ADRIANA ASSIS FERREIRA

A PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS EM UM CONTEXTO DE AULAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientadora: Profª Drª Cristina de Castro Frade

Belo Horizonte
Faculdade de Educação da UFMG
2012

F383p
T

Ferreira, Adriana Assis, 1970 -
A produção de significados matemáticos em um contexto de aulas exploratório-investigativas [manuscrito] / Adriana Assis Ferreira. - UFMG/FaE, 2012.
250 f., enc,

Tese - (Doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.
Orientadora : Cristina de Castro Frade.
Bibliografia : f. 238-247.
Anexos : f. 248-250.

1. Educação -- Teses. 2. Aprendizagem -- Teses. 3. Matemática -- Estudo e ensino -- Teses.
I. Título. II. Frade, Cristina de Castro. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

CDD- 370.733

Catalogação da Fonte : Biblioteca da FaE/UFMG

O senhor... Mire e veja: o mais importante e bonito, do mundo, é isto: que as pessoas não estão sempre iguais, ainda não foram terminadas - mas que elas vão sempre mudando. Afinam ou desafinam. Verdade maior. É o que a vida me ensinou.

(Guimarães Rosa, Grande Sertão: Veredas)

Aos meus pais, João e Lourdinha, por serem meu começo e meu exemplo de caráter, força e simplicidade;

Aos meus irmãos, Ana Cristina, Arnaldo e Andréia, por me amarem incondicionalmente.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Minas Gerais e aos professores da Linha de Educação Matemática pela oportunidade de aprendizado; à Coordenação do Programa de Doutorado em Educação da Universidade de Granada (Espanha) e ao grupo de investigação 'Teoría de la Educación Matemática' por ter discutido minha análise; e ao Centro Pedagógico da UFMG (CP) que me recebeu, tornando essa pesquisa possível.

Agradeço especialmente:

- à Cristina Frade, pelo competente trabalho como orientadora, pela amizade e por, em muitos momentos, confiar em mim mais do que eu em mim mesma;
- ao Juan D. Godino, meu orientador no doutorado sanduíche, pela elegância ao lidar com minhas dúvidas e pela disponibilidade e generosidade incomparáveis;
- aos professores Lulu Healy, Jorge Falcão, Orlando Aguiar e Jussara Loiola, por aceitarem fazer parte da banca, pelos pareceres e tempo dedicado;
- ao professor Oziel, que prontamente se dispôs a me receber em suas aulas; e à professora Talita, por seu jeitinho todo especial de ser – afetuoso, assertivo e tranquilo – que muito contribuiu para o desenvolvimento das atividades propostas nas oficinas;
- à turma do 7º ano B de 2010, do CP, por aceitarem o meu convite, pela curiosidade acerca do material que seria utilizado em cada oficina e pelo brilho nos olhos diante de cada descoberta;
- a todos os colegas de mestrado e doutorado, de tantas nacionalidades, que cruzaram meu caminho nesses quatro anos, por dividirem comigo incertezas e vitórias, e especialmente àqueles que se tornaram meus amigos;
- aos meus familiares e amigos, em especial, às minhas irmãs Ana Cristina e Andréia, pelas leituras e sugestões; ao meu irmão Arnaldo, pelo humor com que lidou com o que chamava meu 'trabalho interminável', e à minha amiga Imaculada Marcenes, companheira de caminhos trilhados no Brasil e na Espanha, pelas leituras e, principalmente, pelo apoio nos momentos de 'crise'.
- à CAPES pelo financiamento, do estágio em Granada e dos últimos 8 meses, através de bolsa.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE TABELAS

RESUMO

Este trabalho de tese oferece uma resposta à seguinte questão: numa perspectiva semiótico-cultural, como se dá o processo de produção de significados (aprendizagem) pelos alunos, quando envolvidos em atividades exploratório-investigativas na sala de aula?

O foco desta investigação incide no processo de ensino e aprendizagem vivido por um grupo de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Belo Horizonte (MG) durante a realização de atividades exploratório-investigativas implementadas em aulas de Matemática. A investigação, de cunho primordialmente qualitativo, teve como objetivos: 1) identificar os aspectos constitutivos da produção de significados matemáticos no contexto de aulas exploratório-investigativas; 2) avaliar a adequação didática do processo vivido.

Partindo de uma perspectiva semiótico-cultural para a produção de significados (RADFORD, 2006, 2006a, DA ROCHA FALCÃO, 2009), e baseando-se na visão sociointeracionista de aprendizagem de Vygotsky, foram apreendidos, nessa pesquisa, os atos e processos de significação explicitados na experiência educativa aludida em termos da linguagem em suas dimensões verbal, gestual, gráfica e gráfico-simbólica.

Os dados foram produzidos a partir da transcrição de gravações em áudio e vídeo do processo vivido, registros escritos gerados pelos alunos durante as atividades e diário de campo. Para a análise dos dados, utilizou-se os cinco níveis de análise propostos pelo Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento Matemático (EOS), modelo teórico-metodológico idealizado por Godino e colaboradores (GODINO, BATANERO e FONT, 2007, 2008; FONT, PLANAS e GODINO, 2010).

Em relação ao primeiro objetivo de pesquisa, os resultados indicam que as atividades exploratório-investigativas em sala de aula são fortemente condicionadas pelos seguintes aspectos: afetividade (normas e metanormas, atitudes, emoções, motivação, etc.); materialidade (disponibilidade de tempo, meios, etc); formato da interação; tarefa proposta (representatividade matemática, possibilidade de emergência de ZDPs, adaptação ao currículo, sociedade, etc); familiaridade dos alunos (e do professor) com esse tipo de atividade, etc.

A análise e a interpretação dos dados mostraram que, no contexto do estudo proposto (estudantes de aproximadamente 12 anos que não tinham tido contato com atividades investigativas), os alunos necessitam de grande suporte por parte do professor. Tal fato nos remete à complexidade do trabalho desse profissional, já que não basta que ele ofereça situações ricas ou crie um espaço em que os alunos tenham que argumentar e possam expressar o que pensam, nem é suficiente que avalie suas ideias como certas ou erradas. É preciso que o professor questione e problematize as ideias dos estudantes, para fazê-los vencer as dificuldades e progredir.

Como implicação pedagógica, destaco a potencialidade das atividades exploratório-investigativas como cenário para a produção de significados matemáticos, já que, neste estudo, o nível de adequação didática global alcançado pela prática analisada (de mediano a alto) – segundo objetivo de pesquisa – sugere que o trabalho com esse tipo de atividade pode proporcionar um contexto altamente adequado para a produção de significados. Este contexto, no entanto, é obviamente dependente dos aspectos que o constituem (ASSIS, GODINO e FRADE, submetido[1]).

[1] ASSIS, A.; GODINO, J. D.; FRADE, C. Evaluating the mathematical practice in a context of exploratory-investigative classes. *Educational Studies in Mathematics* (submetido).

ABSTRACT

This thesis offers an answer to the following question: in a semiotic-cultural perspective, how is the process of producing meanings (learning) by the students, when involved in exploratory-investigative activities in the classroom?

This investigation focuses on the process of teaching and learning experienced by a group of students of the 7th grade of a basic public school of Belo Horizonte (MG) while performing exploratory-investigative activities implemented in mathematics classes. The research, of primarily qualitative nature, had as objectives: 1) identify the constitutive aspects of the production of mathematical meanings in the context of exploratory-investigative classes; 2) Evaluate the didactic suitability of the process experienced.

From a semiotic-cultural perspective to the production of meanings (RADFORD, 2006, 2006a, DA ROCHA FALCÃO, 2009), and based on the social interactionist view of learning of Vygotsky, were seized, in this research, the acts and processes of meaning explicit in the alluded educational experience in terms of the language in its verbal, gestural, graphic and graphic-symbolic dimensions.

The data were produced from the transcription of audio and video recordings of the process experienced, written records generated by the students during the activities and field diary. For data analysis, five levels of analysis proposed by the Onto-semiotic Approach of Mathematical Knowledge (OSA) were used, theoretical-methodological model devised by Godino and co-workers (GODINO, BATANERO e FONT, 2007, 2008; FONT, PLANAS e GODINO, 2010).

Regarding the first objective of the research, the results indicate that the exploratory-investigative activities in the classroom are strongly conditioned by the following aspects: affectivity (standards and meta-standards, attitudes, emotions, motivation, etc.); materiality (time availability, means, etc.); forms of interaction; proposed task (mathematical representation, possible emergence of ZPDs, adapting the curriculum, society, etc.), familiarity of the students (and the teacher) with this type activity, etc.

The analysis and interpretation of the data showed that, in the context of the proposed study (students approximately 12 years old who had not had contact with investigative activities), the students need great support from the teacher. This fact leads us to the complexity of the work of this professional, since it is not enough for it to offer rich situations or create a space where students have to argue and express what they think, nor it is enough to evaluate their ideas as right or wrong. It is necessary for the teacher to question and problematize the student's ideas, to make them overcome the difficulties and make progress.

As pedagogical implication, I highlight the potentiality of the exploratory-investigative activities as a scenario for the production of mathematical meanings, since, in this study, the overall level of didactic suitability achieved by the practice analyzed (from medium to high) – the second objective of the research – suggests that working with this type of activity can provide a context highly adequate for the production of meanings. This context, however, is obviously dependent on the aspects which constitute it (ASSIS, GODINO and FRADE, submitted[2]).

[2] ASSIS, A.; GODINO, J. D.; FRADE, C. Evaluating the mathematical practice in a context of exploratory-investigative classes. *Educational Studies in Mathematics* (submitted).

INTRODUÇÃO

Leciono Matemática há dezoito anos numa escola de Ensino Fundamental da Rede Municipal de Ensino de Belo Horizonte. Ano após ano de trabalho, a inquietação persiste: o que é desenvolvido em sala de aula, geralmente, não desperta o interesse dos alunos, levando-os a considerar a Matemática uma disciplina sem utilidade, já que não percebem sua aplicabilidade imediata no dia a dia. 'Onde vou utilizar isto na vida?' ou 'Isto que você chama de aplicação para mim é inútil' são considerações frequentes dos alunos.

Ao longo desse percurso profissional, vários desafios apareceram. Por exemplo, dentro do projeto pedagógico Escola Plural[3], houve a necessidade de se avaliarem habilidades dos alunos, tais como o raciocínio lógico e a capacidade de análise e síntese. Considerando-se a dinâmica clássica/tradicional das aulas – apresentação pelo professor de ideias e técnicas matemáticas, seguida do trabalho realizado pelos alunos, na resolução de exercícios selecionados – como avaliar outras habilidades além da capacidade de memorização de algoritmos e aplicação de fórmulas?

Minha trajetória como professora foi marcada pela busca por crescimento profissional e consequentes tentativas de mudança na dinâmica das aulas. Experimentei atividades alternativas, como oficinas e projetos, porém sempre foi grande a dificuldade de implementação do trabalho, devido, em parte, à estruturação da escola, na qual permanece a 'cultura de aquisição', em detrimento das possibilidades de interação com os alunos, buscando-se a produção e a crítica de novos conhecimentos. Além disso, o isolamento individual do professor, típico da cultura escolar, não estimulava a ampliação de propostas alternativas ou a busca de parcerias.

Isso pode ser visto como uma questão problemática, considerando-se que a realização de trabalho de cunho investigativo constitui uma experiência fundamental tanto para a aprendizagem matemática do aluno como para o desenvolvimento profissional do professor (PONTE, FONSECA e BRUNHEIRA, 1999; SKOVSMOSE, 2000; BARBOSA, 2001).

Minha atenção sempre esteve voltada para o estudo da cognição e de possíveis formas de despertar o interesse dos alunos, na tentativa de estimular uma aprendizagem mais significativa. No Mestrado em Educação, concluído em 2001 (ASSIS, 2001), estudei a

---

[3] A Escola Plural se insere nos movimentos de renovação pedagógica que tiveram seu ápice em meados da década de 1990. É caracterizada por Miranda (2007, p. 73) como um "um projeto pedagógico muito inovador, uma das mais corajosas tentativas de combater a evasão e a repetência e de resgatar o direito e o prazer de aprender".

resolução de problemas como uma dessas possibilidades, mas continuo acreditando no potencial de ambientes de aprendizagem nos quais os alunos sejam convidados a discutir, a propor e a experimentar caminhos para solucionar situações-problema. Nesse sentido, encontrei, nos trabalhos de Ponte, Fonseca e Brunheira (1999), Ponte (2003), Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), acerca de investigações matemáticas, e em Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) – que preferem utilizar a denominação atividades exploratório-investigativas para descrever um tipo de trabalho mais adequado a alunos com menos experiência em investigações – uma alternativa promissora para o trabalho em sala de aula, na medida em que tais explorações/investigações constituem situações ricas para a formulação e para a discussão de questões abertas e potencialmente desafiadoras para os alunos.

No Mestrado, utilizei como principal referencial teórico perspectivas de 'cognição situada' advindas de cientistas cognitivos (BROWN, COLLINS e DUGUID, 1989; NORMAN, 1993; CLANCEY, 1993, 1995, 1997) da área de inteligência artificial. Tais perspectivas tendem a dar mais atenção à cognição individual, apesar de reconhecerem a influência dos níveis social e coletivo. Em função de posteriores estudos de teorias socioculturais de aprendizagem, originadas, sobretudo, de algumas perspectivas antropológicas (LAVE, 1988, 1996, 1997; GEERTZ, 1989; LAVE e WENGER, 1991; WENGER, 1998) e da perspectiva sociocultural de Vygotsky, ampliei minha compreensão acerca da cognição, da aprendizagem e da produção de significados.

Dessa forma, além do entendimento de que o conhecimento não é estável, individual, mas coconstruído pelos indivíduos na interação com outras pessoas em conjunção com aspectos da situação na qual eles estão inseridos (BOALER, 2002), compreendi que a aprendizagem é 'situada', não apenas porque os pensamentos e as ações das pessoas estão localizados no espaço e no tempo, ou de que são sociais, porque envolvem outras pessoas, mas, principalmente, por serem imediatamente dependentes do contexto social o qual originou tais pensamentos e ações em termos de seu significado (MATOS, 1999).

Os estudos de Lave sobre a aquisição de competências matemáticas em diferentes comunidades de prática não escolares – por exemplo, clientes de supermercado (LAVE, 1988); aprendizes de alfaiataria (LAVE, 1997); e pessoas que fazem dieta (LAVE, 1997) – levaram-na a defender a ideia de que o conhecimento não é simplesmente internalizado e transferido de forma não problemática para outros contextos. Tais pesquisas indicam que a Matemática aprendida na escola parece não ser usada nos cálculos do dia a dia, já que praticamente nenhum problema em um supermercado ou na cozinha, por exemplo, foi resolvido utilizando algoritmo escolar. "Com isso, aparece o valor da situação que condiciona as práticas, inclusive da aprendizagem" (VILELA, 2006, p. 46), ou seja, o saber, o pensar e o compreender são gerados na prática, em situações cujas características específicas são parte dessa prática.

Segundo Geertz (1989), perspectivas recentes de Antropologia, provenientes de avanços na compreensão daquilo que costumava ser chamado a 'descendência do homem'[4], indicam que é funcionalmente incompleto pensar que a natureza humana é 'básica', 'pura' ou 'não condicionada'. A cultura, em vez de acrescentada, como um 'tempero', por assim dizer, a um animal acabado, é um ingrediente essencial na produção desse mesmo animal. *Grosso modo*, isso sugere que não existe o que se chama de natureza humana independente da cultura e leva à compreensão de que "o homem é, em termos físicos, um animal incompleto, inacabado; o que o distingue mais graficamente dos não homens é menos uma simples habilidade de aprender do que quanto e que espécie particular de coisas ele *tem* que aprender antes de poder funcionar" (GEERTZ, 1989, p. 34, grifo do autor).

Tal fato, por sua vez, reafirma que o pensamento humano é basicamente um ato aberto e essencialmente uma atividade social, pública e só secundariamente, um assunto privado. No sentido tanto do raciocínio orientado como daquele da formulação de sentimentos, assim como da integração de ambos os motivos, os processos cognitivos do homem ocorrem não 'dentro da cabeça', mas no contexto social, seja ele o banco escolar, o campo de futebol, a casa, o assento do caminhão, a estação de trem, etc. (GEERTZ, 1989).

Nessa perspectiva, a cultura é concebida como semiótica, isto é, um espaço de produção, de negociação e de comunicação de significados; e o pensamento é entendido como "um tráfego entre aquilo que foi chamado por G. H. Mead e outros de símbolos significantes – as palavras, para a maioria, mas também os gestos, desenhos, sons musicais (…) na verdade, qualquer coisa que seja usada para impor um significado à experiência" (GEERTZ, 1989, p. 33).

A partir de tal compreensão e com especial interesse pela produção de significados, proponho a seguinte questão como o objetivo central desta tese de Doutorado: **numa perspectiva semiótico-cultural, como se dá o processo de produção de significados pelos alunos, quando eles estão envolvidos em atividades exploratório-investigativas na sala de aula?**

A opção pelas atividades exploratório-investigativas fundamenta-se na crença de que ambientes dessa natureza podem oferecer um contexto rico e profícuo para o *partilhamento* e

[4] A emergência do *Homo sapiens* do seu ambiente geral primata.

para a *negociação de significados* (BRUNER, 2002) entre os próprios alunos, e entre os alunos e o professor. Como Greeno (1997), entendo que os estudantes podem aprender com problemas bem definidos, cujos enunciados contêm todos os dados necessários à resolução e à prática de exercícios. No entanto,

> a estruturação de atividades alternativas de aprendizagem pode oferecer também oportunidades para os estudantes participarem mais ativamente na formulação e avaliação de problemas, questões, conjecturas, conclusões, argumentos e exemplos. O foco situado [incidindo] nas práticas de aprendizagem demanda que a atenção seja voltada para essas atividades, e encoraja a consideração de oportunidades que os estudantes possuem para alcançar êxito nas atividades de investigação, como também adquirir habilidades[5] (GREENO, 1997, p. 10).

Além disso, para Ciompi (1999[6], *apud* SCHLÖGLMAN, 2005), a repetida aplicação de esquemas em tarefas rotineiras tende a provocar uma 'neutralização emocional' de um sentimento positivo; em alguns casos, transformando-o num sentimento negativo, já que resolver tais tarefas, muitas vezes, torna-se entediante e aborrecido. As atividades exploratório-investigativas não são inerentemente estimulantes, mas esse tipo de trabalho – e não atividades rotineiras ou clássicas em sala de aula – pode proporcionar maior motivação e consequente aumento da interação entre os alunos.

Para estudar atividades exploratório-investigativas em um ambiente de sala de aula a partir das oportunidades que Greeno (1997) sugere, utilizo a ideia de mediação de sistemas de signos (mediação semiótica), já que os processos de produção de significado têm uma relação intrínseca com o caráter semiótico das interações humanas (ROGOFF, 1990; WERTSCH, 1993; GODINO, 2000, 2002; BRUNER, 2002; MEIRA, 2007; CORREIA e MEIRA, 2008).

Partindo do pressuposto de que a produção de significados ocorre em contextos sociais de natureza coletiva (MARTIN, TOWERS e PIRIE, 2006), um estudo empírico sobre aprendizagem escolar, em termos desse pressuposto, precisa focar-se, necessariamente, nas interações semióticas estabelecidas em tais contextos por estudantes e professores. E mais, considerando-se que a produção de significados, em direção a um entendimento matemático coletivo, não é uma ocorrência automática ou simples, sempre que duas ou mais pessoas estão interagindo, torna-se imprescindível um ambiente com situações que tenham o potencial para encorajar tal entendimento (MARTIN TOWERS e PIRIE, 2006). Assim, o cenário de

[5] Todas as traduções de citações referentes a trabalhos escritos em língua estrangeira são de minha autoria. A página indicada refere-se ao trabalho no original.

[6] CIOMPI, L. *Die emotionalen Grundlagen des Denkens.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1999.

atividades exploratório-investigativas, implementadas em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental (antiga 6ª série), corresponderia a tais ambientes ou contextos.

Como Ponte, Fonseca e Brunheira (1999), entendo que o fato de as atividades de investigação, potencialmente, possibilitarem ao estudante se envolverem, em algum nível, em experiências matemáticas justifica que se investigue acerca de estudantes fazendo investigações matemáticas. Também Fiorentini e Cristovão (2006) defendem as práticas exploratório-investigativas como alternativa para problematizar e produzir significados para a Matemática Escolar.

Em relação ao aspecto metodológico, esta pesquisa exemplifica como o uso de modelos teóricos pode ser útil para descrever e analisar práticas matemáticas e didáticas, com o intuito de melhorá-las.

Sendo assim, acredito que a investigação proposta nesta tese tenha relevância tanto para a prática pedagógica de maneira geral, como para a pesquisa em Educação Matemática.

A tese estrutura-se em sete capítulos.

No primeiro capítulo, 'Marco Teórico', há espaço para a discussão das abordagens semióticas adotadas por autores da Educação Matemática e para a explicitação dos construtos utilizados na presente pesquisa.

No segundo, 'Atividades exploratório-investigativas', posiciona-se esse tipo de atividade dentre aquelas de cunho investigativo, bem como as diferencia de outros tipos como, por exemplo, exercícios de rotina e resolução de problemas.

Já no terceiro capítulo, 'Problema de investigação e metodologia', delimita-se o estudo, o ambiente de pesquisa e os participantes, acrescidos da descrição dos procedimentos metodológicos utilizados.

No quarto e no quinto capítulos, são discutidos o desenho, a implementação e a análise das experiências vividas a partir e através de atividades exploratório-investigativas sobre padrões. No quarto capítulo dedica-se à oficina[7] intitulada 'Sequências: Introdução à Álgebra', e o quinto capítulo discute a oficina 'Tarefa investigativa 2: Álgebra em festa de casamento?'.

No sexto capítulo, 'Análise global da adequação didática[8]', é apresentada a avaliação do nível de adequação didática global alcançada, considerando-se essas duas oficinas.

[7] Em vários momentos, neste trabalho, refiro-me às 'atividades exploratório-investigativas' vivenciadas, para simplificar, como 'oficinas'.

[8] Na versão em castelhano, o termo utilizado é 'idoneidad didáctica'. Como idôneo, em português, possui uma conotação moral (o que seria um equívoco na interpretação desse construto), neste trabalho adoto o termo *adequação didática*.

No sétimo capítulo, 'Considerações finais', tem-se a conclusão do trabalho, destacando-se os resultados que emergiram da análise e da interpretação dos dados empíricos, bem como há indicação de possíveis pesquisas futuras que eles apontam para a área de Educação Matemática.

CAPÍTULO I

MARCO TEÓRICO

O homem é um animal suspenso nas teias de significação que ele próprio tece (GEERTZ, 1989).

1. A FORMAÇÃO SOCIAL DA MENTE: TEORIA SÓCIO-HISTÓRICO-CULTURAL

A teoria sócio-histórica[9] foi elaborada entre as décadas de 1920 e 1930, a partir dos estudos de Lev Vygotsky. Com o passar dos anos, também se juntaram ao projeto psicólogos diretamente ligados a Vygotsky, notadamente Alexander Luria e Alexei Leontiev, assim como os da nova geração, formada por alunos desses pesquisadores (MOYSÉS, 1997).

Tal teoria foi uma das muitas que tentaram dar uma explicação para a origem e para o desenvolvimento dos processos mentais. De acordo com Wertsch (1993), uma abordagem sociocultural para a mente começa com o pressuposto de que a ação humana é 'situada', ou seja, é mediada e não pode ser separada do meio em que é realizada. A mente é vista como algo que se "estende para além da pele" (WERTSCH, 1993, p. 14) em pelo menos dois sentidos: é socialmente distribuída e está conectada à noção de mediação.

Para compreender a teoria histórico-cultural, Van Der Veer e Valsiner (1996) afirmam ser essencial conhecer a posição de Vygotsky sobre a origem do homem contemporâneo – *Homo sapiens* – e sua posição relativa em comparação aos animais. Para Vygotsky, a maior parte da filogênese[10] humana havia sido explicada por Charles Darwin em sua teoria da evolução – Vygotsky, por exemplo, aceitava inteiramente a base genética de muitos processos fisiológicos e psicológicos humanos. Entretanto, ele, ao contrário de Darwin, afirmava que havia diferenças fundamentais entre animais e seres humanos. O comportamento, em sua opinião, possuía uma base genética, a qual tinha sua origem na evolução biológica, mas ela estava restrita aos processos inferiores[11]. "Os processos superiores[12] especificamente humanos

---

[9] Alguns autores nacionais e estrangeiros denominam a teoria de Vygotsky de sócio-histórica; outros de histórico-cultural, e ainda um terceiro grupo prefere denominá-la de sócio-histórico-cultural. Tais denominações não expressam somente uma questão de nomenclatura, mas interpretações diferenciadas de cada obra; portanto, mantive a denominação utilizada por cada autor.

[10] A filogênese diz respeito à história de uma espécie animal. Todas as espécies animais têm uma história própria e essa história da espécie define limites e possibilidades de funcionamento psicológico (OLIVEIRA, 2006).

[11] Os processos inferiores, também denominados 'naturais', são processos que estão ligados a comportamentos 'instintivos', como as reações inatas e os reflexos não condicionados (VAN DER VEER e VALSINER, 1996).

desenvolviam-se na história humana e tinham que ser dominados de novo por cada criança humana em um processo de interação social" (VAN DER VEER e VALSINER, 1996, p. 213).

Além disso, deve-se considerar que as ideias filosóficas de Marx e Engels também exerceram decisiva influência sobre o pensamento de Vygotsky. Engels considerava que o trabalho era a característica que definia os seres humanos e enfatizava a importância da fabricação e do uso de instrumentos na história da humanidade, afirmando que "os seres humanos exibiam uma relação essencialmente diferente com o meio ambiente: em vez de usar passivamente seus recursos, os seres humanos transformavam ativamente a natureza" (VAN DER VEER e VALSINER, 1996, p. 218). Ao fazer isso, transformam-se a eles mesmos, desenvolvendo funções e habilidades especificamente humanas.

Da mesma forma que Marx concebeu o instrumento laboral do homem, Vygotsky concebeu a noção de signo, como discutido mais adiante, como mediador, não só do pensamento, mas do próprio processo social humano. Vygotsky incluía, dentre os signos, "a linguagem, os vários sistemas de contagem, as técnicas mnemônicas, os sistemas simbólicos algébricos, os esquemas, diagramas, mapas, desenhos, e todo tipo de signos convencionais" (MOYSÉS, 1997, p. 23).

Ao contrário de outras correntes da psicologia, por exemplo, a cognitivista, a corrente histórico-cultural parte da ideia de que o verdadeiro curso do processo de desenvolvimento do pensamento assume uma direção que parte do 'social para o individual'. Assim, o sentido que se constrói a partir das informações que chegam não depende essencialmente da mente isolada do indivíduo que as recebe, e sim de uma série de processos complexos de negociação de sentido inseridos em situações e mediados pela linguagem (DA ROCHA FALCÃO, 2009). Segundo tal perspectiva, o psiquismo humano é concebido como uma construção social, "resultado do processo de *interiorização* das funções psíquicas desenvolvidas ao longo da história social dos homens. A interiorização ocorre numa rede complexa de inter-relações que articulam a *atividade* social dos indivíduos" (PINO, 1991, p. 32, grifos do autor).

No entanto, Goes (1991) observa que o caráter social da atividade do sujeito não se situa meramente na existência de um contexto social que influencia processos subjetivos. O plano intersubjetivo não é o plano do outro, mas da relação com o outro. Sendo assim, o conhecimento do sujeito não é dado de fora para dentro, tomando o sujeito como um ser

[12] Também denominados 'culturais' ou 'instrumentais', ocorrem quando os sistemas de signos são incluídos no funcionamento cognitivo. São exemplos de processos superiores: raciocínio, crenças, mitos, pensamento e linguagem (VAN DER VEER e VALSINER, 1996).

passivamente moldado pelo meio. "O sujeito não é passivo nem apenas ativo: é *interativo*" (GOES, 1991, p. 21, grifo da autora).

Concluindo, essa corrente de pensamento, também denominada semiótico-cultural (RADFORD, 2006, 2006a, DA ROCHA FALCÃO, 2009), elege como unidade de análise não aquilo que tradicionalmente se denomina a 'mente' do indivíduo, mas as 'trocas' dialógicas, culturalmente situadas, entre indivíduos. Sendo assim, nessa abordagem, o principal critério dos estudos consiste no fato de que sua análise esteja vinculada, de alguma forma, à cultura específica, histórica ou ao cenário institucional (WERTSCH, 1993).

2. PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS

> *A visibilidade não depende do objeto apenas, nem do sujeito que vê, mas também do trabalho de reflexão: cada visível guarda uma dobra invisível que é preciso desvendar a cada instante e em cada movimento* (NOVAES, 2005, p. 11).

Somente faz sentido falar de produção de significados esclarecendo o que se entende por *significado*.

De acordo com Godino e Batanero (1994, p. 4), as teorias realistas, defendidas por Frege, Carnap e Wittgenstein do *Tractatus*[13] "concebem o significado como uma relação convencional entre signos e entidades concretas ou ideais que existem independente dos signos linguísticos; em consequência, supõem um realismo conceitual". Kutschera (1979, p. 34) diz que, "segundo essa concepção, o significado de uma expressão linguística não depende de seu uso em situações concretas, mas o uso é regido pelo significado, sendo possível uma nítida divisão entre semântica e pragmática". Isso significa dizer que uma palavra só se torna significativa quando é atribuído a ela um conceito ou uma proposição como significado. Dessa forma, os significados são entendidos como entidades, não necessariamente concretas, que objetivamente são atribuídos às palavras.

Dentro dessas teorias, Godino e Batanero (1994) citam como exemplos de significados: um nome próprio que consiste no objeto que se designa por esse nome, suas propriedades e relações ou seus atributos (*e. g.* isto é vermelho; A é maior do que B); etc., que, de alguma forma, estabelecem uma relação nominal.

[13] O pensamento de Ludwig Wittgenstein é comumente dividido em duas fases: a do 'primeiro' Wittgenstein, representada por sua obra de juventude, *Tratado Lógico-Filosófico*; e a do 'segundo' ou 'último' Wittgenstein, *Investigações Filosóficas*. Entre as duas fases há uma ruptura e inovação de sua abordagem acerca da linguagem (CAVASSANE, s. d.).

Se se aplicam os pressupostos da visão realista à Matemática, obtém-se necessariamente uma visão platônica dos objetos matemáticos:

> nessa visão, as noções, estruturas, etc. possuem uma existência real que não depende do ser humano, uma vez que pertencem a um domínio ideal; 'conhecer', de um ponto de vista matemático, significa 'descobrir' entidades e suas relações em um tal domínio. E é também óbvio que tal visão envolve um absolutismo do conhecimento matemático enquanto sistema de verdades definitivas, eternas, que não podem ser modificadas pela experiência humana, uma vez que são anteriores ou, pelo menos, estranhas a ela e independentes dela (D'AMORE, 2005, p. 26).

Nas teorias pragmáticas, o significado ou expressão linguística é dependente do contexto em que é utilizado. Uma concepção pragmática do significado é abertamente defendida por Wittgenstein em sua obra *Investigações Filosóficas*. Em sua formulação, uma palavra se torna significativa pelo fato de desempenhar determinada função em um jogo linguístico, por ser usada nesse jogo de determinada maneira e para um fim concreto, o que significa dizer que não existe uma realidade a qual é refletida pela linguagem; ao contrário, a realidade só nos é revelada pela descrição linguística que damos ao mundo (GODINO e BATANERO, 1994).

Nessa perspectiva, Godino e Batanero (1994, p. 5) afirmam que os objetos matemáticos devem ser considerados "símbolos de unidades culturais que emergem de um sistema de usos ligados às atividades de resolução de problemas que certos grupos de pessoas realizam e que vão se modificando continuamente no tempo".

Em coerência teórica com a abordagem semiótico-cultural, adoto, neste trabalho, os pressupostos pragmáticos da teoria do significado. Mas, afinal, o que é produzir significado? Piaget (1971) elaborou uma rica discussão acerca da construção do símbolo na criança, a partir da qual o indivíduo gradualmente atingiria níveis crescentemente 'abstratos' de significação. Para esse autor, os processos que caracterizam o desenvolvimento da inteligência e da aprendizagem em geral são a assimilação e a acomodação. Por meio da *assimilação*, o indivíduo explora, incorpora e transforma os elementos de seu meio. Em numerosas ocasiões, no entanto, o meio nos proporciona situações as quais não podemos responder/reagir adequadamente utilizando nossos esquemas prévios. Produz-se, neste momento, uma situação de conflito, de 'desequilíbrio', que só é superada quando reestruturamos nossos esquemas. A transformação que realizamos em nossos esquemas prévios para incorporar novos objetos da realidade é chamada *acomodação*.

Vygotsky, como Piaget, também sustentava que a produção de significados vai da ação ao pensamento, mas a grande diferença entre esses estudiosos é que, para Vygotsky, a ação tem que ser mediada socialmente. Em outras palavras, toda ação está conectada a um contexto cultural, institucional e histórico e a modos de mediação ou ferramentas culturais. Tal mediação seria possível graças às relações interpessoais em que o indivíduo se engaja e que permitem a significação de seus atos por um 'Outro' cultural. Também Bruner (2001, p. 16) afirma que "produzir significado envolve situar encontros com o mundo em seus contextos culturais apropriados a fim de saber 'do que se tratam'".

Para Lins (1999), produzir significado é produzir ações enunciativas. Ele diz:

> para mim, o significado de algo é aquilo que digo deste algo. Grosso modo, significado, para mim, é o que a coisa *é*. Mas este *é* não se refere a uma *essência* da coisa. Talvez isto fique mais claro com a seguinte formulação: os objetos são constituídos enquanto tal precisamente pela produção de significados para eles. Não se trata de *ali estão os objetos e aqui estou eu*, para, a partir daí, eu descobrir seus significados; ao contrário, eu me constituo enquanto ser cognitivo através da produção de significados que realizo, ao mesmo tempo em que constituo objetos através destas enunciações (LINS, 1999, p. 86, grifos do autor).

Considerando as palavras como dialógicas e a cognição como ação significativa no mundo, Bakhtin (2002) argumenta que a produção de significados só é possível a partir da comunicação, entendida como um processo social de produção aqui e agora de significados em coautoria com um 'Outro' dialógico.

SENTIDO E SIGNIFICADO

Uma das ideias centrais e mais difundidas de Vygotsky é a de que os processos mentais superiores (raciocínio, crenças, mitos, pensamento e linguagem) são mediados por sistemas simbólicos, sendo a linguagem o sistema simbólico básico de todos os grupos humanos (LA TAILLE, 1992).

A noção de significado ocupa lugar central na análise de Vygotsky sobre a linguagem, pois é no significado que se encontra a unidade das duas funções básicas desse sistema: o intercâmbio social e o pensamento generalizante. Do ponto de vista psicológico, o significado de cada palavra é uma generalização ou conceito, e "como as generalizações e conceitos são inegavelmente atos do pensamento, podemos considerar o significado como um fenômeno do pensamento" (OLIVEIRA, 1997, p. 48).

Vygotsky distingue dois componentes do significado[14] da palavra: o significado propriamente dito (aplicação de palavras a objetos concretos) e o 'sentido' (LA TAILLE, 1992).

> O significado de uma palavra é convencional e dicionarizado, portanto é mais estável e preciso, enquanto que o sentido de uma palavra pode ser modificado de acordo com o contexto em que aparece, consequentemente, diferentes contextos apresentam diferentes sentidos para uma palavra, o sentido não é pessoal enquanto individual mas é constituído na dinâmica dialógica (MOLON, 2000, p. web).

O sentido não é entendido como uma propriedade intrínseca da língua, mas como o resultado de uma atividade conjunta, a qual presume cooperação, consentimento. Em outros termos, "a linguagem é conhecimento para o outro, o sentido é uma construção situada no jogo, no drama da interação. É assim, pois, que informações idênticas podem ser processadas de modo distinto em contextos diferentes" (MIRANDA, 2002, p. 58).

Em virtude da participação do homem na cultura, "o significado é tornado *público* e *compartilhado*. Nosso meio de vida culturalmente adaptado depende de partilha de significados e conceitos. Depende igualmente de modos compartilhados de discurso para negociar diferenças de significado e interpretação" (BRUNER, 2002, p. 23, grifos do autor).

Neste trabalho, a significação ou a produção de significados dá-se no uso que fazemos da linguagem em diferentes situações e contextos (WITTGENSTEIN, 1995). Nesses espaços semióticos – entendidos como espaços intersubjetivos mediados por signos, os significados não apenas são produzidos, mas também comunicados e negociados (MEIRA e LERMAN, 2010).

Dessa maneira,

> a constituição do sujeito dar-se-ia a partir do domínio progressivo de discursos culturalmente legitimados (…) é no processo de produção de significados que se pode encontrar tanto o que é coletivo ou social, quanto o que é próprio do indivíduo (CORREIA e MEIRA, 2008, p. 357).

Em última instância, pode-se afirmar que a produção de significados se dá a partir e através da mediação semiótica.

[14] Essa subdivisão do significado em significado propriamente dito e sentido, por vezes, leva a entendimentos equivocados. Parece-me, por exemplo, que o sentido para Vygotsky corresponde ao que o segundo Wittgeinsten considera como significado o que justificaria a opção de alguns autores, como Luciano Meira (2010, em comunicação pessoal), de adotar os termos significado e sentido como sinônimos.

MEDIAÇÃO SEMIÓTICA

A ideia básica de Vygotsky é de que a relação do homem com o mundo é uma relação mediada (OLIVEIRA, 2006), a qual não é, no entanto, o ato de interposição de algo entre o homem e o mundo. Como Molon (2000, p. web), concebo mediação como processo; "mediação não está entre dois termos que estabelecem uma relação. É a própria relação". Segundo da Rocha Falcão (2011),

> a mediação não diz respeito a um canal de tráfego de informação ou mesmo atribuição de significado do sujeito sobre o objeto de conhecimento, mas de coconstrução. Nesse sentido, quando alguém produz um ato de fala endereçado a outro alguém em contexto significativo da cultura, o sentido desse ato de fala não pertence por inteiro àquele que iniciou a interlocução: a recepção do outro contribuirá não somente para a sua interpretação do que ouviu, mas também para a continuidade do processo de coconstrução por parte de quem desencadeou a fala. Para Bakhtin, um enunciado não 'pertence' isolada ou preponderantemente nem a quem o enuncia, nem a quem o recebe, nem ao contexto externo que eventualmente o modula, e sim a cada um e a todos simultaneamente (DA ROCHA FALCÃO, parecer de qualificação, 12/12/2011).

Diferentemente dos animais, "sujeitos aos mecanismos instintivos de adaptação, os seres humanos criaram *instrumentos* e *sistemas de signos*, cujo uso lhes permite transformar e conhecer o mundo, comunicar suas experiências e desenvolver novas funções psicológicas" (PINO, 1991, p. 33, grifo do autor). Segundo Pino (1991), é essa mediação dos sistemas de signos que constitui a denominada mediação semiótica.

Para Wertsch (1993), um ponto essencial para tentar entender as ideias de Vygotsky sobre sistemas de signos, tais como linguagem, diagramas e aritmética, é seu pressuposto sobre a relação entre semiótica e outras formas de ação, como as reações inatas. Vygotsky aproximou a linguagem e outros sistemas de signos em termos de como eles são parte da ação humana mediada. Em outras palavras, para esse autor, o signo desempenha uma função mediadora entre o indivíduo e seu contexto, e permite, também, a passagem do *interpsicológico* para o *intrapsicológico*, assegurando a reconstrução interna da ação, isto é, sua *internalização*, dando como exemplo o surgimento do gesto:

> a princípio, esse trejeito não é mais que uma tentativa frustrada de alcançar algo, um movimento dirigido a determinado objeto que designa a atividade futura... Quando a mãe vem em ajuda ao pequeno e se dá conta de que seu movimento está indicando algo mais, a situação muda radicalmente. O fato de apontar converte-se em um gesto para os demais... Unicamente mais tarde, quando a criança é capaz de relacionar seu movimento frustrado de

> agarrar com a situação objetiva como um todo, começa a interpretar tal movimento como ato de apontar. Como consequência desta mudança, o movimento torna-se simplificado, e o que dele resulta é a forma de apontar que chamamos gesto (VYGOTSKY, 1988, p. 92-93).

Para Vygotsky, esclarece Radford (2006, p. 11), "o signo não é simplesmente peça diferencial de um sistema de estrutura (Saussure) nem mero meio de pensamento e de formação de ideias (Peirce), senão, sobretudo, meio de *transformação* das funções psíquicas do indivíduo".

É a cultura, pensada por Geertz (1989), como sistemas de signos interpretáveis, oriundos da concepção simbólica da linguagem; e por Vygotsky, como uma espécie de 'palco de negociações', o qual fornece ao indivíduo os sistemas simbólicos de representação da realidade. Nesse 'palco', os indivíduos participam de um constante processo de recriação e reinterpretação de informações, conceitos e significados. Ao falar, o homem não se limita a designar e a significar a sua relação com um mundo preexistente; produz, também, sentidos novos, já que as palavras não são etiquetas coladas a uma realidade singular, mas construções culturais destinadas a mediar a relação do homem com o mundo (GEERTZ, l989). "Ao tomar posse do material cultural, o indivíduo o torna seu, passando a utilizá-lo como instrumento pessoal do pensamento e ação no mundo" (LA TAILLE, 1992, p. 80).

Para Bruner (2002), os seres humanos, em suas interações, formam uma noção do canônico e do comum como um 'pano de fundo' contra o qual negociam e renegociam significados por intermédio da interpretação narrativa. Bruner ainda defende a ideia de que a produção de significados é um sistema interessado não apenas no significado em si, mas em 'condições de felicidade', condições pelas quais as diferenças de significação podem ser resolvidas invocando circunstâncias atenuantes que possam explicar interpretações divergentes da 'realidade' individual.

De acordo com Pino (1991), Vygotsky fala de dois tipos de mediadores externos: o instrumento (ferramenta técnica), orientado para regular as ações sobre os objetos; e o signo (ferramenta psicológica), orientado para regular as ações sobre o psiquismo das pessoas. O instrumento é algo (ferramentas, apetrechos, etc.) que pode ser usado para executar alguma tarefa. Uma faca, uma motosserra são exemplos de instrumentos que fazem mediação entre a ação concreta do sujeito sobre/e o mundo. Por sua vez, o signo é algo que significa outra coisa para alguém em algum aspecto. Sendo assim, o signo é uma forma posterior de mediação de natureza semiótica, o qual faz uma "interposição entre o sujeito e o objeto do conhecimento, entre o psiquismo e o mundo, o eu e o objeto, o eu e o mundo, de uma forma que não é concreta, como fazemos com os instrumentos, mas de uma forma simbólica" (OLIVEIRA, 2006, p. 28). Por exemplo:

> a *palavra* casa, a *pintura* de uma casa o *desenho* de uma casa, a *fotografia* de uma casa, o *esboço* de uma casa, um *filme* de uma casa, a *planta baixa* de uma casa, a *maquete* de uma casa, ou mesmo o seu *olhar* para uma casa, são todos signos do objeto casa. Não são a própria casa, nem a ideia geral que temos de casa. Substituem-na, apenas, cada um deles de certo modo que depende da natureza do próprio signo. A natureza de uma fotografia não é a mesma de uma planta baixa (SANTAELLA, 2007, p. 58 grifos da autora).

Cole (1999), que foi aluno de Luria, ao invés de adotar o conceito de ferramentas, como faziam os russos, tratou esse conceito como uma subcategoria da concepção mais geral de artefato. O conceito de artefato foi definido por ele como "um aspecto do mundo material que se modificou durante a história de sua incorporação da ação humana dirigida a metas" (COLE, 1999, p. 114).

Para aprofundar o estudo das relações entre ferramentas técnicas e psicológicas, é útil a distinção feita por Wartofsky[15] (1973) de uma estrutura artefatual com três níveis: artefatos primários, secundários e terciários, sendo que os artefatos primários são aqueles diretamente utilizados na produção, como eixos, bacias, agulhas, etc. Cole (1999) aponta também como exemplos para esse nível: palavras, instrumentos de escrita, redes de telecomunicações e personagens culturais míticos; já os secundários são constituídos por representações e modos de ação dos artefatos primários e "desempenham um papel fundamental na preservação e transmissão de modos de ação e crenças. Incluem receitas, crenças tradicionais, normas, constituições, etc." (COLE, 1999, p. 117). Por sua vez, os terciários geralmente correspondem a objetos que são descritos por regras e convenções, e que não são estritamente conectados à prática, já que têm como característica permitir dinâmicas de extrapolação de experiências ou de descontextualização de seus significados, por exemplo, gestos para representar um modelo matemático, o que faz com que possam estar materialmente disponibilizados na forma de signos, sinais, informações e oportunidades para ação (*affordances*).

A classificação mais conhecida dos signos é a dada por Peirce (2000). Embora na produção e utilização prática, os signos raramente aparecerem em estado puro e Peirce ter estabelecido uma rede extensa de classificações, as que têm sido mais divulgadas são: ícone, índice e símbolo.

---

[15] Wartofsky (1973, p. 204) define artefato como "a objetivação das necessidades e intenções humanas já investidas com conteúdo cognitivo e afetivo".

O ícone é um signo que representa qualidades de um objeto, assemelhando-se a ele. "Quando nos detemos, por exemplo, na contemplação das oscilantes formas das nuvens, de repente nos flagramos comparamos aquelas formas com imagens de animais, objetos, monstros, seres humanos ou deuses imaginários" (SANTAELLA, 2007, p. 64-65). Nesse caso, estamos diante de ícones. Essa imagem que construímos, que é sempre uma simples possibilidade, é um ícone porque a qualidade de sua aparência é semelhante à qualidade do objeto que a imagem representa. "O plano dos números complexos, por exemplo, é uma representação icônica ou uma metáfora, que se mostrou indispensável para o desenvolvimento do conceito de número" (OTTE, 2006, p. 29). São também exemplos de ícones: desenhos, pinturas figurativas, diagramas, um diagrama de Geometria, etc.

Por sua vez, o índice é um signo que está factualmente ligado/conectado a outro elemento (SANTAELLA, 2007), não tendo qualquer semelhança com seu objeto, mas apresentando uma conexão, convencionada culturalmente, com ele. Por exemplo, inchaço, dor, vermelhidão e calor ou febre são índices de inflamação. São exemplos de índice: as letras A, B, C, etc., anexadas a uma figura geométrica, fumaça que indica fogo, movimento do cata-vento que indica vento, uma pegada como 'indício' de quem passou, etc.

Já símbolo é um signo que se refere ao objeto que o denota em virtude de uma lei, no sentido de convenção ou pacto coletivo, que determina que aquele signo represente seu objeto (SANTAELLA, 2007). São exemplos de símbolos: aliança de casamento, semáforo (verde simbolizando passagem livre e vermelho sinalizando parada obrigatória), a bandeira do Brasil, etc.

Sintetizando as ideias até aqui apresentadas, a produção de significados é a forma que possuímos para interpretar e agir sobre o mundo; a atividade cognitiva existe sob a forma de signos e fora desse material semiótico tal atividade não existe. Assim, a produção de significados se faz presente em processos e práticas interpessoais e intrapessoais, porque, a partir de um 'fundo comum cultural', temos a oportunidade de 'afinar', 'customizar', 'estilizar' (DA ROCHA FALCÃO, 2009) as experiências sociais, tornando-as 'pessoais'. Finalizando, a produção de significados é interdependente de vários aspectos/dimensões que a constituem[16]: a dimensão cultural/mediacional (contexto cultural e materialidade), a dimensão interacional (contexto discursivo/dialógico) e a dimensão individual (contexto cognitivo-afetivo).

[16] Os aspectos/dimensões constitutivos da produção de significados explicitados foram expandidos de Correia e Meira (2008), os quais abordam as dimensões cultural, dialógica e individual.

APRENDIZAGEM

A aprendizagem, como tradicionalmente entendida, caracteriza-se pela apreensão de conhecimentos factuais ou informação, e é concebida, eliminada a dicotomia excessiva, como um processo em que o indivíduo passa de uma fase de não compreensão para uma fase de compreensão de determinado domínio ou assunto. A essa concepção está subjacente a ideia de que a aprendizagem é principalmente individual e de que depende de certo desenvolvimento cognitivo para ocorrer.

Vygotsky hipotetiza que todo desenvolvimento cognitivo do indivíduo se dá através da mediação de signos em atividade, o que significa dizer que a possibilidade de aprender não existe antes do evento, ou seja, não depende de já possuir um desenvolvimento apropriado, mas se dá no contexto de sua produção, podendo levar ao desenvolvimento.

Em coerência teórica com a aprendizagem situada, concebo que "aprendizagem é uma parte integral da prática de viver no mundo" (LAVE e WENGER, 1991, p. 35), configurando-se como um aspecto da participação em práticas situadas socialmente, nas quais "participação é sempre baseada em negociação e renegociação de significados no mundo. Isto implica que entendimento e experiência estão em constante interação e são mutuamente constitutivos" (LAVE e WENGER, 1991, p. 51-52).

Meira e Lerman (2001, p. 7) ressaltam que Vygotsky embasou a obra Pensamento e Linguagem nos seguintes termos: "pensamento não é expresso, mas completado na palavra", ou seja, não pensamos e posteriormente traduzimos uma descrição interna do que planejamos dizer. O ato de pensar é situado, e, portanto, é coconstruído durante o ato de falar, ideia que se aplica, de acordo com esses autores, similarmente para aprendizagem e desenvolvimento, porque a aprendizagem e o desenvolvimento também são fenômenos situados: acontecem momento a momento e são dependentes da atividade, do contexto e da cultura na qual ocorrem.

Para Vygotsky, o desenvolvimento da criança não deveria ser estabelecido unicamente pelo o que ela pode fazer, por si própria, em dado momento. O conceito vygotskiano de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) se baseia nessa ideia:

> a zona de desenvolvimento proximal da criança é a distância entre seu desenvolvimento real, determinado com a ajuda de tarefas solucionadas de forma independente, e o nível de seu desenvolvimento potencial, determinado com a ajuda de tarefas solucionadas pela criança com orientação de adultos e em cooperação com seus colegas mais capazes (VYGOTSKY, 2001, p. 97).

O conceito de ZDP centra-se na interação. A aprendizagem, para Vygotsky, possui uma natureza discursiva, ou seja, a aprendizagem se dá a partir e através da linguagem. "Em situações interacionais reguladas por 'pares mais capazes', as crianças fazem uso social e 'internalizam' as formas de mediação semiótica (discursos, gestos, registros e artefatos, de acordo com Goodwin, 2000) que constituem seus contextos de ação" (MEIRA, 2007, p. 6).

Ao contrário de outros autores, Meira e Lerman (2010, p. 204) discutem que a ZDP "não é algo preexistente, não é transportado, como uma caixa, pela criança, nem é uma espécie de campo de força que o professor tem de encontrar". Frade e Meira (2012), no contexto de uma pesquisa interdisciplinar entre as disciplinas Matemática e Ciências realizada em uma turma do Ensino Fundamental, discutem que, segundo Meira e Lerman (2010), o construto ZDP, introduzido por Vygotsky em sua formulação final, vincula-se a um espaço simbólico, de mediação semiótica que "vai além da situação sociointeracional imediata, enfocando mais o mundo mediado simbolicamente que permeia a situação ou as atividades de resolução de problemas" (FRADE e MEIRA, 2012, p. 374).

Frade e Meira (2012) explicam que, para Meira e Lerman (2010), isso significa dizer três coisas principais: primeiro, uma ZDP não é espaço 'quase físico' o qual cada aluno possui e que o professor precisa apenas descobri-lo para tornar seu ensino bem-sucedido; ao contrário, uma ZDP é um fenômeno "que emerge (ou não) na instrução ou em interações dialógicas de qualquer natureza, dentro do qual ocorrem o cultivo social de processos ainda não desenvolvidos e a construção, pelos indivíduos, de estruturas futuras de suas funções intelectuais sob as bases de suas experiências passadas" (FRADE e MEIRA, 2012, p. 377). Segundo, ver uma ZDP como um espaço simbólico nos capacita a mudar o foco para além do indivíduo *per se* em direção à emergência de modos de comunicação. Terceiro, a ZDP é um espaço simbólico para interações e comunicações, no qual a aprendizagem conduz o desenvolvimento.

Em outras palavras, a ZDP é um espaço simbólico coconstituído através da linguagem e do discurso[17]. Sendo assim, a emergência (ou não) de ZDPs depende essencialmente da produção discursiva em contextos dialógicos, nos quais formas específicas de suporte social, cultural e histórico permitem a coconstrução de funções intelectuais futuras, com base em formas presentes de discurso.

Diante do exposto, os atos comunicativos (no sentido de reciprocidade utilizado aqui) gerados em sala de aula podem, então, criar condições para que funções intelectuais as quais

[17] Neste trabalho, entendo discurso como uma forma/um modo de agir socialmente (forma de interagir, pensar, falar, se comportar, acreditar, ler, escrever, etc.) dentro de uma determinada prática.

estão em processo de amadurecimento (desenvolvimento iminente[18]) possam se revelar e tenham a possibilidade de amadurecer.

