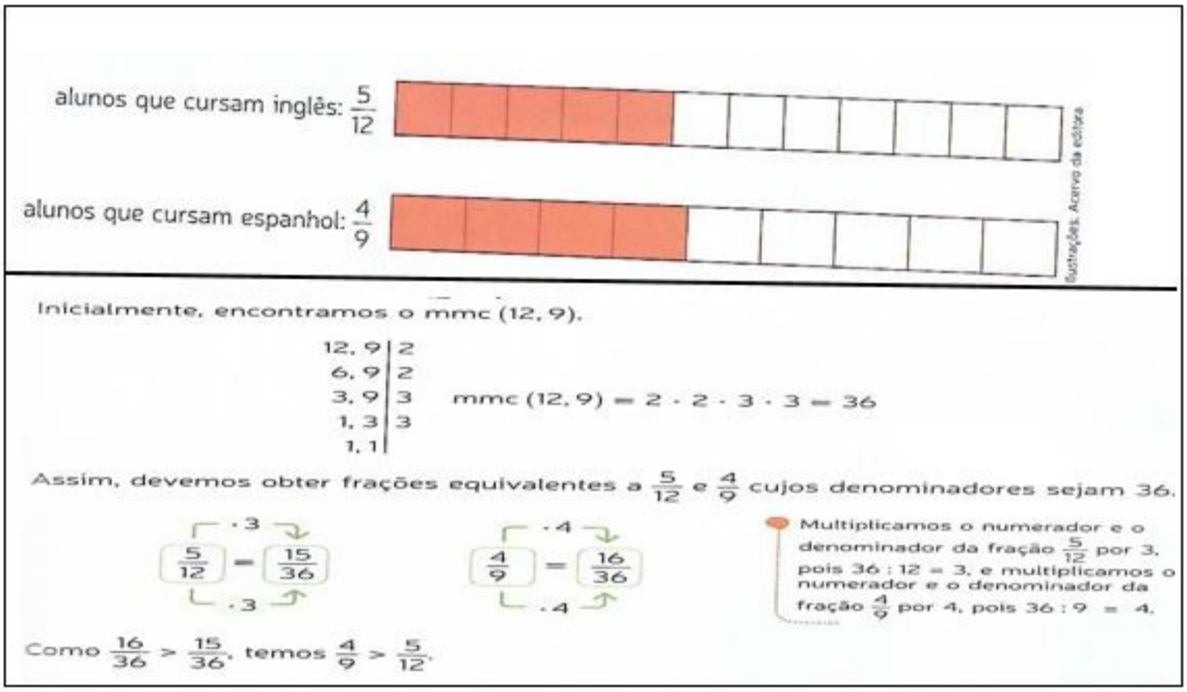
> *Formadora: começa falando sobre água potável, a fração de água disponível, sempre com a ideia de fração (não fala em porcentagem). Após, propõe a representação em figura, em fração e a leitura dela. Significado do racional: primeiro parte/todo.*
> *(Prof. E): A maioria (dos exercícios) entendi é parte/todo.*
> *Formadora: a fração como uma razão e como um quociente. Após, exercícios que de certa maneira promovem os significados citados das frações mais para um e menos para o outro. Explora bastante a ideia de parte/todo e deixam de colocar mais questões como quociente ou razão.*
> *Formadora: o trabalho do professor de fazer essa leitura no livro e verificar que encaminhamentos além do livro deve fazer. Ou da própria questão tentar encaminhar*

outros significados (procedimentos de resolução). Porque o aluno pode não entender a questão como parte/todo, mas como um quociente.

(Prof. E): O livro serve só de apoio porque para tu fazeres uma aula tu tens que ter vários livros. Tu conheces o teu aluno, sabe a necessidade dele, e também se eu for trabalhar em só um livro ou ele é muito forte ou é muito fraco. Então tem essas limitações. E se o aluno está com melhor entendimento porque eu vou trabalhar com um livro fraco, eu vou tentar buscar mais, né?! Então sempre tem um livro mais aprofundado.

Na sequência do livro, o autor propõe a comparação de frações. Primeiramente propõe a compreensão por parte/todo exemplificando a comparação por meio de uma situação com duas frações. Para após trabalhar com frações equivalentes via o procedimento de mínimo múltiplo comum (m.m.c.). As duas situações estão ilustradas na figura 15.

Figura 15 - Comparação de frações proposto no livro didático



Fonte: excerto do livro didático Souza e Pataro (2015, p.18-19).

A seguir descrevemos outro diálogo entre os professores e formadora quanto aos procedimentos para realizar a comparação entre frações.

Formadora: Depois fala de comparação e simplificação. São coisas importantes para os alunos entenderem as frações (números racionais). Na comparação usa quadradinhos para verificar qual fração é a maior (semelhante ao applet da linha verde de comparação de frações que usamos). Após propõe encontrar uma fração equivalente para verificar qual fração é maior e não mais por quadradinhos.

(Prof. E): Daí trabalha com operador (ideia de multiplicar as frações para tornar os denominadores iguais).

(Prof. A): Eles têm (os alunos) muitas dificuldades nisso.

Formadora: a questão aqui é que o aluno não vai saber qual exatamente o valor das frações (apenas compara numerador já que os denominadores são iguais). Percebam que em nenhum momento o autor usa a ideia de quociente que poderia facilitar para o aluno. Por exemplo, pegaria 4:9 ou 5:12, vou fazer o cálculo da divisão e ver qual é o maior. E daí sai do caso de fazer frações equivalentes. Sei que eles entram em outro problema é que é dividir com vírgula. Mas é outra ideia para entender qual fração é a maior.

(Prof. E): É outra forma de entender. É outro caminho.

Formadora: por opção metodológica ou outra opção, o autor deixa de empregar o significado de quociente para comparar frações. Lá no início do conteúdo mencionou o quociente, mas não o empregou durante as atividades propostas. No trabalho do professor, talvez nesse momento seja interessante mostrar essa divisão.

(Prof. E): Mas isso acontece porque ele separa o decimal da fração (não mostrar a divisão). E lá no decimal ele deve voltar essa ideia de converter decimal em fração.

Formadora: mas profes, será que não dá para unir essa ideia já neste momento do ensino?

(Prof. D): No meu trabalho já insiro os dois juntos (decimal e fração) que facilita o entendimento. Porquê de repente uns vão gostar de fazer a divisão e outros vão gostar da equivalência. Claro que é um processo mais difícil (equivalência).

(Prof. A): Mas nem todos conseguem fazer com números decimais.

Formadora: o problema aqui é que se a fração tem denominador grande, tu não vais fazer quadradinhos. O parte/todo já se torna ineficiente.

Na sequência, os autores Souza e Pataro (2015) propõem o estudo das operações com frações iniciando com a adição e subtração. Primeiramente apresenta uma situação contextualizada para realizar a adição de frações via frações equivalentes (multiplicar numerador e denominador por um número que torne os denominadores das duas frações iguais) e, após por mmc (via o algoritmo). A seguir apresentamos mais um diálogo quanto as operações de adição e subtração.

Formadora: depois já entra em adição e subtração.

(Prof. E): Eu já fiz uma vez por equivalência. Eu já experimentei.

Formadora: explicou como fazia adição $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$*. Ia para a ideia de parte/todo (fez a figura no quadro) os retângulos para cada fração não tinham a mesma área para somar, então tornava iguais. Fazia duas divisões em cada retângulo de ½ e um corte nos retângulos de 1/3, ficando com 6 retângulos em cada figura. Logo, ½=3/6 e 1/3=2/6, a soma 5/6.*

(Prof. E): Eu fazia por operador.

Formadora: claro, é mais rápido. Qual número multiplico para tornar os denominadores iguais?

(Prof. E): Isso os múltiplos comuns de 2 e 3.

Formadora: apenas procurando os denominadores iguais é uma ideia mais simples e rápida. Mas o que eu coloco com as figuras, é porque os denominadores têm que serem iguais? Porque inicialmente os quadradinhos não são do mesmo tamanho (área), logo não posso somar. Então busco tornar os quadradinhos do mesmo tamanho.

Para finalizar a análise do livro didático e apontar aos professores como é importante fazer essa leitura crítica no livro para identificar as possibilidades e limitações, assim como, encaminhamentos coerentes com os objetivos propostos inicialmente ao objeto de estudo propomos duas atividades do livro didático analisado para instigar os professores sobre as situações-problemas propostas se adequam a metodologia apresentada no livro. Essas duas questões, ilustradas no quadro 15, estão no final do capítulo supracitado e servem como retomada/ampliação dos conhecimentos desenvolvidos no capítulo.

Quadro 15 - Questões do livro didático

1) (ENEM) Para construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14m³ de concreto. Qual o volume de cimento, em m³, na carga de concreto trazido pela betoneira?

a) 1,75 b) 2,00 c) 2,33 d) 4,00 e) 8,00

2) (OBMEP) Em qual das alternativas aparece um número que fica entre $\frac{19}{3}$ e $\frac{55}{7}$.

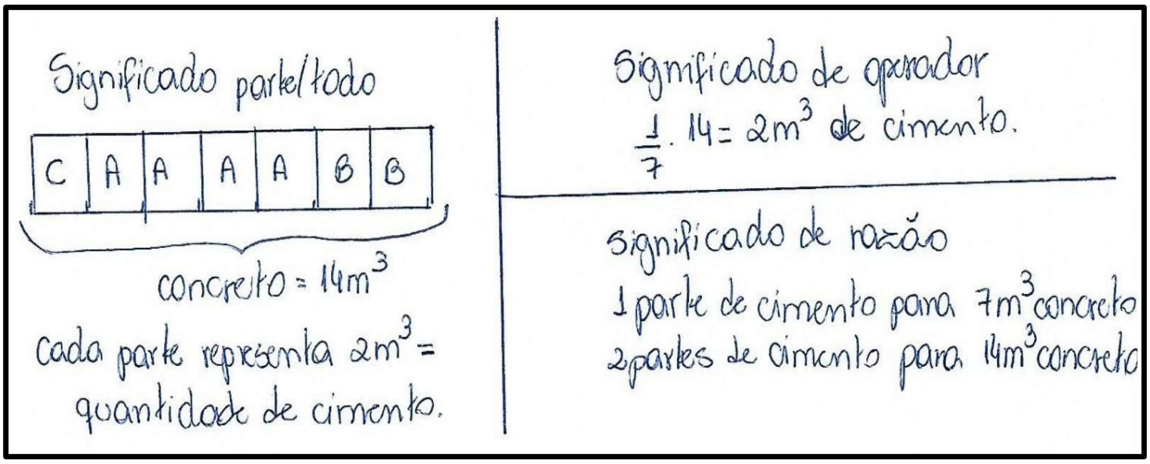
a) 2 b) 4 c) 5 d) 7 e) 9

Fonte: excerto do livro didático Souza e Pataro (2015, p. 40-41)

As duas questões foram propostas aos professores e um deles apresentou à primeira questão como resposta 2. Os outros professores acharam a questão bem difícil (principalmente aos alunos, dando a compreender que não seria uma questão explorada em aula). A formadora chamou a atenção dos professores ao fato da questão 1 está no capítulo de frações, mas que não possui fração no corpo do enunciado ou das alternativas de resposta. Contudo, apresenta números em decimais. Desta forma, a formadora questionou os professores da necessidade de estudar os dois registros simultaneamente.

Os professores discutiram que a questão abordava o todo (concreto) e as 7 partes (areia, brita e cimento). A formadora, no quadro, apresentou 3 encaminhamentos para determinar a solução como segue na figura 16.

Figura 16 - Resolução da questão 1 do quadro 15



Fonte: da pesquisa.

Ao propor os diferentes encaminhamentos/significados que a fração $\frac{1}{7}$ pode assumir, novamente, retomamos com os professores a compreensão do número racional via seus significados e o transitar entre eles visto que um significado pode ser mais próximo do aluno a outro. Como também, compreender esses significados é primordial para resolver a questão do ENEM. A questão seguinte, número 2, do quadro 15, os professores a acharam simples, sem maiores dificuldades e apontaram que fariam o quociente das frações para determinar a solução. O Prof. E disse "*o numerador é 55, tem que fazer divisão*" indicando que fazer por parte/todo não é a melhor opção. Novamente a formadora interviu para comentar o que estava no livro didático e o que a questão propunha ao aluno. Na opinião de todos, inclusive da formadora, o melhor procedimento seria a divisão. Entretanto, a formadora questionou: de onde o aluno vai tirar a ideia de dividir numerador pelo denominador se na seção de comparação (do livro) ele apresenta apenas por parte/todo (via os quadradinhos – retângulo dividido em partes iguais) ou por frações equivalentes (tornando os denominadores iguais e comparando os numeradores). Notem, que em ambos os procedimentos, o aluno sequer descobre o valor posicional desse número. No exercício 2, o aluno precisa do valor posicional para poder determinar um número entre as frações, ou seja, estamos falando sobre densidade (o livro não aborda explicitamente essa concepção do número racional). A seguir um diálogo entre os professores sobre a questão 2.

> *Formadora: a melhor ideia é dividir. Mas não foi uma proposta explicita do livro a divisão. A questão ainda pede um número entre as frações (ideia de densidade) também não explorado no livro. Apenas de comparar duas frações (por equivalência) e não achar número entre elas (já que nem se sabia quanto exatamente representa a quantidade).*
>
> *Professores: hummm (concordando).*

Formadora: a complexidade aumentou aqui.
(Prof. E): É.
Formadora: e isso nos oportuniza a ver o quanto as questões do livro didático propõe sempre com o mesmo esquema. É fato dizer: eu explico tudo de fração para o aluno, mas ele chega nesse tipo de questão (seletivas) e não resolve. Mas será que foi dado a possibilidade de ele interpretar essas frações? Como uma divisão? (Lá no 6º ano que essa questão foi elaborada).
(Prof. E): É que na verdade quem vai resolver isso é o professor no final de tudo. Vai ser um ou outro aluno que vai resolver.
Formadora: mas se não é do professor nesse exercício de propor por diferentes encaminhamentos do livro, não apenas por comparação de numeradores, que trabalho limitado que fica. Olha a necessidade do trabalho do professor (conhecimentos).
Professores: é, aha (risos).

A mensagem final que ficou aos professores é que o livro não é tudo, há intervenções necessárias para que o aluno não fique limitado ao esquema do livro que, por muitas vezes, não vai dar conta do trabalho do professor, do papel do professor em uma sala de aula. Parece óbvio a conclusão, mas infelizmente não é. Deste modo, neste encontro, propomos aos professores um contraexemplo de que o livro didático não é a única fonte de conhecimento aos alunos.

Durante as conversas ou socialização de soluções com os professores o emprego do livro didático para selecionar atividades aos alunos é massivo. Como por muitas vezes, também, empregado para iniciar o estudo de um tema. Os professores não se demonstraram confortáveis ou algo habitual de analisar a construção de um conhecimento sob uma perspectiva *a priori* (os significados dos números racionais, suas relações e concepções fundamentais) no livro didático. Adotam facilmente a proposta do livro e na divisão/organização dos conteúdos. Chamamos a atenção dos professores quanto a exploração do conhecimento referencial de números racionais para o 6º e 7º anos do EF nos livros didáticos observados/analisados. Como também, a importância do conhecimento especializado necessário ao professor para identificar, analisar e avaliar um livro didático, consequentemente um processo de ensino e aprendizagem.

No quinto encontro enquanto conversávamos sobre adição de frações com denominadores diferentes, a formadora retomou a ideia do porquê o aluno precisa compreender o que é um meio e um terço para após realizar a adição (ou outra operação). O intuito era retomar com os professores porque trabalhamos com frações (numéricas) no 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. O cálculo abaixo foi proposto aos professores para iniciarmos a discussão.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}.\frac{1}{2}+\frac{2}{2}.\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{d}{d}.\frac{a}{b}+\frac{b}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \text{ com } b,d\neq 0.$$

Primeiramente o aluno precisa compreender que um meio é uma unidade dividia em duas partes iguais e considerada uma dessas partes (ou 1:2), idem para a fração um terço que é uma unidade dividida em três partes iguais e considerada uma dessas partes (ou 1:3). Como as partes dessas frações não são iguais (uma parte é 0,5 e a outra é 0,33...), precisamos tornar essas partes iguais para, assim, somarmos o total de partes (a soma de frações representa a soma de partes iguais, análogo para a subtração).

Para encontrar o número total de partes, neste caso 6, normalmente se emprega frações equivalentes ou o mmc. Ao aluno que está buscando uma ideia inicial, o uso de algum recurso manipulável ou digital para compreender as seis partes iguais é mais interessante. Na dimensão mediacional, realizamos essa soma via o recurso Frac Soma 235. Ao professor que não possui o recurso, vale a representação geométrica da soma como ilustrado na figura 17.

Figura 17 - representação geométrica da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

Fonte: da pesquisa.

Um fato importante realçado pelo Prof. C é que a representação fracionária é melhor (resultado exato), neste caso, que a decimal (uma aproximação, visto que um terço em decimal é uma dízima periódica). Na sequência, colocamos aos professores o segundo cálculo com a soma de frações algébricas. E questionamos: quais conhecimentos prévios deveria ter o aluno para compreender que aquelas frações devem ter denominadores iguais para realizar a soma? Qual o intuito de multiplicar a primeira fração *d* (numerador e denominador) e a segunda por *b* (numerador e denominador)? Como o aluno abstrai e generaliza a soma de frações algébricas se ele não compreende frações numéricas?

Neste momento, buscamos trabalhar com o conhecimento ampliado do conteúdo (o professor saber vincular o objeto de estudo com outras noções matemáticas e encaminhar os alunos a estudos subsequentes). Desta forma, retomamos com os professores a real importância do trabalho/estudo com frações (de forma mais ampla com números racionais) no 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. Há conhecimentos *a posteriori*, como o acima desenvolvido, que necessitam estar bem compreendidos nesta etapa de ensino, pois serão a base para um próximo conhecimento que é a álgebra (especificamente frações algébricas).

O aluno precisa compreender que se os denominadores são diferentes, é preciso torná-los iguais (ou seja, as partes serem iguais). Foi multiplicado uma fração pelo denominador da outra como uma estratégia para garantir que as partes sejam iguais (mesmo tamanho). E, então, empregamos frações equivalentes (ao multiplicar também os numeradores pelos denominadores). Por fim, propomos aos professores a soma de frações não simplesmente para aplicar o algoritmo, mas para desenvolver a compreensão da estrutura Matemática que é desencadeada.

No encontro sete discutimos sobre a metodologia de resolução de problemas que neste estudo tem duas dimensões: uma epistêmica e outra mediacional por entendermos que ela tem dupla funcionalidade ao professor. A dimensão epistêmica que é o conhecimento referencial (como o conhecimento se desenvolve via a metodologia) e a mediacional o meio de organizar/estudar um objeto matemático. Nesta seção faremos a interpretação epistêmica e na seção da dimensão mediacional como um recurso/método ao professor.

Tomamos duas situações, ilustradas nos quadros 16 e 17, para que os professores vivenciassem a metodologia e, assim, esclarecessem concepções errôneas sobre a mesma. Dizemos uma interpretação não correta desta, pois enquanto analisávamos os livros didáticos, os professores colocaram que uma lista de “probleminhas” era, então, aplicar a metodologia de resolução de problemas. O que nos chamou a atenção sobre essa concepção e durante o curso buscamos, em diferentes momentos, reconstruir essa ideia.

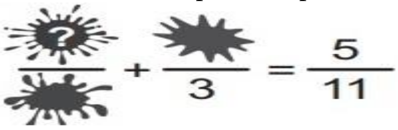
Primeiramente conversamos com os professores que ao propor um problema ao aluno não implica estar empregando a metodologia de resolução de problemas ou investigativa. Principalmente se esse problema não for um problema ao aluno ou se no problema basta tomar os dois dados numéricos e realizar uma operação (algoritmo) para obter a solução.

A Resolução de Problemas e a Investigação Matemática são denominadas metodologias ativas, pois o aluno deixa de ser passivo em sua aprendizagem, logo o professor deixa de ser o detentor do conhecimento e é visto como um mediador. O próprio problema deve instigar o aluno a busca de uma solução que ele não sabe a resposta, o aluno precisa testar hipóteses, desenvolver a argumentação Matemática a fim de construir um conceito através de seus conhecimentos prévios.

A Resolução de Problemas com funcionalidade epistêmica foi proposta aos professores no sentido que o conhecimento do aluno deve ser construído e não simplesmente visto como algo pronto e acabado que basta aplicar um algoritmo para solucionar a questão.

Quadro 16 - Exemplificação de uma atividade via a resolução de problemas

Considere a seguinte situação: (OBMEP, 2016, 1ª fase) A figura mostra a fração $\frac{5}{11}$ como a soma de duas frações. As manchas encobrem números naturais. Uma das frações tem denominador 3. Qual é o menor numerador possível para a outra fração?



a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Encaminhamentos aos alunos para elucidar a questão.
1) O que deve ser determinado nesta situação?
2) Como os denominadores não são iguais, precisamos torná-los. Que estratégia usarias para buscar um denominador comum às frações?
3) Como foram dadas alternativas de respostas, todas elas são possíveis como solução? Teste.
4) Justifique qual das alternativas você considera correta.

Fonte: excerto do portfólio.

Foi proposto que os professores resolvessem as atividades dos quadros 16 e 17, onde os mesmos apresentaram dificuldades, tentaram supor números nos numeradores e denominador. Neste momento, não buscávamos simplesmente a solução da atividade, mas quais encaminhamentos poderiam ser elaborados pelo professor para ajudar a elucidar a questão ao aluno. Segue o comentário dos professores à atividade do quadro 16.

(Prof. A): A ideia que a gente tem é que são exercícios para os alunos quebrarem a cabeça.
Formadora: a ideia não é simplesmente quebrar a cabeça, de exercícios difíceis, mas que eles pensem.
(Prof. B): Raciocinem.
Formadora: o próximo passo da formação é mostrar um material de um professor/pesquisador que organizou uma estratégia/técnica de como propor aos alunos/professores que construam seus problemas (sejam mais simples ou mais complexos).
(Prof. A): Eu acho bem interessante, porque a gente tem várias situações na sala de aula (interessado, desinteressado, o mais ou menos).
Formadora: é uma metodologia desafiante ao professor (tu sais do teu habitual), porque ele deixa de buscar questões nos livros didáticos e passa a montar questões a partir dessas.
(Prof. B): Pegar pronta ali é muito fácil.
Formadora: não digo simplesmente que é muito fácil, mas não é apenas esse o trabalho de professor.

Nas duas atividades propusemos de antemão encaminhamentos (questões) que possibilitasse o aluno/professor ler o problema inicial e ter uma perspectiva de quais caminhos poderia seguir para tentar determinar a solução (itens 1 a 4 do quadro 16). Destacamos aos professores que tomamos uma questão que leva o aluno a raciocinar, buscar estratégias e argumentar porque sua solução está correta. Consequentemente, conseguimos empregar a metodologia de Resolução de Problemas e a Investigação Matemática. E, ainda, destacamos aos professores o seu papel fundamental em intervir na questão e criar/organizar meios (neste caso questões) para tornar a atividade mais próxima do aluno.

Quadro 17 - Exemplificação de uma atividade via a resolução de problemas

Considere a seguinte situação: (OBMEP, 2015, 1ª fase) Pedrinho colocou 1 copo de suco em uma jarra e, em seguida, acrescentou 4 copos de água. Depois decidiu acrescentar mais água até dobrar o volume que havia na jarra. Ao final, qual é o percentual de suco na jarra? a) 5% b) 10% c) 15% d) 20% e) 25% Encaminhamentos aos alunos para elucidar a questão. 1) O que deve ser determinado nesta situação? 2) Simulando que um copo tenha 200 ml e a jarra 1000 ml (ou 1 litro), qual a porcentagem de um copo em relação à jarra? 3) Entretanto não é dado na situação o volume do copo ou da jarra, e, sim, que o volume da jarra está medido em número de copos. Quantos copos são no total? 4) Como foram dadas alternativas de respostas, todas elas são possíveis como solução? Teste. 5) O que você compreende da razão suco para água de $\frac{1}{9}$ nessa situação? 6) Justifique qual das alternativas você considera correta.

Fonte: excerto do portfólio.

Das questões elaboradas para elucidar a atividade do quadro 17 (itens 1 a 6), primeiramente pedimos que descrevessem o que a situação estava pedindo visto que os professores alegam que os alunos têm dificuldades de interpretação (não conseguem identificar o que se pede na questão). As próximas três questões são possíveis estratégias para buscar a solução partindo da hipótese que os alunos podem ter dificuldades em como iniciar a busca/procedimentos da solução. E, por fim, questões para argumentar porque sua solução é coerente. Aos professores foi destacado que não é simplesmente dar a solução ao aluno, mas organizar (encaminhamentos/questionamentos) um ambiente de investigação e compreensão. As questões (de 1 a 6) não aparecem numa ordem aleatória, são propositais e tem um objetivo.

Idem ocorreu para as questões do quadro 16, primeiro o aluno deve ter compreendido o que se deve determinar, buscar estratégias para entender o problema (fazendo simulações de quantidades) para finalmente buscar compreender uma situação clássica do significado de razão de uma fração. Destacamos aos professores que é interessante selecionar/elaborar exercícios que permitam a busca por estratégias para aplicar a metodologia de resolução de problemas. Exercícios fechados, que não permitem simulações ou diferentes procedimentos de solução, tornam-se limitados para esta metodologia.

Vale ressaltar que a formadora propôs de antemão alguns encaminhamentos (questões) para elucidar as atividades, visto que os professores não se sentiam a vontade de construir estratégias/procedimentos para tal durante a formação. Como já dito, os professores têm poucas experiências e/ou limitações na concepção da metodologia. Logo, o intuito foi de proporcionar uma vivência e algumas possibilidades de uso para, possivelmente, agregar conhecimento e tornar mais próximas as metodologias ativas.

No oitavo encontro e último novamente discutimos com os professores a proposta criar e/ou resolver problemas. Como já havíamos conversado com os mesmos sobre a resolução de problemas, partimos para a situação de criar problemas (os professores proporem aos seus alunos a criação de problemas). Desde o início da conversa os professores participantes já alegaram que era "o problema dos problemas", ou seja, dois problemas: o criar e o resolver o problema. Justificamos que abordamos, nesta formação, com os professores sobre criação de problemas, pois a BNCC (2017) possui as habilidades de resolver e criar problemas com números racionais e aos professores isso não foi bem compreendido/visto.

A proposta de criação de problemas está baseada nos estudos de Malaspina (2017) onde aponta a criação de problemas por duas estratégias, uma por variação: se constrói um novo problema modificando um ou mais dos 4 elementos do problema dado (dados quantitativos, requerimento, contexto e os conceitos matemáticos que intervém para resolver o problema) e a outra por elaboração: pode ser livre a partir de uma situação dada ou configurada ou pode ser a pedido específico (ênfase matemático ou didático).

Baseado no estudo de Malaspina, em sua tese Cardenas (2015) propõe um "roteiro" para explorar com alunos da Educação Básica a criação de problemas para o conteúdo de números decimais. Neste estudo, fizemos uma adaptação dessa proposta para apresentar e discutir com os professores como, em sala de aula, propor aos alunos a criação de problemas. Visto que isto requer (como qualquer outro recurso/método) conhecimento/preparo/segurança do professor para trabalhar/estudar. O quadro 18, apresenta uma situação-problema proposta pela formadora e um possível roteiro (não rígido) a ser seguido pelo professor e alunos para criação de problemas.

Quadro 18 - Roteiro para criação de problemas

Situação:	Ações propostas aos alunos	Objetivos
Para o lanche da escola, Luana, Débora e Lucas levaram uma barra de chocolate cada da mesma marca e tamanho. Durante o recreio Luana dividiu igualmente sua barra com uma amiga. Débora	1) Responder a situação-problema proposta.	Compreender a situação inicial.
	2) Apresentar e justificar a solução determinada.	Desenvolver o raciocínio e a argumentação da solução determinada.

compartilhou igualmente entre ela e suas três amigas. Lucas percebeu que havia 7 colegas sem chocolate, dividiu igualmente entre eles. Sabendo disso responda: a) Com quem você preferiria dividir a barra de chocolate? Por quê? b) Se juntássemos as barras da Luana e Débora para dividir igualmente entre elas e suas amigas, seria possível que cada uma comesse 30% da barra?		
	3) Criação de um novo problema modificando alguns dados ou perguntas do problema inicial proposto.	Imaginar e criar uma situação-problema a partir de um contexto.
	4) Cada aluno deve solucionar o seu problema criado (ou do colega).	Verificar se seu problema foi corretamente elaborado, com as informações necessárias ou com dados desnecessários.
	5) Alguns estudantes explicam oralmente como determinaram a solução do novo problema.	Desenvolver a argumentação e estratégia de solução.
	6) Da situação inicial questionar os alunos sobre outras possibilidades que poderiam ser exploradas da situação.	Buscar situações correlatas a dadas como número de pessoas ou barras.
	7) Criar um novo problema relacionado a situação inicial e que na solução desse problema seja trabalhado um conceito matemático específico (operações com racionais por exemplo).	Criar um problema para explorar um conhecimento específico.
	8) Cada aluno deve responder ao seu problema criado (ou do colega).	Verificar se seu problema foi corretamente elaborado, com as informações necessárias ou com dados desnecessários.
	9) Peça que cada aluno compartilhe com a turma oralmente o problema criado e alguns os encaminhamentos da solução.	Desenvolver a capacidade de argumentação e estratégia de solução.

Fonte: adaptado de Cardenas (2015).

Na primeira coluna do quadro 18, após a situação proposta, os espaços estão em branco para o preenchimento dos professores/alunos quanto ao item requerido na linha. A seguir apresentamos um diálogo dos professores quanto ao roteiro proposto. O diálogo inicia-se a partir do quarto passo do roteiro quando a formadora foi interrompida por um professor.

> *(Prof. A): Mas não vai dar tempo para tudo isso?!*
> *Formadora: o autor colocou tempo para cada ação (passo) somando 120 minutos, 2 períodos de aula, menos de 2 períodos é bem difícil de se trabalhar com resolução de problemas*
> *(Prof. A): É porque até o que o aluno comece a processar, o que ele tem que fazer,...*
> *Formadora; como a gente conversou no último encontro, e é a realidade, a gente não consegue aplicar a Resolução de Problemas todos os dias.*
> *(Prof. A): Não.*
> *Formadora: ela tem que ser introduzida e possivelmente aos poucos para talvez quando os alunos tiverem um certo hábito e daí conseguir desenvolver um pouco mais (todos os passos propostos pelos autores).*
> *(Prof. A): E até o teu planejamento tu já tem que ter uma visão assim de que tipo conteúdo tu vais ter mais tempo, pode empregar resolução de problemas, tem que ter muito mais aulas para ti poder aplicar uma situação assim, porque eles são muito lerdos no pensamento....*
> *(Prof. B): E preguiçosos também.*
> *(Prof. A): Claro que são. Na verdade, eles querem tudo pronto, querem que tu penses por eles, isso é o normal. Então se tu lanças um problema desses (criação de problemas), tu vais ter muito tempo, vai ter que quase obriga-lo a pensar em alguma coisa, raciocinar...*
> *Formadora: eu aqui coloquei que os alunos pudessem fazer individualmente, mas pode ser colocado em grupos. Daí quando tu vais criar um problema com o grupo de 3 pessoas, por exemplo, troca as atividades e cada grupo resolve o problema do outro grupo, daí são menos problemas criados na sala para ouvir e questionar as argumentações/justificativas para elaborar e resolver um problema (se o problema foi corretamente elaborado). Daí essa dinâmica fica mais fácil para o professor.*
> *(Prof. A): Isso é muito interessante, eu gosto muito de trabalhar com grupos, mas eu procuro mais em duplas, eu consigo controlar um pouco melhor, porque como um se atira nas costas dos outros, um só faz e o outro fica olhando e a gente fica em cima, em cima.*
> *Formadora: também é importante trocar as duplas ou trios porque o grupo se acomoda. É uma verdade, e é algo assim inato do ser humano. Mas percebam o quanto é importante a atividade em grupo: se comunicar com o outro, articularem juntos. No mundo*

(profissional e social) as coisas não são feitas individualmente, é preciso saber trabalhar no coletivo. É preciso organizar atividades em grupos e individualmente.

O real intuito de conversarmos sobre os estudos do Cardenas (2015) e Malaspina (2017) era de apresentar/vivenciar uma proposta já que os professores se sentiam distantes, foi uma forma de apresentar uma possibilidade e, ainda, que a criação de problemas parte de uma situação desencadeadora normalmente. Não discutimos o quanto é eficiente ou limitadora a proposta, porém notamos que os professores a identificam como um processo longo e que, possivelmente, os alunos não teriam uma boa recepção ao método.

O roteiro, quadro 18, apresenta encaminhamentos para que o aluno possa ir criando problemas desde por variação, mais simples, ou por elaboração, mais complexos pois necessitam de maior carga cognitiva. O ato de criar problemas coloca o aluno sob outras perspectivas, por exemplo, de verificar se os dados apresentados no problema são suficientes e necessários para outra pessoa conseguir solucionar ou o domínio do conteúdo explorado no problema.

A fim de que os professores tivessem outra experiência com criação de problemas foi sugerido o material em histórias em quadrinhos em um site/programa chamado Pixton[28] onde é possível construí-la (o site disponibiliza cenário e personagens possibilitando o usuário apenas criar a história em quadrinhos e escolher as características do *layout*).

O quadro 19 ilustra a história em quadrinhos elaborada pela formadora, assim como, as questões organizadas a partir da história. Os professores demonstraram mais interesse neste tipo de atividade para criação de problemas/histórias do que a proposta supracitada (roteiro). Como também, destacaram a pergunta do item (b) aos alunos com os seguintes comentários

Formadora: o que o terceiro aluno pensou de errado?

(Prof. A): Ele tomou o todo. E multiplicou por 12 pessoas. É interessante né (rindo). Ah mas os alunos poderiam nos questionar que no final eu iria dividir por 2.

(Prof. B): Ou tem pessoas que comem mais de meio quilo de carne.

(Prof. A): É interessante porque as vezes a gente se surpreende com as respostas dos alunos, eles imaginam umas coisas, uns pensam direitinho, outro lá pensa de outra forma e extrapola.

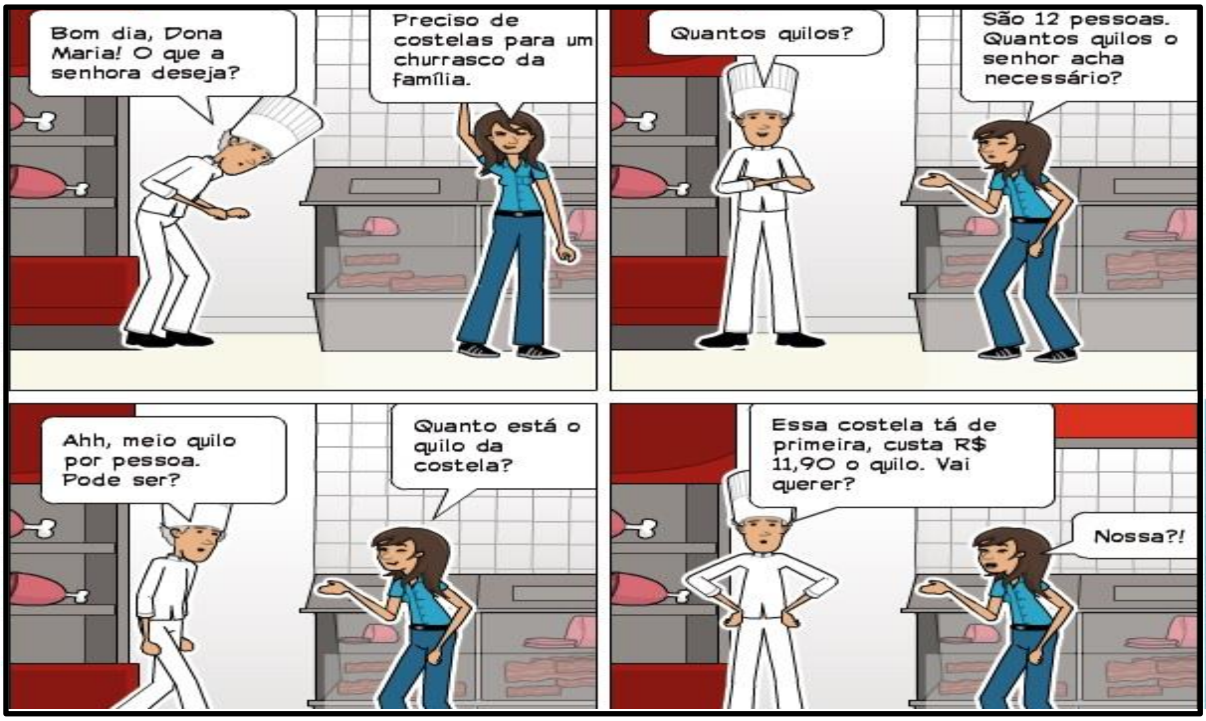
Formadora: e também a primeira pergunta que coloquei sobre quais os significados, talvez para o aluno não seja tão interessante, porque para ele é interessante verificar diferentes estratégias e não formalmente aqui o significado parte/todo ou outro operador. Mas não acho ruim colocar para o aluno a situação da resposta errada e pedir para encontrar e

[28] Disponível no site www.pixton.com.br, é *online*, possui versão gratuita e paga.

erro e como seria o correto, em que condições estaria certo? É interessante para o aluno compreender um erro e a partir dele superar.

Inicialmente as questões foram elaboradas para professores responderem (uso do conhecimento especializado), porém os professores as encaminharam como alunos (conhecimento comum). Desta forma, pensaram na compreensão de um erro e como a partir dele gerar um conhecimento (uma solução correta).

Quadro 19 - História em quadrinhos



Dada a situação acima, a professora questionou seus alunos sobre quanto custaria para Dona Maria a compra dos quilos de costela se ela aceitasse a sugestão do açougueiro da quantidade de carne consumida por pessoa. Obteve as seguintes respostas:

Aluno 1: Professora, primeiro pensei em calcular um meio de 12 que deu 6 quilos (são 12 pessoas e cada come meio quilo). Como dona Maria precisa de 6 quilos e cada quilo custa R$11,90, fiz a multiplicação 6 por 11,90 que resultou em R$ 71,40.

Aluno 2: Professora, primeiro pensei que o 12 é o todo de pessoas. Depois, pensei em organizar em partes de dois em dois, pois cada quilo dá para duas pessoas, assim cada parte custa R$ 11,90, somando as 6 partes de 11,90 resulta em R$ 71,40 para dona Maria pagar.

a) Os dois alunos chegaram no mesmo resultado, porém com estratégias diferentes. Qual significado foi atribuído à fração $\frac{1}{2}$ em cada situação?

b) Outro aluno disse à professora que o seu resultado não era o mesmo dos colegas 1 e 2. Disse que encontrou R$142,80, pois pensou que bastava realizar o produto entre 11,90 por 12 (número de pessoas).

Qual erro de interpretação que o aluno cometeu? Quais encaminhamentos/questionamentos o professor precisa realizar para elucidar a questão ao aluno?

Fonte: excerto do portfólio.

No intuito de concluir a dimensão epistêmica do CDM deste estudo retomamos que buscamos, via as atividades, desenvolver um conhecimento referencial, um conhecimento didático-matemático do ponto de visto institucional para a compreensão do objeto número racional. Neste sentido, abordamos os significados parciais dos números racionais para sua compreensão mais ampla, assim como, a necessidade de transitar pelas diferentes representações e significados para uma completa compreensão desse conjunto numérico. Assim como, das concepções fundamentais via os significados.

As atividades implementadas possibilitaram aos professores compreender a importância em se trabalhar com situações-problemas para explorar os significados dos números racionais que permitam a sua compreensão completa. Assim como, em documentos curriculares como a BNCC (BRASIL, 2017) que preconiza as habilidades e competências para esse objeto matemático.

A seleção das atividades desenvolvidas durante a formação propiciou situações contextualizadas voltadas para alunos do EF anos finais, não ficando restrita a situações, por exemplo, de parte/todo (que normalmente são as mais exploradas em sala de aula). Nas situações também exploramos diversas representações (numéricas, geométricas, figural, tabelas) onde possibilitou reconhecer a importância da linguagem e da argumentação.

Durante a formação, não foi possível avançar na formalização do conjunto dos números racionais, tais como: classes de equivalência, a densidade ou como um corpo numérico. Primeiramente não avançamos na formalização, pois estávamos trabalhando com esse conjunto para os anos finais do Ensino Fundamental. E, nesta etapa, o conjunto é definido normalmente no 8º ou 9º ano. Antes disso, são as frações ou os decimais. Como também, não foi uma expectativa dos professores participantes desenvolver o conhecimento ampliado até essa formalização. Como conhecimento posterior ao objeto de estudo, abordamos como aprender frações algébricas sem o conhecimento prévio de frações numéricas.

O conteúdo afetivo, o interesse e o cognitivo do aluno, desenvolvemos atividades onde havia maior complexidade. Assim, buscamos desenvolver habilidades com os professores para implementar adaptações curriculares e favorecer a compreensão dos alunos (consequentemente o selecionar e adaptar atividades que sejam interessantes e no contexto do aluno, assim como a identificação e compreensão do erro, obstáculos, dificuldades recorrentes dos alunos).

Dessa forma, indicamos a dimensão epistêmica, referente ao conhecimento institucional, nesta formação continuada como **alta** e justificamos este conceito por entendermos que foram desenvolvidas situações que potencializaram o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, especificamente do objeto número racional. Constantemente os professores foram desafiados, postos a pensarem a partir de suas dificuldades/limitações e de seus alunos indicando que houve um incremento em seus conhecimentos.

O ganho, via esta dimensão, aos professores é indicado quando explorados seus conhecimentos prévios e apontados limitações (ou concepções errôneas) onde as mesmas serviram de base/apoio aos conhecimentos emergentes – significados e definição do número racional, o transitar entre a representação decimal e fracionária também implica nas compreensão das concepções fundamentais: partição, ordenação, densidade, operações e comparação, os procedimentos e encaminhamentos do professor para promover a aprendizagem dos seus alunos.

Nesse sentido, também, apontamos para uma idoneidade epistêmica alta quanto ao conteúdo ecológico e o interacional, pois via dificuldades apontadas pelos professores, foi possível o estudo de caso de boas práticas agregando uma reflexão pessoal das suas interações em sala de aula. E, assim, a identificação e resolução de conflitos e dificuldades de aprendizagem. Como também, via as possíveis interações de sala de aula, o professor pode compreender o papel dos recursos didáticos (resolução de problemas e livro didáticos) para a aprendizagem da Matemática (ou em específico dos números racionais).

A dimensão epistêmica compreende uma gama de conhecimentos onde não basta o domínio do conhecimento institucional do objeto de estudo, mas, além disso, do conteúdo matemático, cognitivo, afetivo, interacional, mediacional e ecológico (conforme apontando no quadro 3). E, conforme descritos e analisados nesta seção, esses conteúdos unidos formam o conhecimento especializado do professor de Matemática na qual foram mobilizados justificando a avaliação da idoneidade desta dimensão.

4.2.2 Dimensão Mediacional

A dimensão mediacional está organizada de forma a contemplar o uso de recursos didáticos (concretos e digitais) de maneira pertinente e oportuna no processo de ensino e aprendizagem de tópicos de Matemática, em específico dos números racionais no Ensino

Fundamental – anos finais. Como também, de métodos de ensino que torne o aluno mais ativo na sua aprendizagem.

Diante da perspectiva desta dimensão, enquanto recolhíamos os conhecimentos prévios dos professores durante o primeiro encontro, um diálogo entre os participantes nos chamou a atenção sobre o entendimento dos recursos adotados pelos professores alheio ao livro didático. Essas falas foram:

> *(Prof. F): O material concreto muitas vezes tu utilizas em uma aula, quando tu vais apresenta o conteúdo, depois tu acabas ignorando, vai para as operações, não utiliza no diário, não utiliza uma vez por semana, é difícil.*
>
> *(Prof. A): Até jogos, que a gente utiliza de vez em quando, tu não podes utilizar sempre, porque no fim teu conteúdo não anda, tu tens um prazo para cumprir também. Os alunos adoram.*

A conversa nos inquietou e trouxe algumas dúvidas, sendo porque querem formação continuada (oficinas) com jogos se trabalham poucas vezes com esse recurso? Os professores são taxativos que formações continuadas devem explorar jogos. Se jogos só servem para apresentar um conteúdo e não para desenvolver competências e habilidades, então seria necessário seu emprego? Outros recursos não seriam mais adequados? Se os alunos adoram jogos, não seria importante usar este recurso, pelo menos, para motivá-los aos estudos? A partir destas questões propomos organizar essa dimensão de forma que os professores vivenciassem atividades onde jogos e recursos digitais fossem disponibilizados de forma a desenvolver um conhecimento matemático e não como algo lúcido apenas, algo alheio, fora do processo de aprendizagem do conteúdo específico por hora explorado.

Somos cientes que os professores durante sua formação inicial não tiveram com ênfase a exemplificação e adequado do uso de jogos ou outros recursos didáticos. Algumas falas a seguir dos professores revelam que no processo de ensino e aprendizagem que tiveram, os alunos (eles próprios) aprendiam por memorização, por algoritmos, sem explicações mais profundas ou detalhadas. Entretanto, percebem que hoje esse processo não ocorre da mesma forma. Os alunos não são simplesmente passíveis ao "é porque é". E por esse motivo os professores se sentem "acuados" e veem a possibilidade dos jogos como uma saída, uma explicação do porquê ao aluno. O primeiro diálogo ocorreu no quarto encontro quanto ao uso de recursos concretos e o segundo diálogo no sétimo encontro numa discussão sobre dificuldades durante a graduação.

> *(Prof. A): Em outros tempos as coisas eram diferentes.*

Formadora: eu aprendi (na escola) deixa igual (os denominadores) por mmc e deu.
(Prof. A): E tem uma questão assim: o professor não entrava em muitos detalhes. Hoje a gente mostra mais para os alunos, né. O que diz, porque...
(Prof. C): Em outras épocas era ao contrário. Foi com material concreto na faculdade que compreendi porque os denominadores deveriam ser iguais.
(Prof. B): Deus o livre tu falar alguma coisa na aula.
(Prof. A): Deus o livre tu questionar o professor. Na minha época não era assim- como hoje.
(Prof. B): Mas porque é isso?
(Prof. B): Hoje não é assim. Nem que eles não saibam o interesse... mas eles perguntam.
(Prof. B): E isso aqui oh (frac soma) eles vão ter mais interesse de fazer do que os cálculos.

(Prof. A): Na faculdade a gente tinha professores que explicavam o conteúdo no primeiro momento e depois te vira.
(Prof. B): Eu tinha uns assim.
(Prof. A): Daí a gente tinha que ir buscar o material de estudo, eu xerocava os livros de cálculo para poder estudar.
(Prof. B): Ou só colocava um título no quadro e daí ele falava, falava, falava, daí enchia o quadro de um rabisco que para gente era grego e se tiverem curiosidade vão à biblioteca e peguem um livro, estudem e se tiverem uma pergunta me perguntem.

Considerando as condições expostas, no terceiro encontro, propomos a compreensão das concepções fundamentais dos números racionais: comparação, ordenação, densidade, equivalência, unidade (o todo e partes iguais) e dos 5 significados via *applets*[29] desenvolvidos no *software* GeoGebra. Vale ressaltar, que, primeiramente, exploramos este recurso digital por considerarmos o recurso que estava mais afastado do professor. Desta maneira, poderia ter maior interesse/motivação à compreensão desses recursos.

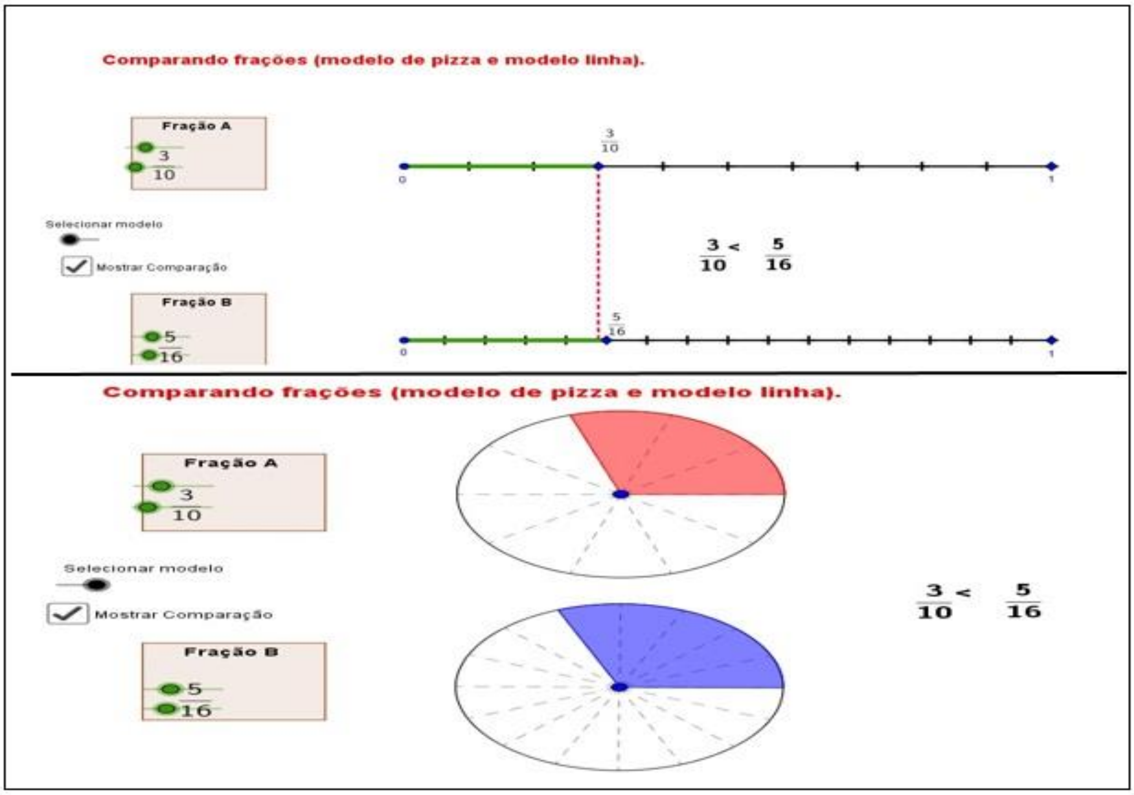
O emprego de recursos durante a formação se alia a ideia de Godino, Batanero e Font (2004), que apontam o uso de recursos tecnológicos como um meio para enriquecer a aprendizagem Matemática, contribuindo para a condução da construção do conhecimento matemático, enfatizando que, em pleno século XXI, o processo de ensino e aprendizagem não deve ficar restrito a quadro e giz ou a práticas que não incluam as tecnologias digitais.

[29] *Applet* é um pequeno *software* que executa uma atividade específica, dentro (do contexto) de outro programa maior.

Os *applets* empregados neste estudo estão disponíveis no repositório do GeoGebra de forma *online*. Este encontro foi desenvolvido no laboratório de informática da UNIPAMPA. Foi solicitado aos professores que se preferissem trabalhar com seu *notbook* ou *tablet* neste encontro poderiam traze-lo, porém com o GeoGebra já instalado. Nenhum professor trouxe o seu aparelho. Um professor alegou que não conseguiu instalar o *software*. Após foi mostrado aos professores que o GeoGebra pode ser usado online, sem fazer a instalação do mesmo no computador (os professores acessaram o site www.geogebra.org) e, então, fizeram a busca pelos *applets* que seriam desenvolvidos neste encontro. Como também, foi mostrado como baixar um material do site no seu computador, onde é necessário ter um *email*.

O quadro 20 ilustra o primeiro *applet* proposto que explora a comparação (e ordenação) entre duas frações com dois *layouts:* em forma de reta numérica ou na forma de pizza.

Quadro 20 - *Layout* do *applet* sobre comparação de frações



Fonte: disponível em <https://www.geogebra.org/m/EtanP5kU> Acesso em 29 nov 2018.

A formadora elaborou a atividade ilustrada no quadro 21, denominada de roteiro. Os professores receberam de forma impressa o roteiro justamente para que fossem manipulando o *software* para resolver as atividades. Ainda, ressaltamos que a proposta tinha o cunho dos professores vivenciarem uma atividade que desenvolvesse a compreensão de um conhecimento matemático (comparação e ordenação) via um recurso digital. Desse modo, não é simplesmente chegar ao professor e dizer usem que é bom, sem fazer com que os próprios usem e reconheçam que via esse recurso é possível aprender. Entendemos ser necessário o professor pensar/refletir que é algo eficiente para o seu trabalho em sala de aula, portanto faz uso.

Quadro 21 - Roteiro das atividades via o *applet.*

1) Abra o objeto de aprendizagem (*applet*) denominado **comparação 1**. Faça manipulações e, após, responda as questões abaixo. 2) A atividade inicia com a fração $A = \frac{3}{10}$ e a fração $B = \frac{5}{16}$. Perceba que há a opção de registro dessas frações na reta numérica ou na forma de pizza. Também, há a opção mostrar comparação (verifique qual fração é maior). 3) Por meio desse material, a seguir propomos uma atividade para desenvolver a compreensão do aluno sobre comparação e ordenação. a) Mova os controles deslizantes da fração A para obter $\frac{2}{5}$. O que você identifica que aconteceu na figura da linha para a representação dessa fração? E se fosse na figura de pizza há alguma diferença? b) Na fração B, mova os controles deslizantes para obter $\frac{3}{5}$. Olhando para a figura (em reta), qual fração é a maior (A ou B)? Como você justificaria que uma fração é maior que a outra? c) Que fração poderia ser menor que $\frac{2}{5}$? E maior que $\frac{3}{5}$? c) Se você unir (somar) a fração A com a fração B, o que ocorreria com as figuras (reta e pizza)? Que fração representa essa quantidade (da união)? d) Quantas vezes cabe a medida $\frac{1}{5}$ em $\frac{2}{5}$? E quanta vezes $\frac{1}{5}$ para completar a linha? 4) Este material, você o empregaria para trabalhar quais conceitos dos números racionais? Identificou alguma limitação do material? 5) Percebes benefícios em se trabalhar com este material digital ao invés do contexto tradicional de uso do lápis e papel. 6) Quanto a atividade elaborada via o material (objeto de aprendizagem) traria alguma dificuldade ao aluno, um obstáculo?

Fonte: excerto do portfólio.

A seguir apresentamos uma discussão de um professor com a formadora sobre o uso do *applet* em questão. Na conversa a formadora estimula os conhecimentos do professor para trabalhar com o material. Ou seja, o *applet* por si só não garante a aprendizagem e, sim os devidos encaminhamentos do professor.

> *(Prof. E): Eu já trabalhei com esse tipo de material com os alunos. Eles dizem só isso professora? Eles acham que é meio simples... mas é só isso, é só mexer e deu... Daí tem que propor bastante (ampliar) o número de questões.*
>
> *Formadora: essas questões aqui (do roteiro) a senhora pensa que eles achariam simples?*
>
> *(Prof. E): É... eles iriam perceber o que mexe... e dizer só isso? Eles querem que tenha mais alguma coisa...*
>
> *Formadora: e quando a gente faz a pergunta justifique? Por que é válido ou não? Por exemplo, me diga uma fração menor que 2/5.*

(Prof. E): Aí que entra o professor. Para questionar eles...tem que saber trabalhar o material. Que opções eu teria?
Formadora: porque a questão em si pode parecer simples, qual fração é menor que 2/5? Mas quando tu pergunta porque tu achas que é menor? Ele pode te responder que ele acha que é menor porque ele dividiu as frações e verificou qual é a menor (em decimal), ou porque ele viu que o tracejado de uma fração é menor que da outra (pelo applet), ou manipular no applet ele marca a fração 2/5 e na linha debaixo, começa a procurar uma fração menor (por tentativa e erro apenas). Mas associei que a senhora quis me dizer que a pergunta pode ser simples ou difícil, mas se eu tiver 20 ou 10 alunos é difícil controlar todos para que eles não se dispersem e façam outras coisas. E daí tu não consegue desencadear essas ideias que seriam interessantes e conseguir justificar porque uma é maior ou menor. De usar esse material (applet) para buscar a fração menor, porque ele poderia simplesmente te responder 1/5 é menor que 2/5 está visível na imagem da reta. Mas, dai, então, tu conseguirias buscar outra fração sem ser com o denominador 5? Ah, daí já vou ter dificuldade (diria o aluno)...mas tu já pensou em usar o próprio material pra buscar essa fração menor... Tá daí ele te responde 1/8<2/5, tá mas porque é menor? Só porque tu viste na imagem (do applet) que é menor? Consegue justificar isso de outra maneira? Daí ele poderia ir para ideia de divisão ou tentar fazer equivalência de fração. Daí vale o professor estimular as respostas dos alunos, mas sou consciente que é difícil... os alunos se dispersam, estão num ambiente diferente.

Os itens 4 ao 6 do quadro 21 foi discutido entre os professores onde os mesmos reconhecem a importância da tecnologia no nosso meio (cotidiano), entretanto são enfáticos em dizer que ela não chegou à escola ainda, seja pela infraestrutura precária muitas vezes da escola e de maneira mais modesta o não domínio desses recursos digitais por eles próprios conforme diálogo abaixo.

(Prof. A): ... não é longe dos alunos, pois eles mexem um monte nessas coisas, eles iriam achar um máximo uma aula assim, mas o problema é o obstáculo da falta de computadores.
(Prof. D): A internet da escola é ruim ou não tem.
(Prof. E): Mas dá para fazer esse material a mão também.
Formadora: o interessante desse aqui é que ele é dinâmico, o aluno muda fácil os numeradores e denominadores, o resultado é imediato.
(Prof. D): Sai dessa coisa tradicional, de ficar só desenhando no papel, a tecnologia uma coisa nova a gente tinha que dar um jeito e as escolas também dá um jeito de proporcionar isso para gente... Enfim, isso vai ficando.

(Prof. E): Eu já tenho uma outra visão. Agora eu já tenho a orientação de como manipular o material e assim levar para escola e no momento que puder ter... mas de a gente poder aprender é bem interessante, ter esse contato, não é nada perdido.

(Prof. A): O questionamento é quanto à escola que não está preparada para isso.

(Prof. E): Mas a gente pode usar o celular, eles têm celular.

(Prof. A): O problema é ensinar a usar corretamente o celular, porque a gente não percebe, mas eles estão usando para outras coisas.

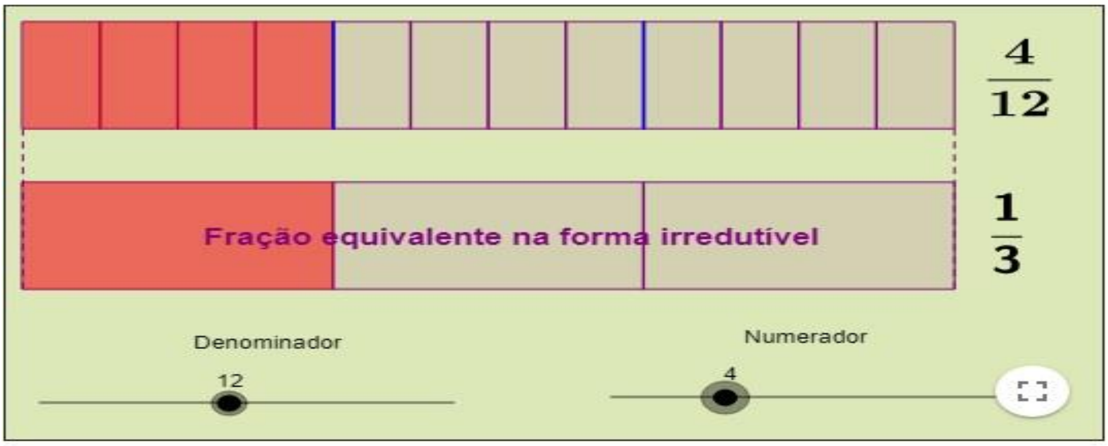
Formadora: mas a gente não usar porque eles não se comportam, eles não vão se comportar nunca, tu nunca ensinas o uso correto... se tu sempre sonegar aquilo, ele nunca vai aprender corretamente. Mas não é um trabalho simples e curto...

(Prof. E): Mas o que está acontecendo, a gente fica com medo de fazer esse tipo de trabalho pela dispersão deles e está ficando para trás (tipo a gente sabe do problema mas não enfrenta ele). A gente precisa aceitar que é preciso trabalhar assim com eles, é uma coisa que vai chamar mais a atenção. Eu já tive mais contato com esse tipo de coisa (recursos digitais) agora já estou mais afastada.

Além do *applet* explorando os conceitos de comparação e ordenação, foram propostos outros dois *applets*. Um deles explorando os significados de quociente e medida e o conceito de unidade (todo e partes iguais). O outro explora o conceito de equivalência e o significado de parte/todo. O roteiro disponibilizado aos professores está no Apêndice D (3º encontro) de ambos os *applets*. O material que explora os significados de quociente e medida na reta numérica foi desenvolvido pelos professores sem grandes dúvidas. O terceiro roteiro que explorou o conceito de equivalência trouxe mais dificuldades aos professores. A pergunta “Ser equivalente, é dizer que as frações são iguais? Justifique” por uns professores foi respondido que sim, por outros que não e, então, gerou dúvida entre eles.

De modo geral, costumamos dizer que as frações são iguais, $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, principalmente, pelo símbolo de igualdade entre as frações. Entretanto, não é uma verdade. A visualização dessas frações está no quadro 22 onde é possível ver que um terço é uma unidade dividida em três partes iguais e tomada uma delas e quatro doze avos é uma unidade dividida em 12 partes iguais e tomada 4 delas. A região sombreada de cada uma dela é a mesma (tem a mesma área ou tem o mesmo quociente 0,33...), porém não é a mesma imagem, não é a mesma coisa.

Quadro 22: ***Layout*** **do** ***applet*** **sobre equivalências**



Fonte: disponível em < https://www.geogebra.org/m/A7uXhPA9> Acesso em 29 nov 2018.

Ainda no roteiro 3, questão (8b), foi solicitado que os professores contextualizassem a expressão $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$. Os professores não responderam a essa questão e não compreenderam exatamente o que era para ser feito. Deste modo, a formadora sugeriu dois encaminhamentos abaixo listados.

- A expressão pode ter o significado de razão: A cada 12 candidatos, 4 são classificados ou, equivalentemente, a cada 3 candidatos 1 é classificado.
- A expressão pode ter o significado de quociente: dividir uma barra de chocolate em 12 partes iguais e dar 4 partes entre 3 pessoas é equivalente a uma barra dividida em 3 partes iguais e 1 parte para cada pessoa. Em ambas as situações as barras são iguais.

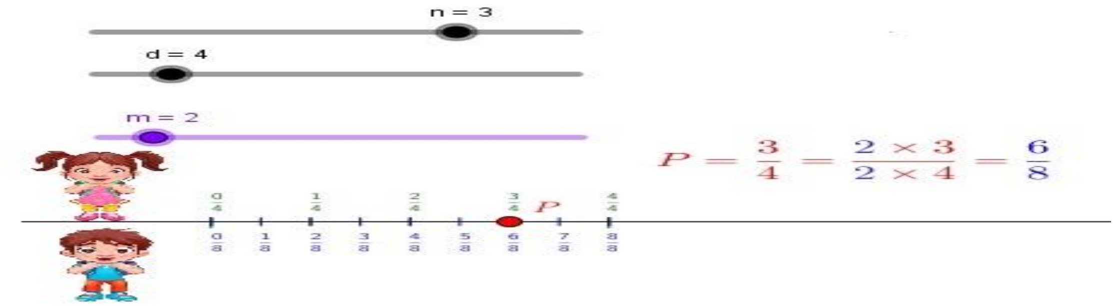
Já ciente de que os professores poderiam dizer que os recursos digitais estão longe da sua realidade escolar seja pela falta de laboratórios de informática, acesso restrito à internet ou poucos computadores, elaboramos um modelo de atividade avaliativa via um *applet*. A ideia seguia na direção de ampliar os horizontes dos professores quanto ao uso pertinente e adequado de recursos didáticos. Desta maneira, ainda no laboratório de informática, pedimos que os professores explorassem/manipulassem um *applet* e verificassem suas possibilidades e limitações. Para, então, em sala de aula resolverem a atividade ilustrada no quadro 23.

Quadro 23 - Modelo de avaliação via o *applet*

ESCOLA TODOS ALEGRES
Modelo de avaliação

Profª Patrícia P Goulart Carpes
Nome: ____ Série/ano: 6º ano
Esta avaliação é baseada no objeto de aprendizagem **equivalência 2** explorado em aula.

1) Durante a aula de educação física, o professor organizou uma corrida de obstáculos. De um lado correriam as gurias com 4 obstáculos durante a prova e igualmente espaçados. Do outro lado, correriam os guris com 8 obstáculos durante a prova e igualmente espaçados. A figura abaixo ilustra a situação. Considere-a para responder as questões abaixo.



Fonte: disponível em < https://www.geogebra.org/m/Pr3s9vak > Acesso em 29 nov 2018.

a) Depois de 5 minutos, Ana havia acabado de pular o terceiro obstáculo. Que fração representa neste instante o percurso que Ana já percorreu? Quanto falta para Ana terminar a prova?
b) Após os mesmos 5 minutos, Beto havia acabado de pular o sexto obstáculo. Que fração representa neste instante o percurso que Beto já percorreu? Após esse tempo, quem vai a frente: Ana ou Beto? Justifique.
c) Construa uma nova reta agora considerando que a prova dos guris tenha 9 obstáculos e das gurias 3 obstáculos todos igualmente espaçados.

Fonte: excerto do portfólio.

Os professores usaram o *applet* antes de conhecerem a avaliação para compreender como ele funciona e o que os controles deslizantes indicam (n, d, m). Por fim, a formadora expos aos professores que o material disponibilizado serve para propor o entendimento de equivalência (no laboratório de informática, com os alunos trabalhando em duplas ou grupos) como, também, para avaliar de uma forma dita tradicional (prova individual e sem consulta em sala de aula) via o material já desenvolvido. Foi proposto aos professores um modelo de prova tradicional tendo em vista que, de modo geral, os professores de Matemática estão “presos” a um modelo de avaliação na forma de uma lista de exercícios. Deste modo, não quisemos ser tão disruptivo no como avaliar, mas em como fazer um bom uso do material digital. A seguir apresentamos um diálogo entre os professores quanto ao modelo de avaliação.

(Prof. E): Letra 1b) da prova: o menino vai 6/8 da prova é equivalente a menina ¾ da prova. Os resultados já estão na reta numérica (figura) é só os alunos identificarem.
Formadora: há dois registros na prova: a numérica e a reta numérica.

(Prof. A): É bom para eles enxergarem a reta, como está representado ali. É bem interessante.

Formadora: é um trabalho, uma dedicação (buscar um material de apoio, construir atividades em cima do applet... Notem que o applet tá pronto, já é uma mão na roda (mas só o material não é suficiente). - O livro didático está pronto (as questões). O applet está pronto, mas faltam as atividades, ou seja, o trabalho do professor. Mexer no programa, conhecer ele, porque se não tu não consegues montar as atividades.

(Prof. E): Se tu não conhecer tudo que ele proporciona, tu deixas de aproveitar.

Formadora: até interessante de verificar a limitação do applet, porque se ele é limitado tu tens que buscar um outro material de apoio (complementar).

(Prof. A): Sabe que eu fico comparando essas coisas assim, quando a gente tem o aluno NE[30], a gente não tem tempo de atender, que a gente possa preparar uma aula para ele. É difícil dar atenção para eles em 45 minutos de aula, para gente fazer esse trabalho. Até em relação ao conteúdo com os outros alunos, também é difícil, o tempo é muito curto com os alunos para ti dar aquele atendimento individualizado que o aluno precisa. A gente sabe tem uns que vão sozinhos, mas outros são mais lentos. Então é bem complicado a gente conseguir conciliar dentre desse espaço e conseguir atingir a todos.

Formadora: por isso a ideia do applet e um roteiro pronto para aula porque tu desenvolves a autonomia do aluno, mas também tu tiras o aluno de cima de ti, tu deixas ele desenvolver e daí tu consegue chegar em outros. Dificilmente numa aula dita expositiva, tu consegues chegar em vários alunos. Com certeza nas primeiras aulas os alunos estranhem, seja difícil ainda para o professor, mas com o hábito de aulas nessa perspectiva o aluno compreenda e desenvolva sozinho (com mais autonomia).

(Prof. A): O problema é que eles querem tudo pronto, a gente sente esta dificuldade, eles querem até a leitura do enunciado da questão, e daí eles perguntam e agora o que tem que fazer aqui?

(Prof. B): Se num exercício tu só colocar resolva: desenvolva: eles perguntam o que mesmo é para fazer aqui?

Pino-Fan e Godino (2015) indicam para a dimensão mediacional do CDM a disponibilidade e adequação dos recursos didáticos (concretos e digitais) e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de tópicos de Matemática. Neste sentido, exploramos com os professores um recurso (*applets*) menos empregado em sala de aula e vislumbramos possibilidades para o seu uso no processo (propor,

[30] Alunos NE é referente a alunos com alguma necessidade especial, por exemplo, cegos ou com síndrome de Down.

retomar ou avaliar um objeto). Apontando que, ao desenvolverem as atividades dos quadros 22 e 23, os professores reconhecem os conhecimentos mobilizados e que a forma de propor o estudo de um objeto deve ser mais atrativa ao aluno via tecnologias ao método convencional.

Durante este encontro que visava a exploração de recursos digitais, os professores reconheceram que é um conhecimento importante, mas não possível de diretamente ser aplicado nas suas aulas. Neste sentido, alguns já recorreram para os materiais manipuláveis. Onde, então, enfatizamos que no encontro seguinte seria abordado esses materiais por meio do Frac Soma 235 e de jogos.

No quarto encontro foi proposto o material manipulável Frac Soma 235 desenvolvido por Roberto Ribeiro Baldino que busca trabalhar o conceito e operações com frações. Cada professor recebeu um material conforme ilustrado na figura 18.

Figura 18 - Material Frac Soma 235

Fonte: da pesquisa.

Os professores não conheciam o material, dessa forma, foi proposto atividades para verificar o número e tamanho de peças, assim como, representar a fração de cada peça em relação ao todo (peça amarela). Por exemplo, da direita pra esquerda da figura 18, temos a peça azul correspondendo a um meio, a peça rosa *pink* a um terço, a peça azul claro a um quinto. Como também, registrar essas frações na reta numérica. Percebemos como necessário o aluno fazer a troca de registro: do material para a reta, pois o material facilita a visualização e comparação das frações no intervalo de 0 a 1. Um professor não registrou corretamente as frações na reta numérica como a figura 19 ilustra.

Figura 19 - Atividade do professor na reta numérica

Fonte: da pesquisa.

Por meio da atividade da reta numérica supracitada, também buscamos abordar o conceito de densidade dos números racionais ao questionar a) quantas frações há no intervalo de 0 a 0,5? E b) há outras frações entre esses números? Se houver, cite pelo menos uma. Dois professores espontaneamente já estranharam as perguntas, dizendo "*mas é pra citar as frações que marcamos na reta via o material ou podemos dizer que há infinitas*"? A formadora respondeu que a questão foi elaborada para um aluno que estivesse desenvolvendo o conhecimento, mas como elas já sabiam/reconheceram a densidade dos racionais, os itens (a) e (b) teriam a mesma resposta: infinitas frações (ou racionais).

Na sequência foram propostas outras atividades, agora para os professores explorarem conceitos, via o material, como segue no quadro 24.

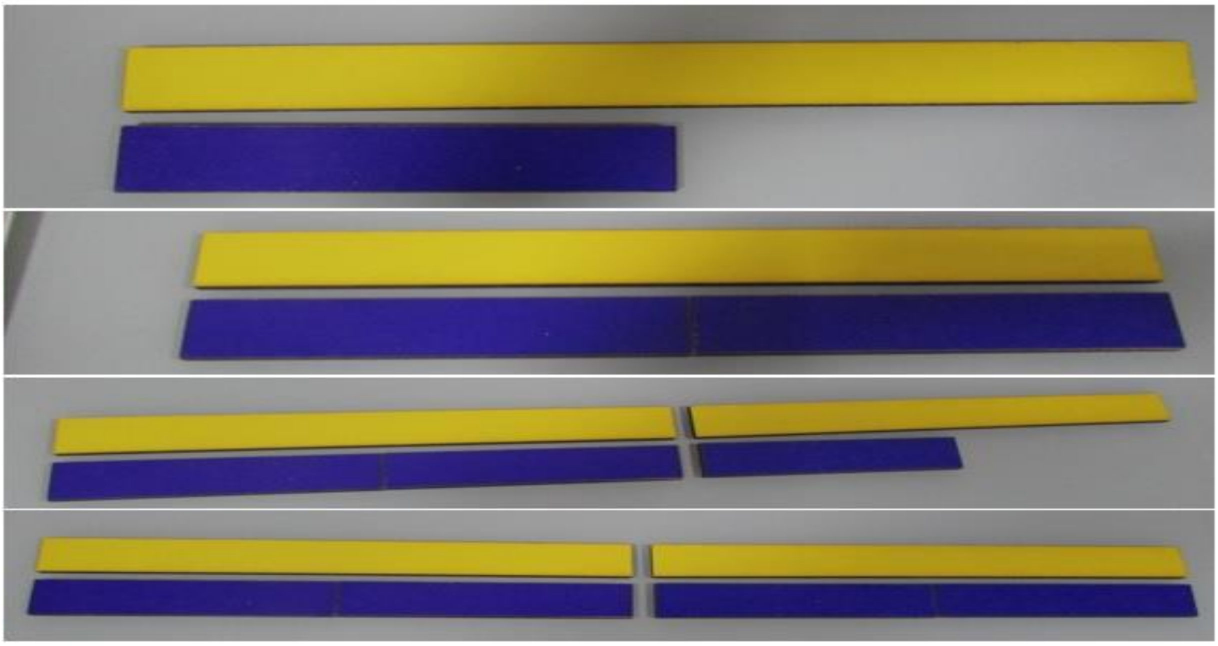
Quadro 24 - Atividades para explorar o material Frac Soma 235

Sobre o material - Se tomarmos a barra amarela como a medida total (a maior medida), as outras peças de mesma cor unidas formam o todo (a barra amarela). a) O que diferencia uma cor da outra? Quantas peças azuis (água) preciso para formar o todo? As peças são do mesmo tamanho? E da cor marrom, quantas peças precisa para formar o todo (unidade)? b) O que a peça $\frac{1}{3}$ (rosa pink) representa da peça do inteiro (amarela)? c) Representa com o material duas peças de $\frac{1}{5}$ (azul água). Que fração do todo isso corresponde? d) Agora represente a fração $\frac{4}{2}$ com o material. Faça o mesmo com a fração $\frac{6}{3}$. e) Percebemos que $\frac{4}{2} = 4:2 = \frac{6}{3} = 6:3$. Mas $\frac{4}{2}$ é a mesma coisa (conta) que $\frac{6}{3}$? Dica: relacionar 4 lápis para 2 pessoas dá no mesmo que 6 lápis para 3 pessoas. Assim como, 8 lápis para 4 pessoas. Todos recebem a mesma quantidade. f) Com o uso do material, procure frações que representam a mesma quantidade (tamanho) da fração ½. g) O que é uma fração? E frações equivalentes?

Fonte: excerto do portfólio.

Nos itens (a), (b) e (c) do quadro 24 são propostos para o aluno (professor) reconhecer o material (suas peças) e estimular a compreensão de que quando as peças são da mesma cor, a soma é direta, isto é, $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ corresponde a $\frac{2}{5}$ (duas peças do mesmo tamanho/cor). O item (d) que pede a representação da fração $\frac{4}{2}$ via o material trouxe dificuldade aos professores, pois o primeiro pensamento foi dividir a unidade em 4 partes iguais. Então, a formadora colocou que não poderiam alterar o tamanho da parte (um meio). Assim, um professor disse “*então precisamos de mais uma barra amarela*”, chegando a resposta 2 (4:2 = 2). Resposta correta, porém a representação via o material não foi desenvolvida. A formadora apresentou o encaminhamento ilustrado na figura 20, deste modo, compreendo o que é um meio, dois meios, três meios e quatro meios via o material. Ou, também, pode ser compreendido como quatro vezes o um meio. O desenvolvimento é análogo para a fração seis terços.

Figura 20 - representação com as peças do Frac Soma para a fração quatro meios



Representação das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$ e $\frac{4}{2}$ respesctivamente.

Fonte: da pesquisa.

O item (d) estimula o aluno (professor) compreender o que significa o numerador e o denominador de uma fração. O item (f) foi proposto que os professores tomassem a peça de um meio e buscassem cobri-la com outras. No momento que os professores iam citando as frações, as mesmas eram expostas no quadro para visualização de todos. Após, todas as frações listadas, a formadora questionou porque um terço ou dois quintos não servem para cobrir a peça de um meio? A intenção era dos professores justificarem porque uma fração é equivalente a outra não. O Prof. C citou “*porque os denominadores são pares neste caso*”. Ou seja, estamos falando de frações com um múltiplo em comum. O quadro 25 apresenta a sequência de atividades propostas para explorar o Frac Soma.

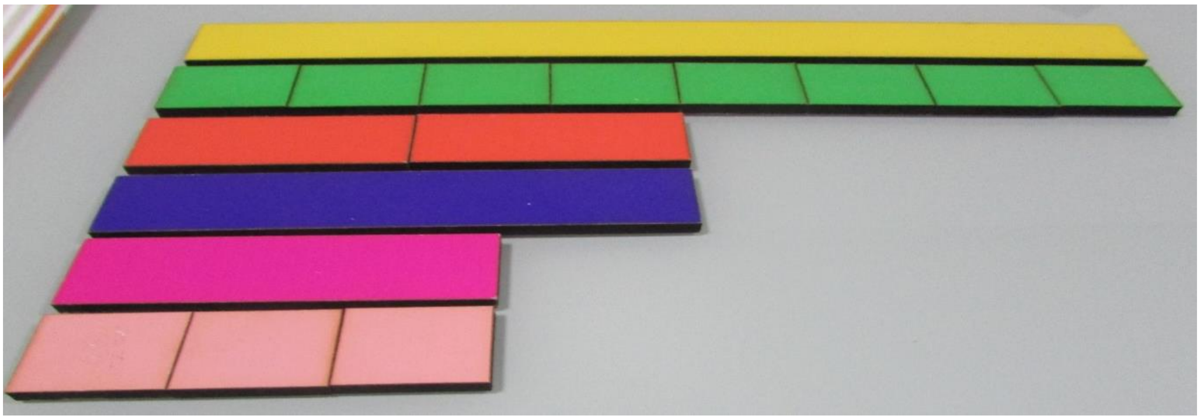
Quadro 25 - Atividades para explorar o material Frac Soma 235

Na sequência das atividades, use o material para auxiliar nas suas respostas. c) Quantas vezes a fração 1/8 cabe em 1 (barra do inteiro)? d) Quantas vezes a fração 1/8 cabe em 2/4? e) De quantas peças de 1/9 (salmão) preciso para preencher uma peça de 1/3 (rosa pink)? f) E quantas peças 1/10 (roxo) preciso para preencher uma peça de 1/3? g) Com a peça 1/10 consigo cobrir exatamente qual peça (fração)? i) Explique com suas palavras o que ocorre entre as letras (f) e (g) para que 1/10 possa cobrir ou não outra peça.

Fonte: excerto do portfólio.

As atividades do quadro 25 podem ser propostas para introduzir o conceito de equivalência ou do significado de medida por exemplo visto que o aluno pode manipular o material, ou seja, busca a peça um oitavo e verifica quantas peças são necessárias para completar a barra amarela (de unidade). O procedimento é análogo para os outros itens e está ilustrado na figura 21.

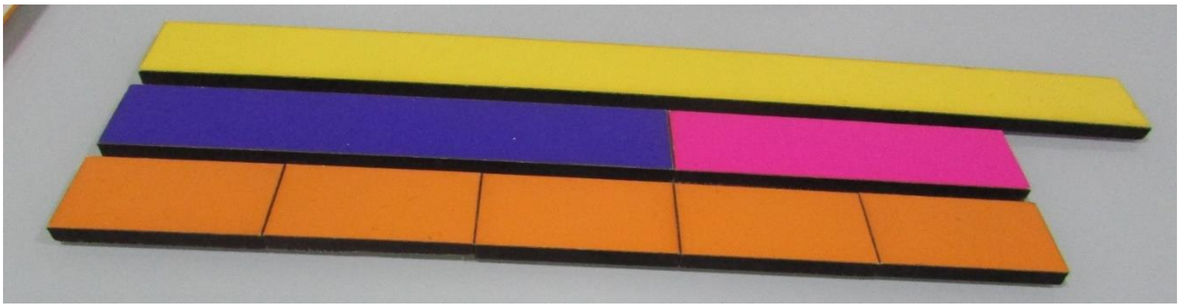
Figura 21 - Representação de frações equivalentes ou não via o Frac Soma 235



Fonte: da pesquisa.

Na sequência foi explorado as operações de soma e subtração de frações via o material. A primeira atividade solicita a representação via o material da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Sobrepondo essa soma na barra amarela (da unidade) notamos que o resultado da soma é menor que 1. Notamos, também, que os tamanhos/cores das peças não são iguais, logo não somamos direto. Via o material já sabemos calcular, por exemplo, $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ ou $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$. Então, foi proposto aos professores que buscassem uma cor para cobrir a soma desejada, pois peças da mesma cor sabemos somar (ou subtrair). A figura 22 ilustra os resultados obtidos.

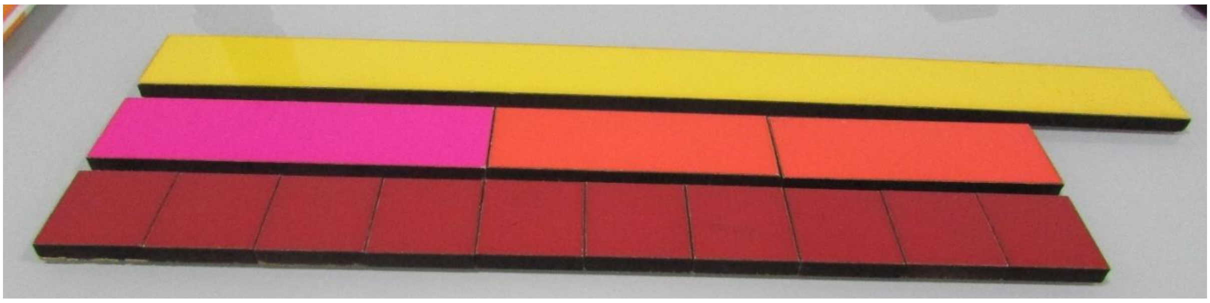
Figura 22 - Representação da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.



Fonte: da pesquisa.

Além da solução determinada $\frac{5}{6}$, outras frações também satisfazem a soma. Há frações equivalentes para essa soma. A fim que os professores retomassem a ideia foi proposto a soma de $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}$. A solução da atividade está ilustrada na figura 23.

Figura 23 - Representação da soma $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}$.



Fonte: da pesquisa.

Nesta questão rendeu comentários importantes sobre os entendimentos dos professores quanto o que é uma solução esperado do aluno, porque uma fração irredutível prevalece a uma fração equivalente e o que os professores ponderaram sobre o material visto que não o conheciam ainda como seguem:

> *(Prof. B): Mas muitos se dão de conta do mmc para fazer soma de frações.*
>
> *(Prof. A): Mas eles não entendem o mmc.*
>
> *Formadora: quero dizer o mmc é um método eficiente para realizar adição e subtração de frações, a ideia não é vamos excluir o mmc, mas o aluno inicialmente (quando começa a estudar somas) não é o mmc que faz ele entender o raciocínio da soma de frações.*
>
> *(Prof. C): Está mas se ele me dá como respostas 10/12 eu teria que aceitar a resposta dele? (Se dirigindo a formadora ao cálculo 1/3+2/4=4/12+6/12=10/12).*
>
> *Formadora: eu entendo que estaria correto no sentido que ele achou uma soma correta (isso é igual a isso, mostrando no material que as áreas são iguais e as frações são equivalentes). Agora percebo também que ele deveria de entender que essa fração (10/12) não é a única resposta. Que isso também seria uma resposta (5/6). Eu entendo que dar*

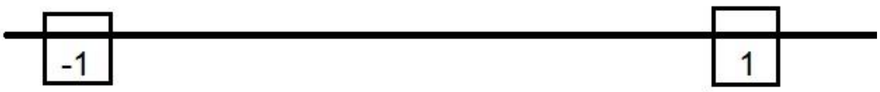
como errado essa soma não seria correto, mas ele poderia perceber que existe uma fórmula mais simples.
(Prof. C): Eu dou errado (para a resposta 10/12), eu dou meio certo para questão.
Formadora: é talvez tu tivesses que dizer no enunciado que tu queres a resposta mais simples (fração irredutível) da soma. Se na tua ordem de exercício isso está explicito é coerente em reduzir a nota e dar meio certo para 10/12. Mas se tu só pedes a soma das frações, com a fração 10/12 ele te deu.

(Prof. A): Eu adorei isso aqui. Vou fazer com meus alunos.
(Prof. B): E o cérebro da gente gosta disso, do material concreto para desenvolver a ideia.
(Prof. C): Acho que precisa de 10 materiais desses, pra trabalhar em duplas (em sala de aula).
Formadora: dá para trabalhar bastante coisas ai (com o material).
(Prof. A): Dá, dá,...
(Prof. B): Ai através desse (material)... da forma lúdica... que é ...não ia ser só 50 ou 55% pra não dizer 100% que iriam aprender rapidamente. Porque a gente faz aquele monte de cálculo, mínimo é tanto, tantas vezes tanto, tanto dividido por tanto.
(Prof. B): De 5 a 10 períodos para usar o frac soma (se referindo ao tempo necessário para um bom uso do material). Com material concreto sempre vai ser mais rápido o rendimento (aprendizado).
(Prof. A): A gente nota nos alunos que os números decimais/racionais são os que deixam mais sequelas no aluno e talvez também pelo tempo... teria que se dedicar bastante... dar um entendimento maior aos alunos... e a gente não consegue... justamente pela essa questão da quantidade de conteúdo... e a gente vai observando que os alunos vão passando de série/ano que eles vêm com essa falha...

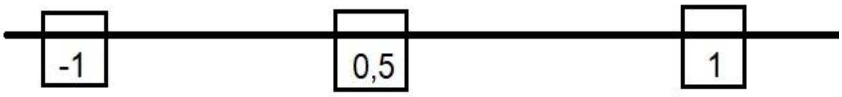
Após abordar o material manipulável Frac Soma 235, propomos aos professores trabalharmos com jogos, sendo eles: o jogo do varal dos números racionais, o jogo bingando com os racionais e o jogo "muro das equivalências". Como também, na perspectiva de trabalhar com jogos, os "Momentos do Jogo" desenvolvido por Grando (2000) em sua tese de doutorado.

O varal com números racionais (uma corda onde dispõe-se números) é comumente conhecido e normalmente substitui/relaciona a reta numérica em livros textos de apoio (livro didático). A ideia aqui é de tomar esse recurso e desenvolver um jogo com ele (competição). Desse modo, elaboramos o jogo do varal dos números racionais e propomos aos professores que o jogassem para vislumbrar as potencialidades e limitações do mesmo. Propomos ser jogado em dois grupos (a turma dividida em dois grupos) e as regras do jogo são simples, como seguem:

1) Inicialmente dois números racionais são escolhidos e dispostos no varal. A seguir em cada jogada, o grupo escolhe um aluno para colocar o número no varal. O tempo de cada jogada é combinado de 20 segundos. Para marcar um número no varal é preciso antes jogar o dado numerado de 1 a 6. Os números 1, 2 e 3, o grupo deve marcar um número à esquerda do número escolhido por último. Se for os números 4, 5 e 6 no dado, o grupo deve marcar um número à direita do número escolhido por último.

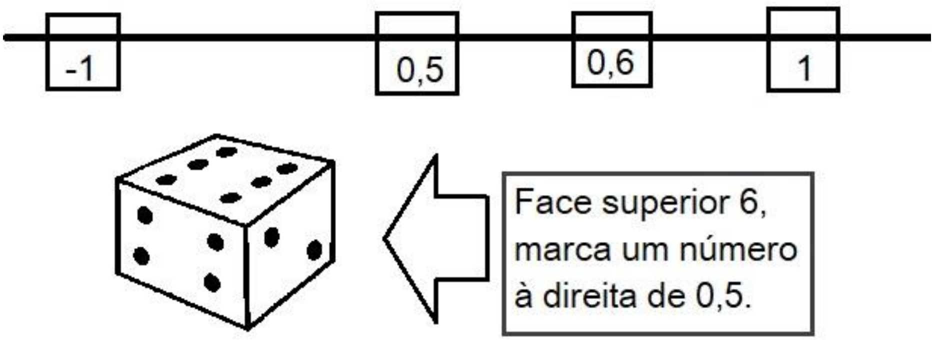


2) Com o par ou ímpar decide-se qual grupo começa jogando. O grupo que inicia deve marcar no varal um número racional no intervalo entre os dois números já dispostos no varal.



3) O outro grupo deve jogar o dado e escolher um número no intervalo indicado para marcar no varal. E assim por diante durante 5 rodadas. Se o aluno registra o número certo no varal, o grupo recebe um ponto, caso contrário não marca ponto. Vence o jogo o grupo que pontuar mais.

A ilustração abaixo indica uma jogada onde o aluno lançou o dado, obteve o número 6, logo deve marcar um número à direita do último número marcado (0,5).

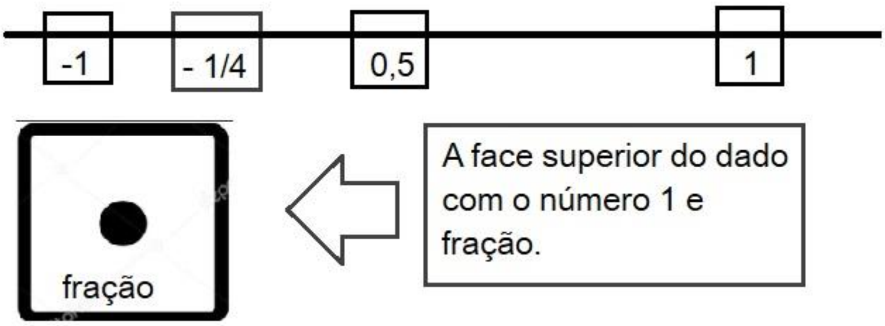


Observação 1: as regras do jogo são simples, há tempo para cada rodada e há um grupo vencedor. Cada grupo deve organizar suas estratégias: números possíveis em cada intervalo e qual participante (aluno) deve atirar o dado, escolher o número e marcar no varal.

Observação 2: cada jogo deve ser diferente, pois os intervalos iniciais são de escolha do professor (ou dos alunos). As figuras ilustram um jogo com registros em números decimais, mas a critério do professor pode-se explorar os outros registros (frações, frações equivalentes, frações decimais, porcentagens).

Observação 3: O jogo pode se tornar mais complexo se ao atirar o dado cada face represente uma ação. Por exemplo, as faces com os números 1, 2 e 3 deve marcar um número à esquerda do intervalo, porém o número 1(do dado) tem que registar um número fracionário, 2 (do dado) um número decimal e 3 um número percentual. Do mesmo modo, à direita. O número 4 marca um número à direita e fracionário, o número 5 à direita e decimal e o número 6 à direita e percentual.

A ilustração abaixo indica uma jogada onde o aluno lançou o dado, obteve o número 1 e fração, logo deve marcar um número fracionário à esquerda do último número marcado (0,5).



Os professores acharam fácil o jogo, porém apresentaram algumas dificuldades, como por exemplo se confundiram qual número estava à direita ou à esquerda de (-0,9). Tinham marcado o número (-0,5) e corrigiram para (-0,95). Contudo os professores gostaram de trabalhar com o jogo. Esse foi o primeiro encontro que os professores se sentiram a vontade de sair da cadeira (sentados) e irem ao quadro para registrar os números no varal e discutir a marcação certa ou errada no quadro. Neste sentido, percebemos que o jogo criou um ambiente agradável e oportuno para abordar conhecimentos didático-matemáticos com os professores. Na sequência apresentamos um diálogo dos professores ao jogarem o Varal dos números racionais. Neste encontro havia 4 professores, logo jogaram em duplas, uma contra a outra.

> *(Prof. D): Professora (formadora) de início é melhor para o aluno só com a escrita em decimal?*
>
> *Formadora: sim*
>
> *(Prof. D): E depois vai aperfeiçoando.*
>
> *Formadora: se torna mais complexo depois (usando registro em frações ou porcentagem).*
>
> *(Prof. A): Claro que eles não têm essa noção que a gente tem dos quebradinhos (exemplo 0,995 e ideia de densidade). Eles sempre vão se embananar nisso aí.*

(Prof. B): Mas se a gente se perde, imagina eles.

Formadora: ao final do jogo mostrou a ordem dos números postos no varal.

(Prof. A): Interessante (como o jogo funciona).

(Prof. B): Se tu colocas direto no quadro esses números não são tão interessantes do que eles fazerem assim (com o jogo do varal), faz eles pensarem.

Formadora: neste jogo eu não pedi registro escrito (que seria no caderno do aluno) porque o professor está acompanhando as jogadas e está visualizando os erros e acertos e auxiliando nas concepções errôneas imediatamente (são apenas dois grupos). E também para não perder a ludicidade do jogo pelo registro. É bem interativo, o professor acompanha os registros.

(Prof. B): Para eles terem noção de quantos números há entre dois números.

Formadora: essa a minha ideia com o jogo, a densidade dos racionais. Quantos números cabem naquele intervalo e o valor posicional.

(Prof. B): Porque se tu vais contar na reta numérica, no livro aparece 0, 1, 2, 3, ... a direita e os negativos a esquerda e os outros que estão? Aparece uma fração -1/2 e deu (as mais simples, indicando que outros números não são indicados na reta).

Formadora: as professoras foram boazinhas, durante o jogo, colocaram números fáceis no varal (é uma estratégia colocar um número bem próximo do extremo do intervalo e dificultar a jogada do oponente). Percebam que poderia fazer quantas rodadas eu quisesse, sempre teria número para colocar entre os intervalos. Logo, a ideia de trabalhar densidade (entre dois racionais sempre existe outros racionais, ou melhor, infinitos racionais).

Godino, Batanero e Font (2004) apontam que os recursos manipulativos desempenham funções representativas que propiciam a compreensão dos significados matemáticos para posterior formulação de conceitos e estruturas matemáticas, podendo, portanto, ser considerados como instrumentos semióticos, servindo de elo entre a realidade e o objeto matemático. Neste contexto, exploramos os jogos durante a formação de professores. Via o jogo supracitado, o aluno pode desenvolver/empregar os tipos de registros de um número racional (transitando nas representações e ampliando sua compreensão de uma quantidade não inteira por exemplo).

Além disso, conforme apontam os autores, conceitos e estruturas matemáticas devem ser desenvolvidas via recursos didáticos para o uso adequado e pertinente dos mesmos no processo de ensino e aprendizagem. Em se tratando dos números racionais, Behr et al (1983) propõem que para os alunos compreenderem esses objetos, devem, primeiramente, desenvolver uma concepção básica dos mesmos para após prosseguirem numa sequência de tópicos dos números racionais que se baseiam em concepções Matemáticas importantes. Em outras palavras, a possibilidade que o jogo (ou recurso manipulativo) assume para desencadear ideias e promover uma aprendizagem eficiente.

Ao término do jogo, propomos aos professores três perguntas (Havia interesse e envolvimento do aluno ao jogo? Quais os conhecimentos prévios para o jogo? E os desenvolvidos pelo jogo? Há limitações ao jogo?) a fim de compreender a receptividade deles e possíveis encaminhamentos para o jogo. Foi realizado uma discussão entre os professores para responder as questões, como segue:

> *(Prof. D): Eu acho que sim, é uma competição eu acho que sim.*
>
> *Os professores concordaram com a cabeça.*
>
> *(Prof. A): Se são jogos eles me dizem para que eu quero isso aí? Eu não uso esses números. Eu faço sempre uma comparação entre as escolas, eu sei que turma minha gostaria do trabalho e a que não gostaria – não vai render nada.*
>
> *Formadora: por isso que pergunto profe. Em outro encontro, outra profe, disse que eles iriam olhar isso e dizer é só isso, e daí já ia perder a graça (a motivação para jogar/manipular). É uma característica. Outra já me disse eles gostariam, iriam se motivar.*
>
> *(Prof. D): Até porque uns podem não gostar porque não entendem o jogo, as regras, não saberiam onde colocar o papel no varal daí não gostam.*
>
> *Formadora: isso professora, o jogo inicialmente parece bem simples/fácil. Mas quando tu jogas, tu percebes que tem conhecimentos mobilizados, que não é jogo por jogo. Assim eu posso ver o jogo para praticar, como um exercício (retomando conhecimentos com eles) ou para inserir um conteúdo (e daí vai de como o professor vai se organizar). Se eu fosse iniciar o conteúdo da reta, daí em vez de colocar a reta em si, usar o varal, fazer o jogo do varal para iniciar o conteúdo (ou outro conteúdo: comparação, densidade). Daí vai da proposta do professor de como ele está encarando o jogo: se é para exercitar ou se é via esse material desenvolver um conceito inicial. A minha proposta com vocês é mobilizar esse conhecimento: se é possível e em que momento empregar o jogo para ensinar matemática. Por exemplo, hoje eu acho inicialmente que o jogo eu colocaria como exercício (retomada de conteúdo). Tu tens que te sentir segura com este material para usar na sala de aula e desenvolver... Ah vou começar a ideia de reta numérica via esse jogo, é uma outra postura do professor, que já vai sair daquela ideia do livro didático, fazer a reta, escrever no quadro, marcar números, vai sair dessa ideia. E daí o professor se sente seguro em dizer que via esse material os alunos vão aprender o que precisam aprender sobre esse conteúdo? Quanto tempo de sala aula eu preciso para que o aluno consiga compreender esse conteúdo com esse recurso (o jogo)? Vocês podem perceber que se eu*

mudar os intervalos iniciais, muda o jogo, são outras jogadas. Então eu posso jogar esse jogo mais de uma vez, sem ser repetitiva. Num jogo de cartas, isso pode ser repetitivo, pois as cartas não mudam.

(Prof. A): Eu pensei esse jogo para o 6 ano, mas como tem os negativos... daí fazer o jogo dando papeizinhos com números para os grupos e daí eles vão encaixando no varal.

Formadora: é outra proposta. Inicialmente havíamos pensado em fazer assim. Mas daí eu pensei eu vou sempre fixar os números e daí o jogo pode se tornar repetitivo. Então eu vou dar o papel em branco e o aluno determina o número. Para o professor isso é mais fácil porque ele não precisa confeccionar o material.