Concluindo, aprendizagem é produção de significados. A partir desse processo, criamos um mundo semiótico próprio, existente apenas no nível do sentido que damos para as coisas, para nós mesmos e para o mundo.

3. SEMIÓTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nas últimas décadas, assiste-se àquilo que Lerman (2001, p. 47) chamou de "virada social" (*social turn*) em vários campos do conhecimento. A mudança de direção para o social assinala a emergência de teorias que consideram o significado, o pensamento e o raciocínio como produtos da atividade social.

Essa mudança provocou, no campo da Educação, e especificamente no campo da Educação Matemática, uma aceitação crescente de enfoques socioculturais/'situados' da cognição e do ensino e aprendizagem, fato que se constitui num dos fatores que justifica o interesse atual pela comunicação e interação em sala de aula, bem como o estudo de práticas educativas.

No campo da Educação Matemática, também tem ocorrido igual interesse pela semiótica. Radford (2006, p. 7) afirma que tal interesse deve-se ao fato de ter havido "uma tomada de consciência progressiva de que, dada a generalidade dos objetos matemáticos, a atividade matemática é, essencialmente, uma atividade simbólica".

Educadores matemáticos têm reunido trabalhos sob diferentes perspectivas teóricas, tendo como base a semiótica. Esses trabalhos vêm sendo desenvolvidos a partir da Psicologia, da Antropologia, da Linguística e da Sociologia, visando analisar e compreender os processos que envolvem o ensino e aprendizagem de Matemática. O crescente interesse gerado pela semiótica no campo da Educação Matemática deve-se a várias razões (RADFORD, 2006a). Uma delas ancora-se no interesse, suscitado nos anos 1990, acerca da comunicação em sala de aula, ressaltando a importância de compreender a natureza do discurso matemático, já que a

[18] Na tese elaborada por Prestes (2010), o termo ZDP é substituído por *Zona de Desenvolvimento Iminente*. Tomando como base a compreensão do termo russo *zona blijaichego razvitia*, a autora aponta as confusões nas traduções desse termo e discute os equívocos em sua interpretação e defende que a tradução que mais se aproxima do termo *zona blijaichego razvitia* é "zona de desenvolvimento iminente, pois sua característica essencial é a das possibilidades de desenvolvimento, mais do que do imediatismo e da obrigatoriedade de ocorrência, pois se a criança não tiver a possibilidade de contar com a colaboração de outra pessoa em determinados períodos de sua vida, poderá não amadurecer certas funções intelectuais e, mesmo tendo essa pessoa, isso não garante, por si só, o seu amadurecimento" (p. 173).

semiótica aparece como teoria apropriada para tentar dar conta da complexidade discursiva; outra razão parece ser o uso cada vez maior de artefatos tecnológicos no ensino e aprendizagem da disciplina, uma vez que a semiótica, nesse caso, ofereceria conceitos capazes de ajudar no entendimento do papel cognitivo que desempenham os artefatos; e uma última razão apoia-se no fato de os artefatos e os signos serem portadores de convenções e formas culturais de significação. Portanto, tais motivos fazem da semiótica um campo profícuo para entender as relações entre os signos, por meio dos quais pensam os indivíduos, e o contexto cultural.

De acordo com Hoffmann (2006), em Educação Matemática, existe uma multiplicidade de abordagens semióticas que faz com que não seja trivial a pergunta: "o que, aos olhos de cada autor, é uma perspectiva semiótica?" (HOFFMANN, 2006, p. 281). Essa 'fertilidade' de abordagens, diz o autor, está ligada ao fato de não existir uma teoria comum e coerente de semiótica, fato que faz ainda ambicioso o projeto de se desenvolver uma abordagem semiótica, colocada como meta por Ernest (1997) com "o potencial de oferecer a base para uma teoria unificada da Educação Matemática", que evitaria equívocos de entendimento (p. web).

Radford (2006a, p. 7, grifo do autor) argumenta que há pelo menos, três[19] tradições semióticas claramente diferenciadas, emergidas e desenvolvidas dentro de problemáticas precisas e diferentes:

> (1) A tradição Saussureana, iniciada pelo suíço Ferdinand de Saussure (1857-1913), que emprega o termo *semiologia*;
>
> (2) A tradição Peirceana, iniciada pelo estadunidense Charles S. Peirce (1839-1914), quem cunhou o termo semiótica;
>
> (3) A Vygotskiana, iniciada pelo psicólogo russo Lev S. Vygotsky (1896-1934).

Em Educação Matemática, os autores utilizam, em parte, termos semelhantes, mas com usos distintos, porque se apoiam em diferentes tradições cientificas, as quais apresentam dilemas e respostas muitas vezes incompatíveis ou difíceis de compaginar. Algumas abordagens sobre a semiótica seguem Saussure; outras dialogam com Peirce, umas interagem com Vygotsky ou Michael Halliday; ou, ainda, Wittgenstein. Há, também, combinações dessas abordagens ou criação própria da compreensão da semiótica (HOFFMANN, 2006; RADFORD, 2006a, GODINO, BATANERO e FONT, 2008).

---

[19] Ernest (1997) acrescenta ainda as abordagens inspiradas em Roland Barthes, Umberto Eco, Michael Halliday, Brian Rotman, dentre outros.

Sem a pretensão de exaurir a discussão de todas as abordagens semióticas adotadas em Educação Matemática, considero aquelas presentes nos artigos das edições especiais sobre semiótica de duas revistas: o volume 61, de 2006, da *Educacional Studies in Mathematics*, editado por Adalira Sáenz-Ludlow e Norma Presmeg, e o número especial, também de 2006, da *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* (Relime), editado por Rosa María Farfán.

Os referidos artigos podem ser divididos em pelo menos cinco campos/abordagens semióticas principais[20] não excludentes:

Campo 1: possui foco na crença de que o conhecimento matemático, como ciência e na aprendizagem escolar, depende da possibilidade de ser representado (ERNEST, 1997, 2006; DUVAL, 2000, 2006; PRESMEG, 2006, HOFFMANN, 2006, OTTE, 2006a).

O sentido da aprendizagem matemática, nesse campo, é a necessidade do uso de signos e representações, porque, uma vez que os objetos matemáticos, como quaisquer outros objetos conceituais, são gerais e não particulares, não existe nenhuma forma direta para alcançá-los, que não seja por meio de ações da semiótica.

Ernest (1997, p. web) afirma que:

> a Matemática é o estudo por excelência de sistemas de signos abstratos e o objeto de estudo da Educação Matemática é como as pessoas fazem para dominar e utilizar estes sistemas. Se, como acredito, tanto a Matemática como disciplina quanto o entendimento matemático são construídos socialmente através de intermináveis 'conversações' nos níveis macro e micro, para compreender a Matemática, é necessário atentar para o texto e os signos que são trocados nessas conversas. Quais ferramentas estão lá para analisá-los? O local óbvio para extrair a inspiração é a semiótica.

Essa abordagem pode levar à formulação do seguinte problema da aprendizagem matemática, em termos semióticos: "como podem os objetos matemáticos ideais e relações serem entendidos se, por um lado, eles não podem ser apreendidos sem signos, e por outro lado não podem ser simplesmente identificados com certas representações?" (HOFFMANN, 2006, p. 281).

A esse respeito, Duval (2000, p. 61) diz:

> há uma importante lacuna entre conhecimento matemático e conhecimento em outras ciências tais como Astronomia, Física, Biologia ou Botânica. Nós

[20] Adaptação da classificação realizada por Hofmann (2006) na edição especial do *Educacional Studies in Mathematics.*

> não temos nenhum acesso perceptivo ou instrumental aos objetos matemáticos, mesmo os mais elementares. Nós não podemos vê-los, estudá-los através de um microscópio ou tirar uma foto deles. A única maneira de ter acesso a eles é usando os signos, palavras ou símbolos, expressões ou desenhos. Mas, ao mesmo tempo, os objetos matemáticos não devem ser confundidos com as representações semióticas utilizadas.

Concordando com Duval, Otte (2006a, p. 26) declara que "um objeto matemático, como um número ou função, não existe independentemente da totalidade de suas possíveis representações, mas não deve ser confundido, tampouco, com qualquer representação específica".

Presmeg (2006) focaliza um modelo de 'construção de significados', para descrever o processo de aprendizagem como um desenvolvimento passo a passo. Sua ideia central, para aperfeiçoar a formação de professores, é oferecer a eles uma ferramenta representacional para o modelo de aprendizagem dos estudantes baseado na semiótica, já que combina a metáfora do 'encadeamento de significados' ou 'corrente semiótica', como introduzida por Lacan e inspirada em Saussure, com ideias Peirceanas.

Campo 2: tem foco no 'significado' (ERNEST, 2006; GODINO, FONT e WILHELMI 2006; RADFORD, 2006; SÁENZ-LUDLOW, 2006).

O problema central dessa abordagem está na discussão da objetividade do significado em Matemática e em como o significado se desenvolve em processos históricos e de ensino e aprendizagem.

Sáenz-Ludlow (2006), baseando-se na ideia peirceana de que significado depende de interpretação, desenvolve o conceito de 'jogos de interpretação' para descrever aprendizagem como um processo baseado na comunicação. Um 'jogo de interpretação' é definido como um processo dialógico, coconstruído pelos participantes na sala de aula. Ao contrário da ideia ingênua de que os significados são recebidos pelos estudantes e armazenados em suas memórias, a essência dos jogos de interpretação é um processo dialógico pelo qual significados particulares são continuamente modificados e refinados, e, eventualmente, convergem para significados convencionais estabelecidos em Matemática.

Discutindo o fato de o significado depender da interpretação, Radford (2006, 2006a), partindo de uma perspectiva antropológica, desenvolve uma teoria de significados e objetos conceituais emoldurados em uma abordagem semiótico-cultural com ênfase na função central da cultura na produção de objetos do conhecimento. Rejeitando o realismo metafísico, segundo o qual os objetos matemáticos existem independentemente de nossa experiência e de nosso conhecimento deles, e independentemente da forma como os descrevemos por nossos conceitos e linguagem, Radford (2006) concebe conhecimento em geral e conhecimento matemático em particular como resultado de uma *práxis* cognitiva. Em outras palavras, para o autor, a produção de ideias e objetos culturais conceituais, incluindo objetos matemáticos, é gerada na atividade. Por 'atividade' Radford (2006), citando Leontiev (1978), entende a sequência dialeticamente interligada de ações mediadas que os indivíduos perseguem na realização de um objetivo/meta.

Godino, Font e Wilhelmi (2006), utilizando uma abordagem que denominam 'Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento Matemático'[21] (EOS), interessam-se pela problemática do significado e da ontologia (tipos e natureza[22]) dos objetos matemáticos, tanto no nível pessoal como institucional. O EOS busca integrar as diversas aproximações e modelos teóricos usados na investigação em Educação Matemática, a partir de pressupostos antropológicos (BLOOR, 1983; CHEVALLARD, 1992) e semióticos (RADFORD, SCHUBRING e SEEGER, 2008) sobre a Matemática, adotando princípios didáticos do tipo socioconstrutivista (ERNEST, 1998) e interacionista (COBB e BAUERSFELD, 1995) para o estudo dos processos de ensino e aprendizagem.

Campo 3: foco nos aspectos epistemológicos da semiótica, no que diz respeito à aprendizagem da Matemática (CANTORAL, FARFÁN, LEZAMA e MARTÍNEZ-SIERRA, 2006; OTTE, 2006, 2006a; STEINBRING, 2006).

A questão posta nessa abordagem é: como signos, enquanto 'meios de conhecimento', podem tornar os objetos matemáticos acessíveis?

Otte (2006, 2006a) argumenta que é inútil acreditar que o significado das coisas se faz em nossas cabeças e que é igualmente inútil pensar que o conhecimento é uma espécie de experiência mental. Seguindo certas ideias de Peirce, Otte sugere que não há separação entre ideia e símbolo, apesar do que sustentam o idealismo filosófico e o mentalismo cognitivista. Para Otte, por exemplo, explicar é exibir o sentido de alguma coisa por meio de signos e sentido vistos como processos.

Cantoral, Farfán, Lezama e Martínez-Sierra (2006), sob o que chamam perspectiva socioepistemológica, discutem a construção social do conhecimento. Essa teoria corrobora a

---

[21] Em trabalhos iniciais, o EOS está designado como 'Teoria das Funções Semióticas' (TFS) ou ainda 'Enfoque Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática'.

[22] A discussão filosófica sobre a natureza dos objetos matemáticos abrange questões como: os objetos matemáticos existem por si só - sendo alcançados através da razão de forma única e universal (realismo platônico) - ou são inventados? Possuem uma natureza social, ou seja, seriam passíveis se serem construídos a partir de interações sociais, ou não?

ideia da semiótica cultural que confere à atividade humana a função de produção de objetos matemáticos. A diferença dessa abordagem para a semiótica cultural reside no fato de que a ênfase não está na discussão de questões como, por exemplo, se um objeto é preexistente ou construído, ou se sua representação é produzida ou inata, mas situa a atividade matemática no contexto da prática social, centrando a atenção nas práticas mais que nos objetos, processos ou mediadores.

Campo 4: foco na 'dimensão social' dos processos de signo e seu significado (MORGAN, 2006; SÁENZ-LUDLOW, 2006).

O problema a que se dedica essa abordagem está no papel que os signos desempenham na comunicação e interação, e como seu significado pode ser estabelecido cooperativamente. Enquanto Sáenz-Ludlow tenta mediar os níveis de entendimento através de 'jogos de interpretação', nos quais a produção e interpretação de signos se apresentam entrelaçados à atividade dialógica, Morgan postula que uma importante função dos signos é regular a interação social nos diversos níveis. Morgan não tem como objetivo analisar os signos e representações a partir de uma perspectiva cognitiva ou epistemológica, mas em relação às suas funções dentro das interações sociais. Mais especificamente, enfatiza as funções da linguagem, na construção e representação de nossa experiência e nossas identidades sociais.

Campo 5: foco no problema das mudanças de registros de representação semiótica (D'AMORE, 2006; GAGATSIS, ELIA e MOUSOULIDES, 2006).

Para Otte (2006a, p. 26), "todo raciocínio é uma interpretação de signos de algum tipo. E a interpretação de um signo nada mais é do que a construção de um novo signo". Assim como Duval (2006), para Otte, o conhecimento é essencialmente um processo de aprendizagem ou um processo de crescimento e generalização expresso em termos de permanente transformação de uma representação em outra.

D'Amore (2006) discute as dificuldades de mudança de sentido, quando muda a representação do objeto. Por exemplo, representações como 0,8 e $\frac{4}{5}$, ainda que sejam equivalentes, tratam de concepções distintas que se apoiam em uma epistemologia sensivelmente diferente (CANTORAL, FARFÁN, LEZAMA e MARTÍNEZ-SIERRA, 2006).

Gagatsis, Elia e Mousoulides (2006) discutem as dificuldades encontradas pelos alunos em utilizar representações adequadas em contextos de resolução de problemas.

Duval (2006) enfatiza dois tipos de transformação de representações semióticas: tratamentos e conversões. O tratamento de uma representação consiste na transformação desta representação em outra pertencente ao mesmo registro de partida. O tratamento é, portanto, uma transformação interna a um registro. Para Duval (2004, p. 16),

> os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria.

A conversão consiste na transformação da representação de um objeto matemático em uma representação deste mesmo objeto em outro registro, ou seja, as conversões são transformações externas ao registro da representação de partida. Duval (2004, p. 16) as define como "transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica".

DISCUSSÃO

Apesar da variedade de abordagens, Hoffmann (2006, p. 290) afirma que certas tradições semióticas são mais adequadas que outras, dependendo do foco de estudo para o problema a ser abordado:

> se estamos interessados em problemas epistemológicos da aprendizagem e comunicação matemática, e se precisamos de uma terminologia semiótica altamente diferenciada que permita discussões muito precisas de problemas tais como significado, cognição, interação e interpretação em Matemática, a semiótica de Peirce é, de longe, a melhor ferramenta. O que podemos apreender a partir de Saussure é muito menos; sua abordagem é útil, principalmente no que diz respeito aos problemas da linguagem. A semiótica social de Halliday, por outro lado, é uma ferramenta independente que permite a discussão daqueles aspectos da interação mediada por signos que não podem ser descritos por nenhuma das outras.

O que as diversas abordagens semióticas aqui apresentadas têm em comum é a preocupação em discutir como o significado e o uso de signos e representações matemáticas podem estar relacionados com a aprendizagem em Matemática. Alguns autores fazem essa discussão de um ponto de vista notadamente social (ERNEST, 1997, 2006; GODINO, FONT e WILHELMI, 2006), outros adotam um ponto de vista mais individual (DUVAL, 2006; OTTE, 2006, 2006a), ou ainda focam o contexto cultural (CANTORAL, FARFÁN, LEZAMA e MARTÍNEZ-SIERRA, 2006; RADFORD, 2006, 2006a).

De acordo com o termo adotado por Radford (2006, 2006a) e Da Rocha Falcão (2009), denomino a perspectiva que utilizo nesta tese como *perspectiva semiótico-cultural*, pois me ocupo especialmente do processo de produção de significados, por meio de mediações semióticas, em práticas em sala de aula concebidas como social e culturalmente organizadas.

Em particular, utilizo o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento Matemático (EOS) para explorar os aspectos constitutivos (dinâmica) da significação, bem como para analisar as atividades exploratório-investigativas tomadas como cenário para a produção de significados.

4. O ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO (EOS)

O EOS é um modelo teórico-metodológico advindo da Didática da Matemática e, como já aludido, tem o propósito de articular diferentes pontos de vista e noções teóricas sobre o conhecimento matemático e seu ensino e aprendizagem. O EOS pode ser categorizado como uma perspectiva semiótico-cultural (GODINO, em comunicação pessoal, 2011), pois assume uma concepção pragmática, em que o significado é dependente do contexto, antropológica e semiótica do conhecimento matemático, tanto do ponto de vista institucional[23] (sociocultural), quanto pessoal[24] (psicológico).

O ponto de partida do EOS é a formulação de uma ontologia para os objetos matemáticos que contemple o triplo aspecto da disciplina: como atividade socialmente compartilhada de resolução de problemas, linguagem simbólica, e sistema conceitual logicamente organizado. Tomando como noção primitiva a de situação-problema, definem-se, como detalharei mais adiante, os conceitos teóricos de prática, objeto (pessoal e institucional) e significado, com a finalidade de tornar evidente e operativo, por um lado, o triplo caráter da Matemática mencionado; e, por outro lado, a gênese pessoal e institucional (social) do conhecimento matemático, assim como sua interdependência (GODINO, BATANERO e FONT, 2008).

---

[23] As instituições são concebidas pelo EOS como comunidades de práticas. Uma instituição é, portanto, constituída pelas pessoas envolvidas num empreendimento conjunto; o compromisso mútuo com a mesma problemática e a realização de determinadas práticas sociais que frequentemente apresentam características particulares e são, geralmente, condicionadas pelos instrumentos disponíveis na referida instituição, assim como em suas regras e modos de funcionamento (GODINO, BATANERO e FONT, 2008). A comunidade de prática dos matemáticos ou dos professores de Matemática seriam exemplos de instituição.

[24] O termo pessoal refere-se ao processo psicológico de internalização, entendida nesta tese, como a define Vygotsky, o complexo processo de transformação do interpessoal em intrapessoal.

O EOS (FONT, PLANAS e GODINO, 2010) propõe cinco níveis de análise para descrever, explicar e avaliar as interações e práticas educativas em sala de aula (Figura 1). Os quatro primeiros níveis de análise – análise dos tipos de problemas e sistemas de práticas, elaboração das configurações de objetos e processos matemáticos, análise das trajetórias e interações didáticas, e identificação do sistema de normas e metanormas – são ferramentas para uma didática descritivo-explicativa, ou seja, servem para compreender e responder à pergunta 'o que está ocorrendo aqui e por quê?'. O quinto nível de análise – avaliação da adequação didática do processo de ensino e aprendizagem – se baseia nos quatro níveis iniciais e constitui uma síntese orientada para avaliar se as atividade implementadas em sala de aula são 'idôneas' (adequadas), visando à identificação de potenciais melhoras do processo de ensino e aprendizagem (FONT, PLANAS e GODINO, 2010).

FIGURA 1 - Organização em níveis das noções teóricas que compõem o EOS

A figura 1 resume o aludido processo de análise, podendo ser lida de baixo para cima: consideremos inicialmente um *sistema de práticas* matemáticas. Desse sistema, emergem objetos e processos matemáticos (FONT, GODINO e GALLARDO, 2012). Tais objetos e processos relacionam-se entre si formando *configurações* produzidas a partir das interações didáticas, isto é, redes de objetos que intervêm e emergem dos sistemas de práticas e suas relações. Uma sequência de configurações didáticas, orientadas à aprendizagem de um tipo de situação-problema (ou de um conteúdo específico), constitui uma *trajetória didática.* Permeando todo esse processo, estão as *normas e metanormas* que regulam as interações e dão formato à participação dos sujeitos envolvidos. A *adequação didática* permite o planejamento, a implementação e uma posterior valoração do referido processo de ensino e aprendizagem. A seguir, detalho cada um dos construtos que constituem a figura 1.

SISTEMA DE PRÁTICAS MATEMÁTICAS

O conceito de prática é definido como qualquer ação/performance ou manifestação (verbal, gráfica, gestual, etc.) levada a cabo na resolução de problemas matemáticos e na comunicação das soluções obtidas a outras pessoas, a fim de validá-las ou generalizá-las a outros contextos e problemas (GODINO e BATANERO, 1994; FONT, PLANAS e GODINO, 2010).

OBJETOS E PROCESSOS MATEMÁTICOS

O EOS adota uma noção interacionista de objeto – entendendo-o como qualquer entidade ou coisa à qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de alguma maneira na atividade matemática – e uma visão pragmatista-antropológica, ao considerar o significado dos objetos matemáticos.

O EOS propõe a seguinte tipologia de objetos matemáticos primários (GODINO, BATANERO e FONT, 2008, p. 14) :

- *situações-problemas* (aplicações extramatemáticas, exercícios, etc.);
- *elementos linguísticos* (termos, expressões, notações, gráficos, etc.) em seus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.);
- *conceitos/definições* (introduzidos mediante definições ou descrições: reta, ponto, número, média, função, etc.);
- *propriedades/proposições* (enunciados sobre conceitos, soluções para as situações-problema, etc.);
- *procedimentos* (algoritmos, operações, técnicas de cálculo, etc.);
- a*rgumentos* (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos; dedutivos ou de outro tipo).

Esses objetos matemáticos são suportados por cinco dimensões duais (decágono da Figura 2): pessoal-institucional, expressão-conteúdo, sistêmico-unitário, não ostensivo-ostensivo e intensivo-extensivo (FONT, PLANAS e GODINO, 2010). Para exemplificar, tomemos o objeto definições. A definição (conceito) de função, por exemplo, tem, dentre outras, uma dimensão institucional (a definição matemática) e uma dimensão pessoal (a definição adotada, socialmente construída, por um aluno em determinado momento). Tais dimensões são explicadas a seguir.

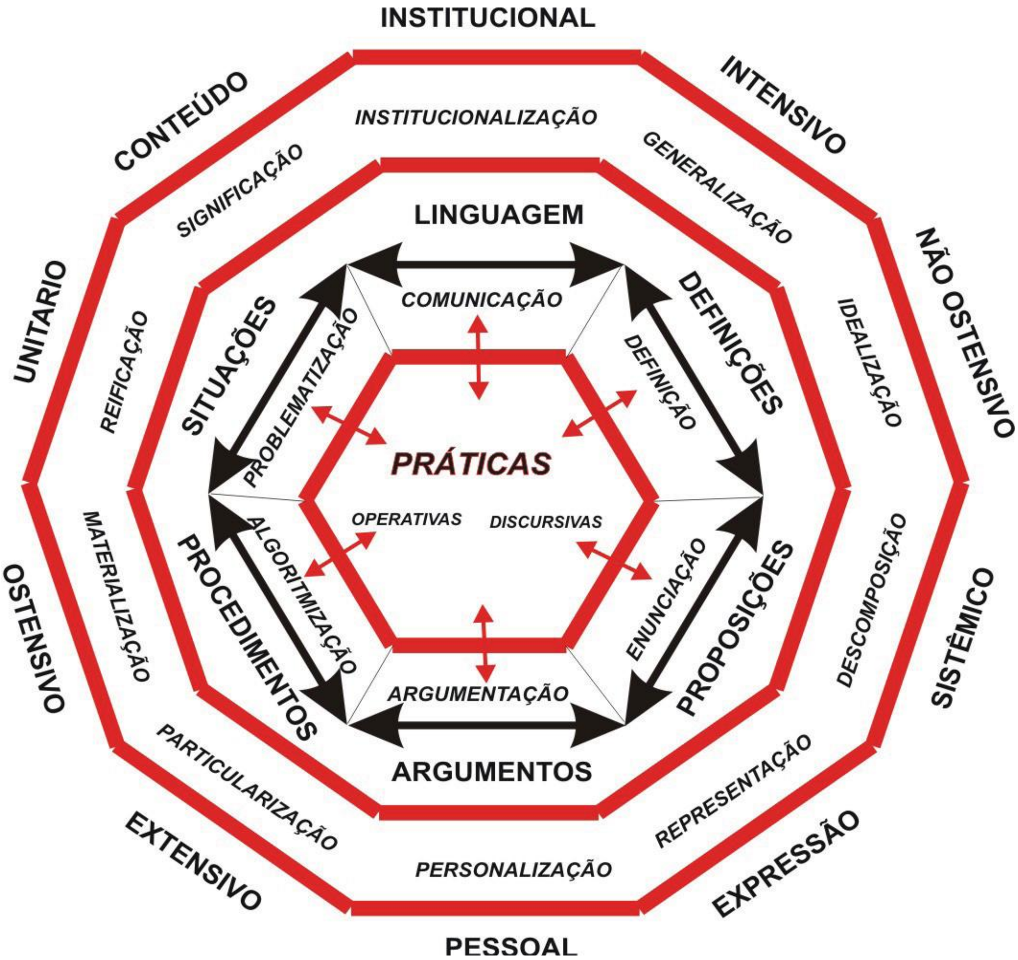


FIGURA 2[25] - Representação ontossemiótica do conhecimento matemático

- Pessoal-institucional: se os sistemas de práticas são compartilhados dentro de uma instituição, os objetos emergentes são considerados 'objetos institucionais'[26]; caso os referidos sistemas de práticas correspondem a uma pessoa, consideramos que emergem 'objetos pessoais'[27] (GODINO e BATANERO, 1994). A noção de emergência pode ser relacionada, desde o ponto de vista dos objetos pessoais, aos processos cognitivos que Sfard (1991) descreve como interiorização, condensação e reificação, e, desde o plano institucional, com os processos de comunicação, simbolização e regulação. A emergência dos objetos também está relacionada à metáfora ontológica

[25] Figura extraída de Godino, Batanero e Font (2008). Esse artigo trata-se de uma versão ampliada, revisada e traduzida para português por Edson Crisóstomo dos Santos (professor-investigador da Universidade Estadual de Montes Claros) de Godino, Batanero e Font (2007).

[26] Esta formulação dos objetos institucionais é coerente com o modo de conceber os "objetos conceituais culturais" na semiótica cultural (RADFORD, 2006, p.57): "Os objetos matemáticos são formas conceituais de atividade reflexiva mediada histórica, social e culturalmente encarnada".

[27] Os 'objetos pessoais' incluem os construtos individuais, tais como concepções, esquemas, representações pessoais, etc.

(LAKOFF e NÚÑEZ, 2000), a qual permite considerar acontecimentos, atividades, ideias, entre outros, como se fossem entidades (objetos, coisas, etc.).

- Ostensivo-não ostensivo: entende-se por ostensivo qualquer objeto que é público e que, portanto, pode se mostrar ao outro. Os objetos institucionais e pessoais têm uma natureza não ostensiva (não perceptíveis por si mesmos). Contudo, qualquer desses objetos pode ser usado em práticas públicas por meio de seus ostensivos associados (notações, símbolos, gráficos, etc.). Essa classificação entre ostensivo e não ostensivo é relativa ao jogo de linguagem do qual participam, porque um objeto ostensivo pode ser também pensado, imaginado por um sujeito ou estar implícito em um discurso matemático (por exemplo, o sinal de multiplicação em uma notação algébrica).
- Expressão-conteúdo: antecedente e consequente de qualquer função semiótica. A atividade matemática e os processos de construção e o uso dos objetos matemáticos se caracterizam por serem essencialmente relacionais. Os distintos objetos não devem ser concebidos como entidades isoladas, mas postos em relação uns com os outros. A relação se estabelece por meio de funções semióticas, entendidas como uma relação entre um antecedente (expressão, significante) e um consequente (conteúdo, significado), estabelecida por um sujeito (pessoa ou instituição), de acordo com certo critério ou código de correspondência.
- Extensivo-intensivo (exemplar-tipo). A dualidade extensivo-intensivo é usada para explicar uma das características básicas da atividade matemática: o uso de elementos genéricos, que se refere a um objeto que intervém em um jogo de linguagem, como um caso particular de uma classe mais geral. Por exemplo, no estudo das funções, $y=2x + 1$ seria uma função particular pertencente à classe ou tipo de funções lineares $y=mx + n$; a última expressão é um objeto intensivo (GODINO, BATANERO e FONT, 2007). Não obstante, os termos extensivo e intensivo não são aqui considerados sinônimos, respectivamente, de geral e particular; recebem essa denominação para ressaltar o caráter situado que possuem, uma vez que, um mesmo objeto pode ser considerado intensivo em determinada situação e extensivo em outra. Retomando o exemplo anterior, a função $y = mx + n$ pode ser classificada como um objeto extensivo, se considerarmos o estudo das funções polinomiais. A classe das funções polinomiais seria classificada como intensivo. Também a função particular $y = 2x + 1$, considerada como um exemplo de extensivo anteriormente, pode ser considerada um intensivo, se for utilizada como expressão que permite obter o enésimo termo de determinada sequência.

- Unitário-sistêmico. Em algumas circunstâncias, os objetos matemáticos participam como entidades unitárias (que se supõe conhecidas previamente), enquanto, em outras, intervêm como sistemas que devem ser decompostos para seu estudo. Por exemplo, no estudo da adição e subtração, nos últimos anos do primeiro segmento do ensino fundamental (antigo primário), o sistema de numeração decimal (dezenas, centenas) é considerado entidade unitária (por se tratar de algo conhecido). Esses mesmos objetos são, no entanto, considerados sistêmicos no primeiro ano desse mesmo curso.

Tanto as dualidades quanto as configurações de objetos primários (linguagem, definições, proposições, argumentos, procedimentos, situações) podem ser analisadas a partir de uma perspectiva dos processos indicados na figura 2. A emergência dos objetos tem lugar mediante os respectivos processos matemáticos de comunicação, problematização, definição, enunciação, elaboração de procedimentos (algoritmização, rotinização, etc.) e argumentação. Por outro lado, as dualidades dão lugar aos seguintes processos cognitivo-epistêmicos: institucionalização-personalização; generalização-particularização; análise-decomposição/síntese-reificação, materialização-concretização/idealização-abstração; expressão-representação/significação.

Em Font, Planas e Godino (2010) é esclarecido que a figura 2 não pretende incluir todos os processos implicados na aprendizagem matemática, dentre outros motivos porque alguns dos mais importantes (por exemplo, o processo de resolução de problemas ou o de modelização) são considerados hiper ou mega processos, já que abrangem outros processos mais elementares como representação, argumentação, idealização, generalização, etc.

TRAJETÓRIAS DIDÁTICAS

O construto *trajetória didática* parte da ideia de *configuração didática*.

Uma *configuração didática* é um intervalo ou segmento de atividade didática (ensino e aprendizagem) que se distribui entre os momentos de início e término de uma tarefa ou situação-problema. Inclui, portanto, as ações dos alunos e do professor, assim como os meios usados para abordar o estudo conjunto da referida tarefa (ASSIS, FRADE e GODINO, no prelo).

Uma configuração didática (Figura 3) é composta por uma configuração epistêmica – uma tarefa, as ações requeridas para sua solução, linguagens, definições, proposições, procedimentos e argumentações, as quais podem estar a cargo do professor, dos alunos ou distribuídas entre ambos – uma configuração instrucional, na qual se encontra uma configuração docente e outra discente em interação, e uma configuração cognitivo-afetiva.

Uma sequência de configurações didáticas, orientada à aprendizagem de um tipo de situação-problema (ou de um conteúdo específico) constitui uma trajetória didática (Figura 3). Como é descrito em Godino, Contreras e Font (2006), as trajetórias didáticas – que são compostas por subtrajetórias epistêmicas, docentes, discentes, mediacionais e interacionais – condicionam o desenvolvimento das trajetórias cognitivas dos sujeitos envolvidos nas práticas sociais. Essas trajetórias, por sua vez, descrevem a aprendizagem conquistada pelos estudantes, sendo sua otimização o principal objetivo do processo educativo.

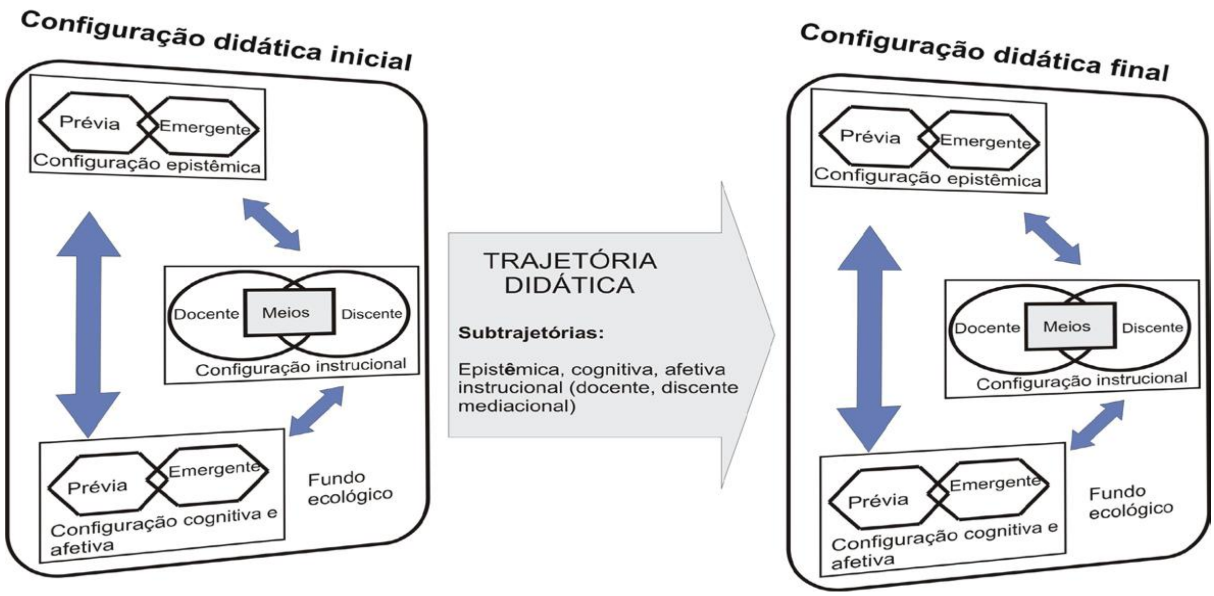


FIGURA 3 - Trajetórias didáticas[28]

Godino, Contreras e Font (2006) descrevem, utilizando como critério as interações estabelecidas, quatro tipos de configurações didáticas teóricas de referência: configurações *magistral, a-didática, dialógica* e *pessoal*.

A configuração didática *magistral* refere-se à maneira clássica de ensinar Matemática: apresentação do conteúdo pelo professor, seguida de exercícios de aplicação dos conhecimentos e saberes apresentados.

Uma configuração didática é considerada *a-didática* quando o aluno (ou um grupo de alunos em trabalho colaborativo), em concordância com o professor, assume a

[28] Idem nota 25.

responsabilidade do trabalho matemático – exploração de possíveis técnicas de solução, formulação, comunicação e validação – e se engaja em um processo de busca autônoma, sem receber nenhum tipo de apoio por parte do professor.

Uma variação intermediária desses dois tipos de configuração é definida quando o professor se encarrega da formulação e da validação do problema, enquanto os alunos se responsabilizam pela exploração. A partir do diálogo entre o professor e os alunos, os discentes têm a oportunidade de assumir a tarefa, de se familiarizar com ela e, possivelmente, de esboçar alguma estratégia de solução. Nesse caso, a configuração didática é chamada *dialógica.*

A noção de configuração didática *pessoal* é introduzida em Godino, Contreras e Font (2006) para analisar segmentos instrucionais mais amplos do que aqueles que analisamos neste trabalho. Referem-se a momentos em que o estudo é realizado de maneira individual pelo aluno e normalmente fora da sala de aula (estudo pessoal em casa, biblioteca, etc.).

Neste trabalho, portanto, utilizo apenas as configurações a-didática, dialógica e magistral, já que analiso episódios ocorridos em sala de aula.

Em Godino, Contreras e Font (2006), considera-se que, quando se muda a tarefa (ou problema abordado), muda-se a configuração didática. Por outro lado, esses autores afirmam que uma mesma configuração didática empírica pode reunir traços/características de dois ou mais tipos de configurações didáticas teóricas. Em outras palavras, pode acontecer de uma mesma configuração didática apresentar mais de uma classificação, ao ser comparada com as configurações teóricas de referência.

De fato, durante a realização de uma tarefa, podem-se implementar diferentes padrões de interação (trabalho autônomo dos alunos, explicações magistrais, diálogo e cooperação entre alunos e professor, etc.). Cada subintervalo de atividade em que acontece um de tais padrões é denominado por *subconfiguração didática* (ASSIS, FRADE e GODINO, no prelo) noção que permite uma análise mais pormenorizada das configurações e das trajetórias didáticas.

Nas configurações didáticas podem ser identificados *padrões de interação*. Voight (1995) define padrões de interação como regularidades constituídas nas interações entre o professor e os alunos[29]. Para Godino e Llinares (2000, p. 9), "quando os participantes

[29] Neste trabalho, por uma questão de restringir o foco diante da quantidade de dados produzidos, centro-me nos padrões de interação assumidos pelas professoras e alunos, por me dedicar à atuação do professor e, portanto, não ser necessário analisar os padrões emergentes das interações entre alunos.

constituem uma regularidade que um observador descreve como um padrão de interação, essa regularidade está estabilizando um processo frágil de negociação de significados".

Esses autores destacam os seguintes padrões de interação tratados na investigação em Educação Matemática:

Padrão extrativo (VOIGT, 1985): o professor propõe uma tarefa ambígua e os estudantes são estimulados a explorá-la e analisá-la espontaneamente. Em seguida, o professor conduz uma discussão, extraindo fragmentos de conhecimentos associados a pequenos passos no raciocínio dos alunos.

Padrão de discussão (VOIGT, 1985): o professor pede a um estudante que o informe sobre o trabalho desenvolvido pelo grupo. Em seguida, contribui com as explicações dos alunos, fazendo perguntas adicionais, observações e reformulações, de maneira que uma explicação ou solução conjunta se manifeste e seja tomada como válida. Por fim, o professor pergunta se há outros modos de solução e inicia, novamente, o ciclo de discussão.

Padrão do funil (VOIGHT, 1985; BAUERSFELD, 1988): o professor, diante da dificuldade dos alunos para resolver um problema, propõe questões mais fáceis relacionadas ao problema e cuja solução possa conduzir à resolução do problema com grau de dificuldade maior, apresentado anteriormente.

Padrão de focalização (WOOD, 1994): é uma variante do anterior, porém, neste caso, o professor propõe uma série de perguntas com o objetivo de estreitar o foco da atenção dos alunos a um aspecto específico do problema, tentando fazer com que ultrapassem as dificuldades. Feito isso, o professor deixa os alunos continuarem o trabalho de forma autônoma.

Padrão de matematização direta (VOIGT, 1996): o professor propõe aos alunos uma tarefa suficientemente aberta que permite diferentes interpretações e, consequentemente, distintas abordagens matemáticas. Em seguida, reduz o número de possibilidades de interpretação, conduzindo os alunos para determinado modo de interpretar a tarefa, direcionando-os a seguir as próprias abordagens.

Sierpinska (1996) identifica também os padrões 'é isso' e 'tem certeza?', que Godino e Llinares (2000) denominam, respectivamente, como padrões *afirmativo* e *interrogativo*. Esses padrões referem-se aos tipos de interações em que o professor, no primeiro caso, valida a afirmação/solução do aluno, dizendo que está correto (ou incorreto), ou, no segundo caso, convida o aluno a verificar sua afirmação/solução (mesmo no caso de estar correta).

Menezes (2005) destaca, ainda, o *padrão de recitação*. Aqui, o professor toma a iniciativa de explicar a matéria. Em seguida, os alunos respondem a perguntas propostas e as respostas são avaliadas pelo professor. Essas aulas decorrem, regra geral, da realização de tarefas rotineiras.

NORMAS E METANORMAS

No contexto da sala de aula, a noção de normas refere-se às regras que regem as interações entre professor e alunos e, em geral, às convenções estabelecidas de maneira histórica sobre como se comunicar e como reagir ante as intervenções dos outros (PLANAS e IRANZO, 2009).

No caso das aulas de Matemática, há normas vinculadas à atividade matemática, as quais são próprias das colocadas em prática quando lidamos com objetos e processos matemáticos, denominadas normas *sociomatemáticas* (VOIGT, 1995; YACKEL e COBB, 1996).

As normas *sociomatemáticas* diferenciam-se das normas *sociais*, porque essas últimas são, em sua maioria, gerais e podem ser aplicadas a qualquer aula, independente da disciplina. Por exemplo, a norma que determina como colaborar uns com os outros ou a que regula a forma como devemos reagir socialmente diante de um erro, são normas *sociais*. Já as normas *sociomatemáticas*, referem-se, por exemplo, à compreensão do que em sala de aula pode ser considerado uma explicação matemática aceitável ou do que é considerado matematicamente 'sofisticado', 'eficiente' ou 'elegante'.

Voigt (1995) identifica também como normas *sociomatemáticas* as normas de sala de aula que implicam a valoração de uma solução para um problema como inteligente ou inventiva, e explicações e argumentações consideradas matematicamente corretas.

No entanto, a distinção entre normas sociais e sociomatemáticas, segundo Yackel e Cobb (1996), é sutil. Por exemplo, a compreensão de que os estudantes devam explicar uma resposta explicitando sua forma de pensar é uma norma *social*, enquanto a compreensão do que se considera uma explicação matematicamente aceitável é uma norma *sociomatemática*.

As normas *sociomatemáticas* são, na perspectiva social, o correlato das *crenças* e *valores* identificados na perspectiva psicológica, ao tentar dar conta de como os estudantes chegam a ser intelectualmente autônomos em Matemática (GODINO, FONT, WILHELMI e CASTRO, 2009).

Nesse sentido, segundo Yackel e Cobb (1996), o que se torna matematicamente normativo numa sala de aula é determinado pelos objetivos, crenças, suposições e pressupostos presentemente assumidos pelos participantes na aula. Ao mesmo tempo, esses objetivos e compreensões, em grande parte implícitas, são eles próprios influenciados pelo que é legitimado como atividade matemática aceitável.

Essas regras podem ser também entendidas como *cláusulas do contrato didático*[30] (BROUSSEAU, 1999), visto que as obrigações recíprocas que o professor e os alunos têm a responsabilidade de administrar, sobretudo implicitamente, são parecidas a um contrato.

Em Godino, Font, Wilhelm e Castro (2009), é introduzida *a dimensão normativa dos processos de estudo*, para denominar o sistema de regras, hábitos, normas que restringem e suportam as práticas didáticas, com o intuito de integrar e ampliar as noções de 'contrato didático' e 'normas sociais e sociomatemáticas'.

A figura 4 busca explicitar de maneira global as facetas que abarcam os processos de ensino e aprendizagem de Matemática, as normas a elas relacionadas (epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica) além de considerar o momento, a origem, o tipo e o grau de coerção.

---

[30] Brousseau (1999) define o Contrato Didático como um conjunto recíproco de comportamentos esperados entre alunos e professor, mediado pelo saber. Esses comportamentos são legitimados através de regras explícitas (formuladas verbalmente em sala de aula) e principalmente implícitas (que já foram construídas historicamente e podem ser interpretadas no contexto de sala de aula) que acontecem no interior da relação didática.

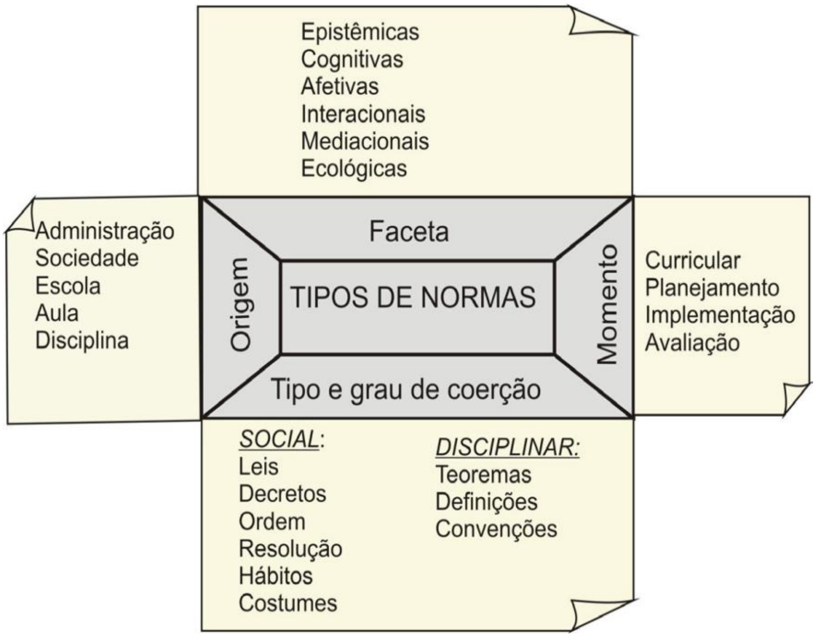


FIGURA 4 - Dimensão normativa: tipos de normas[31]

Entendendo-se que as normas são negociadas dentro da sala de aula, e, portanto, são objeto de interpretação, valoração e reflexão pelos agentes envolvidos, devemos considerar que professor e alunos mobilizam conhecimentos que dizem respeito não só a conteúdos *de* Matemática, mas também a conhecimentos *sobre* a Matemática, *sobre* sua utilização, *sobre* o ensino e aprendizagem (particularmente de Matemática) e, dentre outros, *sobre* a consciência que tem o sujeito acerca do próprio conhecimento.

Esse conhecimento, de segunda ordem, expresso em comportamentos e discursos pelos agentes envolvidos, denomina-se *metaconhecimento* e tem uma natureza similar às normas *sociomatemáticas* mencionadas anteriormente. Às normas de segunda ordem, relativas a esse metaconhecimento, D'Amore, Font e Godino (2007) denominam *metanormas*.

Para considerar os metaconhecimentos, é incorporada ao EOS a noção de *dimensão metanormativa dos processos de estudo* (D'AMORE, FONT e GODINO, 2007), composta pelas configurações 'meta': *metaepistêmica*, *metainstrucional* e *metacognitiva.*

Na figura 5 (D'AMORE, FONT e GODINO, 2007), são explicitadas e exemplificadas essas configurações. As metanormas *metaepistêmicas* referem-se, por exemplo, aos conceitos, proposições e procedimentos considerados válidos em uma prática; já as metanormas *metainstrucionais* referem-se à forma como, acredita-se, deve-se atuar para otimizar o ensino e a aprendizagem. As metanormas *metacognitivas* são subdivididas em metacognição

[31] Idem nota 25.

matemática (como o aluno entende o próprio processo de cognição) e metacognição didática (como o aluno entende que deve ser o processo de ensino e aprendizagem).

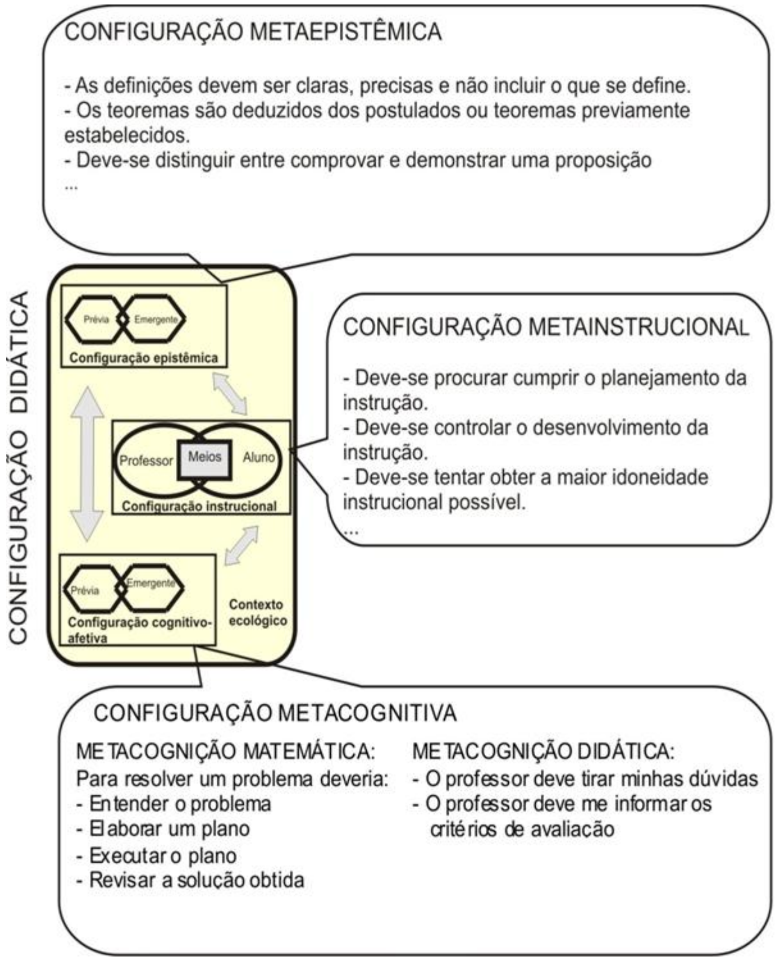


FIGURA 5 - Componentes da dimensão metanormativa

Cada prática didática associa-se a normas distintas. A aplicação do 4º nível de análise, proposto pelo EOS, consiste em identificar/reconhecer as normas e metanormas que regulam determinada prática matemática com o objetivo de delinear a natureza normativa e metanormativa dessa prática.

Por outro lado, segundo Planas e Iranzo (2009), os *conflitos semióticos*, ou seja, as disparidades ou discordância de significados atribuídos pelos distintos participantes em um momento da tarefa matemática, podem indicar discrepâncias entre *práticas matemáticas* e o uso das *normas* postas em jogo. Isso porque os conflitos semióticos podem ter sua origem na diversidade de normas suscitadas.

Partindo desse pressuposto, essas pesquisadoras propõem um modelo com quatro níveis de análise para facilitar a identificação e a descrição das normas: nível 1 – identificação de práticas matemáticas; nível 2 – identificação de normas sociomatemáticas; nível 3 – identificação de conflitos entre significados; e, nível 4 – exploração de relações entre práticas, normas e conflitos.

Neste trabalho, utilizo o nível 4 do modelo proposto por Planas e Iranzo (2009), devido à sua especificidade, para complementar o nível 4 proposto pelo EOS. A aplicação do nível 4 do modelo supracitado requer que prestemos atenção à existência de mais de uma norma na interpretação de uma prática. Sendo assim, o trabalho neste nível supõe a existência de um conhecimento *metamatemático* suficiente para serem reconhecidas as condições exigidas para que uma prática seja considerada matemática e a variedade de expectativas dentro do discurso matemático quanto ao desenvolvimento e à avaliação de tais práticas.

Adoto, também, a classificação proposta pelo EOS de três tipos de conflitos semióticos teóricos não excludentes (GODINO, BATANERO e FONT, 2007): epistêmico, cognitivo e interacional. Se a disparidade se produz entre significados institucionais, o conflito é concebido como do tipo *epistêmico;* se a disparidade se produz entre práticas formadoras do significado pessoal, o conflito semiótico é designado como *cognitivo*. Quando a disparidade se produz entre as práticas de sujeitos em interação comunicativa (por exemplo, aluno-aluno ou aluno-professor), o conflito é classificado como semiótico *interacional.*

ADEQUAÇÃO DIDÁTICA

Godino, Bencomo, Font e Wilhelmi (2006) aportam um sistema de componentes e indicadores empíricos que servem de *guia de análise e valoração da adequação didática*. Os critérios de adequação, junto com essa guia que os desenvolve, são ferramentas úteis para orientar o desenho, para implementar processos de estudo e para realizar sua valoração. Especificamente, são úteis para valorar as normas epistêmicas, cognitivo-afetivas, interacionais, mediacionais e ecológicas que regulam os processos de estudo implementados e, portanto, orientar sua melhora.