(Prof. A): Mas dá para fazer dos dois jeitos.

(Prof. C): Mas é maior o conhecimento usado quando o aluno escolhe/determina o número.

(Prof. B): Mas poderia começar com números positivos e daí pode usar no 6 ano.

Formadora: dá para começar por exemplo ente 1 e 4 que traz mais facilidade ao aluno que se o intervalo fosse de 0 a 1. É do trabalho do professor partir do mais simples para o mais complexo. Até a ideia do dado (apenas indicando direita ou esquerda e depois o tipo de registro).

(Prof. A): Limitação: depende da série, os negativos não dão no 6 ano.

(Prof. B): O número de alunos na sala de aula.

(Prof. C): Numa turma muito grande não vai dar certo.

(Prof. A): Vai dar uma confusão...

Formadora: mas tem uma questão: se tu nunca propões o jogo para eles, eles nunca vão aprender a ter os modos adequados durante o jogo.

Todas as professoras concordaram com a fala da formadora.

Formadora: tentei propor o jogo, não deu, então voltamos para o quadro e caderno. Tira a responsabilidade de ti e põe neles (alunos). Eles têm que perceber que a responsabilidade é deles de aprender.

Na sequência foi proposto aos professores o jogo Bingando com os números racionais. O desenvolvimento do jogo é equivalente ao jogo de bingo tradicional, porém o jogo explora as diferentes representações do número racional, como também, não há o sorteio de um número, mas de uma carta com a representação pictórica (geométrica) da quantidade. Os materiais do jogo são 24 cartas com as frações com registro pictórico e 35 cartelas com os números racionais com registro fracionário, decimal e porcentagem conforme modelo na figura 25. As regras do jogo seguem:

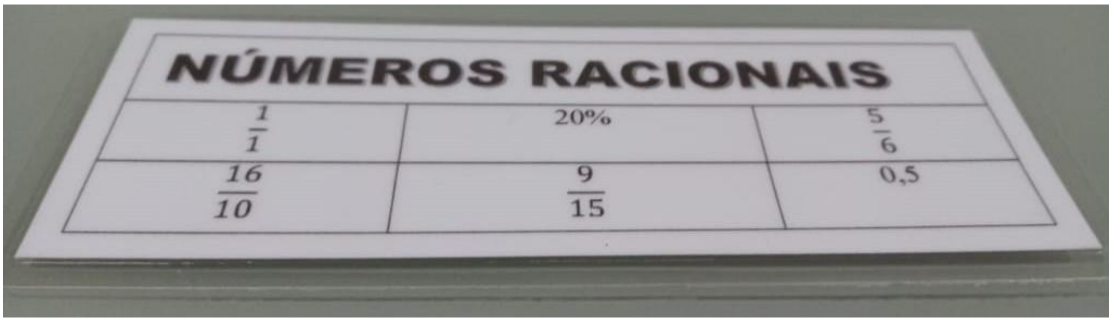
- Os alunos organizados individualmente recebem uma cartela que contém 6 números racionais. O jogo tem as mesmas regras do bingo convencional. Porém, os números não são sorteados, mas há cartas que são embaralhadas, dispostas uma embaixo da outra e com a face para baixo. O jogo inicia quando o professor mostra a primeira carta aos alunos e os mesmos devem verificar se possuem a mesma quantia na sua cartela. Por exemplo, a carta da figura 24, indica o número $\frac{1}{1}$ ou 1 ou 1,0 ou 100% disponível nas cartelas.

Figura 24 - simulação de uma carta.

Fonte: da pesquisa.

- O objetivo do jogo é alcançado quando o primeiro aluno completar sua cartela (6 números). Note que em cada cartela, há números com representação decimal, fracionária e porcentagem.

Figura 25: Modelo da cartela do jogo



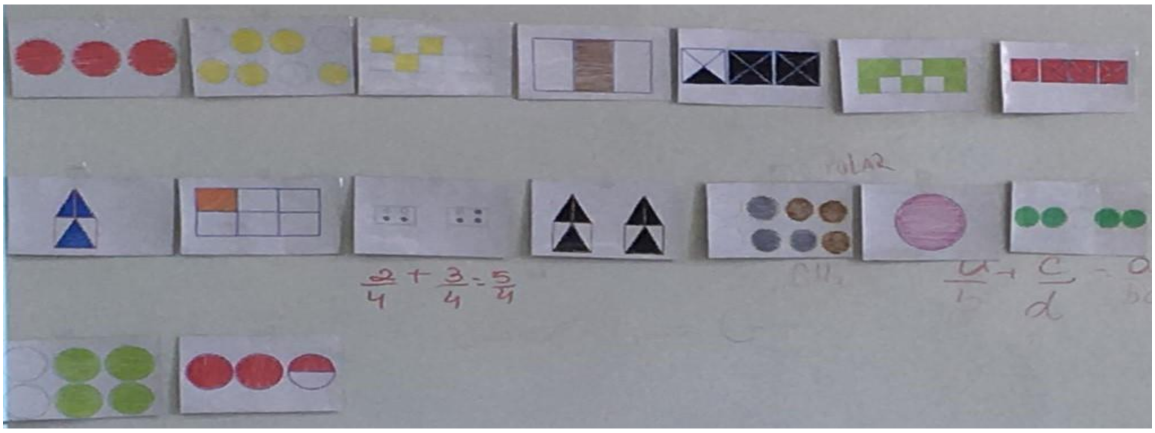
Fonte: da pesquisa.

Todos os professores receberam três modelos de cartelas para reconhecerem o material, como os números estavam dispostos (há registro em fração irredutível, ou não, porcentagem ou decimal). De modo geral, os professores acharam mais difícil em relação ao outro (do varal), pois tinham que buscar frações equivalentes, os olhos se embrulhavam com os números conforme relatos. A formadora durante as rodadas foi até alguns professores e indicou que alguns números não estavam marcados na cartela.

Durante o jogo, os professores perceberam que deveriam buscar trocas de registros, ver o número de diferentes formas, assim como, reconhecer os significados de parte/todo (visto que a imagem da cartela é uma representação da parte e do todo) e quociente (ao dividir a fração e buscar o decimal). Assim, perceberam que necessitavam de uma estratégia para buscar os números (representações), pois se não os números eram sorteados e não eram marcados nas cartelas caso os tivessem (por descuido).

Perante essa dificuldade de buscar uma estratégia para marcar o número na cartela e assim ganhar o jogo, a formadora comentou que sua estratégia foi tomar todos os números das suas cartelas e determinar o decimal deles e também o número sorteado em decimal para verificar se tinha ou não. Foi uma estratégia que formulei rapidamente para trabalhar apenas com números decimais. Já o Prof. D buscou a fração irredutível do número, também, no intuito de mais rapidamente conseguir verificar se tinha ou não o número sorteado. Outra dificuldade apontada foi na representação fracionária ou decimal de uma fração imprópria (maior que 1), os professores tendiam a escrever como frações próprias. A figura 26 ilustra as frações sorteadas.

Figura 26 - Disposição das cartelas sorteadas durante o jogo de bingo no quadro



Fonte: da pesquisa.

Todos os professores receberam uma folha para fazer o registro das rodadas/jogadas e, portanto, o formador poderia acompanhar os registros/estratégias dos jogadores. Porém, como a folha foi dada em branco, os professores preencheram de forma irregular, sem ordem, ficando difícil compreender os cálculos/raciocínio adotados. Desse modo, caso o professor queira esses registros, seria importante organizar a folha por rodada, ou seja, orientar a escrita (mas não entregar uma folha em branco).

O professor que primeiro completou a cartela, que bingou, recebeu como prêmio o próprio jogo (também o jogo do varal). Ambos os jogos foram confeccionados para uma turma de 30 alunos, oportunizando, desse modo, o professor ter o jogo pronto para aplicação. O professor que ganhou o jogo disse que iria usar em suas aulas. Como também, outro professor disse "*tu vais me emprestar*" (Prof. A). Um comentário que chamou a atenção foi de um professor que disse ao folhar o seu portfólio verificou que todo o material dos jogos lá estavam (as regras, jogadas simuladas, exemplos de cartelas e cartas): "*que bom, tem tudo aqui para nos ajudar*" (Prof. D).

Após o desenvolvimento dos dois jogos, foi retomado com os professores os encaminhamentos, procedimentos e os raciocínios buscados/explorados durante os jogos. Neste sentido, colocamos aos professores que não foi aleatório o comportamento e questionamentos da formadora durante os jogos. Havia uma proposta (método) empregada que era os Momentos do jogo elaborado por Grando (2000). No portfólio dos professores (Apêndice D) a formadora apresentou e discutiu os ditos momentos do jogo com os professores. Fizemos o paralelo entre o que a teoria indica em cada momento (passo) com os dois jogos desenvolvidos.

Optamos em trabalhar com os Momentos do jogo visto que os professores demonstravam estar limitados às funções que um jogo pode se prestar num ambiente de sala de aula para ensinar os conhecimentos matemáticos. Tentamos mostrar/aplicar jogos com a perspectiva de resolução de problemas, concordando com Grando (2000, p.54) ao dizer que "é necessário que a escola esteja atenta à importância do processo imaginativo na constituição do pensamento abstrato, ou seja, é importante notar que a ação é regida por regras. Por isso sua capacidade de elaborar estratégias, previsões, exceções e análise de possibilidades acerca da situação de jogo, perfaz um caminho que leva à abstração". Como outras características do jogo: desenvolver cooperação, a possibilidade de aprender com outro (acerto ou erro).

Enfim, foi proposto aos professores o jogo como resolução de problemas, isto é, o jogo para desenvolver um conhecimento matemático e não apenas como algo a mais, para sair da rotina. Os professores, nesse sentido, ouviram as propostas. Entretanto, levaram muito mais em consideração quando o jogo foi desenvolvido do que a formalização de um estudo (ponto de vista teórico). Ressaltamos que se destina um tempo muito menor para colocar ideias/teorias pela formadora durante as formações. Visto que os professores, querem a prática simplesmente. A teoria precisa estar condensada na prática. Por isso, os jogos foram executados na perspectiva da teoria (com os momentos bem demarcados e como a resolução de problemas está sendo empregada).

No encontro 7 voltamos a abordar a resolução de problemas formalmente compreendida como uma metodologia por Onuchic e Allevato (2008). Não colocamos esse método como o melhor para ensinar e aprender Matemática, mas uma metodologia que diferencia o ambiente de aprendizagem (que se percebe tão necessário pelo pouco conhecimento e interesse apresentado pelos alunos).

Outra questão fortemente ligada a essa metodologia advém do estudo da BNCC (2017) ao indicar que o Ensino Fundamental tem o compromisso de desenvolver o letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas.

Certamente para desenvolver o letramento matemático, existem atividades mais apropriadas. Como também, não é com um exercício do tipo “calcule” que tais competências são alcançadas. No portfólio, apêndice D no encontro 7, apresentamos o roteiro proposto pelas autoras supracitadas para desenvolver/aplicar a metodologia de resolução de problemas. E como se fez necessário os professores participantes, optamos em desenvolver um tema via a metodologia como exemplificação. Vale ressaltar, que o roteiro não possui passos rígidos, mas segue como uma orientação ao professor.

Tomamos como exemplo uma aula organizada pela Revista Nova Escola[31] sobre a temática frações equivalentes para um 5º ano. Selecionamos essa atividade, pois ela tem pontos que os professores consideram fortes (usuais em suas aulas): emprego de material manipulável e de jogo organizados na forma de um plano de aula. A atividade foi elaborada para um 5º ano, mas os professores a consideram apropriada para um 6º ano do Ensino Fundamental.

A aula está organizada com um momento inicial para retomar os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema via a seguinte situação “Elisa comprou uma barra de chocolate e decidiu dividir com sua amiga Renata. Renata propôs a amiga que lhe desse a metade da barra e que ela ficasse com a outra metade. Elisa discordou e disse que iria dividir a barra em 6 pedaços e cada uma ficaria com 3. Renata aceitou e disse que mesmo assim elas comeriam a mesma quantidade de chocolate. A afirmação de Renata está certa? Por quê?”

Como formadora escolhi esta aula (plano de aula), pois ela contempla a atividade e possíveis encaminhamentos aos professores, tais como:

- *Como é a divisão da barra proposta por Renata?*
- Qual fração representa esta divisão de Renata? (Numericamente, como podemos representar essa divisão?)
- *Como é a divisão que Elisa propôs?*
- Qual fração representa a divisão de Elisa? (Numericamente, como podemos representar essa divisão?)
- *Renata está certa ao dizer que nas duas divisões elas ganharão a mesma quantidade de chocolate?*
- A barra de chocolate poderia ser dividia de outro modo de forma que ambas recebessem a mesma quantidade?

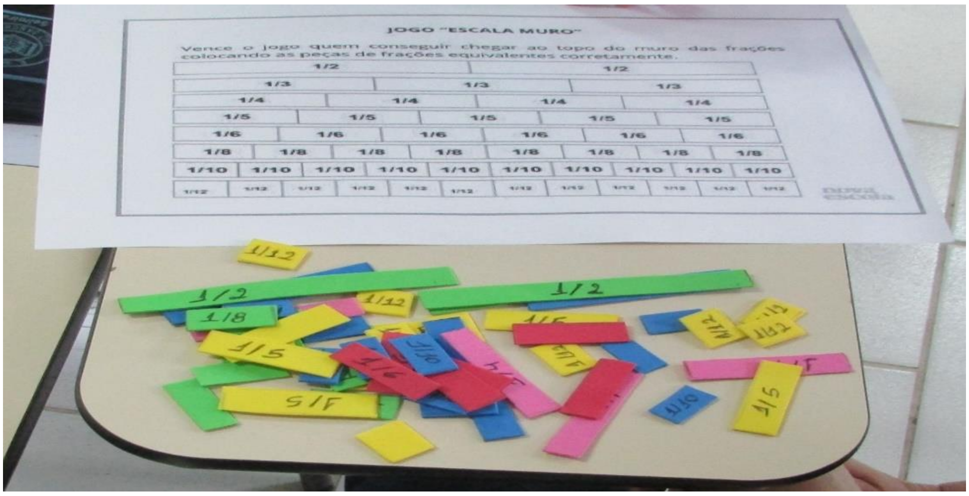
As questões em itálico foram propostas pela Revista Nova Escola e as outras pela formadora. Vale destacar, que neste encontro, não solicitamos que os professores elaborassem os questionamentos. Nós sugerimos os encaminhamentos a fim exemplificar a metodologia. Como também, para novamente os professores vivenciarem uma atividade

[31] Disponível no site https://novaescola.org.br/plano-de-aula/381/jogo-escala-muro.

onde é fundamental o papel do professor, a mediação necessária para a compreensão de um objeto matemático, neste caso, frações equivalentes.

A atividade principal é desenvolvida sobre um recurso manipulável na perspectiva de um jogo conforme o *layout* na figura 27. O jogo chama-se “Escala Muro”.

Figura 27 - jogo Escala Muro



Fonte: da pesquisa.

Foi sugerido os seguintes questionamentos propostos no plano de aula:

- Como vocês faziam para saber onde colocar a peça?
- O que vocês observavam?
- Como era feita a conferência para saber se a peça estava no lugar certo?
- Quanto vale a peça um meio em cada um dos lugares que ela foi colocada?

(Importante que a turma identifique qual fração o um meio representa em cada linha.)

- Podemos dizer que um meio em comparação com estas frações é equivalente? (Idem para as frações um terço e um quarto).
- O que as peças do jogo Escala Muro representam?
- Quais foram as estratégias que usamos para encontrar frações equivalentes?

Jogamos o Escala Muro com os professores para que os mesmos vivenciassem que com o jogo e com os encaminhamentos é possível sair do jogo por jogo (1º momento proposto por Grando) para o jogo por competência (7º momento proposto por Grando), assim como, via o jogo é possível formalizar um conceito aplicando a metodologia de resolução de problemas.

O questionamento de um professor foi conseguir cumprir o total de passos num período de aula (seja de 1 ou 2 períodos), ou seja, iniciar e de alguma forma conseguir formalizar um conceito que não fique perdido para a próxima aula. Neste sentido, a formadora esclareceu que possivelmente, ao iniciar as aulas com essa metodologia, os alunos estranhem (saiam da zona de conforto) e isso já vai trazer mais dificuldades ao professor. Talvez nesses momentos nem todos os passos “sejam cumpridos”, mas almeja-se que o número de passos aumente a partir da colaboração dos alunos.

No intuito de concluir a dimensão mediacional do CDM deste estudo retomamos juntamente com os professores que as atividades desenvolvidas durante a formação, como, por exemplo, as situações-problemas, os roteiros dos *applets* e do Frac Soma 235 e os jogos seguiram os passos da metodologia de resolução de problemas. Normalmente, buscamos via essas atividades que os professores explorassem as possibilidades/manipulações do recurso, construíssem estratégias para obter a solução (ou compreender um conceito) para, então, formalizar/argumentar a solução encontrada.

Godino (2009), aponta que na dimensão mediacional é possível identificar se os professores usam materiais manipulativos e tecnológicos digitais que permitem introduzir boas situações, linguagens, procedimento, argumentações, adaptadas ao conteúdo pretendido. Cientes que havia limitações nesses aspectos, buscamos explorar durante o curso vários recursos e métodos que pudesse potencializar as boas situações e tratamento dos objetos de estudo conforme aponta o autor.

Desta forma, indicamos a dimensão mediacional dos professores nesta formação continuada como **alta** e justificamos porque os mesmos puderam vivenciar situações, ampliar seus conhecimentos didático-matemáticos, para que desse modo se sintam seguros ao planejar e implementar suas atividades de ensino para o tópico específico de números racionais no Ensino Fundamental. Contudo compreendemos que esses conhecimentos se estendem para outros objetos matemáticos quando compreendemos como a dimensão mediacional se insere num processo de ensino.

O ganho, via esta dimensão, aos professores é indicado pela perspectiva ampliada sobre os recursos didáticos (concretos e digitais) para potencializar a aprendizagem dos alunos e facilitar o processo de ensino do professor envolvendo os conhecimentos matemáticos. Como também, vislumbrar possibilidades de emprego e compreensão da metodologia de resolução de problemas visto que muitas vezes os professores não a empregam por desconhecimento ou descrença.

A adequação e pertinência de jogos e *applets* para mobilizar um conhecimento matemático no processo de ensino e aprendizagem foi uma importante demanda proposta no curso de formação. Como também, discutimos a necessidade dos encaminhamentos do professor para o emprego desses recursos para potencializar uma aprendizagem aos seus alunos. Além disso, os professores visualizam um tempo maior para cumprir os objetivos com o emprego de recursos didáticos. Entretanto, apontam para um maior interesse dos alunos e melhor compreensão do objeto de estudo.

Também identificamos como um ganho aos professores a construção do portfólio, pois foi um meio de organizar, elaborar e superar concepções errôneas dos professores durante a formação. Como também, poderia ser um material de apoio ao professor em seus futuros planejamentos de aula.

4.2.3 Dimensão Afetiva

A dimensão afetiva está organizada de forma a contemplar as atitudes, motivações e crenças dos professores que interferem no processo de aprendizagem dos conhecimentos didático-matemáticos. Como também, via esta dimensão, buscamos refletir, juntamente com os professores, sobre sua realidade escolar/social implica na motivação e interesse no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

O primeiro encontro da formação tratava de (re)conhecer os conhecimentos prévios dos professores, possíveis dificuldades e superações. E durante as discussões veio à tona o contexto escolar e as condições árduas de um profissional da educação brasileira nos últimos anos. Como já anunciado no início desse capítulo, os professores se veem numa realidade precária, com duas frentes, que impactam diretamente o seu trabalho no ambiente escolar. Uma delas é a descrença no papel do professor, na escola, conforme narração do diálogo a seguir.

> *(Prof. F): A educação está passando por uma crise muito grave, todo o sistema, desde a família. O aluno já vem com aquele pensamento que o professor não pode fazer nada, que a escola não dá condição para nada.*
>
> *(Prof. C): Em casa trazem o valor do professor que não presta e, às vezes, o professor inventa moda.*
>
> *(Prof. F): A questão do respeito que vem da família, tu não pensas que vai chegar na sala de aula e fazer o teu trabalho e pronto. Tu tens todo uma série de fatores que influenciam.*
>
> *(Prof. A): Até ameaças tu recebes.*
>
> *(Prof. B): Até para tu construíres algo diferente (material), os pais dizem que a bolsa que recebem (família por exemplo) é para outras coisas, para aquisição de um bem material.*
>
> *(Prof. F): Crianças enfrentam os professores, coisa que antes não se via.*
>
> *(Prof. G): São os limites que faltam em casa e na escola seguem o baile.*

Os próprios professores alegam que na mesma cidade, em escolas rurais, que a família está mais presente (pelo menos a mãe) a realidade é outra. Os alunos têm mais respeito pelos professores e apresentam rendimento escolar superior (na maioria das vezes) do que alunos das escolas urbanas e de periferia (onde os pais trabalham o dia todo, muitas vezes por um salário mínimo apenas). O município de Itaqui é grande produtor de arroz e soja, com grande parte da sua área destinada para agropecuária. Consequentemente, com muitas desigualdades sociais, poucos ganham muito.

> *(Prof. A): Trabalho em 3 escolas, uma rural, e os alunos são mais envolvidos com os estudos, acho porque tem mais contato com a família, a mãe em casa. Já os alunos da zona urbana (periferia) têm menos dedicação aos estudos, são mais agressivos com os professores e nota-se que a família está mais distante, com menos preocupação com os estudos dos filhos. Mesmo que a gente vá para sala de aula com toda aquela disposição para fazer um bom trabalho, a realidade é diferente, alguns vão aprender e outros que não querem nada com nada, não vão aprender.*

Como também, a discussão, apresentada a seguir, onde os professores apontam como o acompanhamento da família interfere no rendimento do aluno e como a proposta de não retenção do aluno tem prejudicado o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Neste sentido, também, verificamos um ganho no entrosamento de ideias dos professores e perspectivas com a educação.

> *Formadora: os alunos já perceberam que o mínimo já serve para passar e estão se contentando com esse conceito.*
>
> *(Prof. C): Eu não ia nem contentar. Mas hoje em dia... (é assim: querem o mínimo). Eu nunca me contentei porque o meu pai e minha mãe sempre me cobravam que tirasse 100. Se tinha 90 me perguntavam porque não 100? Mas a família hoje em dia não é assim.*
>
> *(Prof. A): Olha aí oh (mostrando que a família é fundamental para o bom desempenho do aluno na escola).*
>
> *(Prof. C): Mas hoje em dia não é assim. Hoje se tu tiraste 50, te dizem parabéns.*
>
> *(Prof. A): Está tudo ótimo, maravilhoso (sobre a fala do Prof. C).*
>
> *(Prof. B): Idem no caso dos pais do Prof. B sobre a nota máxima de cada semestre (identificando a cobrança dos pais sobre a nota).*
>
> *(Prof. C): E a gente está indo longe até, porque vem desde pequeno (do fundamental), porque não reprova mais. (a vergonha da professora em comentar esse fato, falou em outro tom, mais baixo).*
>
> *(Prof. D): É mesmo.*

(Prof. C): E daí fica aquele que a família traz, e aprende direitinho e aquele que a família não se importa passa igual. E daí tu vê toda aquela dificuldade, mal sabem ler, tem aluno da gente que não sabe ler, dá um papel para ele e não sabe ler direito. É assim. Vai interpretar que exercício? Não é que tem preguiça, é impossível para ele ler, tem palavras que nem conhece. Tem palavras mais difícil que a gente usa na matemática, tem que trabalhar com uma linguagem mais formal. Eu sempre falo quociente, mas sempre falo de cima e debaixo. Se não eles não sabem o que é.
(Prof. A): É incrível.
Formadora: me chamou bastante a atenção quando vocês colocam que uma das maiores dificuldades era de dividir, não saber a tabuada. Um dos significados da fração é o quociente, fazer a divisão. E daí porque eles também têm essa dificuldade? Pensar que uma pessoa de 12 anos não faz (a divisão). E daí como um profe faz? Se o profe do 6º ano não der jeito, o problema se arrasta.
(Prof. D): Vai se arrastando.
(Prof. A): Eu agora adotei no 6º ano que eles começam mais a observar essas coisas (operações) daí eu dou a regrinha e chamo um por um no quadro. Agora eu quero que tu resolvas esse ai, que tu leia isso, o que tá dizendo no caderno. Porque é uma forma de eles começarem a interpretar (problemas com frações). Agora me diz o que diz ai, o que tu podes fazer. Sabe que está funcionando – os alunos estão fazendo.
Formadora: é colocar a pessoa para pensar.
(Prof. A): Exatamente.
(Prof. D): Mas se eles não souberem a tabuada, não sai, não conseguem. Sempre tão errando. Não é a maneira de fazer o cálculo, mas fazer a multiplicação (tabuada).
(Prof. F): É uma discussão que temos na escola. Os alunos estão chegando no 6º ano despreparados, sem os conhecimentos básicos (as 4 operações). Tenho uma turma de 6 ano que não sabem dividir. E agora o problema é teu, tu tens que desenvolver a operação de divisão.
(Prof. C): Ou ainda o professor explicou, mas o aluno não absorveu.
(Prof. F): Mas se toda a turma não sabe dividir daí tu te questiona. É uma questão a ser discutida não reprovar o aluno, não reter. Não deve ser a partir do 6ª ano que ele deve começar a reprovar.

Essas discussões estiveram presentes em todos os encontros de uma maneira ou outra. Sempre é ressaltado pelos professores a dificuldade de relacionamento (não geral, mas presente) dos alunos entre eles e com corpo de professores/gestores da escola. De forma mais impactante, vamos narrar a discussão do encontro 7, pois os professores (inclusive a formadora) chegaram neste dia de formação "com a garganta entalada" de tantas reportagens durante a semana sobre agressões a professores praticadas por pais e alunos nas escolas. Segue na figura 28 duas dessas reportagens.

Figura 28 - Reportagens de professores agredidos no Rio Grande do Sul

Fonte: Disponível em <http://www.correiodopovo.com.br/Noticias/Policia/2018/11/665754/Nove-professores-sao-agredidos-em-Porto-Alegre-em-14-dias> e <https://g1.globo.com/rs/rio-grande-do-sul/noticia/2018/11/07/quarta-agressao-a-professores-e-registrada-em-duas-semanas-em-porto-alegre.ghtml>. Acesso dia 12 dez 2018.

A formadora iniciou a conversa no sentido que os fatos de agressões não devem ser abafados (para não envergonhar ainda mais a classe de professores), mas deve ser conhecido, discutido, refletido e compreendido para ser combatido. Logo, a formadora questionou os professores sobre a realidade vivenciada na cidade, isto é, se os professores tinham conhecimento de agressões (físicas ou verbais). Os comentários estão a seguir.

(Prof. A): Mas já aconteceu agressão física.

(Prof. B): Já aconteceu de até quebrarem a costela da diretora.

(Prof. A): Um aluno atirou uma classe no professor.... momento de silêncio... é bem complicado isso. O aluno me enfrentou e atirou a classe em mim. Mas, claro, daí a escola tomou uma atitude drástica. Mas acontece.

Formadora: qual medida drástica? De retirar da escola?

(Prof. A): Sim.

Formadora: eu acho que o número de professores que são humilhados ou agredidos nas escolas é muito maior do que vem a público. Porque muitas vezes o profe não faz a queixa. Porque ele sabe que não vai dar em nada muitas das vezes ou porque ele não quer se expor mais ainda.

(Prof. A): Ah, mas eu já tomei uma atitude de fazer um BO na polícia. Eu já fiz. Esse ano.

(Prof. B): Eu se me sinto agredida, acuada, eu vou. Eu não fico pobrezinho do aluno.
Formadora: comentou do caso da colega em Canoas que foi estrangulada por uma mãe na escola, não quis denunciar o caso e saiu da escola.
(Prof. A): Mas isso é muito complicado, muito complicado, ...
Formadora: comigo aconteceu um caso dito mais simples, eu fui dar as notas (entrega do boletim) do filho da pessoa e disse de toda a situação do filho.... A pessoa queria me processar, dizer que eu não gostava do filho, a direção me apoiou.... Também nunca mais disse a um pai a realidade nua e crua do seu filho. Comecei a pensar que se o pai não está vendo o que acontece, não sou eu que vou abrir os olhos. Justamente por me sentir acuada.
(Prof. A): Por isso acontece tantas coisas nas escolas e não tem quem fale. E acontece muitas coisas.
Formadora: eu acho que a impunidade incentiva muito para que isso ocorra.
(Prof. B): Pelo menos nas 3 escolas que eu trabalho, é sempre tudo a favor do professor. Até dizem nem que a gente saiba que está saindo errado pela professora, mas é por vocês que a gente fica (claro que não coisas que se tire toda a razão do professor - as vezes a gente fica com raiva, com muita fúria e daí coisas são ditas).
Formadora: não é questão de estar sempre do lado do professor, mas se o professor não se sente seguro/apoio da direção no teu trabalho fica ainda mais complicado.

A outra frente que impacta diretamente o trabalho do professor, dito por eles próprios, são os sucessivos atrasos no pagamento de suas vantagens financeiras. Os atrasos recorrentes nos salários têm causado uma desestrutura não apenas financeira ao professor, como também, emocional interferindo nas suas relações sociais e de trabalho. A falta de expectativas de melhorias tem desmotivado o professorado ao seu próprio trabalho, ao seu conhecimento, se refletindo também neste curso de formação continuada. A seguir apresentamos um relato dos professores quanto a situação exposta.

(Prof. A): O Estado e o Município até o hoje não pagaram o salário do mês, nem parte (era dia 12 de novembro).
Formadora: e como está o salário durante o ano?
(Prof. A): Está atrasado todos os meses, eles pagam no mês, mas não se sabe quando e quanto.
(Prof. B): 20 de outubro recebemos a última parcela do salário do mês de setembro.
(Prof. A): Sabe que eu assisti, sábado que fui ao mercado, eu assisti à indignação de um professor com o negócio do vale alimentação. As pessoas não receberam, estavam contando com aquilo ali (o vale alimentação). Eu presenciei gente, o professor subiu,

ferveu a cabeça dele, ele ficou vermelho de indignação (as pessoas esperavam pelo menos o vale alimentação para alimentar suas famílias já que não tinham o salário e ficaram sem nada. O professor não conseguiu pagar as compras no supermercado.

Formadora: eu vi no Face comentários da falta de salário e desse vale. Mas que já tinha entrado.

(Prof. A): Não entrou não. Só se foi hoje.

Formadora: quanto é?

(Prof. A): 300 e pouco.

(Prof. B): Eu do Estado não recebo em dia também. Daí o que eu faço (eu tenho que pagar escola para o filho, tenho que me alimentar), eu faço um empréstimo do salário.

(Prof. A): Muita gente faz isso.

(Prof. B): Daí conforme tu ganha é descontado, de mim é descontado 45 reais todo o mês. Esse dinheiro todo mês eu perco do meu salário e vai para o banco.

Formadora: E o 13º salário foi pago?

Professores: não e nem sabem quando vão pagar.

(Prof. A): Do ano passado fizemos um empréstimo. Que diz que não foi pago (pela prefeitura) se eles não pagarem a gente vai ter que pagar. Esse ano acho que não vou fazer isso novamente (o empréstimo). Está todo mundo com o pé atrás.

Formadora: A situação vulnerável que a gente tem dentro da escola que não tem o respeito da comunidade muitas vezes já é conflitante para o professor. Mas também essa condição financeira é perturbadora para o profe também, né? Que trabalha e no final do mês não tem teu salário.

(Prof. B): Um aluno me disse: professor a classe de vocês não é organizada, se é outra classe faz uma greve.

Formadora: se fosse no judiciário não tinha mais justiça nesse país.

(Prof. B): O aluno disse me disse: "Eu sou um. Se eu trabalhar e no dia de receber eu não receber no outro dia não vou trabalhar".

Formadora: e de maneira geral vocês não acham que isso impacta e muito no trabalho do profe na escola?

(Prof. A): Claro que impacta, tu não tens mais aquele incentivo, tu não és bem remunerado, porque o que atualmente tá acontecendo é que nós não somos mais valorizados, de forma nenhuma, é uma falta de respeito assim muito grande da família, do aluno, do Governo, tudo. Então é o que tu ficas? Tu ficas desmotivada. Eu estava comentando com a bolsista, os professores aqui que não participam do curso. Porque não vieram mais? Estão desmotivados. Estão desmotivados. Porque eu vou fazer curso? Se eu não tenho respaldo (retorno).

> *Formadora: eu te disse que a banca (durante a apresentação do projeto num evento) perguntou para bolsista porque os profes não participam do projeto? Do meu ponto de vista, eu não tenho dúvidas do porque eles não participam. Eu acho que o professor já tão desvalorizado que ele não quer dar a sua contrapartida. Eu vou estar me doando mais ainda a quem não me retorna em nada (salário, infraestrutura).*
> *Prof. A): Esse curso foi imposto pela secretaria de educação? Não foi Prof. B?*
> *Foi (ambas concordaram).*
> *(Prof. A): Inicialmente todo mundo deveria de vir. Mas o que que aconteceu? As pessoas estão tão desmotivadas que já nem isso querem fazer.*
> *Formadora: acho que faltou a secretaria participar mais. Mas acredito que da parte deles isso ficou prejudicado, pois eles não pagam em dia e não cobram. Assim não arrumam mais problemas, não batem de frente com os profes.*
> *(Prof. B): Sábado de manhã, tivemos pela escola do Estado, uma formação para aprender a mexer no computador, a escola pagou para nós fazermos, fizemos 3h30min de curso, muito bom. Como tem coisa que a gente acha que sabe e não sabe.*
> *Formadora: o problema é que se a gente não praticar, a gente esquece como qualquer outro curso.*
> *(Prof. B): Foi o que a gente falou.*

Diversas vezes percebemos que os professores tinham a necessidade de falar, “colocar para fora” suas angústias sobre as mazelas vivenciadas principalmente no ambiente escolar. Por muitas vezes colocaram que os alunos estão desmotivados, que não querem estudar numa mesmice, porém não estão dispostos a encarar os estudos com mais seriedade e prioridade na vida. Dentro das relações cabíveis, notamos a realidade do aluno como um reflexo das atividades dos professores. Contudo os professores participantes se compreendem como, pelo menos, fazendo o mínimo necessário para “assegurar” a aprendizagem dos seus alunos.

Godino et al (2013), apresenta como um indicador para a dimensão afetiva a motivação inicial pela seleção de casos para análise e implementação de atividades relacionadas com a prática de ensino. Neste sentido, buscamos via os conhecimentos prévios dos professores (visualizados principalmente no 1º encontro) desenvolver os conhecimentos emergentes. As atividades propostas buscavam resolver conflitos semióticos dos professores, apontar diferentes procedimentos e registros que potencializasse a aprendizagem dos alunos.

Por algumas vezes deixamos de atingir/aprimorar os conhecimentos dos professores por sua realidade escolar não o permitir desenvolver diretamente o proposto (o desinteresse dos alunos e suas condições socioculturais, a falta de estrutura das escolas e a sua própria desmotivação). No entanto, ao mensurar esta dimensão, ponderamos que ganhos houveram. Os professores participantes se tornaram mais entrosados, conheceram um pouco mais da realidade de outras escolas e possíveis dificuldades e superações dos colegas. Citamos como exemplo o sistema de avaliação e recuperações paralelas que é proposto pela Secretaria Municipal de Educação (SME), como segue na narração de um professor

> *(Prof. C): Eu prefiro fazer a prova e a recuperação de cada avaliação. Como é uma disciplina que reprova muita gente, as recuperações estão dando a oportunidade de alguns melhorarem suas notas e deixam de reprovar. O conteúdo é visto e revisto para a prova e novamente esse processo ocorre com a recuperação (correção da prova). O aluno estuda mais uma vez. Nesse método, tem me ajudado na recuperação de nota e o aluno estudar um pouco mais. Alguns alunos deixam para estudar apenas para recuperação.... Faz a prova por fazer.... Porque sabe que tem a prova de recuperação. A supervisora me perguntou se acho bom esse método e, de modo geral, pelo menos o número de reprovações diminui. É bem mais trabalhoso ao professor, pois são duas provas para fazer e corrigir. De início, quando surgiu essa proposta, fiquei (ficamos) assustadas... porque é muito conteúdo para vencer e fazendo prova e recuperação diminui o tempo de conteúdo.*

Ainda envolvendo a situação acima, os professores concordam que o atual critério de conceitos (CPA, CSA, CRA) e por área de conhecimento do Estado tem estimulado o aluno a ficar com o mínimo da nota e escolher quais disciplinas vai estudar/dedicar. Exemplo ciências da natureza (física, química e biologia – os alunos deixam de estudar física pois tem conceito melhor em química e biologia). Entre os professores alguns diziam que era uma obrigação dada pela SME que deveria ser feito prova e recuperação de cada instrumento de avaliação. Outros professores disseram que ficou a cargo da escola decidir se faria esse método. Outros afirmaram que não era uma opção. Um professor ficou chocado quando soube que não era uma obrigação e um outro professor disse que não usava esse método de avaliação (na sua escola).

Desse modo, indicamos a dimensão afetiva dos professores nesta formação continuada como **média** e justificamos este porque as discussões a partir dos anseios dos mesmos quanto ao tema de estudo e de sua realidade escolar clama não só por formações a nível de conhecimentos didático-matemáticos ou pedagógicos. Passa por uma reestrutura do sistema escolar, tema não explicitamente explorado nesta formação.

A escolha do objeto de estudo do curso de formação números racionais se deu a partir de uma formação prévia, conforme relatada neste capítulo. Assim, o tema discutido foi de uma demanda dos professores. Cabe salientar, que mesmo o tema sendo de interesse dos participantes, os mesmos, por muitas vezes, não se mostram receptivos às atividades propostas fora do ambiente de formação (como leitura de textos ou organização de atividades). Como também, nas formações, a formadora teve que propor encaminhamentos, pois os professores eram resistentes a elaborar atividades.

Neste sentido, a formadora apenas uma vez propôs um questionário com 3 atividades aos professores. Percebemos que não era uma maneira que os professores estavam interessados/motivados em participar da formação. Logo, a formadora apresentava/sugeria atividades que potencializasse os significados institucionais do objeto de estudo. Notamos que os professores estavam interessados em receber conhecimento/material de apoio, trocar ideias, falar de suas angústias profissionais, não de explorar/construir um conhecimento. Pareceu-nos um reflexo do entorno, crenças e atitudes do ambiente escolar desses professores.

Além disso, as crenças e valores sobre a Matemática e seu ensino dos professores em formação foram mobilizadas quanto a Matemática ser compreendida como uma atividade de resolução de problemas. Entretanto, pelo contexto da escola e pela descrença no papel do professor que os mesmos se percebem, observamos que há um caminho a ser percorrido para que a Matemática deixe de ser simplesmente um algoritmo e passe a ser uma atividade argumentativa e resolvida por diferentes estratégias.

Neste sentido, observamos que os professores foram resistentes em formular atividades ou encaminhamentos para elucidar dúvidas dos alunos (hipotéticas ou não), pois os mesmos carregam possivelmente uma concepção de ensino de Matemática tradicional (expor um conteúdo, exemplos e exercícios de fixação). Buscamos desenvolver uma prática diferenciada, mais interpretativa e argumentativa, até porque o conhecimento referencial adotado propõe a compreensão de um número racional por meio da resolução de situações-problemas.

4.2.4 Dimensão Ecológica

A dimensão ecológica está organizada de forma a contemplar o currículo por meio da Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017) e a grade curricular do município de Itaqui, disposta no Anexo 4. Como também, contemplar as inovações didáticas em formação de professores ligando as tendências da Educação Matemática, o currículo obrigatório e argumentação crítica por meio do modelo CDM.

Neste sentido, a dimensão ecológica desenvolve/aprimora os valores democráticos e o pensamento crítico do professor em suas práticas. Para alcançar essa dimensão, propusemos o curso de formação de uma forma dialogada e com trocas de ideias, oportunizando momentos onde limitações/superações fossem discutidas, assim como conflitos semióticos apresentados pelos professores.

De acordo com os professores participantes, a grade curricular municipal é única para todas as escolas e foi elaborada com os professores em aproximadamente 3 encontros no início da década de 2000. Os professores relataram que houve modificações no texto original por parte da Secretaria de Educação à proposta original dos professores. Contudo é seguida pelas escolas no Ensino Fundamental (1º ao 9º ano).

No encontro 6, foi apresentado pela formadora e discutido com os professores sobre a proposta da BNCC: o trabalho por competências gerais e específicas da área da Matemática, unidades temáticas e a lista de conteúdos (objetos de conhecimento e suas habilidades). Os professores relaram que em suas escolas já tinham realizado um estudo inicial da BNCC na seguinte sistemática: a base foi dividida em tópicos e cada um desses ficou a cargo de um grupo de professores ler e apresentar ao grande grupo de professores na escola. Isso ocorreu em todas as escolas do município. Se o professor participa de mais de uma escola, ele repetiu esse processo em cada escola. Este estudo foi realizado em dois encontros, o primeiro para dividir e ler a BNCC e outro para apresentá-la.

Inicialmente argumentamos com os professores o que fundamenta a BNCC (legislação e fundamentos pedagógicos que orientam) e, então, foi apresentado o trabalho por competências e as 10 competências para a Educação Básica, ilustradas no quadro 26. Destacamos aos professores que as competências e diretrizes são comuns, os currículos são diversos, isto é, os conteúdos estão a serviço do desenvolvimento de competências. A BNCC aponta os conteúdos mínimos, logo o currículo não é único. Ele se adequa ao público alvo (parte diversificada) para atender as competências.

Quadro 26 - As 10 competências gerais da BNCC para a Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. 3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural. 4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar,

acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade. 7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Fonte: BNCC (2017, p. 09)

Durante a apresentação das competências um professor interrompeu, na segunda competência, demonstrando estar indignado/pasmo com a proposta, pois considera longe de uma realidade escolar e longe de um professor ter participado da construção desse documento. Segue a narração.

> *(Prof. A): Eu acho tudo isso muito bonito, mas lá no centro do país que tem as coisas mais na mão.*
>
> *(Prof. B): Até os livros didáticos que vem para nós.*
>
> *(Prof. A): Eu acho muito bonito isso aí (incomodada com as competências que estão longe da realidade da escola) não há meios para desenvolver todas as competências.*
>
> *Formadora: concordo plenamente com sua fala, mas o que é posto aqui não é para ser visto como utópico, mas colocado como o ensino deveria caminhar para (não estar estagnado, ir em busca de), não é algo que simplesmente/facilmente ocorra nas escolas. Pensa que se a gente simplesmente colocar a mesmice da escola estaríamos caminhando em círculos e não na busca por algo melhor e maior. Nessa perspectiva de olhar a BNCC. Cumprir essas 10 competências, nós professores, está além da nossa autonomia de sala de aula.*
>
> *(Prof. B): Assim além dos conteúdos, nós somos preparadas para trabalhar com alunos ditos perfeitos.*
>
> *Formadora: As 10 competências são para formar um indivíduo além do conhecimento específico, do ser solidário, do se conhecer, ser crítico.*
>
> *(Prof. A): Ser um ser humano.*
>
> *Formadora: a escola está preparada para formar esse indivíduo?*
>
> *(Prof. A): Não. De maneira nenhuma.*
>
> *Formadora: Hoje me parece que um entrave é o sistema. Pelas condições nas nossas escolas e do jeito que nossos alunos têm que serem avaliados hoje. Não é simples conseguir/alcançar isso.*

(Prof. A): Por isso que eu sempre falo. O que é o Norte do nosso país, aquelas crianças que não tem uma escola, uma classe. É muito questionável isso aí (alcançar as 10 competências). Como eu te digo isso colocado no papel é muito bonito.
Formadora: Mas, às vezes, até a escola tem condições físicas consideráveis (boas, não ótimas) e também não alcança as 10 competências. Tomem como exemplo uma escola bem conhecida da cidade (que tem infraestrutura adequada) ela consegue vencer/cumprir as 10 competências hoje?
(Prof. A e Prof. B): É difícil.

Do diálogo acima, observamos que os professores se mostram preocupados/confusos com a proposta de desenvolver competências. Os mesmos disseram que já tiveram um contato inicial com o documento, mas não se sentiam seguros com a proposta de ensino/aprendizagem dada. Neste sentido, a formadora ressaltou que trabalhar com competências e habilidades não é algo simplesmente de ser desenvolvido na sala de aula, mas uma proposta bem maior. A Escola e o Município/Estado devem estar engajados. Por exemplo, o Projeto Político Pedagógico (PPP), a grade curricular e a infraestrutura da Escola devem ter uma visão para desenvolver competências.

Na sequência conversamos sobre as oito competências específicas da Matemática no Ensino Fundamental, apresentadas no quadro 27. Cabe destacar, que foi discutido com os professores a proposta de desenvolver um "letramento matemático" durante o Ensino Fundamental conforme indica a BNCC. Como também, foi discutido que há procedimentos que potencialmente são mais ricos para alcançar o dito letramento, como a resolução de problemas, a modelagem, a investigação ou desenvolvimento de projetos. Desse modo, o letramento matemático deve "assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da Matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso" (BNCC, 2017, p. 264).

Quadro 27 - As oito competências da Matemática para o Ensino Fundamental

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático- utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Fonte: BNCC (2017, p. 265)

A seguir apresentamos um diálogo dos professores quanto as competências da Matemática.

> *Formadora: Primeira: ciência viva (pronta e acabada?). Que foi descoberto, inventado.... Estudei plutão com planeta, mas não é mais. Mas a equação do primeiro grau é sempre definida da mesma forma, não muda, ...*
>
> *(Prof. B): Pergunto para ti (formadora), é uma ciência exata?*
>
> *Formadora: do meu ponto de vista é ela é uma ciência exata, mas isso não quer dizer ciência fixa, única, de uma única resposta (mas no sentido que não há apenas uma estratégia de solução) e dependo do que tu estás pensando, um problema pode não ter uma única solução, mas quando for uma equação do primeiro grau, ela tem uma única solução.*
>
> *(Prof. B): E se tu for olhar para os decimais, as dízimas periódicas. No sentido de uma dízima periódica, tu vês que não é exata. Ou que os números são infinitos, ...*
>
> *Formadora: é a perspectiva que tu olhas a matemática. Se tu colocas uma situação problema onde simplesmente o aluno tira dados e põe num algoritmo isso não é resolução problemas (como metodologia). É praticamente um exercício de calcule, claro com a dificuldade de interpretar o problema para descobrir a operação.*
>
> *(Prof. A): E ainda ele pode te dar uma resposta exata ou aproximada (porque ele pode arredondar o número).*
>
> *Formadora: vocês vão ver que aparece nas habilidades a seguir a resolução de problemas e a criação de problemas (tema do próximo encontro). É também uma competência da matemática a resolução de problemas (letramento matemático). Os livros didáticos estão recheados de probleminhas (resolução de problemas) mas isso não quer dizer que tu estás desenvolvendo o letramento matemático. Pode apenas estar aplicando um algoritmo.*

(Prof. A): Interessante isso. Eu estou trabalhando agora com o 7º ano, os problemas de primeiro grau (equação) e o que eu percebo dos alunos: eles não sabem interpretar as coisas, eles não sabem colocar aquilo no papel, então se tu não vais indo (lendo) junto com ele, dizendo o que tem que fazer, eles não conseguem montar aquilo ali. Sabe eu tenho percebido muito isso aí. Como eles tem a preguiça mental de montar, de perceber o que o problema está pedindo. Ou então lá no final do problema se é pra colocar em m², litros, ... eles não conseguem. Eles não conseguem perceber aquilo ali. E isso que eu não sou daquelas que dá pronta as coisas, eu procuro fazer com que eles percebam e construam a ideia deles, mas como eles tem dificuldade.

Formadora: primeiro a senhora acha que passa pela palavra que a senhora colocou preguiça, mas da falta de vontade querer fazer a atividade?

(Prof. A): Como eu vou te dizer: eles querem as coisas prontas, essa é a verdade.

(Prof. B): Complementando... perguntam como inicia, tem que montar a equação.

(Prof. A): Daí o que eu faço: eu leio os trechos e pergunto o que tu achas? Para ver se eles percebem. Ah, mas é bem complicado isso.

Formadora: não é eu chegar na escola hoje e agora vou trabalhar com competências, é mais que isso, é a escola trabalhar com competências. Por exemplo, eu tenho que inserir tecnologias, mas como se na escola o laboratório de informática não funciona.

(Prof. A): Citou uma aluna do 7º ano que não compreende os conteúdos e não tem encaminhamentos e laudo. Como fica? O que fazer com as competências nesse caso?

Buscamos explorar o termo “letramento matemático” com os professores, pois nos pareceu não ser algo familiar. Nesta discussão, novamente os professores realçam as dificuldades/limitações para o desenvolvimento do letramento ao o quanto ele é importante no documento curricular e para uma aprendizagem eficiente dos alunos. A realidade escolar dos professores com alunos com discrepâncias físicas, mentais e emocionais revela o pesar dos docentes em trabalhar via habilidades e a grande quantidade de conteúdos (objetos de conhecimento) por ano.

Na sequência propomos alguns questionamentos aos professores quanto aos objetos de conhecimento e habilidades para o 6º e 7º anos, na unidade temática Números, para ser específico aos objetos tratados durante a formação (números racionais). Algumas questões propostas foram ao comparar a BNCC e a grade curricular do município se havia conteúdo deslocado do ano proposto conforme suas experiências?

(Prof. A): fração geratriz é dada no 7º ano e não no 8º ano.

Formadora: ênfase na unidade temática número é bem menor no 8º e 9º anos do que no 6º e 7º anos. Deixa a aritmética para a álgebra.

Formadora: números irracionais no 8º ano. Na BNCC é no 9 ano.

Formadora: ressaltou os significados das frações no 6º e 7º anos (aumenta a complexidade, a quantidade de significados)

(Prof. B): no 7º ano tem conversão de moedas. Na época da copa fizemos o projeto interdisciplinar da copa (todas as disciplinas) e no 9º ano trabalhei com as conversões de moeda, a mais cara (da Arábia Saudita), os alunos pesquisaram e trouxeram informação para a sala de aula.

(Prof. A): porcentagem está lá no 8º ano e damos no 7º ano.

Formadora: mas lá no 6º ano tem porcentagem, em todas as séries falam de porcentagem (é um espiral, aumenta a complexidade). No 6º ano, fala em operações com naturais com habilidades em resolver e elaborar problemas. O quanto já é difícil resolver problemas com os alunos e ainda agora deles elaborarem os problemas.

(Prof. B): é mesmo.

(Prof. A): isso é muito difícil, eles não conseguem montar a ideia (tirar dados dos problemas), imagina elaborar.

Formadora: também na ideia de elaborar, pode ser reescrever o problema, tirar algumas informações ou alterar dados do problema. Realmente, é, pelo menos, desafiador ao professor trabalhar desse modo.

(Prof. B): só em trabalhar com o calcule eles já têm dificuldade, te perguntam como se faz?

(Prof. A): (comentou que chama os alunos no quadro um por um para ler o enunciado do problema e tirar os dados). É um tempo enorme gasto com isso, mas sei que dessa forma estão lendo o problema.

(Prof. B): pode ser um gasto de tempo enorme nesse momento, "eu não acho perda de tempo, eles vão memorizar, não vão esquecer tão fácil", mas facilita os próximos exercícios propostos.

(Prof. A): se eu não fizesse isso, eles não iriam conseguir.

(Prof. B): os outros observam o que o colega está fazendo, para não cometer o mesmo erro.

Formadora: nos conteúdos programáticos do município, está bem destacado números e álgebra a partir do 8º ano e geometria aquela frase no final (não se sabe o quanto ele insere desse conteúdo e exatamente o que) e na perspectiva de trabalhar com essas 5 unidades temáticas por ano como trabalhar tudo?

(Prof. A): mas eu acho que é gradativo, de série para série, ano a ano, daí tu vai aprofundando, vai avançando. Eu penso assim.

Formadora: mas a gente sabe que é difícil chegar ao final do ano e ter trabalhado toda a parte de número do 6º ano.

As professoras concordaram. Depende dos alunos também o conseguir avançar (complementaram).
Formadora: o que eu pensei é quando tu tiveres trabalhando um conteúdo já agrega outro. Como a professora comentou da equação do 1 grau (une a equação com figuras geométricas, área, perímetro).

Um ponto que a formadora tentou questionar com maior ênfase foi a frase disposta na grade curricular do município (6º ao 9º ano) ao dizer "OBS: Geometria deve ser aplicada em todos os conteúdos dos trimestres, com inserção nos conteúdos programáticos". Como podemos observar no Anexo 4 não há conteúdos específicos de geometria para o 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. A formadora questionou os professores como a geometria é "encaixada" no 6º e 7º anos? Obtendo como resposta

(Prof. A): Sim tu vais adaptando aos conteúdos, por exemplo, lá na parte das equações, posso usar a geometria lá. Lados das figuras planas, área, perímetro. E daí da série específica eu busco em livros a parte de geometria (mesmo).
Formadora: mas como a do 6º ano não dá o mesmo conteúdo do 7º ano em geometria (áreas de figuras por exemplo).
(Prof. A): É que a gente tem que adequar ao conteúdo da série, daí não dá repetição. [ela não acha "estranho" a geometria ser posta desta maneira].

Um contraponto que fazemos em relação à temática geometria na grade curricular do município é que a mesma está muito aquém da proposta da BNCC, seja na listagem de conteúdos e complexidade dos mesmos ou habilidades para cada ano letivo. Em outros momentos da formação os professores relataram que os alunos apresentam dificuldade em geometria e em unidades de medida. Entretanto não relacionam essas dificuldades com a forma de organização e planejamento do pensamento geométrico proposto no currículo.

(Prof. B): os alunos não sabem usar a régua, como se mede um cm? Por onde se começa? Do zero ou do um?
(Prof. A): eu notei bastante dificuldade também nas figuras geométricas, eu lembro que coloquei um probleminha para eles fazerem, 7º ano, sobre os lados, qual era o perímetro de tal figura (e era de um triângulo) e faça o desenho da figura. E daí me desenharam um retângulo e não o triângulo. Mas eu digo como será que não tiveram esse conhecimento antes? Olha a diferença de um triângulo para um retângulo.
Formadora: não observam nem o que a palavra significa.

> *(Prof. A): mas olha eu fiquei bem surpresa quanto a isso. Daí a gente já tem que voltar e retomar isso.*
>
> *(Prof. B): mas não é que não tenham o conhecimento, eles fazem de qualquer jeito.*
>
> *(Prof. A): também, mas é uma rateada boa, né.*

Gostaríamos que nesse encontro sobre a temática currículo (BNCC e grade curricular) tivéssemos mais professores participando (havia apenas 2), pois poderia ser uma oportunidade de discutir e compreender a proposta via competências, comparar um instrumento com o outro e ir até suas escolas com uma pré-discussão entre os professores sobre o todo (da proposta) e possíveis meios de aplicação.

Ao finalizar o encontro pedimos aos professores que apontassem pontos positivos e negativos para a BNCC (BRASIL, 2017). Até para podermos perceber o quanto pode esclarecer e ampliar os conhecimentos dos professores sobre o documento. Os professores não apresentaram pontos negativos, apenas uma fala "*é só a gente tentar fazer o que está aí*". Os pontos positivos seguem abaixo.

> *(Prof. B): A proposta dos alunos pensarem, com que raciocinem..., mas a gente sabe que é uma coisa difícil de ser alcançada...*
>
> *(Prof. A): Eu acho que tudo é positivo, o que está ali é tudo lindo e maravilhoso, mas o problema é a realidade. Como eu disse, cada escola é diferente, cada aluno é diferente, então tu tens que trabalhar de forma que possa contemplar todos.*
>
> *(Prof. B): Na mesma sala de aula tem muitos diferentes (alunos).*
>
> *(Prof. A): Eu vi uma reportagem de um professor (comentando a BNCC) que o professor é que tem que fazer com que o aluno aprenda de qualquer jeito. Eu não concordo com isso. Tu preparas uma aula, tu tentas atingir todos eles, mas a gente não consegue atingir todos, né. Tu não podes fazer uma mágica, assim, e dizer toda a turma aprendeu. De maneira nenhuma.*

Para finalizar o encontro, a formadora propôs uma pequena retomada da proposta da BNCC e acrescentou que entendemos que a BNCC só vai entrar em uso realmente na sala de aula quando os Estados/Municípios se organizarem a sua implementação. Mas estes sabem que essa implementação não é somente na grade curricular, passa também pela formação dos professores (inicial e continuada), por momentos de reflexão e compreensão do que está escrito (o que é trabalhar por competências) e a renovação dos materiais didáticos ao se adaptarem a nova proposta (os livros didáticos são o principal recurso disponível aos professores).

Como próximo passo neste estudo tomamos como referência a importância da dimensão ecológica do CDM na prática do professor e propomos não apenas (re)conhecer o currículo que nos cercam, mas dos entornos e do pensamento crítico do professor, em outras palavras,

> os professores devem ter conhecimento do currículo de matemática do nível que considera o estudo de um objeto matemático, as relações que possam existir com outros currículos, as relações que tais currículos têm com aspectos sociais, políticos e econômicos que apoiam e condicionam o processo de ensino e aprendizagem (PINO-FAN; ASSIS; CASTRO, 2015, p.1436).

Desta forma, no encontro 4, após trabalharmos com o material manipulativo Frac Soma 235, buscamos refletir com os professores os conhecimentos dos mesmos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Neste sentido, buscamos explorar um olhar crítico do professor na sua prática de ensino. Como também, o CDM ser visto como uma inovação didática na formação continuada de professores.

No intuito de provocar o professor e do mesmo não se sentir falando apenas teoricamente, nos reportamos a duas situações desenvolvidas com o material Frac Soma 235 para abordar o CDM e via essas situações, apresentadas no quadro 28, identificar e analisar os conhecimentos mobilizados.

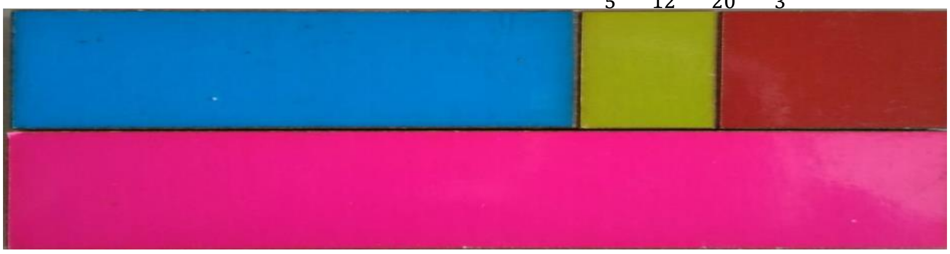
Quadro 28 - Situações propostas por meio do material Frac Soma 235

Atividade 3 – Professor, elabore uma atividade usando este material para trabalhar o conceito de equivalência de frações.

Atividade 4 – A seguinte atividade foi proposta aos alunos de 7º ano para trabalhar soma de frações com denominadores diferentes:

"Busque no material peças de **tamanhos diferentes** que recubram a peça que representa 1/3."

Uma aluna apresentou como resposta $\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{3}$.



Uma aluna questionou como a colega tinha certeza que seu procedimento (cálculo) estava correto? A colega respondeu que fez a soma na calculadora e obteve 0,33... que é igual a 1/3. Como o professor poderia encaminhar a solução dessa questão envolvendo frações equivalentes?

Fonte: excerto do portfólio.

As duas atividades elaboradas pela formadora reportam a importância e necessidade dos conhecimentos do professor, sejam eles do conhecimento específico matemático como nos tipos de representações, significados, equivalência e unidade ou, então, em compreender a dúvida/pensamento de um aluno e elucida-la. Desta forma, elencamos com os professores os seguintes pontos

- O professor deve ser capaz de mobilizar diversas representações de um objeto matemático.
- Resolver a tarefa mediante distintos procedimentos.
- Vincular o objeto matemático com outros objetos matemáticos de nível educativo que se ensina ou de níveis anteriores ou posteriores.
- Compreender e mobilizar a diversidade de significados parciais para um mesmo objeto matemático (que integram o significado holístico para este objeto).
- Proporcionar diversas justificativas e argumentos, e identificar os conhecimentos postos em jogo durante a resolução de uma tarefa matemática.

De modo geral, os professores observam que os pontos elencados normalmente são praticados e pertinentes no ambiente de sala de aula. De forma que retomamos com os professores a atividade 3, se ao elaborarem a atividade teriam levado em consideração os objetos presentes na situação e suas representações, as dificuldades rotineiras e os conhecimentos prévios dos alunos, o tempo que dispõe para trabalhar e os recursos empregados e a organização das interações e normas entre professor/aluno/recurso para otimizar a aprendizagem.

A expectativa era de via a atividade supracitada relacionar com o processo de ensino dos números racionais. Os professores durante essa conversa se mantiveram ouvindo atentamente, mas passivos. De modo que demonstravam ser algo óbvio, entretanto não algo simples de ser posto em prática. As dificuldades apontadas pelos professores, em diferentes momentos da formação, vão desde que não existe alunos homogêneos ou dito perfeitos e a realidade é muito diferente da proposta teórica. Como também, cada vez mais é recorrente a defasagem de conhecimentos e a desmotivação do aluno o que impacta fortemente a proposta de trabalho do professor.

Além disso, foi apontado o tempo insuficiente dedicado ao estudo dos números racionais (notam que de um ano para outro as dúvidas dos alunos persistem ou aumentam) no Ensino Fundamental e a infraestrutura precária das escolas, limitando as possibilidades de trabalho do professor.

Sobretudo os professores realçam as dificuldades às possibilidades no ambiente escolar. Em suas falas apontam que a realidade escolar está longe da teoria e que a teoria está longe da realidade escolar. E justificam que quem está inserido na escola, principalmente na sala de aula, tem um outro olhar e expectativa com a educação escolar (brasileira). São enfáticos ao dizer que a Universidade não dá o suporte (conhecimento) necessário e suficiente ao professor e isto só vai ser preenchido no ambiente escolar, com a prática.

Não discordando totalmente dos professores, mas questionamos com eles que existem práticas e práticas, professores e professores para se dizer que o conhecimento necessário e suficiente do professor só é preenchido no ambiente escolar. O que eles reconhecem e ponderam é que o sistema educacional brasileiro “engole” o professor (salários baixos, sem/pouco investimento tecnológicos, sistema de avaliação incompreendido e ineficaz). Nestas condições, refletir sobre o CDM traz à tona muitas angústias dos professores e um espaço menor para discussão de melhorias, adaptações e aprimoramentos.

Nesse sentido, indicamos a dimensão ecológica dos professores nesta formação continuada como **média** e justificamos este pelo número limitado de professores participantes durante o desenvolvimento de temas importantes para esta dimensão como a discussão da BNCC e grade curricular do município e o estudo do CDM não oportunizando discussões mais aprofundadas e com um real impacto no ambiente escolar. Aos professores presentes, foram discussões válidas, importantes para conhecerem e compreenderem as competências dispostas no documento curricular, apontar algumas alterações de objetos de conhecimentos e a forma de espiral, aumentando a complexidade dos objetos no decorrer dos anos do Ensino Fundamental.

Vale ressaltar que os objetos de conhecimento, sua implementação e avaliação durante o curso correspondem ao currículo pré-determinado conforme indica o GVID-IDM quanto a faceta ecológica. Como também, buscamos alinhar com a proposta da BNCC ao explorar as competências e habilidades referentes ao objeto matemático número racional nos anos finais do Ensino Fundamental.

Além disso, o ambiente de formação continuada na perspectiva do CDM, alinhado com a ideia de promover uma maior idoneidade didática no processo de ensino dos números racionais, foi proposto o estudo do próprio GVID-IDM para abordar o tema inovações didáticas na formação de professores. Visto que se o professor adquire competência no seu uso pode ter facilitada sua tarefa de planejar, implementar e avaliar (GODINO, 2017). Nesse estudo, os professores destacaram as mazelas do ambiente escolar e as dificuldades de implementar o guia.

Nesse sentido, a média idoneidade ecológica, pois o alcance das discussões e compreensão de inovações didáticas e adaptações curriculares foram limitadas. Entretanto, no balanço com as possibilidades oportunizadas no curso como as trocas de experiências e a forma dialogada de propor e encaminhar as atividades, observamos que aprimoramentos aconteceram para compreender/ver a Matemática como uma ciência viva, argumentativa e possível de ser construída juntamente com os alunos no ambiente de sala de aula e fora.

4.2.5 Dimensão Cognitiva

A dimensão cognitiva está organizada de forma a contemplar o ganho na aprendizagem de conhecimentos didático-matemáticos pelos professores. Deste modo, a dimensão, está ligada a superação de dificuldades de ensino do professor e como ele acomoda os conhecimentos emergentes durante a formação.

Durante o segundo encontro, após explanação e discussão dos significados dos números racionais e desenvolvimento das atividades, propomos as questões, ilustradas nos quadros 29 e 30, a fim de que os professores elaborassem atividades a partir do entendimento dos estudos supracitados e de acordo com a realidade escolar que estão inseridos. Além disso, tinham o cunho de investigar a adequação e a capacidade dos professores em elaborar problemas, as técnicas empregadas, como exploram os significados, as representações, a vinculação do número racional a outros objetos matemáticos e linguagem empregada.

Quadro 29 - Desenvolvendo a faceta cognitiva do professor – parte 1

Situação: Alberto tem R$30 e pretende dividir em partes iguais com os amigos que o ajudarem na limpeza do pátio da sua casa. a) Se Alberto dividir o valor com dois amigos, ou seja, entre 3 pessoas, que quantia cada um receberia? b) E se Alberto dividir com mais pessoas, por exemplo, com 5 ou 6 amigos, quanto cada um receberia? c) Qual questionamento poderia ser feito ao aluno para que ele perceba que quanto mais amigos, menor é o valor que cada um ganha? Tente relacionar as frações (parte recebida) com o valor a receber. d) Considere que Alberto vai dividir os R$ 30 com Luca e Ana. Porém, Alberto dará sua parte para o Luca. Que fração representa, então, o valor que Luca receberá em relação ao valor total? e) Quais encaminhamento poderiam ser adotados pelo professor para questionar que embora fosse dividido entre vários amigos, o todo (R$30) não se altera?

Fonte: excerto do portfólio.

O item a) foi respondido pelos professores pelo quociente $\frac{30}{3} = 10$ reais para cada pessoa. Um professor apenas mencionou o emprego de regra de três, sem desenvolver o raciocínio. O item b) novamente os professores indicaram 30 dividido por 5, R$ 6 para cada pessoa e 30:6 = 5 reais para cada pessoa. O Prof. C mencionou, "*logo quanto mais pessoas menos cada um receberá*". O item c) apenas o Prof. C apresentou questionamento "*se Alberto dividir com 3 amigos quanto cada um receberia*? *E se dividir com 10 amigos*?" No intuito do aluno realizar a comparação entre as divisões. O item d) os professores apresentaram como resposta $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\ ou\ \frac{10}{30} + \frac{10}{30} = \frac{20}{30}$, apenas o cálculo, sem um raciocínio desenvolvido. O item e) apenas o Prof. A apresentou um encaminhamento "*a quantidade permanece a mesma o que aumenta é o número de pessoas. Consequentemente o valor diminui. Mostraria através de exemplos*".

A formadora também apresentou suas sugestões para as atividades do quadro 29. Para o item c)

- Na primeira situação Alberto dividiu em 3 partes iguais os R$30. Logo, cada um recebeu a terça parte do valor, correspondendo a R$ 10. Quando ele divide entre mais amigos o que ocorre com o valor recebido por cada pessoa?

- Como o valor está dividido em partes iguais (o número de partes depende da quantia de amigos), isso indica uma fração do valor (R$30). Como podemos indicar essas frações para os itens a) e b)?

- Em qual situação Alberto ganharia mais dinheiro? E em qual ganharia menos dinheiro?

Para o item e), a formadora sugeriu os seguintes encaminhamentos (observe que a imagem auxilia na resolução das atividades):

- Se Alberto dividir o valor entre 6 pessoas, cada uma recebe 5 reais. Duas pessoas juntas recebem 10 reais. E 5 pessoas juntas? E 6?

- O que representa $\frac{7}{6}$ nesta situação?
- O que representa a fração $\frac{1}{5}$ nesta situação? E $\frac{5}{5}$?

Quadro 30 - Desenvolvendo a faceta cognitiva do professor – parte 2

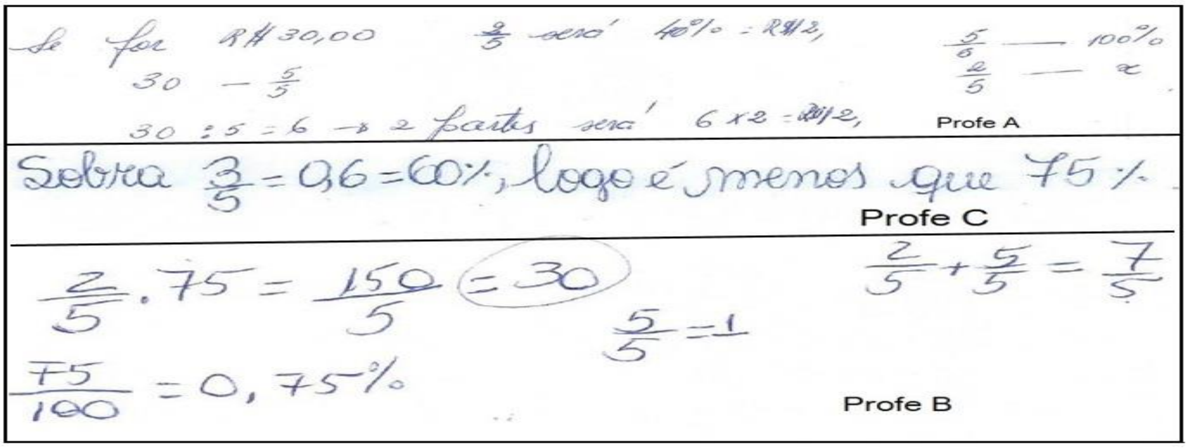
f) Elabore duas situações análogas a dada, porém uma mais simples e outra mais complexa. g) Caso Alberto queira guardar $\frac{2}{5}$ do seu dinheiro na poupança, o valor que sobra é mais ou menos que do que 75% do que tem? Quais encaminhamentos daria ao aluno para ele compreender a porcentagem citada? h) Quais os conhecimentos/habilidades prévios os alunos devem ter para resolver as questões da situação proposta pelo professor? i) Quais conhecimentos podem ser desenvolvidos via essa situação? j) Crie duas situações-problemas envolvendo a fração $\frac{2}{5}$. k) As situações criadas acima para a fração $\frac{2}{5}$ possuem significados/interpretações que as distinguem? Quais encaminhamentos daria ao aluno para que ele percebesse os diferentes significados dos números racionais nas situações que você elaborou?

Fonte: excerto do portfólio.

Apenas o Prof. B apresentou uma situação análoga solicitado no item f), sendo "*Augusto tem R$50 e pretende dividir em 10 partes iguais se seus amigos o ajudarem a montar um projeto. A) Se Augusto dividir com 5 pessoas, que quantia cada uma receberia"? B) E se Augusto dividir com mais pessoas, por exemplo, com 10 pessoas, quanto cada uma receberia*"? A formadora também apresentou suas sugestões para as atividades do quadro 30. Para o item f), como situação simples: Calcule $\frac{1}{3}$ de 30. E como situação complexa: Alberto está organizando um campeonato de futebol que vai premiar as 3 primeiras colocações com o total arrecadado com as inscrições ao campeonato. Pensou ao primeiro colocado dar dois quintos do valor arrecadado. Ao segundo colocado um terço do valor arrecadado e ao terceiro colocado um quarto do valor arrecadado. Ana ao saber da proposta de Alberto, o alertou que seu cálculo não estava correto. Qual erro Alberto pode ter cometido?

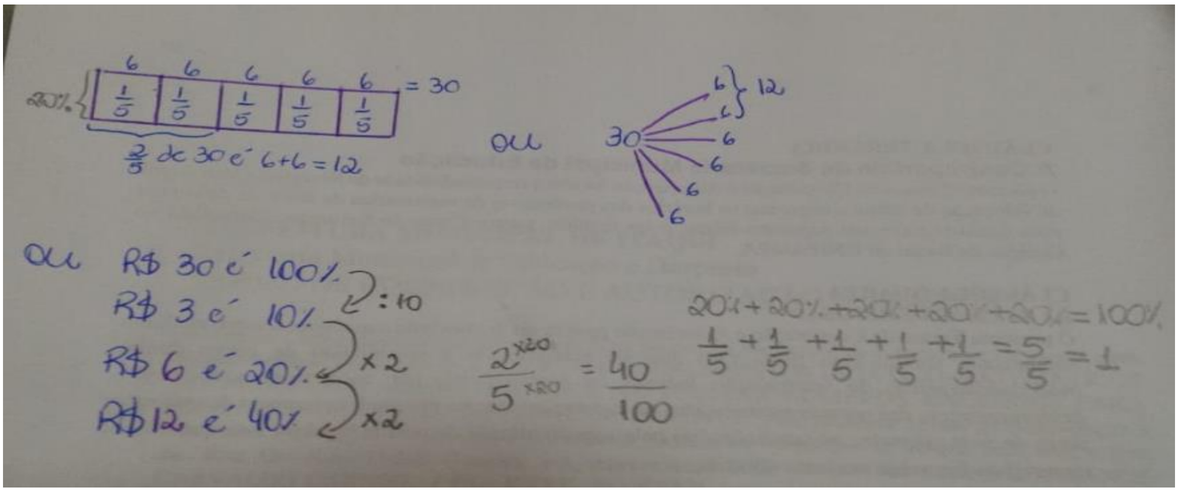
O item g) foi respondido usando diferentes procedimentos e registros. O Prof. A trabalhou com a representação fracionária e porcentagem (visto que o exercício solicita um percentual) e o emprego da regra de três. O Prof. C, optou em trabalhar com o significado de parte/todo, determinando a fração três quintos e trabalhando com trocas de registros (fração, decimal e porcentagem). O Prof. B não interpretou corretamente a atividade. Esses registros estão ilustrados no quadro 31.

Quadro 31 - Solução do item g) pelos professores



Fonte: da pesquisa.

Para o item g), a formadora sugeriu o significado de parte/todo (as duas situações acima da imagem), ou por proporção usando porcentagem ou por frações equivalentes (dois quintos equivalem a quarenta centésimos). Tendo os seguintes questionamentos: Se R$30 é o todo de Alberto, isso representa 100% do valor. A metade, 50%, corresponde a? E a metade da metade, isto é, 25%? Assim, a sobra do dinheiro de Alberto é mais ou menos que 75%?; A fração dois quintos é exatamente a metade do valor que Alberto possui? Que fração corresponde a 80% do valor? E a fração cinco quintos representa o que?



Fonte: da pesquisa.

Os professores não responderam ao item h) por não terem respondido ao item f). Desta forma, discutimos as situações iniciais propostas nesta atividade (itens a, b e c). Sendo os conhecimentos prévios: a operação de divisão, sistema monetário, tabuada; Para o item i) os conhecimentos desenvolvidos: reconhecer a fração como uma divisão, quanto maior o denominador menor é a parte, a compreensão de todo e parte, compreensão de porcentagem simples (25%, 50% e 100%), conversão de fração para porcentagem.

O item j) foi respondido por dois professores, sendo "*Paulo está de aniversário e convidou seus coleguinhas para compartilharem esse momento. A mãe confeccionou 200 docinhos. Mas pensando na quantidade de ser feita considerou* $\frac{2}{5}$ *para cada. Quanto representa a fração em relação aos docinhos*?" (Prof. A) e outras duas situações criadas pelo Prof. C "*Augusto quer dividir em duas partes iguais os seus* $\frac{2}{5}$ *de poupança, mas ainda há uma sobra de 22% do que tem. Qual será a forma mais correta*?; "*Caso Augusto queira doar* $\frac{2}{5}$ *do seu dinheiro na poupança, o valor que sobra é mais ou menos do que 35% do que tem? Quais encaminhamentos seriam, neste caso, para compreender a porcentagem*?".

A situação proposta pelo Profe A pode ser desenvolvida pelos significados de parte/todo (uma parte é $\frac{200}{5} = 40$ docinhos, duas partes 80 docinhos) ou de operador ($\frac{2}{5}.200 = 80$ docinhos) considerando que a pergunta fosse quantos docinhos representa a fração dois quintos. Neste sentido, a porcentagem de doces às crianças é inadequada. As questões do Profe C, trazem mais dúvidas quanto a elaboração do problema (enunciado), pois a divisão em partes iguais de $\frac{2}{5}$ é $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ ou 20% e 20%, logo uma sobra de 22% do quem tem causa incompreensão. A segunda questão elaborada pelo Profe C é bem semelhante à proposta pela formadora, porém causa estranheza dizer que irá doar um valor a poupança ou invés de depositar um valor.

Os professores não se sentiram a vontade de compartilharem as situações criadas, ficando o registro no seu portfólio. Para contornar a situação e, ainda, assim, buscando desenvolver os conhecimentos dos professores, a formadora sugeriu ao item j) as situações abaixo expostas. Os mesmos as consideraram situações pertinentes no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais. Na primeira situação ficou claro, a todos, o significado de parte/todo explorado e a segunda questão trouxe mais dificuldades em reconhecer os significados explorados (parte/todo ou operador) e procedimentos para a solução (dificuldades apontadas são a quantidade ser ímpar e não divisor de 5). Nesse caso, parte/todo é explorado, pois o aluno deve reconhecer que dois quintos não é a metade (sobra três quintos), assim como, dois quintos estão operando sobre uma quantidade, 11 vereadores. A questão tem diferencial por trabalhar com grandezas discretas e não inteiras.

- O finado coronel Francisco deixou $\frac{2}{5}$ de sua fortuna para a viúva Amália e $\frac{3}{5}$ para o museu da cidade. À Julia, sua sobrinha-neta, deixaria o restante da sua fortuna. Julia não ficou satisfeita com a divisão. Por quê? Quanto ela recebeu?

- A câmara de vereadores de Itaqui é composta por 11 vereadores. Para aprovação do projeto de melhorias na escola Todos Alegres são necessários $\frac{2}{5}$ dos votos. Esse número de votos é mais que a metade da quantidade de vereadores? Exatamente quantos votos são necessários para aprovação do projeto?

As respostas dos professores às atividades propostas nos quadros 29 e 30 evidenciam um conflito cognitivo (em relação ao epistêmico) quanto às habilidades de argumentação e relações necessárias para justificar um procedimento ou uso de conceitos ou criação de situações-problemas. Visto que na dimensão epistêmica discutimos sobre os processos (algoritmo, interpretação, conceito), elementos linguísticos, procedimentos e argumentos quanto a compreensão do número racional via situações contextualizadas.

No encontro seguinte (terceiro) foi retomado os significados dos números racionais e foi, então, que as dúvidas começaram a surgir. A formadora retomou os significados via a fração 2/5 como parte/todo, quociente e operador via os seguintes exemplos respectivamente: Haverá prova se 2/5 dos alunos comparecerem; quero dividir 2l de refrigerante entre 5 pessoas, quanto cada um receberá?; Há 20 professores presentes, dos quais 2/5 são mulheres. Quantas mulheres há? Onde desencadeou o seguinte diálogo:

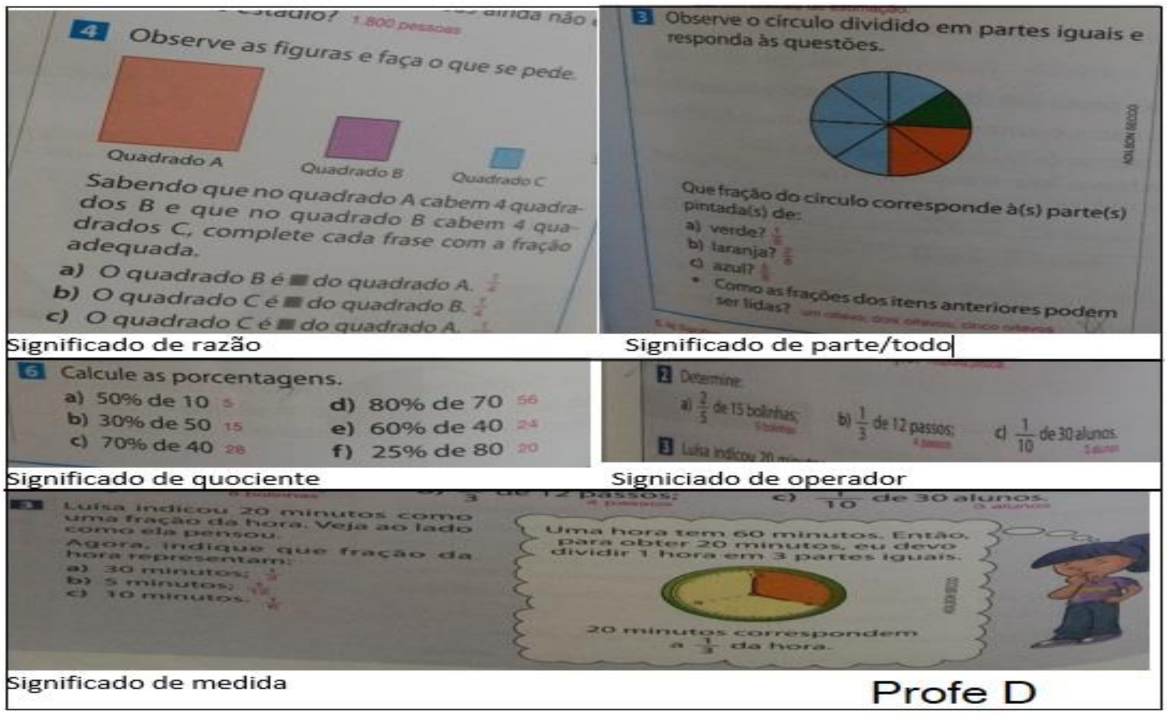
> *(Prof. E): E no 6 ano trabalharia mais com a primeira ideia (parte/todo) e mais adiante com a terceira (operador)? Ou posso trabalhar os dois juntos?*
>
> *Formadora: O que eu venho propor aqui é justamente isso. Os alunos compreendem melhor ou totalmente um número racional quando ele transita pelos seus diferentes*

significados (parte/todo, medida, quociente, operador e razão). Já foi exemplificado 3 significados (parte/todo, quociente e operador). Por exemplo, para razão, a velocidade média 2 km por 5h. A fração 2/5, neste caso, não pode ser vista como parte/todo.
Professores: Sim, isso mesmo.
(Prof. E): Mas a minha dúvida é essa: o que eu posso trabalhar com eles? Eu mostro todos esses significados e eles vão escolher qual entendem melhor? Isso confunde.
Formadora: Eu estou pensando em resolver esse exercício aqui (Há 20 professores presentes, dos quais 2/5 são mulheres. Quantas mulheres há?) Por operador (usamos a ideia 20 vezes 2/5), mas o aluno pode pensar em parte/todo (organizar os professores em 5 grupos de 4 pessoas e considerar dois grupos – ideia de parte/todo). A gente propõe os diferentes significados para o aluno para que ele possa perceber que o número racional está em diferentes situações e que em cada situação eu posso o interpretar de uma maneira diferente. Mas como a senhora diz, eu tenho como dizer para o aluno agora tu vais interpretar esse problema como operador e esse problema por parte/todo? Ai, não. Aí é difícil, tu não coordenas o pensamento do aluno.
(Prof. E): É porque tem assim: um aluno entende melhor pela ideia de parte/todo e outros pelo operador. Cada um tem um modo de entender. Ah, eu acho melhor. Eu já acho melhor assim.
(Prof. D): Quando a gente ensina matemática, a gente tem que tentar pôr no cotidiano do aluno.
(Prof. E): Trabalhando tanto com o livro didático ele não abre tanto o nosso horizonte. Deixa muito "funilador" (em uma única linha).

Percebemos que os professores não têm o hábito de pensar nos números racionais via seus significados. Contudo não podemos dizer que não os empregam na sua prática de ensino, mas que isso não ocorre, pelo menos, de forma explícita, com clareza. Esta situação se tornou visível, também, na atividade no livro didático, onde os professores apresentaram muitos erros ao classificar/compreender os exercícios quanto ao significado do número racional explorado.

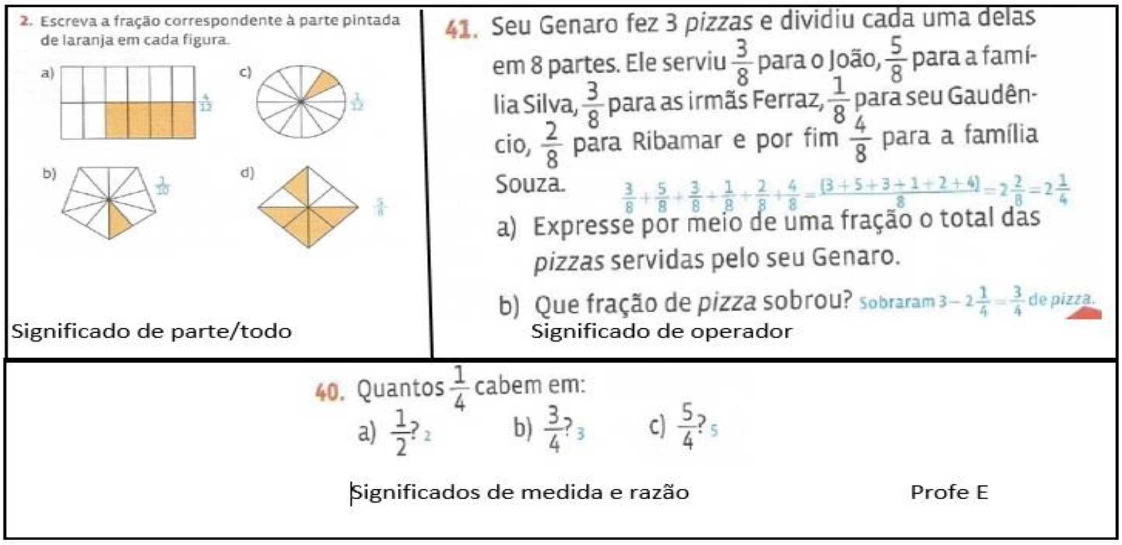
A atividade supracitada consistia em durante as observações e análise proposta de um livro didático (aprovado pelo PNLD 2017 a 2019, poderia ser o próprio livro adotado na sua aula, pois foi solicitado de um encontro para outro que trouxessem seus livros de 6º e 7º anos) que identificassem exercícios que envolvessem os diferentes significados do número racional (parte/todo, quociente, medida, razão e operador). Se caso encontrassem, citassem um exemplo de cada significado. Os exercícios obtidos estão apresentados nos quadros 32, 33 e 34.

Quadro 32: Exercício do livro didático do 6º ano para os significados do número racional para o Prof. D



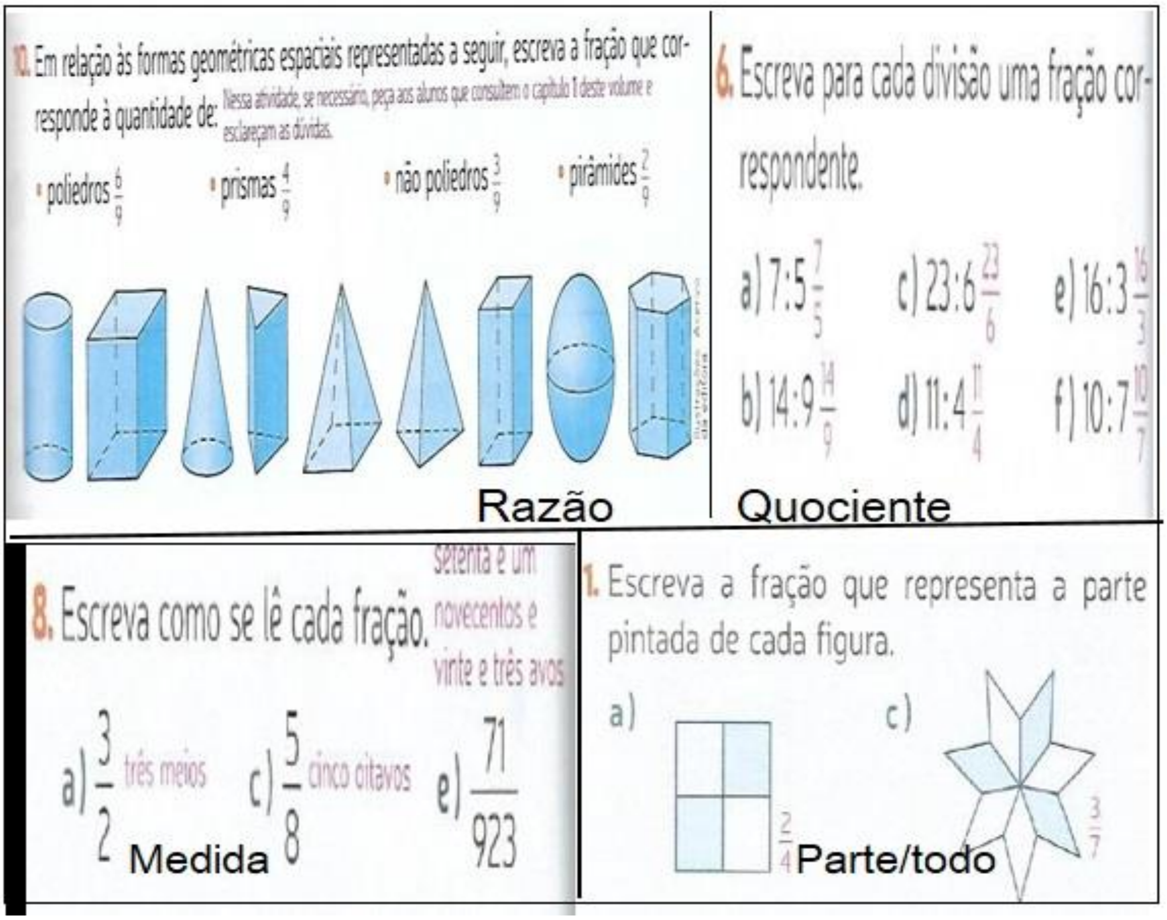
Fonte: da pesquisa.

Quadro 33: Exercício do livro didático do 6º ano para os significados do número racional para o Prof. E



Fonte: da pesquisa.

Quadro 34: Exercício do livro didático do 6º ano para os significados do número racional para o Prof. B



Fonte: da pesquisa.

O Prof. A não exemplificou os exercícios, propondo como encaminhamento: "*Sim, através de figuras onde é possível a visualização da parte e todo. Da equivalência, por exemplo, onde pode-se demonstrar aos alunos que os números, na sua proporção, correspondem o mesmo valor*".

Dos exercícios selecionados pelos professores para o significado parte/todo, todos se adequam e são situações normalmente exploradas com os alunos visto que esse tipo de exercício é comum nos livros didáticos. Pelo domínio apresentado pelos professores, inferimos que esse significado é explorado com os seus alunos. Nos estudos apresentados no referencial teórico apontamos que normalmente esse é o primeiro (se não o único) significado explorado dos números racionais.

Propomos essa atividade cientes que o livro didático é um apoio/recurso constante ao trabalho do professor. Desse modo, tentamos vincular os estudos dos significados dos números racionais e o transitar entre eles para uma compreensão mais ampla deste conjunto numérico com atividades do livro didático já trabalhada (ou conhecida) pelos professores.

O transitar entre os significados, exceto o parte/todo, demonstrou maior limitação dos professores. O Prof. D apresentou concepções errôneas no significado de quociente (compreender/identificar que $\frac{a}{b} = a{:}\,b$). No quadro 32, os exercícios 6 e 2 são análogos, apenas variando a representação de porcentagem para fração do número racional, sendo no primeiro exercício um quociente e no outro operador a classificação dada pelo professor. Nos dois exercícios espera-se que o aluno opere sobre a quantidade dada (significado de operador) ou, então, tome o todo e o número de partes solicitadas (significado de parte/todo). O Prof. E não apresentou exemplo para o significado de quociente e o Prof. B apresentou um exemplo simples e clássico para este significado.

O significado de medida (compreender a unidade de medida ou iterações dela) também apresentou concepções errôneas pelos professores. Vale ressaltar que um exercício pode ser compreendido/resolvido por diferentes significados (por exemplo os exercícios 2 e 6 supracitados). E, ai, se dá a riqueza do número racional que pode ser compreendido de diferentes formas. O exercício proposto pelo Prof. D ao significado medida é também um desses casos (quadro 32, exercício 3). A imagem do relógio, propõe a unidade de medida de 20 minutos ou um terço de hora. Entretanto, o aluno pode pensar em parte/todo e responder aos itens a, b e c do exercício como $\frac{30}{60}, \frac{5}{60}$ e $\frac{10}{60}$. Nos chama a atenção o exemplo dado pelo Prof. B ao significado de medida, pois o exercício apenas solicita a escrita por extenso da fração. Como também, do Prof. E (exercício 40) ao indicar o exemplo como medida e razão simultaneamente. Como medida completamente compreensível, a medida um quarto cabe quantas vezes em uma quantidade. Porém, dizer que neste exercício o significado de razão está sendo explorado torna-se inconsistente sua compreensão dos dois significados.

Além dos significados do número racional, foram propostas atividades aos professores que retomassem e ampliassem seus conhecimentos matemáticos das concepções fundamentais, neste caso, da equivalência de frações via o material concreto Frac Soma 235. Essas atividades foram descritas na dimensão mediacional. A fim de identificar e compreender os conhecimentos didático-matemáticos dos professores solicitamos aos mesmos que, após realizarem as atividades supracitadas via o Frac Soma, elaborassem uma atividade que desenvolvesse a ideia de equivalência por meio do material. Essas atividades estão no quadro 35 elencadas.

Quadro 35: Atividades dos professores para desenvolver a compreensão de equivalência de frações.

- Resolva utilizando o material a seguinte operação: $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$. (Prof. C) - Quantas vezes a fração $\frac{1}{5}$ cabe em um inteiro? Quantas vezes a fração $\frac{1}{5}$ cabe em $\frac{2}{10}$? Quantas vezes a fração $\frac{2}{10}$ cabem em $\frac{1}{5}$? (Prof. B) - Explique porque $\frac{2}{4}$ é equivalente a $\frac{4}{8}$. (Prof. A)

Fonte: da pesquisa.

Os Prof. A e B tiveram encaminhamentos análogos para desenvolver a compreensão de equivalência. Partindo da ideia de quantas vezes uma fração cabe na outra, isto é, via o material as frações sobrepostas indicam a mesma área (tamanho) quando há equivalência.

O Prof. C implicitamente buscou explorar a soma de frações por meio do conceito de equivalência, apontamos isso porque os três professores supracitados elaboraram atividades muito semelhantes às propostas no roteiro da formadora. Dois pontos positivos para este fato é que os professores identificam as atividades do roteiro como próprias para serem abordadas em suas aulas e que realmente se prestam a desenvolver o conhecimento proposto. E ponto negativo a criação de problemas pelos professores foi apenas por criar uma situação modificando uma das informações dada no problema original (atividade do roteiro) e não por elaboração (criar uma situação para desenvolver um tópico específico).

Outra atividade proposta aos professores seguindo a linha de pensamento deles que o conhecimento deve estar ligado ao dia a dia do aluno organizamos uma atividade via uma caixa de suco ilustrada na figura 29. O *layout* da caixa apresenta várias representações para o volume da caixa (1L, 100% suco ou a barra cheia), assim como, os gráficos indicando a quantidade de fruta/poupa em cada tipo de bebida.

Figura 29 - Caixa de suco

Fonte: da pesquisa.

A leitura e interpretação das informações que constam nesta caixa de suco deveriam ser compreendidas por qualquer cidadão de 12 anos de idade (corresponde ao 6º ano do Ensino Fundamental) em condições normais. Dito isso aos professores os mesmos concordaram com a quantidade de informações da caixa, dos conhecimentos matemáticos necessários para interpretar os dados, mas foram conscientes em dizer que não é qualquer aluno de 12 anos que lê e compreende as informações da caixa.

A formadora apontou alguns conhecimentos que poderiam ser desenvolvidos via a caixa de suco, sendo o significado de parte/todo (a barra dividida em 10 partes iguais e 1 corresponde a fruta no refresco em pó), o significado de razão de fruta para outros ingredientes ($\frac{1}{9}$ ou $\frac{2}{8}$), de operador (¼ de 1000 ml), como também, os diferentes registros dos números racionais (1L, 1000ml, 100%, barra cheia), unidades de medida, interpretação de gráficos, ...

Inicialmente começamos a falar sobre os benefícios a saúde do produto e, então, um professor colocou que há uns anos atrás um pessoal do posto de saúde do município foi até a escola para falar sobre os achocolatados em caixinhas Tetrapark aos alunos. Tendo os próprios alunos ditos "nossa e dão isso para as crianças?". O professor colocou que os alunos ficaram apavorados, não tinham a noção sobre o produto. E, então, a formadora e outros professores comentaram sobre a praticidade do produto, dificilmente de alguém ter um pé de manga em casa para fazer um suco por exemplo e, por isso a indústria sobrevive (e muito bem) – a globalização nos colocou nessas condições de vida/alimentação. O Prof. A acrescentou " *as pessoas não se fixam no saudável, mas na praticidade na hora de comprar e consumir um produto. Se isso é saudável ou não, ninguém se informa*".

Após essas discussões, foi proposto que os professores elaborassem uma atividade para explorar os conceitos matemáticos expressos na caixa de suco (figura 29). As atividades estão dispostas no quadro 36. O Prof. C empregou as diferentes representações que podem ser tomadas das quantidades ilustradas na caixa na primeira atividade elaborada. Na questão dois propõe a compreensão da fração por parte/todo ou operador (depende do encaminhamento que é dado para determinar a solução). O Prof. C ao apresentar e explicar a todos as suas atividades, realçou a opção dos registros, principalmente, o fracionário para comparar as frações visto que os denominadores são iguais a 10 e, assim, determinar em qual bebida há mais fruta.

Quadro 36 - Atividades elaboradas pelos professores utilizando as informações da caixa de suco.

Podemos trabalhar com as unidades de volume, fazendo com que o aluno venha conhecer *qual seu significado como parte todo, *também envolvendo (cálculos) a porcentagem com os números decimais incluindo o quociente. Podemos trabalhar as unidas de medidas como cm, mm. Comparação de frações quem é maior ou menor. * gráficos em barras. construção.

Profe D

1) Observe o "Frutômetro [illegible]" e determine:
a) A fração que representa a quantidade de fruta em cada bebida.
b) O número decimal que representa cada quantidade.
c) A porcentagem de fruta presente em cada bebida.
2) Sabendo que cada bebida contém 1 l, quantos ml de fruta contém cada uma?

Profe C

1) Representa em forma de fração sobre a ilustração que você observa na caixa para especificar os quatro especificações dos quadradinhos.
2º) Percentualmente como você especificaria, conforme os dados existente na caixa em relação ao refresco em pó utilizado.
3º) Se 1 litro representa 100% do conteúdo suco, quanto você representaria a especificação nectar em forma de fração?