No modelo do EOS, são mencionados seis tipos de adequação didática para que um processo de ensino e aprendizagem seja considerado idôneo (Figura 6): adequação epistêmica; adequação cognitiva, adequação interacional; adequação mediacional; adequação emocional e adequação ecológica (FONT, PLANAS e GODINO, 2010).

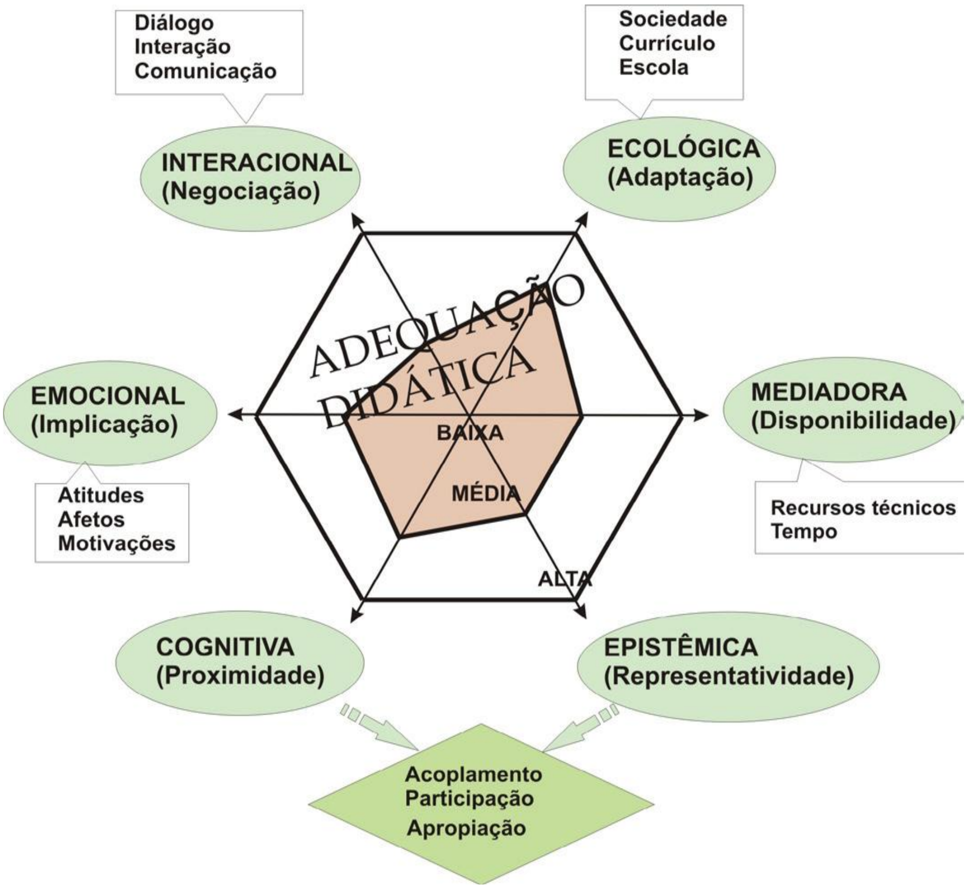


FIGURA 6 - Componentes da adequação didática[32]

Na figura 6, são resumidos os critérios que compõem a adequação didática. O hexágono regular representa a adequação correspondente a um processo de estudo pretendido ou programado, no qual, *a priori*, se supõe um grau máximo das adequações parciais. O hexágono irregular inscrito corresponde às adequações efetivamente atingidas na realização de um processo de estudo implementado.

No quadro 1, a seguir, estão descritas as características que determinam quando cada tipo de adequação didática pode ser considerada alta:

[32] Idem nota 25.

Adequação	**Características que cada adequação precisa apresentar para ser considerada alta**
Adequação interacional	A interação (com outros alunos, com o professor, com o material) permite que o professor e os alunos identifiquem conflitos semióticos e resolvam tais conflitos mediante a negociação de significados. Os formatos de interação do tipo dialógico e de trabalho cooperativo terão potencialmente maior adequação interacional que as de tipo magistral e de trabalho individual, posto que os estudantes mostram sua relação com os objetos matemáticos e, portanto, o professor tem indicadores explícitos da referida relação (GODINO, FONT, WILHELMI e CASTRO, 2009).
Adequação cognitiva	O material de aprendizagem favorece a emergência de ZDPs e permite a evolução dos significados pessoais dos estudantes.
Adequação emocional	As configurações didáticas motivam a ação e a participação dos alunos, já que têm em conta seus interesses, afetos e suas emoções.
Adequação epistêmica/matemática	Representatividade das atividades implementadas, pertinência dos significados implementados.
Adequação ecológica	Adaptações às diretrizes curriculares, conexões com outros conteúdos, contextualização sociocultural da prática profissional.
Adequação mediacional	Gestão adequada de meios, recursos didáticos, materiais manipulativos, tempo.

QUADRO 1 - Características que cada adequação precisa apresentar para ser considerada alta

Descritos os cinco níveis de análises do EOS, passo, no capítulo a seguir, a caracterizar as atividades exploratório-investigativas, já que as mesmas irão compor o cenário em que o processo de ensino e aprendizagem, foco desta investigação, se dará.

CAPÍTULO II

ATIVIDADES EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS

1. BREVE HISTÓRICO

Nas últimas décadas, a proposta de se ensinar Matemática a partir da resolução de problemas tem sido enfatizada por algumas das mais prestigiadas associações educacionais mundiais e pelos pesquisadores em Educação. Dewey (1959), por exemplo, considerava os problemas como uma 'centelha do pensamento' e, como tal, imprescindíveis para a própria atividade do pensar. Polya, desde o lançamento de *How to solve it*, em 1945, influenciou e continua influenciando educadores (de diferentes áreas) em todo o mundo. Nos Estados Unidos, o Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM) recomenda, há mais de duas décadas, que o currículo de Matemática seja organizado em torno da resolução de problemas. Nos *Principles and standards for school mathematics* (NCTM, 2000, p. 52), o NCTM continua a privilegiar a resolução de problemas como uma das dez normas para o ensino da Matemática para cada um dos níveis de escolaridade, pois, por meio da resolução de problemas em Matemática, "os alunos adquirem modos de pensar, hábitos de persistência e de curiosidade, e confiança em situações que não lhes são familiares e que lhes servirão fora da aula de matemática".

O consenso sobre o relançamento de propostas de valorização do papel da resolução de problemas nos currículos de Matemática é acompanhado de um "esforço no sentido de alargamento de perspectivas sobre o que é um problema e o que é resolução de problemas" (ABRANTES, 1989, p. 7). Verifica-se, contudo, que muito daquilo que se entende por resolução de problemas é superficial. Por exemplo, o professor, ao exemplificar a resolução de problemas propondo uma resolução linear, explicando a situação em questão como algo cuja solução se conhece e que não gera dúvidas nem exige tentativas (GIL PEREZ e MARTINEZ-TORREGROSA, 1992), trata os problemas ilustrativos como exercícios de aplicação da teoria, e não como verdadeiros problemas.

Para Gusmán (1992, p. 18): "tenho um verdadeiro problema quando me encontro em uma situação da qual quero chegar à outra, umas vezes bem conhecida, outras um tanto confusamente perfilada, e não conheço o caminho que pode me levar de uma a outra".

Nessa mesma linha, Pozo e Echeverría (1998, p. 16) procuram diferenciar problema de exercício, da seguinte maneira:

> um problema se diferencia de um exercício, na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução. Por isso, é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa, enquanto que para outra esse problema não existe, quer porque ela não se interesse pela situação, quer porque possua mecanismos para resolvê-la com um investimento mínimo de recursos cognitivos e pode reduzi-la a um simples exercício.

Ao longo dos tempos, a importância da proposição de situações nas quais os alunos são convidados a pensar, a buscar alternativas e a construir soluções, mantém-se e se aprimora. A noção de problema vem sendo ampliada e problemas mais abertos, bem como a formulação de questões alternativas, como o que Abrantes (1989), em sua classificação de vários tipos de problemas, chama de 'uma situação'[33], são propostos. Uma perspectiva ainda mais ampla é dada por Schoenfeld (1996, 2006) que, partindo da resolução de problemas, valoriza todo um conjunto de processos característicos da atividade matemática, como formular, testar e provar conjecturas e argumentar.

2. APRENDIZAGEM BASEADA NA INVESTIGAÇÃO

A aprendizagem baseada na investigação (*inquiry learning*) é uma abordagem originada de práticas de investigação científica e enfatiza o processo de propor questões ou problemas relevantes, recolher e analisar dados e construir argumentos baseados em evidências (HMELO-SILVER, DUNCAN e CHINN, 2007).

Essa abordagem ressalta a importância de os aprendizes se engajarem na produção do próprio conhecimento de maneira independente. Não se pode esperar, no entanto, que os alunos da Educação Básica sejam capazes de, desde o princípio, projetar e realizar as próprias investigações. Na verdade, "a maioria dos estudantes, independentemente da idade, precisam de ampla prática para desenvolver suas capacidades de investigação e compreensão, a ponto de poderem conduzir a própria investigação do início ao fim" (BANCHI e BELL, 2008, p. 26).

---

[33] A situação pode ser simplesmente uma página cheia de números, em que "não está formulado qualquer problema, nem mesmo implicitamente, mas há um convite à exploração" (ABRANTES, 1989, p.10).

A aprendizagem baseada na investigação, segundo Hmelo-Silver, Duncan e Chinn (2007), pressupõe engajamento colaborativo dos estudantes em investigações e um significativo papel do professor, já que a ele cabe fornecer 'andaimes'[34] (*scaffoldings*), de maneira a tornar as tarefas acessíveis e manejáveis, visando à emergência de possíveis zonas de desenvolvimento proximais (FRADE e MEIRA, 2012).

Esse suporte é justificado pelo fato de que, quando os estudantes se esforçam, dentro de limites razoáveis, eles trabalham mais ativamente e se dedicam mais, buscando dar sentido à situação, que, por sua vez, leva-os a construir interpretações mais ligadas ao que eles já conhecem e/ou a reexaminar e reestruturar o que já sabem. Para Hiebert e Grouws (2007), esse tipo de engajamento gera aprendizagem de conteúdos e habilidades com mais profundidade

Banchi e Bell (2008) argumentam que a aprendizagem baseada na investigação (*inquiry learning*) pode ser desenvolvida em quatro níveis, considerando-se o tipo de informação (questão, procedimento e solução) fornecida ao aluno (Quadro 2):

Níveis de investigação	**Questão**	**Procedimento**	**Solução**
1 - Investigação de confirmação Os alunos confirmam uma proposição através de uma atividade, quando os resultados são conhecidos antecipadamente.	✓	✓	✓
2 - Investigação estruturada Os estudantes investigam uma pergunta apresentada pelo professor através de procedimentos prescritos.	✓	✓	
3 - Investigação guiada Os estudantes investigam uma pergunta apresentada pelo professor usando procedimentos desenhados/selecionados pelos estudantes.	✓		
4 - Investigação aberta Os estudantes investigam questões que são formuladas pelos estudantes a partir de procedimentos desenhados/selecionados pelos estudantes.			

QUADRO 2 - Os quatro níveis de investigação e a informação dada ao aluno em cada um

[34] Hmelo-Silver, Duncan e Chinn (2007) consideram como 'andaimes' tanto a intervenção do professor (ou dos próprios alunos), quanto o uso de ferramentas tecnológicas como, por exemplo, calculadoras, software educacional ou programas que permitem fazer simulações.

Ponte, Fonseca e Brunheira (1999), utilizando o termo investigações matemáticas, para denominar uma abordagem investigativa que se insere no que Ernest (1996) denomina pedagogia orientada para investigação (*inquiry-oriented pedagogy*)[35], as diferenciam de resolução de problemas:

> na resolução de problemas, tal como é entendida inicialmente, o objetivo é encontrar o caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida, mas não se sabe qual será o ponto de chegada (PONTE, FONSECA e BRUNHEIRA, 1999, p. 94-95).

As investigações matemáticas também se diferenciam do que se costuma chamar explorações matemáticas. As investigações matemáticas são situações-problema desafiadoras e abertas, que permitem aos alunos várias alternativas de exploração e investigação. Já as explorações tendem a ser mais livres e menos sistemáticas, sendo frequentemente utilizadas para introduzir um novo tema de estudo ou para problematizar e produzir significados a um conceito matemático (PONTE, 2003). Dependendo do grau de dificuldade que uma tarefa aberta terá para certo grupo de alunos, ela é classificada como investigação ou exploração (Quadros 3 e 4). Um exemplo de investigação matemática é apresentado no quadro 3, a seguir.

Outro olhar sobre a tabuada
1. Construa a tabuada do 3. O que encontra de curioso nesta tabuada? Prolongue-a calculando 11x3, 12x3, 13x3... e formule algumas conjecturas.
2. Investigue agora o que acontece na tabuada do 9 e do 11.

QUADRO 3 - Exemplo de uma atividade de investigação matemática[36]

A tarefa exemplificada nesse quadro, proposta para alunos do 3º ano do 2º ciclo (antiga 5ª série), é um exemplo de investigação numérica, em que os alunos são convidados a analisar padrões e regularidades que envolvem números e operações elementares.

[35] Descoberta guiada, na qual o professor é um facilitador que leva os alunos a resolverem os problemas por si mesmos, resolução de problemas e abordagem investigativa são métodos que se fundamentam na investigação para o ensino de Matemática, constituindo o que Ernest (1996) chama de uma pedagogia orientada para investigação.

[36] Tarefa extraída do livro *Investigações Matemáticas na Sala de Aula* (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006, p. 64)

O exemplo a seguir, fragmento de uma das atividades implementadas nesta investigação (6ª oficina implementada[37]), é um exemplo de atividade de exploração matemática (Quadro 4).

ATIVIDADES NO GEOPLANO III

Construa, no geoplano, todos os retângulos possíveis que tenham **área de 36 unidades**.

(1 unidade = 1 quadradinho formado por quatro pregos).

Organize os dados na tabela a seguir.

	Área (__)	Base (__)	Altura (__)	Perímetro (__)
Retângulo A	36			
Retângulo B	36			
Retângulo C	36			
Retângulo D	36			
Retângulo E	36			
	36			
	36			

O que você pode observar?

___

___

Qual é o retângulo de maior perímetro? E o de menor perímetro?

___

___

QUADRO 4 - Exemplo de uma atividade de exploração matemática[38]

Ponte (2003) afirma que as tarefas possuem quatro dimensões básicas: o grau de dificuldade; a estrutura; o contexto referencial; e o tempo requerido para a sua resolução. A figura 7 ajuda-nos a visualizar os quatro tipos básicos de tarefa obtidos, ao se conjugarem as duas primeiras dimensões (PONTE, 2003):

[37] Nesta pesquisa foram implementadas nove atividades exploratório-investigativas, no formato de oficinas, envolvendo temas de Aritmética, de Medidas, de Geometria e de Álgebra.

[38] Tarefa adaptada dos Cadernos 'Experiências Matemáticas' – 5ª série – Secretaria de Educação de São Paulo/Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP, p. 241-243, 1997.

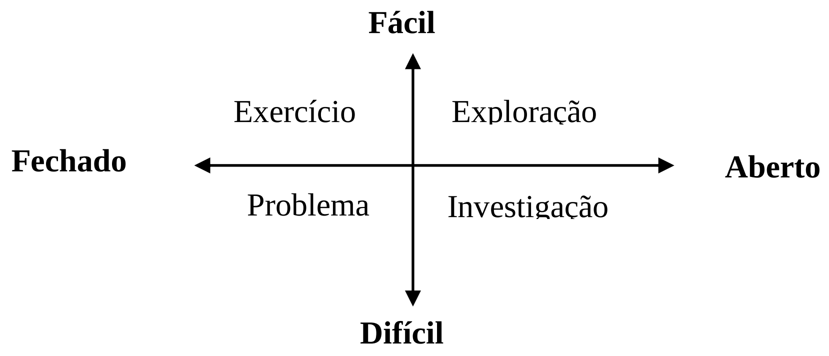


FIGURA 7 - Os diversos tipos de tarefa em termos do grau de dificuldade e de abertura

Desse modo, temos que:

- Os exercícios são tarefas sem grande dificuldade e estrutura fechada (2º quadrante);
- Os problemas são tarefas também fechadas, mas com elevada dificuldade (3º quadrante);
- As investigações têm um grau de dificuldade elevado, mas uma estrutura aberta (4º quadrante);
- Finalmente, as tarefas de exploração são fáceis e com estrutura aberta (1º quadrante).

A outra dimensão a que Ponte (2003) se refere diz respeito ao contexto referencial: a tarefa pode ser contextualizada numa situação real ou formulada em termos puramente matemáticos. Adotando como perspectiva a 'Educação Matemática Crítica'[39], Skovsmose (2000), indica três tipos de referência que visam levar os alunos a produzirem significados para os conceitos e atividades matemáticas: referência à Matemática, referência à semirrealidade e referência à situação da vida real. Sendo assim, temos seis possíveis ambientes de aprendizagem, resultantes dessa combinação expostos no quadro 5, a seguir:

	Exercícios	**Cenários para Investigação**
Referência à Matemática pura	1	2
Referência à Semirrealidade	3	4
Referência à realidade	5	6

QUADRO 5 - Ambientes de aprendizagem

[39] Um dos propósitos da Educação Matemática Crítica é refletir sobre os papéis desempenhados pela aplicação/utilização da Matemática na sociedade.

O ambiente 1 é aquele dominado por exercícios no contexto da 'Matemática pura'; já a natureza do ambiente 3 pode ser ilustrada a partir do seguinte exemplo (SKOVSMOSE, 2008, p. 24):

O feirante A vende maçãs a $0,85 o kg. Por sua vez, o feirante B vende 1,2 kg por $1,00.

a) Qual feirante vende mais barato?

b) Qual é a diferença entre os preços cobrados pelos dois feirantes por 15 kg de maçãs?

Esse exercício faz referência a uma semirrealidade porque, apesar de falar sobre maçãs e preços, trata de uma situação artificial. A semirrealidade obedece a alguns princípios, como: toda a informação necessária se encontra no texto do exercício, o único propósito de apresentar o exercício é resolvê-lo. Uma semirrealidade é um mundo sem impressões dos sentidos (perguntar sobre o gosto das maçãs está fora de questão), de modo que somente as quantidades mensuráveis são relevantes. Além disso, toda informação quantitativa é exata. A combinação da exatidão das medidas com o pressuposto de que a semirrealidade é completamente descrita pelas informações fornecidas torna possível sustentar o pressuposto de que há apenas uma resposta correta. Já uma atividade no ambiente de aprendizagem 5 pode ter um enunciado semelhante ao do problema anterior, mas os dados são retirados de situações reais.

Araújo, Pinto, Luz e Ribeiro (2008, p. 13) esclarecem que "os ambientes no cenário para investigação propõem atividades mais abertas – dotadas de um enunciado menos direcionador –, que solicitam do aluno algum tipo de investigação". O ambiente 2 pode ser exemplificado pela atividade do quadro 3, já que é uma situação aberta que faz referência à 'Matemática pura'. O ambiente de aprendizagem 4, a exemplo do 3, também se baseia em dados que fazem referência à realidade, mas não aconteceram efetivamente. A atividade a seguir, apresentada no quadro 6, é um exemplo de cenário para investigação em um ambiente do tipo 4:

CENÁRIO 1

Imaginem-se membros da equipe da Secretaria de Planejamento de uma pequena cidade e que dispõem de uma verba de trezentos mil reais (R$300.000,00) para desenvolver o novo programa social da prefeitura, denominado 'Família Solidária'.

O programa consiste em selecionar do total de famílias que vivem nessa microssociedade, algumas famílias, que receberão por um período pré-determinado salário, educação, atendimento médico, acompanhamento psicológico e cursos profissionalizantes, com o intuito de reinserção no mercado de trabalho.

A verba descrita acima se destina ao pagamento dos salários para as famílias selecionadas. Considerem que os salários são destinados a custos com alimentação, transporte, roupas, lazer, remédios, material de limpeza e higiene.

A tarefa de cada dupla consiste em três etapas:

- ✓ Descrever algumas famílias imaginárias incluindo informações específicas como: a estrutura das famílias, o número de filhos, a idade dos filhos, a renda dos pais e quaisquer outras informações que considerarem interessantes.
- ✓ Discutir os critérios para distribuição do salário.
- ✓ Elaborar um algoritmo para calcular o valor do salário que será destinado a cada família selecionada.

QUADRO 6 - Exemplo de um cenário para investigação tipo 4[40]

No ambiente de aprendizagem 6, os alunos são convidados a analisar e apresentar soluções para um problema real. Nesse tipo de ambiente de aprendizagem, há diversas possibilidades de encaminhamento e, sendo assim, o pressuposto de que há uma, e somente uma, resposta correta não faz sentido. Os trabalhos de modelagem matemática[41] na Educação Matemática (ARAÚJO e BARBOSA, 2005) e os de projetos (MACHADO, 2000) assemelham-se a esse último ambiente.

É importante considerar, como ressalta Skovsmose (2000), que um cenário para investigação só se constitui quando o convite à postura investigativa é aceito pelos alunos. Por isso, segundo Alrø e Skovsmose (2002), torna-se necessário que o professor procure saber as boas razões dos alunos para aceitar (ou não) tal convite, para que, ciente dessas razões, ele possa (re)formular seu convite e tentar seduzir os alunos para aceitá-lo.

---

40 Atividade elaborada por Pollyanna e por mim a partir da adaptação de uma das atividades iniciais do projeto *Family Supply in a Micro-Society*, descritas no livro *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education* (SKOVSMOSE, 1994), por ocasião de um trabalho realizado na disciplina Educação Matemática Crítica ministrada pela professora Jussara Loiola Araújo.

41 Barbosa (2001), tomando a Modelagem matemática sob um ponto de vista sociocrítico, a concebe como "um *ambiente de aprendizagem* no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade" (BARBOSA, 2001, p.6, grifo meu). De acordo com Barbosa (2001), a Modelagem Matemática pode ser entendida como um cenário de investigação do tipo 6. Esclarece, ademais, que, devido ao pouco interesse em situações fictícias elaboradas artificialmente, a Modelagem Matemática não se enquadra confortavelmente em um cenário de investigação do tipo 4 (semirrealidade).

Entendendo 'investigação' assim como a entendem Ponte, Fonseca e Brunheira (1999), neste trabalho utilizo a expressão *atividades exploratório-investigativas*, para sinalizar o tipo de tarefa em que os estudantes se dedicam tanto à exploração, quanto à investigação matemática, implementadas de acordo com as fases de uma aula de investigação, como veremos no próximo tópico. Em acordo com Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), acredito que a expressão 'exploratório-investigativas' é mais apropriada para descrever o que ocorre com alunos do Ensino Fundamental, os quais, pela primeira vez, se defrontam com esse tipo de atividade.

3. INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA SALA DE AULA

As investigações matemáticas na sala de aula de Matemática funcionam como uma 'simulação' de práticas que se assemelham às do matemático profissional. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) descrevem os seguintes momentos na realização de uma investigação, apresentadas no quadro 7, adiante:

Explorações e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulações	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

QUADRO 7 - Momentos na realização de uma investigação

Uma *aula investigativa* é aquela que supõe o envolvimento dos alunos em tarefas investigativas e, portanto, "ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína" (PONTE, BROCADO e OLIVEIRA, 2006, p. 23).

Ponte, Fonseca e Brunheira (1999) descrevem as fases de uma aula de investigação: introdução da tarefa, desenvolvimento do trabalho e discussão final/reflexão.

Na primeira fase, explicam-se a tarefa e o tipo de trabalho que serão desenvolvidos com as investigações. Pode-se optar pela distribuição do enunciado escrito, acompanhado de pequena apresentação oral, ou apresentar a tarefa apenas oralmente, podendo o professor, eventualmente, ir registrando no quadro algumas informações essenciais e, finalmente, a tarefa pode surgir espontaneamente, a partir da atividade dos alunos.

Na fase do desenvolvimento do trabalho, pretende-se que os alunos adquiram uma atitude investigativa, devendo, para tal, haver a preocupação em centrar a aula na atividade dos alunos, em suas ideias e em sua pesquisa. Ao longo dessa fase, o professor deve ter uma atitude questionadora perante as solicitações de que certamente será alvo. Poderá, por exemplo, propor questões relativas ao que fizeram, pedir que analisem um conjunto de dados obtidos, sugerir que organizem esses mesmos dados de outra maneira, etc.

A discussão final sobre a atividade é também uma boa ocasião para promover a reflexão sobre o trabalho, o que permite aos alunos valorizar os processos de resolução em relação aos produtos, mesmo que não conduzam a uma resposta final correta, criando uma visão mais 'produtiva' da Matemática.

As atividades investigativas tratam, portanto, de "uma viagem ao desconhecido" (PONTE, FONSECA e BRUNHEIRA, 1999, p. 93). Sendo assim, têm o potencial de promover maior envolvimento e participação ativa do estudante, bem como resultar em interações ricas entre os alunos.

Considerando-se que uma prática particular em sala de aula condiciona as oportunidades que são oferecidas aos estudantes para se engajarem na produção de significados matemáticos (FRANKE, KASEMI e BATTEY, 2007), nesta pesquisa, as práticas de atividades exploratório-investigativas serão utilizadas como contexto para estimular a negociação de significados e a produção semiótica de entendimentos coletivos nas aulas de Matemática.

CAPÍTULO III
PROBLEMA DE INVESTIGAÇÃO E METODOLOGIA

1. DELIMITAÇÃO DO ESTUDO

O objetivo principal desta pesquisa foi explorar, sob uma perspectiva semiótico-cultural, como se dá o processo de produção de significados matemáticos, por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental (antiga 6ª série), em práticas de sala de aula, quando estão envolvidos em atividades exploratório-investigativas.

Para tal, duas questões de pesquisa principais foram propostas neste trabalho:

- ✓ Quais os aspectos constitutivos (dinâmica) do processo de produção de significados matemáticos no âmbito das atividades exploratório-investigativas?
- ✓ Qual o nível de adequação do contexto criado com atividades exploratório-investigativas como cenário para o estudo do processo de produção de significados na sala de aula?

Para responder a essas questões, foram aplicados os cinco níveis de análise propostos pelo EOS, os quais permitem descrever e analisar práticas matemáticas e didáticas, que demandaram:

- ✓ Identificar as práticas matemáticas envolvidas (Nível 1);
- ✓ Identificar os objetos e processos matemáticos que possibilitaram essas práticas (Nível 2);
- ✓ Analisar as trajetórias e interações didáticas (Nível 3);
- ✓ Identificar o sistema de normas e metanormas (Nível 4); e
- ✓ Avaliar a adequação do processo vivido (Nível 5).

Lembro que parti do pressuposto de que a realização de atividades exploratório-investigativas – "que visam levar os alunos a pensar genericamente, perceber regularidade e explicitar essa regularidade através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente, estabelecer relações entre grandezas variáveis" (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 87) – constituem uma alternativa para a criação de um ambiente propício para a produção de significados em aulas de Matemática.

Também adotei, nesta pesquisa, uma metodologia do tipo qualitativa e interpretativa, devido ao fato de que esse tipo de metodologia apresenta características condizentes com o problema de pesquisa e com a natureza das questões que orientam este estudo. Tais características são: (1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural e o investigador é o principal agente de recolha desses mesmos dados; (2) os dados que o investigador recolhe são essencialmente de caráter descritivo; (3) os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si do que propriamente pelos resultados; (4) a análise dos dados é feita de forma indutiva; e (5) o investigador preocupa-se, acima de tudo, em tentar compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências (BOGDAN e BIKLEN, 1994).

Como principal instrumento de coleta de dados, optei pela observação participante. Jaccoud e Mayer (2008, p. 271), citando Spradley (1980), afirmam que as características típicas da observação participante são o *duplo objetivo* de "se envolver nas atividades próprias à situação e ao mesmo tempo observá-las", a *introspecção*, o que significa dizer que é preciso "aprender a se servir de si mesmo, enquanto instrumento de pesquisa" e o *registro sistemático*, já que o observador participante "leva consigo permanentemente um diário de campo, no qual registra, detalhadamente, tanto as observações objetivas, quanto os sentimentos e as impressões pessoais".

A observação participante é entendida nesta pesquisa como a que supõe a interação pesquisador/pesquisado. Sendo assim, não só observei e fiz registros sistemáticos, mas, também, implementei efetivamente atividades de investigação matemática juntamente com os professores envolvidos.

2. O AMBIENTE DE PESQUISA E OS PARTICIPANTES

A produção de dados se deu no Centro Pedagógico da Escola de Educação Básica e Profissional (CP) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). O CP é uma escola pública de Ensino Fundamental, situada na região urbana de Belo Horizonte, e foi escolhida por mim pelo fato de ser uma escola de experimentação e pesquisa e, reconhecidamente, acolher diversas investigações na área de Educação. Desde as séries iniciais, os alunos dessa escola participam de projetos de ensino e pesquisa, e a presença de investigadores e estagiários já não lhes causa grande estranheza.

O Centro Pedagógico[42] tem sua origem no antigo Ginásio de Aplicação da UFMG, fundado em 21 de abril de 1954, em cumprimento aos dispositivos legais instituídos pelo Decreto Lei nº 9053 em 1946. Esse Decreto exigiu que as Faculdades de Filosofia Federais mantivessem uma escola destinada à prática docente dos alunos matriculados em seus cursos de Didática.

A partir de 1968, a UFMG passou por uma reestruturação que afetou também o Colégio de Aplicação (denominado assim a partir de 1958). De acordo com os novos planos resultantes dessa política de reestruturação, o Colégio de Aplicação da Faculdade de Filosofia tornou-se um Centro Pedagógico, integrado à Faculdade de Educação da UFMG, com a função básica de ofertar cursos relativos ao ensino de 1º e 2º graus.

Em 1972, o Centro Pedagógico foi transferido para o campus da Pampulha e passou a ter uma escola de 1º Grau, funcionando em prédio próprio, e paralelamente, em outro prédio, um Colégio Técnico, oferecendo cursos de aperfeiçoamento profissional de nível médio.

Por ser uma escola pública responsável pelo Ensino Fundamental de nove anos (desde 2006), organizado em Ciclos de Formação Humana (desde 1995), o Centro Pedagógico adota o sorteio público para ingresso dos alunos, por considerá-lo a forma mais democrática, evitando mecanismos de seletividade que favoreçam quaisquer grupos sociais ou culturais.

Definida a escola, o próximo passo foi convidar um (a) professor(a) do CP para participar da pesquisa. O escolhido foi o professor Oziel[43], docente do 7º ano (início do 3º ciclo) com alunos que têm em média 12 anos de idade. Essa faixa etária é interessante para explorar o trabalho com investigações matemáticas, porque nessa idade os alunos possuem (ou deveriam possuir) algumas competências/habilidades básicas[44] consolidadas, mas ainda é momento de introduzir várias outras que serão consolidadas nos anos seguintes.

Tendo sido aceito o convite pelo professor Oziel de implementar atividades de investigação matemática em algumas de suas aulas, o próximo passo foi a escolha das turmas. Por sugestão desse professor, optei por trabalhar com as turmas dos 7º anos B e C porque, segundo ele, demonstravam maior participação nas aulas de Matemática. Conversei, então,

---

[42] As informações sobre o histórico do CP foram obtidas no site: http://www.cp.ufmg.br/historico.php, acesso em 07 ago. 2012.
[43] O professor Oziel autorizou o uso de seu nome nesta tese.
[44] Por exemplo, como no caso das habilidades exploradas na presente pesquisa, calcular ou estimar, em situações-problema, o perímetro e a área de figuras planas pela decomposição e/ou composição em figuras de áreas conhecidas ou utilizando fórmulas; descobrir regularidades em sequências – introdução à Álgebra (Cadernos 'Desafios da formação: proposições curriculares para o Ensino Fundamental', Matemática, Secretaria Municipal de Educação, Rede Municipal de Educação de Belo Horizonte, 2010).

com os alunos dos 7º anos B e C sobre a pesquisa e expus, de maneira geral, os objetivos e o tipo de trabalho que seria desenvolvido. Expliquei que a participação deles era voluntária e os convidei para participar. No dia 9 de abril de 2010, cada aluno das referidas turmas recebeu dois Termos de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), aprovados pelo Comitê de Ética na Pesquisa (COEP) da UFMG. Um desses termos deveria ser assinado pelos alunos, e o outro pelos seus pais/responsáveis, já que eram menores de idade.

O trabalho teve início com a realização da primeira investigação, na turma 7º ano B, em 16 de abril 2010, e uma semana depois, no dia 23 de abril de 2010, na turma 7º ano C. Desde o primeiro contato com os alunos do 7º ano C, quando os convidei para participar do trabalho, alguns deles mostraram resistência. Fui questionada por esses alunos, sobre o que aconteceria, se não quisessem participar. O professor que estava com essa turma no momento respondeu, por mim, que o trabalho era voluntário, mas que eles sabiam da importância e dos benefícios que poderiam trazer pesquisas como a que eu propunha. Outros alunos não colocaram objeção, mas se mostraram desinteressados e/ou apáticos. Essa resistência/desinteresse/apatia foi comprovada na primeira atividade implementada nessa turma. Os alunos se comportaram de forma excessivamente indisciplinada, levantando-se do lugar o tempo todo e sentindo-se quase ofendidos quando a eles era pedido que permanecessem assentados ou que não falassem todos ao mesmo tempo. Um dos alunos me informou que seus pais não haviam autorizado sua participação[45], o que tornou a situação ainda mais complicada. Diante de tal cenário, decidi desenvolver o trabalho apenas com a turma do 7º ano B que, apesar de também ter se mostrado indisciplinada, havia demonstrado maior interesse em colaborar com a pesquisa.

Foram implementadas nove atividades exploratório-investigativas na turma do 7º ano B ao longo do ano de 2010. O 7º ano B compunha-se de 32 alunos (16 meninos e 16 meninas) de aproximadamente 12 anos. As quatro primeiras oficinas contaram com a participação do professor Oziel e o trabalho foi desenvolvido com toda a turma, na sala de aula corriqueira. As carteiras, que eram individuais, foram agrupadas, de forma a possibilitar a formação de grupos de quatro alunos.

A 5ª e a 6ª oficinas foram implementadas apenas por mim, já que, por sugestão do professor Oziel, dividimos a turma em dois grupos, por razões que detalharei mais adiante. Esses alunos foram retirados da sala de aula e levados para o espaço da cantina, utilizado para a merenda, que possui várias mesas que comportam grande número de alunos. O restante da

[45] O aluno fez a atividade, mas sua participação não foi registrada em áudio ou vídeo.

turma permaneceu em sala de aula, com o professor Oziel. O trabalho de pesquisa, a partir desse momento, passou a ser desenvolvido com o grupo de 15 alunos (seis meninas e nove meninos) que ficou comigo.

No segundo semestre de 2010, o 7º ano B (assim como os 7º anos A e C) foi dividido oficialmente, apenas nas aulas de Matemática, em duas turmas. Uma nova professora, Talita[46], foi designada para assumir um dos grupos, ficando o outro grupo com o professor Oziel. De acordo com ele, tal divisão se fez necessária, para que o conteúdo de Matemática pudesse ser trabalhado de modo mais satisfatório, uma vez que esse trabalho não estava sendo possível devido à indisciplina e às dificuldades de atender individualmente uma turma com 32 alunos.

Contei com o apoio dos professores Oziel e Talita, que me permitiram, nos dias em que as oficinas aconteciam, permanecer junto aos 15 alunos com os quais vinha desenvolvendo o trabalho no primeiro semestre, ainda que eles tivessem sido distribuídos entre as duas novas turmas. O professor Oziel, nesses dias, permanecia com o grupo de 17 alunos que não participava da pesquisa; e a professora Talita colaborava comigo no desenvolvimento das atividades exploratório-investigativas, com os 15 alunos envolvidos na pesquisa.

As três últimas oficinas (7 a 9) foram, portanto, implementadas pela professora Talita e por mim, e aconteceram no laboratório de Ciências, espaço utilizado para as aulas de Matemática, com mesas em forma de trapézio, organizadas duas a duas, formando hexágonos. Os sujeitos da pesquisa (nove meninos e seis meninas) se organizaram livremente nesse ambiente, dividindo-se em três grupos (um grupo de cinco meninas e um menino; um grupo de quatro meninos e uma menina; e um grupo de quatro meninos).

Minha expectativa, como pesquisadora, era realizar um número maior de oficinas, mas foi preciso priorizar, por questões éticas, o cumprimento do programa previamente estabelecido para o 7º ano. Sendo assim, o professor Oziel, e mais tarde a professora Talita, muito gentilmente, se dispuseram a encontrar momentos em que poderiam ceder aulas, sem prejuízo para os alunos. Ainda que tenham sido escolhidos, para as oficinas, temas que constassem do programa do 7º ano, o nível de abertura das atividades exploratório-investigativas não permite prever todos os desdobramentos, não sendo possível garantir o cumprimento do tema no tempo previsto no programa.

[46] A professora Talita autorizou o uso de seu nome nesta tese. Nos capítulos de análise, no entanto, optei por utilizar o código Prof 2, para referir-me à professora Talita, e Prof 1, para referir-me a mim mesma, com o objetivo de destacar a fala das professoras na interação.

3. O TEMA SELECIONADO: INVESTIGAÇÕES SOBRE PADRÕES

Foram implementadas nove tarefas exploratório-investigativas que abordaram temas como: aritmética (soma controlada, divisão e resto), medidas (perímetro e área) e padrões (sequências, relações entre grandezas e funções). Como será justificado mais adiante, o tema padrões foi selecionado como objeto de análise da pesquisa. Passo, portanto, na próxima secção, a discorrer brevemente sobre ele.

PADRÕES NA MATEMÁTICA

A importância dos padrões na Matemática tem sido mencionada por vários autores. Zazkis e Liljedahl (2002), por exemplo, afirmam que "os padrões são o coração e a alma da Matemática" (p. 379). Também os *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) asseguram que os padrões constituem a base do pensamento algébrico, sendo que sua exploração envolve os alunos na identificação de relações e no estabelecimento de generalizações, propondo o conhecimento de padrões, funções e relações como objetivo para todos os níveis de ensino.

Diversos autores (ZAZKIS e LILJEDAHL, 2002; SOUZA e DINIZ, 2003; PONTE, 2005) defendem uma abordagem de padrões para a introdução do conceito de variável, argumentando que, tradicionalmente, as variáveis são introduzidas como incógnitas em equações, em que tais incógnitas não possuem uma natureza variável. Alegam, ainda, que essa abordagem proporciona aos alunos a oportunidade de observar e verbalizar suas generalizações e registrá-las simbolicamente.

No entanto, a 'passagem' da utilização estrita de números para a utilização de símbolos não é uma ocorrência automática e, não por acaso, constitui um dos grandes entraves ao entendimento da Álgebra, porque é preciso que seja construído o 'sentido de símbolo' (ARCAVI, 2007), ou seja, a capacidade de interpretar e de usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas (PONTE, 2006).

As abordagens chamadas pré-álgebra têm como objetivo facilitar uma abrupta transição da Aritmética para a Álgebra, sendo que tais abordagens indicaram uma mudança nas pesquisas ao longo do tempo, afastando-se da resolução de equações como principal atividade de ensino e aprendizagem em Álgebra para atividades de transição como generalização, padrões numéricos, variáveis e funções (CARRAHER e SCHLIEMANN, 2007).

Tall (1992), no entanto, já alertava para os perigos de se introduzirem conceitos algébricos usando a generalização de padrões numéricos, pois, segundo ele,"embora seja natural considerar padrões numéricos como sendo uma extensão da aritmética, isso envolve dificuldades cognitivas que podem não propiciar o melhor caminho para a Álgebra" (TALL, 1992, p. 17). Tal pesquisador justifica essa afirmação, argumentando que, apesar de o ser humano ser muito bom em detectar *padrões numéricos*, por exemplo, diante da sequência 1, 4, 7, 10,... uma criança logo 'sentiria o ritmo' e afirmaria que para continuar a sequência teria que 'somar 3', essa identificação trata-se de um padrão recursivo, não de uma expressão algébrica ou fórmula. Para resolver essa questão, sugere como alternativa o uso de *softwares* e programação computacional para que a criança concentre-se nos significados dos símbolos e se dedique a construir expressões algébricas.

Segundo Roig e Llinares (2008), o objetivo dos problemas de generalização, independente do contexto em que se apresentem, é a obtenção de uma regra que defina o padrão da sequência. Para atingir essa finalidade, usualmente, se utilizam as seguintes tarefas:

- ✓ descobrir o termo seguinte da sequência, escrevendo-o ou desenhando-o;
- ✓ determinar um termo próximo que podia ser resolvido, continuando-se a desenhar ou a escrever a sequência até chegar ao termo pedido (*generalização próxima*, STACEY, 1989);
- ✓ determinar um termo mais afastado com o objetivo de fazer com que os alunos, diante da dificuldade em continuar a sequência, busquem uma regra geral (*generalização distante*, STACEY, 1989);
- ✓ encontrar um padrão ou uma regra que permita determinar diferentes termos; e
- ✓ expressar simbolicamente o padrão ou a regra encontrado (*enésimo* termo da sequência).

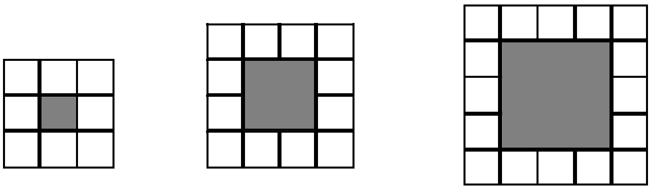
CLASSIFICAÇÃO DE PADRÕES E CATEGORIAS DE PENSAMENTO

Zazkis e Liljedahl (2002) identificam vários tipos de padrões: padrões geométricos, numéricos, repetidos, lineares e quadráticos, em procedimentos computacionais, etc.

A sequência a seguir (Quadro 8), fragmento de uma das atividades implementadas na 7ª oficina, é um exemplo de *padrão geométrico* (SOUZA e DINIZ, 2003):

ATIVIDADE 5

Observe a sequência de figuras abaixo e responda:



a) Qual a próxima figura da sequência? E a seguinte? Desenhe.

b) Quantos quadradinhos tem o bordo de cada uma das figuras que você desenhou?

c) Como você calculou a quantidade de quadradinho do bordo da 3ª figura? Escreva uma sentença matemática.

d) Como você pode calcular a quantidade de quadradinhos do bordo da 4ª figura?

e) E da 5ª figura?

f) Sem desenhar, como você calcularia o total de quadradinhos da 6ª figura? Escreva uma sentença matemática.

g) E da 9ª figura? Escreva uma sentença matemática.

h) E de uma figura em uma posição qualquer da sequência? Escreva uma sentença matemática.

QUADRO 8 - Exemplo de uma atividade de sequências

Bishop (2000, p. 122) identifica quatro categorias de pensamento no trabalho com *padrões numéricos*:

- Concreto: os alunos modelam o padrão concreto, mas não parecem compreender o padrão numérico e só usam os símbolos para avaliação simples.
- Proporcional: os alunos parecem estar conscientes de que existe alguma relação entre o número e sua posição, mas expressam esta relação como uma simples multiplicação.
- Recursivo: os alunos tendem a focar a relação entre números sucessivos no padrão.

- Funcional: os alunos tendem a focar a relação entre os números no padrão e sua posição na sequência.

Os padrões repetidos são aqueles que determinam um reconhecido ciclo de elementos os quais se repetem, designado por 'unidade de repetição'. Por exemplo, *abcabcabc*... pode ser visto como um padrão de repetição, com três atributos e uma unidade de repetição (ou ciclo) de tamanho 3; *ABCabABCabABCab*... pode ser visto como um padrão mais complexo de repetição, com três atributos e um ciclo de comprimento 5, no qual o tamanho da letra também é variado. Variar alguns atributos dos elementos (tais como tamanho, cor, orientação, etc.) mantendo constantes outros atributos aumenta a complexidade de um padrão de repetição (THRELFALL, 1999).

Threlfall (1999, p. 21) afirma que "o objetivo do trabalho com padrões repetidos é estabelecido, pelo menos em teoria, como uma fundação para o desenvolvimento subsequente em Álgebra".

Os *padrões lineares* são assim chamados porque o *enésimo* termo pode ser escrito como an + b.

Stacey (1989, p. 150) apresentou aos alunos um padrão de figuras no formato de escada construída com fósforos e pediu a eles que descobrissem quantos fósforos seriam necessários para a construção de uma escada com 20 e 1000 degraus. Nesse padrão, uma escada com r degraus precisa de $3r + 2$ fósforos. Essa pesquisadora identificou quatro métodos utilizados pelos estudantes:

- Método de contagem – em que os alunos desenharam a escada apropriada e contaram o número de degraus.
- Método da diferença – no qual os alunos multiplicaram o número de degraus pela diferença comum de 3, implicitamente assumindo que a adição repetida de 3 implica que o *enésimo* número é $3r$.
- Método objeto como um todo (*whole-object*) – em que os alunos calcularam um múltiplo do número de degraus requeridos para uma escada menor, implicitamente assumindo que o número necessário para construir uma escada com n.r degraus é n vezes o número utilizado para uma escada com r degraus.
- Método linear – no qual os alunos reconheceram que tanto a multiplicação quanto a adição estão envolvidas e que a ordem das operações importa, admitindo implicitamente que o *enésimo* número é da forma ar + b.

4. O DESENHO, A IMPLEMENTAÇÃO E A ANÁLISE DO PROCESSO VIVIDO

A análise dos dados, de natureza essencialmente descritiva e interpretativa, se deu ao longo do trabalho, sendo que eles foram produzidos a partir das transcrições de gravações em áudio e vídeo, registros (textos, desenhos, etc.) gerados pelos alunos durante as atividades e anotações realizadas por mim ao final de cada oficina (diário de campo). Para registrar os momentos nos quais as atividades foram implementadas, utilizei um gravador para cada grupo de alunos e uma filmadora.

A fase inicial do trabalho de implementação das oficinas consistiu na seleção/adaptação de atividades de investigação matemática. O professor Oziel e eu planejamos e decidimos quais atividades seriam aplicadas. Mais tarde, a professora Talita também passou a participar desse planejamento. O planejamento e escolha conjunta das oficinas, que serão detalhadas mais adiante, se fizeram necessários pelo fato de a participação do professor moderador ser considerada fundamental na condução das discussões coletivas, servindo como um 'andaime' para o pensamento dos estudantes (MATOS, 1999; FRADE e TATSIS, 2009).

Também Mariotti (2006) considera crucial o papel do professor em orientar e instigar o surgimento e a evolução dos significados. As análises das ações do professor realizadas no trabalho de Bartolini Bussi e Mariotti (2008) destacam, ainda, que o professor precisa por em prática ações específicas direcionadas não apenas à gestão do contrato didático na classe, mas também ações voltadas para a promoção do processo semiótico.

É importante ressaltar, no entanto, que as atividades planejadas para as primeiras investigações sofreram adaptações e mudanças, fato que determinou a decisão de qual tarefa investigativa implementar passasse a ser definida, uma a uma, ao longo do processo. No quadro 9, são sintetizadas as oficinas implementadas, os professores envolvidos e é apresentada, de forma concisa, a proposta de investigação de cada uma das oficinas, que aconteceram em aulas geminadas (seguidas) de 50 minutos cada, totalizando 15 horas de trabalho.

	Data	Professores envolvidos	Título	Proposta de investigação
1ª fase	16/04/2010	Adriana Oziel	Dobragens e cortes	Construção de triângulos equiláteros, escalenos e isósceles a partir de cortes em uma folha dobrada.
	07/05/2010	Adriana Oziel	A Corrida a '20'!	Descoberta de estratégias de sempre ganhar o jogo (através de previsões utilizando os conceitos de soma controlada, sequências, divisão e resto).
	19/05/2010	Adriana Oziel	Atividades no Geoplano I	Exploração de formas (e fórmulas) de se calcular a área de figuras desenhadas em uma malha quadriculada (figuras que possuem quadradinhos inteiros em sua composição).
	11/06/2010	Adriana Oziel	Atividades no Geoplano II (Parte 1)	Exploração de formas (e fórmulas) de se calcular a área de figuras desenhadas em uma malha quadriculada (figuras que possuem quadradinhos inteiros e metade de quadradinhos em sua composição).
			Atividades no Geoplano II (Parte 2)	Exploração de formas de se calcular a área de figuras desenhadas em uma malha quadriculada (a partir da composição e decomposição em outras figuras de área conhecida).
	30/06/2010	Adriana	Atividades no Geoplano III (Parte 1)	Construção de retângulos de maior área dado perímetro.
	14/07/2010	Adriana	Atividades no Geoplano III (Parte 2)	Construção de retângulos de maior perímetro dada a área.
2ª fase	17/09/2010	Adriana Talita	Sequências: introdução à Álgebra	Descoberta do enésimo termo de uma dada sequência.
			Tarefa Investigativa I: *Sequencias de Bolinhas e suas Formas*	Descoberta do enésimo termo de uma dada sequência.
	06/10/2010	Adriana Talita	Tarefa Investigativa 2: *Álgebra em festa de casamento?*	Descoberta do enésimo termo de uma dada sequência.
	10/11/2010	Adriana Talita	Oficina de Álgebra	Dado o número dito e o número respondido (ou o número que entra e o que sai da 'máquina mágica'), estabelecimento da regra (uma frase e uma expressão algébrica) para se chegar ao número respondido (ou que sai).
			Tarefa Investigativa 3: *A Máquina Mágica*	

QUADRO 9 - Tarefas investigativas implementadas e professores envolvidos

Para relatar o trabalho de produção e análise de dados, apresento a pesquisa subdividindo-a em duas fases:

PRIMEIRA FASE

A primeira fase da pesquisa compreendeu as seis primeiras oficinas realizadas no primeiro semestre de 2010. As atividades exploratório-investigativas foram desenvolvidas, em um primeiro momento, pelo professor Oziel e por mim (as quatro primeiras), tendo como sujeitos toda a turma do 7º ano B (32 alunos) e, em um segundo momento, apenas por mim (as duas últimas da primeira fase), tendo como sujeitos 15 alunos (nove meninos e seis meninas).

Na primeira oficina, pedi ao professor Oziel que filmasse o trabalho dos grupos. Com a câmera em punho, ele interrompia e retomava a filmagem, conforme achava conveniente, fazendo o mínimo de intervenções possível. Ao analisar essa filmagem, decidi, como pesquisadora, que seria mais adequado que eu realizasse esse trabalho, afinal, o pesquisador produz seus dados a partir das escolhas que faz. A opção de eu mesma realizar a filmagem foi também determinada pelo fato de a gravação em vídeo ter se mostrado muito mais adequada, já que a transcrição do áudio estava sendo extremamente difícil. Como os grupos se encontravam muito próximos, a gravação de um deles sofria interferência das discussões de outros, sem contar o fato de ainda não conhecer a voz dos alunos, o que tornava difícil, quando não impossível, identificar quem se manifestava verbalmente.

Ainda com dificuldades em assumir meu duplo papel, preocupada em encorajar discussões interessantes e, ao mesmo tempo, lidar com a agitação que a turma apresentava, não consegui me ver também realizando o trabalho de filmagem. Experimentei, portanto, na segunda oficina, fixar a câmera em um tripé sobre a mesa do professor, virada em direção à diagonal da sala. Pedi ao professor Oziel que me ajudasse a moderar o trabalho dos grupos e ele assim o fez. Apenas quando a oficina estava quase no final, fiz a opção de percorrer os grupos com a câmera em punho, numa tentativa de registrar as conclusões encontradas. A filmagem da oficina como um todo é bastante interessante para se observar a dinâmica da turma. No entanto, perdem-se as discussões realizadas por cada grupo e passa-se a contar apenas com os registros em áudio.

Apesar da grande quantidade de registros de áudio produzidos a cada oficina (um total de oito gravadores registrando aproximadamente uma hora cada, perfazendo um total de oito horas de gravação por oficina), pouco se revertia desse conjunto, em dados relevantes para a pesquisa.

Como pude comprovar, pelas transcrições realizadas quase imediatamente após as oficinas, os registros em áudio apresentaram longos trechos em que os grupos discutiam outros assuntos. Muito provavelmente, pela falta de hábito em realizar investigações autonomamente, os grupos esperavam a chegada de um dos professores para se dedicar à questão proposta. Só então, na maioria dos grupos, a discussão acontecia ou parecia ganhar mais fôlego. A partir desse fato, concluí que seria mais produtivo filmar com a câmera em punho, registrando o momento em que minha intervenção se dava em cada grupo, o que passei a fazer da terceira oficina em diante.

O trabalho, durante as quatro primeiras oficinas, foi muito difícil de ser realizado, principalmente devido ao fato de vários alunos se portarem de forma extremamente indisciplinada. Em contrapartida, era empolgante, tanto como professora, quanto pesquisadora, ver que, em vários grupos, o interesse pelas investigações crescia a cada dia. Sentia-me, como professora, em dívida com os grupos que demonstravam interesse, avaliando que, se tivesse mais tempo para me dedicar a eles, com certeza, desenvolveriam muito mais. A exiguidade de tempo fazia com que me sentisse frustrada, já que as discussões acabavam não tendo o aprofundamento necessário para a realização da pesquisa.