Profe A

Fonte: da pesquisa.

Embora o Prof. D não tenha apresentado atividades, buscou determinar conhecimentos que poderiam ser abordados utilizando as informações na caixa de suco. A todos os professores foi interessante quando o ele destacou o estudo de gráficos e acrescentou "*as pessoas entendem mais com os gráficos*", querendo dizer que informações em gráficos são mais comum, objetivas e simples.

A formadora destacou que com a troca de ideias surgem novas possibilidades, possivelmente que nem havíamos pensado e com certeza enriquece o nosso trabalho. Neste sentido, o Prof. A mencionou quanto ao emprego desse recurso para desenvolver conceitos/conteúdos com os alunos que "*abre mais o leque das informações que a gente pode dar para eles (alunos). Achei interessante porque a gente não pensa... eu não tinha me ligado que a gente poderia usar a caixa e usado dessa forma*". E acrescentou *"fica muito interessante para eles, se fica a mesma mesmice... Mas se tu pegas isso ai (a caixa de suco)... daí eles começam a imaginar outras coisas*".

Como sugestão, a formadora apresentou algumas atividades que poderiam ser construídas via a caixa de suco, a fim de propor outros encaminhamentos e enriquecer a discussão, a saber: Observando o frutômetro da caixa de suco, a quantidade de fruta é maior em que tipo de bebida? Como determinar a quantidade de fruta em cada bebida? A expressão "suco 100%" quer dizer que só há suco na bebida? Por que você acha que a barra foi dividida em 10 partes iguais?

A ação proposta de elaboração de uma atividade via um recurso pouco usual é vista como exitosa, pois os professores visualização que por meio de uma caixa de suco era possível desenvolver o conhecimento matemático necessário a um aluno e se propuseram também a desenvolver o seu conhecimento ao criar uma situação. Não findando os conhecimentos dos professores na elaboração de atividades, percebemos, desde o início da conversa com os eles, que a caixinha de suco se prestava a muitos outros conhecimentos, como químicos (a industrialização do produto, ingredientes, conservantes, classificação da bebida, alimento saudável ou não), de globalização (como se alterou a forma de alimentação da população, a indústria alimentícia e o mercado de trabalho) ou a organização de informações (o *marketing* empregado nesses produtos, a embalagem com uma fruta bonita, *slogan* rico em vitamina ou fonte de).

Neste contexto, foi proposto aos professores que ligassem os conhecimentos matemáticos aos outros conhecimentos presentes na caixa de suco, visto que isso traria mais significado ao aluno. Assim, foi proposto que organizássemos um projeto interdisciplinar a partir da caixa de suco e que pudesse ser aplicado com os seus alunos (discutir áreas de conhecimento e conteúdos envolvidos, objetivos e ações do projeto).

Após a apresentação proposta, foi questionado aos professores se costumam trabalhar com projetos ou interdisciplinaridade na escola (a união de várias áreas de conhecimento a fim de abordar um objeto). A seguir apresentamos a discussão entre os professores onde alguns projetos são citados.

(Prof. A): A gente consegue sim.

(Prof. D): No Estado a gente percebe que os nossos projetos são interdisciplinares. A gente sempre trabalha. Mas assim no Município projetos não. Houve o projeto sobre a copa e daí a gente sempre se divide. Mas a Matemática fica sempre sozinha.

(Prof. A): Sabe que agora estou fazendo um projeto lá na escola, a gente tem uma feira para mostrar, trabalhando com a professora de artes, com aquela parte do 7 ano de porcentagem e razão. Eu vou trabalhar com escala com eles. E vai ser bem interessante, já está sendo bem interessante. A gente vai trabalhar com o prédio da escola e eu vou entrar com a parte matemática e ela com a arte e nós vamos fazer o prédio da escola no papel. Assim fazendo escala (do tamanho real para o desenho).

Formadora: é um desafio porque a gente sai da nossa rotina e daí a gente começa a elaborar algo, tipo começa do nada, tem que medir, qual é a melhor escala para o desenho, sai da rotina.

(Prof. A): É um desenho bastante técnico. Dá um trabalhinho. Mas estamos conseguindo. Vamos ver o que vai sair.

(Prof. D): Outro dia a gente fez um projeto de ciências que uniu todas as disciplinas e a gente ficou apavorado porque a gente não foi ensinada assim, fazer projetos. Ai... eu achei legal, até uma professora disse: olha eu tive pensando bem, até que tem bastante coisa. A professora de espanhol entrou no projeto (daí traduzia todas as palavras). Foi bem interessante. Então quando tu começas a pensar nos casos, tem.... Os professores se empolgam.

(Prof. D): No Estado temos dois (projetos), na tarde, no fundamental, da consciência negra e no EJA, à noite, temos sobre a família tradicional e moderna. Então nós vamos envolver todas as disciplinas.

Formadora: eu já pensei da consciência negra... onde eu ia abordar o conhecimento matemático... já me doeu o coração.

(Prof. D): Mas tem, a gente faz pesquisa...

(Prof. C): Daí vira gráfico (a pesquisa). É sempre onde a matemática entra (em projetos interdisciplinares).

(Prof. A): Mas é.... mas as porcentagens tu podes usar.

Formadora: a matemática normalmente entra para os gráficos...

(Prof. A): Mas entra!

> *(Prof. D): Esse da família, à noite, faz a pesquisa se você mora com os pais, só com o pai, com a avó... tudo na pesquisa o aluno faz e a gente senta para conversar, cada disciplina pode fazer e um vai dando ideia para o outro.*
> *Formadora: e como vocês se encontram (professores) para organizar o projeto?*
> *(Prof. D): De noite, nas quartas-feiras. Tem os 3 primeiros períodos e depois temos a reunião dos professores. E de tarde, fundamental, estadual, nas quartas. Agora no médio não (sem reunião). Mas daí a gente pensava e fazia num sábado (a reunião)*
> *Formadora: mas daí é carga horária extra do professor?*
> *(Prof. D): Fica como dia letivo (abate a carga horária do professor e do aluno nos 200 dias letivos). É muito difícil a gente se encontrar para fazer projetos. No médio é assim. No EJA e FUND sempre tem reunião. Até nesta quarta vamos fazer a reunião para organizar um projeto, o que cada turma vai fazer e depois uma culminância dos trabalhos (apresentação). No Estado a gente já está acostumada (a fazer projetos) no Município.... (não tem)... teve aquele projeto da copa, agora da nota fiscal que tinha que tirar foto,... são poucos assim. Nós não temos esse espaço de se encontrar, de fazer reunião, é só o conselho de classe que a gente se encontra.*

Dos diálogos dos professores, destacamos que o Município não tem uma forma contínua ou programada de realização de projetos (da escola ou entre escolas), assim como, o não espaço para momentos de formação ou de construção de uma proposta pedagógica (por exemplo um projeto). Vale ressaltar, que dois professores citaram que já realizaram (ou realizam) projetos interdisciplinares e os outros dois professores presentes nesta conversa não se manifestaram. Ressaltamos, também, que a Secretaria de Educação não tem uma proposta de formação, mas aceitou prontamente organizar os horários dos professores para que os mesmos pudessem participar deste curso de formação.

Sobre a construção do projeto interdisciplinar envolvendo a caixa de suco (ou de uma forma mais ampla a alimentação saudável ou obesidade infantil por exemplo) ficou apenas na fala, ou seja, é uma proposta/tema interessante e importante, mas que depende de outros professores e da direção da escola em organizar momentos de reunião entre os professores e eventuais materiais necessários para desenvolver tal proposta. Deixamos, neste sentido, a proposta em aberta com os professores e a disposição de poder contribuir com o projeto futuramente.

No intuito de concluir a dimensão cognitiva do CDM deste estudo, destacamos três perguntas realizadas a dois professores no quarto encontro (estes participaram 100% do curso) como eles refletem sobre temas importantes tratados nesta formação: o desenvolvimento dos significados dos números racionais partindo de situações contextualizadas e, consequentemente, o emprego da metodologia de resolução de problemas. As respostas dos professores, Prof. A e Prof. B respectivamente, estão a seguir listadas e nos dão algumas pistas sobre o que podemos esperar nas observações futuras ao seu trabalho (ou seja, como os conhecimentos explorados nesta formação foram acomodados e exercem influência na sua prática de trabalho).

1) Os significados apresentados para o número racional emergem de uma situação-problema. Tu consideras propicio em suas aulas essa forma de ensinar a partir de situações contextualizadas, ou ainda, empregando a metodologia de Resolução de Problemas?

Problemas? O conhecimento matemático é carregado de significados culturais, e constituído historicamente, como instrumento simbólico em diversas situações e o papel do professor é estimular a atividade mental seja através de jogos, oficinas ou qualquer outro meio que transporte o aluno para assimilação do conhecimento.

Problemas? Sim, porque parte de uma realidade concreta e não como geralmente é empregada de forma abstrata.

2) Te parece eficiente o ensino dos números racionais através de seus significados? Tu usas ou com certeza empregaria nas tuas aulas?

Sim. O professor não pode apenas cumprir o que é proposto para a série, mas trazer exemplos onde o aluno possa elaborar seu raciocínio em situações problema do seu cotidiano. Nesse elaboração e na aplicação, vão sendo observados seus significados.

Sim.
Empregaria.

3) Considerando o livro didático que tens utilizado, o mesmo aborda os números racionais em diferentes situações, isto é, explorando os significados. Tu as explora com os alunos?

Geralmente se utiliza vários livros. Desde os mais antigos até os mais novos. O que se tem observado que alguns livros mais antigos, as origens de determinados cálculos são bem mais explícitos e explicados passo a passo do que os atuais.

Sim, e também temos como outra ferramenta o laboratório de informática, na qual, as pesquisas são mais aprofundadas. Há outros exemplos conforme o site aberto. Há alunos que tem minimercado e tem estas experiências com número decimais através do nosso sistema monetário.

Das respostas à primeira questão, observamos que os professores reportam a ideia de trabalhar com situações cotidianas dos alunos. Como também, verificam que a metodologia de resolução de problemas (ou jogos) podem facilitar a aprendizagem dos alunos. A resposta do Prof. A à segunda questão ao dizer "*o aluno possa elaborar seu raciocínio*" nos prospera uma proposta do aluno mais ativo em sala de aula, que explore uma situação/atividade a fim de criar/desenvolver um conceito.

A questão 3 ligada ao livro didático e os significados dos números racionais torna-se limitada a compreensão das respostas dos professores simplesmente pelo o que está escrito. O Prof. A citou a diferença em explorar e conceber o conhecimento matemático nos livros atuais e mais antigos. O mesmo professor citou, também, que usa vários livros. No entanto, o que notamos é que variam os livros, mas não o recurso. O Prof. B citou que usa o laboratório de informática, porém é muito esporádico (conforme relatos em outros momentos da formação).

Quando realizamos este questionário ainda não havíamos tratado do livro didático (com foco nos números racionais). Conforme relatamos na dimensão epistêmica sobre os livros didáticos, estes são um apoio aos professores e lá não constam os encaminhamentos necessários do professor para desenvolver a compreensão dos números racionais visto que isto é um trabalho do professor (pessoa). O que as respostas da questão 3 nos apontam é que os exercícios do livro didático são propostos aos alunos, porém os significados não são explorados de forma explícita visto que os livros didáticos não abordam, nos seus exercícios, com essa perspectiva.

Deste modo, indicamos a dimensão cognitiva dos professores nesta formação continuada como **média** e justificamos este conceito por entendermos que houve uma melhor compreensão dos números racionais via seus significados e concepções fundamentais: partição, unidade, comparação, ordenação, densidade e operações. Como também, foi explorado e justificado qual o real papel do professor ao planejar, implementar e avaliar um processo de ensino e aprendizagem em Matemática, especificamente, com os números racionais.

As atividades propostas aos professores foram elaboradas na perspectiva que os professores vivenciassem a metodologia de resolução de problemas e que retomassem e ampliassem seus conhecimentos didático-matemáticos ao ensinar os números racionais. Neste sentido, notamos que foi um desafio aos professores se portarem nessas atividades. Os mesmos foram colocados a compreender uma situação e trocar ideias/experiências sobre, assim como, elaborar atividades no qual notamos o ponto mais complicado nesta formação. Muitas atividades elaboradas pelos professores foram inconsistentes ou, então, o professor não quis apresentar uma situação (atividade).

Outro fato que ratifica o conceito apontado é na análise do livro didático. Os professores se viram numa perspectiva completamente diferente (fora do habitual) ao olhar as questões do livro e determinar como um conhecimento estava sendo desenvolvido. Por exemplo, ao fazer a leitura do livro, perceber que comparação de frações é feita tornando os denominadores iguais e comparando os numeradores e não buscando pelo quociente das frações.

Godino et al (2013) aponta que o principal indicador da idoneidade cognitiva do processo formativo é o ganho efetivo nas expectativas de aprendizagem sobre a didática da Matemática. Neste sentido, compreendemos que o conhecimento referencial sobre os números racionais estava na zona de desenvolvimento potencial dos professores e observamos que houveram mobilizações dos conhecimentos cognitivos dos professores quanto a temática números racionais.

O que observamos como um passo que os professores ainda precisam tomar é quanto ao como mobilizar conhecimentos com seus alunos. Sendo específico ao criar/adaptar situações-problemas e empregar um método que torne suas aulas mais dinâmicas e/ou os alunos ativos. Foi uma busca esse entendimento durante o curso, porém os professores não se veem ainda nessa expectativa em sala de aula.

A classificação é dada média, mas longe de alcançar a alta idoneidade. E isto é reflexo, também, da participação e empenho dos professores. A total desvalorização da classe perante a sociedade refletiu nesta formação. É a própria pessoa que aprende, é ela que se motiva. O formador da ação propõe a atividade (no que considera ser o melhor encaminhamento), mas depende do outro lado (os alunos/professores) para o êxito da ação. Houve muitas desistências ou nem interesse ao curso. Entendemos a parte do professor que não recebe a valorização/motivação ao seu conhecimento especializado, logo não o busca com a gana necessária.

4.2.6 Dimensão Interacional

A dimensão interacional está organizada de forma a contemplar os modos de interação e discurso no processo de formação dos professores, isto é, o desenvolvimento de competências comunicativas durante a formação para o planejamento, implementação e avaliação do curso.

Optamos em deixar a dimensão interacional por último por compreendermos que primeiramente devêssemos apresentar e discutir as ações, assim como, os conhecimentos prévios e emergentes durante o processo de formação continuada para, então, finalizarmos o estudo ponderando as interações que ocorreram, a avaliação do próprio curso e a autoavaliação que o professor faz de si mesmo neste processo.

Todo o curso foi disposto fisicamente via o portfólio para cada professor. O portfólio foi o instrumento usado pelo formador para orientar a proposta e, de certo modo, tornar a proposta do curso mais próxima do participante (visto que ali poderia organizar suas ideias/dificuldades e ter esse material em mãos para futuras aplicações no ambiente escolar). Assim, o portfólio foi muito bem visto/aceito pelos professores, os mesmos visualizavam, a cada encontro, as atividades já desenvolvidas (ou se caso não tivessem ido a um encontro. Mesmo que o professor não comparece ao encontro, o material estava disponível na sua pasta, portfólio).

Além do portfólio ter sido um fator importante para organizar e facilitar as interações formador-professor, professor-professor, formador-recurso e professor-recurso, via as atividades do portfólio, os professores passaram a se sentir mais próximos da formação e isso permitiu que os relatos, reflexões e angústias fossem compartilhadas/socializadas com o grande grupo. Por muitas vezes, percebi, como formadora, que a conversa e a troca de experiência foram fundamentais para que houvesse um ganho no conhecimento dos professores.

Desse modo, juntamente com o portfólio, um formato de interação durante o curso foi o diálogo e as trocas de experiências/ideias entre os professores e a formadora (a socialização e cooperação nas atividades). Por muitas vezes, os professores destacavam seu ambiente escolar durante o desenvolvimento de uma atividade indicando a negociação entre o que era proposto e a implementação na escola.

Dentre as interações que ocorreram, narramos abaixo algumas para melhor descrever essas trocas e a realidade escolar vivenciada por elas. A primeira narração, de um professor, que analisa o sistema de avaliação da escola (a cada instrumento de avaliação uma recuperação) e o sistema de conceitos adotado pelo Estado que não tem melhorado o desempenho dos alunos.

> *(Prof. C): Eu prefiro fazer a prova e a recuperação de cada avaliação. Como é uma disciplina que reprova muita gente, as recuperações estão dando a oportunidade de alguns melhorarem suas notas e deixam de reprovar. O conteúdo é visto e revisto para a prova e novamente esse processo ocorre com a recuperação (correção da prova). O aluno estuda mais uma vez. Nesse método tem me ajudado (na recuperação de nota e o aluno estudar um pouco mais). Alguns alunos deixam para estudar apenas para recuperação.... Faz a prova por fazer.... Porque sabe que tem a prova de recuperação. A supervisora me perguntou se acho bom esse método e de modo geral, pelo menos, o número de reprovações diminui. É bem mais trabalhoso ao professor, pois são duas provas para fazer e corrigir.*

De início, quando surgiu essa proposta, fiquei (ficamos) assustadas... porque é muito conteúdo para vencer e fazendo prova e recuperação diminui o tempo de conteúdo.

(Prof. D): Eu acho que sim, eles querem índice de aprovação. Os alunos com CP, fica em recuperação, mas no final ele passa. Eles estão bem espertos (quanto a nota que precisam alcançar). Daí eles cuidam da disciplina, na área (biologia, física e química), dois CS é o suficiente. Então deixam a física (eles acham essa disciplina mais difícil, eu percebo isso neles). Física eles simplesmente levantaram e saíram da prova. Para ti ver que eles são bem espertos. Eles se contentam com isso. Tinham CS em biologia e química, largaram física. Daí passam o ensino médio sem saber nada de física.

Não foi um tema explícito os métodos de avaliação da aprendizagem dos alunos. Entretanto, como as discussões durante o curso caminhavam para as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem, o tema avaliação surgiu várias vezes. A interação é vista, no sentido, professor-professor, principalmente, pois eles queriam compreender os métodos de cada escola e, também, queriam se reportar à formadora para apontar porque a realidade escolar é tão difícil. O que foi possível compreendermos das discussões dos métodos de avaliação (prova e recuperação ou conceitos), é que os professores não optaram pelo método, ele foi imposto. Com isso, por muitas vezes, o professor não tem uma compreensão completa do que seja ensinar e avaliar por conceitos ou quais instrumentos de avaliação usa (provas, testes, trabalhos, seminários) visto que é necessário a recuperação de cada atividade.

Neste contexto um professor acrescenta a situação de defasagem que os alunos vêm apresentando no decorrer dos anos (fato ligado ao método de avaliação e não retenção do aluno):

(Prof. A): Agora me diz como a gente vai mudar essa concepção para o ensino fundamental? Se cada vez mais os alunos vêm para nós fracos e tu tem aqueles índices que a escola tem que ter de aprovação de alunos (se remetendo ao IDEB ou SAERS). Aí tu ficas frustrada, sabe, eu me sinto frustrada, porque eu gostaria de fazer um trabalho muito melhor do que a gente está fazendo hoje. Mas a gente não consegue porque o sistema não deixa. Entendeu? Então enquanto tu compareces a uma prova desse nível (PROFMAT), tu ficas apavorada.

Nesta fala o professor se refere que a baixa aprendizagem dos alunos, leva os professores a trabalharem o mínimo (implementado) e se afastarem muito do conhecimento de referência. Logo, eles próprios começam a ter dificuldades no conhecimento de referência (essa percepção o próprio professor teve ao tentar ingressar num curso de Mestrado Profissionalizante).

Professor: nossa visão na escola é limitada, meio de trabalho na escola, estamos preocupados com a matemática o professor de Matemática, o de português com português, ... não importa o resto. A escola está dentro de uma caixinha.
(Prof. A): Quando tu assumes o magistério tu vens com uma vontade assim (grande), mas com os anos passando, tu vês que tudo aquilo que tu tinhas uma força tão grande parece que se vai, porque aparecem os problemas, tu não consegues trabalhar. Então tu vais te adequar aquele sistema. Então tu não consegues fazer aquilo que tu tens vontade.
Professor: o sistema te encolhe, te reprime. E aqui é um exemplo do sistema que reprime é o nosso curso que começamos em 14 e temos 2 hoje. Por que vocês estão aqui e os outros não estão mais? Vocês têm um ideal diferente dos outros que vão se perdendo ao longo do caminho. Vocês estão aqui porque realmente querem. Vocês não vão ganhar mais com isso ou ganhar prestígio, não são valorizados aqui acolá, ... ninguém nos valoriza mais por nos qualificarmos, então o problema é maior.
(Prof. B): Não sei se com essa participação vou acelerar minha promoção, mas a gente tem que buscar o conhecimento. Eu penso como não vou ir na formação, é uma responsabilidade minha, como eu vou cobrar do meu aluno?
(Prof. A): Mas eu até acho assim, que tudo é válido, eu acho que sempre a gente vai buscar alguma coisa que a gente não viu ainda porque eu converso aqui com ela (colega professora), converso contigo (formadora) que tem outra realidade. Alguma coisa tu vais levar. Mas eu acho que hoje, eu que sou a professora mais antiga aqui (tempo de profissão), parece que as pessoas não tão muito motivadas para realmente atingir aquele objetivo com o aluno. Muitos, muitos estão no magistério por uma questão financeira. Então tu vens com uma bagagem e te desilude, não vai conseguir chegar naquilo que tu queres, então tu vais levando. Eu penso assim. Para atingir os objetivos com os alunos, percebo que a família é fundamental (já te disse isso antes). Os alunos da escola rural te respondem mais aos objetivos do que os da cidade (pouco vínculo com a família), a família não dá suporte, respeito. Então lá fora (rural) tu consegues fazer um trabalho com os outros professores e dá certo. Na cidade, não. É bem complexo. Isso se perde no caminho. Tu vens com um pique/texto muito bonito, para ter um trabalho bem feito, mas tu te perdes ai. Daí tu não consegue, e vai levando.
Formadora: é o que a gente percebe hoje da educação. Ela vai como dá.

O último diálogo que ressaltamos dos professores é quanto aos alunos com necessidades especiais (NE). Os professores são fortemente resistentes a uma teoria ou a um processo de ensino idôneo porque consideram que não existe aula perfeita, alunos perfeitos, aprendizagem a todos (no sentido de um professor alcançar a todos os alunos na sua carga horária). A narração a seguir trata de como os professores percebem a inserção de alunos NE nas escolas.

(Prof. A): Até a gente teve a disciplina de libras na faculdade, mas se a gente não pratica, tu não consegues mais, achei ótimo ter estudado, mas depois nunca mais a gente usou isso aí, até porque não se precisou nas aulas com alunos que tivessem essa necessidade. Mas também tem outras deficientes que a gente tem que atender. No ano passado eu tive um aluninho, ainda bem que tinha a moça que ajudava ele – a monitora, porque como é que eu ia me comunicar com aquela criança? E eu enfrento problemas também do caso de pessoas com deficiência intelectual. Não temos gente que atenda essas crianças (falou indignada/preocupada). Eu fico assim frustrada, porque eu tenho 2 alunos, nessas condições, lá na escola rural. A pessoa que está lá (monitora) vai lá duas vezes por semana para atender esses alunos e mais das outras séries. Como é que ela vai conseguir ter algum resultado? Eu particularmente, eu acho que essas crianças teriam condições de aprender, se tivessem um acompanhamento desde cedo. Talvez até por uma ignorância dos pais, de não saberem, os direitos/deveres das crianças. E ainda tem aqueles pais que não aceitam que o filho tenha uma deficiência (uma doença) e não vão ver recursos. Ah, é muito complexo, muito complicado essa situação. A secretaria de educação não está nem aí... (para as dificuldades encontradas pelos professores com alunos NE).
(Prof. B): Querem qualidade, querem quantidade... e no fim tu não atende bem ela (pessoa com NE) e não atende bem os outros.
(Prof. A): Eu pensei assim o que eu posso fazer por aquela criança (a citada anteriormente)? Pensei, pensei, olha a única coisa que eu posso fazer é trazer ele para sentar junto comigo depois que eu explico no quadro para todos, os outros alunos fazem as tarefas, e ficar com ele junto (lado a lado). Mas a gente se sente tão frustrada, que aquela criança deveria ter sido trabalhada deste o primeiro ano, não é? E tu podes fazer por ele? O mínimo. Por que não tem condições. Porque ele deveria ter um relatório, um acompanhamento dessa criança (citando as dificuldades). Mas não tem acompanhamento (o relatório físico). Às vezes até a criança precisa tomar remédio e não toma. E outras vezes tomam remédio demais. Ficam apáticos. Eu fico apavorada de ver. Eu não sei, mas a criança hiperativa (TDH) isso é uma anormalidade dentro da realidade dele, então tu tens que saber trabalhar com ele. Às vezes, as crianças estão demonstrando isso aí, mas é porque eles precisam de um atendimento maior, que tu enxergues o que ele está precisando. E as pessoas parecem que estão cegas para isso. Eu me frustro muito nessa parte (atendimento ao NE). Houve uma época que queriam acabar com as APAES. Depois que eu assisti uma reportagem de uma mãe que tinha filho na APAE e tinha um amplo conhecimento e eu concordei que as crianças precisam da APAE, elas precisam mais da APAE que propriamente da escola que tem uma inclusão e querem colocá-las lá. Porque lá elas vão ter um atendimento mais direcionado, cada caso vai ser tratado assim. Até essa pessoa (da entrevista) estava trabalhando muito nesse movimento de não acabar com as

> *APAES. E eu acho também, eu concordo. Tu sabes que esse menino que eu tenho que agora ele está se dando de conta, que está entrando na adolescência, da diferença dele para os outros. Que até então ele era uma criança, ele não percebia isso. Mas agora ele está percebendo que existe um tratamento diferente e por mais que os outros queiram dar uma atenção/participação (porque os outros enxergam o problema dele e respeitam), mas eles afastam um pouco. Então ele sofre com isso aí. E muito. Ah, é muito complicado isso.*

O tema a real inserção de alunos especiais (NE) nos ambientes escolares trouxe novamente muita discussão entre os professores (como o método de avaliação). Neste sentido, os professores se reportavam principalmente a formadora para alegar que a Escola está muito longe da teoria. Os professores comentam a frustração em não desenvolver (ou não plenamente) a aprendizagem dos alunos em condições especiais. Apontam que a BNCC (2017), os índices de aprovação da escola, os métodos/recursos de ensino, por muitas vezes, não consideram as diferenças. E o professor que está frente a frente com o aluno sabe da limitação que o sistema possui para alcançar habilidades e competências com todos os alunos.

Após destacar alguns pontos principais que alicerçaram a dimensão interacional nesse nesta formação, vamos apresentar os dados referente às avaliações dos professores quanto a proposta vivenciada. Para tal, buscamos uma dinâmica que não deixasse o professor constrangido ao avaliar a proposta frente o formador. Desta forma, construímos uma lista de 12 perguntas que do nosso ponto de vista serviria para compreender como o professor vivenciou e compreendeu o processo de formação. As questões foram colocadas em um envelope para realizar a atividade, denominada por nós de dinâmica das placas. O seu roteiro está disposto a seguir:

1. Primeiramente enumera-se os professores em ordem crescente. Cada professor, na sequência organizada, deve retirar uma pergunta do envelope e respondê-la (posicionar-se).
2. Após a resposta do professor que leu e respondeu a pergunta, os outros professores devem se posicionar levantando a placa verde se concordam ou vermelha se discordam da resposta do professor (todos ao mesmo tempo).
3. Na sequência os professores devem justificar a escolha da cor da placa (indicando uma atividade/reflexão que corrobora ou não).
4. Os participantes não devem se pronunciar ao mesmo tempo. É importante ouvir o entendimento do colega para contribuir com a conversa/discussão/debate.

Como neste encontro havia dois professores, a formadora e a bolsista do projeto de extensão participaram da atividade. Assim, reelaboramos a dinâmica e todos os presentes tomaram perguntas do envelopo para responder. Não percebemos desta forma uma limitação na avaliação, pois houve a interação necessária, os professores demonstraram interesse e concordância com a proposta. A seguir apresentamos a pergunta sorteada e a narração das respostas obtidas.

- Durante um curso de formação continuada, o que você espera realizar/ouvir? No que tange este curso de formação, para você qual o maior (ou mais impactante) fator que agrega na sua prática de ensino na sala de aula?

> *(Prof. A): Eu acho que essas formações continuadas são muito válidas, porque eu acho que nesse ponto a gente vai observando outras coisas que talvez a gente não observe e vai aprendendo novos conhecimentos. Então eu acho que isso aí é muito válido, a gente está se reciclando, se renovando, eu acho que a gente também consegue captar algo mais na nossa profissão.*
> *(Prof. B): É uma das modificações na parte da educação é a busca pelo conhecimento, nós estamos (buscando), mesmo a gente estando a bastante tempo trabalhando.*
> *(Prof. A): Mas as coisas mudam e as coisas precisam ser renovadas, os nossos conhecimentos serem aplicados estão em constante renovação.*
> *(Profe B): Eu acho que das colegas que estavam aqui, nós é que estamos mais tempo no município.*
> *Bolsista: eu concordo*
> *Formadora: eu concordo com o Prof. A, é um momento que a gente não observa e a gente pode passar a observar e que com certeza as coisas evoluem (espero que para melhor)*
> *(Prof. B): Não é isso mesmo que o Prof. A falou, é um acréscimo para nós.*

- Como sugestão, o que deveria ser mais potencializado (mais tempo ou atividades) num próximo curso de formação continuada?

> *(Prof. B): Eu acredito assim que a parte prática, porque a parte de função de jogos nos interessamos, imagina os alunos. É no caso assim, oficina, de todos os conteúdos que forem possíveis.*
> *Formadora: de preferência jogos?*
> *(Prof. B): De preferência jogos. Claro que a gente tem que ter a parte da teoria para ti também poder entender o jogo, mas a teoria a gente... a gente coloca para eles e as vezes nos falta essa parte de jogos. A gente tem um que outro (jogo) mas a gente não vai aplicar sempre o mesmo todos os anos, até mesmo porque tem alunos que são repetentes, para eles não vai ser novidade.*

(Prof. A): Sabe que eu acho assim como o nosso sistema é tão falho, claro que essa parte dos jogos, isso aí é bem interessante, mas eu acho também, incluindo mais, sobre as tecnologias e nós precisamos e está aí e eles têm acesso a isso. Então, assim, como a gente vai utilizar mais a tecnologia, trazer para a sala de aula junto com o aluno? Mas a gente tem a falha do sistema.

(Prof. B): Mas lá na escola a gente tem a sala de informática, toda organizadinha, podemos usar, só que tu tens que ter mais conhecimentos. Eu falei agora a pouco que na escola do Estado (ensino médio) nós fizemos um curso de aperfeiçoamento na parte de Informática, no sábado. Só que se tu não tiveres o treinamento para aquilo ali, tu não praticares, tu não vais, tu esqueces.

Formadora: respondendo ao comentário do Prof. B (que respondeu primeiro a pergunta) discordo parcialmente. Não é uma questão de crítica, só vou colocar o que eu compreendo. Quando a senhora colocou que não é da teoria que simplesmente que a gente precisa, mas da prática. Eu concordo que é a prática que o professor necessita, porque o professor está lá na sala de aula é o primeiro problema dele, a prática, como ele ensina, não é a teoria. E por isso, muitas vezes o professor chega aqui e diz eu preciso de prática, de oficina, de material de como ensinar. Isso é o trabalho do professor. Eu concordo, o como ensinar. Mas eu acho que a gente não ensina por ensinar. E, principalmente, se tu chegares com o jogo do varal e largar na turma simplesmente vai ocorrer o que o professor chegou e me disse (o caso do Prof. A): professor apliquei o Frac Soma na turma, mas foi uma muvuca. Não é jogo por jogo. Como é que ele deixa de ser jogo por jogo? Quando a gente começa a compreender como um jogo se forma, como é a compreensão do jogo para o aluno, o que eu posso desenvolver com o jogo. Não estou te criticando, estou tentando mostrar que não é jogo por jogo.

(Profe B): Sim não é só jogar, não é jogo por jogo.

Formadora: a gente precisa entender porque aquele recurso está sendo empregado, que aquilo não é matar aula, não é simplesmente ensinar diferente, é ensinar. Mas eu concordo plenamente que o meu problema principal é ensinar, é como um aluno compreende um conteúdo. Pro aluno é interessante, para o professor é mais que isso. É porque eu aplico um jogo, é como eu aplico um jogo e realmente desenvolvo tal conhecimento e daí sim que entra a tal da teoria. Eu juro que tentei amenizar na parte da teoria, de não priorizar ela aos jogos/recursos. Mas eu tentei sim colocar para vocês que não é jogo pelo jogo. Que o jogo realmente com um intuito pedagógico, desenvolver um conhecimento com aquela atividade. E por isso mesmo, que no ensino superior a senhora não vai achar alguém que fale prática por prática, jogo por jogo, material concreto por material concreto. Ele vai de alguma forma te inserir uma teoria para te dizer que estou jogando para atingir esse objetivo. Falo isso para vocês para dar um retorno de porque eu fiz desse jeito. ... a gente *ensina a valorizar a prática e eu sei que na universidade isso não é valorizado. E está aí uma pessoa (bolsista) que pode te responder que entra numa disciplina de estágio e fica de cabelo em pé de como é que eu vou ensinar agora esse conteúdo.*

(Prof. B): É daí tu vai para o livro didático ou para internet para ti pesquisar alguma coisa ou construir, pesquisar.

Bolsista: na verdade, o mais irônico de tudo é que a gente tem aula de cálculo e daí o professor passa aquele conceito, exemplos, listas e listas de exercícios. E daí eu chego no estágio, o professor (do componente) quer que eu faça as mil maravilhas. O professor não quer que eu faça do jeito que eu aprendo, vivencio na universidade. E daí é esse um dos grandes problemas do estágio porque eu sou cobrada que eu ensine de outro modo, só que eu não aprendi, não estou aprendendo assim. No nosso curso há realmente essa falha nesse processo.

(Prof. B): A realidade é outra (a sala de aula).

Formadora: as propostas que nós tentamos durante o curso (ano passado e esse ano) foi trazer atividades que pudessem realmente serem aplicadas na sala de aula (claro que com algumas adaptações). Assim pensar, estimular a pensar de uma maneira um pouco diferente o conhecimento/atividade do professor.

As profes concordaram que as propostas eram para serem aplicadas na aula.

Pino Fan e Godino (2015) tratam, nessa dimensão, das interações entre o formador e professores, como também, das atividades desenvolvidas para o aprimoramento e a negociação de significados que um curso de formação envolve. Neste sentido, a questão acima e a próxima apontam as possíveis acomodações entre significados referenciais propostos alcançado/compreendidos pelos professores. Os jogos como recursos didáticos que podem facilitar o processo de ensino e aprendizagem, desde que com um planejamento e objetivos claros do professor.

- Como os recursos manipulativos como Frac Soma ou os jogos podem ser facilitadores na aprendizagem dos seus alunos?

Bolsista: no meu estágio eu usei jogos. Eu não penso que o jogo ou recurso digital seja a salvação do planeta. Aqui na faculdade a gente começa a criticar muito os professores e quando a gente chega lá (na sala de aula) a gente diz opa eu estou criticando demais e não estou olhado pelo outro lado. Quando eu entrei no curso, nos primeiros semestres, eu dizia porque o professor não dá um jogo, porque o professor não faz tal. Mas daí a gente começa a perceber que o jogo não é a salvação. Eu levei um jogo para os meus alunos, eles jogaram, acharam muito interessante, mas eu não sei até que ponto isso afetou na aprendizagem deles, assim não foi a salvação do planeta. Eu fiz material manipuláveis *com eles que era para relação do teorema de Pitágoras e eu sou realista em dizer que ficou um quebra-cabeça por quebra-cabeça, eu também sou realista em dizer que faltou um pouquinho do meu encaminhamento como professora para que não tivesse ficado um quebra-cabeça por quebra-cabeça. Então eu sei que falhei nessa parte, também acho que talvez, sei lá, nunca tinha pensado, tirei de uma dissertação o quebra-cabeça, talvez tenha faltado um pouco de orientação do meu professor de estágio para que não tivesse ficado sem nexo o quebra-cabeça. Então eu senti essa falta.*

(Prof. A): Eu percebo assim que a gente não consegue aplicar só jogos porque tu tens um conteúdo a ser cumprido e é cobrado da gente, então chega lá no final do ano tu tem que está com tudo pronto e se tu vais somente colocar os jogos, fica difícil né de tu cumpri isso aí. É muito agradável para eles, eles amam de paixão, mas...

(Prof. B): Quando eles conseguem entender o contexto do jogo, senão fica jogo por jogo.

Formadora: eu concordo com a senhora (Prof. A) que como a bolsista falou (eu vi ela falando o que eu falo/penso) que o jogo não é a salvação da lavoura, que não tem uma metodologia que seja a salvação da lavoura e que todo mundo vai aprender com isso. Não conheço pelo menos. Não dá para sempre aplicar jogos, vai ficar chato do mesmo jeito que uma lista de exercícios.

(Prof. A): Se não vira rotina para eles também.

Formadora: exatamente, essas atividades, eu não digo que devem ser esporádicas, mas não são para serem desenvolvidas todos os dias. É uma alternativa, mas ela não é única para ser utilizada todos os dias. Nem a própria resolução de problemas deve ser usada unicamente, todos os dias, porque ela também vai cair na rotina, a gente não vai abandonar facilmente a expositiva.

(Prof. A): Acho que não.

- Indique e justifique um ponto fraco e um forte da formação.

Formadora: como ponto forte do curso para mim me trouxe muito estudo, persistência em ir buscar mais, em saber mais, em buscar de que forma eu poderia alcançar as professoras que estavam aqui, que não fosse assim: aquilo é visto só lá na universidade e que fica lá na universidade. A minha proposta era que realmente como a professora disse "eu apliquei com meus alunos" (Frac Soma), algo que chegasse na sala de aula. Posso muitas vezes ter viajado na maionese (longe da realidade), mas coloco também para vocês que para eu vir aqui e chover no molhado, falar sobre o que vocês já sabem, já fazem, perderia um certo intuito de vocês estarem num processo de formação. Então algumas vezes eu tentei com que vocês fizessem um pouco além do que vocês estavam na perspectiva de fazer. Tentei mobilizar o conhecimento de vocês, porque é esse o trabalho do professor, eu compreendo que não é apenas pegar uma questão e aplicar, é entender ela, dar uma proposta em cima, *ter um objetivo, criar estratégias. E como ponto fraco acredito não ter alcançado todos os professores da maneira que eu gostaria de ter alcançado (isso pode ter causado a evasão).*

*(Prof. A)***:** *Não, eu discordo disso. É que nós professores estamos desmotivados***.** *Muitos não se motivaram por esses motivos (parte financeira). Então ficam pensando porque eu vou fazer aquilo se não vai me beneficiar em nada.*

*(Prof. B): Até o próprio certificado de participação (pode não valer nada***).** *Não podem deixar de cumprir horário por não receber (não participar da formação no horário de planejamento).*

(Prof. A): É uma valorização/motivação muito baixa é esse o problema então.

(Prof. B): Tu não recebes em dia, tem que fazer isso e aquilo.

Formadora: quanto as professoras que deixaram a formação, foi porque as atividades estavam longe da realidade da sala de aula?

(Prof. B): Não são longe da realidade.

*(Prof. A): Eu acho também que a gente consegue enxergar certas coisas que de repente naquela tua rotina ali não percebe. Eu acho que teve momento assim que a gente discutiu, conversou, cada um deu a sua opinião de determinado tema e que até alertou de certa forma, será que tinha percebido. Acho que foi nesse sentido***.**

(Prof. B): Que é fácil criticar o outro. Será que eu estou fazendo certo?

Formadora; em nenhum momento quis julgar o certo ou errado, acredito que tu estás fazendo do jeito que tu podes, começa por aí, mas eu não posso fazer além ou não devo fazer além?

(Prof. A): É que a gente não pode ficar só naquele teu conhecimento (o que tu já tens), tu tens que ver o que os outros fazem, eu vejo dessa forma.

- O curso focou nos significados dos números racionais e fomos até os livros didáticos para verificar os seus empregos (ou não). E lá verificamos que se o professor não fizer os encaminhamentos adequados alguns significados podem deixar de serem explorados. Nesta situação, via o curso, qual a importância que você percebe em se trabalhar com os significados dos números racionais?

*(Prof. A): Todos (rindo) eu acho que é bem amplo, né***.**

(Prof. B): Tu vais no mercado e tu usa os números racionais. O próprio tempo, a hora tu vais ocupar.

*Formadora: só para contar para vocês, na minha formação inicial e todo o tempo que eu dei aula na Educação Básica para mim não era explícito os significados dos números racionais***.** *Eu não tinha esse entendimento. Não estou dizendo que vocês não tinham, mas de forma explicita isso não era dito para nós. E quando eu comecei a estudar o assunto e* *me deparei com a BNCC que indicava os significados (ou seja é um conteúdo obrigatório, o professor deve entender). Nossa gente, como a gente não sabe disso? E na graduação ainda não se vê isso, a bolsista não tem isso explicito nas emendas (mais uma geração de professores sem esse conhecimento). Então percebi uma possibilidade de trabalhar com os professores esse tema via uma formação continuada. É notário que os alunos têm dificuldade, mas será que os professores também não têm dificuldade em ensinar? Por isso pensei na proposta. Mas neste sentido, era uma proposta minha, eu pensava nisso, será que os professores pensam nisso também para fazer um curso de formação? Então no ano passado fiz a formação para sondar os conhecimentos e interesse dos professores em participar dessa formação (desse ano). É um tema único e uma das coisas que a gente pode ter pecado nesta formação (dos racionais), mas tentei falar sobre jogos, resolução de problemas, a ideia da BNCC, (que transporta para outros conteúdos). Também percebo que não é em um encontro que a pessoa sana uma dificuldade e ainda encontros mensais, passa muito tempo/coisas de um encontro para outro.*

(Prof. B): Mas tu estás fazendo uma retomada de conteúdo toda aula (encontro). Em aula normal de um dia para outro já se retoma imagina aqui que passa um mês do encontro.

Godino, Batanero, Font (2007), no EOS, formularam uma ontologia de objetos matemáticos que considera a Matemática sob um dos aspectos como atividade de resolução de problemas. Além disso, foi discutido com os professores que os significados dos números racionais emergem a partir de diferentes situações contextualizadas (KIEREN, 1988). Desta forma, no curso de formação, organizamos um sistema de práticas[32] onde o professor pudesse compreender um objeto matemático de estudo por meio de uma situação desencadeadora. Visto as respostas dos professores a questão acima, de uma forma “vaga”, ponderamos necessário a segunda etapa desse estudo para compreendermos a negociação de significados que os professores alcançaram e, ainda, o que possivelmente eles propõem a seus alunos.

- Algum tema (matemático ou didático/pedagógico) envolvendo o assunto não foi desenvolvido?

(Prof. B): Acredito que o que foi proposto foi desenvolvido. Daí as dúvidas que nós tivemos né, até hoje mesmo ali o jogo comecei bem (Escala Muro), mas depois ali me atrapalhei. E na ânsia de querer terminar, fazer rápido.

(Prof. A): Também acredito nisso.

(Prof. B): Até as próprias questões que a gente resolveu (aquela que tinha da hora, uma das primeiras questões, primeiras aulas), muitas a gente fez aqui outras em casa. Algumas

[32] É um conjunto de práticas matemáticas (operativas e discursivas) que uma pessoa manifesta em sua ação perante tipos de situações problemas (GODINO, 2017).

fiz errado. O Prof. A disse que uma fez errada, que chegou em casa e percebeu que fez errado.
Formadora: percebi com vocês que não havia tempo suficiente para fazer em casa, então priorizei fazer aqui.
(Prof. B): Eu acho melhor fazer aqui mesmo.
(Prof. A): E acho que essas observações que tu fazes talvez alguns não gostem, talvez seja motivo para não terem vindo, mas eu acho que, às vezes, as discussões, esses comentários que uns fazem, faz agregar mais ainda.
(Prof. B): Que é muito fácil criticar o outro.
Formadora: os alunos têm costume/hábito falar mal do professor, da postura, das metodologias (ou falta de), mas é muito difícil estar aqui como formadora de vocês, dar uma formação para professores, porque todos os professores já têm suas concepções, sua formação, sua ótica de ver as coisas, e é difícil a gente chegar aqui e propor uma atividade, e eu sou de fora, não estou no convívio diário de vocês, então ela (formadora) vai chegar e me propor uma coisa. Então além do conhecimento tem que ter empatia. Não é algo simples, mas é algo que qualquer professor tem que ter para conseguir chegar na pessoa, não estou me esquivando de qualquer responsabilidade, mas sou ciente de que quando tu chegas numa sala de aula tu estás sendo avaliado de todas as maneiras possíveis.
(Prof. B): Até nós mesmos aqui. Faz anos que tu estás trabalhando, mas tu vais numa sala e tu é bem recebido ou não.
Formadora: mas é sempre um processo de superação. A nossa bolsista fala mal dos professores, mas eu espero que isso sirva, pelo menos, para ela não fazer igual. Que ela seja melhor, que supere seu mestre. Porque não é simplesmente criticar é como eu posso fazer melhor se eu vejo que isso não é bom.
Bolsista: concordou.
(Prof. A): Mas tem um detalhe também. Tem o professor e o professor. Porque nós temos, pela experiência de vida até agora, eu vejo professor que são dedicados e tem professor que vai ali só pelo dinheiro que está ganhando.
(Prof. B): E agora que não está ganhando em dia, pior ainda.
Bolsista: agora eu vou falar porque eu falo mal dos meus professores.
Formadora: quero te dizer que tu não és a única. Eu falava muito mal dos meus professores, hoje falo um pouco menos. Mas falo.
Bolsista: dizem que a gente tem implicância com os professores. Eu sempre aprendi fazendo listas de exercícios e não acho que seja ruim. Assim não acho que dar listas de exercícios longas seja ruim e o professor. faz isso. O que eu acho ruim é que ele usa apenas o projetor (não resolve junto com o aluno no quadro, traz já pronto e exercícios e comenta os principais passos), ele fala muito, tem apenas 10 min de intervalo as outras 4h é ele

apenas falando. Não tem aquele momento que ele diga agora tentem fazer esse exemplo. O exemplo está pronto no quadro, tu olhas se não entendeu paciência. É nesse ponto que eu critico as aulas dele. Eu penso que futuramente, que eu não aprendo tudo o que eu deveria aprender na aula com ele. Só que tem outro problema porque ele aprendeu assim e ensina como aprendeu. Daí tem muita reprovação na disciplina e parece que ele joga toda a culpa nos alunos, ele não altera em nada a aula dele.

(Prof. B): Por mais que tenha a tecnologia, máquinas, precisa do professor.

Bolsista: ele não reavalia ele mesmo.

(Prof. A): Mas quando a gente foi para universidade o que a gente percebia é que os professores se achavam os tais do conhecimento, eu tive a oportunidade de ter professores assim, que falava umas coisas e largava a turma para estudar por conta, tu te viras, e não estava nem aí.

(Prof. B): Não tinha uma conversa assim.

Formadora: a grande maioria dos nossos professores era assim, e foi assim que a gente aprendeu.

Bolsista: no próximo semestre ele não revê as atividades, não é possível que o problema seja só dos alunos.

- Quanto aos estudos realizados em documentos oficiais (BNCC e PPP), como isso contribui na sua prática de ensino?

Formadora: a minha prática de ensino não é a mesma de vocês, mas de maneira geral eu achei a proposta de BNCC boa, como diz a professora bem bonita, mas realmente difícil de ser colocada em prática, tem muito conteúdo por ano para ser abordado, tem muitas habilidades e competências. E a professora ressaltou algo que é verdade: a gente tem uma lista de conteúdos a vencer, se eu for aplicar uma metodologia de jogos ou resolução de problemas isso requer mais tempo, só pela experiência que dei hoje (questões da OBMEP) provavelmente vocês ficariam 2 períodos para desenvolver. Até percorrer os passos ler, entender, criar estratégias, socializar, formalizar passa o tempo, foi 2 períodos. Daí com tu avança no conteúdo com essa metodologia sempre? Ou se vai usar muitas vezes essa metodologia? Porque para desenvolver as competências que estão listadas na BNCC tu tens que usar muito essas metodologias. E a gente não tem aquele respaldo do aluno que a gente vai propor um exercício para casa e ele vai trazer pronto ou com as dúvidas na próxima aula. Não existe isso. Não existe na educação básica e nem na superior. Isso não é uma cultura nossa. Talvez um dia foi. Eu era assim.

As professoras concordam.

(Prof. A): Às vezes a gente até tenta ser mais rigorosa (de pedir os temas de casa) mas não dá em nada.

Formadora: eu passava caderno por caderno, tinha carimbo para dizer que fez o tema ou não. Mas não percebia muitos efeitos nisso. Era mais no sentido da família acompanhar as atividades do filho. Essa semana aconteceu do aluno falsificar a assinatura da mãe.

Formadora: daí é mais um desgaste. Mas complementando como a BNCC vai chegar nos PPP das escolas ainda realmente não sei. Aqui seria a possiblidade dos professores conhecerem um pouco mais da lei. Então realmente, o conhecimento que o professor precisa ter para entender a proposta da BNCC e levar para o seu PPP e que também não fique apenas no PPP da escola que seja realmente colocado em prática. Porque a escola pode simplesmente copiar o que está escrito lá e pronto. Agora na realidade da sala de aula como isso vai chegar?

(Prof. A): Qual o efeito que isso vai surtir?

Formadora: é um desafio para os professores realmente.

- O trabalho desenvolvido durante esses encontros propiciou algum avanço em relação aos seus conhecimentos anteriores, no que se refere aos números racionais?

  (Prof. A): Claro que sim, eu acho que tudo que foi desenvolvido conosco veio a acrescentar. O que mais me chamou a atenção foi a própria metodologia que temos aplicado em sala de aula, acho que houve um avanço, acho que deu para gente observar algumas coisas que até então a gente não fazia.

  (Prof. B): Não quis acrescentar nada a pergunta.

- Quanto às atividades desenvolvidas, numa perspectiva de contextualizar o objeto (situação-problema), são oportunas num curso de formação? E para a sala de aula?

  *(Prof. B): Bom nós tivemos dificuldades aqui também, né. Imagina nossos alunos**.** Nós colocarmos as atividades que foram feitas aqui. Claro que nós já temos o conhecimento, e ainda assim tivemos dificuldades em algumas situações. Pro aluno é um pouquinho complicado.*

  Formadora: eu quero dizer que eu busquei todas as questões que fossem apropriadas para alunos do ensino fundamental, mas como a defasagem é tão grande, a gente sabe que para aqueles alunos em específico não é apropriado.

  (Prof. B): Tem uns que vão além.

  Formadora: eu não quis simplesmente colocar problemas difíceis, não era essa a questão, mas também não queria colocar exemplos tão banais que não desse um estímulo a mais.

  (Prof. B): Para fazer eles pensarem.

  (Prof. A): Sabe que nos primeiros encontros um exercício eu fiz errado, eu tenho consciência.

(Prof. B): Mas uns quantos fizeram errado.

Formadora: não é questão do certo ou errado, mas de pensar sobre. Se eu não fizesse vocês pensarem sobre ou pensar da mesma forma que pensam eu não ia para frente. Eu não vim aqui para colher a flor, mas para plantar a semente.

(Prof. B): E também não valeria todos esses encontros.

Formadora: os exercícios que propus hoje são da OBMEP de 6º ou 7º ano, podem me dizer que são difíceis, complexos, mas são exercícios que eles deveriam saber fazer. Propus então fazer alguns encaminhamentos para que os alunos pudessem ir permeando a questão para responde-la.

(Prof. A): Mas se a gente pudesse nivelar os alunos todos no mesmo padrão, mas a gente não consegue. Nós temos diversas situações dentro da sala de aula, então é complicado.

(Prof. B): Alunos drogados, NE, laudos.

(Prof. A): Eu tive alunos inteligentíssimos, aqueles que queriam buscar mais e mais.

(Prof. B): Mas no fim eles desaminam por causa dos outros. A gente tentava trazer uma atividade a mais para ele. Mas chega num determinado momento que tu não consegues.

Nas duas últimas questões foi possível notar o distanciamento (ou limitação) dos professores quanto a resolução de problemas e como os próprios professores identificam como problemas difíceis (maior carga cognitiva ao professor e aluno). O Prof. A identificou a metodologia aplicada em aula e a proposta no curso como um ganho. As interações desenvolvidas entre formadora e professores, via a resolução de problemas, percebemos como uma negociação de significados marcante (mesmo com a resistência dos professores quanto ao tempo, desinteresse e defasagem do aluno).

- E de que forma os recursos tecnológicos como *applets* podem ser facilitadores na aprendizagem dos seus alunos?

Bolsista: eu encontrei um obstáculo no meu estágio porque eu gostaria de ter levado meus alunos para sala de informática, ***não pude porque os computadores da escola não estão funcionando por causa da última enchente.***

(Prof. A): ***Viu só (para a formadora), olha o que eu digo****.*

(Prof. B): Tinha que ter ido para minha escola, lá funcionam.

Bolsista: então fui para o recurso manipulável. Acho que tudo depende do encaminhamento da atividade, eu não sei até que ponto eu aprenderia com applet porque eu aprendi a reproduzir exercícios (listas), assim não sei até que ponto o applet me facilitaria. Mas eu acho que é um recurso válido, sempre que possível usar, depende de cada turma, para tentar buscar uma aprendizagem.

(Prof. B): ***Depende do conteúdo, tem alguns que não são válidos.***

Formadora: eu só gostaria de ressaltar que a gente não aprendeu com recursos tecnológicos, mas eu acho que nossos alunos aprendem assim (com TICs).

Bolsista: eu acho que no mínimo a gente tem o dever de tentar que eles aprendam.

Formadora: exatamente isso. A gente propõe, se realmente não dá certo, a gente deixa, mas a gente tentou. A gente precisa entender que eles não estudam do jeito que a gente estuda. Eles não aprendem do jeito que a gente aprende. E por isso levei vocês para o laboratório, coloquei alguns applets, porque eles servem para desenvolver também o conhecimento sobre tal conteúdo do número racional, mas também parte do professor fazer com que aquela proposta seja válida, porque se nem o professor acredita naquela proposta, fica mais difícil para os alunos.

(Prof. A): Com certeza.

Formadora: é uma questão de a gente refletir sobre o uso de laboratórios e TICs o quanto a gente usa (se tem condições de usar se tem os labs), como manter o uso, o que pode ser potencializado no ensino, ciente também que ela não é a salvação da educação, nada por si só a salvação da educação. Mas um conjunto de atividades que não deixa o aluno sempre na mesma posição, de sempre passivo a seu estudo, é o que pode vir a melhorar a educação.

- Como sugestão, o que não precisaria ser desenvolvido num próximo curso de formação continuada?

Formadora: acho que se fosse participar de um curso de formação, acredito que ele não precisaria ser tão longo, iniciar uma atividade em março e concluir em novembro. Tipo fazer 3 encontros de jogos, 3 de tics, onde o professor se organiza com início e fim, pois acham que perdem um encontro e não vão mais se achar no curso. Fazendo no horário de planejamento do professor.

(Prof. B): Talvez por trimestres. Mas tem professores que não fariam de jeito nenhum pela questão do desanimo, falta de pagamento. Mas, também, quando não tem, eles reclamam por falta de formação à secretaria de educação.

(Prof. A): Eu acho que um dos grandes problemas foi a imposição da secretaria da educação com esse curso.

Formadora: foi imposto, mas não foi imposto.

(Prof. B): Fazer no dia da folga (o maior problema para os professores que não participaram).

(Prof. A): Eu acho que o problema maior foi a imposição. Daí quando um desistiu o outro achou que poderia desistir.

Bolsista: no trabalho que apresentei uma professora da banca me perguntou porque os professores não participavam. Qual o posicionamento da secretaria educação para a falta dos professores? Que os professores tinham sido convocados, tinha sido organizado os *horários deles para o planejamento nas segundas para participarem das formações, só que a secretária não podia pegar pela mão e levar.*

A dinâmica das placas serviu para avaliação do curso, mas também teve caráter formativo, pois serviu para refletir, retomar ideias, compreender propostas/atividades desenvolvidas durante o curso. Vale ressaltar, que os dois professores (A e B) participaram de todos os encontros desse estudo.

No último encontro, propomos aos professores sua autoavaliação durante o curso via um questionário (Apêndice D, novo encontro). As questões retomaram algumas já descritas na avaliação (visto que poderiam não ser os mesmos professores a participar dos dois instrumentos de avaliação – não ocorreram no mesmo dia e, também, o professor poderia se sentir mais à vontade na fala ou na escrita – logo as respostas poderiam não ser as mesmas para cada instrumento). Entretanto, foram os mesmos professores (A e B) que responderam ao questionário e as respostas não variaram de um instrumento para outro. Os professores se autoavaliaram como suficiente o nível de envolvimento/comprometimento com o curso de formação.

Tomamos uma questão sobre o emprego de *applets*, explorado durante a formação, e questionamos: a formadora ao abordar sobre recursos didáticos (jogos ou *applets*), intentou vislumbrar possibilidades para esses materiais que facilitassem/potencializassem a aprendizagem dos alunos. Como, por exemplo, organizar uma atividade avaliativa por meio do *applet*. Como você compreende essa possibilidade no seu local de trabalho?

(Prof. B): Sim, os alunos estão acostumados a grande maioria a forma tradicional: leitura, cópia e interpretação (quadro ou livro) e desta forma há novidades em relação a apresentação de determinado conteúdo e também poder-se-á ocorrer a aprendizagem.
(Prof. A): Acho muito válido. Pois esses recursos são atrativos e conseguimos uma atenção maior por parte deles, e com isso conseguimos que o cognitivo funcione.

Outra pergunta foi relacionada a BNCC, em se tratando de uma competência em específico: “exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas”. Na qual perguntamos a) como você percebe que a Matemática pode contribuir para que essa competência possa ser alcançada, ou seja, que o aluno desenvolva as habilidades mencionadas?

(Prof. A): Basicamente a matemática está inserida em todos os contextos. Portanto, todos os objetivos podem ser alcançados, desde que os professores se proponham para isso.

(Prof. B): Através da pesquisa, de situações-problemas, do cotidiano, das tecnologias e instigar com que os alunos que deixem a preguiça de pensar de lado.

No item b), o que você identifica como obstáculo(s) hoje ao aluno para que a aprendizagem de Matemática tenha a perspectiva de desenvolver essa competência?

(Prof. A): Porque não querem pensar, querem tudo pronto (alunos).

(Prof. B): A preguiça de pensar e a falta da família, porque antigamente a mesma era mais presente.

No item c), o que você identifica como obstáculo(s) hoje ao professor para que o ensino de Matemática tenha a perspectiva de desenvolver essa competência?

*(Prof. A): Não acho que exista obstáculos**.** O professor tem que ser criativo nas exposições de suas aulas. Instigar seus alunos na compreensão dos significados.*

(Prof. B): Valorização, materiais suficientes para o número de alunos em sala de aula; cursos de formação com oficinas de matemática.

Uma das perguntas foi direcionada a como a formação influencia/impacta nos seus conhecimentos ao planejar, implementar e avaliar um processo de ensino e aprendizagem (não necessariamente ao tópico de números racionais). Obtendo as respostas

(Prof. A): Foi muito importante, pois mostrou outras alternativas de como podemos ensinar, não deixando cair na mesmice dos nossos conhecimentos. Acho que abriu janela para que possamos aprimorar nossos planejamentos de aula. Conseguimos visualizar de uma outra forma em relação ao que estamos acostumados.

(Prof. B): Aprendemos a ensinar de uma outra forma. Visões diferentes e agregadas a um único objetivo "os alunos". Elaborar atividades que instiguem o aluno a pensar e entender o que está estudando, não fazer por fazer.

Destacamos as três perguntas supracitadas da autoavaliação por compreendermos que as respostas dos professores se inter-relacionam no sentido que foram desenvolvidas atividades que levaram os professores a perceber que o processo de ensino e aprendizagem pode ocorrer de outra maneira que não apenas aquela aula expositiva, com uso maciço do quadro e livro didático. A vivencia (uso) dos recursos tecnológicos e de uma metodologia que torne os alunos mais ativo a sua aprendizagem foram pontos chaves para a expressão "sair da mesmice".

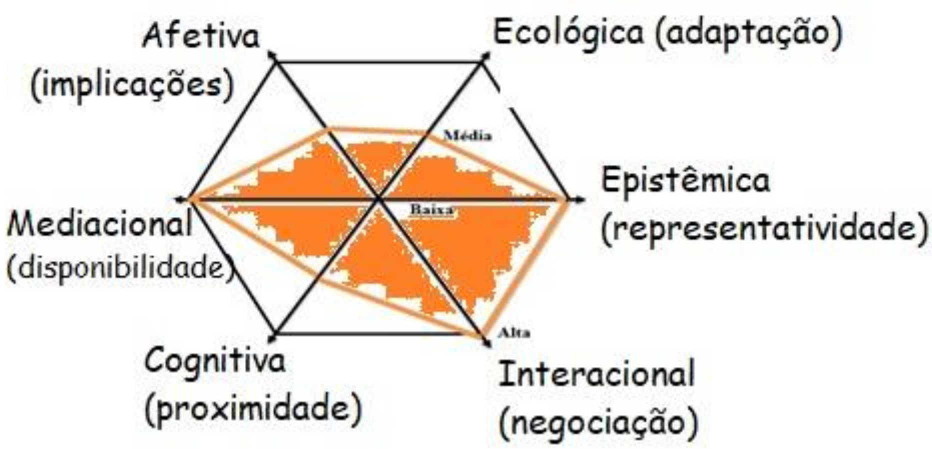
Deste modo, indicamos a dimensão interacional dos professores nesta formação continuada como **alta** e justificamos este conceito pelas interações que ocorreram durante os encontros foram frutíferas. Conseguimos plantar uma semente e esperamos que esses conhecimentos cheguem ao ambiente de suas salas de aula. Entretanto, observamos que é preciso regar essa planta, isto é, que os professores se estimulem a (re)organizar suas ideias e planejamentos, adequadas as condições da escola/alunos, para que o conhecimento referencial explorado nesta formação se condense ao implementado no ambiente de sala de aula.

Fisicamente, por meio do portfólio, que cada professor recebeu o seu, o docente pode ter facilitada sua tarefa de planejar novas aulas sobre números racionais, visto que a organização dos conhecimentos a serem mobilizados foram construídos/desenvolvidos nesse material. No portfólio, há o conhecimento referencial adotado, mas, também, as dificuldades apontadas pelos professores no seu ambiente de sala de aula, possíveis superações socializadas com os demais professores, elaboração de atividades considerando dúvidas recorrentes, encaminhamentos para elucidar conflitos cognitivos, recursos didáticos que potencializam a compreensão de um objeto matemático, dentre outras possibilidades.

Além disso, durante a organização do curso de formação e, principalmente, em como alcançar a alta idoneidade da dimensão interacional, nos alicerçamos na frase de Benjamin Franklin ao dizer "Diga-me eu esquecerei, ensina-me e eu poderei lembrar, envolva-me e eu aprenderei". A frase é simples e facilmente compreendida/aceita como uma verdade. Porém, não é fácil alcança-la, isto é, envolver alguém.

A figura 30 ilustra o alcance que apontamos nesse processo/estudo, onde nas seções anteriores apresentamos as atividades desenvolvidas para cada dimensão e as avaliamos.

Figura 30 - Os critérios de idoneidade didática do processo vivido



Fonte: da pesquisa.

Trabalhamos/estudamos a partir das condições de trabalho dos professores, de suas dificuldades e superações, buscamos aprimorar os conhecimentos didático-matemáticos dos professores ao ensinar sobre números racionais no Ensino Fundamental nos anos finais, discutimos e refletimos sobre os documentos curriculares do entorno, a adequação e pertinência de recursos didáticos e métodos de ensino e aprendizagem para que todos esses fatores, via as dimensões do CDM, pudéssemos alcançar uma maior idoneidade didática nesse processo.

Neste sentido, a figura 30 ilustra o conhecimento pretendido no hexágono regular e o alcançado pelos professores no hexágono irregular (em laranja). A complexidade em equilibrar o conhecimento referencial e cognitivo dos professores, considerando os entornos e recursos disponibilizados, revela a necessidade de se trabalhar na zona de conhecimento potencial dos professores (e de acordo com as dificuldades apontadas) e a necessidade de aprimoramento constante e principalmente do conhecimento especializado.

Além disso, organizamos uma trajetória didática onde os professores pudessem conhecer e compreender o conhecimento especializado sobre os números racionais, isto é, uma variedade de situações-problemas onde os significados parciais fossem explorados, as linguagens (registros semióticos), as estruturas (a capacidade de resolver problemas que envolvem os diferentes significados depende da compreensão das concepções fundamentais para o entendimento dos números racionais) e a capacidade de argumentação (dado o conhecimento referencial compreendê-lo e justificá-lo).

Os recursos didáticos foram empregados no curso de formação como uma forma de mobilizar um conhecimento/objeto matemático, logo compreendendo o papel potencializar e facilitador dos materiais concretos e digitais no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais. Como também, consideramos os entornos e o currículo pré-determinado para desenvolver os objetos de conhecimentos e habilidades envolvendo os números racionais.

O grau de idoneidade didática do processo vivido reúne características que permitem mensurá-lo como idôneo para conseguir a adaptação entre os significados pessoais alcançados pelos professores e os significados institucionais implementados pela formadora, dado o contexto da formação. A articulação coerente e sistêmica das dimensões neste processo de formação continuada de professores de Matemática se revela como um ambiente propício de aprimoramento dos conhecimentos didático-matemáticos dos professores e como uma teoria que subsidia e orienta uma proposta de ensino e aprendizagem.

A escolha pelo aporte teórico deste estudo levou em consideração que não seria um fator (dimensão) que tornaria a aprendizagem dos alunos mais eficiente. O sistema modular adotado parte da dialética entre professor e aluno, ensino e aprendizagem, ou seja, são duas partes que unidas promovem um processo de ensino e aprendizagem em Matemática. Neste estudo, verificamos o quanto cada uma dessas partes interfere nela própria (parte) e implica na outra parte.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo destinamos para apresentar os relatos finais e ideias para projetos/pesquisas futuras oriundas deste estudo. Organizamos este relato de forma a contemplar a perspectiva da autora sobre o estudo e apresentar nossas respostas à questão norteadora dessa tese.

Primeiramente destacamos a relevância da metodologia de Resolução Problemas empregada e estudada durante o curso de formação com os professores de Matemática. Cabe dizer, que não foi um desafio apenas aos participantes, mas à formadora também. Elaborar problemas é complexo, requer empenho, estudo e conhecimento do que é pertinente ao aluno/professor naquele momento para ser explorado e estimular/desenvolver a aprendizagem via a situação proposta.

Como um relato, mencionamos que organizar, elaborar e selecionar atividades para o portfólio dos professores nos proporcionou conhecimentos além do que propriamente pensamos, como também, resiliência (os professores participantes não estão acostumados a trabalhar nessa perspectiva, são resistentes e questionam a validade do método). Desta forma, foi necessário articular a teoria à prática. Do nosso ponto de vista, os professores precisavam vivenciar, praticar, organizar as ideias/estratégias de ensino e aprendizagem via a Resolução Problemas, pois havia um distanciamento. Assim, propúnhamos uma atividade como se fossem alunos para praticarem e, após, com o olhar de professor, como a atividade foi organizada, os questionamentos e encaminhamentos realizados durante a tarefa pela formadora.

Neste sentido, os portfólios construídos individualmente por cada professor foram vistos como um instrumento potencializador para orientar a proposta da formação, organizar suas ideias/pensamentos e nas elaborações de atividades. Na troca de experiências e dificuldades do ambiente de sala aula, foi possível observar a reflexão que se agrega/complementa à escrita do portfólio. Como também, o portfólio foi organizado para oportunizar novas experiências aos professores no seu ambiente de sala de aula ao revisitar o material e complementar/aprimorar seu planejamento de ensino e aprendizagem.

Uma característica notada tanto pelos professores participantes quanto da formadora é a forma de organizar a pergunta (situação-problema), normalmente não questionando um ponto único (fechado, que apenas necessita de um algoritmo para a solução). Nessa condição, que os professores começaram a perceber que uma lista de exercícios (do livro didático) por si só não sustenta uma metodologia de Resolução Problemas.

Uma das maiores dificuldades que percebemos, que fez também, com que a idoneidade cognitiva no curso de formação fosse considerada média, foi exatamente o conhecimento especializado pouco sedimentado pelos professores. É uma arte elaborar problemas, elaborar perguntas que permitam aos alunos criarem estratégias, contraporem pontos e argumentar uma solução. Aos professores vemos como um desafio a prática e ao sistema escolar algo que deve ser perseguido, acomodado e valorizado.

Durante as conversas com os professores nos encontros de formação, foi nítido a acomodação do ensinar e aprender via o livro didático. Acomodação no sentido de apenas seguir o processo instrucional proposto pelo livro didático. Reconhecemos a situação complexa/difícil dos professores dada pela desvalorização (social e salarial) e, consequentemente, desmotivação no ambiente escolar.

Contudo, vemos que dom (boa vontade e apenas o conhecimento comum) não sustenta um processo de ensino e aprendizagem e, sim o conhecimento especializado sustenta. E, desta forma, buscamos desenvolver/aprimorar os conhecimentos dos professores para o ensino dos números racionais nos anos finais do Ensino Fundamental.

Com o olhar de formadora e investigadora no curso com professores de Matemática, podemos visualizar fragilidades no processo de ensino, limitações de infraestrutura das escolas e algumas superações encontradas pelos professores no ambiente escolar. A nós, que vemos de fora, é enriquecedor trabalhar com professores e compreender os tantos desafios que a comunidade escolar vive.

Havia uma expectativa inicial nossa em buscar/alcançar uma maior idoneidade didática ao ensinar números racionais nos anos finais do Ensino Fundamental, contudo uma formação continuada nos proporcionou emoções e ações além dos objetivos. O envolvimento na vida profissional dos professores, ouvir, indicar contrapontos e buscar compreender as situações ou dificuldades foi um desafio como formadora e com um caráter formativo de extrema relevância para quem busca, via um programa formativo, defender uma tese com objetivos claros, via o GVID-IDM, alcançar um processo idôneo.

Retomando a questão norteadora dessa pesquisa: Como mobilizar conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais num grupo de professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental durante um curso formativo com base no CDM? vamos olhar para os resultados encontrados, durante o estudo, para respondê-la:

No referencial teórico dessa pesquisa, apresentamos o que a literatura aponta como necessário para o estudo dos números racionais no Ensino Fundamental, tais como as concepções fundamentais de partição, unidade, densidade, ordenação, valor posicional, equivalência, as operações elementares, raciocínio multiplicativo, os significados: parte/todo, quociente, razão, operador e medida e as suas representações (fracionária, decimal, porcentagem e pictórica).

Entretanto, organizamos o curso de formação com professores de Matemática para discutirmos o que e como o aporte teórico está sendo empregado nas salas de aulas na perspectiva do CDM. De uma forma ou outra, os professores relataram que abordam os temas supracitados. De forma não explícita a densidade (não dita com esse nome), mas explorada a ideia via a reta numérica quando tratado de valor posicional e ordenação. Como também, de forma implícita, os significados dos números racionais (na forma de fração).

Por várias vezes, durante os encontros, os professores estavam surpresos com a classificação (dos significados) apresentada. Ao mencionar e exemplificar um por um, os professores reconheciam as possíveis interpretações da fração. Ao ponto de um professor dizer "*eu nunca tinha pensado nisso antes*" e anotar os exemplos do quadro no seu material.

Além disso, como estávamos interessados nos conhecimentos didático-matemáticos dos professores, abordamos os meios, as interações, os entornos sociais e as motivações para um processo idôneo de ensino e aprendizagem dos números racionais. Via o capítulo dos resultados e discussões do curso de formação, apresentamos e discutimos recursos e métodos, conhecimentos de referência (institucional) e documentos oficiais que regem o entorno como uma possibilidade de alcançar a alta idoneidade didática do processo vivido.

As atividades desenvolvidas no curso de formação estavam centradas na elaboração e encaminhamentos das atividades pelo professor, isto é, nos conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática, assim como, dele refletir sobre as atividades que usa em sala de aula, porque as seleciona/organiza e os meios para aplicação. Desta forma, buscamos trabalhar com os professores atividades que tornassem o aluno mais ativo, indagador e argumentativo de suas ideias e soluções.

Desse modo, defendemos e comprovamos a tese de que programas de formação continuada de professores de Matemática com base em pressupostos teóricos definidos e intencionais, como no caso específico do GVID-IDM, mobilizam e aprimoram os conhecimentos didático-matemáticos dos professores ao ensinar um tópico específico de Matemática.

Em outras palavras, o curso formativo inserido na realidade do professor, com uma temática de estudo apropriada/escolhida, com atividades centradas na elaboração e encaminhamentos do professor e com objetivos claros a partir da teoria (articular de forma coerente e sistêmica os componentes do GVID-IDM) foram balizadores para ampliar os conhecimentos comum e ampliado e aprimorar o conhecimento especializado do professor de Matemática.

Em específico ao GVID-IDM, foi possível descrever, analisar e avaliar os conhecimentos mobilizados e necessários do professor de Matemática para um processo de ensino idôneo dos números racionais para o Ensino Fundamental. Por meio do guia e articulando as facetas, o curso formativo otimiza os conhecimentos, os recursos, as interações, os entornos envolvidos na aprendizagem dos alunos e as motivações para se obter uma maior idoneidade didática.

Como proposta futura, percebemos a necessidade de aplicar as atividades desenvolvidas neste curso com turmas de 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, por meio de uma sequência de ensino, tendo em vista que as atividades elaboradas são inéditas (no sentido de como foram exploradas e encaminhadas pela formadora). É necessário investigar como é possível mobilizar os conhecimentos dos alunos e promover uma aprendizagem eficiente das concepções fundamentais, dos significados e representações dos números racionais por meio dessas atividades com alunos da Educação Básica.

Como também, percebemos a necessidade de investigar, num foco específico, os significados dos números racionais, isto é, por que os professores reconhecem os significados das frações, mas não aplicam explicitamente no seu processo de ensino e aprendizagem dos números racionais? Dizemos que os professores participantes dão pouca atenção a esse tema observando o desempenho e fala dos mesmos ao selecionar exercícios do livro didático que explorassem os significados ou quando tratado na BNCC como um objeto de conhecimento obrigatório. Os estudos de Onuchic e Alevatto (2008) apontam na direção do pouco conhecimento ou ignorado pelos professores, na sala de aula, dos significados das frações.

Essa situação já nos leva a outra que é a formação dos professores inicial ou continuada. Todos os professores participantes, a formadora e a bolsista do projeto (licencianda em Matemática) não receberam na sua graduação (ou até o momento) formação sobre os significados das frações. Então, após o avanço da Educação Matemática, como os cursos de formação de professores estão recebendo e absorvendo os conhecimentos desenvolvidos por esta área de conhecimento e aprimorando/qualificando seus futuros profissionais da educação brasileira quanto a este tema em específico? Demos um enfoque na formação inicial do professor porque ali está a base, o alicerce para novos conhecimentos. E, também, porque a formação continuada não é algo obrigatório ao professor ou, ainda, ele pode fazer várias formações e não tratar do tema.

O curso de formação foi organizado com os professores para ser um ambiente formativo (de aprimoramento) e investigativo (mobilização de conhecimentos). No intuito de deixá-los à vontade para trocas de experiências e dificuldades da sala de aula, possibilitando, assim, a mobilização de conhecimentos a partir da sua realidade. Tomando a união do formativo e investigativo, percebemos a necessidade de compreender com maior profundidade as possíveis estratégias que os professores devem seguir para que conheçam as ferramentas do EOS e do CDM, assim como, as adaptem e apliquem a sua própria prática.

Em outras palavras, Godino et al (2013) apontam que se o professor adquire competência em aplicar o GVID-IDM pode ter facilitado sua tarefa de planejar, implementar e avaliar processos instrucionais idôneos. No ambiente de formação continuada, notamos um discurso “devemos partir do cotidiano do aluno”. Entretanto, via a perspectiva do EOS e do CDM, não é simplesmente observar o entorno do aluno que garante um processo de ensino e aprendizagem idôneo. É preciso olhar para as distintas dimensões (facetas) desse processo.

Neste sentido, buscamos explorar as diferentes dimensões do CDM no curso de formação. E notamos, neste caso, que os professores enxergam como “muita teoria” a idoneidade didática por exemplo. Desse modo, percebemos oportuno investigar de forma específica, como os professores podem criar estratégias ou passos para compreender e aplicar o GVID-IDM.

Por fim, ressaltamos a importância e relevância em investigar os conhecimentos didático-matemáticos dos professores para que se possa compreender como um processo de ensino e aprendizagem pode alcançar uma alta idoneidade didática no ambiente de sala de aula ao desenvolver conhecimentos matemáticos. O curso de formação continuada proposto oportunizou a mobilização de conhecimentos envolvendo os números racionais, entretanto, não alcançou alta idoneidade didática em todas as dimensões, visto as condições dos sujeitos participantes e entornos sociais/políticos/administrativos envolvidos.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, L.S. **Currículos de matemática no Ensino Médio**: um olhar sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do conhecimento e da instrução matemática. 2014. 257f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2014.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching. What makes it special? **Journal of Teacher Education**, USA, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational number concepts. *In* LESH, R; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-125

BEHR, M. J., HAREL, G., POST, T. & LESH, R. Rational number, ratio, and proportion. *In* GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. p. 296-333.

BEHR, M.; POST, T. Teaching rational number and decimal concepts. *In* POST, T. **Teaching mathematics in grades K- 8**: Research-based methods. 2 ed. Boston: Allyn and Bacon, 1992. p. 201-248

BEHR, M. ET AL. Order and equivalence of rational numbers: a clinical teaching experiment. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.15, n.5, p. 323-341, 1984.

BICUDO, M.A.G. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **R.B.E.C.T**., v.5, n.2, mai-ago 2012. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1185. Acesso em 24 jan. 2018.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994

BORBA, M.C. **A pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. *In:* Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG, p. 21-24, 2004. CD-ROM. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf. Acesso em 24 jan. 2018

BLUMER, H. **El interaccionismo simbólico**: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1969.

BRASIL. [BNCC, 2017]. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília. [2017]. 472f. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em 24 jan. 2018.

BRASIL. [PCN,1998]. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: 1998. 142 f. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em 14 jan. 2018.

BROUSSEAU, G. **La théorie des situations didactiques**. Grenoble: La Pensee Sauvage. 1998

CAMPOS; T.M.M.; MAGINA, S.; NUNES, T. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.8, n. 1, p. 125-136, 2006.

CARPES, P.P.G.; PIGATTO, A.G.S; BISOGNIN, E. Mapeamento de pesquisas sobre números racionais: análise das abordagens e tendências em teses de doutorado. **Anais do 9º Simpósio de Ensino, Pesquisa e Extensão**. 2017. Disponível em http://www.unifra.br/eventos/maiseventos/Anaiss.aspx?id=4AnWLXmkbCE=. Acesso em 23 abr 2018.

CARPES, P.P.G.; PIGATTO, A.G.S; BISOGNIN, E. Mapeamento de pesquisas sobre o Enfoque Ontosemiótico: implicações e contribuições. *In:* VII Jornada Nacional de Educação Matemática e XX Jornada Regional de Educação Matemática, 2018, Passo Fundo. **Anais VII Jornada Nacional de Educação Matemática e XX Jornada Regional de Educação Matemática**. 2018. Disponível em: http://jem.upf.br/images/Trabalhos2018/Eixo3/cc_01034345001-versao-identificada-1.pdf. Acesso em 24 mai. 2018.

COBB, P.; BAUERSFELD, H. (Eds.) **The emergence of mathematical meaning:** Interaction in classroom cultures. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1995

CANCHANYA, J. F. CÁRDENAS. **Análisis de problemas de adicion, sustraccion y multicplicacion de expressiones decimales, creados por estudiantes del 6º grado de primaria em uma experiência didáctica**. 2015, 128f. Tese de doctorado (Magister en Enseñanza de las Matemáticas), Pontificia Universidad Catolica do Perú, Perú, 2015.

CHARALAMBOUS C. Y.; PITTA-PANTAZI D. Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. **Educational Studies in Mathematics**, Switzerland, v.64, n.3, p. 293-316, 2006.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportees par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, France, v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992

CHEVALLARD, Y. L’analyse des pratiques enseignantes en theorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, France, v.19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CROCKETT, T. **The portfolio journey**: a criative guide to keeping studentmanaged portfolios in the classroom. Englewood Colorado: Teacher Ideas. A Division of Libraries Unlimited, 1998.

D'AMORE, B.; FONT, V.; GODINO, J. D. La dimension metadidactica en los procesos de ensenanza y aprendizaje de las matematicas. **Paradigma**, Venezuela, v. 28, n.2, p. 49-77, 2007.

DUVAL, R **Sémiosis et pensée humaine:** Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berna: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus, 2003. p. 11-33.

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. **Educational Studies in Mathematics**, Switzerland, v. 82, p. 97-124, 2013.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matematicos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, France, v. 14, n.3, p. 325-355, 1994.

GODINO, J. D. Un enfoque ontologico y semiotico de la cognicion matematica. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, France, v. 22, n. 2/3, p. 237-284, 2002.

GODINO, J. D.; CONTRERAS, A.; FONT, V. Analisis de procesos de instruccion basado en el enfoque ontologico-semiotico de la cognicion matematica. **Recherches en Didactiques des Mathematiques**, France, v. 26, n. 1, p. 39-88, 2006.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM.* **The International Journal on Mathematics Education**, USA, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, 2007.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Recurso para el Estudio de las Matemáticas. *In*: GODINO, J. D. (Dirección). **Didáctica de La Matemática para Maestros**, España, Manual para el Estudiante. Universidad de Granada. out 2004. Disponível em: <http: //www.ugr.es//local/jgodino/edumat.maestros/>. Acesso em 22 mar. 2019.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, nº 2, p. 7-37, 2008.

GODINO, J. D., WILHELMI, M. R.; BENCOMO, D. Suitability criteria for a mathematical instruction process. A teaching experience with the function notion. **Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education**, USA, v.4, n.2, p. 1–26, 2005.

GODINO, J.; FONT, V.; WILHELMI, M.R.; CASTRO, C. Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. **Enseñanza de las Ciencias**, España, v. 27, n.1, p. 59-76, 2009.

GODINO, J. D.; FONT, V.; CONTRERAS, A; WILHELMI, M. R. Una vision de la didactica francesa desde el enfoque ontosemiotico de la cognicion e instruccion matematica. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Mexico, v.9, n.1, p. 117-150, 2006.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, [S.I.],v. 20, p. 13-31, 2009.

GODINO, J. et al. O desenvolvimento de competências para a análise didática do professor de matemática. **REVEMAT.** Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 1-21, 2012.

GODINO, J. et al. Componentes e indicadores de idoneidade de programas de formação de professores em educação matemática. **REVEMAT**. Florianópolis, v. 08, n. 1, p. 46-74, 2013.

GODINO, J. D. Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teoricas para la educacion matematica. *In:* CONTRERAS, J.M. et al (Eds.), **Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**. *2017.* Disponible em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html. Acesso em 21 jan. 2018.

GRANDO, R.C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 239f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2000.

GROSSMAN, P. **The making of a teacher**: Teacher knowledge and teacher education. New York and London: Teachers College Press, 1990.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHLLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, USA, v.39, p. 372-400, 2008.

KAIBER, C.T.; LEMOS, A.V.; PINO-FAN, L.R. Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS): um panorama das pesquisas na América Latina. **Perspectiva da Educação Matemática**, INMA/UFMS, v. 10, n.23, 2017.

KIEREN, T. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers**.** In LESH, R. (Ed.) **Number and measurement: Paper from a research workshop**. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC, 1975, p.101-144.

KIEREN, T. **Number and measurement**: mathemathical, cognitive and instrucional foundaments of rational number. Columbus, OHERIC/SMEA, p. 101-144, 1976.

KIEREN, T. Personal Knowledge of rational numbers: its intutive and formal development. *In:* HIEBERT, J; BEHR, M. (eds.) **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, p. 162-180, 1980.

KIEREN, T. E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In HIEBERT, J.; BEHR, M.J. (Eds). **Number Concepts And Operations in The Middle Grades**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum. p. 162-181, 1988.

LAMON, S. J**. Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 2 ed. Mahwah: Lawrence Erlbaum Association. 2006.

LAMON, S. J. Rational numbers and proportional reasoning. *In:* LESTER, F.K. (Jr. Ed.), **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte: Information Age Publishing, NCTM. p. 629-667, 2007.

LERMAN, S. Cultural, discursive psychology: a sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics**. Educational Studies in Mathematics**, Switzerland, v. 47, p. 87-113, 2001.

LLINARES, S.; SÁNCHEZ, M. V. **Fracciones**. Editorial Síntesis: Espanha, 2000.

LEON, F.A.; PAROLIN, R.S; CARPES, C.Q. Índice de desempenho da educação básica do município de Itaqui. *In:* 8º Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão. **Anais do SIEPE 2016**. Disponível em: http://porteiras.s.unipampa.edu.br/gpeafss/files/2016/08/%C3%8DNDICES-DE-DESEMPENHO-DA-EDUCA%C3%87%C3%83O-B%C3%81SICA.pdf. Acesso 10 abr. 2018.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração na perspectiva do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. **Boletim de Educação Matemática**: Rio Claro, ano 21, n. 31, p. 23-40, 2008.

MALASPINA, U. La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas (2017). *In:* CONTRERAS, J. M; ARTEAGA, P.; CAÑADAS, G. R. ; GEA, M. M.; GIAOMONE, B.; LÓPEZ-MARTÍN, M. M. (Eds.), **Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**. Disponível em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html. Acesso 07 dez. 2018.

MARIANI, R.C.P. **A transição da Educação Básica para o Ensino Superior:** A coordenação de registros de representação e os conhecimentos mobilizados pelos alunos no curso de cálculo. 2006. 233 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

MARTINIE, S. **Middle school of rational numbers knowledge** – Abstract of dissertation. Manhattan, Kansas: Kansas State University, 2007.

MURPHY, S. Teachers and students: reclaiming assessment via portfolios. *In*: YANCEY, K.B.; WEISER, I. (ed.). **Situating portfolios**: four perspectives. Logan, Utah: Utah State University Press, 1997. p. 72-88.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

ONUCHIC; L.R.; ALEVATTO, N.S.G. As Diferentes "Personalidades' do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Boletim da Educação Matemática**: Rio Claro, ano 21, n. 31, p. 79 -102, 2008.

PINO-FAN, L.R.; GODINO, J. FONT, V.M. Faceta epistêmica do Conhecimento didático-matemático sobre a derivada. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.13, n.1, p.141-178, 2011.

PINO-FAN, L. R.; ASSIS, A.; CASTRO, W. F. Towards a methodology for the characterization of teachers'Didactic-Mathematical Knowledge. **Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education**, London, v. 11, n. 6. p. 1429-1456, 2015. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/279914902. Acesso em: 12 mar. 2019.

PINO-FAN, L.R.; GODINO, J. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del professor. **Paradigma**, São Paulo, v. XXXVI, n. 1, p. 87– 109, 2015.

POST, T.; WACHSMUTH, I.; LESH, R.; BEHR, M. Order and equivalence of rational number: a cognitive analysis. **Journal for Research in Mathematics Education**, USA, v.16, n.1, p. 18-36, 1985.

RADFORD, L. Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM,* **The International Journal on Mathematics Education**, USA, v. 40, n. 2, p. 317-327, 2008a.

RADFORD, L. Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. **Working Paper. Prepared for the ICMI Survey Team 7. The notion and role of theory in mathematics education research**. 2008b. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/253274896. Acesso em 07 mai. 2019.

ROMANATTO, M.C. **Número racional**: relações necessárias a sua compreensão. 1997. 169f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

RODRIGUES, W. R. **Números Racionais:** Um estudo das concepções de alunos após o estudo formal**.** 203f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

ROGERI, N.K.O. **Conhecimento de professores dos anos iniciais para o ensino dos números racionais em sua representação decimal**. 2015. 289f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

ROSA, J.S. et al. Portfólio no processo de avaliação da aprendizagem no ensino superior: uma análise cartográfica das convergências com a educação biocêntrica. **Revista Electrónica de Investigación y Docencia** (REID), España, 10, Julio, p. 181-204, 2013.

ROWLAND, T.; RUTHVEN, K. (Eds.) Mathematical Knowledge in Teaching, Mathematics Education Library 50. **Springer**: London, 2011.

SCHOENFELD. A.; KILPATRICK, J. Towards a theory of profiency in teaching mathematics. *In*: TIROSH, D.; WOOD, T.L. (Eds**.**) **Tools and processes in mathematics teacher education** Rotterdam: Sense Publishers. p. 321-354, 2008.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, USA, v.15, n.2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, USA, v. 57, n.1, p. 1-22, 1987.

SILVA, V. T. S. **Estudo e ensino de frações:** aprendizagens e dificuldades docentes no processo de formação continuada. 189f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2015.

SILVA, M.J.F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. 2005. 302f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVA, M.J.F. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 1997. 245f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

SILVA, A.F.G. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações**. 2007. 308f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, USA, v. 26, p. 114-145, 1995.

SIMON, M. A. y TZUR, R. Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. **Mathematical Thinking and Learning**, USA, v. 6, n.2, p. 91-104, 2004.

SOARES, M.E.S. **Conhecimentos didático-matemáticos mobilizados por professores dos anos iniciais**: uma análise sob a perspectiva do Enfoque Ontosemiótico. 2016. 233f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática), Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2016.

SOUZA, J.; PATARO, P.M. **Vontade de Saber matemática**, 7º ano. 3. Ed. São Paulo: FTD, 2015.

VERGNAUD, G. La theorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Frace, v. 10, n. 2-3, p.133-170, 1990.

VILLAS BOAS, B.M.F. O portfólio no curso de Pedagogia: ampliando o diálogo entre professor e aluno. **Educação Sociedade**, Campinas, v. 26, n.90, p. 291-306, 2005.

VYGOTSKI, L. **Thought and language**. 1934. MA: MIT Press [Trad. cast.: Pensamiento y lenguaje. Barcelona: Paidos, 1995. *In:* GODINO, J. D. Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teoricas para la educacion matematica. In: CONTRERAS, J.M. et al (Eds.), **Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos**. *2017.* Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html. Acesso em 21 jan 2018.

VENTURA, H.M.G.L. **A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações**: uma experiência de ensino no 2º ciclo do ensino básico. 2013. 386f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

WHEELDON, D. A. **Developing mathematical practices in a social context**: an instructional sequence to support prospective elementary teachers learning of fractions. 2008, 323f. Tese (Doutorado em Educação) University of Central Florida, Florida, 2008.

YACKEL, E.; COBB, P. Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, EUA, v. 27, n.4, p. 458-477, 1996.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Oficina: Interpretando os números racionais

Profª Patrícia P Goulart Carpes
Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA) – Campus Itaqui

Esta oficina tem por objetivo abordar atividades que potencializem os significados e representações dos números racionais assim como propor alguns métodos para o ensino deste objeto matemático empregados pelas pesquisadoras Campos e Magina. Desde modo, dispõem-se seis questões abaixo para que sejam desenvolvidas neste encontro e possam servir como subsídio aos pesquisadores sobre a compreensão dos números racionais pelos professores em futuras pesquisas.

1) Em uma gincana de atletismo da escola, uma das provas era a corrida. João, Mario, Dorval e Carlos eram os representantes das quatro equipes participantes. Após cinco minutos da largada, João havia percorrida 20% da trajetória, Mario $\frac{3}{4}$, Dorval 0,6 e Carlos $\frac{3}{5}$. Sabendo disso, responda as perguntas abaixo.

a) Na reta abaixo, represente o caminho já percorrido da prova por cada participante.

Largada Chegada

b) Quem vai à frente da prova após os cinco minutos da largada? Explique.

c) Se o trajeto da prova de corrida fosse de 500 metros, como você calcularia quantos metros cada participante já percorreu após os cinco minutos da largada? Você saberia calcular de outro modo este resultado?

2) Do salário João, ele gasta $\frac{2}{5}$ com o aluguel. Do que sobrou gasta a metade com alimentação. Da segunda sobra coloca $\frac{1}{3}$ na poupança. Restando R$ 300. Qual o valor do seu salário? É possível determinar o salário de João por quais métodos (representações)?

3) Represente geometricamente $\frac{2}{3}$ de quatro tipos distintos.

4) Duas jarras contem misturas de álcool e água nas razões de $\frac{3}{5}$ na primeira jarra e de $\frac{3}{7}$ na segunda. Juntando-se o conteúdo das duas jarras qual será a razão entre álcool e água na mistura resultante?

5) Certo dia durante a aula, a professora estava distribuindo folhas em branco aos alunos para realização de uma atividade. Nesta aula, estavam presentes quatro alunos e a professora tinha, no momento, 3 folhas.

a) cada aluno receberá uma folha?

b) cada aluno receberá pelo menos meia folha? Justifique?

c) qual quantidade de folha cada um receberá? Se recebermos como resposta $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{3}$ do aluno, qual foi sua interpretação da situação proposta?

6) Quando o conteúdo a ser abordado são os números racionais,

a) você leva em consideração todas as representações do número no processo de ensino e aprendizagem? ____

____

____

____

b) você leva em consideração todos os significados do número no processo de ensino e aprendizagem? Alguns significados são mais explorados? __________________________

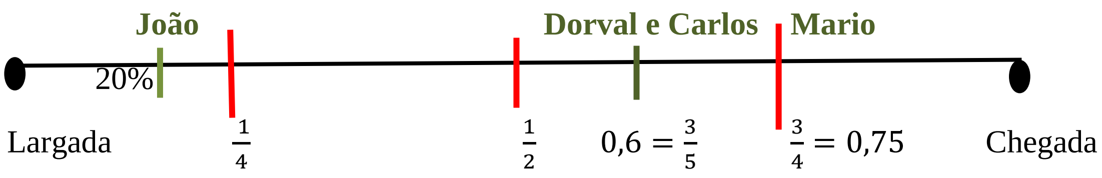
____

____

APÊNDICE B

Soluções esperadas ao questionário do Apêndice A.

A questão 1 trata de uma prova de corrida com 4 participantes. Note que o trajeto já percorrido por cada participante foi dado por diferentes representações de números racionais, a saber: $20\%, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}$ e 0,6. já na perspectiva do aluno, visualizar diferentes registros no racional. O item 1a) solicita que seja preenchido na linha reta (percurso da prova) a posição de cada participante. Para tal, deve-se ordenar os números dados.



Na solução dada acima, foram empregadas as representações dadas no enunciado, mas poderia o aluno escolher uma representação, por exemplo, João percorreu 0,2 do percurso da prova, Dorval e João percorreram 0,6 (estão empatados) e Mário vai a frente com 0,75 do percurso.

O item 1b) é apenas uma interpretação do item 1a), ao passo que o aluno deve indicar o participante que vai à frente da prova. Mario é o que está mais próximo da chegada e, também, 0,2 < 0,6 < 0,75 < 1, onde 1 (100%) representa o percurso total da prova.

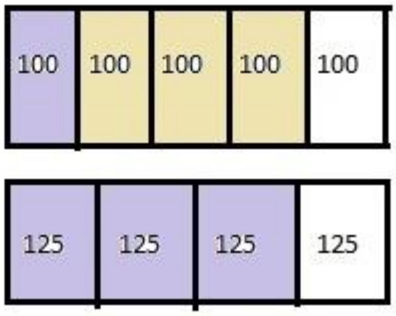
O item 1c) determina que o trajeto da prova tem 500 metros, logo pode-se calcular quantos metros cada participante já percorreu. Assim, pode-se empregar o significado de operador sobre o número 500. Observe,

$$20\% \,.\, 500 = 100,$$

$$0,6 \,.\, 500 = 300 \; e$$

$$\frac{3}{4} . 500 = 375.$$

Ou, então, utilizando a representação geométrica, por exemplo, se dividir a unidade em cinco partes iguais, determina-se o percurso de João, Dorval e Carlos (denominador 5 das frações) e, em outra, representação divide-se a unidade em 4 partes iguais para determinar o percurso de Mario.



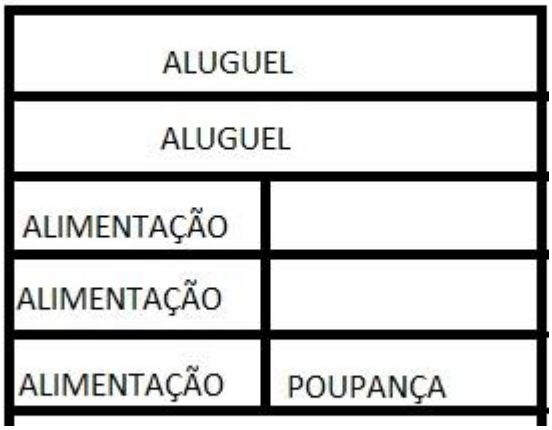
João percorreu $20\% = \frac{100\%}{5}$, ou seja, $\frac{500}{5} = 100\ m.$

Dorval percorreu $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$, ou seja, $\frac{\mathbf{500}}{\mathbf{5}}.3 = 300.$

Carlos e Dorval percorreram o mesmo trajeto.

e Onuchic e Allevato (2008) e propõe determinar o salário de J ias frações do seu salário com despesas fixas como aluguel, alimentação e poupança. No artigo, as autoras supracitadas sugerem algumas soluções, a saber: do significado parte/todo com representação geométrica e via equação do primeiro grau, representação algébrica abaixo ilustradas.

A representação geométrica parte da informação que $\frac{2}{5}$ do salário são gasto com aluguel. Logo, o todo do salário é divido em 5 partes iguais e duas dessas partes vão para o aluguel. Na sequência, do que sobrou a metade é gasta com alimentação, ou seja, $\frac{1}{2}.\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$. Para a poupança, coloca da primeira sobra $\frac{3}{10}.\frac{1}{3} = \frac{1}{10}$.