Diante de tal cenário, o professor Oziel e eu avaliamos que algo precisava mudar. Por sugestão dele, decidimos que, nas oficinas seguintes, trabalharia apenas com os grupos que apresentavam interesse, em um espaço fora da sala de aula. Esclareço que os grupos desmotivados/apáticos, segundo o professor Oziel, se comportavam da mesma forma quando a aula acontecia nos moldes tradicionais. Nesse caso, apenas era mais fácil manter a disciplina, já que as atividades propostas em tais aulas requeriam menor interação e tinham caráter menos aberto do que as atividades exploratório-investigativas.

A quinta e a sexta oficinas, portanto, foram desenvolvidas apenas com a metade da turma. Nessas oficinas, sem a participação do professor Oziel, senti o 'peso' de tentar corresponder ao interesse que os grupos demonstravam. Apesar de o trabalho ter se tornado muito mais produtivo, afinal, estava com os alunos que queriam participar das oficinas, a dificuldade em atender os grupos continuou. Um dos grupos necessitava de atendimento individualizado, mas não podia me dedicar somente a eles. Assim, ao final de cada oficina, a sensação era de não ter cumprido meu papel de professora com aquele grupo que queria e não conseguia evoluir. Por vezes, como pesquisadora, avaliei se seria melhor recomeçar as oficinas com outro grupo de alunos, mas decidi não abandonar o trabalho realizado, afinal, era justamente essa trajetória que tinha me proposto a investigar.

AS ATIVIDADES EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS IMPLEMENTADAS NA 1ª FASE

A primeira oficina, 'Dobragens e Cortes', extraída do livro *Investigações Matemáticas na Sala de Aula* (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006, p. 72-74), tinha sido implementada por mim, em um projeto-piloto, em cinco turmas do 9º ano (antiga 8ª série), em uma escola da rede municipal de ensino de Belo Horizonte, onde lecionei no ano de 2009. Como os alunos conseguiram realizar um trabalho muito interessante a partir dessa investigação, foi a primeira que quis implementar.

Transcrevo-a no quadro 10, a seguir:

Dobragens e Cortes

Por certo que na sua infância, na escola ou com amigos, você se entreteve fazendo cortes em papel e brincando com os desenhos que obtinha.
Para explorar essa tarefa, vai precisar de uma tesoura e de muito papel!

A – Uma dobragem e dois cortes

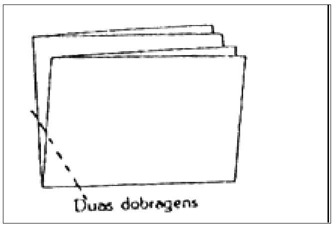
1 . Numa folha de papel dobrada ao meio, corte triângulos equiláteros, isósceles e escalenos. Pegue nos pedaços de papel que obteve, desdobre-os e diga quais as formas geométricas que têm.

2. Com apenas dois cortes, e, se quiser obter triângulos equiláteros, isósceles e escalenos na folha de papel, que cortes deve fazer? Desenhe o esboço que mostre os cortes que fez e comente as suas descobertas.

B - Mais dobragens e um só corte

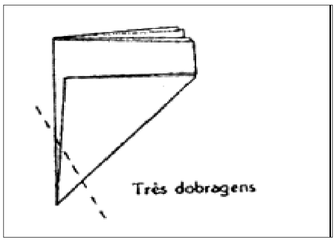
Vai agora investigar o que acontece quando faz mais do que uma dobragem mantendo ajustados os lados da folha de papel.

1. Com duas dobragens e um corte, que tipo de figura obtém?



De que maneira consegue obter um quadrado?

2. Agora com três dobragens, como mostra a figura que se segue, experimente fazer a mesma investigação.



De que maneira consegue obter um quadrado?

3. E com quatro dobragens?

Preencha a tabela que relaciona o número de dobragens com o número máximo de lados da figura que se pode obter fazendo-se apenas um corte:

nº de dobragens	nº máximo de lados

QUADRO 10 - Atividade 'Dobragens e Cortes'

Contrariando minhas expectativas, os alunos do 7º ano B apresentaram, com exceção de um grupo, grandes dificuldades em realizar a investigação e se mostraram muito frustrados por não serem prontamente atendidos e, principalmente, por não receberem, por parte dos professores, respostas diretas para as perguntas formuladas por eles.

Só foi possível realizar o trabalho com o item A da oficina. O item B poderia ter sido desenvolvido em oficinas seguintes, mas, como a oficina não despertou o interesse da maioria dos alunos para o trabalho com investigações, o professor Oziel e eu optamos por algo menos complexo para a segunda investigação.

A seguir, transcrevo trechos de um e-mail enviado ao professor Oziel que demonstra o impasse, após a primeira oficina, que acabou por determinar a não implementação do item B e a exclusão da investigação previamente selecionada para a segunda oficina[47].

> (...) transcrevi a gravação do grupo da Laura[48] (Laura, Lavínia e Gisele) e fiquei muito preocupada...
>
> Acho que deveria ter dito aos meninos que a atividade era algo diferente, que o objetivo era eles descobrirem sozinhos, etc...
>
> A Laura ficou muito chateada porque não conseguiu fazer o corte para obter triângulo escaleno. Claro, não é possível mesmo!
>
> Só que ela ficou angustiada achando que ela é que não estava conseguindo fazer! Ela precisava só de um 'isso mesmo, você descobriu que não tem jeito'! No final da gravação ela fala (para o gravador) que ela quer sair, que essa pesquisa é uma droga, que eu sou uma chata, etc...
>
> (...)Tô te escrevendo só pra te preparar para as reclamações! Temos que implementar uma atividade mais fácil na próxima oficina (Adriana 19/04/2010).

O professor Oziel sugeriu o trabalho com o jogo *Corrida a '20'* que consiste de um tabuleiro com casas numeradas de 1 a 20 (Figura 8). A regra do jogo é a seguinte: na sua vez, cada jogador avança uma ou duas casas e marca sua posição com um pino. Ganha o que chegar primeiro à casa 20. A escolha de quem irá começar o jogo fica a critério dos participantes. A investigação proposta trata de descobrir estratégias para sempre ganhar o jogo.

FIGURA 8 - O jogo Corrida a '20' utilizado na oficina 2

[47] Tratava-se de uma investigação chamada 'Triângulos internos', a qual tinha como objetivo investigar as dimensões de várias figuras construídas em uma malha triangular e o número de triângulos internos que continham (MORGAN, 2006).

[48] Os nomes dos alunos citados nesta tese são fictícios.

> Estou enviando a sugestão de jogo que te falei (...) Espero que possa ajudar (Oziel 25/04/2010).
>
> Respondi: achei o jogo corrida a 20 muito interessante (...) tinha mesmo que fechar a primeira oficina pedindo aos grupos que discutissem os resultados que encontraram, mas receio que, como a agitação dos meninos é grande, eles não tenham paciência para ficar entendendo o que erraram...
>
> Avaliei que a próxima oficina PRECISA ser algo que eles achem interessante, que queiram fazer! Eu prometi ao menininho da B (Paulo), que disse que queria sair, que a próxima atividade seria legal! Isso sem falar na Laura... Preciso 'conquistar' esses meninos porque não há como pesquisar uma turma que não queira participar... (Adriana 26/04/2010, caixa alta como escrita no e-mail).

O trabalho realizado com o jogo Corrida a '20' pareceu, de fato, agradar muito mais aos alunos e eles se mostraram menos frustrados e mais envolvidos com a atividade.

Para a terceira oficina, escolhemos o trabalho com o Geoplano[49](Figura 9).

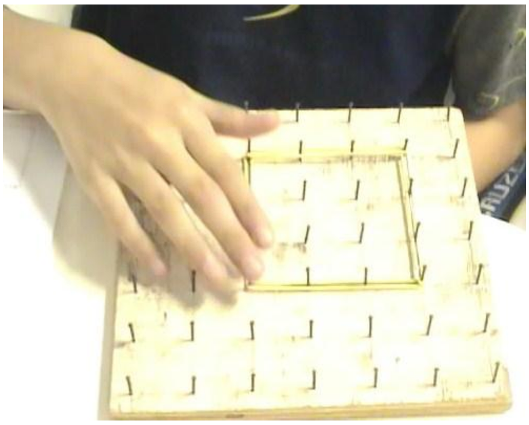


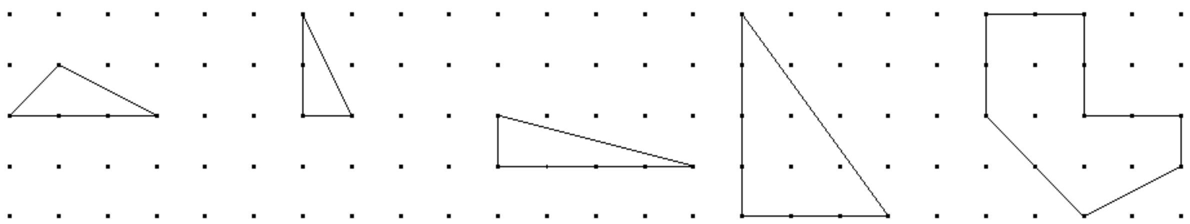
FIGURA 9 - Geoplano utilizado nas oficinas 3 a 6

O trabalho com o Geoplano foi planejado, inicialmente, para duas oficinas, mas, como o aprofundamento dado pelos alunos aconteceu em um ritmo diferente do esperado, foram necessárias quatro oficinas. Tais momentos foram dedicados à investigação de questões relacionadas ao cálculo de áreas, de perímetros e da relação estabelecida entre essas duas grandezas. Segue um exemplo de um fragmento da tarefa proposta na 4ª oficina (ROCHA, PESSOA, PEREIRA e SILVA FILHO, 2007), no quadro 11, a seguir:

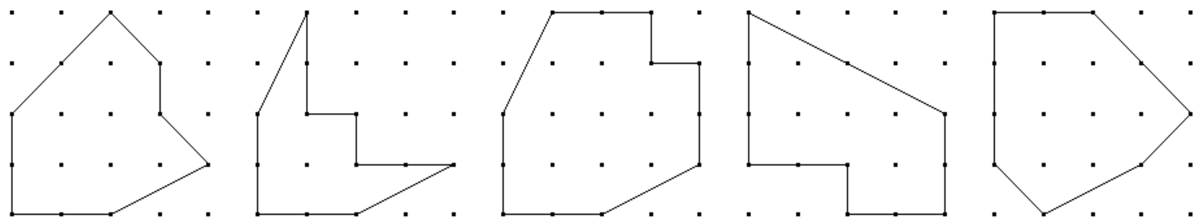
49 Há diversos tipos de Geoplano. O mais comum é feito com uma placa de madeira e pregos presos dispostos de modo a formarem uma malha quadriculada ou de outro tipo. São utilizados elásticos de várias cores, que permitem uma fácil manipulação e criação de várias formas geométricas, possibilitando a exploração e/ou construção de vários conceitos matemáticos, principalmente relacionados ao cálculo de áreas e perímetros.

ATIVIDADES NO GEOPLANO II

1) Reproduza cada uma das figuras abaixo no Geoplano.



1 2 3 4 5



6 7 8 9 1

Agora um desafio!
Como você faria para calcular a área de cada uma dessas figuras?
Descubra e complete a tabela abaixo.

Figura	Área
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Escolha pelo menos 2 figuras e explique, **detalhadamente**, como você fez para descobrir. Sugestão: faça desenhos.

QUADRO 11 - Exemplo de atividade com o Geoplano

SEGUNDA FASE

A segunda fase da pesquisa compreendeu as três últimas oficinas e foram implementadas por mim e pela professora Talita com um grupo de 15 alunos (nove meninos e seis meninas). Agora com um número menor de alunos e, com a colaboração dessa professora, o trabalho finalmente aconteceu como esperado. A professora Talita se envolveu no trabalho de todos os grupos, mas se dedicou principalmente a um grupo de quatro meninos que apresentava maior dificuldade. Continuei filmando as intervenções feitas por mim, mas, a partir da transcrição de áudio (tarefa que se tornou mais fácil, já que eu começava a reconhecer a voz dos alunos e os grupos podiam se manter mais afastados uns dos outros), consegui obter o registro das intervenções realizadas pela professora Talita.

Fiquei emocionada ao perceber o quanto o grupo que apresentava dificuldades, com maior disponibilidade de interlocução e tempo, conseguiu caminhar. Ainda que muitas vezes não conseguissem aprofundar nas discussões, o fato de perceber que chegavam às conclusões como os outros grupos, fez com que esses alunos se sentissem orgulhosos de si mesmos. O e-mail seguinte, de 27/09/2010, ilustra essa questão:

> Transcrevi a gravação de um dos grupos (Paulo, Marcelo, Valter e Vanderlei) e fiquei muito feliz! Suas intervenções foram ótimas e ajudaram muito os meninos! O interessante é que quando fui corrigir as folhas do grupo que se considera bom (David, Ernane, Luciano e Guilherme) descobri que eles erraram várias coisas que 'seus' meninos acertaram! (Adriana).
>
> Estou muito feliz em saber que minhas intervenções foram boas...Vou olhar as atividades, estou curiosa para ver como vai ser o desempenho dos meninos (Talita).

AS ATIVIDADES EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS IMPLEMENTADAS NA SEGUNDA FASE

As oficinas da segunda fase da pesquisa foram dedicadas ao trabalho com padrões, tendo como objetivo fazer os alunos sentirem necessidade de utilizar uma letra como variável para representar o enésimo termo (Introdução à Álgebra – oficina 7). Numa etapa inicial dessa fase, foi pedido aos alunos que descobrissem 'a regra' de diversas sequências dadas. Essa atividade foi adaptada do livro *Álgebra: das variáveis às equações*, de Eliane Reame de Souza e Maria Ignez de Souza Vieira Diniz, e será detalhada no capítulo IV. Concomitante a essa atividade, foi desenvolvida a primeira tarefa investigativa 'Sequência de bolinhas e suas formas' (Anexo 1).

Nas duas oficinas seguintes, foram propostas aos alunos as tarefas investigativas: 'Álgebra em festa de casamento?' (Oficina 8 – discutida no capítulo V) e 'A máquina mágica' (Oficina 9 – Anexo 2). No início da última oficina, foi desenvolvida também uma atividade (Anexo 3), sugerida pela professora Talita, cuja proposta era encontrar uma regra (que deveria ser expressa na forma de uma frase e de expressão algébrica) dado um número dito e um número respondido. A professora Talita disse adorar o trabalho com esse tipo de atividade e relatou que já tinha trabalhado, em outra escola, com atividades como essas.

5. ESTRATÉGIAS DE PRODUÇÃO, ORGANIZAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Depois que os dados foram produzidos, de abril a novembro de 2010, iniciou-se a fase de organização e análise dos mesmos. Embora uma análise preliminar[50] tenha acontecido ao longo de todo o processo, com o objetivo de orientar o trajeto das atividades, a análise mais sistemática se deu a partir de fevereiro de 2011.

Nesse momento, devido ao excesso de dados, tomei a decisão de analisar apenas aqueles produzidos na segunda fase da pesquisa, devido à familiaridade dos alunos com o tipo de atividade desenvolvida, com a minha presença, com a presença da filmadora e, principalmente, pelo fato de contar com a colaboração da professora Talita.

Outro fator decisivo foi o fato de que, nas três últimas oficinas, serem tratados o tema padrões, englobando sequências, relações entre grandezas e funções. Tendo sido delimitado um único tema, busquei na literatura outras pesquisas que se dedicavam a estratégias que os alunos utilizavam no trabalho com padrões, para dar suporte à análise de dados.

Durante o processo de análise, tive de efetuar mais um recorte. Ao analisar os grupos que participaram das atividades, um deles, composto por quatro meninos, apresentou interações mais ricas na discussão entre os pares, com mais argumentos e com dúvidas sendo explicitadas e debatidas. Por ser o grupo que apresentava maior dificuldade e, principalmente, por não desistir diante delas, optei por me dedicar a analisar apenas ele.

[50] Ao final de cada oficina, fiz anotações acerca do trabalho desenvolvido (diário de campo) e analisei a filmagem, a gravação em áudio e os registros escritos produzidos pelos grupos, mas, nesse momento, a análise assumiu, predominantemente, o papel de respaldar a tomada de decisão quanto à próxima oficina a ser implementada, funcionando mais como parte da prática pedagógica do que como procedimento de pesquisa.

Esse recorte acabou me levando a outros. O grupo supracitado desenvolveu as atividades iniciais de 'Sequências: introdução à Álgebra', mas não realizou, por falta de tempo[51], a primeira tarefa investigativa – 'Sequências de bolinhas e suas formas' (Anexo 1). Sendo assim, nesta investigação, serão analisadas a atividade inicial de sequências (Capítulo IV) e a segunda tarefa investigativa – 'Álgebra em festa de casamento?' (Capítulo V). Não tratarei da última tarefa investigativa, 'A máquina mágica' (Anexo 2), pelo fato de sua análise explicitar aspectos já desvelados pelas atividades anteriores.

O MODELO DO EOS: FERRAMENTAS TEÓRICAS UTILIZADAS

Para organizar e analisar os dados obtidos na segunda fase da pesquisa, utilizo os cinco níveis de análise propostos pelo EOS. A ferramenta teórica, *Configuração de objetos e significados* (Figura 10), introduzida em Godino, Batanero e Font (2007), foi usada como recurso para identificar os objetos (elementos linguísticos, definições/conceitos, proposições/propriedades e argumentos) mobilizados nas práticas matemáticas de cada atividade exploratório-investigativa e para estruturá-los em uma configuração epistêmica.

A figura 10 permite-nos uma visão da rede de relações estabelecida entre os objetos matemáticos. Dada uma situação problema, espera-se que tal situação mobilize (seta para baixo na parte superior da figura) procedimentos, proposições/propriedades, definições (conceitos) que possam solucioná-la (seta para cima na parte superior da figura). Os supracitados objetos mobilizados são regulados pela linguagem (seta para esquerda) que, por sua vez, permite expressá-los (seta para direita). Os argumentos utilizados para justificar (seta para cima na parte inferior da figura) os procedimentos, proposições/propriedades e definições são, ao mesmo tempo, condicionados por eles (seta para baixo na parte inferior da figura).

---

[51] Este grupo, em especial, apresentou grandes dificuldades na resolução da atividade e imprimiu um ritmo lento à resolução da tarefa proposta.

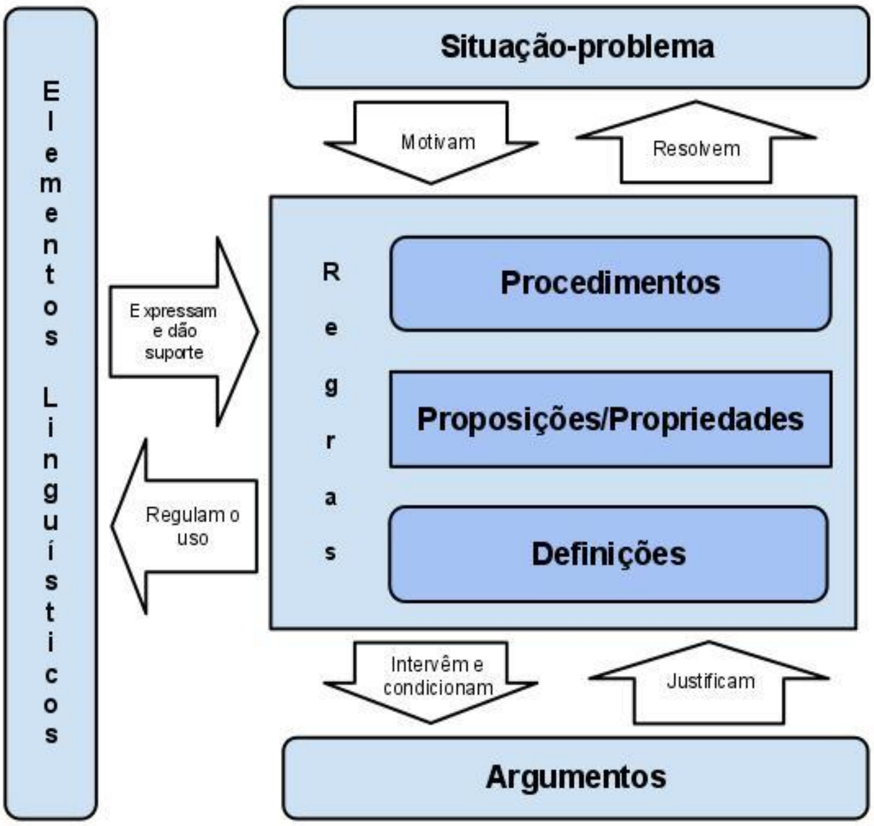


FIGURA 10 - Configuração de objetos e significados[52]

A configuração epistêmica é útil para planejar o trabalho[53] a ser desenvolvido e, posteriormente, servir de parâmetro para analisar o trabalho realizado. O primeiro passo consistiu, portanto, em identificar os objetos matemáticos (prévios e emergentes) que supostamente seriam mobilizados pelos alunos, quando realizassem a atividade. Por exemplo, identifiquei que x e y eram conceitos que os alunos já tinham como prévios e que provavelmente os conceitos z e w emergiriam no desenvolvimento da atividade. Também analisei as soluções esperadas para a tarefa e identifiquei os *conflitos potenciais* que poderiam surgir durante a resolução da mesma.

Em um segundo momento, organizei os dados (por oficina)[54], em c*onfigurações didáticas empíricas*. Isto é, explicitei, nas *práticas matemáticas* mobilizadas, os atos e processos de significação que surgiram a partir e através das interações didáticas estabelecidas

---

52 Idem nota 25.

53 A configuração epistêmica, neste trabalho, foi, de maneira não ideal, elaborada posteriormente à implementação das atividades exploratório-investigativas.

54 As falas transcritas na oficina 'Introdução à Álgebra' (Capítulo IV) foram numeradas de 1 a 724 e as referentes à oficina 'Álgebra em festa de casamento' (Capítulo V) de 1 a 473. Quando faço referência a esses extratos, é indicado, entre colchetes, o turno correspondente.

entre os alunos e entre os alunos e as professoras no desenvolvimento da atividade (Nível 1). A seguir, construí a *configuração epistêmica implementada*, procurando identificar os objetos e processos matemáticos que possibilitaram as práticas citadas (Nível 2). Passei, então, a delinear as *trajetórias didáticas*, descrevendo, separadamente, as trajetórias docentes, discentes e cognitivo-afetivas, e mediacionais (Nível 3). Tais trajetórias nos permitem explorar os aspectos que constituem/condicionam a produção de significados, tais como a influência do tipo de interação; os estados afetivos (atitudes, emoções, afetos, motivações) e a materialidade. A explicitação das *normas e metanormas* (Nível 4) foi obtida a partir da análise de todos os níveis anteriores, já que elas regulam as interações e dão formato à participação de professoras e alunos. Finalmente, determinei, analisando as características que cada adequação precisa apresentar para ser considerada alta (Quadro 1), a *adequação didática* do processo vivido em cada uma das oficinas (Nível 5).

O trabalho de análise realizado no capítulo V foi apresentado em um seminário, para o grupo de investigação *Teoría de la Educación Matemática*, do Programa de Doutorado em Educação da Universidade de Granada (Espanha), no primeiro semestre de 2011. Esse grupo debateu os dados/análises, a partir da aplicação dos cinco níveis de análise propostos pelo EOS, e suas contribuições foram incorporadas à análise. Dessa forma se deu a validação da análise aqui realizada.

CAPÍTULO IV

SEQUÊNCIAS: INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA

1. DESENHO DA TAREFA

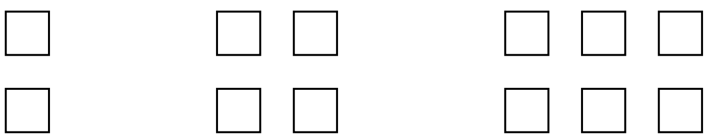
As atividades[55] que se seguem (Quadros 12, 13 e 14) tratam de sequências de padrão geométrico e têm como objetivo dar oportunidade aos alunos de, a partir da determinação do próximo termo e, em seguida, de termos mais distantes, construir uma expressão algébrica para cada sequência dada.

A disposição e o número de quadradinhos (ou bolinhas) de determinada figura da sequência admitem apenas uma resposta correta; no entanto, a regra de formação da sequência admite várias possibilidades, o que propicia a exploração e a investigação (ainda que em um formato inicial). No decorrer desta oficina, esperava-se que os alunos percebessem que as operações aritméticas não são suficientes para resolver a tarefa e sentissem necessidade de utilizar 'palavras' e, posteriormente, símbolos para representar as variáveis, expressando-as na forma de uma expressão matemática.

As atividades 2 e 3 apresentam maior grau de dificuldade, já que exigem que os alunos relacionem o número de bolinhas de cada figura com a respectiva posição que ocupam na sequência. Esperava-se, portanto, que também a ideia de relação/variação entre grandezas fosse explorada/desenvolvida pelos alunos, a partir dessas atividades.

ATIVIDADE 1

Observe a sequência de figuras abaixo:



a) Qual a próxima figura da sequência? Desenhe.
b) E a seguinte? Desenhe.
c) Escreva a regra de formação dessa sequência.
d) Observando a sequência, quantos quadradinhos tem cada figura?
e) Quantos quadradinhos tem a 6ª figura da sequência?
f) E a 7ª? E a 8ª? E a 15ª?

QUADRO 12 - Oficina de introdução à Álgebra - Atividade 1

[55] Essa tarefa foi extraída de Souza e Diniz (2003, p. 24, 27 e 29).

SOLUÇÕES ESPERADAS

Para os itens *a* e *b*, os alunos deveriam desenhar, respectivamente, as figuras a seguir (Figura11):

FIGURA 11 - Solução esperada para os itens *a* e *b* da atividade 1.

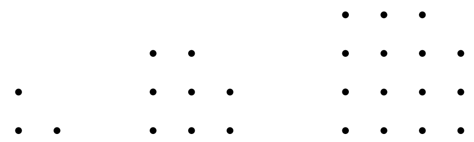
No item *c*, esperava-se que os alunos descobrissem uma maneira de explicar como cada figura da sequência se transforma na figura seguinte. Uma possibilidade é considerar que cada figura é composta pelo número de quadradinhos da figura anterior acrescido de mais dois quadradinhos.

No item *d*, os alunos deveriam relacionar a posição de cada figura com o número total de quadradinhos, ou seja: posição um (p1), dois quadradinhos; p2, quatro quadradinhos; p3, seis quadradinhos; e assim por diante. Esperava-se que essa tarefa levasse os alunos a buscarem expressões que pudessem determinar um termo qualquer da sequência (por exemplo: 'duas vezes a posição', 2.p, 2.*x*, etc.).

Para responder os itens *e* e *f*, os alunos poderiam desenhar as próximas figuras da sequência até a posição desejada (ou compor as figuras utilizando material concreto, como no caso desta investigação) e contar o número de quadradinhos existentes, ou utilizar a expressão formulada, se esse for o caso, nos itens *c* ou *d*. De qualquer forma, esperava-se que encontrassem 12 quadradinhos, como resposta para o item *e*; e 14, 16 e 30 quadradinhos como respostas para o item *f*.

<u>ATIVIDADE 2</u>

Observe as figuras abaixo:



a) Continuando a sequência acima, qual a próxima figura? Desenhe.
b) E a seguinte? Desenhe.
c) Quantos pontos tem a 5ª figura?
d) E a 6ª figura?
e) Quantos pontos tem uma figura numa posição qualquer?

QUADRO 13 - Oficina de introdução à Álgebra - Atividade 2

SOLUÇÕES ESPERADAS

Nos itens *a* e *b*, os alunos deveriam desenhar, respectivamente, as seguintes figuras (Figura 12):

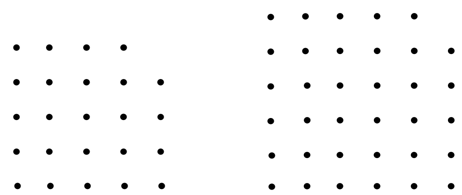
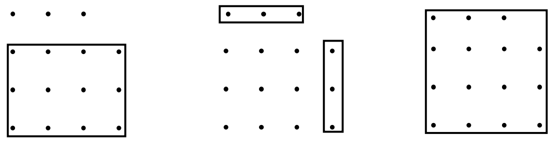


FIGURA 12 - Solução esperada para os itens *a* e *b* da atividade 2.

Nos itens *c* e *d*, os alunos poderiam construir as figuras com material concreto até a posição desejada e contar o número de bolinhas. Responderiam, assim, respectivamente, 24 e 36 bolinhas.

No item *e*, esperava-se que os alunos conseguissem relacionar a quantidade de bolinhas de cada figura com a posição que ela ocupa na sequência, por exemplo, decompondo uma dada figura em subfiguras, como exemplificado adiante (Figura 13):

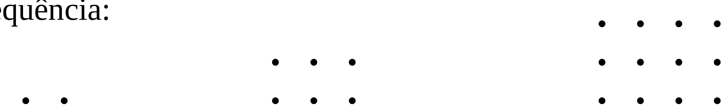


$p.(p+1) + p$ $\quad$ $p^2 + 2p$ $\quad$ $(p+1)^2 - 1$

FIGURA 13 - Possíveis soluções para o item *e* da atividade 2.

ATIVIDADE 3

Observe a sequência:



a) Qual a próxima figura dessa sequência? Desenhe.
b) E a seguinte? Desenhe.
c) Como cada figura se transforma na seguinte?
d) Quantos pontos tem a 6ª figura?
e) Qual a 10ª figura? Ela tem quantos pontos?
f) Quanto pontos tem uma figura numa posição qualquer?

QUADRO 14 - Oficina de introdução à Álgebra - Atividade 3

SOLUÇÕES ESPERADAS

As respostas para os itens *a* e *b* constam, respectivamente, dos desenhos da figura 14:

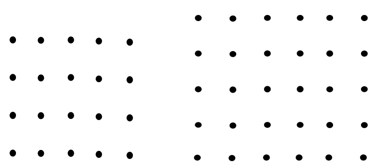


FIGURA 14 - Solução esperada para os itens *a* e *b* da atividade 3

O item *c* pode ser respondido de várias maneiras. Uma possibilidade seria: 'acrescentam-se uma bolinha na base e outra na largura da figura anterior e, em seguida, acrescentam-se bolinhas de modo a completar a figura em formato de retângulo'.

A resposta do item *d* pode ser obtida recursivamente a partir da 5ª figura, utilizando-se, por exemplo, o procedimento indicado no item *c*. São obtidas, assim, 42 bolinhas na 6ª posição.

O item *e* consiste numa tentativa de levar à generalização, já que obter a 10ª figura pelo procedimento recursivo tornar-se-ia cansativo. Esperava-se, portanto, que os alunos tentassem estabelecer uma regra que pudesse determinar a quantidade de bolinhas em dada posição, por exemplo, 'multiplicar a lateral pela base da figura, considerando-se que o número de bolinhas da lateral é equivalente à posição e a base uma bolinha a mais do que a posição correspondente'. Outra possibilidade seria decompor a figura em outras subfiguras. No caso dessa atividade, os alunos poderiam decompor a figura em uma subfigura no formato de um quadrado e considerar que o número de pontos restantes equivale à posição a que a figura se refere. A resposta para esse item seria 110 bolinhas. A figura 15 exemplifica essa decomposição para a 4ª posição da sequência.

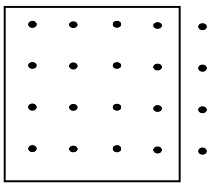


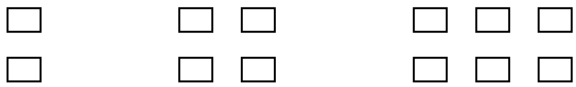
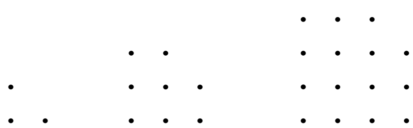
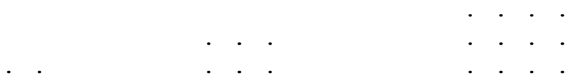
FIGURA 15 - Possível solução para o item *e* da atividade 3

No item *f*, esperava-se que os alunos generalizassem as soluções encontradas no item *e* e obtivessem expressões como p.(p + 1) ou p^2 + p.

2. ANÁLISE DOS CONHECIMENTOS PRETENDIDOS DE SEREM MOBILIZADOS

ELABORAÇÃO DAS CONFIGURAÇÕES EPISTÊMICAS

Nesse tópico, são identificados os tipos de objetos e os correspondentes significados epistêmicos (processos de *significação*) envolvidos na tarefa investigativa proposta, visando criar uma configuração de referência para, posteriormente, auxiliar na análise da configuração epistêmica implementada. Importante ressaltar que se trata apenas de um parâmetro, não se podendo esperar que abarque todas as possibilidades. A seguir, descrevo cada objeto e seus correspondentes significados, conforme a seguinte tipologia: *elementos linguísticos*, *conceitos/definições*, *propriedades/proposições*, *procedimentos* e *argumentos* (Quadros 15 a 19).

ELEMENTOS LINGUÍSTICOS	
OBJETOS	SIGNIFICADOS
Atividade 1	
Prévios	
	Indica, de maneira icônica, a sequência de padrão geométrico.
'Escreva a *regra de formação* dessa sequência'.	'Lei' que permite determinar o próximo termo de uma sequência.
Emergentes	
Explicitação da relação entre as grandezas envolvidas.	$2 . p$
Atividade 2	
Prévios	
	Indica, de maneira icônica, a sequência de padrão geométrico.
Quantos pontos tem uma figura numa *posição qualquer*?	Enésima posição.
Emergentes	
Explicitação da relação entre as grandezas envolvidas.	$(p+1)^2-1$ $p.(p+1)+p$ p^2+2p
Atividade 3	
Prévios	
	Indica, de maneira icônica, a sequência de padrão geométrico.
Como cada figura '*se transforma*' na seguinte?	Requisita a regra de formação da sequência.
Emergentes	
Explicitação da relação entre as grandezas envolvidas.	$p.(p +1)$ $p^2 + p$

QUADRO 15 – Configuração epistêmica da oficina 7: elementos linguísticos

Conflitos potenciais:

- ✓ Expressões incorretas ou parcialmente escritas para a expressão que relaciona as grandezas.

CONCEITOS/DEFINIÇÕES	
OBJETOS	SIGNIFICADOS
Prévios	
Expressão matemática	Combinação de números, letras, símbolos e operadores agrupados de forma significativa.
Emergentes	
Sequência matemática	Lista ordenada de números ou figuras, cuja ordem é definida por uma lei.
Grandeza	Relação numérica estabelecida com um objeto.
Variável	Símbolo que representa qualquer um dos elementos de um conjunto.
Variação entre grandezas	A relação/variação entre grandezas é obtida por meio do conceito de função. Estão implicitamente envolvidos, portanto, os conceitos de variável dependente e independente.

QUADRO 16 – Configuração epistêmica da oficina 7: conceitos

Conflitos potenciais:

- ✓ Os alunos podem não conseguir construir (ainda que se trate de uma primeira aproximação) os conceitos apresentados.

PROPRIEDADES/PROPOSIÇÕES	
OBJETOS	SIGNIFICADOS
Atividade 1	
Prévias	
12 quadradinhos 14, 16 e 30 quadradinhos	Soluções obtidas através de acréscimos de quadradinhos na última figura (procedimento recursivo) respectivamente para os itens *e* e *f*.
Emergentes	
P 1: 2 . p	Solução esperada para o item *c* da tarefa.
Atividade 2	
Prévias	
24 bolinhas 35 bolinhas	Soluções obtidas através de acréscimos de bolinhas na última figura (procedimento recursivo) respectivamente para os itens *c* e *d*.

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Emergentes	
P 2: $(p + 1)^2 - 1$ $p \cdot (p + 1) + p$ $p^2 + 2p$	Solução esperada para o item *e* da tarefa.
Atividade 3	
Prévias	
42 bolinhas 110 bolinhas	Soluções obtidas através de acréscimos de bolinhas na última figura (procedimento recursivo) respectivamente para os itens *d* e *e*.
Emergentes	
P3: $p \cdot (p + 1)$ $p^2 + p$	Solução esperada para o item *f* da tarefa.

QUADRO 17 – Configuração epistêmica da oficina 7: propriedades

Conflitos potenciais:

- ✓ Não determinar as proposições P 1, P2 e P3.

PROCEDIMENTOS	
OBJETOS	SIGNIFICADOS
Prévios	
Desenhar a próxima figura da sequência acrescentando mais quadradinhos (ou bolinhas) à figura anterior (uso recursivo).	Contagem do número de quadradinhos (ou bolinhas).
Emergentes	
Explorar as relações entre as grandezas envolvidas.	Usa-se para responder as perguntas propostas em cada uma das atividades.
Reconhecer a regularidade (por descoberta do padrão ou por decomposição da figura em subfiguras) de cada uma das sequências de modo a obter uma expressão matemática para o termo geral.	Proporciona a solução para as atividades propostas.

QUADRO 18 – Configuração epistêmica da oficina 7: procedimentos

Conflitos potenciais:

- ✓ Dificuldade em dar sentido para uma letra;
- ✓ Os alunos podem não descobrir a relação/variação entre grandezas;
- ✓ Dificuldades de generalização.

ARGUMENTOS	
OBJETOS	SIGNIFICADOS
Prévios	
Realização exaustiva de contagem do número de quadradinhos (ou bolinhas) por uso recursivo.	Proporciona uma solução ineficaz para a tarefa.
Emergentes	
Atividade 1	
A1: A sequência 1 apresenta duas 'fileiras' de quadradinhos. Em cada 'fileira', o número de quadradinhos é equivalente à posição da figura. Portanto, uma solução seria a 'posição vezes dois' (2 . p).	Uma das possíveis justificativas para a solução da tarefa.
Emergentes	
Atividade 2	
A2: Na segunda sequência, as figuras possuem a forma de um quadrado com uma bolinha a menos no vértice superior direito. Como a figura que ocupa a primeira posição tem duas bolinhas na base, o termo geral seria *posição mais um ao quadrado menos um*. $(p + 1)^2 - 1$.	Uma das possíveis justificativas para a solução da tarefa.
Emergentes	
Atividade 3	
A3: Na sequência 3, as figuras têm a forma de retângulos. Na altura, o número de bolinhas é equivalente à posição, e, na base, há uma bolinha a mais, se considerarmos a posição da figura. Portanto, o termo geral seria *posição vezes posição mais um.* p.(p + 1).	Uma das possíveis justificativas para a solução da tarefa.

QUADRO 19 – Configuração epistêmica da oficina 7: argumentos

Conflitos potenciais:

- ✓ Não formular corretamente os argumentos A1, A2 e A3 (ou similares).

3. IDENTIFICAÇÃO DE PRÁTICAS MATEMÁTICAS (NÍVEL 1)

O primeiro nível de análise do EOS pretende identificar as práticas matemáticas mobilizadas durante o desenvolvimento da oficina de sequências. Para tanto, a transcrição dessa oficina foi subdividida, como veremos mais adiante, em três episódios que denomino, em conformidade com o EOS, *Configurações Didáticas* (CD1, CD2 e CD3). Essas configurações referem-se, respectivamente, às atividades 1, 2 e 3. Também foram identificadas dezesseis *Subconfigurações Didáticas* (SCD1 a SCD16) delimitadas por momentos em que ocorreram mudanças nos padrões de interação.

A oficina de sequências foi implementada por mim e pela professora Talita, denominadas na transcrição respectivamente *Prof 1* e *Prof 2*[56], na classe 7º ano B, no segundo semestre de 2010. A classe de 15 alunos apresentava-se distribuída em mesas hexagonais dispostas pela sala. Os 14 alunos presentes nessa oficina se organizaram livremente em quatro grupos: grupo 1: cinco componentes (cinco meninas); grupo 2: quatro componentes (quatro meninos); grupo 3: quatro componentes (quatro meninos) e grupo 4: uma menina.

Foram distribuídas folhas de atividade individuais (Quadros 12 a 14) e, para cada grupo, um saquinho contendo tampinhas de garrafa *pet* (ou rolhas). Foi pedido a cada grupo que representasse cada uma das sequências utilizando tampinhas (ou rolhas) e buscasse uma forma de representar a sequência em uma posição qualquer (o *enésimo* termo). O registro, como orientado, foi feito individualmente após a discussão coletiva nos grupos.

O tempo previsto para essa oficina foi de 1 hora e 40 minutos (2 aulas geminadas de 50 minutos). Também foram utilizados, para discussão coletiva das respostas encontradas pelos grupos na atividade de sequências, os primeiros 30 minutos da oficina seguinte (v. capítulo V). Analiso, no total, os 97 minutos gravados em áudio (alguns trechos também em vídeo dos quais foram retiradas as fotos que utilizo neste capítulo) referentes ao trabalho realizado pelo *grupo 3*, composto por 4 meninos, sujeitos dessa pesquisa, que denomino, hipoteticamente, *Marcelo, Paulo, Vanderlei* e *Valter*.

ANÁLISE DOS ATOS E PROCESSOS DE SIGNIFICAÇÃO (ELABORAÇÃO DAS CONFIGURAÇÕES DIDÁTICAS EMPÍRICAS)

Para analisar as configurações didáticas identificadas, utilizo três tipos de configuração teórica descritos por Godino, Contreras e Font (2006), usando como critério o tipo de interação: *magistral, a-didática* e *dialógica*.

[56] Optei por essa nomenclatura, para facilitar a identificação das intervenções realizadas pelas professoras.

Os conflitos semióticos foram categorizados a partir dos três tipos de conflitos semióticos teóricos não excludentes propostos pelo EOS (GODINO, BATANERO e FONT, 2007): *epistêmico*, *cognitivo* e *interacional*.

CONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 1 (Atividade 1)

A primeira configuração didática organiza-se em torno da tarefa de descobrir a regra de formação da primeira sequência proposta (Quadro 12).

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 1 (relativa aos itens a, b e c)

Inicialmente, os alunos fazem, cada um em sua folha de atividades, desenhos representando o quarto e o quinto termo da sequência dada (letras *a* e *b* da tarefa). Pela gravação em áudio, é possível concluir que os alunos não utilizaram o material concreto nesse momento. Nenhum dos componentes do grupo demonstrou dificuldade com o procedimento de *generalização próxima* (itens *a* e *b* da atividade). O aluno Paulo, depois de responder as subtarefas *a* e *b*, passa ao item *d*. Logo após realizar a leitura em voz alta desse item, Paulo afirma não ter entendido o que está sendo pedido [5]. Enquanto isso, o aluno Marcelo lê em voz alta o item *c*, que requer a regra de formação da sequência [7]; ao que Paulo contesta, prontamente, como sendo de "dois em dois" [9]. O aluno Valter segue desenvolvendo a tarefa e lê em voz alta o item *d*. Paulo novamente explicita seu não entendimento [11] e Valter se limita a responder a questão [12], não explicando para Paulo do que se trata a pergunta.

> Paulo: Aí tem... 5. Tá, *d*. Observando a sequência, quantos quadrinhos tem em cada figura? (*lê em voz alta o item d*) Hã? Não entendi não![5]
>
> Paulo: E a seguinte? Desenhe. Tá, desenhei. [6]
>
> Marcelo: Escreva a regra de formação dessa sequência (*lê o item c*).[7]
>
> Marcelo: De... [8]
>
> Paulo: Dois em dois! Não entendi a outra não. [9]
>
> Valter: Observando a sequência, quantos quadradinhos tem em cada figura? (*lê novamente o item d*).[10]
>
> Paulo: Como assim? [11]
>
> Valter: 2, 4, 6, 8... (*voz gutural parecendo indicar que é óbvio*)[12]

Ao responder "2, 4, 6, 8..."[12], Valter parece associar ao primeiro termo da sequência o número de quadradinhos '2', ao segundo o número de quadradinhos '4', e assim sucessivamente. É justamente essa associação entre a posição e o número de quadradinhos que compõem cada figura que Paulo parece não perceber, como mostra o protocolo a seguir:

> Paulo: Tá, mas tá falando em cada! Não entendi não. Ô professora, vem cá! Ô Talita! Não, Talita... serve. Como assim, observando a sequência, quantos quadrinhos tem em cada figura? [13]

A primeira subconfiguração didática classifica-se como *a-didática*, tendo em vista que os alunos trabalham sem a interferência das professoras.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 2 (relativa ao item *d*)

Em outro momento, sentindo necessidade de esclarecer a questão proposta no item *d*, Paulo chama Prof 1 [13]. Percebe, no entanto, que ela não o atenderá prontamente (a referida professora atende outro grupo) e requisita a presença da Prof 2. Como essa é a primeira oficina em que a Prof 2 está presente, Paulo hesita ao chamá-la, mas logo reconhece que a Prof 2 também representa uma figura de autoridade [13].

A Prof 2, para se inteirar do que o grupo havia desenvolvido até o momento [15], pede aos alunos que representem a sequência utilizando o material concreto [17] e vai fazendo perguntas, requisitando justificativas [24, 27, 29, 31] e pedindo que determinem um termo mais afastado, com o objetivo de fazer com que os alunos descubram uma regra geral para a sequência (*generalização distante*) [34, 38, 40].

> Prof 2: Peraí. Primeiro... [15]
>
> Prof 2: Paulo, represente isso aqui, aqui pra mim... [17]
>
> Prof 2: Não, peraí, essa aí foi a... 3ª figura, não é? 3ª figura, deixa eu colocar mais juntinho (*refere-se aos pininhos utilizados*). Qual vai ser a próxima? [24]
>
> Paulo: De 8! [25]
>
> Valter: 6 + 2 (*fala simultânea à anterior*) [26]
>
> Prof 2: Por quê? [27]
>
> Paulo e Valter: Por que tá de 2 em 2. [28]
>
> Prof 2: Então, a próxima vai ser quanto? [29]
>
> Paulo e Valter: 8. [30]

Prof 2: E a outra? [31]

Marcelo e Valter: 10. [32]

Vanderlei: 12... [33]

Prof 2: E aí vai assim por diante, não é? Agora pensem da 1ª até, por exemplo, a 34ª. Vamos pensar no 34º desenho? [34]

Paulo: Hã, hã... (*concordando - tom de voz animado*)[35]

Prof 2: Vai, aqui começou com... [36]

Todos: 2... 4, 6, 8... [37]

Prof 2: Agora tem que tentar... pensar! [38]

Paulo: Vai dar... Vai dar 68. [39]

Prof 2: A 100ª figura vai ter quantos quadradinhos? [40]

Paulo: 200. [41]

Vanderlei: 120 (*fala simultânea à anterior*)[42]

Prof 2: Como é que você sabe? [43]

Prof 2: Vai ter 200... [44]

O aluno Valter afirma que basta que "você multiplique por 2" [45]. Ao questionar a resposta de Valter [47], a Prof 2 desconcerta os alunos Marcelo [49, 51] e Paulo [53]. Valter não se manifesta e Vanderlei reafirma sua resposta [48, 50]. Marcelo busca outra regra, afirmando agora que o que ocorre é que "você está acrescentando 2" [49] e afirma, em concordância com a nova regra, que a 100ª posição terá 102 quadradinhos [51] (parece considerar que a 99ª posição terá 100 quadradinhos e acrescenta 2). Paulo, que foi o primeiro a explicitar essa regularidade [9], reafirma o padrão explicitado por Marcelo de que uma figura da sequência se transforma na próxima acrescentando dois quadradinhos [55].

Valter: Você multiplica por 2... [45]

Marcelo: Porque 100 x 2 é 200. [46]

Prof 2: Eu tô multiplicando por 2 ou eu tô... ou é outra operação? [47]

Vanderlei: Não, é por causa que você bota... 2 x 1 = 2... [48]

Marcelo: Você está acrescentando 2. [49]

Vanderlei: 2 vezes o 1... [50]

Marcelo: Vai dar 102 (*fala simultânea à anterior*). [51]

Prof 2: A 1ª com 2, a 2ª com 4, a 3ª com... [52]

Paulo: Ah, é... Vai dar 102... [53]

Prof 2: Vai ser o que? A anterior... [54]

Paulo: Duas a mais que a anterior. [55]

A segunda subconfiguração didática classifica-se como *dialógica*, já que a exploração é realizada pelos alunos a partir do diálogo mediado pela Prof 2.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 3 (Atividade 1: relativa aos itens *d, e,* e *f*)

Apesar de Marcelo ter se equivocado, na subconfiguração anterior (SCD2), ao responder que o número de quadradinhos para a 100ª posição é 102, nesta subconfiguração, responde corretamente que o número de quadradinhos referentes à 6ª e a 7ª posição é, respectivamente, 12 e 14. Utiliza, inclusive, o procedimento de multiplicar a posição indicada por dois [62]. Paulo, no entanto, que considera correta a resposta 102 quadradinhos para a 100ª posição, não se convence [63, 72, 76, 78, 80] das respostas dadas por Marcelo ou Vanderlei para o item *f* da tarefa e se instala, nesse momento, um *conflito semiótico interacional* entre Marcelo e Paulo. Marcelo inclusive pede 'socorro' para a Prof 2, dizendo "Ô Talita, dá um jeito!"[77], que, no entanto, não se manifesta. É importante ressaltar que a Prof 1 e a Prof 2 combinaram que tentariam dar aos alunos a oportunidade de resolver as atividades da maneira mais autônoma possível. A Prof 2, portanto, mesmo estando junto ao grupo nessa subconfiguração, mantém uma postura de observadora, não interferindo na discussão do grupo.

> Paulo: Observando a sequência, quantos quadrinhos tem em cada figura? (*lê o item d*) Duas a mais que a anterior. [57]
>
> Marcelo: É. [58]
>
> Paulo: Hã! (*tom parecendo indicar: 'só isso?'*)[59]
>
> Paulo: Quantos quadradinhos tem a 6ª figura da sequência? (*lê o item e*) 12. [60]
>
> Valter: É. [61]
>
> Marcelo: 6ª figura? 6 x 2 é 12. E a 7ª? (*lê o item f*) [62]
>
> Paulo: Aí tá multiplicando e a 102 você viu que não é multiplicar. [63]
>
> Marcelo: Deeeez meu filho! Se 5 é 10, você acrescenta mais 2, 12![64]
>
> Vanderlei: E a 7? (*lê o item f*) A 7ª vai ter... [65]
>
> Paulo: 7ª vai dar 14... [66]
>
> Marcelo: É 16... [67]
>
> Paulo: 15! [68]
>
> Paulo: a 7ª vai dar 14, a 8ª vai dar 16... [70]
>
> Marcelo: 15ª vai dar 30. [71]

Paulo: Não vai dar 30![72]

Marcelo: Ó... 8, deu 16. 18, 9. 20, 10! [73]

Vanderlei: Vai dar 30. 2 x 15. [74]

Marcelo: 2, 4, 6, 8, 10. Mais 5. Se 10 é 20, com mais 5, que é 10, vai dar 30. [75]

Paulo: Não vai dar 30 quadrados. [76]

Marcelo: Ô Talita (*refere-se à Prof 2*) dá um jeito! Ó, 8 deu 16, 9 vai dar 18, 10 vai dar 20. [77]

Paulo: Aí daria 200, não adianta! [78]

Marcelo: 8 vai dar 22... 8, não!11 vai dar 22, 12 vai dar 24... [79]

Paulo: Peraí... 2 mais 2, 4, mais 2, 8, mais 2...16, mais 2...20, mais 2...22 (*faz a contagem*), vai dar mais... Tá estranho! [80]

Marcelo segue tentando convencer Paulo e, para isso, utiliza vários argumentos. Primeiro utiliza a ideia, implícita nos exemplos que elabora, de que o número de quadradinhos é o dobro do número que indica a posição que ocupam [77, 81], e Paulo argumenta que não pode ser, pois, nesse caso, a 100ª posição teria 200 quadradinhos (e, para ele, tem 102) [78]. Depois, Marcelo argumenta que cada posição está representada (indicada pelo advérbio 'aqui' e por gestos) por duas fileiras de quadradinhos [90] – o próprio aluno Paulo havia explicitado essa ideia, ainda que na forma de uma dúvida [82]. O aluno Vanderlei argumenta que "É só multiplicar por 2" [86] e mostra, empiricamente, que funciona para a primeira e para a segunda posições: "2 vezes 1 é igual a 2, 2 vezes 2 é igual a 4" [86]; Paulo, no entanto, assume que esses dados são particulares e não altera sua certeza quanto ao valor que julga correto para a 100ª posição [87, 89].

Marcelo: Ô veio... se o 8 vai dar 16... 18 vai dar 9 (*troca os números*), 20 vai dar 10! 2, 4, 6, 8, 10! [81]

Paulo: Não é 15 de cada lado! É? [82]

Vanderlei: É! [83]

Paulo: 2, 4, 6, 8, 10, 12... (*faz a contagem*) [84]

Vanderlei: 13, 14, 15! 15 de cada lado. [85]

Vanderlei: É só multiplicar: 2 x 1 = 2, 2 x 2 = 4... [86]

Paulo: Não é! Porque a de 100 não dá. [87]

Vanderlei: Conta pra você ver então! [88]

Paulo: Tá, essa daí dá, veio, mas a de 100 não dá! [89]

Marcelo: Se vou colocar 100 aqui e 100 aqui, vai dar 200!!!! [90]

Paulo parece considerar que só pode existir uma versão para a regra de formação de uma sequência [91]. Mesmo quando Marcelo tenta convencê-lo de que uma forma de pensar não exclui a outra [93], Paulo continua discordando, como explicita o protocolo a seguir:

> Paulo: Mas a regra é dois a mais que o próximo (*quer dizer anterior*), não é multiplicar por 2! [91]
>
> Marcelo: Se você multiplica por 2, vai dar 4! Vai dar 2 a mais de qualquer jeito. 2 x 2 dá 4. [93]

A comparação dessa configuração empírica com as configurações teóricas de referência permite-me situá-la como *a-didática*, porque, ainda que a Prof 2 esteja presente, ela não interfere na discussão do grupo.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 4 (relativa ao item *f*)

A Prof 1 aproxima-se do grupo e Valter, que não se pronunciou na última discussão (SCD3), informa à professora que Paulo não concorda com a resposta do grupo para o número de quadradinhos referente à 15ª posição da sequência (item *f*) [94]. A Prof 1 pede mais material concreto em outro grupo, com a intenção de que construíssem a sequência até a referida posição, mas o grupo afirma que não tem necessidade do material, dispensando-o [96 e 97]. Ela pede, no entanto, que os alunos montem novamente as posições iniciais da sequência, utilizando o material concreto; confere com eles a quantidade de quadradinhos relacionada a essas posições [100 a 107] e requisita ao aluno Valter que fale qual foi a regra de formação de tal sequência [111].

> Prof 1: Gente, cadê? Mostrem a sequência pra mim! [92]
>
> Valter: Ele tá duvidando que não é 30![94]
>
> Prof 1: Ah, então vamos fazer. Laura, (*referindo-se a uma aluna de outro grupo*), pega mais pininhos pra mim, por favor? [95]
>
> Marcelo: Já deu, professora! [96]
>
> Paulo: Deu já! [97]
>
> Prof 1: Então, tá. Não precisa mais não, obrigada. [98]
>
> Prof 1: Mas monta pra mim a sequência para eu ver. Até onde vocês fizeram? [99]
>
> Prof 1: Qual é primeiro termo? [100]

> Todos: 2. [101]
>
> Prof 1: 2º? [102]
>
> Todos: 4. [103]
>
> Prof 1: 3º? [104]
>
> Todos: 6. [105]
>
> Prof 1: Isso. 4º? [106]
>
> Todos: 8. [107]
>
> Prof 1: Até aqui, né? Então vamos tirar esses pinos daqui. [108]
>
> Prof 1: Valter, conta pra mim como é que é a ordem da sequência. Qual é o 1º termo dela? [111]
>
> Valter: Você soma mais 2 que o anterior que é 2, aí fica 4. [112]

Prof 1 valida a resposta de Valter [113] e segue questionando o aluno sobre o número de quadradinhos encontrado pelo grupo (com exceção de Paulo) para a 15ª posição [115]. Valter responde: "A gente pensou em só multiplicar" [116]. Apresenta, neste momento, uma carinha um pouco desconfiada[57] que parece indicar que não está tão seguro de estarem mesmo corretos. No protocolo [94] utiliza inclusive a expressão "duvidando que *não* é 30", ao invés de 'duvidando que é 30', o que também parece indicar dúvida gerada pelo *conflito semiótico interacional* estabelecido.

> Prof 1: Aí soma mais 2 e você obtém o 3º termo, não é isso? Que tem quantos? [113]
>
> Valter: 6. Mais 2... Aí vai. [114]
>
> Prof 1: Então o raciocínio é que cada termo que vem depois tem 2 a mais que o anterior. Beleza! Aí agora como é que vocês pensaram... Por que sem fazer todos... Por que imagina até chegar no 15º, até no 15, né? Como é que você pensou para você dar a resposta para o 15? [115]
>
> Valter: A gente pensou em só multiplicar... [116]

Marcelo, no entanto, tem outra postura. Afirma que para a 15ª posição "É só... 15 vezes 2" [121] e, neste momento, pela expressão facial, comunica que 'É claro!'. Quando a Prof 1 insiste em testar se essa regra 'funciona' [122, 124], Marcelo [123] e Valter [125] não hesitam. A Prof 1, então, valida a regra [126] e, em seguida, pergunta a Paulo quantos quadradinhos possui a 100ª posição e ele responde prontamente que são "100 vezes 2" [127]. Isso indica que, nesse momento, ele refez o raciocínio, baseado na validação realizada por

[57] Este trecho foi gravado também em vídeo.

Prof 1, resolvendo-se, assim, o conflito semiótico. Marcelo explicita a ideia de se pensar em duas fileiras de 100 [129], e a Prof 1 valida também essa outra regra de formação [130].

> Prof 1: Como? [117]
>
> Valter: 15 por 15 dá 30. [118]
>
> Marcelo: 15 x 2! [119]
>
> Prof 1: Como é que é?[120]
>
> Marcelo: É só... 15 x 2! [121]
>
> Prof 1: 15 x 2, é isso? [122]
>
> Marcelo: É. [123]
>
> Prof 1: Mas funciona? Por exemplo o 3º termo, seria o quê vezes o quê? [124]
>
> Valter: 2 x 3. [125]
>
> Prof 1: Por que é o 3º, né? Então, no 3º, fazemos 2 x 3. E no 100º, Paulo? [126]
>
> Paulo: 100 x 2. [127]
>
> Prof 1: 100 x 2. Muito bem! [128]
>
> Marcelo: É só a gente pensar. 100 aqui e 100 aqui. [129]
>
> Prof 1: Isso! Vanderlei, e lá no infinito? Porque a sequência é infinita... Tem o 4º termo, o 5º, o 6º, o 1000º e... vai embora! Os números acabam? [130]

Essa subconfiguração classifica-se como *dialógica*, já que a Prof 1 regula a discussão do grupo, mas permite que os alunos explorem estratégias de solução.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 5

No momento seguinte, tentando fazer com que os alunos construíssem uma expressão que pudesse expressar o número de quadradinhos de uma figura em uma posição qualquer, a Prof 1 afirma que a sequência é infinita [130] e pergunta a eles qual a 'continha' que teriam que realizar para descobrir um termo qualquer da sequência 'lá no infinito', ao que o aluno Vanderlei responde prontamente: "2 vezes o número" [137]. A Prof 1 encaminha essa discussão com o objetivo de levar os alunos a construírem uma expressão, utilizando uma variável [138]. Finalmente, Vanderlei afirma que a regra para a sequência é "2 vezes *x*" [141].

> Vanderlei: Não.[131]

Prof 1: Os números não são infinitos? [132]

Vanderlei: Hã, hã... (*concordando*)[133]

Prof 1:A sequência também é infinita, né? Lá no infinito, quantos pininhos teria? [134]

Paulo e Valter: Infinitos... [135]

Prof 1: Qual seria a continha que a gente faria? [136]

Vanderlei: 2 vezes o número. [137]

Prof 1: Vocês estudaram em equação... Quando a gente quer representar um número... [138]

Todos: *x*! (*os alunos respondem antes que Prof 1 complete a frase*) [139]

Prof 1: Exatamente, então qual seria a regra da sequência, se a gente usasse a letrinha *x*? [140]

Vanderlei: 2 vezes *x*. [141]

Prof 1: Muito bem!!! Então, quando a gente for escrever a regra geral, a gente pode colocar assim 2 vezes *x*. O *x* está representando qualquer número, até o infinito! [142]

A Prof 1 se afasta do grupo e o aluno Marcelo não perde a oportunidade de provocar Paulo [143 e 145], que revida [144]

Marcelo: Você escutou ela falando, né? (*ri*) [143]

Paulo: Leitinho! (*refere-se a Marcelo em tom pejorativo*)[144]

Marcelo: E você pensou que não era multiplicação! [145]

Nessa subconfiguração, a Prof 1, ainda que dialogue com o grupo, regula fortemente a discussão, mantendo um formato de interação do tipo *magistral interativa*[58].

CONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 2 (Atividade 2)

A segunda configuração didática organiza-se em torno da tarefa de descobrir a regra de formação da segunda sequência proposta (Quadro 13).

---

[58] Nomenclatura utilizada por Pochulu e Font (2011) para denominar interações que se classificam como magistrais, em que há, também, interação do professor com os alunos.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 6 (relativa aos itens *a* e *b*)

Inicialmente os alunos exploram, buscando uma regularidade, o número de bolinhas que aumentam de uma figura para a outra. Paulo afirma que, de uma figura para a outra, aumentam 4 bolinhas [157] e, em seguida, observa que as três bolinhas da 1ª figura se repetem na 2ª figura [162, 177] e que, nas figuras seguintes, esse valor não se mantém [164]. Marcelo observa que, da 1ª figura para a 2ª, são acrescidas 5 bolinhas [170]; tenta acrescentar também 5 bolinhas à 2ª figura, para testar se obtém o número de bolinhas referente à 3ª figura [170], mas Valter, imediatamente, 'denuncia' que o acréscimo da 3ª figura para a 4ª é de 7 bolinhas e não 5 [171].

> Paulo: Aumenta 4![157]
>
> Marcelo: 3 pra 8, também vai aumentar 4? [160]
>
> Valter: 14. Aqui tem 14 (*a 3ª posição tem 15 bolinhas*), aqui tem 8 e aqui tem 3. [161]
>
> Paulo: Continua os 3 e vai aumentando... [162]
>
> Marcelo: 15! [163]
>
> Paulo: Vai aumentando cada vez mais. [164]
>
> Valter: 3 vai acumular mais 15 vai ficar 18. [166]
>
> Paulo: Sobra 3 de cada lado e um no meio aqui, ó. Não dá pra entender não. [167]
>
> Marcelo: Não, é fácil desenhar. [168]
>
> Paulo: Não é fácil desenhar! [169]
>
> Marcelo: Eu entendi. 3 pra 8. Adiciona mais 5. Com 8 mais 5... [170]
>
> Valter: Mais 7... [171]
>
> Paulo: Pra fazer isso não é simples. Você tem que colocar uma bolinha a mais. Uma aqui, uma aqui, uma aqui, você vai descer uma aqui, pra você continuar... Vai sempre aumentar uma bolinha a mais, Aqui tem 6, aqui tem 7. [172]
>
> Valter: Aqui não tá aumentando uma bolinha não... [173]
>
> Paulo: No canto aqui... [174]
>
> Marcelo: O que adianta aumentar só uma... [175]
>
> Paulo: Aumenta uma bolinha em cada fileira, veio! Presta atenção! [176]
>
> Paulo: Você não tá vendo que sempre mantém esses 3, não? Ó, os 3 na ponta aqui e aumentou mais uma fileira aqui, veio! [177]

Paulo segue tentando construir a segunda figura a partir das três bolinhas iniciais. Requisita a presença da Prof 2 [180] e explica a ela [181] (Figura 16) que basta que sejam mantidas as três bolinhas iniciais (representadas na figura pelas bolinhas pretas) e acrescidas uma 'fileira' (duas bolinhas na 3ª coluna ou 1ª linha), uma bolinha no meio (representada na figura pela bolinha azul), perfazendo um total de seis bolinhas, e mais uma 'fileira' (duas bolinhas na 1ª linha ou 3ª coluna).

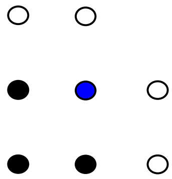


FIGURA 16 - Representação pictórica do argumento de Paulo

> Paulo: É isso... Talita! [180]
>
> Paulo: Olha só, aqui tem 3 (*primeira posição*). Aí, ele veio pra cá e aumentou uma fileira aqui e mais uma bolinha no meio, aí ficaram 6. Aí aqui ficaram 7, porque colocou mais uma bolinha e aumentou mais uma fileira... Aí aumentou mais uma fileira... [181]

Paulo requer uma validação da Prof 2 [183], que confirma sua explicação (provavelmente com um gesto, já que o áudio não registra sua voz), mas não a explora. Marcelo, parecendo não ter se convencido da ideia de Paulo, afirma que "tem uma outra regra" [184], referindo-se à necessidade de se obter uma fórmula ou expressão que possa 'descrever' a sequência. Para tanto, Marcelo tenta exemplificar, citando a regularidade testada anteriormente por ele: "fazer 5 direto aqui" [186].

> Paulo: Não é isso? (*dirige-se à Prof 2*) Viu? (*dirige-se a Marcelo*)[183]
>
> Marcelo: Mas tem outra regra! Eu tenho certeza. [184]
>
> Prof 2: Fala pra mim a outra regra. [185]
>
> Marcelo: Fazer 5 direto aqui... Tem uma outra coisa... [186]
>
> Paulo: Essa é a regra, menino! É só você colocar mais um 'L'. [187]

O grupo continua construindo as próximas figuras da sequência e Paulo, utilizando sua 'regra', vai ajudando os colegas na construção das figuras (Figura 17) [205]. A Prof 2 valida o argumento de Paulo [206], mas Valter e Marcelo continuam insistindo que "tem uma explicação" [208 e 209]. Estabelece-se, portanto, um *conflito semiótico interacional*, já que gerado na interação entre os alunos Paulo, Valter e Marcelo. Em busca da referida 'explicação', Valter segue, verificando o número de bolinhas que são acrescidas de uma figura para a outra [210].

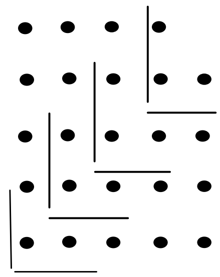


FIGURA 17 - Representação pictórica do argumento de Paulo.

> Paulo: Aqui não... Aqui não aumenta. Aqui é sempre o mesmo (*refere-se às três bolinhas iniciais*). Você vai aumentar mais uma bolinha aqui, ó... Vai tipo colocar mais um 'L' aqui, mais um, na hora que chegar ao quarto aqui você vai colocar mais um pra baixo e vai continuar fazendo... [205]
>
> Prof 2: Olha só... Tem lógica, não tem não? [206]
>
> Paulo: Tem. Viu? [207]
>
> Valter: Tem uma explicação. [208]
>
> Marcelo: Tem uma explicação! [209]
>
> Valter: Aqui tem 8. Pra encontrar 15, mais 7... [210]

A Prof 2 sugere a Paulo que construa mais uma figura [211], mas ele se recusa, afirmando que já entendeu [212] e sugerindo ao grupo que perguntem para a Prof 1 [216], a quem continua atribuindo poder de 'autoridade máxima'. Os demais componentes do grupo persistem na busca por uma regra [219]. Marcelo observa que na base das figuras, há sempre o acréscimo de uma bolinha de uma figura para a outra [213, 220]. Interessante ressaltar que Marcelo busca confirmação para sua ideia primeiro com Paulo e, em seguida, como quem quer dizer que não adianta argumentar com quem não quer discutir, com Valter [220].

> Prof 2: Ô Paulo, tem que desenhar pelo menos mais uma figura para vocês entenderem... [211]
>
> Paulo: Não. Eu já entendi. [212]
>
> Marcelo: Aqui 2, 3, e 4 (*refere-se à primeira linha em cada figura, como confirmado, mais adiante, no turno 234 com a expressão 'aqui em cima'*). E aqui? [213]

> Paulo: 2, 3 e 4... [214]
>
> Marcelo: Tem uma regra. [215]
>
> Paulo: Você não quer aceitar, chama a professora lá (*refere-se à Prof 1*). Ela sabe. [216]
>
> Marcelo: Ô veio, eu não tô falando isso não, tá certo. Eu tô falando que tem uma explicação pra isso... Igual aquele negócio de multiplicar mais 2 (*refere-se à regra descoberta para a atividade 1*). Tem uma regra! [217]
>
> Valter: Tem uma regra! [218]
>
> Valter: Multiplicar *x* por qualquer número. [219]
>
> Marcelo: Ô Paulo, Paulo não... Ô Valter 2, 3 e 4. Tá aumentando sempre um. Tem um... tem uma multiplicação... tem um negócio aí... [220]

Paulo parece entender que uma explicação com palavras e para um caso particular (a figura em determinada posição) é suficiente; ou, mais provavelmente, que é a resposta possível, já que o número de bolinhas que aumentam de uma figura para a outra não se mantém, e portanto, segundo ele, não há como determinar "um número certo" que será o lado [221]. No entanto, é justamente essa indeterminação, propiciada por esse tipo de atividade, que gera a necessidade de se utilizar uma letra para representar uma variável.

> Paulo: Multiplicação acho que não tem, veio. Você não tem como multiplicar aí, veio, porque a fileira ela vai sempre aumentar do lado então não tem como ter um número certo pra você falar é ele vezes ele... [221]
>
> Marcelo: Tem que ter uma explicação! [222]
>
> Paulo: Tem que ter, mas não é essa! [223]

O grupo segue desenhando a 4ª e a 5ª figuras (itens *a* e *b*) e Paulo vai 'coordenando' o trabalho, conferindo se falta alguma bolinha e onde devem colocá-la [225, 227, 229, 231, 233, 248]. Marcelo também utiliza sua descoberta (de uma figura para a outra sempre aumenta uma bolinha na base) para conferir a 'correção' dos desenhos dos colegas [234]. Valter, ao tentar contribuir para o impasse entre Marcelo e Paulo, acaba por tornar mais clara a ideia explicitada por Paulo, ainda que de forma pouco elaborada, de acrescentar mais um 'L' [187, 205]: "Tem que fazer um 'L' [...]. Fazer um 'L' aqui, um 'L' aqui e um 'L' aqui" [238, 247](Figura 18).

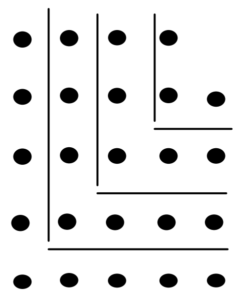


FIGURA 18 - Representação pictórica do argumento de Valter

Paulo: Você vai colocar aqui 1, 2, 3. [225]

Marcelo: Vai ter que colocar... [226]

Paulo: Mais uma aqui... Você fez confusão. [227]

Marcelo: Fiz não. Fiz igual a que tava aqui. Esta é essa aqui. Sem essa bolinha. [228]

Paulo: Ah, tá. Então esta bolinha você risca e faz uma embaixo. Aí agora você faz pra lá. [229]

Marcelo: Pra cá? [230]

Paulo: Não. Pra lá. [231]

Marcelo: Acabou? [232]

Paulo: Tem mais uma aqui, tem uma bolinha aqui. Peraí. 1, 2, 3, 4. 1, 2, 3, 4. [233]

Marcelo: Aqui em cima também aumenta 2 e 3. Aqui tem que ser 4. [234]

Paulo: Você fez alguma coisa estranha... [235]

Marcelo: Não fiz não... [236]

Paulo: Fez sim, porque a regra não deu... [237]

Valter: Você faz um 'L', depois outro 'L'... [238]

Paulo: É! Você fez confusão aí... [239]

Marcelo: Fiz não. [240]

Paulo: Fez sim. Porque não aumenta do lado lá não. [241]

Valter: 1, 2, 3, 4! [242]

Marcelo: Eu fiz isso aqui veio. Tan, Tan, Tan. Tan, Tan Tan. Tan, Tan, Tan. Tan, Tan, Tan. Tan. Tan! Tá igual a essa aqui! [243]

Paulo: Tá. Peraí. [244]

Vanderlei: 1, 2, 3, 4... (*Conta até 35, refere-se à 5ª posição*)[245]

Paulo: O Valter conseguiu desenhar, porque você não conseguiu? [246]

Valter: Tinha que fazer um 'L', Leitinho (*refere-se a Marcelo*). Fazer um 'L' aqui, um 'L' aqui e um 'L' aqui. [247]

Paulo: Vai colocar mais uma fileira aqui... É igualzinho essa daí... Aí você coloca mais uma bolinha aqui e continua a fileira até acabar. Pronto! [248]

No extrato anterior, Paulo concorda com os argumentos de Valter e continua em 'atrito' com o colega Marcelo, ainda que ele esteja realizando os mesmos procedimentos que Valter.

A sexta subconfiguração classifica-se como *a-didática*, já que os alunos exploram regularidades e buscam estratégias de solução sem a interferência das professoras.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 7 (relativa ao item *c*)

Essa configuração inicia-se, quando a Prof 2 pergunta aos alunos se eles chegaram a alguma conclusão [249]. Paulo e Marcelo respondem, cada qual a seu modo, que já encontraram regularidades, mas ainda não conseguiram generalizar [250, 251]. O grupo expõe a última regularidade encontrada [253, 254] e a Prof 2 sugere que pensem em uma figura geométrica [255]. Marcelo responde que é um quadrado [256]. Paulo, no entanto, argumenta que, se falta uma bolinha, então não é um quadrado [257, 259], e essa ideia não é desenvolvida nesse momento.

> Prof 2: Vocês chegaram a alguma conclusão? [249]
>
> Paulo: Não, a gente entendeu o que é. Só não tem como explicar a regra... [250]
>
> Marcelo: Tem uma explicação... Tipo uma explicação doida... [251]
>
> Prof 2: Tem. Vocês não conseguiram explicar ainda não? [252]
>
> Marcelo: Não. Aqui vai pra 1, 2, 3... Vai aumentando uma coluna? [253]
>
> Paulo: Vai aumentando sempre um 'L' [254]
>
> Prof 2: Pensem em uma figura geométrica envolvida... [255]
>
> Marcelo: Quadrado. [256]
>
> Paulo: Não. Quadrado não tem uma bolinha, né, fio? [257]
>
> Marcelo: (*inaudível*) [258]
>
> Paulo: Então não é um quadrado. É igual a todo mundo ter um tênis, menos eu. Então não é todo mundo mais! Hã! [259]

Nessa subconfiguração, a Prof 2 avalia o trabalho do grupo [249] e dá algumas 'pistas' para a exploração, a partir do diálogo com os alunos, portanto, classifica-se como *dialógica*.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 8 (relativa ao item *c*)

Nessa subconfiguração, o grupo segue fazendo o desenho para o item *c* da atividade. Vanderlei afirma que a 5ª figura terá 35 bolinhas [265]. Marcelo descobre [274, 277] que a sequência que representa o número de bolinhas que são acrescidas de uma figura para a outra (5, 7, 9, 11, 13...) aumenta de 2 em 2 [286]. Paulo discorda [287] e Marcelo tenta explicar [295, 300].

> Vanderlei: 35. [265]
>
> Marcelo: Eu também sei! Descobri! *(gargalhadas)* Descobri a regra... Descobri a regra... *(cantando)*. Saca só... [274]
>
> Paulo: Vai dar 35 mais 2. [275]
>
> Vanderlei: 41. [276]
>
> Marcelo: Descobri a regra... Descobri a regra... (*cantando*). [277]
>
> Vanderlei: 1, 2, 3, ... , 41. (*conta um a um*)[278]
>
> Paulo: Até aí você tá certo, mas faltou a coluna aqui debaixo. [279]
>
> Marcelo: 2, 3, 4, 5, 6... [280]
>
> Marcelo: Essa aí tem 35. [281]
>
> Vanderlei: Não, essa daqui é a quarta! [282]
>
> Paulo: Essa não pode ter 41. Porque você esqueceu de descer essa coluna aqui pra emendar com essa. Você só fez a de baixo! [283]
>
> Vanderlei: Tem que bater mais uma coluna aqui em cima? [284]
>
> Paulo: É... Tem que fazer mais um 'L'. [285]
>
> Marcelo: De 2 em 2, de novo! [286]
>
> Paulo: Não tem cabimento, veio! [287]
>
> Marcelo: Vem aqui comigo: 3... [288]
>
> Paulo: 8! [289]
>
> Marcelo: 6! [290]
>
> Paulo: Não tem 6... Tem... Tem 8. [291]
>
> Paulo: Tem 8! [292]
>
> Marcelo: Ó, de novo, aumenta sempre 2: 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,12! [293]
>
> Paulo: Que 12? Aqui tem 3, aqui tem 8. [294]
>
> Marcelo: Ó, 3! Aqui tem 1, 2, 3, 4, 5! 5, 6, 7. 2 + 2. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, mais 2 de novo... [295]
>
> Paulo: Tá, mas não tá pedindo regra... [296]
>
> Marcelo: Tá, mas com a regra é melhor! [297]

> Marcelo: 1, 2, 3 + 2. 1, 2, 3, 4, 5 + 2. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 + 2. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 + 2... [300]

Essa configuração classifica-se como *a-didática*, já que os alunos seguem desenvolvendo a atividade de maneira autônoma.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 9 (relativa ao item *e* - intervenções de Prof 2)

No início dessa configuração, Paulo requisita a atenção da Prof 2 [298] e ela, para se inteirar da discussão, segue questionando sobre o que descobriram até o momento, buscando incentivar a elaboração de uma expressão matemática que possa descrever o *enésimo* termo da sequência [303, 309]. Os alunos parecem dar respostas aleatórias: Marcelo diz se tratar de uma multiplicação [311], Paulo sugere uma adição [312] e, em seguida, afirma que tem "alguma coisa a ver com o *x*" [314]. Valter retoma a ideia de verificar o número de bolinhas que aumenta de uma figura para a outra.

> Paulo: Talita (*refere-se à Prof 2*), a regra é mais 2 em cada coluna, né? [298]
>
> Prof 2: Oi? Que regra? Calma aí... [299]
>
> Marcelo: 1, 2, 3 + 2. 1, 2, 3, 4, 5 + 2. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 + 2. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 + 2 [300]
>
> Prof 2: Como é que... Peraí, rapidão! Só uma coisa aqui... Como é que vocês estão fazendo isso aqui? Quantos pontinhos tem em cada figura? Vocês estão desenhando? Não pensaram em nenhuma operação para ver a quantidade de pontos? [301]
>
> Todos: Não. [302]
>
> Prof 2: Vocês acham que não tem uma operação... [303]
>
> Marcelo: Ter uma operação tem! [304]
>
> Paulo: A gente só não sabe... [305]
>
> Prof 2: Uai, então vamos pensar! [306]
>
> Marcelo:Vai só aumentando em 2... [307]
>
> Paulo: É. Uma coluna aumenta em 2. Vai colocar essa mesma coluna mais 2. [308]
>
> Prof 2: Vocês acham que não tem nenhuma conta que a gente pode relacionar aqui que vai dar esse tanto, aí depois a mesma que vai dar esse tanto? [309]
>
> Paulo: Acho que não. [310]
>
> Marcelo: 4 x 2... 8. [311]
>
> Paulo: Acho que é adição professora. [312]

Marcelo: Não, tem outra coisa. [313]

Paulo: Não tem não! Pode ter alguma coisa a ver com o *x*. [314]

Prof 2: Que *x*? [315]

Paulo: Não sei. [316]

Prof 2: Humm... [317]

A Prof 2 acompanha a exploração realizada pelos alunos que relacionam o número de bolinhas de cada figura com a posição que ocupam [326]. Nesse momento, os alunos, juntamente com a Prof 2, confirmam que a quarta posição terá cinco bolinhas na base e cinco na coluna [337, 338, 339, 340]. Durante esse trajeto, a Prof 2 dá dicas de que devem olhar para o formato da figura [333, 339].

Vanderlei: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. [318]

Paulo: Aqui tem 8. [319]

Valter: Aqui tem 8. [320]

Prof 2: Aqui tem 8! [321]

Marcelo: 35. [322]

Paulo: Aqui tem 15, não é, Toninho? (*refere-se a um aluno de outro grupo*) [323]

Prof 2: A próxima figura vai ter quanto? [324]

Paulo: 35. [325]

Vanderlei: Não, a próxima figura não vai ter 35 não. Essa aqui é a 3ª. A 4ª... Aqui não pede a 4ª não, pede a 5ª já. A 5ª é 35. [326]

Prof 2: A 4ª tem quanto? [327]

Paulo: Peraí, professora. [328]

Prof 2: Tá. [329]

Paulo: Então eu não fiz a 5ª. [330]

Prof 2: Então, peraí. Vamos partir desta, tá? Tem quantos na coluna? [331]

Paulo: A primeira? [332]

Prof 2: Vamos começar dessa. Tem 4 por 4. [333]

Paulo: Uma linha tem 3. [334]

Prof 2: Só a linha de cima que tem 3, não é? [335]

Paulo: É. [336]

Prof 2: Então, vamos montar a próxima que é a 4ª. Não é? Vamos ver se dá aqui... Me ajudem aqui... Vamos colocar aqui. Não, não! Deixa esta aqui. Vamos abrir a outra aqui, Paulo. Vai ter quantas aqui? [337]

Paulo: 5. [338]

Prof 2: 5, né? E Vai ter 5 aqui também? [339]

Paulo: Vai. [340]

Valter: Eu acho que não... Vai ter 10... [341]

Paulo: Vai. Não, peraí... Se essa aqui tem 1, 2, 3, 4... [342]

Prof 2: Assim, não é? [343]

Paulo: Isso. [344]

Vanderlei: A 4ª tem 25. [348]

Paulo: A 4ª tem 25? Não é! 24. [349]

Vanderlei: Ah, é mesmo! 24. [350]

Prof 2: É assim, não é? [351]

Paulo: Tem 24. [352]

Prof 2: Tem quantas aqui? [353]

Paulo: 24. Porque sempre vai diminuir... Cada fileira vai ter...11! [354]

Prof 2: Essa é a 3ª? A 4ª tem 24, a 5ª tem? [355]

Todos: 35. [356]

No momento seguinte, a Prof 2 encaminha uma discussão buscando levar os alunos a perceberem que os acréscimos no número de bolinhas de uma figura para a outra não se mantêm [363, 365, 377, 399, 406, 411]. Ao concluir essa intervenção, a Prof 2 sugere, novamente, que o grupo pense em uma figura geométrica [411]. O fato de faltar uma bolinha continua impedindo, no entanto, que a figura possa ser associada a um quadrado.

Prof 2: Tá aumentando. Só que a regularidade de uma figura para a outra foi aumentando? [363]

Paulo: Não. [364]

Prof 2: Foi a mesma? [365]

Paulo: Não, peraí... [366]

Prof 2: Então olha só... Peraí... 2 minutos. Da primeira para a segunda aumentou quanto? [367]

Paulo: 5. [368]

Prof 2: Da 1ª para a 2ª. Da 2ª para a 3ª? [369]

Marcelo: Aumentou 6. [372]

Prof 2: Gente! 7 mais quanto... [375]

Vanderlei: 7! [376]

Prof 2: 7. Então, já não é o mesmo tanto... Cuidado com isso! Da 3ª para a 4ª aumentou quanto? [377]

Vanderlei: Peraí. Já foram 15. 15 + 11, 25! Vai dar... [378]

> Marcelo: Aumenta 20! É 35 a 4ª, não é? [379]
>
> Prof 2: A 3ª figura vocês falaram que tem 15 bolinhas, não é? Que é essa daqui, não é? [380]
>
> Prof 2: Aumentou quanto? [384]
>
> Vanderlei: 9. [385]
>
> Prof 2: Que conta você fez? Pegou o total aqui e diminuiu 15, não foi? [386]
>
> Paulo: Não. Eu só somei... [387]
>
> Prof 2: Aumentou 9. Dessa para a próxima, que vocês me falaram, vai aumentar quanto? [388]
>
> Paulo: Peraí. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Eu acho. Peraí. [389]
>
> Vanderlei: Vai aumentar 11. [390]
>
> Marcelo: É. Vai aumentar 11. [391]
>
> Prof 2: Você quer mais bolinhas? [395]
>
> Paulo: Não. 6, 7, 8, 9, 10. Vai aumentar 11. [396]
>
> Vanderlei: Vai aumentar 11. [397]
>
> Paulo: É. Vai aumentar 11. [398]
>
> Prof 2: E da outra? Tá vendo que não é o mesmo tanto? De uma figura aumenta um tanto e de outra... [399]
>
> Vanderlei: Da outra dá 48. [400]
>
> Prof 2: E aí vai aumentar quanto? [401]
>
> Vanderlei: Vão ser 13. [402]
>
> Paulo: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. [403]
>
> Vanderlei: Vai aumentar 13. [404]
>
> Prof 2: Tá vendo que não é o mesmo tanto... [406]
>
> Paulo: Não é a mesma regra![407]
>
> Marcelo: Descobri a regra... [408]
>
> Prof 2: Você foi lá no outro grupo... Isso é sacanagem. Então você não conta a regra... [409]
>
> Paulo: Tá, mas não tá pedindo regra não![410]
>
> Prof 2: E aí gente! Não era então o que vocês estavam pensando... Será que não tem nenhuma outra conta... Não estão lembrando nenhuma outra assim...figura! [411]

O aluno Marcelo vai até o grupo 2 e volta dizendo que descobriu a regra [408]. A Prof 2 pede a ele que não a compartilhe [409]. Marcelo acata o pedido, mas vez ou outra cantarola "eu sei a regra" [417]. Apesar de ter lido a resposta, qual seja $(x + 1) . (x + 1) - 1$, Marcelo a interpreta como sendo 'vezes mais um, vezes mais um, menos um' (no registro do aluno do qual Marcelo 'consultou' não há parênteses na expressão) e, por esse fato, não só não a compreende como também afirma que "não tem condições de ser ela" [420].

> Vanderlei: Peraí... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. 7 e 7, 14 + 7... [412]
>
> Paulo: Eu sei que sempre vai manter a figura e... [413]
>
> Vanderlei: 21... [414]
>
> Paulo: Qual é a regra? Fala! (*dirige-se a Marcelo)* Que adianta você saber?! [415]
>
> Vanderlei: 35... 42 + 7... 49. [416]
>
> Marcelo: Não vou falar. Eu sei qual é a regra... [417]
>
> Prof 2: Você sabe, mas você não entendeu. [418]
>
> Vanderlei: Vai dar 48, veio. [419]
>
> Marcelo: Não tem condição de ser ela. [420]
>
> Paulo: Como então, veio? Fala! [421]

Nessa subconfiguração a Prof 2 estabelece um diálogo com o grupo, mas sua regulação não interfere demasiadamente na exploração realizada pelos alunos, portanto, a 9ª subconfiguração classifica-se como *dialógica*.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 10 (relativa ao item *e* - intervenções de Prof 1)

A Prof 1 se aproxima do grupo e a Prof 2 lhe informa, reservadamente, que o grupo não conseguiu generalizar, ainda que ela tivesse dado diversas dicas. Esse fato leva a Prof 1 a tomar a decisão de 'descumprir' o combinado de interferir o mínimo possível no trabalho de exploração dos alunos e conduzir fortemente a discussão, já que o grupo se encontrava 'paralisado' e, se assim se mantivesse, não conseguiria prosseguir.

A Prof 1, portanto, já começa perguntando qual figura geométrica poderia ser relacionada com cada uma das figuras da sequência [431]. O fato de utilizar a expressão 'se parece' muito provavelmente ajudou os alunos a relacionar o formato com que estão dispostas as bolinhas em cada figura da sequência a um quadrado, ainda que "faltando uma bolinha" [432]. Apesar de Paulo continuar afirmando que se trata de "quase um quadrado" [433] e, mais adiante, que não parece um quadrado[59] [435], a Prof 1 ignora essas falas e segue perguntando se figuras em outras posições se parecem com um quadrado [434, 437, 439], ao

---

[59] O que parece um quadrado não é um quadrado.

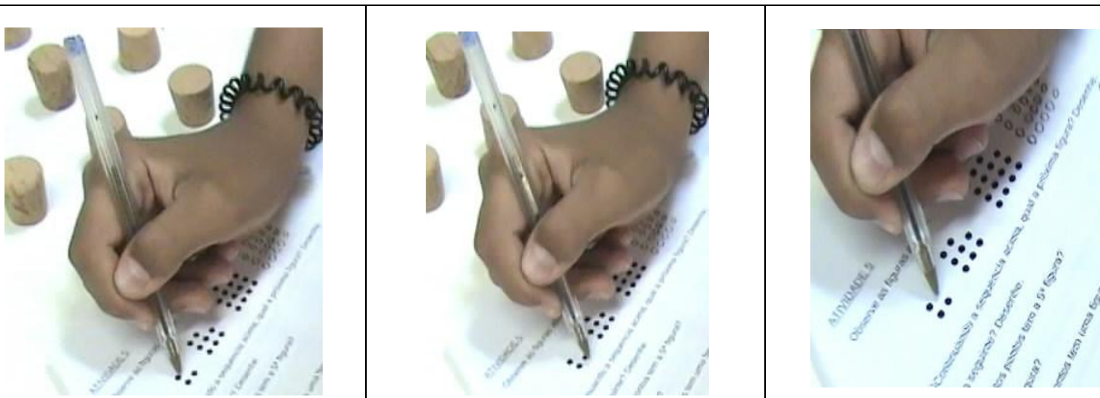
que Vanderlei responde afirmativamente [436, 438, 440]. Paulo, a partir desse encaminhamento, parece convencer-se de que é possível considerar que cada figura da sequência é 'um quadrado menos uma parte', e, então, esboça um largo sorriso e diz um "Ahhhhhhhhhhhhhhh" [441] que parece indicar que tudo passou a fazer sentido, conforme extrato a seguir, resolvendo-se, assim, o conflito semiótico iniciado na SCD6.

> Prof 1: Essa figura parece o quê? O que tá parecendo essa aqui, ó? [431]
>
> Vanderlei: Um quadrado, só que está faltando uma bolinha... [432]
>
> Paulo: Quase um quadrado. [433]
>
> Prof 1: Então? Como que a gente pode pensar então? Essa aqui parece um quadrado? [434]
>
> Paulo: Não. [435]
>
> Vanderlei: Parece. Só que está faltando uma bolinha. [436]
>
> Prof 1: Essa aqui parece um quadrado? Então, qual vai ser o próximo termo? Um quadrado faltando um. [437]
>
> Vanderlei: Parece. [438]
>
> Prof 1: Então, qual vai ser o próximo termo? Me conta. Como é que é? [439]
>
> Vanderlei: É um quadrado... [440]
>
> Paulo: É um quadrado... Ahhhhhhhhhh.... (*sorrindo*) [441]

Nessa subconfiguração, a Prof 1 estabelece uma interação bastante direcionada, ainda que mantenha um diálogo com os alunos. Classifica-se, portanto, como *magistral interativa*.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 11 (relativa ao item *e*)

A Prof 1 interrompe a discussão para chamar a atenção de outro grupo que havia acabado a atividade e, nesse momento, o grupo analisado passa a trabalhar sozinho. Quando a professora Prof 1 retorna, Marcelo está apontando para as bolinhas da altura e da base e afirmando: "2 x 2, 4 - 1" [453] (Figura 19). A Prof 1 valida a fala de Marcelo [454] e Paulo afirma que isso ele já sabia [457]. Marcelo segue, de maneira autônoma, tentando convencer o grupo, insistindo que 'essa que é a regra' e passa a testá-la para a posição seguinte "4 x 4, 16. 16 - 1, 15" [463]. Paulo continua afirmando que "está errado" [465], mas a Prof 1 não lhe dá espaço, afirmando que está correto e pedindo a ele que teste o termo seguinte [466].



Marcelo faz um gesto traçando uma linha vertical imaginária sobre a primeira coluna e, em seguida, traçando uma linha horizontal sobre a primeira linha. Logo após, aponta para o espaço em branco onde deveria estar a bolinha que falta.

FIGURA 19 - Linguagem gestual de Marcelo

Marcelo: É. 2 x 2, 4 - 1. [453]

(*A Prof 1 volta*)

Prof 1: Isso! Muito bem! [454]

Marcelo: É 3 x 3, 9 - 1. [455]

Valter: É só pensar em um quebra-cabeça sem uma peça. [456]

(*Marcelo dá uma gargalhada*)

Paulo: Isso aí eu já sei que é menos 1. [457]

Marcelo: Mas essa que é a regra! Presta atenção: 4 x 4, 8. Aqui tem 15, né? [458]

Paulo: 15. [459]

Marcelo: 15 não é não... [460]

Valter: O quadrado seria o quebra-cabeça sem uma peça. [461]

Paulo: Quiiinnnnze! [462]

Marcelo: Ah, tá. 4 x 4, 16. 16 - 1, 15. [463]

Prof 1: 15! Aí a próxima figura seria... [464]

Paulo: Tá errado. [465]

Prof 1: Paulo, tá certinho. A próxima figura: 5 x 5? [466]

Essa subconfiguração classifica-se como *a-didática* porque, mesmo quando a Prof 1 se aproxima, o aluno Marcelo segue tentando convencer o grupo. Apenas na última intervenção a Prof 1 intervém, validando a fala de Marcelo.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 12 (relativa ao item *e*)

A Prof 1 ressalta para o grupo [474] o fato de que, na primeira posição, a base ter duas bolinhas. Interrompe sua fala para chamar novamente a atenção de outro grupo. Nesse momento, os alunos discutem acerca do registro do item *e* da tarefa. Valter afirma que devem escrever "a base por ela mesma e tira um" [478] e Paulo "a base pela lateral menos um" [479]. Como o número de bolinhas da base e da lateral é o mesmo, as duas formas estão corretas. Apesar de Paulo insistir na ideia de que "a base pela lateral também dá" [483] e requerer a validação desse argumento [493], segue sem a confirmação de sua ideia; já que a Prof 1, ao invés de ouvi-lo, tenta encaminhar a discussão [494] iniciada no turno 474.

> Prof 1: Olhe uma coisa diferente que acontece. Na primeira figura... [474]
>
> Valter: É só você multiplicar a base por 2 e tirar - 1. [475]
>
> Paulo: Não... [476]
>
> Prof 1: A base vezes ela mesma. Tipo: 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4. A base vezes ela mesma. Ô gente, vocês estão me atrapalhando! (*chama a atenção de outro grupo*) [477]
>
> Valter: A base por ela mesma e tira 1. [478]
>
> Paulo: A base pela lateral menos um! [479]
>
> Valter: A base pela base (*voz gutural*)[480]
>
> Paulo: Tá, a base pela lateral também dá. [481]
>
> Valter: A base pela base! [482]
>
> Paulo: Mas a base pela lateral também dá!!!! [483]
>
> Marcelo: Tá, vamos fazer! Quantos pontos tem a 5ª figura? [484]
>
> Paulo: 35. [485]
>
> Marcelo: É a 6ª! [486]
>
> Valter: A base pela própria base aí você subtrai menos 1 e vai achar o resultado. [487]
>
> Prof 1: Fala de novo. [488]
>
> Valter: É a base... multiplicando a base pela própria base e você tira menos 1. [489]
>
> Prof 1: Isso! [490]
>
> Paulo: Ou pela lateral! [491]
>
> Prof 1: Agora tem que prestar atenção no seguinte. Ponha o número 1 aqui pra mim, por favor. [492]
>
> Paulo: Professora! (*refere-se à Prof 1 - parece querer a confirmação de sua fala anterior*)[493]

> Prof 1: Peraí. Tipo assim: 1ª posição, 2ª posição, 3ª posição... Beleza! Presta atenção aqui, gente! Na 1ª posição tem 2 bolinhas. Na 2ª posição tem 3 bolinhas... Na 3ª, tem 4! É sempre uma bolinha... [494]
>
> Valter: A mais... [495]

O grupo acompanha o desenvolvimento da ideia de que na base da figura há sempre uma bolinha a mais que a posição a que esta se refere [494, 495] e consegue responder corretamente o número de bolinhas da base e o número de bolinhas total para a 11ª posição [497]. A Prof 1 valida o raciocínio, repete o que denomina "regra geral" [500] e se afasta do grupo.

> Prof 1: Então pensem comigo. Na 10ª posição, quantas bolinhas vamos ter? Na 10ª... [496]
>
> Paulo: Vamos ter 11! [497]
>
> Prof 1: 11! Muito bem! Então vão ser 11... [498]
>
> Valter: ... vezes 11 menos um. [499]
>
> Prof 1: 11 x 11 - 1 que fica faltando sempre... Agora a regra geral seria: um lado vezes o outro menos 1. O lado é a posição mais um, certo? Anota aí pra mim! [500]

Essa subconfiguração classifica-se como *magistral interativa*, já que a Prof 1 regula fortemente a interação, ainda que mantenha um formato de diálogo constante com os alunos.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 13 (finalização do registro escrito)

O grupo, mesmo com a saída da Prof 1, segue verificando a regra para a 6ª e para a 7ª figura, embora a atividade só requisite a 6ª . Vanderlei relê o item *f* da tarefa [516] e os alunos fazem seus registros [517]. Marcelo, que havia 'consultado' a resposta do grupo 1 (considerado pela turma o grupo mais inteligente e capaz) segue afirmando que "não é isso"[518]. Marcelo afirma que a resposta correta é "menos um, vezes menos um, vezes menos um"[520]. O que de fato, para o item *e* da tarefa, consta do registro escrito de Marcelo, como se vê na figura 20:

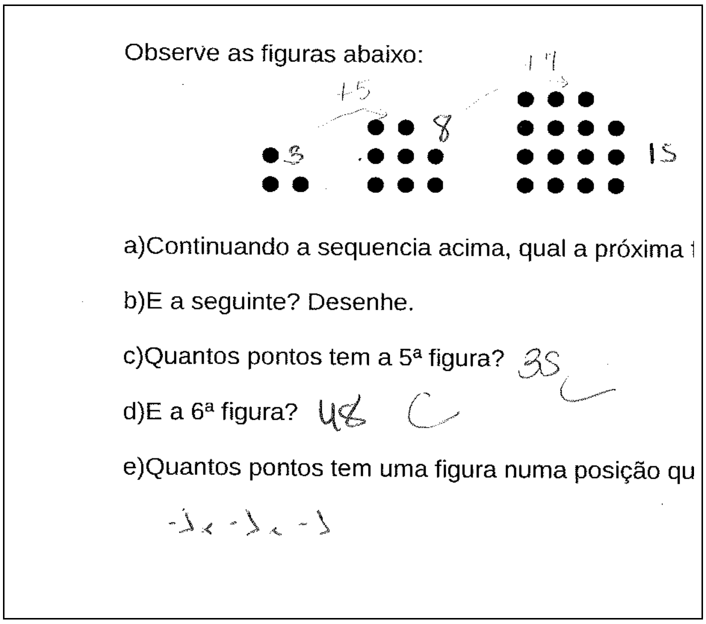


FIGURA 20 - Registro escrito de Marcelo

Consta do registro escrito de Ernane, componente do grupo 1, o que Marcelo 'consultou', 'x + 1 . x + 1 - 1' (Figura 21).

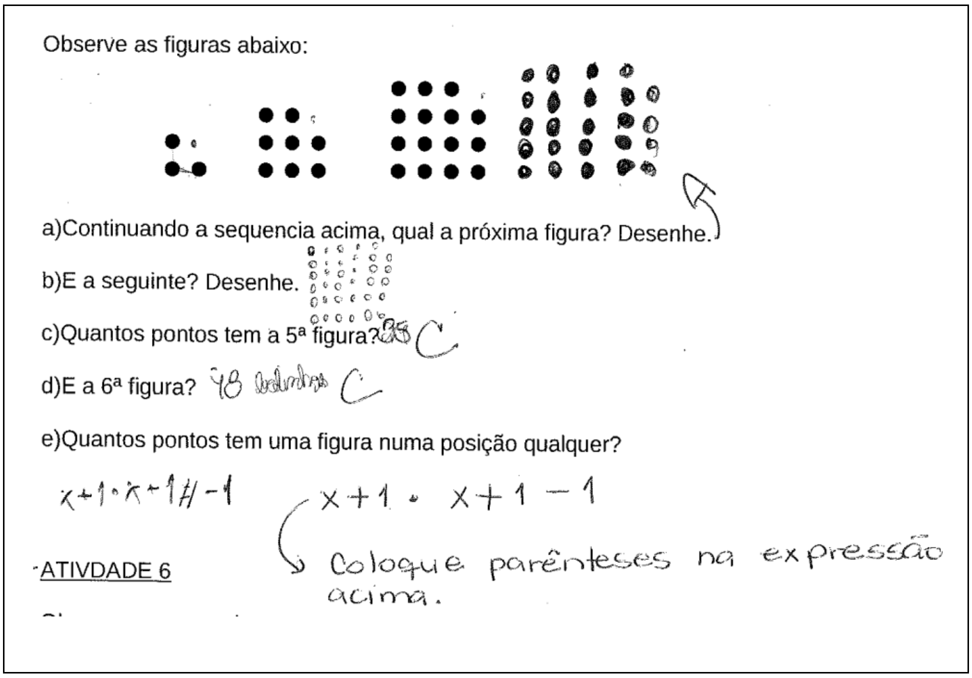


FIGURA 21 - Registro escrito de Ernane

Marcelo não compreende o registro porque interpreta o símbolo x como sendo o sinal de 'vezes' (multiplicação) e o sinal de '+' (adição), que está malfeito, como o sinal de '-' (subtração).

A Prof 1 esperava que, com a discussão desenvolvida no final da subconfiguração 12, o grupo conseguisse expressar a regra de formação da sequência com uma expressão como 'posição mais um, vezes posição mais um, menos um' ou até com uma expressão matemática como $(p + 1)^2 - 1$. Apesar de o grupo realizar o cálculo para o item *d* da tarefa, aplicando oralmente essa expressão matemática [515], não consegue formalizar, constando do item *e* da tarefa simplesmente expressões como 'a base por ela mesma e tira um' ou 'a base pela lateral menos um'.

> Valter: E a 6ª figura? [509]
>
> Vanderlei: Dá 49 e vai ter que tirar mais um, dá 48. Eu contei. [510]
>
> Paulo: 48! [511]
>
> Marcelo: A 6ª, 48? Tem certeza? Absoluta? [512]
>
> Vanderlei: Eu contei. [513]
>
> Marcelo: Atividade 6. [514]
>
> Paulo: A 6ª vai ter 7. 7 x 7, 49. 49 - 1, 48! [515]
>
> Vanderlei: Peraí! Quantos pontos tem uma figura numa posição qualquer? [516]
>
> Valter: A base vezes a lateral... (*voz gutural*)[517]
>
> Marcelo: Não é isso. [518]
>
> Paulo: É. [519]
>
> Marcelo: É -1 vezes -1 vezes -1! Eu colei dele ali... [520]

A última subconfiguração, relativa à atividade 2, classifica-se como *a-didática*, já que o grupo dedica-se à finalização do registro escrito da tarefa sem a interferência das professoras.

CONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 3 (Atividade 3)

A terceira configuração didática organiza-se em torno da tarefa de descobrir a regra de formação da última sequência proposta (Quadro 14).

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 14 (relativa aos itens *c* e *d*)

O grupo inicia o trabalho com a atividade 3, tentando identificar o padrão da sequência. Para isso, explora o número de bolinhas que é acrescido de uma figura para a outra. Paulo salienta que não há regularidade nesses acréscimos [537 e 540]. Os alunos Vanderlei e Valter identificam também que, ao contrário da atividade 2, nessa tarefa não falta uma bolinha para completar a figura [535 e 536].

> Paulo: Vai aumentar a mesma coisa. [527]
>
> Valter: Aumenta mais 2. [528]
>
> Paulo: Não. [529]
>
> Valter: Não, 2, 6... [530]
>
> Marcelo: Aumenta mais 4. [531]
>
> Paulo: Essa é cabulosa... [532]
>
> Vanderlei: É! [533]
>
> Valter: Aumenta mais 4... [534]
>
> Vanderlei: Só que essa daqui não tira aquele '-1' não. [535]
>
> Valter: Essa daqui é completa... [536]
>
> Paulo: Só que nem todos aumenta menos... mais 4! [537]
>
> Marcelo: É sim! 6... [538]
>
> Valter: Essa aqui é só por mais 1. [539]
>
> Paulo: Não. nem todas aumentam mais 4. [540]
>
> Marcelo: Ah, tá! Eu sei como é que é... 2, aumentam 4, 6. 6 + 6, 12. [541]
>
> Vanderlei: 12 + 12, 24. [542]
>
> Paulo: É, vai somando... Tá, mas onde o 2 somou pra dar 6? [543]
>
> Marcelo: Sempre aumenta aqui... [544]
>
> Paulo: 2 + 2 era pra dar 4! [545]
>
> Valter: É! Era pra dar 4! [546]
>
> Marcelo: Qual é a próxima figura dessa sequência? Ó, 2... [551]
>
> Valter: 2 + 2, somou pra dar 6. [552]
>
> Paulo: 2 + 2 não dão seis não! [553]
>
> Valter: 2 + 2 é 4, Leite (*refere-se a Marcelo*)! [554]
>
> Marcelo: Eu sei. 2... Eu falei 2 + 4, uê! [555]
>
> Vanderlei: Aumentam 4... [556]
>
> Paulo: Qual a próxima figura dessa sequência (*lê*)? Tá, uma é 12... mas a próxima acho que não vai ser 24! Ou vai? [557]

Marcelo: 2, 3... (*contando*)[558]

Mais adiante, Valter parece identificar uma forma de descrever a regra de formação da sequência (multiplicar um lado da figura pelo outro). O grupo não a valida, mas as palavras "multiplicar" [559] e "produto" [561], utilizadas por ele, contribuem para que Marcelo explore uma nova forma de ver a sequência [563]. O aluno parece considerar a posição ao quadrado mais a posição (Figura 22), mas o fato de ele errar a multiplicação 3 x 3 [563] faz com que esse raciocínio se perca.