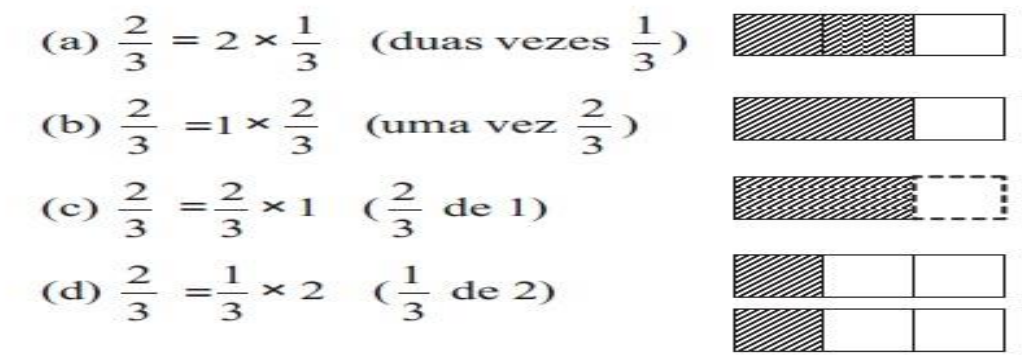


Do enunciado sabe-se que resta a João R$ 300, logo cada $\frac{1}{10}$ representa R$ 150 do salário de João. Consequentemente, 10 partes iguais completam o todo, isto é, 10 vezes o 150 resulta em 1500 reais o salário de João.

A representação algébrica é determinada a partir do "*x*" salário de João. Logo, obtém-se a equação $x - \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}.\frac{3}{5}x - \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{3}{5}x = 300.$ Resolvendo a equação, encontra-se $x = 1500$.

A questão 3 também foi retirada de Onuchic e Allevato (2008) e solicita diferentes representações geométricas do número $\frac{2}{3}$. A solução proposta pelas autoras está ilustrada na figura 14. É de extrema importância nessa questão interpretar $\frac{2}{3}$ como um operador, aquilo que amplia ou reduz uma quantidade.

Figura 31: Solução da questão 3.



Fonte: excerto de Onuchic e Allevato (2008, p.94).

A questão 4 proposta por Onuchic e Allevato (2008) requer a compreensão do número racional como razão entre duas grandezas álcool e água que gera uma terceira grandeza, o volume de uma jarra. Uma jarra tem uma mistura de álcool e água na razão de $\frac{3}{5}$ e outra jarra tem a mesma mistura na razão $\frac{3}{7}$. Assim, deve-se determinar a razão entre álcool e água da mistura das duas jarras. O enunciado não deixa explícito, mas as duas jarras têm o mesmo volume V, que determinamos de V = 8 litros (escolhemos 8 pois facilita na razão álcool e água).

Jarra A são 8 litros, sendo 3 de álcool e 5 de água.

Jarra B são 8 litros, sendo 2,4 (0,8 x 3) de álcool e 5,6 (0,8 x 7) de água.

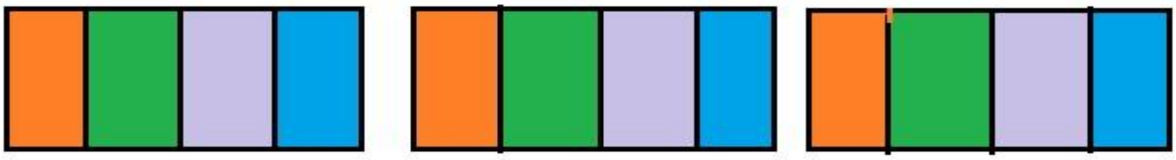
Assim, juntando as duas jarras em uma única, com 16 litros, temos a razão

$$V = \frac{3+2,4}{5+5,6} = \frac{5,4}{10,6} = \frac{54}{106} = \frac{27}{53}\ \frac{\text{álcool}}{\text{água}}$$

que pode ser lido 27:53 (27 está para 53).

A questão 5 retoma o significado quociente do número racional ao propor a divisão de folhas entre alunos. Na situação há 3 folhas para serem distribuídas entre 4 alunos igualmente. O item 5a) questiona se o aluno receberá uma folha (inteira), o que não é possível, pois há menos folhas que alunos. O item 5b) retoma o item a) questionando se não recebe 1 folha, mas pelo menos meia folha, o que é verdade, pois cada aluno receberá 75% da folha ou $\frac{3}{4}$. Ou, então, dividir cada folha em quatro partes iguais e entregar uma parte de cada folha aos alunos conforme figura 15 (há outras possibilidades de organizar essa divisão).

Figura 32: Divisão de 3 folhas para 4 alunos.



Fonte: da pesquisa (2018)

O item 5c) questiona a quantidade que cada aluno receberá de folha, sendo que a partir dos item a) e b) já é possível determinar como solução 75% ou $\frac{3}{4}$. Além disso, questiona a possibilidade de um aluno responder a essa questão $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{3}$. Caso o aluno responda $\frac{3}{4}$, essa é a solução correta. Entretanto, se o aluno responder $\frac{4}{3}$ há erro de compreensão. Pode apenas o aluno ter visualizado os dois números que aparecem no enunciado e percebido que é uma divisão colocou o maior em cima (numerador) e o menor embaixo (denominador). Ou, ainda, ter dúvida na operação de divisão e não perceber que são as 3 folhas que serão divididas, logo o dividendo da operação. Provavelmente, outros entraves podem ocorrer para a resposta $\frac{4}{3}$ nesta situação, aqui apenas citamos duas que podem ocorrer com maior frequência.

APÊNDICE C

Projeto de extensão: Professores de Matemática em formação: construindo novos conceitos

Formadora: Profª Patricia P Goulart Carpes

O curso proposto aos professores de Matemática do Município de Itaqui tem caráter formativo e investigativo e versa sobre os conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática ao ensinar números racionais para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental. Após os esclarecimentos e concordância dos participantes do curso, faz-se necessário conhecer algumas características do profissional para que possam subsidiar a proposta de formação.

1) Escolha um nome (ou símbolo) que a (o) identifique. ______________________________

2) Sua formação profissional

( ) graduação. Qual? ___________________________ ( ) magistério.

( ) especialista. Qual? ____

( ) mestre. Qual? ____

3) Tempo de atuação como professora de Matemática (em anos)? ____________

4) Sua idade ( ) menos de 30 anos ( ) 30 a 45 anos ( ) acima de 45 anos

4) Quando tu lecionas sobre números racionais, quais são as dificuldades de aprendizagem dos seus alunos? São as mesmas dificuldades nos diferentes anos (séries) do Ensino Fundamental?
____

5) E quanto as dificuldades de ensino, ou seja, o que tu identificas como empecilhos para o ensinar números racionais?
____

6) De maneira sucinta, quando tu inicias o ensino de números racionais, qual (is) situação (ões) exploras?
____

7) Trabalha com a metodologia de resolução de problemas? ( ) Sim, frequentemente. ( ) Não. ( ) poucas vezes.

8) Consideras válida, isto é, uma metodologia eficiente para o ensino e aprendizagem dos alunos a resolução de problemas? Por quê? ____

9) Quais significados dos números racionais, exploras com teus alunos? _________________

10) No seu entendimento, que aspectos você considera relevantes serem abordados, num processo de formação continuada? (Por exemplo: uso de jogos, uso de recurso tecnológico, resolução de problemas, ...)
____

APÊNDICE D

Portfólio dos professores

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO DE ITAQUI

(1º encontro) Curso formativo e investigativo: Os conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática para ensinar os números racionais no Ensino Fundamental

Formadora: Profª Patrícia P Goulart Carpes

Conhecimentos didático-matemáticos prévios dos professores

O ensino do conjunto numérico dos racionais normalmente é um desafio ao professor de Matemática do Ensino Fundamental. A evolução do conjunto dos números naturais para os racionais não é imediata aos alunos. Situações de transportar as propriedades de um conjunto ao outro são praticamente automáticas pelos alunos, como, por exemplo, se 2 < 3, então $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$. Ou, ainda, 2,3 < 1,99 no entendimento que o primeiro número tem duas casas decimais e o segundo tem três casas decimais.

A proposta desse curso de formação é abordar os conhecimentos didáticos e matemáticos do professor de Matemática ao ensinar sobre números racionais especificamente em 6º e 7º anos do Ensino Fundamental. Assim, o mesmo visa propor estratégias/metodologias/recursos didáticos, estudo de documentos curriculares oficiais, trocas de experiências, estudos de casos e organização de sequências de ensino que propiciem uma melhor adequação didática em sua sala de aula.

Para iniciar nossos estudos, primeiramente, vamos definir o que entendemos como número racional. Defina o conjunto numérico dos racionais.

Para exemplificar, são propostos a seguir, as resoluções de uma situação realizada por dois alunos de 6º ano. Leia o enunciado da questão e verifique a solução encontrada por cada aluno. Após, responda os itens abaixo.

Situação 1. Ana deu um meio de suas balas para sua irmã e Jorge deu também a sua irmã um quarto de suas balas. Quem deu mais balas?

A aluna 1 apresentou como resposta a essa situação que Jorge deu mais balas, pois deu o dobro de balas que Ana.

A aluna 2 apresentou como resposta que Ana tinha dado mais balas, pois deu a metade de suas balas e Jorge deu menos da metade de suas balas.

a) No seu entendimento, qual erro a Aluna 1 cometeu? Escreva como tu explicarias à aluna o erro cometido e quais encaminhamentos daria para a solução correta.

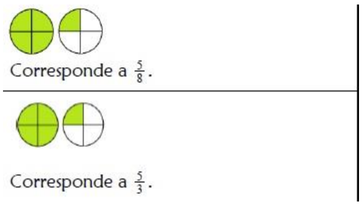
b) A resposta da Aluna 2 poderia estar correta, porém sua justificativa não é suficiente para garantir que a resposta esteja correta. O que tu questionarias à aluna para garantir que sua resposta esteja correta?

c) Quando tu ensinas os números racionais, quais são as dificuldades de aprendizagem mais recorrentes dos alunos?

d) Cite como você procede para dirimir a dificuldade do aluno, isto é, do item anterior tome uma situação e comente como tu propões a superação da não compreensão do aluno sobre os números racionais.

Exemplo de situação proposta aos professores como um erro comum dos alunos quanto a falta de compreensão dos números racionais.

Joana e três amigas foram a uma pizzaria e pediram duas pizzas para comemorar o início das férias escolares. As quatro amigas decidiram dividir as pizzas em quatro fatias de mesmo tamanho. Cada amiga comeu um pedaço e Joana dois pedaços. Ilustre a situação acima e indique a fração de pizzas que foi consumida.



As dificuldades que os alunos apresentam no decorrer da aprendizagem sobre números racionais são relevantes e são consideradas como ferramentas dos professores para compreenderam as lacunas de entendimento dos alunos e, assim, potencializar a aprendizagem. Estudos empíricos e teóricos apontam algumas dificuldades de compreensão dos números racionais, observe:

- o pouco uso de frações no dia-a-dia do aluno, o que acarreta pouca familiaridade do tema.

- a multiplicidade de significados dos números racionais torna complexo por si só sua compreensão.

- as operações com os números racionais são mais complexas do que com as operações com números naturais.

- os programas de ensino dedicam mais tempo para trabalhar os racionais e pouco espaço para a compreensão dos seus significados (uso de regras precocemente).

- falta de experiências concretas (situações-problemas) para o aluno construir significado ao racional.

- incompreensão do parte/todo ou não reconhecimento da unidade de referência.

- ordenação dos racionais e identificação na reta numérica.

Considerando o item 5, muitas vezes o professor de Matemática espera que o professor de anos anteriores proponha atividades com material concreto ao aluno para desenvolver a compreensão do número racional. Entretanto, muitas vezes, nos parece que o aluno carece desse entendimento e já está preso em regras, como o m.m.c. Tu inseres material concreto em suas aulas sobre números racionais? Ou como tu superas a dificuldade apontada nesse item?

Referência

VENTURA, H.M.G.L. **A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações**: uma experiência de ensino no 2º ciclo do ensino básico. 2013. 386f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Lisboa, Lisboa, 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO DE ITAQUI

(2º encontro) Curso formativo e investigativo: Os conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática para ensinar os números racionais no Ensino Fundamental

O ensino dos números racionais via seus significados e representações

Considere a questão “O que ½ pode significar?” Cite algumas situações onde possas empregar essa quantidade.

Os estudos de Kieren apontaram que os números racionais são constituídos de diferentes construtos e que a compreensão mais ampla dos mesmos depende do entendimento destes diferentes significados. E, ainda, como as frações e os números racionais estão presentes em diversas situações, Kieren indicou 5 ideias básicas para a compreensão dos números racionais, sendo a parte/todo, o quociente, o operador, a medida e a razão. A seguir apresenta-se a definição e exemplificação de cada significado.

Parte/todo: Apresentado sob a forma $\frac{1}{n}$ em que esta representa uma ou mais parte da unidade que foi dividida em parte iguais. Desta forma, a fração indica a comparação entre o numerador (número de partes da unidade dividida que se toma) e o denominador (número total de partes que a unidade foi dividida).

Exemplo: ½ indica uma parte de duas iguais que a unidade foi dividida.

Quociente: remete a ideia de partilha, na qual a fração $\frac{a}{b}$ indica o quociente $a: b, b \neq 0$. Neste significado, o entendimento de dividendo e divisor da operação de divisão devem estar claro, pois dividir em partes iguais é a base para que se compreendam os racionais como quocientes. Desta forma, *a* pode ser maior, igual ou menor que *b*.

Exemplo: ½ indica um bolo que foi dividido entre duas pessoas.

Medida: possibilita ao aluno identificar a unidade de medida, determinar um comprimento e medir um comprimento através da repetição da unidade de medida – iteração.

Exemplo: Numa corrida de 1000 metros, a partir de $\frac{1}{2}$ da prova há a troca de bastão. Indique a distância percorrida com o primeiro bastão.

Operador: está associado a ideia de modificar uma grandeza contínua, tanto aumentar quanto diminuir considerando a fração imprópria ou própria respectivamente. Ou equivalente transforma nas grandezas discretas.

Exemplo: Num pacote com 12 bolachinhas, Jorge vai dar ½ a sua irmã. Qual a quantidade de bolachinhas a irmã de Jorge receberá?

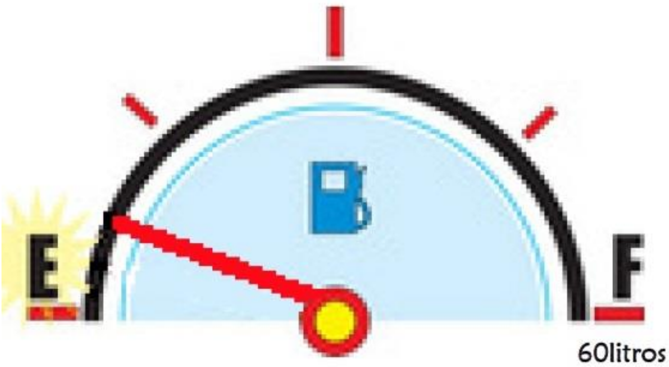
Razão: surge da relação de duas quantidades, sendo necessário o raciocínio multiplicativo. Deve-se fazer uma distinção entre a noção de razão parte/parte (duas partes de um todo “ratio”) e a razão de grandezas de tipos diferentes (“rate”), dando origem a uma nova grandeza.

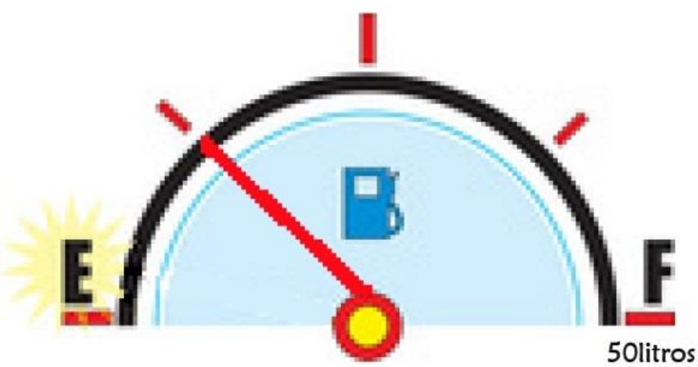
Exemplo: Determine a velocidade média de uma pessoa durante uma caminhada, sabendo que percorreu 1 quilômetro em duas horas.

Vamos retomar o questionário inicial para identificar o emprego dos significados dos números racionais e os encaminhamentos encontrados pelos professores perante as dificuldades de aprendizagem dos alunos.

Ana, Carlos e Pedro são colegas e cursam o 6º ano na escola Todos Alegres. Por serem alunos com bom rendimento escolar receberam um prêmio, ingressos ao cinema.

1) Os pais de Carlos e Pedro foram levá-los de carro. A figura abaixo representa o marcador de combustível dos carros do pai de Carlos com capacidade de 60 litros e Pedro com 50 litros respectivamente. A agulha sobre a letra F representa o tanque de combustível cheio e E vazio.





a) De acordo com a imagem, há mais combustível em qual carro? Justifique.

b) Carlos olhou para o marcador de combustível do carro de seu pai e notou que a agulha estava próximo do vazio, mas não conseguiu determinar se com a quantidade de combustível era possível chegar ao cinema. O GPS do carro informou que ainda faltavam 27 km ao local desejado. O carro do pai de Carlos tem média na cidade de 8 km por litro. Como professora, quais encaminhamentos daria para Carlos para solução seu problema?

c) De acordo com tuas experiências em sala de aula, consideras que em um tipo de registro (fração, decimal, porcentagem ou geométrico) haveria melhor compreensão da situação proposta? Explique.

2) A vitamina C se encontra nos cítricos, como a laranja, e é essencial para a absorção de ferro e para a recuperação de queimaduras e feridas. Na escola Todos Alegres, foi servido suco de laranja de 2ª a 5ª feira da semana para a turma de Ana, Carlos e Pedro. O suco foi preparado em uma jarra com um litro de água a que adiciona-se determinado número de copos de concentrado de laranja e colheres de açúcar, que foram variando ao longo dos dias.

	2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira

Copos de concentrado de laranja	5	4	4	2
Colheres de açúcar	4	5	3	3

a) Ana achou o suco mais doce na 5ª feira. Matematicamente como ela poderia argumentar essa resposta?

b) Carlos disse que a relação entre o número de colheres de açúcar e o concentrado de laranja na 2ª feira, pode ser representado por 0,9. Ele tem razão?

3) A turma de Ana, Carlos e Pedro receberam um lanche por apresentarem bom comportamento. A turma se organizou em três mesas com 8, 5 e 4 lugares. A Ana e seu grupo sentaram na mesa com 8 lugares, Carlos e seu grupo sentaram na mesa de 5 lugares e Pedro e seu grupo sentaram na mesa de 4 lugares. Não sobrou assento nas mesas.

A mesa com 8 lugares tinha 7 sanduíches e 16 copos de suco.

A mesa com 5 lugares tinha 4 sanduíches e 10 copos de suco.

A mesa com 4 lugares tinha 3 sanduíches e 8 copos de suco.

a) Após o lanche, Pedro criticou a Carlos que a distribuição do lanche não foi justa, porque uns comeram mais sanduíches que outros. Pedro tem razão? Que quantidade cada grupo comeu?

b) Como procederias para que a distribuição fosse mais junta?

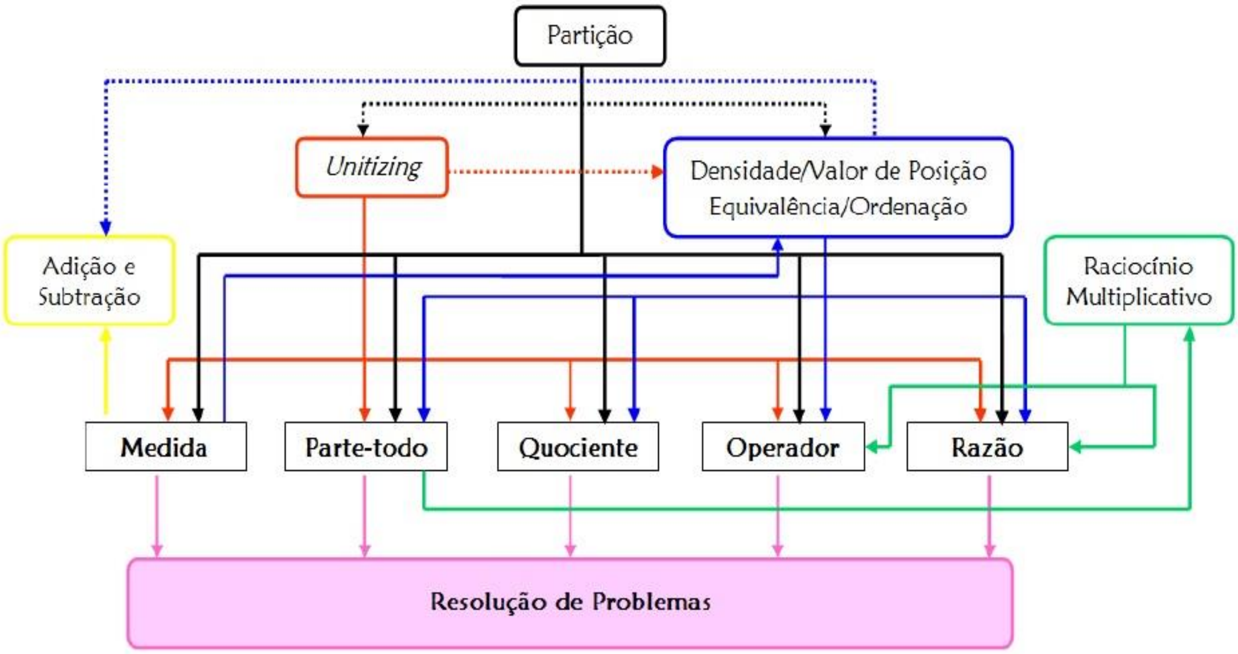
c) A distribuição de copos de suco foi desigual?

A construção da compreensão dos números racionais

Kieren propõe um modelo de conhecimento do número racional representados por 4 anéis concêntricos. A ideia está baseada em perceber a Matemática como uma função recursiva, o qual em qualquer nível do modelo que pensarmos o número racional pode tornar-se a chave para pensarmos o número racional em qualquer outro nível. O modelo de Kieren parte do anel interno que consiste no nível de conhecimento comum adquirido no decorrer da vida. O próximo anel consiste no conhecimento de nível intuitivo (conhecimento escolar, uso comum de ferramentas, da imaginação e uso informal da linguagem). O terceiro anel consiste no conhecimento de nível técnico (símbolos e algoritmos). O quarto anel consiste no conhecimento de nível axiomático do sistema.

Segundo Kieren, um aluno só desenvolve seu conhecimento de números racionais se for capaz de tomar decisões e de resolver problemas em cada um dos níveis. Entretanto o último nível só é acessível aos alunos com escolaridade mais avançada. Ressalta-se que não existe uma separação rígida entre os níveis de conhecimento, mas que o número racional deve ser visto primeiramente como um conhecimento humano para depois ser visto como uma construção lógica formal.

Na literatura encontramos um modelo teórico que esquematiza a transversalidade que envolve a compreensão do número racional. Isto é, a capacidade de resolver problemas que envolvem os diferentes significados depende da compreensão das concepções fundamentais para o entendimento dos números racionais.



O modelo de transversalidade criado para a compreensão do número racional indica que

- A partição e *unitizing* são a base para desenvolver o conhecimento de todos os significados dos números racionais. Assim como, essa noção é fundamental para a compreensão da unidade *(unitizing)*, equivalência e ordenação possam se desenvolver.
- A noção de equivalência de frações é fundamental para que os alunos consigam somar e subtrair frações e que o significado de medida pode os auxiliarem.
- O significado parte/todo é base para o raciocínio multiplicativo e fundamental para a compreensão dos significados razão e operador. Por esse significado ser base para os outros, é o mais explorado e, muitas vezes, o único trabalhado em sala de aula (MAGINA; CAMPOS, 2008).
- A compreensão dos cinco significados é a base para que o aluno consiga resolver problemas que envolvam números racionais.

Professor, até, então, discutimos que os números racionais estão presentes em diferentes situações e, deste modo, admitem diferentes significados. Neste contexto, escolha dois ou mais significados e crie uma situação desafiadora ao aluno onde ele possa transitar entre os diferentes significados do número racional.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO DE ITAQUI

(3º encontro) Curso formativo e investigativo: Os conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática para ensinar os números racionais no Ensino Fundamental

Leia a situação e, após, responda.

Para iniciar o estudo dos números racionais no 6º ano do Ensino Fundamental, o professor propõe a seguinte situação aos seus alunos:

Situação: Alberto tem R$30 e pretende dividir em partes iguais com os amigos que o ajudarem na limpeza do pátio da sua casa.

a) Se Alberto dividir o valor com dois amigos, ou seja, entre 3 pessoas, que quantia cada um receberia?

b) E se Alberto dividir com mais pessoas, por exemplo, com 5 ou 6 amigos, quanto cada um receberia?

c) Qual questionamento poderia ser feito ao aluno para que ele perceba que quanto mais amigos, menor é o valor que cada um ganha? Tente relacionar as frações (parte recebida) com o valor a receber.

____

d) Considere que Alberto vai dividir os R$ 30 com Luca e Ana. Porém, Alberto dará sua parte para o Luca. Que fração representa, então, o valor que Luca receberá em relação ao valor total?

e) Quais encaminhamentos poderiam ser adotados pelo professor para questionar que embora fosse dividido entre vários amigos, o todo (R$30) não se altera? ____

____

f) Elabore duas situações análogas a dada, porém uma mais simples e outra mais complexa.

____

g) Caso Alberto queira guardar $\frac{2}{5}$ do seu dinheiro na poupança, o valor que sobra é mais ou menos que do que 75% do que tem? Quais encaminhamentos daria ao aluno para ele compreender a porcentagem citada?

h) Quais os conhecimentos/habilidades prévios os alunos devem ter para resolver as questões da situação proposta pelo professor? ____

i) Quais os conhecimentos podem ser desenvolvidos via essa situação? __________________________

____

j) Crie duas situações-problemas envolvendo a fração $\frac{2}{5}$.

k) As situações criadas acima para a fração $\frac{2}{5}$ possuem significados/interpretações que as distinguem? Quais encaminhamentos daria ao aluno para que ele percebesse os diferentes significados dos números racionais nas situações que você elaborou? ____

____

Indagar, refletir e posicionar-se

1) Os significados apresentados para o número racional emergem de uma situação-problema. Tu consideras propicio em suas aulas essa forma de ensinar a partir de situações contextualizadas, ou ainda, empregando a metodologia de Resolução de Problemas?

2) Te parece eficiente o ensino dos números racionais através de seus significados? Tu usas ou com certeza empregaria nas tuas aulas?

3) Considerando o livro didático que tens utilizado, o mesmo aborda os números racionais em diferentes situações, isto é, explorando os significados. Tu as explora com os alunos?

Tema de Casa: selecionar questões do livro didático adotado que exploram os cinco significados dos números racionais. Não esqueça de trazer o livro no próximo encontro.

Referências

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração na perspectiva do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. **Boletim de Educação Matemática**: Rio Claro, ano 21, n. 31, 2008, p. 23-40.

KIEREN, T. E. Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In HIEBERT, J.; BEHR, M.J. (Eds). **Number Concepts And Operations in The Middle Grades**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum. p. 162-181, 1988.

SILVA, A.F.G. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações**. 2007. 308f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO DE ITAQUI

(3º encontro) Curso formativo e investigativo: Os conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática para ensinar os números racionais no Ensino Fundamental

Unidade, ordenação e equivalência via os significados dos números racionais

Todos os materiais do *software* GeoGebra apresentados a seguir foram retirados da página *online* <https://www.geogebra.org/materials>.

1) Abra o objeto de aprendizagem (*applet*) denominado **comparação 1**. Faça manipulação e, após, responda as questões abaixo.

2) A atividade inicia com a fração $A = \frac{3}{10}$ e a fração $B = \frac{5}{16}$. Perceba que há a opção de registro dessas frações na reta numérica ou na forma de pizza. Também, há a opção mostrar comparação (verifique qual fração é maior).

3) Por meio desse material, a seguir propomos uma atividade para desenvolver a compreensão do aluno sobre comparação e ordenação.

a) Mova os controles deslizantes da fração A para obter $\frac{2}{5}$. O que você identifica que aconteceu na figura da linha para a representação dessa fração? E se fosse na figura de pizza há alguma diferença?

b) Na fração B, mova os controles deslizantes para obter $\frac{3}{5}$. Olhando para a figura (em reta), qual fração é a maior (A ou B)? Como você justificaria que uma fração é maior que a outra?

c) Que fração poderia ser menor que $\frac{2}{5}$? E maior que $\frac{3}{5}$?

c) Se você unir (somar) a fração A com a fração B, o que ocorreria com as figuras (reta e pizza)? Que fração representa essa quantidade (da união)?

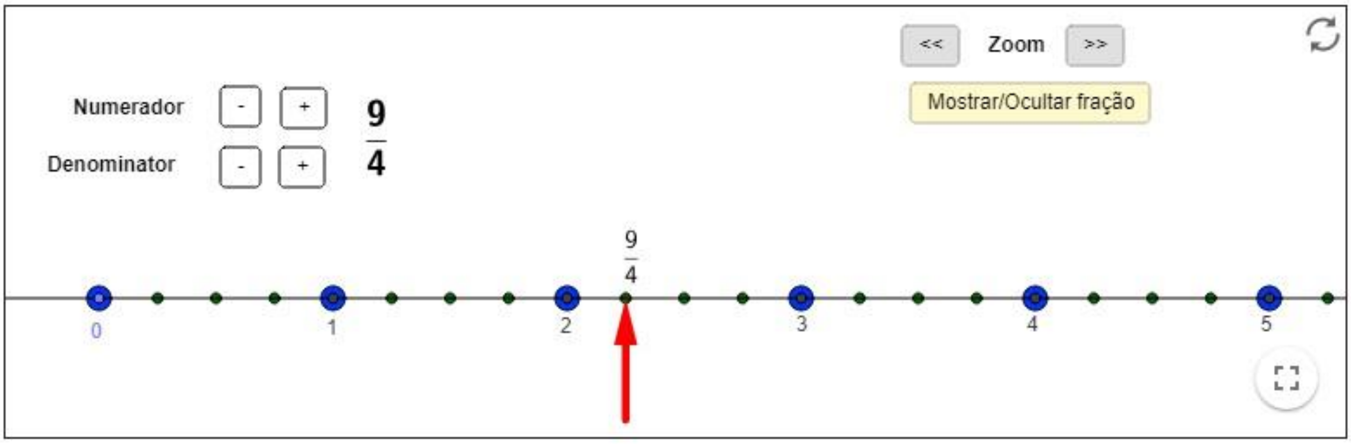
d) Quantas vezes cabe a medida $\frac{1}{5}$ em $\frac{2}{5}$? E quanta vezes $\frac{1}{5}$ para completar a linha?

4) Este material, você o empregaria para trabalhar quais conceitos dos números racionais? Identificou alguma limitação do material?

5) Percebes benefícios em se trabalhar com este material digital ao invés do contexto tradicional de uso do lápis e papel.

6) Quanto a atividade elaborada via o material (objeto de aprendizagem) traria alguma dificuldade ao aluno, um obstáculo?

7) Abra o objeto de aprendizagem denominado **reta numérica**. Diminua o zoom para visualizar a linha numerada de 0 a 10. Nos botões + ou – é possível alterar o valor do numerador e denominador. A fração que o programa inicia é $\frac{9}{4}$ e está identificada na reta numérica entre os números 2 e 3.



Fonte: disponível em <https://www.geogebra.org/m/vztbgqE6> Acesso 29 nov 2018.

a) Quantas divisões (bolinhas pretas e azul) há entre dois números inteiros consecutivos para a fração $\frac{9}{4}$? E para a fração fosse $\frac{4}{5}$?

b) Por que alterou a quantidade de divisões (bolinhas pretas e azuis) entre dois números inteiros consecutivos? Qual o espaçamento entre cada bolinha para cada fração?

c) A fração $\frac{4}{5}$ está antes do número 1. Como poderias determinar o valor dessa fração em decimal? Consegues determinar por outro método (estratégia)?

d) A fração $\frac{9}{4}$ está depois do número 2. Sabemos que essa fração é um número entre 1,0 e 2,0. Mas exatamente qual número decimal?

e) Escolha uma fração no programa e desmarque a opção mostrar fração. Como você explicaria a um colega como identificar esse número na reta numérica? Após sua explicação, desmarque a opção mostrar/ocultar fração e verifique se acertou a localização do número.

f) Durante uma aula de Matemática, a professora propôs um jogo em duplas. O jogo consistia em um colega escolher uma fração e dar 3 dicas sobre ela ao colega para que o mesmo possa descobrir a fração escolhida inicialmente. Para facilitar a descoberta da fração, foi disponibilizado o *applet* reta numérica.

Jorge e Mateus formam uma dupla. Jorge escolheu a fração e deu as seguintes dicas:
1ª) É um número menor que 1;
2ª) É um número equivalente a $\frac{5}{10}$.
3ª) O espaçamento entre cada bolinha é de 0,25.
Mateus respondeu que a fração que Jorge pensou é $\frac{2}{4}$. Mateus está correto?

8) Abra o objeto de aprendizagem **equivalência**. Inicialmente o programa apresenta duas frações $\frac{4}{12}$ e $\frac{1}{3}$, assim como é possível alterar o numerador e denominador da primeira fração.

a) A fração $\frac{4}{12}$ foi representada no primeiro retângulo do programa. Em quantos retângulos menores e iguais foi repartido o retângulo original? A segunda fração $\frac{1}{3}$ foi repartida em quantas partes iguais?

b) O que podemos concluir sobre as frações $\frac{4}{12}$ e $\frac{1}{3}$? Contextualize essa informação.

c) Se fosse dada a fração $\frac{8}{12}$, qual seria a fração equivalente? Quantas vezes cabe um terço em $\frac{8}{12}$?

d) É possível determinar outra fração equivalente a um terço? Dica: manipule o controle deslizante do numerador e denominador para buscar frações.
e) Ser equivalente, é dizer que as frações são iguais? Justifique.
f) Selecione nos controles deslizantes a fração $\frac{4}{9}$. Por que o programa apresenta que a fração $\frac{4}{9}$ tem como fração irredutível ela própria?
g) Elabore uma atividade que explore o conceito de equivalência das frações usando este objeto de aprendizagem.

Atividades nos livros didáticos do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental de Matemática

Nome do livro ____
Autor (es) ____

Do livro do 6º ano, vá até o capítulo que desenvolve fração e responda.

1) A atividade inicial para estudo de frações, envolve quais significados e representações? É via uma contextualização?

2) No decorrer das atividades (exercícios), é possível encontrar exercícios que envolvam os diferentes significados do número racional (parte/todo, quociente, medida, razão e operador)? Se sim, cite um exemplo de cada significado.

3) Cite um exercício que normalmente os alunos tem dificuldade em resolver. Quais são as dificuldades?

4) Você seguiria a ordem dos conteúdos proposta pelo livro didático sem alterações para a compreensão das frações no 6º ano?

Do livro do 7º ano, vá até o capítulo que desenvolve os números racionais e responda.

1) Você considera que os exercícios propostos no 7º ano são mais complexos quanto a cada significado do número racional? Cite exemplos.

2) Achas que os enunciados são suficientemente precisos e compreensíveis aos alunos? Proponha um enunciado alternativo para um exercício que não te parece suficientemente claros para os alunos.

3) As atividades propõem diferentes tipos de registros do número racional (fração, decimal, figura, porcentagem)? Sempre, às vezes ou nunca?

4) As atividades empregam mais variáveis discretas ou contínuas? Exploram as concepções fundamentais do racional: equivalência, comparação, ordem e densidade?

5) Em que medida você emprega o livro didático disponibilizado pela Escola em suas aulas sobre os números racionais? Ou adota outro livro didático, não os que os alunos têm à disposição.

ESCOLA TODOS ALEGRES

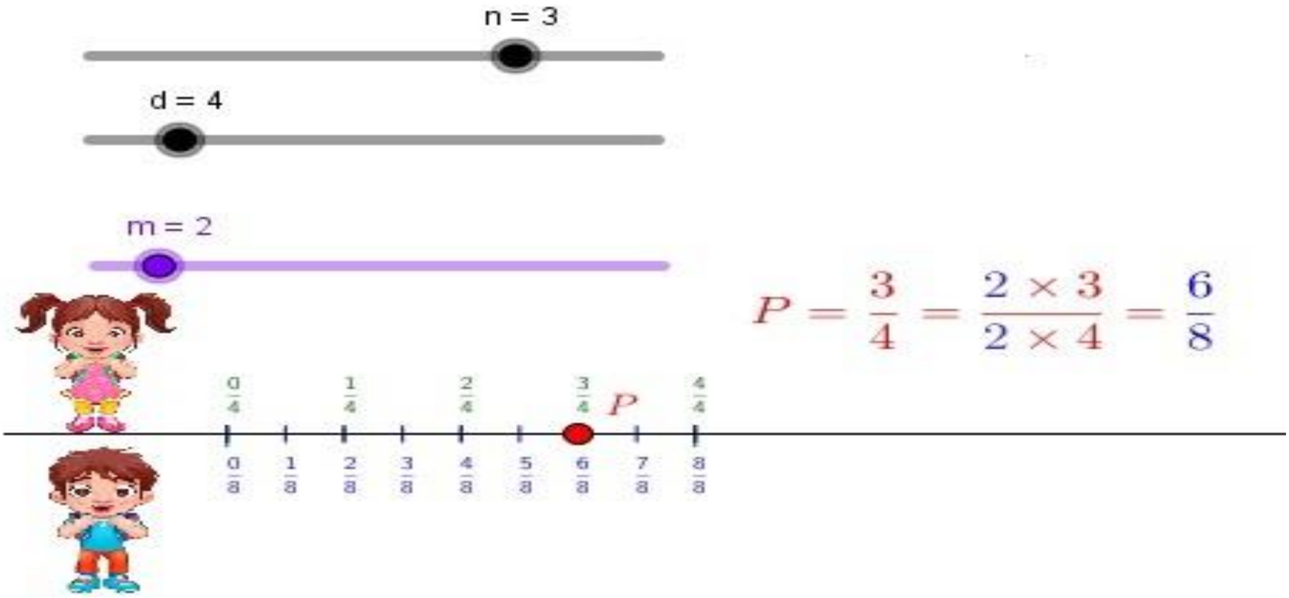
Modelo de avaliação

Profª Patrícia P Goulart Carpes

Nome: ____ Série/ano: 6º ano

Esta avaliação é baseada no objeto de aprendizagem **equivalência 2** explorado em aula.

1) Durante a aula de educação física, o professor organizou uma corrida de obstáculos. De um lado correriam as gurias com 4 obstáculos durante a prova e igualmente espaçados. Do outro lado, correriam os guris com 8 obstáculos durante a prova e igualmente espaçados. A figura abaixo ilustra a situação. Considere-a para responder as questões abaixo.



Fonte: disponível em < https://www.geogebra.org/m/Pr3s9vak > Acesso em 29 nov 2018.

d) Depois de 5 minutos, Ana havia acabado de pular o terceiro obstáculo. Que fração representa neste instante o percurso que Ana já percorreu? Quanto falta para Ana terminar a prova?

e) Após os mesmos 5 minutos, Beto havia acabado de pular o sexto obstáculo. Que fração representa neste instante o percurso que Beto já percorreu? Após esse tempo, quem vai a frente: Ana ou Beto? Justifique.

f) Construa uma nova reta agora considerando que a prova dos guris tenha 9 obstáculos e das gurias 3 obstáculos todos igualmente espaçados.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO DE ITAQUI

(4º encontro) Curso formativo e investigativo: Os conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática para ensinar os números racionais no Ensino Fundamental

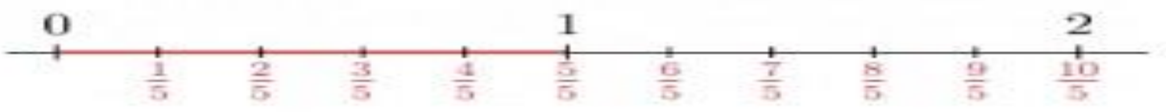
Unidade, ordenação e equivalência via os significados dos números racionais

As atividades a seguir foram elaboradas para serem exploradas com o material chamado Frac Soma 235. O material de autoria de Roberto Ribeiro Baldino busca trabalhar o conceito e operações com frações. Consiste em barras de mesmo tamanho, 60 centímetros, que são divididas em peças congruentes, com divisores múltiplos de 2, 3 e 5 e para cada um dos divisores é atribuída uma cor.

Atividade 1 – A fim de reconhecer o material, preencha a tabela a seguir.

Cor	**Número de divisões**	**A fração que representa a parte do todo**

Atividade 2 – A partir da tabela que você construiu acima, identifique na reta numérica abaixo as 10 primeiras frações da 3ª coluna da tabela.



a) Quantas frações há entre 0 e 0,5?

b) Há outras frações entre? Se houver, cite pelo menos uma.

Proposta de sequência de ensino sobre o objeto número racional positivo para o 6º ano do Ensino Fundamental via o material Frac Soma 235

O primeiro contato com o material seria através do preenchimento da tabela (atividade 1), assim como, da possível de organização do material como figura indica.

Sobre o material - Se tomarmos a barra amarela como a medida total (a maior medida), as outras peças de mesma cor unidas formam o todo (a barra amarela).

a) O que diferencia uma cor da outra? Quantas peças azuis (água) preciso para formar o todo? As peças são do mesmo tamanho? E da cor marrom, quantas peças precisa para formar o todo (unidade)?

b) O que a peça 1/3 (rosa pink) representa da peça do inteiro (amarela)?

c) Representa com o material, duas peças de 1/5 (azul água). Que fração isso corresponde?

d) Agora represente a fração 4/2 com o material. Faça o mesmo com a fração 6/3.

e) Percebemos que 4/2=4:2=2=6/3=6:3. Mas 4/2 é a mesma coisa (conta) que 6/3? Dica: relacione 4 lápis para 2 pessoas dá no mesmo que 6 lápis para 3 pessoas. Assim como, 8 lápis para 4 pessoas. Todos recebem a mesma quantidade.

f) Com o uso do material, procure frações que representam a mesma quantidade (tamanho) da fração ½.

g) O que é uma fração? E frações equivalentes?

Na sequência das atividades, use o material para auxiliar nas suas respostas.

c) Quantas vezes a fração 1/8 cabe em 1 (barra do inteiro)?

d) Quantas vezes a fração 1/8 cabe em 2/4?

e) De quantas peças de 1/9 (salmão) preciso para preencher uma peça de 1/3 (rosa pink)?

f) E quantas peças 1/10 (roxo) preciso para preencher uma peça de 1/3?

g) Com a peça 1/10 consigo cobrir exatamente qual peça (fração)?

i) Explique com suas palavras o que ocorre entre as letras f) e g) para que 1/10 possa cobrir ou não outra peça.

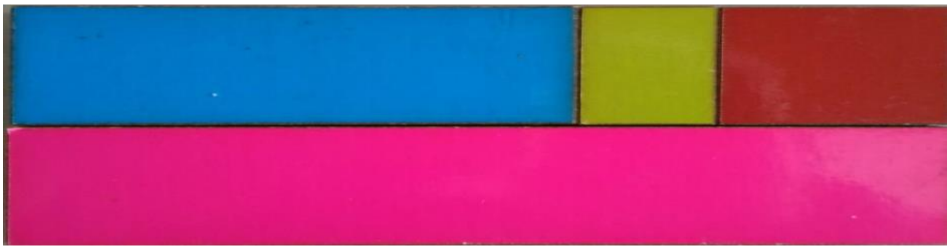
Atividade 3 – Professor, elabore uma atividade usando este material para trabalhar o conceito de equivalência de frações.

–

Atividade 4 – A seguinte atividade foi proposta aos alunos de 7º ano para trabalhar soma de frações com denominadores diferentes:

"Busque no material, peças de **tamanhos diferentes** que recubram a peça que representa 1/3."

Uma aluna apresentou como resposta $\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{3}$.



Uma aluna questionou como a colega tinha certeza que seu procedimento (cálculo) estava correto? A colega respondeu que fez a soma na calculadora e obteve 0,33... que é igual a 1/3. Como o professor poderia encaminhar a solução dessa questão envolvendo frações equivalentes?

Adição e subtração

Após retomar as principais ideias da aula anterior, propor a soma de frações com denominadores diferentes como, por exemplo, 1/3+1/4. Tome a peça de 1/3 e de ¼ e relacione com a peça amarela (do inteiro).

Retome da aula anterior, somas de frações com o mesmo denominador, por exemplo, ½+1/2=2/2=1, ou 1/5+1/5=2/5.

1) Diante do contexto da aula, como não foi abordado m.m.c e, sim equivalência, quais encaminhamentos podem ser adotados pelo professor para orientar o pensamento dos alunos para realizar a soma desejada?

2) E se for a diferença 1/3-1/4?

3) Para trabalhar a soma e subtração de frações o uso do m.m.c também é uma técnica eficiente. Dada a situação 1/3+1/4=7/12, é possível encontrar outra solução para essa soma? Dica: buque nos materiais peças que cubram 7/12.

4) Quais encaminhamentos daria na sequência para introduzir o conceito de mínimo múltiplo de 3 e 4?

Cientes que estamos num processo de formação continuada, são apresentadas situações e possíveis alternativas no processo de ensino e aprendizagem. Entretanto, somos cientes que dependendo da realidade escolar e crenças/postura do professor algumas ideias atingem mais que outras. Desta maneira, convidamos os professores participantes a construir um novo material sobre o tema.

Durante as formações sobre números racionais buscamos refletir sobre o papel do professor, ou seja, a organização de materiais, a busca por conhecimento (a área de pesquisa da Educação Matemática se expandido), exemplos/situações pertinentes, relação de conteúdos, metodologias e recursos adequados.

Neste contexto, pudemos discutir um pouco sobre o emprego do livro didático para elaboração da sequência de ensino para os números racionais, assim como, a limitação que alguns livros possuem de acordo com os objetivos do professor.

Assim, na perspectiva que o professor deve organizar seus objetivos e estratégias/recursos de como alcançá-los, propomos a seguinte situação:

Elabore uma atividade onde seja possível explorar as primeiras ideias sobre números racionais positivos, indicando os significados de parte/todo e quociente, como também, explore as representações dos racionais (fração, decimal, porcentagem, figura) para uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental. Porém, crie uma situação-problema ao aluno via a embalagem da caixa de suco abaixo ilustrada.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO DE ITAQUI

(5º encontro) Curso formativo e investigativo: Os conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática para ensinar os números racionais no Ensino Fundamental

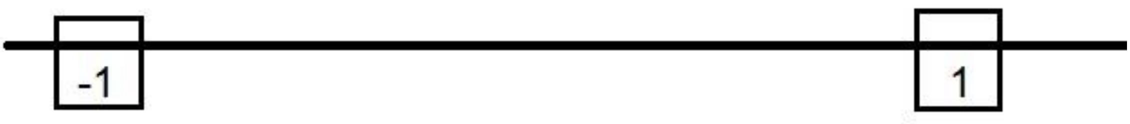
Recursos didáticos para o ensino de números racionais

Conteúdos abordados: densidade e ordenação dos números racionais.

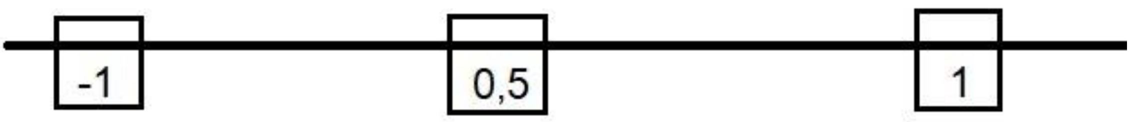
Material: fio, 10 prendedores, papéis para registrar os números, 2 canetinhas coloridas.

A turma deve estar organizada em dois grupos (ou mais) e um varal disposto na frente do quadro (visível a todos). As regras são as seguintes:

1) Inicialmente dois números racionais são escolhidos e dispostos no varal. A seguir em cada jogada, o grupo escolhe um aluno para colocar no número no varal. O tempo de cada jogada é de 15 segundos. Para marcar um número no varal é preciso antes jogar o dado numerado de 1 a 6. Os números 1, 2 e 3, o grupo deve marcar um número à esquerda do número escolhido por último. Se for os números 4, 5 e 6 no dado, o grupo deve marcar um número à direita do número escolhido por último.

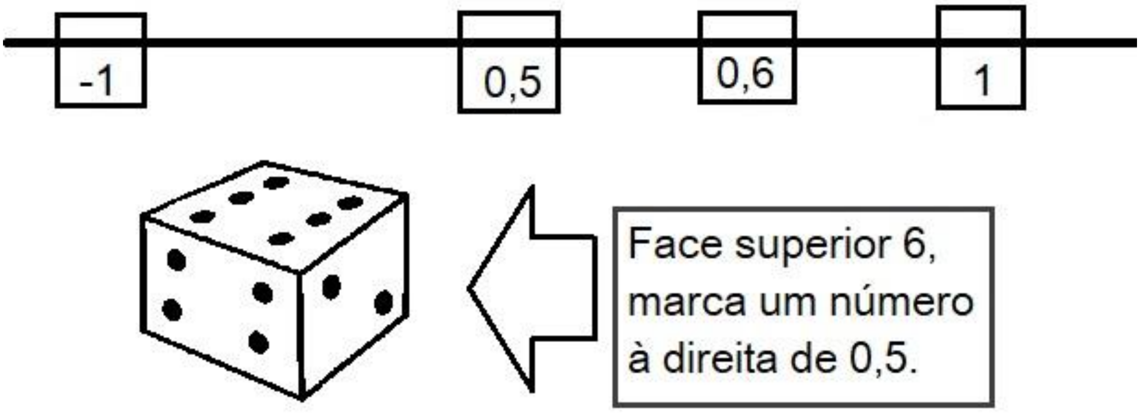


2) Com o par ou ímpar decide-se qual grupo começa jogando. O grupo que inicia deve marcar no varal um número racional no intervalo entre os dois números já dispostos no varal.