Valter: 2, aqui tem 2... multiplicar por essa aqui que tem 6... 12! [559]

Paulo: Tá, mas e daí? Hã! Hã! Você explicou, explicou e não explicou nada! [560]

Valter: Você vai somar esse daqui e vai achar o produto. [561]

Paulo: Tá, você vai achar... [562]

Marcelo: Muito óbvio! 2 x 2, 4 mais 2, 6. **3 x 3, 6** mais 3, 8. [563]

Paulo: Vai multiplicar alguma coisa... [564]

Prof 1: 3 x 3? [565]

Marcelo: Ah, 9! [566]

Paulo: 3 x 3, quanto você falou que era? [567]

Marcelo: Falei 8... Falei 6! Eu confundi... [568]

Marcelo: O meu tá certo de qualquer jeito... [573]

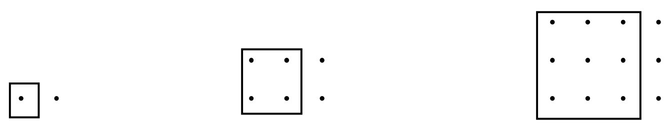


FIGURA 22 - Representação pictórica de um possível argumento de Marcelo

Essa subconfiguração classifica-se como *a-didática*, já que o grupo desenvolve o trabalho de maneira autônoma.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 15

A Prof 2 interrompe [575] a discussão do grupo, tentando fazer com que percebam que o número de bolinhas, que é acrescido de uma figura para a outra, não se mantém [576, 583].

> Prof 2: Olha só grupo... Olha pra cá... Tira (...) por favor... [575]
>
> Prof 2: Qual é a diferença da primeira figura para a segunda? [576]
>
> Marcelo: Aumentou 4. [577]
>
> Prof 2: Aumentou... [578]
>
> Marcelo: Mais um 'L'. [579]
>
> Paulo: 4! [580]
>
> Vanderlei: Mas a outra... [581]
>
> Paulo: Mas a outra não vai aumentar 4! [582]
>
> Prof 2: Daqui pra cá foi aumentando o mesmo tanto? [583]
>
> ?: Não. [584]
>
> Prof 2: Então?! Então, olha só... [585]
>
> Valter: ...vezes esse aqui vai achar 12. [586]
>
> Marcelo: Aumenta mais um 'L' como sempre... [587]
>
> Paulo: Não, não é isso também... [588]
>
> Marcelo: Não, mas aumenta um 'L'. [589]
>
> Paulo: É, aumenta. Professora, é a mesma regra do 'L', só que não tem o '-1'... [590]
>
> Prof 2: Então, olha só... [591]

O aluno Valter expõe para a Prof 2 seu raciocínio, aplicando-o à figura que ocupa a segunda posição da sequência [592, 594, 601]. A Prof 2 valida a resposta de Valter [604] e encaminha uma verificação da regra para as próximas figuras da sequência [604, 611, 613].

> Valter: A lateral é 2. Esse daqui é... 6. Vai dar... se você multiplicar, você acha 12! [592]
>
> Prof 2: Então, o que você fez aqui? Você pegou esse... [593]
>
> Valter: Esse é 2... [594]
>
> Prof 2: Vezes esse... [595]
>
> Valter: Vezes esse que é 3... [596]
>
> Prof 2: Deu quanto? [597]
>
> Valter: Aí deu... [598]

Prof 2: Aqui! [599]

Marcelo: 6! [600]

Valter: 2 x 3, 6![601]

Prof 2: Então, o que é que você fez? Fez esse vezes esse... [602]

Marcelo: 3 x 4, 12! [603]

Prof 2: Ótimo! A próxima vai ser o quê? [604]

Vanderlei: Vai ser 4 x 5.[605]

Prof 2: Então, agora pensa... [606]

Valter: Vai ser 4 x 5... [607]

Marcelo: É 4 x 5! [608]

Valter: 20! [609]

Prof 2: Hã... Hã... (*afirmativo*) [610]

Prof 2: E depois? [611]

Vanderlei: Depois é... 5 x 6... Vai dar ... 30! [612]

Prof 2: E a outra? [613]

Valter: E a outra... 6 x 7... Vai dar... 42! [614]

Essa subconfiguração didática classifica-se como *dialógica*, já que a Prof 2 interage com o grupo em um formato o qual permite que a exploração da tarefa fique a cargo dos alunos.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 16 (relativa aos itens *e* e *f* e ao registro escrito)

O aluno Paulo expressa com palavras, de maneira genérica, a regra de formação da sequência [615]. A Prof 2 a valida e Paulo, na expressão fisionômica, se mostra muito feliz [619].

Paulo: A lateral sempre vai ser uma a menos que a base. Você tem que multiplicar a base pela lateral para saber quanto é. [615]

Prof 2: Rurum... (*afirmativo*) [616]

Paulo: É isso? [617]

Prof 2: Rurum... (*afirmativo*) [618]

Paulo: Escreve isso aí, porque agora eu não lembro mais não! (*sorri*) [619]

Valter: Vocês não acreditaram no meu raciocínio... [620]

Paulo: Você explicou... explicou..., mas... [621]

Valter: Eu falei. Se você multiplicar esse daqui por esse daqui você acha isso! [622]

Paulo: Tá, mas o que resolveu? [623]

Valter: A base do raciocínio deu certo... [624]

Paulo: Você multiplicou isso por isso pra achar isso, seu normal? [625]

Valter: A base do raciocínio deu certo! [626]

Paulo: Não, não deu não! [627]

Valter: Deu sim! [628]

Paulo: Não deu não! [629]

Valter: Você multiplica esse daqui por esse daqui! [630]

Marcelo: Tá, você multiplica esse daqui por esse daqui você vai saber esse, você não vai saber o próximo! [631]

Paulo: Ô Valter, você tentou e tentou e não deu! [632]

Valter: A base do raciocínio deu certo (*fala um palavrão*)![634]

Marcelo: O que você falou mesmo Paulo, pra ela? [636]

Paulo: Ra! [637]

Vanderlei: Nem lembra mais![638]

Paulo: Que a lateral vai ser sempre... Não... A base vai ser sempre uma a mais que a lateral e para se saber é... qual a quantidade de bolinhas é preciso multiplicar a base pela lateral. Foi isso que eu falei e ela falou que está certo! [639]

No momento seguinte, os alunos passam novamente a trabalhar sozinhos e se dedicam ao registro escrito do item *c* da tarefa. O aluno Vanderlei explicita outra regularidade da sequência: o número de bolinhas da base de uma figura é igual ao número de bolinhas da lateral da figura seguinte [642], como ilustra a figura 23:

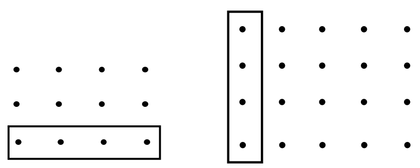


FIGURA 23 - Representação pictórica do argumento de Vanderlei

Marcelo: Que a base vai ter que ter mais um... [640]

Paulo: Um a mais que a lateral... [641]

Vanderlei: Você também pode falar que a base vai ter uma a mais (*quis dizer o mesmo número de bolinhas*) que a lateral da próxima. É...porque a base é quatro e a próxima lateral é quatro. [642]

?: É! Ela passa para a lateral de cá. [643]

> Marcelo: O que é mais fácil é que a lateral ...(*registra na folha enquanto fala*)[644]

O aluno Valter lê o enunciado do item *e* da atividade, a pedido de Marcelo, e tem início uma discussão acerca do número total de bolinhas da figura representada na 10ª posição. Vanderlei identifica que, na primeira posição, há uma bolinha na lateral; que na segunda, há duas; e que, portanto, na 10ª haverá 10 bolinhas na lateral e 11 na base [687].

> Marcelo: E a (*resposta*) da 10? Fala aí, a (*resposta*) da 10! [676]
>
> Vanderlei: Qual a 10ª figura? Ela tem quantos pontos? (*lê o item 'e' da atividade 3*) [677]
>
> Marcelo: Tá falando qual a da 10ª? [678]
>
> Paulo: Qual a 10ª figuraaa!!! Sabe ler não menino? [679]
>
> Marcelo: Qual a 10ª figura... [680]
>
> Paulo: Então?! [681]
>
> Marcelo: Então é 10 x 11! [682]
>
> Paulo: Não! [683]
>
> Marcelo: É sim! [684]
>
> Paulo: Vai ter 11 aqui e 10 aqui. [685]
>
> Valter: A base sempre vai ter... A lateral vai ter sempre uma bolinha a menos que a base. [686]
>
> Vanderlei: Aqui ó: é porque a primeira aqui (*refere-se à lateral)* tem 1, a segunda aqui tem 2, a terceira aqui tem 3, a quarta aqui tem 4, a quinta aqui tem 5... na décima aqui vai ter 10 e aqui vai ter 11... [687]
>
> Marcelo: Ô Vanderlei, cala a boca! [688]
>
> Marcelo: Então, o que eu tô falando? 10 x 11 é quanto? [689]
>
> Vanderlei: Vai ser 11 na base e 10 na lateral. [690]
>
> Paulo: 110! [691]

O grupo passa a discutir as respostas dadas para cada item da atividade, buscando padronizar os registros escritos. De fato, apesar de terem surgido ideias diferentes durante a discussão, nesta atividade, os registros escritos de todos os componentes do grupo são idênticos. Embora o aluno Vanderlei lembre ao grupo que "também tem aquela outra..." [715] e, mais adiante, que "também pode ser assim..." [720], referindo-se a uma outra possibilidade de resposta, prevalece a ideia de Paulo que a 'dita' em tom enfático [716, 721]. A Prof 2 apenas observa o trabalho do grupo, interferindo somente ao final, com o objetivo de fazer com que 'refinem' a resposta registrada para o item *f* [717].

?: Quantos pontos tem a 6ª figura? (*lê o item d da atividade 3*)[692]

Vanderlei: Qual é a resposta da *b*? [693]

Marcelo: Resposta da *b*? Desenhe. [694]

Paulo: *d* é 42. [695]

Vanderlei: Peraí... [696]

Paulo: *d* de dado é 42. [697]

Vanderlei: E a *c*? [698]

Paulo: Quantos pontos tem uma figura numa posição qualquer (*lê o item f da atividade 3*) [699]

Valter: A base tem sempre uma bolinha a mais que a lateral. [700]

?: O que você colocou? [701]

Marcelo: E a *c*, quer dizer? [702]

Paulo: A *c* o Valter fez... [703]

Valter:A base tem sempre uma bolinha a mais do que a lateral (*repete em tom de 'de novo'?*)[704]

Paulo: Qual que é a *c*? [706]

Marcelo: A *c* é a que o Valter colocou... [707]

Paulo: Tá. E a *e*? [708]

Marcelo: A base vezes a lateral com mais um. [709]

Marcelo: A base mais um... [710]

Valter: A base + 1 . a lateral (*como registrado na folha*) [711]

Paulo: A base sempre terá uma bolinha a mais e será multiplicada pela lateral (*fala em voz alta enquanto registra na folha*) [712]

Vanderlei: Também tem aquela outra que... [715]

Paulo: Não, a base sempre terá uma bolinha a mais e será multiplicada por ela. [716]

Prof 2: Tá, mas aí eu te pergunto: a mais que quem? Você está comparando ela com algo, não está? [717]

Marcelo: A mais que a lateral. [718]

Paulo: A mais que a lateral (*fala em voz alta enquanto registra na folha*) [719]

Vanderlei: Também pode ser tipo assim... Aqui é a primeira e ela tem um na lateral, essa aqui é a segunda e ela tem dois na lateral, essa aqui é a terceira e ela tem três na lateral, essa é a quarta e tem quatro na lateral. [720]

Paulo: A base sempre terá uma bolinha a mais que a lateral... [721]

A subconfiguração didática 16 classifica-se como *a-didática*, já que o grupo trabalha de maneira independente.

4. IDENTIFICAÇÃO DE OBJETOS E PROCESSOS MATEMÁTICOS (NÍVEL 2)

A partir da análise das práticas matemáticas (atos e processos de significação) explicitadas no nível 1 e utilizando como ferramenta teórica a *Configuração de objetos e significados*, foi possível explicitar os objetos matemáticos mobilizados na resolução da tarefa proposta na oficina 7 (encontrar uma expressão matemática que pudesse descrever o enésimo termo de cada uma das sequências indicadas). A linguagem utilizada (gestual, verbal, simbólica e gráfico-simbólica) consiste na parte ostensiva de uma série de definições/conceitos, proposições/propriedades e procedimentos que intervêm e condicionam a elaboração dos argumentos adotados pelos sujeitos desta pesquisa.

A figura 24 apresenta os objetos matemáticos mobilizados na resolução da situação-problema proposta – os elementos linguísticos explicitados, as definições explícita ou implicitamente utilizadas, as soluções apresentadas para cada uma das atividades, os procedimentos adotados e os argumentos utilizados para justificar as definições, soluções e/ou procedimentos – permitindo, ademais, a visualização das relações que estabelecem entre si.

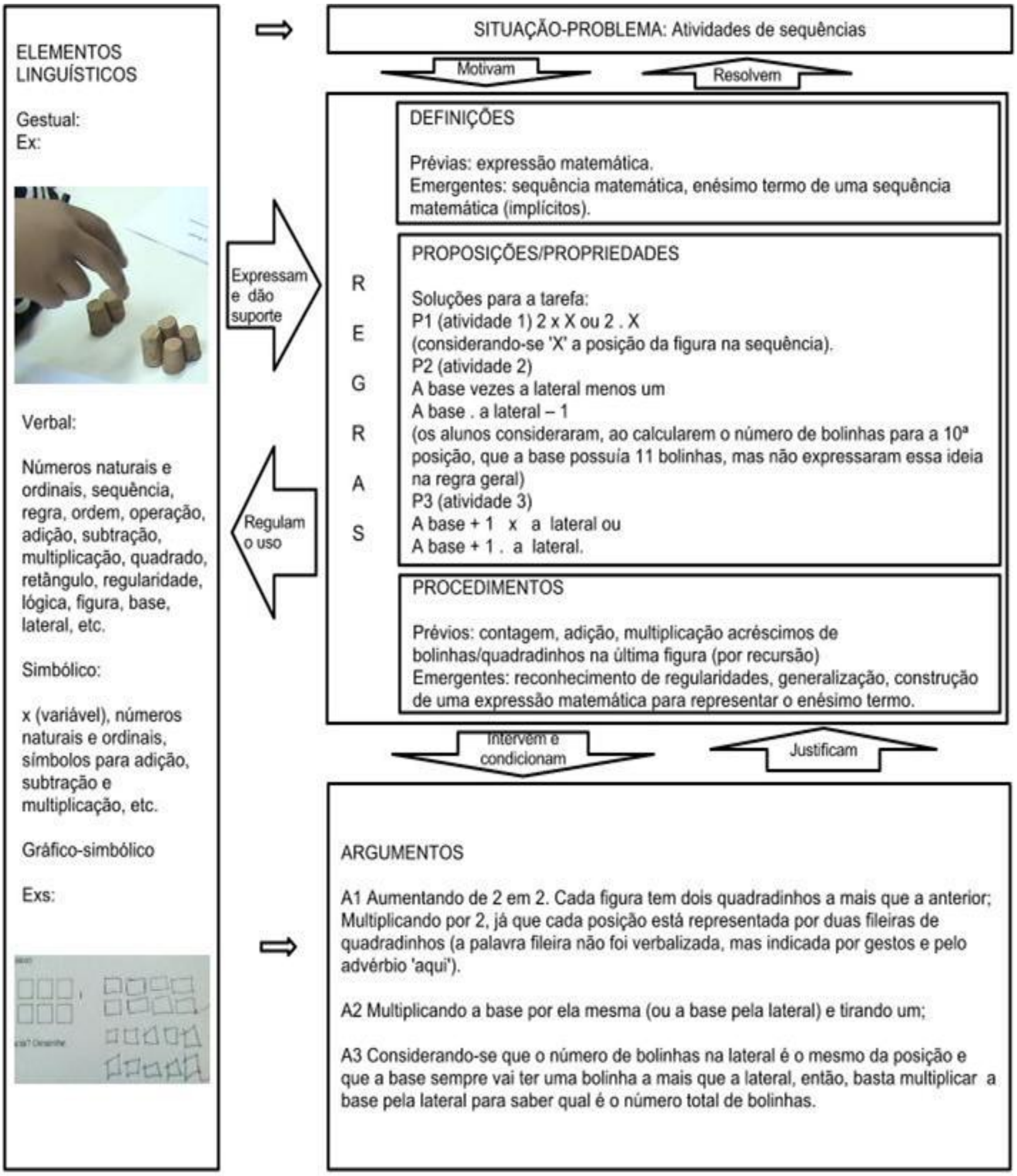


FIGURA 24 - Configuração epistêmica implementada na oficina 7

5. ANÁLISE DAS TRAJETÓRIAS E INTERAÇÕES DIDÁTICAS (NÍVEL 3)

As trajetórias didáticas são compostas por várias trajetórias simultâneas (docentes, discentes, mediacionais, cognitivas e afetivas). Neste trabalho, apresento-as como: trajetória docente, trajetórias discentes e cognitivo-afetivas e trajetória mediacional.

TRAJETÓRIA DOCENTE

A sequência de atividades que o professor realiza durante o processo de estudo, considerando as tarefas ou funções docentes, pode se caracterizar,[60] segundo Godino, Contreras e Font (2006, p. 13), em:

- P1: *Planejamento*: *design* do processo, seleção dos conteúdos e significados para o estudo (produção do significado pretendido e da trajetória epistêmica prevista).
- P2: *Motivação*: criação de um clima de afetividade, respeito e estímulo para o trabalho individual e cooperativo, a fim de que se envolva o processo de ensino.
- P3: *Atribuição* de tarefas: supervisão e controle do processo de estudo, distribuição do tempo, adaptação de tarefas, orientação e estímulo às funções dos alunos.
- P4: *Regulação*: estabelecimento de regras (definições, enunciados, explicações, resolução de problemas, exemplos), recuperação e interpretação de conhecimentos prévios necessários para a progressão do estudo e readaptação do planejamento previsto.
- P5: *Avaliação*: observação e avaliação do estado de aprendizagem atingido em momentos críticos (início, fim e durante o processo) e a resolução das dificuldades individuais observadas.
- P6: *Investigação*: reflexão e análise do desenvolvimento do processo, para introduzir mudanças em suas futuras implementações, assim como a articulação entre os diferentes momentos e etapas do processo de estudo.

Segundo Yackel e Cobb (1996), um dos papéis do professor numa aula de Matemática investigativa é facilitar discussões matemáticas. Ao mesmo tempo, o professor age como um participante que pode legitimar certos aspectos da atividade matemática dos alunos e, implicitamente, sancionar outros.

[60] Os autores esclarecem que essa categorização é uma proposta inicial que pode ser refinada e completada, sem que isso afete o tipo de análise que propõem.

Considerando-se as particularidades da atividade exploratório-investigativa, foram acrescidas mais três funções às apresentadas por Godino, Contreras e Font (2006): manejo de classe/regulação de tempo ou disciplina (MC), validação da solução encontrada (V), exploração conjunta professor-alunos (E).

Neste trabalho, utilizo as funções docentes citadas por Godino, Contreras e Font (2006) com as seguintes denominações: motivação (M), atribuição de tarefas (AT), regulação/lembrança e interpretação de conhecimentos prévios (R), avaliação (A), investigação/reflexão para mudança de rumos (I). Também são explicitados os padrões de interação mobilizados durante a trajetória.

CONFIGURAÇÃO DOCENTE 1 (Prof 2 - Atividade 1)

A Prof 2 pede aos alunos que utilizem o material concreto para representar a sequência [17, 24, 29], e, numa interação regulativa (R), vai levando os alunos a sentirem necessidade de generalizar. Para tanto, pede a eles que determinem o número de quadradinhos que terá a 34ª figura [34] e, logo a seguir, a 100ª figura [40] (R/AT) (*padrão de focalização*). Pede também aos alunos que confirmem o procedimento utilizado (E)[47] e, em seguida, apenas observa o trabalho do grupo, permitindo que continuem a desenvolver a atividade sozinhos.

> Prof 2 - Paulo, represente isso aqui, aqui pra mim... (*pede para que os alunos utilizem o material concreto*)[17]
>
> Prof 2: Não, peraí, essa aí foi a... 3ª figura, não é? 3ª figura, deixa eu colocar mais juntinho (*refere-se aos pininhos utilizados*). Qual vai ser a próxima? [24]
>
> Prof 2: Então, a próxima vai ser quanto? [29]
>
> Prof 2: E aí vai assim por diante, não é? Agora pensem da 1ª até..., por exemplo, a 34ª. Vamos pensar no 34º desenho? [34]
>
> Prof 2: A 100ª figura vai ter quantos quadradinhos? [40]
>
> Prof 2: Eu tô multiplicando por 2 ou eu tô... ou é outra operação? [47]

CONFIGURAÇÃO DOCENTE 2 (Prof 1 - Atividade 1)

A Prof 1 é comunicada que o aluno Paulo não está convencido de que na 15ª posição a figura apresenta 30 quadradinhos. Ela pede ao grupo que monte a sequência, utilizando material concreto até o 4º termo. Logo a seguir, pede ao Valter que diga qual é a regra de formação da sequência (R)[111]. Depois de validar a resposta de Valter (V/M)[115], pergunta a ele como pensou para obter o número de quadradinhos para a 15ª posição [115] (R) (*padrão de focalização*). O Marcelo responde a pergunta [121, 123]. A Prof 1 pede aos alunos que verifiquem se o procedimento também funciona para a 3ª figura (V/R) e Valter verifica tal fato [125].

Em seguida, a Prof 1 pergunta a Paulo qual é o número de quadradinhos da 100ª figura (R/AT) (*padrão de focalização*) e ele responde sem titubear [127]. A Prof 1 valida a resposta de Paulo (V/M)[128].

> Prof 1: Valter, conta pra mim como é que é a ordem da sequência. Qual é o 1º termo dela? [111]
>
> Prof 1: Então o raciocínio é que cada termo que vem depois tem 2 a mais que o anterior. Beleza! Aí agora como é que vocês pensaram... Por que sem fazer todos... Por que imagina até chegar no 15º, até no 15, né? Como é que você pensou para você dar a resposta para o 15? [115]
>
> Marcelo: É só... 15 x 2! (*carinha de 'claro!'*)[121]
>
> Prof 1: 15 x 2, é isso? [122]
>
> Marcelo: É. [123]
>
> Prof 1: Mas funciona? Por exemplo o 3º termo, seria o quê vezes o quê? [124]
>
> Valter: 2 x 3. [125]
>
> Prof 1: Por que é o 3º, né? Então, no 3º, fazemos 2 x 3. E no 100º, Paulo? [126]
>
> Paulo: 100 x 2. [127]
>
> Prof 1: 100 x 2. Muito bem! [128]

CONFIGURAÇÃO DOCENTE 3 (Prof 2 - Atividade 2)

A Prof 2 acompanha o trabalho do grupo, sem interferir na discussão, mantendo, inicialmente, um *padrão interrogativo* [194, 206].

> Prof 2: É isso, não é? [194]
>
> Prof 2: Olha só... Tem lógica, não tem não? [206]

Mais adiante, ela sugere aos alunos que pensem em uma figura geométrica [255]. A Prof 2 tenta, com essa mediação, fazer com que eles ultrapassem as dificuldades, mas deixa que continuem seu trabalho de forma autônoma (R) (*padrão de focalização*).

> Prof 2: Vocês chegaram a alguma conclusão? [249]
>
> Paulo: Não, a gente entendeu o que é. Só não tem como explicar a regra... [250]
>
> Marcelo: Tem uma explicação... Tipo uma explicação doida... [251]
>
> Prof 2: Tem. Vocês não conseguiram explicar ainda não? [252]
>
> Prof 2: Pensem em uma figura geométrica envolvida... [255]

Em um momento seguinte, o Paulo requisita a atenção da Prof 2, que faz uma série de perguntas, tentando inteirar-se do trabalho desenvolvido, e sugere ao grupo, buscando encaminhar a elaboração de uma expressão matemática que pudesse descrever o *enésimo* termo da sequência (R), uma relação entre a quantidade de pontos de cada figura e uma operação [301, 303, 309] (*padrão de focalização*). Porém, os alunos não conseguem progredir, como mostra o protocolo abaixo:

> Paulo: Talita (*refere-se à Prof 2*), a regra é mais 2 em cada coluna, não é? [298]
>
> Prof 2: Como é que vocês estão fazendo isso aqui? Quantos pontinhos tem em cada figura? Vocês estão desenhando? Não pensaram em nenhuma operação para ver a quantidade de pontos? [301]
>
> Prof 2: Vocês acham que não tem uma operação... [303]
>
> Prof 2: Vocês acham que não tem nenhuma conta que a gente pode relacionar aqui que vai dar esse tanto, aí depois a mesma que vai dar esse tanto? [309]
>
> Paulo: Pode ter alguma coisa a ver com o *x*. [314]
>
> Prof 2: Que *x*? [315]
>
> Prof 2: Humm... [317]

Os alunos voltam a conferir o número de bolinhas em cada posição (utilizam o material concreto para construir as figuras) e a Prof 2 passa a acompanhar, sem fazer grandes interferências (*padrão de discussão*), ainda que sugira implicitamente a ideia de pensarem em um quadrado (R)[333], a exploração realizada por eles.

> Valter: Aqui tem 8. [320]
>
> Prof 2: Aqui tem 8! [321]
>
> Prof 2: A próxima figura vai ter quanto? [324]
>
> Prof 2: A 4ª tem quanto? [327]
>
> Prof 2: Então, peraí. Vamos partir desta, tá? Tem quantos na coluna? [331]
>
> Prof 2: Vamos começar dessa. Tem 4 por 4. [333]
>
> Paulo: Uma linha tem 3. [334]
>
> Prof 2: Só a linha de cima que tem 3, não é? [335]
>
> Prof 2: Então, vamos montar a próxima que é a 4ª. Não é? Vamos ver se dá aqui... Me ajudem aqui... Vamos colocar aqui. Não, não! Deixa esta aqui. Vamos abrir a outra aqui, Paulo. Vai ter quantas aqui? [337]
>
> Prof 2: 5, né? E Vai ter 5 aqui também? [339]
>
> Prof 2: Assim, não é? [343]
>
> Prof 2: Tem quantas aqui? [353]
>
> Prof 2: Essa é a 3ª? A 4ª tem 24, a 5ª tem? [355]

Segue-se uma discussão, mediada pela Prof 2, com o intuito de estabelecer os acréscimos de bolinhas de uma figura para a outra, buscando comprovar que eles não se mantêm [363, 365, 377, 399, 406] e que, portanto, é inútil insistir nesse caminho [411]. A docente sugere, então, sutilmente, que os alunos relacionem o padrão da sequência a uma figura geométrica (R) (*padrão de focalização*) [411]. Interessante ressaltar que, nesse episódio, se torna explícita a necessidade de se confirmar o raciocínio dos alunos, mesmo quando nos parecem óbvios. No turno 386, a Prof 2 supõe que conhece o raciocínio de Paulo, quando, de fato, ele está raciocinando de maneira diversa àquilo que ela havia pensado [387].

> Prof 2: Tá aumentando. Só que a regularidade de uma figura para a outra foi aumentando? [363]
>
> Prof 2: Foi a mesma? [365]
>
> Prof 2: Então olha só... Da primeira pra segunda aumentou quanto? [367]
>
> Prof 2: Da 1ª pra 2ª. Da 2ª pra 3ª? [369]
>
> Prof 2: Gente! 7 mais quanto... [375]
>
> Prof 2: 7. Então, já não é o mesmo tanto... Cuidado com isso! Da 3ª pra 4ª aumentou quanto? [377]
>
> Prof 2: A 3ª figura vocês falaram que tem 15 bolinhas, não é? Que é essa daqui, não é? [380]
>
> Paulo: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9! [383]
>
> Prof 2: Aumentou quanto? [384]

> Vanderlei: 9. [385]
>
> Prof 2: Que conta você fez? Pegou o total aqui e diminuiu 15, não foi? [386]
>
> Paulo: Não. Eu só somei... [387]
>
> Prof 2: Aumentou 9. Dessa para a próxima, que vocês me falaram, vai aumentar quanto? [388]
>
> Prof 2: E da outra? Tá vendo que não é o mesmo tanto? De uma figura aumenta um tanto e de outra... [399]
>
> Prof 2: E aí vai aumentar quanto? [401]
>
> Prof 2: Tá vendo que não é o mesmo tanto... [406]
>
> Prof 2: E aí gente! Não era então o que vocês estavam pensando... Será que não tem nenhuma outra conta... Não estão lembrando nenhuma outra assim...figura?! [411]

CONFIGURAÇÃO DOCENTE 4 (Prof 1 - Atividade 2)

A Prof 1 começa sua intervenção, perguntando qual figura geométrica poderia ser relacionada com cada uma das figuras da sequência [431]. A interação que a Prof 1 estabelece aproxima-se do monologismo[61], já que opta por perguntas fechadas e específicas que requerem uma resposta convergente, aceitando como válidas apenas as respostas que considera corretas *(padrão de recitação)*.

> Prof 1: Essa figura parece o quê? O que tá parecendo essa aqui, ó? [431]
>
> Prof 1: Então? Como que a gente pode pensar então? Essa aqui parece um quadrado? [434]
>
> Paulo: Não. [435]
>
> Vanderlei: Parece. Só que tá faltando uma bolinha. [436]
>
> Prof 1: Essa aqui parece um quadrado? [437]
>
> Vanderlei: Parece. [438]
>
> Prof 1: Então, qual vai ser o próximo termo? Um quadrado faltando um. [439]
>
> Prof 1: Então! Como é que é Paulo? [442]

A Prof 1 valida a fala de Marcelo (V/M) [454] e ele segue testando a regra obtida para a figura seguinte [463]. No turno 466, a Prof 1 limita a ação de Paulo, afirmando que o

---

[61] O monologismo pressupõe pensamentos, asserções e proposições que são consideradas verdadeiras ou falsas independente de quem os enuncia; ou seja, o conteúdo desses pensamentos não é afetado pela sua fonte nem requer a voz ou o contexto particular de sua produção (MORSON e EMERSON, 2008).

raciocínio de Marcelo está correto (V), e já endereça a ele o pedido de calcular o termo seguinte [466].

> Marcelo: É 2 x 2, 4 - 1. [453]
>
> Prof 1: Isso! Muito bem! [454]
>
> Marcelo: Ah, tá. 4 x 4, 16. 16 - 1, 15. [463]
>
> Prof 1: 15! Aí a próxima figura seria... [464]
>
> Paulo: Tá errado. [465]
>
> Prof 1: Paulo, tá certinho. A próxima figura: 5 x 5? [466]
>
> Paulo: 25 [467]
>
> Prof 1: 25 -1? [468]

No momento seguinte, o grupo discute como registrar o item *e* da tarefa [475]. Prof 1 corrige o raciocínio de Valter [477, 488] (*padrão de recitação*) e, buscando garantir um trabalho com maior profundidade, chama a atenção do grupo para o fato de que, na base da figura, há sempre uma bolinha a mais que a posição a que esta se refere, e encaminha a tarefa de encontrar o número de bolinhas da base e o número de bolinhas total para a 11ª posição [474, 494, 496](AT/ R/MC). A Prof 1 valida a resposta do grupo, ao mesmo tempo em que o motiva a prosseguir. [498](V/M).

> Prof 1: Olhe uma coisa diferente que acontece. Na primeira figura... [474]
>
> Valter: É só você multiplicar a base por 2 e tirar - 1. [475]
>
> Paulo: Não... [476]
>
> Prof 1: A base vezes ela mesma. Tipo: 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4. A base vezes ela mesma. Ô gente, vocês estão me atrapalhando! (*chama a atenção de outro grupo*) [477]
>
> Valter: a base pela própria base aí você subtrai menos 1 e vai achar o resultado. [487]
>
> Prof 1: Fala de novo. [488]
>
> Valter: É a base... multiplicando a base pela própria base e você tira menos 1. [489]
>
> Prof 1: Isso! [490]
>
> Paulo: ou pela lateral! [491]
>
> Prof 1: Agora tem que prestar atenção no seguinte. Ponha o número 1 aqui pra mim, por favor. [492]
>
> Paulo: Professora! (*refere-se à Prof 1 - parece querer a confirmação de sua fala anterior*)[493]

> Prof 1: Peraí. Tipo assim: 1ª posição, 2ª posição, 3ª posição... Beleza! Presta atenção aqui, gente! Na 1ª posição tem 2 bolinhas. Na 2ª posição tem 3 bolinhas... Na 3ª, tem 4! É sempre uma bolinha... [494]
>
> Valter: A mais... [495]
>
> Prof 1: Então pensem comigo. Na 10ª posição, quantas bolinhas vamos ter? Na 10ª... [496]
>
> Paulo: Vai ter 11! [497]
>
> Prof 1: 11! Muito bem! Então vai ser 11... [498]
>
> Valter: ...vezes 11 menos um. [499]
>
> Prof 1: 11 x 11 - 1 que fica faltando sempre... Agora a regra geral seria: um lado vezes o outro menos 1. O lado é a posição mais um, certo? Anota aí pra mim! [500]

CONFIGURAÇÃO DOCENTE 5 (Prof 2 - Atividade 3)

A Prof 2 interrompe o trabalho do grupo (MC/R) [574, 575], chamando a atenção para a necessidade de se buscar uma regra de formação para a sequência e para o fato de o número de bolinhas de uma figura para a outra não se manter (*padrão de focalização*)[576].

> Prof 2: Eu ainda acho (...) tem que seguir a regra... É mais fácil. [574]
>
> Prof 2: Olha só grupo... Olha pra cá... Tira (...) por favor... [575]
>
> Prof 2: Qual é a diferença da primeira figura para a segunda? [576]

Durante a discussão realizada, o Valter explicita a regra que descobriu [586]. A Prof 2 mantém um diálogo com o grupo (*padrão de discussão*), buscando levá-lo a verificar a validade da regra explicitada (R) [597, 602, 610, 611, 613], mas permitindo que continuem a desenvolver o trabalho sozinhos.

> Valter: ...Vezes esse aqui vai achar 12. [586]
>
> Prof 2: Deu quanto? [597]
>
> Prof 2: Então, o que é que você fez? Fez esse vezes esse... [602]
>
> Prof 2: Hã... Hã... (*afirmativo*) [610]
>
> Prof 2: E depois? [611]
>
> Vanderlei: Depois é... 5 x 6... Vai dar ... 30! [612]
>
> Prof 2: E a outra?[613]
>
> Prof 2: Rurum... (*afirmativo*)[618]

A Prof 2, mais adiante, pergunta ao grupo sobre o trabalho desenvolvido (R) [646]; valida-o [654] (V) e passa a acompanhar o trabalho de registro da atividade a distância. Interfere uma única vez para pedir ao Paulo que complete a resposta dele (R) [717].

> Prof 2: Conseguiram alguma coisa? [646]
>
> Prof 2: Deu certo. [654]
>
> Paulo: Não, a base sempre terá uma bolinha a mais e será multiplicada por ela. [716]
>
> Prof 2: Tá, mas aí eu te pergunto: a mais que quem? Você tá comparando ela com algo, não está? [717]

TRAJETÓRIAS DISCENTES E COGNITIVO-AFETIVAS

O sistema de funções/ações que desempenha um aluno no processo instrucional é classificado[62] por Godino, Contreras e Font (2006, p. 16) em:

- A1: *Aceitação* do compromisso educativo, adotando uma atitude positiva para o estudo e cooperação com os pares.
- A2: *Exploração*, investigação, busca de conjecturas e formas de responder às questões levantadas.
- A3: *Recordação*, interpretação e seguimento das regras (conceitos e proposições) e do significado dos elementos linguísticos em cada situação.
- A4: *Formulação* de soluções às situações ou tarefas propostas, ao professor, a toda a turma ou dentro de um grupo.
- A5: *Argumentação* e justificação de conjecturas (ao professor ou aos colegas).
- A6: *Recepção* de informação sobre modos de fazer, descrever, nomear, validar.
- A7: *Demanda* de Informação: estados em que os alunos solicitam informações ao professor ou a outros alunos (por exemplo, quando não entendem o significado da linguagem utilizada ou não se lembram dos conhecimentos prévios necessários).
- A8[63]: *Exercitação*: realização de tarefas de rotina para dominar técnicas específicas.
- A9: *Avaliação*: estados nos quais o aluno realiza provas de avaliação propostas pelo professor, ou de autoavaliação.

---

[62] Esclarece-se que do artigo consta que essa relação é um primeiro inventário dos tipos potenciais de estados ou funções do estudante.

[63] As ações A8 e A9 não são condizentes ao trabalho aqui realizado e, portanto, não serão discutidas.

Nesta tese, utilizo as funções discentes apresentadas por Godino, Contreras e Font (2006), denominadas: comprometimento (C); exploração (E); recordação (R); formulação de soluções (S); justificação (J); pedido de informação (I); e demanda (D); e acrescento a essas a denominação E* para o momento da exploração em que ocorre uma descoberta.

CONFIGURAÇÃO COGNITIVO-AFETIVA DE MARCELO

Marcelo participa ativamente de toda a atividade (C). No início da atividade 1, identifica uma regularidade apresentada pela sequência (E)[49] e, mais adiante, utiliza como procedimento 'multiplicar por 2' (S)[62].

> Marcelo: Você está acrescentando 2. [49]
>
> Marcelo: 6ª figura? 6 x 2 é 12. E a 7ª? (*lê o item f*) [62]

Marcelo possui um raciocínio rápido e comumente realiza mentalmente os cálculos. O protocolo 75 permite-nos uma exemplificação do raciocínio desse aluno, já que, nesse momento, ele parece pensar 'em voz alta', ao mesmo tempo em que tenta convencer o colega Paulo de sua ideia. Ao invés de realizar simplesmente o cálculo 2 x 15, como o aluno Vanderlei já havia indicado [74], Marcelo, buscando uma nova maneira de argumentar, afirma que, se na 10ª posição há 20 bolinhas e na 5ª posição 10, na 15ª, haverá 30 (J)[75]. Como esse argumento também não convence Paulo, Marcelo segue insistindo [77, 79, 81] (J) e, finalmente, no turno 93, afirma que tanto a maneira como Paulo está pensando (acrescentar duas bolinhas à posição anterior) quanto a maneira que o grupo considera correta (multiplicar a posição por dois) funcionam. Depois que a Prof 1 valida o argumento de Marcelo, ele não perde a oportunidade de provocar o colega Paulo [143, 144, 145], que revida.

> Vanderlei:Vai dar 30. 2 x 15. [74]
>
> Marcelo: 2, 4, 6, 8, 10. Mais 5. Se 10 é 20, com mais 5, que é 10, vai dar 30. [75]
>
> Paulo: Não vai dar 30 quadrados. [76]
>
> Marcelo: Ô Talita (*refere-se à Prof 2*) dá um jeito! Ó, 8 deu 16, 9 vai dar 18, 10 vai dar 20. [77]
>
> Paulo: Aí daria 200, não adianta! [78]
>
> Marcelo: 8 vai dar 22... 8, não!11 vai dar 22, 12 vai dar 24... [79]

> Marcelo: Ô veio... se o 8 vai dar 16... 18 vai dar 9, 20 vai dar 10! 2, 4, 6, 8, 10! [81]
>
> Marcelo: Se você multiplica por 2, vai dar 4! Vai dar 2 a mais de qualquer jeito. 2 x 2 dá 4. [93]
>
> Marcelo: Você escutou ela falando, né?(*ri*) [143]
>
> Paulo: Leitinho (*refere-se a Marcelo em tom pejorativo*) [144]
>
> Marcelo: E você pensou que não era multiplicação! (*revide*)[145]

Na atividade 2, Marcelo começa a explorar as regularidades da sequência a partir do número de bolinhas que são acrescidas de uma figura para a outra (E), mas logo percebe que esse número não se mantém. Paulo explicita sua tentativa de explicar a regra de formação da sequência (caso particular para a 2ª posição) [181] e se acirram os ânimos entre eles [190, 192, 216, 217] quando Marcelo, de certa forma invalidando a regra proposta por Paulo, afirma ter certeza de que há outra regra [184, 186, 209, 215, 220, 222].

> Paulo: Olha só, aqui tem 3. Aí ele veio pra cá e aumentou uma fileira aqui e mais uma bolinha no meio, aí ficaram 6. Aí aqui ficaram 7, porque colocou mais uma bolinha e aumentou mais uma fileira... Aí aumentou mais uma fileira... [181]
>
> Prof 2: Rum... rum... [182]
>
> Paulo: Não é isso? (*dirige-se à Prof 2*) Viu? (*dirige-se a Marcelo*)[183]
>
> Marcelo: Mas tem outra regra! Eu tenho certeza. [184]
>
> Marcelo: Fazer 5 direto aqui... tem uma outra coisa... [186]
>
> Paulo: Essa é a regra, menino! É só você colocar mais um 'L'. [187]
>
> Paulo: A regra vai ser essa aqui, ó! Você aumenta um 'L' a mais! [189]
>
> Marcelo: O que o 'L' tem a ver com a Matemática? Eu sei que não é só isso. [190]
>
> Paulo: Isso aí não é um 'L' não, veio! Você não está percebendo o que eu fiz? [191]
>
> Marcelo: Eu sei o que você tá falando. [192]
>
> Marcelo: Tem uma explicação![209]
>
> Marcelo: Tem uma regra. [215]
>
> Paulo: Você não quer aceitar, chama a professora lá (*refere-se à Prof 1*). Ela sabe.[216]
>
> Marcelo: Ô veio, eu não tô falando isso não, tá certo. Eu tô falando que tem uma explicação pra isso... Igual aquele negócio de multiplicar mais 2 (*refere-se à regra descoberta para a atividade 1*). Tem uma regra![217]
>
> Marcelo: Ô Paulo, Paulo não... Ô Valter 2, 3 e 4. Tá aumentando sempre um. Tem um... tem uma multiplicação... tem um negócio aí... [220]

> Paulo: Multiplicação acho que não tem, veio. Você não tem como multiplicar aí, veio, porque a fileira ela vai sempre aumentar do lado então não tem como ter um número certo pra você falar é ele vezes ele... [221]
>
> Marcelo: Tem que ter uma explicação! [222]
>
> Paulo: Tem que ter, mas não é essa! [223]

Marcelo requisita esclarecimentos (I) [224] e Paulo dá-lhe instruções de como construir a 4ª figura. Marcelo acata o passo a passo sugerido por Paulo [230, 232], mas acabam por discordar [234] quando Marcelo explicita mais uma regularidade da sequência (S)[234] e Paulo afirma que ele deve ter feito "alguma coisa estranha" [235], já que "a regra não deu" [237].

> Marcelo: Como é que faz aqui? Na próxima figura o que é mesmo? [224]
>
> Paulo: Você vai colocar aqui 1, 2, 3. [225]
>
> Paulo: Ah, tá. Então essa bolinha você risca e faz uma embaixo. Aí agora você faz pra lá. [229]
>
> Marcelo: Pra cá? [230]
>
> Paulo: Não. Pra lá. [231]
>
> Marcelo: Acabou? [232]
>
> Paulo: Tem mais uma aqui, tem uma bolinha aqui. Peraí. 1, 2, 3, 4. 1, 2, 3, 4. [233]
>
> Marcelo: Aqui em cima também aumenta 2 e 3. Aqui tem que ser 4. [234]
>
> Paulo: Você fez alguma coisa estranha...[235]
>
> Marcelo: Não fiz não... [236]
>
> Paulo: Fez sim, porque a regra não deu... [237]

Quando interpelado pela Prof 2 sobre qual figura geométrica poderia ser relacionada com cada figura da sequência [255], Marcelo responde prontamente que é o "quadrado" (E) [256]. Paulo não concorda com essa resposta [257] e Marcelo tenta argumentar [258], mas essa ideia não é explorada nesse momento.

> Prof 2: Pensa em uma figura geométrica envolvida... [255]
>
> Marcelo: Quadrado. [256]
>
> Paulo: Não. Quadrado não tem uma bolinha, né, fio? [257]
>
> Marcelo: (*inaudível*) [258]

Mais adiante, Paulo e Marcelo estabelecem uma 'disputa' de quem consegue descobrir a regra de formação da sequência. Paulo começa, dizendo que acha que já sabe [273] e, em resposta, Marcelo afirma que também já sabe [274]. Marcelo passa, então, a explicitar sua ideia – descobre (E*) que na sequência que representa o número de bolinhas que são acrescidas de uma figura para a outra (5, 7, 9, 11...) cada termo é o anterior acrescido de dois [286, 293, 295, 300] – mas o grupo parece não entender/acompanhar seu raciocínio [287] e acaba por desconsiderá-lo.

> Paulo: Veio, eu acho que já sei! [273]
>
> Marcelo: Eu também sei! Descobri! (*gargalhadas*) Descobri a regra... Descobri a regra... (*cantando*). Saca só... [274]
>
> Paulo: Vai dar 35 mais 2. [275]
>
> Marcelo: Descobri a regra... Descobri a regra... (*cantando*). [277]
>
> Marcelo: 2, 3, 4, 5, 6... [280]
>
> Marcelo: Essa aí tem 35. [281]
>
> Vanderlei: Não, essa daqui é a 4ª! [282]
>
> Paulo: Essa não pode ter 41. Porque você esqueceu de descer essa coluna aqui pra emendar com essa. Você só fez a de baixo! [283]
>
> Vanderlei: Tem que bater mais uma coluna aqui em cima? [284]
>
> Paulo: É... Tem que fazer mais um 'L'. [285]
>
> Marcelo: De 2 em 2, de novo![286]
>
> Paulo: Não tem cabimento, veio! [287]
>
> Marcelo: Vem aqui comigo: 3... [288]
>
> Marcelo: Ó, de novo, aumenta sempre 2: 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,12! [293]
>
> Paulo: Que 12? Aqui tem 3, aqui tem 8. [294]
>
> Marcelo: Ó, 3! Aqui tem 1, 2, 3, 4, 5! 5, 6, 7. 2 + 2. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, mais 2 de novo... [295]
>
> Paulo: Tá, mas não tá pedindo regra... [296]
>
> Marcelo: Tá, mas com a regra é melhor! [297]
>
> Marcelo: 1, 2, 3 + 2. 1, 2, 3, 4, 5 + 2. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 + 2. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 + 2 [300]

Por fim, Marcelo vai até o grupo 1, considerado pela turma o mais 'brilhante', e volta alardeando que descobriu a regra. Reflete, no entanto, sobre a resposta 'consultada' – na verdade o que vê é um registro incompleto – afirmando que "não tem condições de ser ela" [420]. Mais adiante, conduz corretamente a verificação da regra para casos particulares (primeira, segunda e terceira posições) (E) [453, 455, 463]. Apesar dessa comprovação, no momento de fazer o registro do item *e* da atividade 2 [516], opta por escrever o que viu registrado na folha do colega [520].

> Marcelo: É. 2 x 2, 4 - 1. [453]
>
> Marcelo: É 3 x 3, 9 - 1.[455]
>
> Marcelo: Ah, tá. 4 x 4, 16. 16 - 1, 15.[463]
>
> Vanderlei: Peraí! Quantos pontos tem uma figura numa posição qualquer? [516]
>
> Valter: A base vezes a lateral... (*voz gutural*)[517]
>
> Marcelo: Não é isso. [518]
>
> Paulo: É. [519]
>
> Marcelo: É -1 vezes -1 vezes -1! Eu colei dele ali... [520]

Marcelo inicia a atividade 4, procurando por regularidades a partir do número de bolinhas que são acrescidas de uma figura para a outra. Nessa busca, consegue encontrar uma, mas não a desenvolve, muito provavelmente, por não conseguir validá-la, já que efetua equivocadamente a multiplicação 3 x 3 [563] (E*), o que o leva a discutir com Paulo nesse momento [569, 570, 571, 572, 573].

> Marcelo: Muito óbvio! 2 x 2, 4 mais 2, 6. **3 x 3, 6** mais 3, 8. [563]
>
> Paulo: Vai multiplicar alguma coisa... [564]
>
> Prof 1: 3 x 3? [565]
>
> Marcelo: Ah, 9! [566]
>
> Paulo: 3 x 3, quanto você falou que era? [567]
>
> Marcelo: Falei 8... Falei 6! Eu confundi... [568]
>
> Paulo: Nossa Senhora! Se mata, menino! [569]
>
> Marcelo: Quem vai fazer eu me matar! [570]
>
> Paulo: Não vai fazer falta não... Normal! [571]
>
> Paulo: 3 x 3 agora é 8, veio! [572]
>
> Marcelo: O meu tá certo de qualquer jeito... [573]

A Prof 1 passa a mediar a discussão e Marcelo acompanha o raciocínio (E)[603, 608] desenvolvido pelo colega Valter [592]. Mais adiante apoia Paulo, quando requisita a autoria da descoberta, argumentando que a descoberta de Valter trata-se da regra de formação para um caso particular (J) [631].

> Valter: A lateral é 2. Esse daqui é... 6. Vai dar... se você multiplicar, você acha 12! [592]
>
> Marcelo: 3 x 4, 12! [603]
>
> Marcelo: É 4 x 5! [608]
>
> Valter: Você multiplica esse daqui por esse daqui! [630]
>
> Marcelo: Tá, você multiplica esse daqui por esse daqui, você vai saber esse, você não vai saber o próximo! [631]

Marcelo passa ao registro escrito da atividade 3, começando pelo item *f*. Nesse momento, desconsidera a resposta de Vanderlei [644], adotando a apresentada por Paulo [636, 640, 644] e provocando um revide por parte de Vanderlei [645]. Segue para o item *e* e novamente não permite que o colega Vanderlei exponha sua ideia [688, 689].

> Marcelo: O que você falou mesmo Paulo, pra ela? [636]
>
> Paulo: Ra! [637]
>
> Vanderlei: Nem lembra mais! [638]
>
> Paulo: Que a lateral vai ser sempre... Não... A base vai ser sempre uma a mais que a lateral e para se saber é... qual a quantidade de bolinhas é preciso multiplicar a base pela lateral. Foi isso que eu falei e ela falou que está certo! [639]
>
> Marcelo: Que a base vai ter que ter mais um... [640]
>
> Vanderlei: Você também pode falar que a base vai ter uma a mais que a lateral da próxima. É...porque a base é quatro e a próxima lateral é quatro. [642]
>
> Marcelo: O que é mais fácil é que a lateral (*registra na folha enquanto fala*)[644]
>
> Vanderlei: O mais doido... Quanto que é 3 x 3? 8! [645]
>
> Vanderlei: Aqui ó: é porque a primeira aqui (*refere-se à lateral*) tem 1, a segunda aqui tem 2, a terceira aqui tem 3, a quarta aqui tem 4, a quinta aqui tem 5... na décima aqui vai ter 10 e aqui vai ter 11... [687]
>
> Marcelo: Ô Vanderlei, cala a boca! [688]
>
> Marcelo: Então, o que eu tô falando? 10 x 11 é quanto?[689]
>
> Vanderlei: Vai ser 11 na base e 10 na lateral. [690]
>
> Paulo: 110![691]

CONFIGURAÇÃO COGNITIVO-AFETIVA DE PAULO

Paulo se mostrou muito animado com a atividade (C) nessa oficina (e também nas anteriores), começou fazendo os registros requeridos na atividade 1 [5] e pedindo esclarecimentos sobre o item *d* (I)[13]. No entanto, tem pressa para concluir seus pensamentos, aferrando-se às respostas que considera corretas e apresenta, por isso, em vários momentos, dificuldade em reestruturar suas ideias a partir da discussão realizada pelo grupo.

Na atividade 1, logo no início da oficina, afirma que a regra de formação da sequência é de "dois em dois"[9] e responde corretamente que na 100ª posição há 200 quadradinhos (S) [41]. Quando a Prof 2 questiona o grupo [47], Paulo entende que sua resposta deve estar equivocada e, voltando à ideia inicial de que cada nova figura da sequência tem dois quadradinhos a mais que a anterior, reformula sua resposta, afirmando que na 100ª posição há 102 quadradinhos (não considera que a posição anterior é a 99ª e que, portanto, tem 198 quadradinhos) [53]. Apesar de os colegas do grupo se esforçarem para convencê-lo de que seriam 200 quadradinhos, Paulo não se deixa convencer [91], como explicitado no protocolo a seguir:

> Paulo: Aí tem... 5. Tá, *d*. Observando a sequência, quantos quadrinhos tem em cada figura? (*lê em voz alta o item d*) Hã? Não entendi não! [5]
>
> Paulo: Tá, mas tá falando em cada! Não entendi não. Ô professora, vem cá! Ô Talita! Não, Talita... serve. Como assim, observando a sequência, quantos quadrinhos tem em cada figura? [13]
>
> Prof 2: A 100ª figura vai ter quantos quadradinhos? [40]
>
> Paulo: 200. [41]
>
> Prof 2: Eu tô multiplicando por 2 ou eu tô... ou é outra operação?[47]
>
> Paulo: Ah, é... Vai dar 102... [53]
>
> Paulo: Aí tá multiplicando e a 102 você viu que não é multiplicar.[63]
>
> Marcelo: 15ª vai dar 30. [71]
>
> Paulo: Não vai dar 30! [72]
>
> Paulo: Aí daria 200, não adianta! [78]
>
> Paulo: Peraí... 2 mais 2, 4, mais 2, 8, mais 2...16, mais 2...20, mais 2...22 (*faz a contagem*), vai dar mais... Tá estranho! [80]
>
> Paulo: Não é 15 de cada lado! É? [82]
>
> Paulo: Não é! Porque a de 100 não dá. [87]
>
> Vanderlei: Conta pra você ver, então! [88]
>
> Paulo: Tá, essa daí dá, veio, mas a de 100 não dá! [89]
>
> Marcelo: Se vou colocar 100 aqui e 100 aqui, vai dar 200!!!! [90]

> Paulo: Mas a regra é dois a mais que o próximo (*quer dizer anterior*), não é multiplicar por 2! [91]

No turno 91, Paulo explicita sua crença de que só pode existir uma regra, não considerando outras possibilidades, o que o leva a não aceitar a regra estabelecida pelo grupo de se 'multiplicar a posição por 2', já que considera que a correta é 'acrescentar dois à posição anterior'. Apenas quando ocorre a interferência da Prof 1 [126] Paulo parece 'ouvir' aquilo que o grupo discute e reconsidera sua resposta [127].

> Prof 1: Por que é o 3º, né? Então, no 3º, fazemos 2 x 3. E no 100º, Paulo? [126]
>
> Paulo: 100 x 2. [127]

Na atividade 2, ocorre um episódio semelhante. Paulo encontra uma maneira de explicar a formação da figura que ocupa a 2ª posição da sequência (S/J) [181] (Figura 15). Como recebe a validação por parte da Prof 2 [182] – para o caso particular da 2ª posição – se mantém preso a essa ideia, negando-se a acompanhar as tentativas do grupo de encontrar uma regra geral de formação para a sequência. Quando a Prof 2 pede a ele que desenhe as próximas figuras da sequência [211] ele se nega, afirmando que já entendeu [212]. Como os colegas continuam afirmando que 'tem uma regra', Paulo diz que devem então chamar a Prof 1 [216], que é vista por ele como a figura de 'máxima autoridade'. A partir da regularidade observada, Paulo consegue, no entanto, ajudar o grupo na construção das figuras seguintes da sequência (E), assumindo, por fim, quando perguntado se chegaram a alguma conclusão [249], pela professora Prof 2, que não conseguiram generalizar [250].

> Paulo: Olha só, aqui tem 3. Aí ele veio pra cá e aumentou uma fileira aqui e mais uma bolinha no meio, aí ficaram 6. Aí aqui ficaram 7, porque colocou mais uma bolinha e aumentou mais uma fileira... Aí aumentou mais uma fileira... [181]
>
> Prof 2: Rum... rum... [182]
>
> Paulo: Não é isso? (*dirige-se à Prof 2*) Viu? (*dirige-se a Marcelo*)[183]
>
> Marcelo: Mas tem outra regra! Eu tenho certeza. [184]
>
> Prof 2: Ô Paulo, tem que desenhar pelo menos mais uma figura para vocês entenderem... [211]
>
> Paulo: Não. Eu já entendi. [212]
>
> Marcelo: Tem uma regra. [215]

> Paulo: Você não quer aceitar, chama a professora lá (*refere-se à Prof 1*). Ela sabe. [216]
>
> Prof 2: Vocês chegaram a alguma conclusão? [249]
>
> Paulo: Não, a gente entendeu o que é. Só não tem como explicar a regra... [250]

Paulo apresenta um jeito meio rígido de pensar, mas é admiravelmente persistente. Enquanto não recebe a aprovação das professoras, ainda que mantenha uma carinha meio 'emburrada', não desiste da atividade (C). No episódio que se segue, Paulo afirma que a figura envolvida na sequência da atividade 2 não é um quadrado porque "... quadrado não tem uma bolinha (*a menos*)" (J)[257]. Marcelo parece contra-argumentar (fala inaudível), mas Paulo insiste que não é um quadrado, afirmando que "... É igual a todo mundo ter um tênis, menos eu. Então não é todo mundo mais!" [259]. Esse argumento faz com que o grupo não se dedique, nesse momento, a explorar a ideia de que as figuras da sequência da atividade 2 podem ser pensadas como 'quadrados' faltando uma bolinha.

No final da oficina, no entanto, quando a Prof 1 pergunta ao grupo com qual figura se parece a sequência representada na atividade 2 [431], Paulo responde que é "quase um quadrado" [433]. Ainda que afirme que a figura seguinte, da mesma sequência, não se parece um quadrado [435], parece por fim convencer-se [441, 443] no momento em que a Prof 1, depois de ignorar sua resposta, valida (indiretamente) a resposta de Valter [437].

> Prof 1: Essa figura parece o quê? O que tá parecendo essa aqui, ó?[431]
>
> Vanderlei: Um quadrado, só que tá faltando uma bolinha... [432]
>
> Paulo: Quase um quadrado. [433]
>
> Prof 1: Então? Como que a gente pode pensar então? Essa aqui parece um quadrado? [434]
>
> Paulo: Não. [435]
>
> Vanderlei: Parece. Só que tá faltando uma bolinha. [436]
>
> Prof 1: Essa aqui parece um quadrado? Então, qual que vai ser o próximo termo? Um quadrado faltando um. [437]
>
> Vanderlei: Parece. [438]
>
> Prof 1: Então, qual vai ser o próximo termo. Me conta. Como é que é? [439]
>
> Vanderlei: É um quadrado... [440]
>
> Paulo: É um quadrado... Ahhhhhhhhhh.... (*sorrindo*) [441]
>
> Prof 1: Então... Como é que é Paulo? [442]
>
> Paulo: Seria um quadrado, menos uma parte... [443]

Quando a Prof 2 pergunta se há uma operação que possa explicar a formação da sequência [309], Paulo diz que não [310], mas logo em seguida participa ativamente (C) da exploração regulada por Prof 2, como explicita o extrato a seguir. Durante quase todo o desenvolvimento da atividade, ele se mostra pronto para fazer as verificações necessárias, como explicita o turno 392.

> Prof 2: Vocês acham que não tem nenhuma conta que a gente pode relacionar aqui que vai dar esse tanto, aí depois a mesma que vai dar esse tanto? [309]
>
> Paulo: Acho que não. [310]
>
> Prof 2: A próxima figura vai ter quanto? [324]
>
> Paulo: 35. [325]
>
> Prof 2: Então, vamos montar a próxima que é a 4ª. Não é? Vamos ver se dá aqui... Me ajudem aqui... Vamos colocar aqui. Não, não! Deixa esta aqui. Vamos abrir a outra aqui, Paulo. Vai ter quantas aqui? [337]
>
> Paulo: 5. [338]
>
> Paulo: A 4ª tem 25? Não é! 24. [349]
>
> Paulo: Tem 24. [352]
>
> Prof 2: Tá aumentando. Só que a regularidade de uma figura para a outra foi aumentando? [363]
>
> Paulo: Não. [364]
>
> Prof 2: Foi a mesma? [365]
>
> Paulo: Não, peraí... [366]
>
> Prof 2: Então olha só... Peraí... 2 minutos. Da primeira para a segunda aumentou quanto? [367]
>
> Paulo: 5. [368]
>
> Prof 2: Da 1ª pra 2ª. Da 2ª pra 3ª? [369]
>
> Paulo: Aumentou... [370]
>
> Prof 2: Aumentou 9. Dessa para a próxima, que vocês me falaram, vai aumentar quanto? [388]
>
> Paulo: Peraí. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, eu acho... Peraí. [389]
>
> Paulo: Peraí. Me empresta aí, Prof 2. Vou precisar... [392]
>
> Paulo:1, 2, 3, 4, 5. Aí vai descer mais uma aqui, 6... [394]
>
> Prof 2: Você quer mais bolinhas? [395]
>
> Paulo: Não. 6, 7, 8, 9, 10. Vai aumentar 11. [396]

Mais adiante, Marcelo enuncia a regra da sequência a partir de exemplos particulares [453, 455, 458]. Paulo afirma que isso ele já sabia [457], mas parece não reconhecer, nesse momento, que se trata de uma maneira de descrever a regra de formação da sequência [465]. A Prof 1, no entanto, diz a ele "que está certinho" e o questiona sobre o próximo termo [466]. Nesse momento, Paulo não só aceita a regra como consegue reelaborá-la (S)[479], discutindo com Valter que "a base pela lateral também dá" [481]. Paulo chama a Prof 1 [493], talvez para buscar confirmação dessa ideia, mas ela, que se preocupa em fazer com que os alunos percebam que na primeira posição há duas bolinhas na base, pede para que espere [494] e a pergunta de Paulo se perde. Do registro escrito de Paulo, no entanto, para o item *e* da tarefa, consta 'A base vezes a lateral e tirar 1'. O aluno mantém sua ideia apesar de ela não ter sido validada pela Prof 1.

> Marcelo: É. 2 x 2, 4 - 1. [453]
>
> Marcelo: É 3 x 3, 9 - 1. [455]
>
> Paulo: Isso aí eu já sei que é menos 1. [457]
>
> Marcelo: Mas essa que é a regra! Presta atenção: 4 x 4, 8. Aqui tem 15, né? [458]
>
> Marcelo: Ah, tá. 4 x 4, 16. 16 - 1, 15. [463]
>
> Prof 1: 15! Aí a próxima figura seria... [464]
>
> Paulo: Tá errado.[465]
>
> Prof 1: Paulo, tá certinho. A próxima figura: 5 x 5? [466]
>
> Paulo: 25. [467]
>
> Prof 1: 25 - 1. [468]
>
> Paulo: Então, ela tem 24. [469]
>
> Paulo: A base pela lateral menos um![479]
>
> Paulo: Ou pela lateral![491]
>
> Prof 1: Agora tem que prestar atenção no seguinte. Ponha o número 1 aqui pra mim, por favor.[492]
>
> Paulo: Professora! (*refere-se à Prof 1 - parece querer a confirmação de sua fala anterior*) [493]
>
> Prof 1: Peraí. Tipo assim: 1ª posição, 2ª posição, 3ª posição... Beleza! Presta atenção aqui, gente! Na 1ª posição tem 2 bolinhas. Na 2ª posição, tem 3 bolinhas... Na 3ª, tem 4! É sempre uma bolinha... [494]

Paulo inicia a atividade 3, participando ativamente da sua exploração (E). Mais adiante, a Prof 2 regula a discussão, encaminhando uma regra geral para a formação da sequência, e Paulo, por fim, explicita que a lateral vai ter sempre uma bolinha a menos que a base (E*)[615], mostrando-se, nesse momento, claramente feliz [619].

Paulo: Sequência. Vai aumentar a mesma coisa. [527]

Valter: Aumenta mais 2. [528]

Paulo: Não. [529]

Paulo: Só que nem todos aumenta menos... mais 4! [537]

Paulo: Não, nem todas aumenta mais 4. [540]

Paulo: Qual a próxima figura dessa sequência (*lê*). Tá, uma é 12... mas a próxima acho que não vai ser 24! Ou vai? [557]

Valter: 2, aqui tem 2... multiplicar por essa aqui que tem 6... 12! [559]

Paulo: Tá, mas e daí? Hã! Hã! Você explicou, explicou, e não explicou nada! [560]

Valter: Você vai somar esse daqui e vai achar o produto. [561]

Paulo: Tá, você vai achar... [562]

Prof 2: Qual é a diferença da primeira figura para a segunda? [576]

Paulo: 4! [580]

Vanderlei: Mas a outra... [581]

Paulo: Mas a outra não vai aumentar 4! [582]

Marcelo: Aumenta mais um 'L' como sempre... [587]

Paulo: Não, não é isso também... [588]

Marcelo: Não, mas aumenta um 'L' [589]

Paulo: É, aumenta. Professora, é a mesma regra do 'L', só que não tem o -1... [590]

Valter: A lateral é 2. Esse daqui é... 6. Vai dar... se você multiplicar, você acha 12! [592]

Prof 2: Então, o que é que você fez? Fez esse vezes esse... [593]

Paulo: A lateral sempre vai ser uma a menos que a base. Você tem que multiplicar a base pela lateral para saber quanto é. [615]

Prof 2: Rurum...[616]

Paulo: É isso? [617]

Prof 2: Rurum... (*afirmativo*)[618]

Paulo: Escreve isso aí porque agora eu não lembro mais não! (*ri*) [619]

No final da oficina, o grupo dedica-se ao registro escrito da atividade e Paulo 'comanda' o ritmo (C)[675].

Paulo: Espera! Vai! [675]

Marcelo: Resposta da *b*? Desenhe. [694]

Paulo: *d* é 42. [695]

Paulo: *d* de dado é 42.[697]

> Vanderlei: E a *c*? [698]
>
> Paulo: A *c* o Valter fez... [703]
>
> Paulo: Tá. E a *e*? [708]

CONFIGURAÇÃO COGNITIVO-AFETIVA DE VALTER

Logo no início da atividade 1, ao observar os desenhos da sequência (E), Valter identifica que, de uma figura para a outra, são acrescidos 2 quadradinhos (S)[12, 26, 28]. Ao ser questionado pela Prof 1 sobre a 100ª posição da sequência, Valter, no entanto, sofistica seu raciocínio, afirmando que se deve multiplicar (a posição) por dois (E*)[45]. Passa, a partir desse momento, somente a acompanhar a discussão do grupo sem oferecer contribuições.

> Valter: 2, 4, 6, 8... (*voz gutural parecendo indicar que é óbvio*)[12]
>
> Prof 2: Não, peraí, essa aí foi a... 3ª figura, não é? 3ª figura, deixa eu colocar mais juntinho (*refere-se aos pininhos utilizados*). Qual que vai ser a próxima? [24]
>
> Paulo: De 8! [25]
>
> Valter: 6 + 2 (*fala simultânea à anterior*)[26]
>
> Prof 2: Por quê? [27]
>
> Paulo e Valter: Por que tá de 2 em 2. [28]
>
> Prof 2: A 100ª figura vai ter quantos quadradinhos? [40]
>
> Prof 2: Como é que você sabe?[43]
>
> Valter: Você multiplica por 2... [45]

Quando a Prof 2 se aproxima do grupo, Valter comenta com ela o fato de Paulo não concordar que a 15ª posição tem 30 quadradinhos [94]. A Prof 2 o questiona sobre a regra de formação da sequência, ao que ele responde: "Você soma mais 2 que o anterior que é 2 (refere-se ao primeiro termo da sequência), aí ficam 4" (S)[112], e, mais adiante, "A gente pensou em só multiplicar..." (S)[116]. No turno 114, Valter indica que a sequência é infinita com a expressão "Aí vai".

> Valter: Ele tá duvidando que não é 30! [94]
>
> Prof 1: Aí soma mais 2 e você obtém o 3º termo, não é isso? Que tem quantos? [113]

Valter: 6. Mais 2... Aí vai. [114]

Na atividade 2, Valter participa ativamente da exploração em busca de regularidades (E) [152, 161, 166, 171, 173, 178, 210], principalmente verificando as hipóteses do grupo. Concordando com Marcelo, quando esse rejeita a regra particular explicitada por Paulo, afirma também que há uma regra geral para a sequência [208, 218], exemplificando-a como "multiplicar *x* por qualquer número" [219] e, mais adiante, como construída por 'Ls' (S)[247], ideia inicialmente explicitada por Paulo [187].

Valter: Não é de 3 em 3. [152]

Valter: 14. Aqui tem 14 (*equivocado, a 3ª posição tem 15 bolinhas*), aqui tem 8 e aqui tem 3. [161]

Valter: 3 vai acumular mais 15 vai ficar 18. [166]

Marcelo: Eu entendi. 3 pra 8. Adiciona mais 5. Com 8 mais 5... [170]

Valter: Mais 7... [171]

Valter: Aqui não tá aumentando uma bolinha não... [173]

Valter: Tem lógica... [178]

Marcelo: Fazer 5 direto aqui... tem uma outra coisa... [186]

Paulo: Essa é a regra, menino! É só você colocar mais um 'L'. [187]

Valter: Tem uma explicação. [208]

Valter: Aqui tem 8. Pra encontrar 15, mais 7... [210]

Valter: Tem uma regra! [218]

Paulo: O Valter conseguiu desenhar, por que você não conseguiu?[246]

Valter: Tinha que fazer um 'L', Leitinho (*refere-se a Marcelo*). Fazer um 'L' aqui, um 'L' aqui e um 'L' aqui. [247]

A discussão realizada pelo grupo sobre o fato de cada figura da sequência ter as bolinhas dispostas no formato de um quadrado contribui para que Paulo aceite essa ideia, afirmando: "É só pensar em um quebra-cabeça sem uma peça" (J)[456]. Na discussão final, quando a Prof 2 chama a atenção para o fato de a primeira posição da sequência ter duas bolinhas na base, Valter explicita a regra de formação da sequência, afirmando primeiro que "É só você multiplicar a base por 2 e tirar -1" [475] e, mais adiante, corrigindo essa ideia, após a intervenção da Prof 1 [477], que é "A base por ela mesma e tira 1"(S)[478].

> Prof 1: A base vezes ela mesma. Tipo: 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4. A base vezes ela mesma. Ô gente, vocês estão me atrapalhando! (*chama a atenção de outro grupo*) [477]
>
> Valter: A base por ela mesma e tira 1. [478]

No momento posterior, Valter passa a discutir com Paulo sobre o uso das expressões "a base pela lateral" [479], sugerida e, seguidamente, defendida por Paulo [481, 483,491], e "a base pela base" [480], indicada pela Prof 1 e adotada por ele, ainda que no turno 517, ao responder uma pergunta do colega Vanderlei [516], acabe por utilizar a expressão 'a base pela lateral', a qual tanto contestou. Quando Marcelo discorda de sua afirmação [517], Valter chama-o pejorativamente de "Leitinho" [525] e reclama de ele ter 'consultado' outro grupo [523].

> Paulo: A base pela lateral menos um! [479]
>
> Valter: A base pela base (*voz gutural*)[480]
>
> Paulo: Tá, a base pela lateral também dá. [481]
>
> Valter: A base pela base! [482]
>
> Paulo: Mas a base pela lateral também dá!!!! [483]
>
> Valter: A base pela própria base. Aí, você subtrai menos 1 e vai achar o resultado. [487]
>
> Prof 1: Fala de novo. [488]
>
> Valter: É a base... multiplicando a base pela própria base e você tira menos 1. [489]
>
> Prof 1: Isso![490]
>
> Paulo: Ou pela lateral![491]
>
> Vanderlei: Peraí! Quantos pontos tem uma figura numa posição qualquer? [516]
>
> Valter: A base vezes a lateral... (*voz gutural*) [517]
>
> Marcelo: Não é isso. [518]
>
> Valter: Você fica colando dos outros, para com isso! [523]
>
> Valter: Leitinho, Leitinho... [525]

Na atividade 3, Valter participa mais ativamente e, como na atividade 1, rapidamente identifica a regra de formação da sequência (S)[559, 561]. Os colegas não acompanham seu raciocínio e seguem em busca de outras ideias. Durante essa exploração do grupo, Valter continua tentando comunicar seu raciocínio [592, 601, 607, 614], que, finalmente, é melhor explicitado por Paulo [615], o qual, recebendo a validação por parte da Prof 1 [618], acaba por receber os 'louros' da autoria. Valter passa, então, a discutir com o grupo, afirmando que a "base do raciocínio" tinha sido dele e que "deu certo", ao que os colegas discordam, afirmando que seu raciocínio se referia a um caso particular [631] e que ele "tentou e não deu" [633]. A discussão só termina quando Valter diz um palavrão, logo após afirmar que "a base do raciocínio deu certo" [634].

> Valter: 2, aqui tem 2... multiplicar por essa aqui que tem 6... 12! [559]
>
> Valter: Você vai somar esse daqui e vai achar o produto. [561]
>
> Valter: A lateral é 2. Esse daqui é... 6. Vai dar... se você multiplicar, você acha 12! [592]
>
> Valter: 2 x 3, 6! [601]
>
> Valter: Vai ser 4 x 5... [607]
>
> Valter: E a outra... 6 x 7... Vai dar... 42! [614]
>
> Paulo: A lateral sempre vai ser uma a menos que a base. Você tem que multiplicar a base pela lateral para saber quanto é. [615]
>
> Paulo: É isso? [617]
>
> Prof 2: Rurum... (*afirmativo*)[618]
>
> Valter: Vocês não acreditaram no meu raciocínio... [620]
>
> Paulo: Você explicou... explicou... mas... [621]
>
> Valter: Eu falei. Se você multiplicar esse daqui por esse daqui você acha isso! [622]
>
> Paulo: Tá, mas que resolveu? [623]
>
> Valter: A base do raciocínio deu certo... [624]
>
> Paulo: Você multiplicou isso por isso pra achar isso, seu normal? [625]
>
> Valter:A base do raciocínio deu certo! [626]
>
> Paulo: Não, não deu não! [627]
>
> Valter: Deu sim! [628]
>
> Paulo: Não deu não! [629]
>
> Valter: Você multiplica esse daqui por esse daqui! [630]
>
> Marcelo: Tá, você multiplica esse daqui por esse daqui, você vai saber esse, você não vai saber o próximo! [631]
>
> Paulo: Ô Valter, você tentou e tentou e não deu![633]
>
> Valter: A base do raciocínio deu certo (*fala um palavrão*)! [634]

No momento final da atividade, quando o grupo dedica-se ao registro escrito, Valter participa ativamente, contribuindo com a elaboração de todas as respostas [665, 689, 700, 711].

Valter: A base da figura pela lateral da figura... [665]

Marcelo: Então, o que eu tô falando? 10 x 11 é quanto? [689]

Valter: A base tem sempre uma bolinha a mais que a lateral.[700]

Valter: A base + 1 . a lateral (*como registrado na folha*)[711]

CONFIGURAÇÃO COGNITIVO-AFETIVA DE VANDERLEI

Na atividade 1, Vanderlei rapidamente descobre a regra de formação da sequência (S). Durante toda a oficina, apesar de não se pronunciar muito, se mostra atento ao que está sendo discutido (C). No início da atividade, após longo tempo em silêncio, suas falas indicam não só que acompanhou a discussão, como não se deixou levar [48, 74, 83, 85, 86, 88] pelas dúvidas dos colegas [72, 82, 87] nem pela confirmação requerida pela professora [47].

Prof 2: Eu tô multiplicando por 2 ou eu tô... ou é outra operação?[47]

Vanderlei: Não, é por causa que você bota... 2 x 1 = 2...[48]

Marcelo: 15ª vai dar 30.[71]

Paulo: Não vai dar 30![72]

Vanderlei: Vai dar 30. 2 x 15.[74]

Paulo: Não é 15 de cada lado! É?[82]

Vanderlei: É![83]

Paulo: 2, 4, 6, 8, 10,12... (*faz a contagem*)[84]

Vanderlei: 13, 14, 15! 15 de cada lado.[85]

Vanderlei: É só multiplicar: 2 x 1= 2, 2 x 2= 4...[86]

Paulo: Não é! Porque a de 100 não dá.[87]

Vanderlei: Conta pra você ver então![88]

No final da atividade 1, Vanderlei, a partir das perguntas realizadas pela Prof 1 [136, 138, 140], consegue chegar a uma expressão matemática que descreve a regra de formação da sequência proposta na referida atividade (E*) [141].

Prof 1:A sequência também é infinita, não é? Lá no infinito, quantos pininhos teriam? [134]

Paulo e Valter: Infinitos... [135]

Prof 1: Qual seria a continha que a gente faria? [136]

> Vanderlei: 2 vezes o número. [137]
>
> Prof 1: Vocês estudaram em equação... Quando a gente quer representar um número... [138]
>
> Todos: *x*![139]
>
> Prof 1: Exatamente, então qual seria a regra da sequência se a gente usasse a letrinha *x*?[140]
>
> Vanderlei: 2 vezes *x*.[141]

Vanderlei não é um aluno a quem o grupo dá muito crédito [179], talvez pelo fato de ele não falar muito. Na atividade 2, no entanto, ele utilizou como procedimento principal a contagem (E), o que fez com que os colegas confiassem mais em suas respostas, como se pode comprovar no protocolo a seguir [266, 267, 268, 510, 513]:

> Vanderlei: Ninguém nunca concorda comigo em Matemática não... (*as falas anteriores estão inaudíveis*) [179]
>
> Vanderlei: 35. [265]
>
> Paulo: Tem certeza? [266]
>
> Vanderlei: Eu contei.[267]
>
> Paulo: Ah, então tá bom. [268]
>
> Valter: E a 6ª figura? [509]
>
> Vanderlei: Dá 49 e vai ter que tirar mais um, dá 48. Eu contei. [510]
>
> Paulo: 48! [511]
>
> Marcelo: A 6ª, 48? Tem certeza? Absoluta? [512]
>
> Vanderlei: Eu contei.[513]

É importante destacar, ainda na atividade 2, as intervenções de Vanderlei em relação à posição e ao número total de bolinhas de cada figura [282, 326, 382]. O fato de a primeira figura possuir duas bolinhas na base fez com que o grupo confundisse, a todo momento, a quantidade total de bolinhas com a posição a que se referia, e Vanderlei, nesses momentos, esclareceu as dúvidas dos colegas sem hesitar.

> Marcelo: Essa aí tem 35. [281]
>
> Vanderlei: Não, essa daqui é a quarta! [282]
>
> Vanderlei: Não, a próxima figura não vai ter 35 não. Essa aqui é a 3ª. A 4ª... Aqui não pede a 4ª não, pede a 5ª já. A 5ª é 35. [326]
>
> Prof 2: A 3ª figura vocês falaram que tem 15 bolinhas, não é? Que é essa daqui, não é? [380]

> Marcelo: A 4ª é 35? [381]
>
> Vanderlei: Não. A quarta é 24. [382]

Ao final da atividade 2, Vanderlei confirma que a figura representada na sequência analisada se parece com um quadrado faltando uma bolinha (S) [436, 438, 440], ajudando o grupo na construção da regra de formação da sequência.

> Prof 1: Então? Como que a gente pode pensar então? Essa aqui parece um quadrado?[434]
>
> Paulo: Não. [435]
>
> Vanderlei: Parece. Só que tá faltando uma bolinha. [436]
>
> Prof 1: Essa aqui parece um quadrado? Então, qual que vai ser o próximo termo? Um quadrado faltando um. [437]
>
> Vanderlei: Parece. [438]
>
> Prof 1: Então, qual vai ser o próximo termo. Me conta. Como é que é? [439]
>
> Vanderlei: É um quadrado... [440]

Vanderlei participa da exploração da atividade 3, discutindo sobre o número de bolinhas que aumentam de uma figura para a outra (E). Nesse momento, identifica uma característica das figuras envolvidas na sequência, comparando-as com a sequência proposta na atividade 2 (E) [535]. Ao final dessa atividade, quando o grupo registra o item *c*, Vanderlei descobre outra regularidade (E*)[642]. O grupo parece não 'ouvir' o que ele diz, ainda que insista em sua ideia em um momento mais à frente [652]. Vanderlei usa a extensão dessa ideia para calcular o número de bolinhas da 10ª figura da sequência (item *e*) [687]. Ao fazerem o registro escrito para o item *f*, ele tenta novamente argumentar que há outra maneira de responder [715, 720], mas o grupo ignora seu argumento. Do registro escrito de Vanderlei, não constam as ideias que ele buscou comprovar na discussão com o grupo. A falta dessa comprovação fez com que seu registro fosse idêntico ao do grupo. Importante ressaltar que ele revida a não validação dos colegas às suas ideias com frases que se aproximam à zombaria [638, 644].

> Valter: Aumenta mais 4... [534]
>
> Vanderlei: Só que essa daqui não, tira aquele '-1' não. [535]
>
> Valter: Essa daqui é completa... [536]
>
> Marcelo: O que você falou mesmo Paulo, pra ela? [636]

> Paulo: Ra! [637]
>
> Vanderlei: Nem lembra mais! [638]
>
> Vanderlei: Você também pode falar que a base vai ter uma a mais que a lateral da próxima. É... porque a base é quatro e a próxima lateral é quatro. [642]
>
> Vanderlei: O mais doido... Quanto que é 3 x 3? 8! [644]
>
> Vanderlei: Eu acho que a base... a base de uma (*da primeira*) passa para a lateral da segunda! [652]
>
> Vanderlei: Aqui ó: é porque a primeira aqui (*refere-se à lateral*) tem 1, a segunda aqui tem 2, a terceira aqui tem 3, a quarta aqui tem 4, a quinta aqui tem 5... na décima aqui vai ter 10 e aqui vai ter 11... [687]
>
> Vanderlei: Também tem aquela outra que... [715]
>
> Vanderlei: Também pode ser tipo assim... Aqui é a primeira e ela tem um na lateral; essa aqui é a segunda e ela tem dois na lateral; essa aqui é a terceira e ela tem três na lateral; essa é a quarta e tem quatro na lateral.[720]

TRAJETÓRIA MEDIACIONAL

Nesta oficina, foram utilizadas rolhas, principalmente no início da atividade, para simular os quadradinhos e bolinhas que formam as figuras das sequências geométricas analisadas.

Essa tarefa poderia ter sido realizada sem o uso do material concreto (tangível), uma vez que os alunos utilizaram o material apenas quando solicitados pelas professoras, preferindo fazer os desenhos.

O tempo foi suficiente apenas para o desenvolvimento da primeira parte da atividade, porque, no caso do grupo analisado, não foi desenvolvida a Tarefa investigativa 1: 'Sequências de bolinhas e suas formas' (Anexo 1), já que o grupo gastou muito mais tempo do que o previsto para identificar os padrões de formação das sequências analisadas.

Terminada a análise das configurações e trajetórias didáticas, dedico-me à análise da trama de normas e metanormas, que não só regulam a dimensão epistêmica dos processos de ensino e aprendizagem (níveis 1 e 2), como também outras dimensões desses processos (cognitivo-afetiva, por exemplo). No quarto nível de análise, estuda-se a referida trama.

6. IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA DE NORMAS E METANORMAS (NÍVEL 4)

Nesta seção, identifico normas originadas principalmente dos pressupostos e do caráter aberto das tarefas exploratório-investigativas (assim como metanormas associadas a elas) e normas *epistêmicas* originadas da resolução da tarefa proposta.

Entendo por normas *epistêmicas*, assim como D'Amore, Font e Godino (2007), as configurações de objetos que regulam a prática matemática em um marco institucional. Cada componente da configuração de objetos está relacionado com normas metaepistêmicas. As normas *epistêmicas* foram identificadas (Figura 24), utilizando-se a ferramenta *Configuração de objetos e significados*, proposta pelo EOS (GODINO, CONTRERAS e FONT, 2006).

O grupo analisado neste trabalho, assim como toda a turma, ressentiu-se muito, nas primeiras oficinas, com o fato de as professoras **não aportarem todas as informações ou não darem a solução direta para o problema** (norma *metainstrucional*), principalmente quando o grupo se encontrava em um momento crítico/chave da resolução da tarefa.

No momento em que essa oficina é realizada (trata-se da 7ª oficina), o grupo analisado já consegue trabalhar de forma mais independente. Tal fato se deve ao entendimento construído pelo grupo, ao longo das oficinas, de que o trabalho com as atividades exploratório-investigativas exige que **os alunos assumam a responsabilidade da resolução da tarefa** (norma *metainstrucional*).

Nessa oficina, o grupo parece apresentar mais confiança no trabalho que realiza, o que, infiro, advém do fato de, a partir de um processo de *metacognição didática,*[64] aceitar as normas como inerentes ao trabalho e passar então a tomar a iniciativa de buscar resolver a tarefa, sem requisitar ajuda constante por parte das professoras.

As normas descritas são suportadas pelo pressuposto assumido no trabalho com atividades exploratório-investigativas, segundo o qual, caso se pretenda promover uma aprendizagem significativa, o **professor deve levar os alunos a construir o entendimento** (norma *metainstrucional*). Deve dar suporte à aprendizagem proporcionando 'andaimes', mas não deve, por exemplo, dar respostas prontas.

Segundo Godino, Font, Wilhelmi e Castro (2009), um importante estímulo para o estudo da Matemática está na eleição dos tipos de situações-problema, tarefas, atividades concretas que o professor propõe aos alunos. O modelo 'instrucional' que adota em classe – tipos de configurações e trajetórias didáticas que organiza e administra – condiciona as

[64] Metacognição relacionada ao ensino e aprendizagem. Para mais detalhes ver D'Amore, Font e Godino (2007).

oportunidades de aprendizagem dos alunos e pode despertar maior compromisso com o estudo.

A norma *metainstrucional* **deve-se propiciar situações em que os alunos se dediquem à descoberta** gerou a norma *afetiva* relacionada à **autoria da descoberta da solução**. Após a resposta de Paulo ser validada pela Prof 2, o Valter, que tinha enunciado a regularidade em questão [559], reivindica a autoria da descoberta [620, 622, 624]. Paulo e Marcelo, no entanto, não lhe dão o crédito da descoberta, argumentando que ele "explicou, mas não explicou nada" [621] ou ainda que o que ele tinha explicitado se referia a uma posição específica da sequência [631].

> Valter: 2, aqui tem 2... multiplicar por essa aqui que tem 6... 12! [559]
>
> Paulo: Tá, mas e daí? Hã! Hã! Você explicou, explicou e não explicou nada! [560]
>
> Valter: Você vai somar esse daqui e vai achar o produto. [561]
>
> Valter: Vocês não acreditaram no meu raciocínio... [620]
>
> Paulo: Você explicou... explicou... mas... [621]
>
> Valter: Eu falei. Se você multiplicar esse daqui por esse daqui você acha isso! [622]
>
> Paulo: Tá, mas o que resolveu? [623]
>
> Valter: A base do raciocínio deu certo... [624]
>
> Paulo: Você multiplicou isso por isso pra achar isso, seu normal? [625]
>
> Valter: A base do raciocínio deu certo! [626]
>
> Paulo: Não, não deu não! [627]
>
> Valter: Deu sim! [628]
>
> Paulo: Não deu não! [629]
>
> Valter: Você multiplica esse daqui por esse daqui! [630]
>
> Marcelo: Tá, você multiplica esse daqui por esse daqui você vai saber esse, você não vai saber o próximo! [631]

Durante toda a oficina, é estabelecida a norma *metaepistêmica* de que **é necessário chegar a uma explicação, uma regra**. Depois de pedir aos alunos que verifiquem os termos iniciais da sequência e a percebam como infinita, implícita na fala da Prof 2 – "E aí vai assim por diante, não é?" [34], a Prof 2 diz aos alunos que "... tem que tentar pensar!" [38] indicando que é necessário que se generalize o pensamento. De fato os alunos, em vários momentos, explicitam ter consciência dessa norma [208, 209, 250, 251], como destacado no extrato a seguir:

Valter: Tem uma explicação. [208]

Marcelo: Tem uma explicação! [209]

Prof 2: Vocês chegaram a alguma conclusão? [249]

Paulo: Não, a gente entendeu o que é. Só não tem como explicar a regra... [250]

Marcelo: Tem uma explicação... Tipo uma explicação doida... [251]

Mais adiante, essa metanorma também é explicitada pela Prof 1: "Aí agora como é que vocês pensaram... Porque sem fazer todos. Por que imagina até chegar ao 15º, até o 15, não é?" [115]. No final da oficina, também o Marcelo parece justificar a **necessidade de se generalizar** (norma *metaepistêmica*). No referido episódio, o Paulo acompanha a explicação de Marcelo e, para 'não dar o braço a torcer', afirma que no item que estão desenvolvendo não é requisitada uma regra [296], ao que Marcelo contesta, dizendo que "com a regra é melhor" [297], argumento também confirmado pela Prof 2 no turno 574: "... tem que seguir a regra. É mais fácil".

Também é explicitada a norma *metaepistêmica* de que **é necessário testar a regra**. Depois que a Prof 1 encaminha a verificação dos quatro primeiros termos, os alunos explicitam uma regra (multiplicar por 2), no caso, para a atividade 1, e são questionados pela referida professora: "Mas funciona? Por exemplo, o 3º termo seria o que vezes o que?" [124].

Mais adiante, Paulo afirma que o colega "fez alguma coisa estranha" [235], quando a regra considerada válida parece não funcionar para um caso específico.

Paulo: Você fez alguma coisa estranha... [235]

Marcelo: Não fiz não... [236]

Paulo: Fez sim, porque a regra não deu... [237]

Quando a regra é colocada em dúvida, os alunos, durante toda a oficina, recorrem à **contagem como um procedimento garantido** [88], explicitando que **a contagem proporciona certeza absoluta de que uma resposta está correta** [266, 268, 512, 513] (normas *metaepistêmicas*).

Paulo: Não é! Porque a de 100 não dá. [87]

Vanderlei: Conta pra você ver então! [88]

Vanderlei: 35. [265]

Paulo: Tem certeza? [266]

> Vanderlei: Eu contei. [267]
>
> Paulo: Ah, então tá bom. [268]
>
> Paulo: 48! [511]
>
> Marcelo: A 6ª, 48? Tem certeza? Absoluta? [512]
>
> Vanderlei: Eu contei. [513]

Enquanto os alunos se aferram à norma da contagem como um (quiçá o único) procedimento confiável, as professoras se empenham em convencer os alunos de que se deve buscar a generalização, e de que, nos casos em que a atividade 'exige' uma regra ou fórmula, o procedimento de contagem, ou de **fazer desenhos para posições particulares, não é considerado válido** [301] (norma *metaepistêmica*). Esse *conflito de normas* será explorado, mais detalhadamente, no capítulo V. Por hora, destaco os turnos a seguir como exemplo do supracitado encaminhamento dado pelas professoras, no caso, a Prof 2:

> Prof 2: Como é que... Peraí, rapidão! Só uma coisa aqui... Como é que vocês estão fazendo isso aqui? Quantos pontinhos tem em cada figura? **Vocês estão desenhando?** Não pensaram em nenhuma operação para ver a quantidade de pontos? [301]
>
> Todos: Não. [302]
>
> Prof 2: Vocês acham que não tem uma operação... [303]
>
> Marcelo: Ter uma operação tem! [304]
>
> Paulo: A gente só não sabe... [305]
>
> Prof 2: Uai, então vamos pensar! [306]
>
> Prof 2: Vocês acham que não tem nenhuma conta que a gente pode relacionar aqui que vai dar esse tanto, aí depois a mesma que vai dar esse tanto? [309]

Foram identificadas também outras normas *metaepistêmicas* que regulam as interações e dão formato à participação dos alunos e professoras, que não necessariamente se referem a práticas matemáticas e que cito a seguir:

Se o professor questiona sua resposta é porque, muito provavelmente, ela deve estar equivocada. No extrato a seguir, a Prof 1 questiona a resposta dada pelo grupo [47] e desconcerta os alunos Marcelo [49, 51] e Paulo [53]. Valter não se manifesta e Vanderlei não se abala, reafirmando sua resposta [48, 50].

> Prof 2: Eu tô multiplicando por 2 ou eu tô... ou é outra operação? [47]

Vanderlei: Não, é por causa que você bota... 2 x 1 = 2... [48]

Marcelo: Você está acrescentando 2. [49]

Vanderlei: 2 vezes o 1... [50]

Marcelo: Vai dar 102 (*fala simultânea à anterior*). [51]

Prof 2: A 1ª com 2, a 2ª com 4, a 3ª com... [52]

Paulo: Ah, é... Vai dar 102... [53]

A Prof 1 requisita ao Valter a "ordem da sequência" [111], querendo se referir, no entanto, à regra de formação da sequência. Valter compreende o que a professora quer dizer, explicitando a norma metaepistêmica de que, **em uma comunicação, se interpreta os enunciados contextualmente e não literalmente** (norma *metaepistêmica*).

Prof 1: Valter, conta pra mim como é que é a **ordem da sequência**. Qual é o 1º termo dela? [111]

Valter: Você soma mais 2 que o anterior que é 2, aí fica 4. [112]

Quando a professora faz uma pergunta, é preciso que se responda algo, ainda que não faça muito sentido. No episódio selecionado, os alunos parecem dar respostas aleatórias apenas por terem sido questionados.

Prof 2: Vocês acham que não tem nenhuma conta que a gente pode relacionar aqui que vai dar esse tanto, aí depois a mesma que vai dar esse tanto? [309]

Paulo: Acho que não. [310]

Marcelo: 4 x 2... 8. [311]

Paulo: acho que é adição professora. [312]

Marcelo: Não, tem outra coisa. [313]

Paulo: Não tem não! Pode ter alguma coisa a ver com o *x*. [314]

Prof 2: Que *x*? [315]

Paulo: Não sei. [316]

Prof 2: Humm... [317]

A resposta para duas perguntas diferentes não pode ser a mesma:

Paulo: Se tem duas perguntas, quer dizer que a resposta não é igual, não! (*refere-se aos itens c e f da atividade 3*) [705]

7. AVALIAÇÃO DA ADEQUAÇÃO DIDÁTICA DO PROCESSO VIVIDO (NÍVEL 5)

A adequação didática de um processo de ensino e aprendizagem é avaliada a partir de uma articulação coerente e sistêmica das adequações: epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica. A identificação dessas seis adequações parciais permite considerar o processo como idôneo. Pochulu e Font (2011) ressaltam, no entanto, que conseguir identificar uma só adequação é relativamente fácil, mas é difícil conseguir a presença equilibrada das seis adequaçãos. Como estratégia de organização e apresentação da análise dos dados, optei por agrupar as adequaçãos nos seguintes pares: epistêmica-ecológica, cognitivo-afetiva e interacional-mediacional. Passo, a seguir, a analisar a adequação do processo vivido na oficina 7.

ADEQUAÇÃO EPISTÊMICA-ECOLÓGICA

A tarefa proposta promoveu oportunidade de problematização, exploração, argumentação, validação e justificativa, além de se apresentar em uma linguagem adequada para o nível dos alunos. A adequação epistêmica pode ser classificada, portanto, como *moderadamente alta.*

O tema sequências e padrões é contemplado pelas diretrizes curriculares do 7º ano, mas as atividades, como implementadas, não tiveram o objetivo de promover a formação de valores democráticos e/ou o desenvolvimento do pensamento crítico, nem a preocupação em serem relacionadas com conteúdos interdisciplinares. Sendo assim, a adequação ecológica global pode ser considerada *mediana*.

ADEQUAÇÃO COGNITIVO-AFETIVA

Os alunos mostraram ter o conhecimento prévio necessário para o desenvolvimento da tarefa proposta, sendo as atividades (levando-se em conta linguagem, definições, enunciados e procedimentos) de nível adequado de dificuldade, considerando-se os alunos a que se dirigiram.

Ao comparar os conhecimentos que pretendemos mobilizar com a configuração epistêmica implementada (Figura 24), foi constatado que o grupo conseguiu expressar o *enésimo* termo da sequência, através de uma expressão matemática, apenas na atividade 1.

Nas atividades 2 e 3, conseguiu expressá-lo com palavras, mas, no registro escrito, em ambas as atividades, não levou em consideração que o número de bolinhas da base é um a mais, considerando-se a posição que o *enésimo* termo ocupa na sequência.

Todos os integrantes do grupo apresentaram compreensão da situação proposta e se mostraram motivados e perseverantes durante toda a atividade. Os alunos, em alguns momentos, apresentaram situações de 'atrito', desqualificando a resposta do outro ou revidando uma zombaria. Na maioria do tempo, no entanto, trabalharam efetivamente em grupo, dando suporte um ao outro e corroborando os argumentos dos colegas que consideravam pertinentes.

O grupo se dedicou predominantemente à exploração (E). Marcelo foi o que mais justificou suas ideias (J); e Valter, o aluno que mais formulou soluções (S). Vanderlei e Marcelo foram os alunos que fizeram mais descobertas a partir da exploração.

As professoras, ao longo de todo o trabalho, mantiveram uma interação firme e afetiva com o grupo, permitindo que desenvolvessem sozinhos a atividade, mas acompanhando de perto o que ocorria (principalmente a Prof 2).

Concluindo, o processo vivido apresentou fortes evidências de uma adequação cognitivo-afetiva *mediana*.

ADEQUAÇÃO INTERACIONAL-MEDIACIONAL

Na oficina 7, em consonância com as normas e metanormas estabelecidas, as professoras combinaram que deixariam o grupo trabalhar da maneira mais autônoma possível. Sendo assim, o diálogo e a comunicação entre os estudantes foram favorecidos e estimulados. De fato, em vários momentos os estudantes assumem a responsabilidade do estudo (propõem questões, exploram regularidades, apresentam soluções), buscando convencerem a si mesmos e aos demais colegas da validade de suas afirmações, conjecturas e respostas, apoiando-se em argumentos, ainda que, em sua maioria, procedimentais. Em outros momentos, no entanto, o grupo mostrou-se paralisado, fazendo com que as professoras sentissem necessidade de 'descumprir' o combinado inicial e passassem a regular fortemente a interação, para que o grupo conseguisse progredir. As Prof 1 e Prof 2 se preocuparam preponderantemente com o papel de validação (V), seguidos do papel de atribuição de tarefa (AT) e manejo de classe (MC). Ainda assim, as subconfigurações didáticas foram interpretadas como predominantemente *a-didáticas*, seguidas das *dialógicas*, permitindo que a adequação interacional seja interpretada como *mediana*.

Foram usados materiais manipulativos, os quais permitiram realizar explorações e validar resultados, para posições particulares da sequência, através da contagem. O número de alunos em sala (15) e o fato de estarem distribuídos em grupos permitiram que fosse respeitado o tempo próprio de cada grupo para o desenvolvimento da atividade. Merece destaque a presença de duas professoras em sala, o que permitiu um atendimento individualizado. O tempo disponível para a realização da atividade foi adequado. Não houve tempo para que o grupo analisado neste trabalho realizasse a tarefa investigativa 'Sequências de bolinhas e suas formas' (Anexo 1), como ocorreu com os outros grupos; no entanto, como me dedico ao estudo desse grupo e não da turma como um todo, essa tarefa não é considerada na análise e a adequação mediacional pode ser interpretada como *moderadamente alta*.

CAPÍTULO V

TAREFA INVESTIGATIVA 2: ÁLGEBRA EM FESTA DE CASAMENTO?

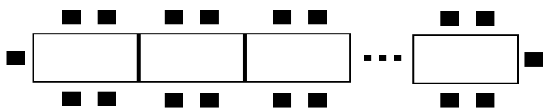
1. DESENHO DA TAREFA

A tarefa exploratório-investigativa apresentada a seguir é potencialmente útil para exercitar a ação e a linguagem das generalizações numéricas (ARCAVI, 2007). As subtarefas que a compõem, propostas por Fernandes (2010), criam um contexto propício à comparação das intuições acerca dos resultados com a confirmação dada pela manipulação do material concreto (adotado na presente pesquisa). O fato de se requisitar uma expressão matemática que expresse a relação entre as grandezas envolvidas impõe a necessidade de se utilizarem símbolos, bem como dar significados a eles.

Tarefa Investigativa 2: Álgebra em festa de casamento?[65]

A Tarefa Proposta:

Em determinada festa de casamento, cada mesa comporta 6 pessoas. Esperando que houvesse uma aproximação e união dos convidados presentes para a confraternização, resolveram juntar as mesas na seguinte disposição:



Será que há Álgebra numa festa de casamento? Vejamos... Seguem algumas subtarefas para a nossa investigação: **(Lembre-se! Todas as respostas devem ser justificadas, com cálculos ou desenhos!)**

a) Construa uma tabela que relacione a **quantidade de mesas** e a **quantidade de cadeiras** utilizadas. Encontre o número de cadeiras utilizadas com, pelo menos, 6 mesas. Observe as possíveis relações entre **mesas** e **cadeiras**.

b) Usando 15 mesas, quantas cadeiras são necessárias? Justifique.

c) Se houver 42 cadeiras, quantas mesas serão necessárias? Justifique.

d) É possível constituir uma fileira de mesas que tenha 100 cadeiras? Se possível, quantas mesas seriam necessárias? Por quê?

e) Investigando a sequência, a partir do desenho e/ou da tabela construída no item a), explique como ela é constituída. Qual é o padrão existente?

f) Escreva uma **expressão matemática** que relacione o número de mesas e o número de cadeiras. **É importante o uso de uma linguagem mais elaborada, aproximando-se de uma fórmula**. Que letras poderiam ser usadas?

QUADRO 20 - Tarefa investigativa 2

[65] A tarefa investigativa 'Álgebra em festa de casamento?' foi adaptada de Fernandes (2010).

OBJETIVOS DA ATIVIDADE

Com a implementação desta atividade, pretendia-se que os alunos:

- ✓ explorassem a relação e a variação entre as grandezas envolvidas na tarefa proposta;
- ✓ sentissem a necessidade de utilizar uma letra, como variável, para representar uma das grandezas envolvidas;
- ✓ compreendessem a noção de termo geral da sequência numérica obtida a partir da tabela construída;
- ✓ formulassem e testassem conjecturas matemáticas na exploração das subtarefas propostas;
- ✓ obtivessem uma fórmula (expressão matemática) que representasse a relação entre as grandezas ou o termo geral (*enésimo* termo) da sequência.

SOLUÇÕES ESPERADAS

Uma primeira solução 'ingênua' para o item *a* dessa tarefa seria a obtenção do número de cadeiras dado o número de mesas, dispondo as mesas como propõe a tarefa e realizando a contagem das cadeiras, em cada situação, com a ajuda do material concreto.

Para o item *b*, esperava-se que, com um número maior de mesas (agora 15), os alunos se sentissem motivados a encontrar um padrão que dispensasse o uso do material concreto. Ressalta-se, no entanto, que os alunos dispunham de material suficiente para realizar essa subtarefa através da contagem. De qualquer forma, esperava-se que encontrassem 62 cadeiras dadas 15 mesas.

O item *c* requeria encontrar o número de mesas, no caso de serem utilizadas 42 cadeiras. Esperava-se que, ao chegar a essa subtarefa, os alunos já tivessem encontrado um padrão (ainda que não tivessem obtido uma expressão matemática) que relacionasse o número de cadeiras e mesas. Nesse caso, a resposta deveria ser 10 mesas.

No item *d*, esperava-se que os alunos percebessem que, se fosse mantida a disposição das cadeiras e mesas da forma como proposta na tarefa, qual seja, cada mesa comportando 2 cadeiras em sua extensão, seria possível acomodar 98 ou 102 cadeiras, mas não 100 cadeiras.

A regra de construção da sequência, idem *e*, poderia ser expressa de diversas maneiras, por exemplo, 'o número de cadeiras se obtém multiplicando por quatro o número de mesas e somando as duas cadeiras que são colocadas nas cabeceiras'.

Para o item *f*, a solução esperada era uma expressão que descrevesse o número de cadeiras, a partir do número de mesas. Denominando o número de mesas por '*n*', por exemplo, a expressão que indica o número de cadeiras seria $4.\, n + 2$ ou $1 + 2n + 1 + 2n$, como indica Arcavi (2007), ou $n\ .\ 2 + 2$[66], como descrito por Déchen (2008).

Na realização da tarefa, está em jogo uma correspondência ou função que relaciona o número de cadeiras (variável dependente) e o número de mesas (variável independente). Os conjuntos inicial e final são as quantidades de mesas e cadeiras, e suas respectivas medidas. Considero que a emergência ou manifestação do pensamento algébrico não está em que o aluno 'maneje', reconheça ou aplique conceitos abstratos (número, quantidade, medida, multiplicação, adição, em casos particulares). O referido pensamento se manifesta quando a regra ou critério de correspondência é identificado: c = 4 m + 2, que pode ser expressa de diversas maneiras; por exemplo, 'obtém-se o número de cadeiras multiplicando por quatro o número de mesas e somando as duas cadeiras que são colocadas nas cabeceiras'. Um nível superior de raciocínio algébrico é alcançado quando o aluno é capaz de generalizar essa regra, escrevendo, por exemplo, y = 4 x + 2, utilizando x e y para indicar quaisquer valores numéricos.

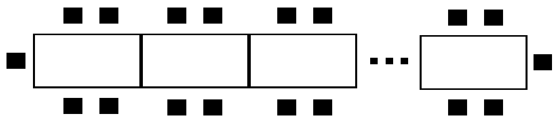
2. ANÁLISE DOS CONHECIMENTOS PRETENDIDOS DE SEREM MOBILIZADOS

ELABORAÇÃO DAS CONFIGURAÇÕES EPISTÊMICAS

Neste tópico, são identificados os tipos de objetos e os correspondentes significados epistêmicos (processos de significação) envolvidos na tarefa investigativa 2. A seguir, são descritos cada objeto e seus correspondentes significados conforme as seguintes categorias: *elementos linguísticos*, *conceitos*, *propriedades*, *procedimentos* e *argumentos*.