3) O outro grupo deve jogar o dado e escolher um número no intervalo indicado para marcar no varal. E assim por diante durante 4 rodadas. Se o aluno registra o número certo no varal, o grupo recebe um ponto, caso contrário não marca ponto. Vence o jogo o grupo que pontuar mais.

A ilustração abaixo indica uma jogada onde o aluno lançou o dado, obteve o número 6, logo deve marcar um número à direita do último número marcado (0,5).

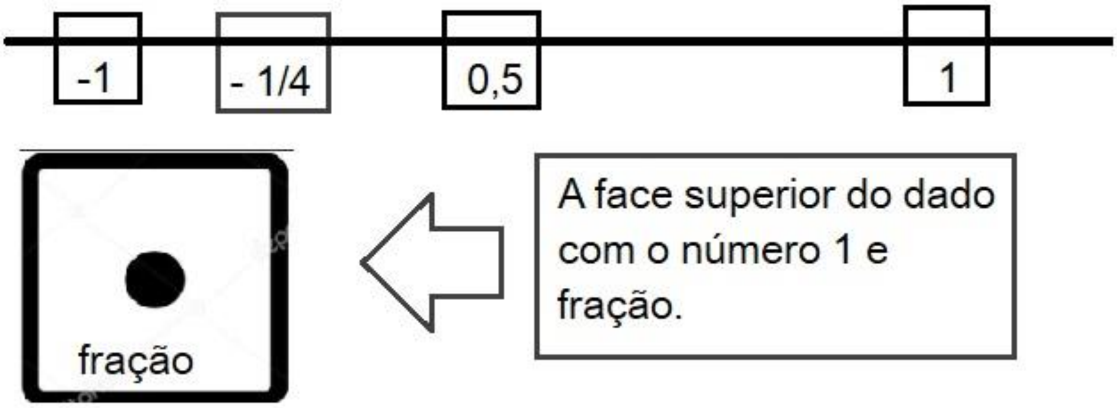


Observação 1: as regras do jogo são simples, há tempo para cada rodada e há um grupo vencedor. Cada grupo deve organizar suas estratégias: números possíveis em cada intervalo e qual participante (aluno) deve atirar o dado, escolher o número e marcar no varal.

Observação 2: cada jogo deve ser diferente, pois os intervalos iniciais são de escolha do professor (ou dos alunos). As figuras ilustram um jogo com registros em números decimais, mas a critério do professor pode-se explorar os outros registros (frações, frações equivalentes, frações decimais, porcentagens).

Observação 3: O jogo pode se tornar mais complexo se ao atirar o dado cada face represente uma ação. Por exemplo, as faces com os números 1, 2 e 3 deve marcar um número à esquerda do intervalo, porém o número 1 tem que registar um número fracionário, 2 um número decimal e 3 um número percentual. Do mesmo modo, à direita. O número 4 marca um número à direita e fracionário, o número 5 à direita e decimal e o número 6 à direita e percentual.

A ilustração abaixo indica uma jogada onde o aluno lançou o dado, obteve o número 1 e fração, logo deve marcar um número fracionário à esquerda do último número marcado (0,5).



Jogo Bingando com registros dos números racionais

Conteúdo: representações do número racional: fração, decimal, porcentagem e pictórica.

Materiais: 24 cartas com as frações com registro pictórico e 35 cartelas com os números racionais com registro fracionário, decimal e porcentagem.

Os alunos organizados individualmente recebem uma cartela que contém 6 números racionais. O jogo tem as mesmas regras do bingo convencional. Porém, os números não são sorteados, mas há cartas que são embaralhadas, dispostas uma embaixo da outra e com a face para baixo. O jogo inicia quando o professor mostra a primeira carta aos alunos e os mesmos devem verificar se possuem a mesma quantia na sua cartela. Por exemplo, a carta abaixo, indica o número $\frac{1}{1}$ ou 1 ou 1,0 ou 100% disponível nas cartelas.

Figura: simulação de uma carta.

O objetivo do jogo é alcançado quando o primeiro aluno completar sua cartela (6 números). Note que em cada cartela, há números com representação decimal, fracionária e porcentagem.

Exemplos de cartela

NÚMEROS RACIONAIS		
1	$\frac{1}{2}$	3,0
$\frac{6}{13}$	$\frac{18}{8}$	250%
NÚMEROS RACIONAIS		
$\frac{4}{2}$	0,5	25%
$\frac{15}{24}$	$\frac{60}{50}$	$\frac{27}{12}$

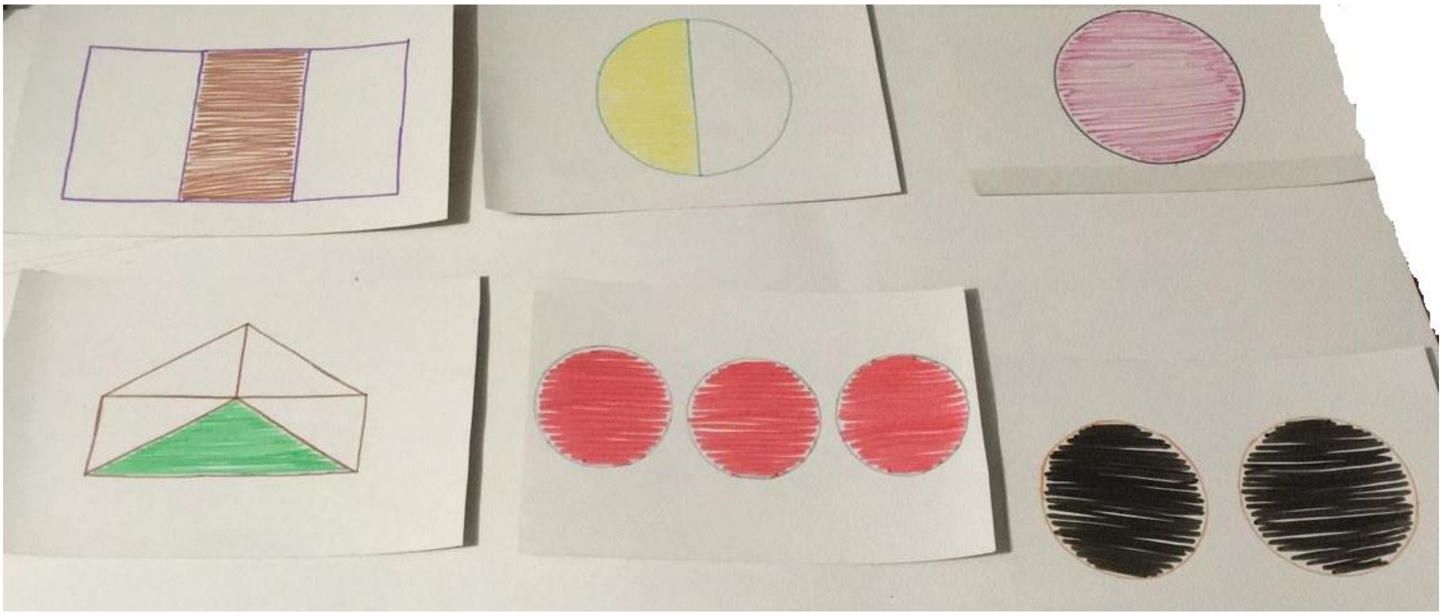
Fonte: da pesquisa.

Momentos do jogo definidos em Grando (2000)

Momentos do jogo	Comparação com o jogo Bingando com os números racionais
1º) Familiarização com o jogo Identificam o material: trilha, peão, dados, simulação de jogadas, analogias com jogo já conhecido pelos alunos.	Reconhecem as cartelas, as cartas que serão sorteadas e retomada das ideias do jogo de bingo.
2º) Reconhecimento das regras O professor pode explicar as regras ou serem lidas num guia ou via várias jogadas-modelo para que os alunos possam identificar as regularidades do jogo (as regras).	Relacionar as regras do jogo de bingo com o jogo bingando com os racionais. Via algumas cartas (figuras) selecionadas mostrar no quadro os tipos de registros do número selecionado.
3º) O jogo pelo jogo: jogar para garantir regras É o jogo espontâneo simplesmente, garantir que os alunos compreenderam as regras.	O professor inicia o jogo tomando uma carta e deixando disponível em frente ao quadro e após vai sorteando as cartas até alguém bingar.
4º) Intervenção pedagógica verbal Este momento caracteriza-se pelos questionamentos e observações realizadas pelo professor a fim de provocar os alunos para a realização das análises de suas jogadas (previsão de jogo, análise de possíveis jogadas a serem realizadas, constatação de “jogadas erradas” realizadas anteriormente, etc.) A atenção está voltada para os procedimentos criados pelos alunos na resolução dos problemas de jogo, buscando relacionar este processo à conceitualização matemática.	Alguns questionamentos que podem elucidar as jogadas aos alunos: É necessário buscar a fração irredutível do número sorteado? Ou é melhor buscar a sua forma decimal? Já reconheceram as quantidades que representam os números racionais da cartela de vocês?
5º) Registro do jogo O registro dos pontos, ou mesmo dos procedimentos e cálculos utilizados, pode ser considerado uma forma de sistematização e formalização, através de uma linguagem própria que, no nosso caso, seria a linguagem matemática. É importante que o orientador da ação procure estabelecer estratégias de intervenção que gerem a necessidade do registro escrito do jogo, a fim de que não seja apenas uma exigência, sem sentido para a situação de jogo.	Quando o professor sorteia uma carta (figura), é importante que os alunos façam o registro no seu caderno da figura e já busquem outros registros do mesmo número (quantidade) seja por frações, frações equivalentes, decimais ou porcentagem. Desse modo, o professor pode observar as marcações na cartela do aluno, verificar jogadas erradas ou concepções errôneas.
6º) Intervenção escrita Para o aluno, as situações-problema, proposta pelo professor, escritas representam um aperfeiçoamento nas suas formas de jogar, o que significa em uma melhora do seu desempenho a fim de vencer o jogo. É nesse sentido que buscamos garantir, até certo ponto, a pouca perda de ludicidade do jogo, ao levá-lo para o contexto de sala de aula	*Situação-problema*: Se na cartela tem um número decimal, como faço para descobrir com qual figura pode ser equivalente? *Situação-problema*: Por que essa igualdade é válida 0,5 = 50%? *Situação-problema*: Quantas possíveis representações pode ter a fração ½?
7º) Jogar com competência Um último momento representa o retorno à situação real de jogo, considerando todos os aspectos anteriormente analisados (intervenções). É importante que o aluno retorne à ação do jogo para que execute	Após os passos anteriores, o jogo deve ter um fluído mais rápido e competente. É importante, ainda, o aluno fazer o registro no seu caderno das figuras sorteadas para a verificação do professor. Isso, também, facilita o aluno nas

muitas das estratégias definidas e analisadas durante a resolução dos problemas. Assim, o jogo passa a ser considerado sob vários aspectos e óticas que inicialmente poderiam não estar sendo considerados.	jogadas, pois ele já fez o registro no caderno, então pode só retomar o registro e não fazer tudo novamente.

Figura: modelo de cartas dos números racionais com representação pictórica.



Os números racionais positivos escolhidos foram $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{4}{6}, \frac{2}{5}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{6}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{10}, \frac{1}{10}, \frac{6}{5}, \frac{3}{10}, \frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{16}{4}$. Observe que as representações pictóricas (cartas) tem grandezas contínuas e discretas.

As questões a seguir têm o intuito de promover uma reflexão quanto ao uso de recursos didáticos tais como jogos, *applets*, material concreto (Frac Soma por exemplo). E, deste modo, compreender como esse recursos na prática da sala aula podem ser facilitadores (ou não) no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

1) Quando você organiza o material para iniciar um conteúdo com seus alunos, consideras

(   ) Primeiramente a definição e, após, exemplos.

(   ) Primeiramente uma situação-problema para, na sequência, a definição e exercícios análogos.

(   ) Inicialmente um material concreto para explorar o conceito em questão, a definição e exercícios.

(   ) Outra forma. Cite. ____

____

2) Quanto ao conteúdo específico de números racionais (6º ou 7º ano), o emprego de recursos didáticos é

( ) eventual, apenas para exercitar o conteúdo (uma atividade alternativa).

( ) nunca emprego, não percebo os jogos ou *applets*, por exemplo, como atividades que realmente potencialize a aprendizagem dos alunos.

( ) normalmente emprego para iniciar um conceito. Cite. ____

____

3) Caso você não empregue jogos ou *applets* ou material concretos com o Frac Soma por exemplo, ao que você acarreta esse fato?

( ) Não percebo a necessidade de emprego nas aulas, pois os alunos são agitados e não se comprometem com atividades investigativas/interpretativas.

( ) Não tenho tempo de elaborar/selecionar esses recursos, assim como, o tempo em sala de aula é curto para desenvolver essas atividades e todos os conteúdos programados.

( ) Minha formação inicial não focou nesta modalidade de ensino via jogos ou resolução de problemas.

( ) Outro fator não citado anteriormente. ____

____

4) Quanto a proposta de emprego desses recursos durante a formação continuada sobre números racionais, você

( ) empregaria, são adequados para sala de aula.

( ) não empregaria, porque____

____

5) Como esse curso de formação mobiliza (ou pode) seus conhecimentos ao planejar e implementar as aulas sobre números racionais? ____

____

6) Suas considerações finais sobre o emprego desses recursos didáticos conforme as discussões propostas durante a formação continuada. ____

____

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO DE ITAQUI

(6º encontro) Curso formativo e investigativo: Os conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática para ensinar os números racionais no Ensino Fundamental

Estudo da BNCC (2017)

ÁREA DA MATEMÁTICA

No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental.

O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição).

A BNCC propõe cinco **unidades temáticas**, correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a ser desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental. Cada uma delas pode receber ênfase diferente, a depender do ano de escolarização.

A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.

No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa em relação a essa temática é que os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras.

Nessa fase espera-se também o desenvolvimento de habilidades no que se refere à leitura, escrita e ordenação de números naturais e números racionais por meio da identificação e compreensão de características do sistema de numeração decimal, sobretudo o valor posicional dos algarismos. Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária.

Com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos.

Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais.

No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica. Cabe ainda destacar que o desenvolvimento do pensamento numérico não se completa, evidentemente, apenas com objetos de estudos descritos na unidade Números. Esse pensamento é ampliado e aprofundado quando se discutem situações que envolvem conteúdos das demais unidades temáticas: Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística.

Outro aspecto a ser considerado nessa unidade temática é o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. Assim, podem ser discutidos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos. Essa unidade temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro. É possível, por exemplo, desenvolver um projeto com a História, visando ao estudo do dinheiro e sua função na sociedade, da relação entre dinheiro e tempo, dos impostos em sociedades diversas, do consumo em diferentes momentos históricos, incluindo estratégias atuais de *marketing*. Essas questões, além de promover o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, podem se constituir em excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e também proporcionar contextos para ampliar e aprofundar esses conceitos.

MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS: UNIDADES TEMÁTICAS, OBJETOS DE CONHECIMENTO E HABILIDADES

Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência.

Da mesma forma que na fase anterior, a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação. Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.

A leitura dos objetos de conhecimento e das habilidades essenciais de cada ano nas cinco unidades temáticas permite uma visão das possíveis articulações entre as habilidades indicadas para as diferentes temáticas. Entretanto, recomenda-se que se faça também uma leitura (vertical) de cada unidade temática, do 6º ao 9º ano, com a finalidade de identificar como foi estabelecida a progressão das habilidades. Essa maneira é conveniente para comparar as habilidades de um dado tema a serem efetivadas em um dado ano escolar com as aprendizagens propostas em anos anteriores e também para reconhecer em que medida elas se articulam com as indicadas para os anos posteriores, tendo em vista que as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes.

Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto.

Além disso, nessa fase final do Ensino Fundamental, é importante iniciar os alunos, gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. Isso envolve a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do senso crítico em relação à argumentação neles utilizada.

Unidade temática	Objeto de conhecimento	Habilidades
Números	Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal	- Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica. - Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.
	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais Divisão euclidiana	Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
	Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	- Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par). - Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos “é múltiplo de”, “é divisor de”, “é fator de”, e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. - Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	- Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. - Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. - Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. - Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
	Aproximação de números para múltiplos de potências de 10	Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima.
	Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da “regra de três”	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da “regra de três”, utilizando estratégia

Matemática **6º ano** do Ensino Fundamental

Matemática **7º ano** do Ensino Fundamental

Unidade temática	Objeto de conhecimento	Habilidades
Números	Múltiplos e divisores de um número natural	Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
	Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
	Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações	- Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração. - Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	- Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. - Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. - Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. - Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. - Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	- Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. - Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. -Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Matemática **8º ano** do Ensino Fundamental

Unidade temática	Objetos de conhecimento	Habilidades
Números	Notação científica	Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
	Potenciação e radiciação	Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
	O princípio multiplicativo da contagem	Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
	Porcentagens	Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
	Dízimas periódicas: fração geratriz	Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Matemática **9º ano** do Ensino Fundamental

Unidade temática	Objetos de conhecimento	Habilidades
Números	Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica	- Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). - Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
	Potências com expoentes negativos e fracionários	Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
	Números reais: notação científica e problemas	Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.
	Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos	Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS\MAPEAMENTO DOS CONTEÚDOS MÍNIMOS
PREFEITURA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO DE ITAQUI

6º ANO*	7º ANO*	8º ANO*	9º ANO

1º trimestre - Teoria dos conjuntos (unitário, vazio, relação de pertinência, subconjuntos, união, intersecção, problemas de aplicação, complementar). - Conjunto dos números naturais; - Operações com números naturais; - Adição e subtração (termo desconhecido, prova real e problemas); - Multiplicação: com dois algarismos no multiplicador, termo desconhecido e problemas; - Divisão: com dois algarismos, termo desconhecido e problemas; - critérios de divisibilidade: 2, 3, 5 e 10; - Múltiplos e divisores. **2º trimestre** - Potenciação e radiciação; - Expressões numéricas; - Números primos até 100; - Decomposição em fatores primos; - MMC por definição e decomposição; - MDC. **3º trimestre** - Tipos de frações; - Frações: equivalentes, simplificação, operações, problemas; - Números decimais (operações); - Noções sobre unidades de medida (comprimento, capacidade e massa).	**1º trimestre** - Conjunto dos números inteiros (Z); - Representação Geométrica de Z; - Relação de ordem; - Operação em Z (envolvendo números racionais e decimais); - Potenciação e radiciação em Z (propriedades) - Expressões numéricas (envolvendo as 6 operações) **2º trimestre** - Conjunto dos números racionais (Q); - Representação na reta; - Módulo; - Adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação; - Raiz quadrada; - Dízima periódica. **3º trimestre** - Equações do 1º grau; - Problemas do Primeiro Grau com uma variável; - Razão; - Proporção; - Regra de três simples e composta; - Porcentagem; - Juro simples e composto (noções); - Câmbio (moedas internacionais).	**1º trimestre** - Conjunto dos números reais; - Monômios: conceito, redução de termos semelhantes, adição e subtração, multiplicação e divisão, potenciação e radiciação; - Polinômios: grau, adição e subtração, multiplicação e divisão; - Multiplicação de monômios por polinômios e entre polinômios; - Divisão de polinômios por monômios; **2º trimestre** - Produtos notáveis: quadrado da soma/diferença de dois termos, produto da soma pela diferença de dois quadrados; - Fatoração: fator comum, agrupamento, trinômio quadrado perfeito, diferença de dois quadrados; **3º trimestre** - Frações algébricas: conceito, simplificação, adição e subtração, potenciação e divisão; - Equações fracionárias, sistema de equações redutíveis ao 1º grau, problemas do 1º grau com uma ou duas variáveis, equações fracionárias redutíveis de 1º grau; - Geometria: ângulos consecutivos, adjacentes, bissetriz de um ângulo; - Ângulos complementares suplementares (aplicações), ângulos opostos pelo vértice, ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal, ângulos internos e externos (polígonos, quadriláteros e triângulos).	**1º trimestre** - Potenciação (revisão) - Radicais: propriedades, simplificações, operações fundamentais, potenciação – propriedades, racionalização. - Equações do 2º grau: completa, incompleta e problemas; - Sistema de equações de 1º e 2º graus. **2º trimestre** - Relações entre coeficientes e raízes, problemas, equações irracionais (noções), equações biquadradas, problemas de equações do 1º e2º grau; - Noções de gráficos de parábolas e funções do 1º e2º grau. **3º trimestre** - Razões trigonométricas, congruência de triângulos, relações métricas no triângulo retângulo, projeção ortogonal de pontos e segmentos; - Teorema de Pitágoras; - Circunferência e círculo (introdução, conceito e elementos); - Posições de reta e circunferência; - Posições de circunferência; - Ângulo central (arco); - Ângulo inscrito.

*Observação: inserir a geometria nos conteúdos programáticos de cada trimestre.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO DE ITAQUI

(7º encontro) Curso formativo e investigativo: Os conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática para ensinar os números racionais no Ensino Fundamental

Resolução de Problemas como metodologia de ensino

A proposta deste encontro se destina a aplicar e discutir uma sequência de ensino versando sobre números racionais na perspectiva da Resolução de Problemas. Toma-se essa metodologia de ensino, pois a mesma abarca mais dimensões no processo de ensino e aprendizagem. Além de desenvolver o letramento matemático do aluno (definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas - BNCC).

Roteiro proposto (não é algo rígido)

• **Formar grupos e entregar uma atividade.**

Lembrar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado. Progredir em direção a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. Os estudantes precisam experimentar esse processo colaborativo e deve-se dar, a eles, oportunidade de aprender uns com os outros. Assim, devem-se organizar os alunos em pequenos grupos, permitindo que sua aprendizagem, em sala de aula, se realize, também, no contexto desses grupos.

• **O papel do professor**

O papel do professor, nesta etapa do trabalho, muda de comunicador do conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem. O professor deve lançar questões desafiadoras e ajudar os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para superar as dificuldades. O professor, ao fazer a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários. As resoluções realizadas nos grupos devem ser apresentadas, por escrito, ao professor.

• **Resultados na lousa**

Com o trabalho dos alunos terminado, o professor, na lousa, anota os resultados obtidos pelos diferentes grupos. Anota resultados certos, errados, feitos por diferentes caminhos, etc.

• **Plenária**

O professor chama todos os alunos para uma assembleia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, têm condições de participar, juntamente com o professor, na exploração e discussão dos resultados.

• **Análise dos resultados**

Nesta fase os pontos de dificuldade encontrados pelos alunos são trabalhados. Outra vez surgem problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir o "levar o trabalho à frente". O aspecto exploração é bastante considerado nesta análise.

• **Consenso**

A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido.

• **Formalização**

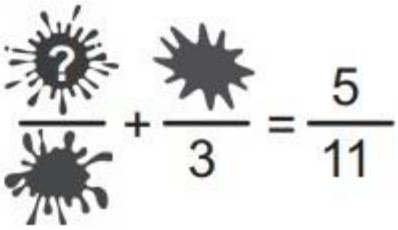
A partir do consenso, num trabalho conjunto, professor e alunos, com o professor na lousa, fazem uma síntese daquilo que se objetivava aprender a partir do problema ou da situação-problema e, formalmente, o professor coloca as definições, identifica as propriedades, faz as demonstrações, etc.

Onuchic, Lourdes de la Rosa; Allevato, Norma Suely Gomes. **As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas**. Bolema, SP, Ano 21, nº 31, 2008, p. 79 a 102.

Proposta: apresentar e discutir os encaminhamentos da metodologia de resolução de problemas na perspectiva das autoras Onuchic e Alevatto (2008) em uma atividade.

Conhecimentos esperados dos alunos: reconhecimento da fração como parte/todo e quociente, entendimento de soma e subtração de frações por meio da equivalência.

Considere a seguinte situação: (OBMEP, 2016, 1ª fase) A figura mostra a fração $\frac{5}{11}$ como a soma de duas frações. As manchas encobrem números naturais. Uma das frações tem denominador 3. Qual é o menor numerador possível para a outra fração?



a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Encaminhamentos aos alunos para elucidar a questão.

1) O que deve ser determinado nesta situação?

2) Como os denominadores não são iguais, precisamos torná-los. Que estratégia usarias para buscar um denominador comum às frações?

3) Como foram dadas alternativas de respostas, todas elas são possíveis como solução? Teste.

4) Justifique qual das alternativas você considera correta.

Considere a seguinte situação: (OBMEP, 2015, 1ª fase) Pedrinho colocou 1 copo de suco em uma jarra e, em seguida, acrescentou 4 copos de água. Depois decidiu acrescentar mais água até dobrar o volume que havia na jarra. Ao final, qual é o percentual de suco na jarra?

a) 5% b) 10% c) 15% d) 20% e) 25%

Encaminhamentos aos alunos para elucidar a questão.

1) O que deve ser determinado nesta situação?

2) Simulando que um copo tenha 200 ml e a jarra 1000 ml (ou 1 litro), qual a porcentagem de um copo em relação à jarra?

3) Entretanto não é dado na situação o volume do copo ou da jarra, e, sim, que o volume da jarra está medido em número de copos. Quantos copos são no total?

4) Como foram dadas alternativas de respostas, todas elas são possíveis como solução? Teste.

5) O que você compreende da razão suco para água de $\frac{1}{9}$ nessa situação?

6) Justifique qual das alternativas você considera correta.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO DE ITAQUI

(8º encontro) Curso formativo e investigativo: Os conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática para ensinar os números racionais no Ensino Fundamental

A relação entre a competência de análise didática e a capacidade de criar problemas que facilitem a aprendizagem.

Criação de problemas matemáticos	
Por **variação** - se constrói um novo problema modificando um ou mais dos 4 elementos do problema dado (dados quantitativos, requerimento, contexto e os conceitos matemáticos que intervém para resolver o problema).	Por **elaboração** – pode ser livre a partir de uma situação dada ou configurada ou pode ser a pedido específico (ênfase matemático ou didático).

Roteiro para estimular a criação de problemas pelos alunos

Situação:	**Ações propostas aos alunos**	**Objetivos**
Para o lanche da escola, Luana, Débora e Lucas levaram uma barra de chocolate da mesma marca e tamanho. Durante o recreio Luana dividiu igualmente sua barra com uma amiga. Débora compartilhou igualmente entre ela e suas três amigas. Lucas percebeu que havia 7 colegas sem chocolate, dividiu igualmente entre eles. Sabendo disso responda: a) Com quem você preferiria dividir a barra de chocolate? Por quê? b) Se juntássemos as barras da Luana e Débora para dividir igualmente entre elas e suas amigas, seria possível que cada uma comesse 30% da barra?	1) Responder a situação-problema proposta.	Compreender a situação inicial.
	2) Apresentar e justificar a solução determinada.	Desenvolver o raciocínio e a argumentação da solução determinada.

	3) Criação de um novo problema modificando alguns dados ou perguntas do problema inicial proposto.	Imaginar e criar uma situação-problema a partir de um contexto.
	4) Cada aluno deve solucionar o seu problema criado (ou do colega).	Verificar se seu problema foi corretamente elaborado, com as informações necessárias ou com dados desnecessários.
	5) Alguns estudantes explicam oralmente como determinaram a solução do novo problema.	Desenvolver a argumentação e estratégia de solução.
	6) Da situação inicial questionar os alunos sobre outras possibilidades que poderiam ser exploradas da situação.	Buscar situações correlatas a dadas como número de pessoas ou barras.
	7) Criar um novo problema relacionado a situação inicial e que na solução desse problema seja trabalhado um conceito matemático específico (operações com racionais por exemplo).	Criar um problema para explorar um conhecimento específico.

	8) Cada aluno deve responder ao seu problema criado (ou do colega).	Verificar se seu problema foi corretamente elaborado, com as informações necessárias ou com dados desnecessários.
	9) Peça que cada aluno compartilhe com a turma oralmente o problema criado e alguns os encaminhamentos da solução.	Desenvolver a capacidade de argumentação e estratégia de solução.

A situação a seguir é uma sugestão para se trabalhar com a metodologia de resolução de problemas (com possíveis adaptações) ou, então, com a proposta de criação de problemas com os alunos. Em sala de aula, é interessante organizar grupos (passo 3) e individualmente (passo 7). Lembrem que as intervenções do professor em todos os passos do roteiro são essenciais. Ressalta-se que os passos não são rígidos e não há a necessidade de todos por exemplo.

Na metodologia de resolução de problemas é importante indagar os alunos para compreenderem a situação inicial, o que se pede, buscar entre os alunos diferentes estratégias de solução, realizar a discussão no quadro com a turma da solução/encaminhamentos encontrados para, então, formalizar os conceitos abordados.

Referências

MALASPINA, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En CONTRERAS,J.M; P. ARTEAGA,P; CAÑADAS, G,R; GEA, M,M; GIACOMONE,B; LÓPEZ-MARTÍN,M,M; (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponível em enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html. Acesso 20 jun. 2018

CÁRDENAS, C.J.F. ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE ADICIÓN, SUSTRACCIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES DECIMALES, CREADOS POR ESTUDIANTES DEL 6° GRADO DE PRIMARIA EN UNA EXPERIENCIA DIDÁCTICA (Tese de doutorado, 2015). Disponível em http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/6754. Acesso 20 jun. 2018.

Situação-problema: Leia a situação a seguir e faça os encaminhamentos necessários.

Durante uma aula de Matemática sobre frações, a professora propôs uma situação para iniciar o estudo, observe:

Construído no programa PIXTON (www.pixton.com.br)

Fonte: da pesquisa.

Dada a situação acima, a professora questionou seus alunos sobre quanto custaria para Dona Maria a compra dos quilos de costela se ela aceitasse a sugestão do açougueiro da quantidade de carne consumida por pessoa. Obteve as seguintes respostas:

Aluno 1: Professora, primeiro pensei em calcular um meio de 12 que deu 6 quilos (são 12 pessoas e cada come meio quilo). Como dona Maria precisa de 6 quilos e cada quilo custa R$11,90, fiz a multiplicação 6 por 11,90 que resultou em R$ 71,40.

Aluno 2: Professora, primeiro pensei que o 12 é o todo de pessoas. Depois, pensei em organizar em partes de dois em dois, pois cada quilo dá para duas pessoas, assim cada parte custa R$ 11,90, somando as 6 partes de 11,90 resulta em R$ 71,40 para dona Maria pagar.

a) Os dois alunos chegaram no mesmo resultado, porém com estratégias diferentes. Qual significado foi atribuído à fração $\frac{1}{2}$ em cada situação?

b) Outro aluno disse à professora que o seu resultado não era o mesmo dos colegas 1 e 2. Disse que encontrou R$142,80, pois pensou que bastava realizar o produto entre 11,90 por 12 (número de pessoas). Qual erro de interpretação que o aluno cometeu? Quais encaminhamentos/questionamentos o professor precisa realizar para elucidar a questão ao aluno?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

SECRETARIA MUNICIPAL DA EDUCAÇÃO DE ITAQUI

(9º encontro) Curso formativo e investigativo: Os conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática para ensinar os números racionais no Ensino Fundamental

Autoavaliação do curso de formação continuada

Prezada professora, esta autoavaliação tem por intuito que você participante do curso aponte e reflita sobre as atividades e encaminhamentos realizados durante todos esses meses de formação. À formadora servirá de subsidio para analisar, via seu ponto de vista, como a proposta pode ser aperfeiçoada, assim como, identificar potencialidades e limitações quanto a proposta desenvolvida. Desde já, grata pela sua participação e colaboração. Até uma próxima!

1) Na sua opinião, porque os alunos apresentam dificuldades na compreensão do objeto números racionais no Ensino Fundamental?

____

2) A formadora ao abordar sobre recursos didáticos (jogos ou *applets*), intentou vislumbrar possibilidades para esses materiais que facilitassem/potencializassem a aprendizagem dos alunos. Como, por exemplo, organizar uma atividade avaliativa por meio de um *applet*. Como você compreende essa possibilidade no seu local de trabalho?

____

3) Muitos pesquisadores/professores percebem a Matemática como uma arte de resolver problemas. E, neste curso, buscamos a compreensão de conceitos via uma situação-problema com ou sem recursos didáticos. Como está inserida a resolução de problemas na sua prática ao ensinar frações, decimais ou números racionais?

____

4) O uso de tecnologias digitais (celular, *applets*, *software*) no ensino é limitado pela infraestrutura precária das escolas conforme relatos dos professores neste curso. Como você percebe a organização da sua Escola (secretaria de educação, direção, supervisão, demais professores) para que seja introduzida e mantida o emprego de tecnologias digitais no ensino?

____

5) Como professor, se você quiser que os alunos desenvolvam uma compreensão de números racionais, relacionada ao cotidiano do aluno, quais são os principais conceitos que você considera fundamental que eles aprendessem?

____

6) Que estratégias você usaria para ensinar esses conceitos (referente a questão anterior)?

____

7) O número racional na forma decimal é o comumente empregado no cotidiano das pessoas. Porém, na escola estudamos outros registros, como a fracionária ou porcentagem. Por que você acha importante os alunos compreenderem e operarem com números fracionários?

____

8) A BNCC propõe que as aprendizagens essenciais dos alunos devem assegurar o desenvolvimento de dez competências gerais durante a educação básica, sendo uma delas

"Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas".

a) Como você percebe que a Matemática pode contribuir para que essa competência possa ser alcançada, ou seja, que o aluno desenvolva as habilidades mencionadas?

____

b) O que você identifica como obstáculo(s) hoje ao **aluno** para que a aprendizagem de Matemática tenha a perspectiva de desenvolver essa competência?

____

c) O que você identifica como obstáculo(s) hoje ao **professor** para que o ensino de Matemática tenha a perspectiva de desenvolver essa competência?

____

9) Como e no que esta formação influência/impacta nos seus conhecimentos para ensinar os números racionais?

____

10) Como e no que esta formação influência/impacta nos seus conhecimentos ao planejar, implementar e avaliar um processo de ensino e aprendizagem?

____

11) Em que nível de comprometimento/envolvimento com o curso de formação te identificas:

( ) insuficiente ( ) suficiente ( ) plenamente

12) Você considera que a evasão nos processos de formação continuada acontece por:
(a) falta de tempo do professor;
(b) falta de estímulo do professor;
(c) falta de liberação na escola;
(d) assuntos abordados que não interessam;
(e) outro motivo..

ANEXOS

ANEXO 1A

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu____ portador do RG. Nº ____________________, CPF: _______________ aceito participar da pesquisa intitulada **“***Professor reflexivo em formação continuada: construindo novas perspectivas metodológicas em um ambiente de sala de aula*” desenvolvida pelos pesquisadores Alex Sandro Gomes Leão e Patrícia Pujol Goulart Carpes e permito que obtenha os registros dos protocolos desenvolvidos durante as Oficinas de minha pessoa para fins de pesquisa científica. Tenho conhecimento sobre a pesquisa e seus procedimentos metodológicos.

Autorizo que o material e informações obtidas possam ser publicados em aulas, seminários, congressos, palestras ou periódicos científicos. Porém, não deve ser identificado por nome em qualquer uma das vias de publicação ou uso.

Os registros dos protocolos ficarão sob a propriedade do pesquisador pertinente ao estudo e, sob a guarda dos mesmos.

Itaqui, 04 de setembro de 2017.

____

Nome completo do pesquisado

ANEXO 1B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa intitulada "OS CONHECIMENTOS DIDÁTICO-MATEMÁTICOS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA AO ENSINAR NÚMEROS RACIONAIS PARA UMA MAIOR IDONEIDADE DIDÁTICA" que será desenvolvida por Patrícia Pujol Goulart Carpes, aluna do Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIMAT) da Universidade Franciscana sob orientação da Profa. Dra. Eleni Bisognin. Tal pesquisa busca investigar como um programa formativo mobiliza os conhecimentos didático-matemáticos sobre números racionais num grupo de professores de Matemática do Ensino Fundamental anos finais. Você, enquanto professor(a) de Matemática da educação básica, mais especificamente do ensino fundamental, conhece a realizada da escola básica e do conteúdo de números racionais que são trabalhados nesse nível de ensino, bem como, a maneira como são ensinados. Por isso, sua colaboração para com a nossa pesquisa é valiosa. Sua participação nessa pesquisa se dará a partir do seu consentimento em participar do curso formativo e a disponibilização dos seus registros. Salientamos que a qualquer momento você poderá desistir de participar e retirar seu consentimento. Sua recusa, desistência ou retirada de consentimento não acarretará prejuízo. O curso, se você permitir, será gravado para facilitar o acesso aos dados e, após terminada a pesquisa as gravações serão descartadas. O estudo não terá custo, do mesmo modo que não haverá nenhum tipo de compensação financeira. Caso sobrevenha algum dano decorrente da participação na pesquisa haverá ressarcimento. O curso será realizado na Universidade Federal do Pampa – Campus de Itaqui/RS. Os riscos ao qual você está sujeito ao participar do curso não são maiores do que os riscos próprias da vida cotidiana. Os pesquisadores responsáveis se comprometem a tornar públicos nos meios acadêmicos e científicos os resultados obtidos de forma consolidada sem qualquer identificação de indivíduos participantes. Caso você concorde em participar desta pesquisa, assine ao final deste documento, que possui duas vias, sendo uma delas sua, e a outra, do pesquisador responsável/coordenador da pesquisa. Contatos dos professores/pesquisadores e do Comitê de Ética Em Pesquisa (CEP) com Seres Humanos da Universidade Franciscana: Aluna do Curso de Doutorado Patricia Pujol Goulart Carpes – xxxxx, Professora Doutora Eleni Bisognin - xxxxx CEP – 3220-1200 Ramal – 1289.

Eu, ____ colaborador(a) fui informado (a) dos objetivos da pesquisa acima, de maneira clara e detalhada. Recebi informações sobre a pesquisa e esclareci minhas dúvidas. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações e modificar minha decisão com relação ao consentimento. A aluna/pesquisadora Patricia Pujol Goulart Carpes e a professora/pesquisadora Eleni Bisognin certificaram-me de que todos os dados desta pesquisa referentes às informações pessoais e/ou confidenciais fornecidas serão mantidas em sigilo absoluto, bem como terei liberdade de retirar o consentimento de participação na pesquisa a qualquer momento. Declaro que recebi cópia do presente Termo de Consentimento.

Assinatura do(a) colaborador (a): ____

Nome do(a) colaborador (a): ____

Data: ___/___/2018.

Assinatura do Pesquisador: ____

Nome do Pesquisador: Patricia Pujol Goulart Carpes

Data: ___/___/2018.

ANEXO 2

PREFEITURA MUNICIPAL DE ITAQUI

Secretaria Municipal de Educação e Desporto

TERMO DE COOPERAÇÃO E AUTORIZAÇÃO N o XX/2018

Termo de Cooperação e Autorização que faz a Secretaria Municipal de Educação e Desporto, para implementação do projeto de pesquisa CONHECIMENTOS DIDÁTICO-MATEMÁTICOS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA AO ENSINAR NÚMEROS RACIONAIS PARA UMA MAIOR IDONEIDADE DIDÁTICA. Pelo presente Termo de Autorização a Secretaria Municipal de Educação e Desporto SMED, do Município de Itaqui, com sede e foro na Rua Dr. João Dubal Goulart, s/n, representada neste ato por sua Secretária SOLANGE CARVALHO CARNIEL, CPF—XXXX, RG XXXX, a seguir denominada CONCEDENTE e a Doutoranda PATRICIA PUJOL GOULART CARPES, DO CURSO DE Pós -Graduação em Ensino de Ciências e Matemática DA Universidade Franciscana a seguir denominada PESQUISADORA resolvem celebrar o seguinte instrumento de Cooperação e Autorização, mediante as Cláusulas e condições seguintes:

CLÁUSULA PRIMEIRA

DO OBJETO

O presente Termo de Cooperação e Autorização tem por objeto o desenvolvimento de pesquisa tendo como executora a Doutoranda PATRICIA PUJOL GOULART CARPES, sob orientação da Professora Dra. Eleni Bisognin, da Universidade Franciscana CONHECIMENTOS DIDÁTICO-MATEMÁTICOS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA AO ENSINAR NÚMEROS RACIONAIS PARA UMA MAIOR IDONEIDADE DIDÁTICA POSSÍVEL.

EDUCAÇÃO E DESPORTO

O objetivo é contribuir para a Educação Matemática, trabalhando os significados e representações dos números racionais, através de diversas abordagens, jogos, resolução de problemas, história da matemática, recursos tecnológicos, desafios e aplicação no dia-a-dia.

Além do processo de formação, os professores participantes realizarão questionários, entrevistas, observações registros em áudio e vídeo, contribuindo para a pesquisa relativa à tese de doutorado,

CLÁUSULA SEGUNDA

DAS CONDIÇÕES DE ACESSO ÀS ESCOLAS DA REDE MUNICIPAL DE ENSINO FUNDAMENTAL

Por força deste Termo de Cooperação ficam autorizados os acessos às Escolas Municipais de Ensino Fundamental da Doutoranda Patricia Pujol Goulart Carpes, da Universidade Franciscana, no sentido de obtenção de dados informativos e aplicação de questionários, diretamente aos professores da rede municipal, bem como aos órgãos administrativos da

Secretaria Municipal de Educação e Desporto, que possam prestar informações úteis à pesquisa a ser desenvolvida.
O presente Termo de Cooperação e Autorização não envolve quaisquer ónus para as partes, inexistindo quaisquer despesas que devam ser reciprocamente suportadas, sendo que os recursos para o desenvolvimento da pesquisa são oriundos da própria Doutoranda como referido no preâmbulo do presente instrumento.

CLÁUSULA TERCEIRA
A Contrapartida da Secretaria Municipal de Educação
O presente Termos de Cooperação e Autorização incube a responsabilidade da Secretaria Municipal de Educação de Itaqui a organizar os horários dos professores de Matemática da sua rede de ensino num único horário, nas segundas-feiras, pelas manhãs, para o Curso de formação continuada no Campus de Itaqui da UNIPAMPA.

CLÁUSULA QUARTA
DA DENÚNCIA E RESCISÃO
O presente Termo de Cooperação e Autorização poderá ser denunciado a qualquer tempo, mediante comunicado formal com trinta (30) dias de antecedência e rescindindo de pleno direito, independentemente de interpelação judicial ou extrajudicial, por encerramento do objeto, descumprimento das normas estabelecidas na legislação vigente, por inadimplemento de quaisquer umas de suas cláusulas ou condições, ou pela superveniência de norma legal ou fato que o torne material ou formalmente inexequíveis.

CLÁUSULA QUINTA
DO PRAZO DE EXECUÇÃO E VIGÊNCIA
O prazo de vigência do presente Convénio é de dois (02) anos, podendo ser renovado por igual período, manifestando interesse os convenentes.
O presente Convénio poderá ter suas cláusulas alteradas mediante acordo entre as partes, através de termo aditivo.
CLÁUSULA SEXTA
DO FORO
Fica eleito o Foro de Itaqui para dirimir as questões decorrentes da execução do presente Convénio, com renúncia expressa de qualquer outro, por mais privilegiado que seja. E, por estarem justos e acordados, firmam o presente Convénio em 02 (duas) vias de igual teor e forma, na presença das testemunhas abaixo relacionadas.
Itaqui, 14 de março de 2018

SOLANGE CARVALHO CARNIEL
Secretaria Municipal de Educação e Desporto

PATRICIA PUJOL GOULART CARPES
Pesquisadora

____

Testemunhas

ANEXO 3

TERMO DE CONFIDENCIALIDADE

Título do projeto: Conhecimentos didático-matemáticos do professor de Matemática ao ensinar números racionais para uma maior idoneidade didática
Pesquisador responsável: Patricia Pujol Goulart Carpes
Demais pesquisadores: Eleni Bisognin
Instituição de origem do pesquisador: Universidade Franciscana
Área de Conhecimento: Ciências Exatas e Terra
Curso: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Telefone para contato: (55) xxxxxxxxxxxx
Local da Coleta de dados: Universidade Federal do Pampa, Itaqui, RS

Registro no CEP/UNIFRA:

O(s) pesquisador(es) do projeto acima identificado(s) assume(m) o compromisso de:

I. Preservar o sigilo e a privacidade dos sujeitos cujos dados (informações e/ou materiais biológicos) serão estudados;

II. Assegurar que as informações e/ou materiais biológicos serão utilizados, única e exclusivamente, para a execução do projeto em questão;

III. Assegurar que os resultados da pesquisa somente serão divulgados de forma anônima, não sendo usadas iniciais ou quaisquer outras indicações que possam identificar o sujeito da pesquisa.

O(s) Pesquisador(es) declara(m) ter conhecimento de que as informações pertinentes às técnicas do projeto de pesquisa somente podem ser acessados por aqueles que assinaram o Termo de Confidencialidade, excetuando-se os casos em que a quebra de confidencialidade é inerente à atividade ou que a informação e/ou documentação já for de domínio público.

Santa Maria, 11 de junho de 2018.

____

Assinatura Pesquisador

PATRICIA PUJOL GOULART CARPES

RG: xxxxxxxxxxxx

ANEXO 4

PREFEITURA MUNICIPAL DE ITAQUI - RS
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO

6º ANO
CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS 2015
ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS
MATEMÁTICA

1º TRIMESTRE:

- Teoria dos conjuntos (unitário, vazio, relação de pertinência, subconjuntos, união, intersecção, problemas de aplicação, complementar);
- Conjunto dos números naturais;
- Operações com números naturais;
- Adição e subtração (termo desconhecido, prova real e problemas);
- Multiplicação: com dois algarismos no multiplicador, termo desconhecido e problemas;
- Divisão: com dois algarismos no divisor, termo desconhecido e problemas;
- Critério de divisibilidade: 2,3,5 e 10;
- Múltiplos e divisores.

2º TRIMESTRE

- Potenciação e Radiciação;
- Expressões Numéricas;
- Números primos até 100;
- Decomposição em fatores primos;
- MMC por definição e decomposição;
- MDC.

3º TRIMESTRE

- Tipos de frações;
- Frações: frações equivalentes, simplificação de frações, operações com frações,incluindo problemas com frações;
- Números decimais (operações);
- Noções sobre unidades de medidas (comprimento, capacidade e massa);

OBS:
Inserir a geometria nos conteúdos programáticos de cada trimestre.

PREFEITURA MUNICIPAL DE ITAQUI - RS
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO

7º ANO
CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS 2015
ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS
MATEMÁTICA

1º Trimestre:

- Conjunto dos números inteiros (Z)
- Representação Geométrica de Z
- Relação de Ordem
- Operação em Z (envolvendo números racionais e decimais)
- Potenciação e radiciação em Z (propriedades)
- Expressões numéricas (envolvendo as 6 operações)

2º Trimestre:

- Conjunto dos Números Racionais(Q);
- Representação na reta;
- Módulo;
- Adição, subtração, multiplicação,divisão, potenciação e radiciação;
- Raiz quadrada;
- Dizima Periódica

3º Trimestre:

- Equações de 1º Grau;
- Problemas do Primeiro Grau com uma variável;
- Razão;
- Proporção;
- Regra de três simples e composta;
- Porcentagem
- Juro simples e composto(noções)
- Câmbio (moedas internacionais)

OBSERVAÇÃO:

A Geometria deve ser aplicada em todos os trimestres , com inserção nos conteúdos programáticos.

PREFEITURA MUNICIPAL DE ITAQUI - RS
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO

8º ANO
CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS 2015
ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS
MATEMÁTICA

1º Trimestre:

* **Conjunto dos Números Reais;**
- **Monômios**: Conceito, Redução de termos semelhantes, Adição e subtração, Multiplicação e divisão, Potenciação, Radiciação;
- **Polinômios:** Grau, Adição e subtração,Multiplicação e divisão;
- Multiplicação de monômio por polinômio e entre polinômios;
- Divisão de polinômio por monômio.

2º Trimestre:

- **Produtos notáveis:**Quadrado da soma de dois termos; Quadrado da diferença de dois termos, Produto da soma pela diferença de dois termos.
- **Fatoração:**Fator comum, Agrupamento,Trinômio quadrado perfeito, Diferença de dois quadrados;

3º Trimestre:
- **Frações Algébricas:**Conceito, Simplificação, Adição e subtração, Potenciação e divisão.

Equações fracionárias, Sistema de equações redutíveis ao 1º grau,Problemas do 1º grau com uma ou duas variáveis, Equações fracionárias redutíveis de 1º grau.
- **Geometria:**Ângulos consecutivos,Ângulos consecutivos adjacentes,Bissetriz de um ângulo.
- Ângulos complementares e suplementares (aplicações), Ângulos opostos pelo vértice, Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal, Ângulos internos e externos (polígonos, quadriláteros e triângulos).

OBS.:
A Geometria deve ser aplicada em todos os trimestres, com inserção nos conteúdos programáticos.

PREFEITURA MUNICIPAL DE ITAQUI - RS
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO

9º ANO
CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS 2015
ENSINO FUNDAMENTAL – ANOS FINAIS
MATEMÁTICA

1º Trimestre:

- **Potênciação** (revisão)
- **Radicais:**Propriedades, Simplificações,Operações Fundamentais, Potenciação – propriedades, Racionalização
- Equações do 2º Grau: completa, incompleta e problemas;
- Sistema de equações de 1º e 2º graus.

2º Trimestre:
- Relações entre coeficientes e raízes, Problemas, Equações Irracionais (noções), Equações biquadradas, Problemas de Equações do 1º e 2º Grau,
- Noções de gráficos de parábolas e Funções 1º e 2º grau;

3º Trimestre:

- **Geometria:**
- Razões Trigonométricas, Congruência de triângulo, Relações Métricas no triângulo retângulo, Projeção Ortogonal de pontos e segmentos;
- Teorema de Pitágoras;
- Circunferência e círculo (introdução, conceito e elementos);
- Posições de reta e circunferência;
- Posição de circunferências;
- Ângulo central (arco);
- Ângulo Inscrito;