---

[66] A tarefa utilizada por Déchen (2008) é similar à utilizada nesta tese, mas propõe que cada mesa comporte quatro cadeiras (e não seis como é o nosso caso).

ELEMENTOS LINGUÍSTICOS	
OBJETOS	SIGNIFICADOS
Prévios	
	Indica de maneira icônica a forma como as mesas e cadeiras devem ser dispostas.
'Observe as possíveis *relações* entre mesas e cadeiras... '	Associação entre as grandezas; no caso, entre o número de mesas e o número de cadeiras.
'Qual é o *padrão* existente? '	Regularidade que permite identificar o próximo termo de uma sequência.
'É importante o uso de uma linguagem mais elaborada, aproximando-se de uma *fórmula*'.	Expressão matemática que representa o padrão de uma forma genérica.
Emergentes	
Explicitação da relação entre as grandezas envolvidas (finalizando em uma sentença matemática).	$4 . n + 2$ $1 + 2n + 1 + 2n$ $n . 2 . 2 + 2$ $2 . (2n+1)$

QUADRO 21 – Configuração epistêmica da oficina 8: elementos linguísticos

Conflitos potenciais:

- ✓ Escrita parcial ou incorreta da expressão que relaciona as grandezas.

CONCEITOS/DEFINIÇÕES	
OBJETOS	SIGNIFICADOS
Prévios	
Álgebra	Parte da Matemática que trata de aritmética generalizada, funções, equações e estruturas.
Número	Objeto da Matemática usado para descrever quantidade, ordem ou medida.
Sequência matemática	Lista ordenada de números ou figuras cuja ordem é definida por uma lei.
Expressão matemática	Combinação de números, letras, símbolos e operadores agrupados de forma significativa.
Emergentes	
Grandeza	Relação numérica estabelecida com um objeto.

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Variação entre grandezas	A relação/variação entre grandezas é obtida por meio do conceito de função. Estão implicitamente envolvidos, portanto, os conceitos de variável dependente e independente.
Justificativa	Justificar a validade de um procedimento.
Raciocínio	Descrição detalhada do procedimento e sua justificação.

QUADRO 22 – Configuração epistêmica da oficina 8: conceitos

Conflitos potenciais:

- ✓ Os alunos podem não conseguir construir (ainda que se trate de uma primeira aproximação) os conceitos apresentados.

PROPRIEDADES/PROPOSIÇÕES	
OBJETOS	SIGNIFICADOS
Prévias	
62 cadeiras 10 mesas	Soluções obtidas através da contagem, respectivamente para os itens *a* e *b*.
Emergentes	
P 1: 4 . n + 2 ou 2 . (2.n + 1)	Solução esperada para o item *f* da tarefa

QUADRO 23 – Configuração epistêmica da oficina 8: propriedades

Conflitos potenciais:

- ✓ Não determinar a proposição P 1.

PROCEDIMENTOS	
OBJETOS	SIGNIFICADOS
Prévios	
Descrever a próxima situação acrescentando mais uma mesa e determinando o número de cadeiras (uso recursivo).	Contagem do número de cadeiras.
Expressar oralmente e por escrito os raciocínios desenvolvidos.	Saber expressar a forma como pensa.
Emergentes	
Explorar as relações e variações entre as grandezas envolvidas.	Usa-se para responder as perguntas propostas na tarefa.

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Reconhecer a regularidade da sequência de modo a conseguir obter uma expressão matemática para o termo geral.	Proporciona a solução para a tarefa.

QUADRO 24 – Configuração epistêmica da oficina 8: procedimentos

Conflitos potenciais:

- ✓ Dificuldade em dar sentido para uma letra;
- ✓ Os alunos podem não descobrir a relação/variação entre grandezas;
- ✓ Dificuldades de generalização

ARGUMENTOS	
OBJETOS	SIGNIFICADOS
Prévios	
Realização exaustiva de contagem do número de cadeiras por uso recursivo.	Proporciona uma solução ineficaz para a tarefa.
Emergentes	
A1: Pensando-se que cada mesa, ao se desconsiderar a cabeceira dos dois lados, comporta 4 cadeiras, o número de cadeiras será definido pelo número de mesas vezes 4. Se o número de mesas é denominado x, por exemplo, seria $4.x$. Como foram desconsideradas as cadeiras da cabeceira, temos que somar 2 à expressão anterior. A expressão final seria portanto: $4 . x + 2$.	Uma das possíveis justificativas para a solução da tarefa.

QUADRO 25 – Configuração epistêmica da oficina 8: argumentos

Conflitos potenciais:

- ✓ Não formular corretamente o argumento A1 (ou similar).

3. IDENTIFICAÇÃO DE PRÁTICAS MATEMÁTICAS (NÍVEL 1)

Neste primeiro nível de análise, identifico as práticas matemáticas mobilizadas durante o desenvolvimento da tarefa investigativa 2 (Oficina 8). Para tanto, a transcrição da oficina foi subdividida, como veremos mais adiante, em cinco *Configurações Didáticas* (CD1 a CD5). A primeira configuração refere-se ao item *a* da tarefa e as seguintes, respectivamente aos itens *b*, *c*, *d* e *e-f*. Também foram identificadas onze *Subconfigurações Didáticas* (SCD1 a SDC11) delimitadas por momentos em que ocorreram mudanças nos padrões de interação.

Essa oficina foi também implementada, por mim e pela professora Talita, na classe 7º ano B, no segundo semestre de 2010, faltando pouco mais de dois meses para terminar o ano letivo. A classe de 15 alunos se apresentava distribuída em mesas hexagonais dispostas pela sala. Nessa oficina, estavam presentes 13 alunos que se organizaram voluntariamente em três grupos: *grupo 1*: quatro componentes (três meninos e uma menina); *grupo 2*: cinco componentes (quatro meninas e um menino) e *grupo 3*: quatro componentes (quatro meninos).

O tempo previsto para essa oficina foi de 1 hora e 40 minutos (duas aulas geminadas de 50 minutos); contudo, uma parte da aula (aproximadamente 30 minutos) foi dedicada, como já dito, ao fechamento da oficina de sequências (Capítulo IV).

Foi distribuído para cada grupo uma folha de atividade (Quadro 20), vários retângulos do mesmo tamanho recortados em lona e um saquinho de rolhas (ou tampinhas de garrafa pet). Foi pedido aos alunos que, utilizando o material para simular mesas e cadeiras, desenvolvessem, em grupos, a tarefa proposta.

Como nas oficinas anteriores o registro tinha sido individual e os alunos demonstraram dificuldades em realizá-lo, nessa oficina foi entregue a cada um dos grupos uma folha de papel kraft e vários pincéis coloridos. Os grupos foram orientados a utilizar esse papel para fazer o registro coletivo da tarefa.

Analiso, no entanto, apenas os 54 minutos gravados em áudio (alguns trechos também em vídeo dos quais foram retiradas as fotos que utilizo neste capítulo), referentes ao trabalho realizado pelo grupo de 4 meninos, sujeitos dessa pesquisa.

ANÁLISE DOS ATOS E PROCESSOS DE SIGNIFICAÇÃO (ELABORAÇÃO DAS CONFIGURAÇÕES DIDÁTICAS EMPÍRICAS)

CONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 1 (relativa à subtarefa *a*)

A primeira configuração didática se organiza em torno da tarefa de se construir uma tabela, relacionado a quantidade de mesas com a quantidade de cadeiras utilizadas em cada caso, e do esforço de, a partir da manipulação do material concreto, encontrar um padrão que permitisse descrever a relação entre as grandezas envolvidas.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 1

Nessa subconfiguração, os alunos tentaram estabelecer um padrão a partir da observação do número de cadeiras que *se perde* em cada junção, cada vez que se acrescenta mais uma mesa. A ideia parte do aluno Valter, ao afirmar que, quando estão enfileiradas 3 mesas, se perdem 2 cadeiras, ou seja, uma cadeira por junção. Logo em seguida Paulo, manipulando as mesinhas e cadeiras, afirma que se perdem 2 cadeiras também para 2 mesas:

> Paulo: Quando tem 2 mesas, tira 2 do mesmo jeito. [57]

Instala-se, nesse momento, um conflito semiótico do tipo *interacional*, já que se produz na interação entre Valter e Paulo. A Prof 1, a princípio, não valida a fala de Paulo – "Prof 1: É? Vamos lá!" [61] – mas Paulo utiliza o material concreto para confirmar seu argumento, separa as duas mesinhas e aponta, indicando o lugar onde deveriam estar as cadeiras (Figura 25).

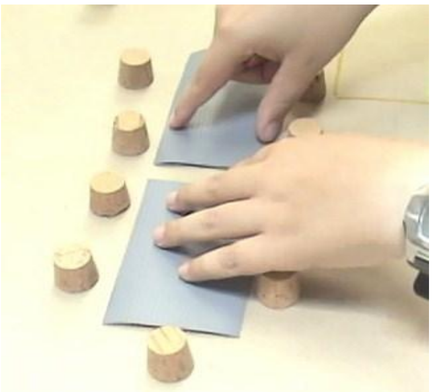


FIGURA 25 - Registro da subtarefa *a*

> Paulo: Porque, se juntar essas duas mesas, você vai perder os dois lugares que vai ter aqui, ó! (*Paulo aponta para o espaço da junção entre as mesas*) [68]

A Prof 1 passa, então, a incentivar a exploração desse padrão, perguntando pelo número de cadeiras que se perde ao se juntar três mesas e, em seguida, quatro mesas. Esse diálogo permite ao Valter reestruturar seu pensamento e o conflito semiótico é resolvido [83].

> Valter: Ah, você acumula mais 2 e com 4... [83]
>
> Valter e Paulo ...vai perder 6! [84]

> Valter: Aqui tinha 2 e eu vou adicionar mais uma mesa e perde 2 cadeiras. 2, 4, 6... [89]
>
> Prof 1: Cada mesa que você adiciona você perde 2 cadeiras. [90]
>
> Marcelo: É. Mais 2 (*enfatiza a expressão mais 2*)![91]
>
> Valter: Vai ficar 2, 4, 6 , 8, 10, 12... [92]
>
> Prof 1: Vamos fazer a tabela para a gente tentar chegar ao termo geral.[93]

A Prof 1 pede aos alunos que construam uma tabela [93], numa tentativa de levá-los a generalizar o padrão obtido a partir do material concreto. Não leva em consideração, no entanto, que esse padrão (por se tratar de outro tipo de artefato) poderia ser outro. Como veremos, de fato, o padrão que emerge da construção da tabela será outro. Em outras palavras, a Prof 1 perdeu a oportunidade de explorar a construção de uma expressão que poderia descrever o padrão descoberto pelos alunos nesse momento. Qual seja (considerando x = número de mesas):

$$\boxed{6 \, . \, x - 2 \, . \, (x - 1)}$$

Na expressão anterior, considera-se que o número de cadeiras por mesa é seis (portanto, $6 \, . \, x$) e, em seguida, leva-se em conta a necessidade de se subtrair o número de cadeiras correspondentes às junções (duas cadeiras por junção). Como o número de junções entre as mesas é sempre um a menos que o número de mesas, deve-se subtrair $2 \, . \, (x - 1)$ de $6 \, . \, x$.

Em um segundo momento, os alunos exploram não só o número de cadeiras que *se perde* em cada junção, mas principalmente o número de cadeiras que são *adicionadas* a cada mesa que se acrescenta à fileira de mesas.

Continuando o desenvolvimento do trabalho iniciado na subconfiguração didática 1, a Prof 1 orienta o grupo na construção da tabela. O Paulo afirma que são necessárias 12 cadeiras no caso da formação de duas mesas (parece considerar seis cadeiras por mesa), no entanto, Marcelo e Valter afirmam que são 10 cadeiras. Paulo faz a contagem das cadeiras, a pedido da Prof 1, e refaz sua resposta, conforme o protocolo adiante:

> Prof 1: [...] Quando tenho uma mesa, são quantas cadeiras? [107]
>
> Paulo: 6. [108]
>
> Prof 1: Então ponha aí pra mim na frente, 6. [109]

> Prof 1: Isso! Agora com 2 mesas. [110]
>
> Paulo: São 12. [111]
>
> Prof 1: Vamos contar. [112]
>
> Marcelo e Valter: São 10! [113]
>
> Prof 1: Conta aí pra mim, Paulo! [114]
>
> Valter: São 10, porque você perdeu 2 cadeiras. [115]
>
> Paulo: 1, 2, 3..., 10 (*conta cadeira por cadeira*)[116]
>
> Prof 1: Isso! Agora conta com 3 (*mesas*), Paulo! Coloca aí pra mim, por favor. [117]
>
> Paulo: 1, 2, 3, ..., 14 (*conta cadeira por cadeira*).Vai dar 14. [118]
>
> Valter: E o que eu já tinha feito antes. [119]

A Prof 1 pergunta acerca do número de cadeiras necessárias para a disposição de quatro mesas enfileiradas. Valter, após afirmar que seriam perdidas seis cadeiras (duas por junção), afirma, equivocadamente, que o total de cadeiras será 16. A Prof 1 pede que os alunos realizem a contagem e Paulo confirma que serão 18.

Ao serem questionados pela Prof 1 sobre a diferença entre os valores encontrados, Valter tenta relacionar a diferença de quatro unidades (número de cadeiras *acrescidas*), que percebe entre o número de cadeiras encontrado para três e quatro mesas, com o padrão encontrado na subconfiguração didática 1 (número de cadeiras *perdidas* por junção).

> Valter: Ahhhh! As 4 que a gente tirou aqui, voltaram. [150]
>
> Prof 1: Quais? [151]
>
> Valter: Aqui, a gente tinha perdido 4 cadeiras. [152]
>
> (*refere-se às 4 cadeiras perdidas nas 2 junções na formação de 3 mesas*)
>
> Valter: Quando a gente colocou mais uma (mesa), a gente ganhou... Pegou as 4 de volta [154]

A Prof 1 não valida nem explora essa justificativa e, em seguida, pede ao grupo que descubra o número de cadeiras necessário para cinco mesas. Pede também ao Valter que faça uma tabela auxiliar em uma folha à parte (Figura 26), já que o Vanderlei continua construindo com todo o capricho e, portanto, vagarosamente, a tabela definitiva no papel kraft.

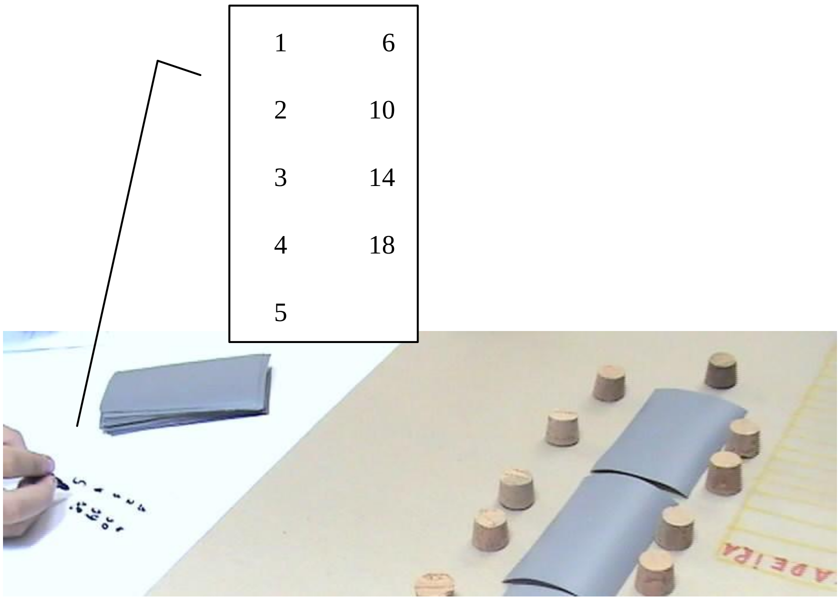


FIGURA 26 - Registros da subtarefa *a*

O fato de, a partir da tabela, ser possível inferir, mais facilmente, os *acréscimos* e não as *perdas* de cadeiras pelas junções entre as mesas faz com que o conflito estabelecido (tentativa de relacionar o número de cadeiras perdidas em cada junção com os acréscimos de cadeiras) permaneça em aberto.

Em seguida, Marcelo, observando as anotações de Valter, começa a inferir um novo padrão para a sequência.

> Marcelo: Ô Valter, tá aumentando 4 de cada vez, aqui ó! (*aponta para a tabela auxiliar*)[159]

Marcelo tenta comunicar sua descoberta à Prof 1 (logo depois de tentar comunicá-la a Valter), mas, ao invés de validar a fala de Marcelo, a Prof 1 pede para que teste com cinco mesas.

> Marcelo: Sempre aumenta 6 e diminui mais... menos 2 (*dirige-se à Prof 1*).[160]
>
> Prof 1: Vamos fazer mais para ver se é isso mesmo! Ponha uma mesa a mais pra gente. Uma mesa a mais... Agora com 5![161]

Marcelo insiste em seu argumento e a Prof 1 finalmente explora seu raciocínio:

> Marcelo: Professora, você sempre aumenta 6 e tira 2.[163]
>
> Prof 1: Sempre aumenta 6? [164]

> Marcelo: Não, e tira 2. Desses 6 você tira 2.[165]
>
> Prof 1: Então, vamos tentar. Por exemplo, 18... [166]

Ainda quando Paulo afirma que basta acrescentar 4 a 18, a Prof 1 não valida a resposta de Paulo e encoraja Marcelo a explicar como está pensando.

> Paulo: 18 você aumenta 4! [167]
>
> Prof 1: Não, Peraí (*dirige-se a Paulo*)! Marcelo, tá bom. Fala de novo. 18... [168]
>
> Marcelo: 18... Vai dar 34 (*equivocado*). Aí tira 2 e vai dar 32 (*equivocado*). [169]
>
> Prof 1: Fala de novo Marcelo. (*Marcelo faz cara de 'como assim não me entende!'*) Como é que é? [170]
>
> Marcelo: 18 (+ 6) vai dar 24. Você tira 2, vai dar 22! 4 a mais do que a anterior![171]

A Prof 1 pede para que os alunos confiram se o resultado é realmente 22 e, em seguida, valida o raciocínio de Marcelo – "Prof 1: Ótimo!" [175]. Não aproveita o momento, no entanto, para encaminhar a elaboração de uma expressão que possa descrever o padrão encontrado.

A comparação dessa subconfiguração empírica com as configurações teóricas de referência leva-nos a situá-la como *dialógica*, já que os alunos dialogam entre si, mas a Prof 1 se responsabiliza pela mediação da exploração.

CONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 2 (relativa à subtarefa *b*)

Nessa configuração didática, os alunos dedicam-se a encontrar o número de cadeiras necessárias para o caso de serem utilizadas 15 mesas.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 2

No início dessa subconfiguração, o grupo trabalha sem a interferência das professoras. Nesse momento, Valter começa a pensar como poderia descobrir o número de cadeiras para 15 mesas, partindo do número de cadeiras referente às cinco mesas, que o grupo já tinha obtido. No entanto, é desencorajado por Paulo, que afirma não adiantar ficar tentando 'somar', já que, daí a pouco, a 'regra' poderia mudar.

Essa posição de Paulo talvez se deva ao fato de a Prof 1 sempre pedir ao grupo que confirme suas inferências, fazendo a contagem das cadeiras. A disparidade entre uma inferência e a contagem (uma das duas equivocada) talvez tenha levado Paulo a acreditar que a 'regra' (inferência) poderia mudar, já que na maioria das vezes, sua inferência estava equivocada, como mostra o protocolo:

> Valter: 22 (*refere-se ao número de cadeiras para 5 mesas*), pra 10, vai ficar 44... [185]
>
> (*para 10 mesas são necessárias 42 cadeiras*)
>
> Paulo: Não adianta somar não, tem que fazer![186]
>
> Marcelo: Como assim, não entendi nada. [187]
>
> Paulo: Essa regra pode mudar a qualquer hora. [188]

No momento seguinte, os alunos passam a dispor as 15 mesas, enfileirando-as e fazendo a contagem do número de cadeiras uma a uma. Paulo e Marcelo perdem a conta e reiniciam a contagem várias vezes, porque encontram números diferentes para a quantidade de cadeiras. Quando, finalmente, conseguem obter o mesmo resultado, Marcelo pede a Valter que registre a resposta:

> Paulo: 61! [201]
>
> Marcelo: 62! [202]
>
> Marcelo: 1, 2, 3, ..., 20,..., 40,..., 62! (*conta as cadeiras*)[203]
>
> Paulo: Não tem não! [204]
>
> Marcelo: é 62. (*tom de 'tenho certeza!'*)[205]
>
> (*Paulo discorda e conta as cadeiras novamente uma a uma*)
>
> Paulo: 1, 2, 3, ..., 62. [206]
>
> Marcelo: Anota aí, Valter. 62! [207]

Essa subconfiguração classifica-se como *a-didática* porque, nela, os alunos trabalham de maneira independente.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 3

Logo em seguida, a Prof 2 se aproxima do grupo e pergunta como conseguiram obter como resposta o número 62. Marcelo responde que contaram as cadeiras e a Prof 2, buscando fazer o grupo sentir necessidade de tentar encontrar um padrão, pede que pensem para o caso de terem 52 mesas, ao invés de 15.

Paulo, que se apresenta confiante com a resposta encontrada pelo grupo [211], parece pensar não ser possível (pelo menos não de maneira confiável) resolver a tarefa sem se basear na contagem [215]. Valter, ao contrário, já começa a pensar uma forma de generalizar, inclusive usando a letra *x* como variável.

> Paulo: Não tem jeito de errar. (*fazendo a contagem um a um*)[211]
>
> Paulo: Mesas? Não tem mesas suficiente![215]
>
> Prof 2: Pois é, então no caso tem pensar um jeito que a gente consiga pensar lá na frente, não é? [216]
>
> Paulo: (*inaudível*) [217]
>
> Prof 2: Não, vamos pensar, Paulo. Para uma mesa eu teria 6 cadeiras. 2 mesas... 10 cadeiras. Vamos pensar numa fórmula (*tom de voz pausado e calmo*). [218]
>
> Valter: Vamos chamar a quantidade de mesas de... de cadeiras de *x*. [219]

Nessa subconfiguração, a Prof 2 estabelece um diálogo com os alunos tentando convencê-los a generalizar. Classifica-se, portanto, como *dialógica*.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 4

No momento seguinte, Marcelo consegue descobrir um padrão que permite calcular o número de cadeiras dado o número de mesas, partindo da resposta encontrada para 15 mesas (que o grupo tinha obtido através da contagem direta). Apesar do suposto diálogo com Valter, Marcelo parece chegar à solução por si só. Nesse momento, não há interferência direta das professoras.

> Marcelo: Pra dar 62 com 15 mesas, 15 vezes...[224]
>
> Marcelo: 15 vezes... Quanto que dá 15 vezes... Quanto que dá 60? [226]
>
> Valter: 15 vezes... [227]
>
> Marcelo: 15 + 15, 30... 15 vezes 4! [228]
>
> Marcelo: Nó, Valter! É 15 vezes 4 + 2![230]
>
> Marcelo: É 52 vezes 4 + 2 [232].

Nessa subconfiguração, Marcelo trabalha de maneira autônoma, o que nos permite classificá-la, portanto, como *a-didática*.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 5

No momento seguinte, Marcelo tenta comunicar sua descoberta para a Prof 2; no entanto, tem dificuldades em fazê-lo e mescla, em seu discurso, o raciocínio que o levou à descoberta do padrão (utilizando 15 mesas) com o raciocínio utilizado para 52 mesas. A professora não entende imediatamente o raciocínio dele e ele 'entra em desespero' [247], para convencê-la de que está certo. Veja o extrato a seguir:

> Marcelo: 52 x 4 + 2. [236]
>
> Prof 2: Por que 52 x 4 + 2? (*repete falando pausadamente*)[237]
>
> Paulo: menos 2.[238]
>
> Marcelo: Porque 15 x 4, dá 60. 60 + 2, 62 que deu o número de cadeiras... [239]
>
> Prof 2: Então...[240]
>
> Paulo: Mas é 52 mesas! [241]
>
> Marcelo: Então?! É só multiplicar por 4! [242]
>
> Prof 2: Mas isso vai dar certo para as outras? [244]
>
> Paulo: Não. [245]
>
> Prof 2: Então, vamos pegar, vamos lá... [246]
>
> Marcelo: Talita! (*refere-se à Prof 2*) 3 x 4, 12 + 2, 14! (*tom desesperado*)[247]
>
> Prof 2: Agora, tem que ser pra todas! [249]
>
> Marcelo: É (*tom enfático*). 4 x 4, 16. 16 + 2, 18! [250]
>
> Paulo: O número vezes ele mesmo menos... mais 2. [251]
>
> Marcelo: Não, meu filho! Ó, 4 x 4, 16, + 2, 18. [252]
>
> Marcelo: 5 x 4, 20, + 2, 22. [253]
>
> Valter: É o número vezes 4 mais 2. [254]

Marcelo passa a testar o padrão para três, quatro e cinco mesas, comparando-o com o número de cadeiras já obtido [247, 250 e 253], e Valter finalmente expressa o pensamento de Marcelo de forma genérica [254], então a Prof 2 encaminha a construção de uma expressão matemática que possa descrever a fala de Valter.

Prof 2: Que número é esse que vocês estão querendo vezes 4? [255]

Marcelo: É o número de cadeiras![256]

Valter: É x . 4 + 2. [257]

Prof 2: Número de? [258]

?: Mesas [259]

Prof 2: Ah! Então se eu quisesse falar quantas cadeiras, eu teria que pegar o número de mesas... [260]

Marcelo e Valter: vezes 4! [261]

Prof 2: E depois? [262]

Valter: Acrescentar mais 2. [263]

Passa-se para uma discussão de qual grandeza considerar como *x* (se o número de mesas ou o número de cadeiras) e se instala nesse momento um conflito semiótico *interacional*, já que envolve todos os componentes do grupo. O conflito é aparentemente resolvido (chega-se a um consenso de que x deve denominar o número de mesas) e a resposta é validada pela Prof 2, contudo, não é possível inferir como cada componente do grupo apropriou (ou não) o significado implícito de variável dependente:

Prof 2: Será que a gente poderia escrever de um jeito geral, assim, se eu quisesse fazer assim, 100 ca... 100 mesas? (*tom interrogativo*), quantas cadeiras seriam? [264]

Vanderlei: Multiplica 100 x 4, 400, + 2, 402! [265]

Prof 2: A gente poderia escrever uma fórmula? [266]

Valter: *x*... [267]

Marcelo: *x* vezes 4 + 2. [268]

Valter: É. [269]

Prof 2: Então, quem que é esse *x*? [270]

Marcelo: *x* é o número de cadeiras. [271]

Vanderlei: Mesas (*fala simultânea com a anterior*)[272]

Paulo: Cadeiras! [273]

Marcelo: Mesas. [274]

Paulo: Cadeiras! [275]

Marcelo: Tem mesas e cadeiras... [276]

Prof 2: Não, olha só... [277]

Valter: Mesas é *x*.[278]

Marcelo: É, mesas é *x*. [279]

> Prof 2: Então vamos lá! Vocês já descobriram a letra c, não foi? Então respondam a letra c) pra mim em algum canto desse kraft aí.

O momento seguinte é destinado ao registro da resposta do item *c* no papel kraft. A Prof 2 pergunta como deveriam escrever e Valter 'recita' a resposta. Apesar de terem chegado a uma expressão utilizando a variável *x*, o registro feito, neste momento, é para o caso particular de 15 mesas. Como a Prof 2 valida o que Valter dita, Marcelo reivindica o crédito da descoberta para si [289].

> Valter: É 15 x 4 + 2. [287]
>
> Prof 2: Então escreva o que o Valter tá falando. [288]
>
> Marcelo: É, mas a ideia foi minha, no caso, né Valter? [289]

A última subconfiguração relativa ao item *b* classifica-se como *dialógica*, já que a Prof 2 interage com o grupo, mas permite que os alunos se encarreguem da exploração.

CONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 3 (relativa à subtarefa *c*)

Em um caminho inverso ao da configuração didática 2, mas com um objetivo similar, agora os alunos dedicam-se a encontrar o número de mesas, sabendo que foram utilizadas 42 cadeiras.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 6

O grupo começa a desenvolver essa subtarefa, pensando em direções diversas. Vanderlei e Valter pensam em dividir o número de cadeiras (42) por 4; Marcelo oscila entre dividir por 4 e multiplicar por 2 e Paulo afirma que se deve multiplicar por 4 e somar 2 (repetindo a regra encontrada na subconfiguração 3) [310]. Essa subconfiguração inicia-se, portanto, com um conflito semiótico *interacional*, envolvendo todos os componentes do grupo, instalado.

> Vanderlei: Divide por 4. [305]
>
> Marcelo: 42 dividido por 4.[306]
>
> Vanderlei: 42 dividido por 4 vai dar... [307]
>
> Marcelo: É vezes 2.[308]

> Prof 2: Mas peraí, por que vocês estão multiplicando por 4 e depois tirando 2?[309]
>
> Paulo: Porque tem que multiplicar por 4 e somar mais 2 [310]
>
> Valter: Por isso é que eu falei 44. Aí ia dar 11.[311]
>
> Prof 2: Mas é isso que eu quero saber, porque cada um fala uma coisa. Eu quero saber o seguinte: eu tenho 42 cadeiras. Quantas mesas eu preciso?[312]

Marcelo, ao que parece, usando como 'andaime' a ideia de Valter (que tenta dividir 44 por 4, já que 42 não é divisível por 4), percebe que a situação é oposta à anterior (item *c*) e propõe que se faça o raciocínio inverso, afirmando que se deve dividir 40 por 4 [318]:

> Marcelo: Você tem que fazer o contrário do que você fez anteriormente. O contrário da multiplicação é divisão. O contrário de mais... de somar é subtrair! [313]
>
> Marcelo: 42 menos... [314]
>
> Prof 2: Faz aí a conta. Veja se vai dar certo! [315]
>
> Valter: Se fizer 44 vai dar 11. [316]
>
> Prof 2: Mas porque 44? [317]
>
> Marcelo: Ô Valter, 40 por 4, né, Valter? [318]
>
> Vanderlei: Mas são 42 cadeiras?! [319]

A professora incentiva Marcelo a expressar seu raciocínio e ele afirma ter obtido 40 da operação 42 - 2. Marcelo não justifica esse procedimento. Ao que parece, entende que já o fez [313]. Paulo faz as contas indicadas por Marcelo e encontra a resposta correta [323], o que foi validado pela Prof 2 [326].

> Prof 2: De onde você tirou 40?[320]
>
> Marcelo: 42 - 2. [321]
>
> Prof 2: Então, vamos fazer o seguinte...[322]
>
> Paulo: Vai dar 10 mesas.[323]
>
> Prof 2: Como é que você chegou nesta resposta, Paulo? [324]
>
> Paulo: Você vai tirar o menos 2 ali, e vai dividir por 4. [325]
>
> Prof 2: Então, quanto que deu? Deram 10 mesas. Vocês vão ter que justificar aqui, ó!
>
> (*aponta para o papel kraft onde o registro escrito deveria ser feito*)[326]

O final dessa subconfiguração consiste na discussão sobre a forma de se registrar o trabalho desenvolvido pelo grupo. Vanderlei registra a expressão 42 – 2 : 4 (ditada por Marcelo e Paulo – Figura 27) e a Prof 2 conduz o grupo à necessidade de utilizar parênteses (Figura 28) argumentando que, se outra pessoa tentasse resolver a expressão, teria que conseguir chegar ao mesmo resultado encontrado pelo grupo [329].

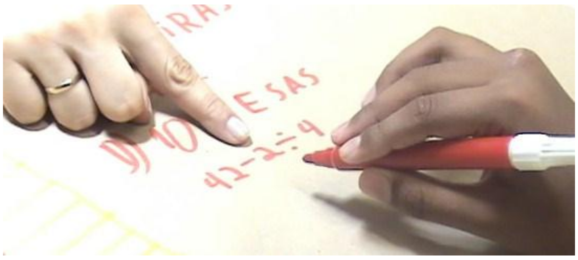


FIGURA 27 - Registro da subtarefa *c* (parte I)

Prof 2: Vamos voltar aqui pra expressão, rapidinho. Se a professora (*refere-se à Prof 1*) passar aqui e olhar rapidão, ela vai chegar ao mesmo resultado que vocês? [329]

Paulo: Vai. [330]

Prof 2: Vai? [331]

Vanderlei: Peraí[332]

Prof 2: Numa expressão, o que eu faço primeiro? [333]

Marcelo: A divisão. [334]

Prof 2: Então a primeira coisa que ela iria fazer aqui é a divisão. Então o que eu preciso colocar aqui... [335]

Prof 2: O que eu tenho que colocar? [336]

Valter: (*inaudível*)[337]

Prof 2: Vocês estão falando que é para eu fazer esta conta primeiro, não é? (*aponta para a divisão na expressão*)[338]

Vanderlei: É o número de cadeiras, menos o número de cadeiras na ponta dividido por... [339]

Prof 2: Não, gente... calma aí. (*sorri*) Vamos voltar. A expressão tá quase certa. Vocês estão falando pra mim que eu tenho que resolver isso aqui (*a subtração*) primeiro, não é? Que elementos que eu uso da expressão para resolver isso aqui primeiro? [340]

Marcelo: Parênteses. [341]

Prof 2: Ah, então, isso aqui tem que estar entre o quê?[342]

Todos: parênteses. [343]

Prof 2: Agora sim! [344]

Paulo: Nu![345]

FIGURA 28 - Registro da subtarefa *c* (parte II)

Essa subconfiguração se situa como *dialógica*, já que os alunos se dedicam à exploração, esboçando algumas estratégias de solução a partir da mediação da Prof 2.

CONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 4 (relativa à subtarefa *d*)

Essa configuração didática centra-se na investigação acerca da possibilidade de se construir uma fileira de mesas utilizando-se 100 cadeiras.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 7

O grupo, nessa subconfiguração, depois de um momento inicial, em que alguns dizem que sim e outros, não (instala-se um conflito semiótico *interacional*), parece chegar a um consenso de que não seria possível, mantendo a configuração inicial, utilizar 100 cadeiras. De fato, ou se obtêm 98, considerando-se 24 mesas (4 . 24 + 2), ou 102, considerando-se 25 mesas (4 . 25 + 2).

> Prof 2: É possível construir uma fileira de mesas que tenham 100 cadeiras? (*lê novamente*). Não tô pensando no número de mesas não, tô pensando no número de cadeiras. [357]
>
> Paulo: Não. [358]
>
> Prof 2: Por que não? (*parece muito interessada*)[359]
>
> Paulo: Porque dá 102. [360]
>
> Prof 2: Por quê?[361]
>
> Vanderlei: Porque tem que acrescentar mais 2 na ponta.[362]

Essa discussão se dá em formato *dialógico*, já que a Prof 2 a regula, mas não interfere demasiadamente na exploração.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 8

Paralelamente a esse raciocínio, no entanto, aparece um conflito semiótico *cognitivo* vivenciado por Marcelo, que desenvolve a ideia de construir uma fileira de mesas que possua 49 cadeiras de cada lado mais duas cadeiras que seriam as da cabeceira [365, 366 e 367].

> Marcelo: 49 + 49, dá? [363]
>
> Vanderlei: Tem que ser 40 vezes... Não... 4 vezes 25 menos 2. [364]
>
> Marcelo: Faz aí Valter, 49 + 49... (*Valter começa a fazer a continha*)[365]
>
> Marcelo: 98, não é? [366]
>
> (*Valter faz um gesto afirmativo com a cabeça*)
>
> Marcelo: Mais 2! [367]
>
> Prof 2: Ah? [368]
>
> Vanderlei: 4 vezes 25 mais 2. Só que aí daria 102. Só que aí teria que diminuir... [369]
>
> Prof 2: Por que você está fazendo 4 vezes 25?[370]
>
> Vanderlei: Porque aí vai dar... [371]
>
> Prof 2: Por que você tá fazendo 4 vezes 25? [372]
>
> Vanderlei: Porque é o número de mesas. [373]
>
> Prof 2: Não é possível, então? [374]
>
> Valter: Não. [375]

Ocorre, no entanto, que a Prof 2 acompanha atentamente as falas de Vanderlei, assim como a Prof 1, que filma a interação, e ambas não percebem as tentativas de Marcelo de resolver, em uma suposta interação com Valter e Paulo (Marcelo tenta interagir, mas Valter e Paulo não dialogam com ele), esse conflito semiótico. Ao contrário, as professoras pedem a Marcelo que acompanhe o raciocínio do colega, fato percebido posteriormente, na análise da filmagem.

> Marcelo: Olha, Paulo, por que eu tô falando que dá... [376]
>
> (*levanta-se e pega a folha que o Valter fez o cálculo e mostra pra Paulo*)
>
> Marcelo: 49 + 49, 98, + 2, que é a cadeira da frente e a de trás [377]
>
> (*aponta para as duas cabeceiras da mesa construída*)
>
> Paulo: Quantas vezes você vai fazer 49? (*pergunta direcionada a Vanderlei*) [378]

> Prof 2: Presta atenção no que seu colega está falando! [379]
>
> Prof 1: Senta aí, Marcelo. [380]

Essa subconfiguração, tomando-se como referência o aluno Marcelo, classifica-se como *a-didática*, já que o referido aluno desenvolve seu raciocínio de maneira independente da Prof 2 e/ou da interação regulada por ela.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 9

Marcelo tenta discutir seu raciocínio afirmando que não entendeu [385]. Enquanto Vanderlei e Valter conferem o resultado da expressão 4 vezes 24 + 2, Marcelo dirige-se à Prof 2, perguntando se a resposta não seria 49 [394], e tenta argumentar por que está pensando assim [396].

> Marcelo: Não entendi não! [385]
>
> Vanderlei: 24 vezes 4. [386]
>
> Paulo: Tem 4 vezes o 24.[387]
>
> Vanderlei: 4 vezes 4, 16. Manda o seis pra cima, 1! Vai dar 8, 9! 90 e 6! Vai dar 96. E acrescenta mais 2... [388]
>
> Valter: Vai dar 98. [389]
>
> Vanderlei: Vai dar 98. [390]
>
> Prof 2: Então a resposta para 'tem como construir uma fileira de mesas com 100 cadeiras', é? [391]
>
> Valter: Não. [392]
>
> Prof 2: Porque vai ter ou 102 ou 98. Então escreva aí. [393]
>
> Marcelo: Professora, não vai dar 49? (*dirige-se à Prof 2*) [394]
>
> Marcelo: Se tiver 49 aqui e 49 aqui, vai dar 98 mais uma aqui e outra aqui (*refere-se às cadeiras da cabeceira*), vai dá 100![396]

Muito provavelmente por não ter acompanhado o desenvolvimento da ideia de Marcelo, a Prof 2 indica que a 'regrinha' deve ser verificada. Nesse momento, o conflito semiótico é do tipo *interacional,* já que se produz na relação entre Marcelo e a professora Prof 2, mas é, ao mesmo tempo *epistêmico*, pois a professora adota, claramente, o papel de representante da instituição escolar.

> Prof 2: Vocês não estão usando essa regrinha aqui? Pois é, 4 x 25, 100 com mais 2, 102. Estourou! Vamos tentar agora 24! 24 x 4, segundo o Valter, deu 96 + 2, 98. Então não deu.[397]

Perde-se a oportunidade, portanto, de se explorar o fato de ter que se respeitar (ou não) o número de cadeiras por mesa, definido pela configuração inicial da tarefa, e de se discutir a possibilidade de se considerar uma configuração diferente (Figura 29), mantendo a última mesa, por exemplo, com apenas uma cadeira de cada lado (para permitir que cada lado da fileira de mesas comportasse 49 cadeiras como considera Marcelo).

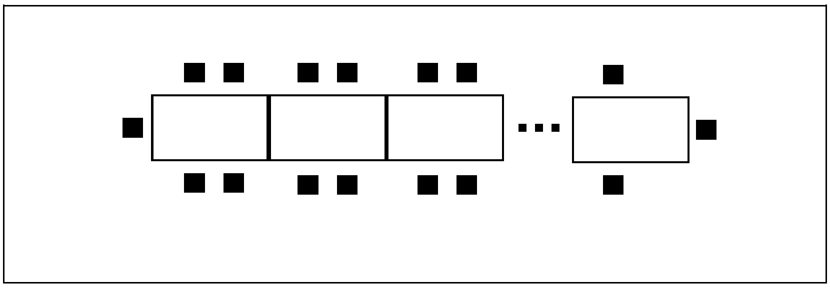


FIGURA 29 - Nova disposição criada por Marcelo para resolução da subtarefa *d*

Esse conflito semiótico fica em aberto e, apesar de essa situação ser retomada na última subconfiguração, como veremos mais adiante, o encaminhamento dado prioriza os cálculos algébricos e não contribui para resolver o conflito.

A subconfiguração didática 9 classifica-se como *dialógica*, já que os alunos exploram estratégias de solução a partir do diálogo com a Prof 2.

CONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 5 (relativa às subtarefas *e* e *f*)

A configuração didática 5 remete à discussão realizada (configuração didática 1) acerca do padrão da sequência (obtida a partir da tabela construída) e se desenvolve em torno da ideia de se obter uma expressão que pudesse traduzir matematicamente esse padrão.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 10

Nessa subconfiguração, os alunos retomam oralmente a expressão já desenvolvida, qual seja, quatro vezes o número de mesas mais dois (x . 4 + 2) e a Prof 2 encaminha o 'teste' da expressão encontrada para o caso de se ter uma, duas, três e oito mesas. A discussão, no entanto, é interrompida pela aproximação da Prof 1, logo após o grupo ter feito o registro escrito do item *f* no papel kraft (Figura 30).

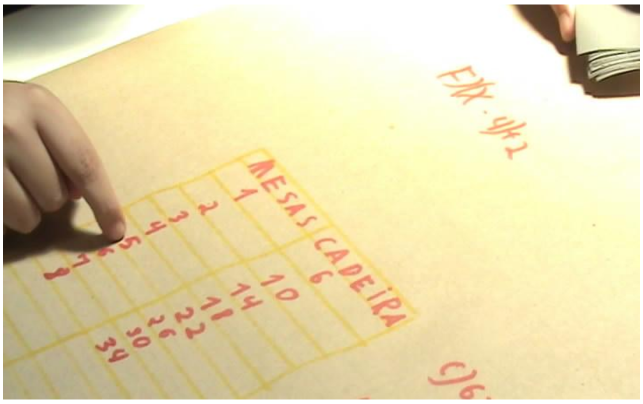


FIGURA 30 - Registro da subtarefa *a*

A Prof 1 pergunta ao grupo se alguém poderia resumir o tinham feito até o momento, com o objetivo se avaliar o trabalho realizado.

O Paulo se dispõe e começa a narrar as conclusões obtidas pelo grupo.

> Paulo: A gente pensou assim que o número de mesas podia variar. [430]
>
> Prof 1: Hã, hã (*tom de voz apreciativo*)[431]
>
> Paulo: Aí, a gente representou ele por *x*.[432]
>
> Prof 1: Ótimo.[433]
>
> Paulo: Que ele tinha que ser multiplicado... vezes 4 que seria o número de mesas... de cadeiras, aliás (*equívoco*).[434]
>
> Prof 1: Sim. Agora, Paulo, vê se você consegue me explicar por que a gente multiplica por 4 e não por 6? Por que quando tem uma mesinha, tem 6 cadeiras, não tem? Você consegue falar por que vocês multiplicaram por 4?[435]
>
> Paulo: Porque, quando a gente junta duas mesas, duas cadeiras não irão aparecer, então esta multiplicação não seria possível (*tom como se estivesse recitando uma fórmula*). Então teria que ser, vezes 4 mais o 2.[436]
>
> Prof 1: Então, perfeito. Até o vezes 4, eu entendi, porque você perde 2 cadeirinhas, não é isso? Então, beleza! Por isso que você não multiplica por 6. E o mais 2 é o que?[437]
>
> Paulo: Mais 2 é porque tem mais 2... tem um em cada ponta das mesas[438]
>
> (*aponta para as cabeceiras da mesa construída com material concreto*)
>
> Prof 1: Da cabeceira. Ah....E vocês testaram e deu certo? [439]
>
> Paulo: Deu. Com todos. [440]
>
> Prof 1: Então, por exemplo, com 5, 4 vezes 5, 20 + 2... [441]
>
> Todos: 22.[442]

Essa subconfiguração classifica-se como *dialógica*, já que a avaliação do trabalho é encaminhada por Prof 1 em um formato que permite a participação dos alunos.

SUBCONFIGURAÇÃO DIDÁTICA 11

Na última subconfiguração didática, a Prof 1 retoma a discussão do item *e*, que propõe que se investigue a possibilidade de serem utilizadas 100 cadeiras, e pede ao grupo que descubra o que acontece quando se resolve a equação 4 . x + 2 = 100. A Prof 1 pretendia que os alunos confirmassem algebricamente a impossibilidade de, mantendo a disposição inicial, como indicada no desenho da tarefa (Quadro 20), serem utilizadas 100 cadeiras.

Os alunos, que já haviam estudado o tema 'equações do 1º grau', resolvem a equação sem dificuldades (Figura 31).

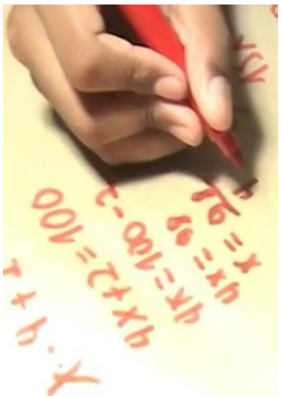


FIGURA 31 - Registro da subtarefa *d*

A Prof 1 resolve a divisão 98 : 4 juntamente com Vanderlei [465, 468 e 469], e discute com o grupo o fato de não ser possível, fisicamente, ter 24 mesas e meia (resultado obtido na divisão indicada). Justifica-se assim, algebricamente, a impossibilidade de serem utilizadas 100 cadeiras.

> Prof 1: E aí, gente, quem vai dividir 98 por 4? [463]
>
> Vanderlei: Vai dar 24. [464]
>
> Prof 1: Vamos fazer aqui, ó. 2 vezes 4, 8 sobra 1, 18 dividido por 4, 4! 4 vezes 4? [465]
>
> Paulo: Dá 24! (*deve estar se referindo ao resultado da parte inteira*) [466]
>
> Prof 1: 16! 4 vezes 6 que é 24, né? [467]
>
> Prof 1: 18 -16, 2! Aí, aqui é assim: como 2 não dá pra dividir por 4, a gente põe uma vírgula... [468]
>
> Prof 1: Isso (*o aluno Vanderlei já coloca o zero antes de a professora dizer*) e o zero! Então deu 24,5. [469]
>
> Prof 1: Gente, por isso é que vocês responderam que não. 24 e meio... Existe meia mesa? (*a professora considera a situação como semirreal*) [470]
>
> Valter e Paulo: Não.[471]

Prof 1: Então! Nó gente, tô feliz com vocês![472]

Nessa subconfiguração, a Prof 1 resolve a divisão de maneira predominantemente *magistral interativa*.

Após descrever e analisar o processo vivido na oficina 8, passo a identificar os objetos e processos matemáticos que possibilitaram tais práticas.

4. IDENTIFICAÇÃO DE OBJETOS E PROCESSOS MATEMÁTICOS (NÍVEL 2)

Nas práticas matemáticas explicitadas no nível 1, os sujeitos envolvidos mobilizam um conglomerado de objetos – uma tarefa ou situação-problema, linguagens, definições, proposições/propriedades, procedimentos e argumentos. A utilização da ferramenta teórica *Configuração de objetos e significados*, me permite discriminar esses objetos e articulá-los em uma configuração epistêmica implementada, como é explicitado na figura 32.

Detalho também, a seguir, alguns aspectos explicitados no desenvolvimento da referida situação-problema na qual o grupo:

- teve dificuldade em justificar os procedimentos realizados, limitando-se, em alguns momentos, a descrevê-los;
- apresentou dificuldade em estabelecer (ainda que implicitamente) qual grandeza referia-se à variável independente;
- reconheceu dois padrões de regularidades: o primeiro relacionado ao número de cadeiras que se perde por junção e o segundo relacionado com o número de cadeiras que são acrescidas a cada mesa que passa a fazer parte da configuração. O primeiro padrão de regularidade encontrado não foi generalizado. Obteve-se a generalização da sequência a partir do desenvolvimento do segundo padrão de regularidade.

Na análise das configurações didáticas, também se apresentaram processos matemáticos. Essa análise indicou, em geral, assim como na oficina 7 (Capítulo IV), uma série de processos de *problematização*, em sua maioria regulados pelas professoras, cuja finalidade foi partir de um processo de *particularização* e alcançar a *generalização.* Tanto as professoras quanto os alunos mobilizam processos de *valoração*, sustentados por normas e metanormas, cujo estudo se realizará no quarto nível de análise.

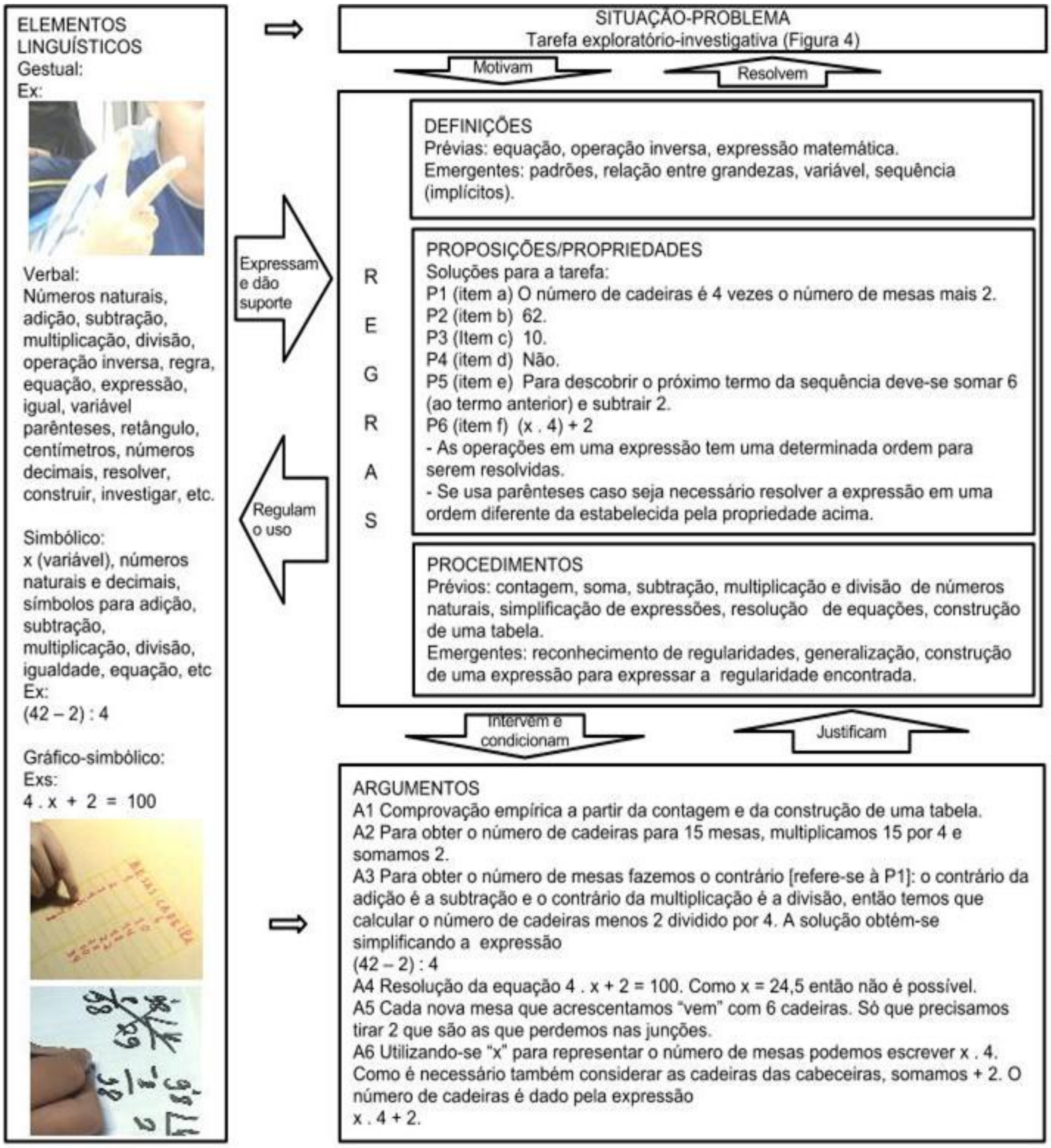


FIGURA 32 - Configuração epistêmica implementada na oficina 8

Terminada a análise de nível 2, passo aos padrões de interação e à articulação das configurações didáticas em trajetórias didáticas.

5. ANÁLISE DAS TRAJETÓRIAS E INTERAÇÕES DIDÁTICAS (NÍVEL 3)

TRAJETÓRIA DOCENTE

Como já aludido, as funções docentes apresentadas por Godino, Contreras e Font (2006) adotadas neste trabalho são: motivação (M), atribuição de tarefas (AT), regulação/lembrança e interpretação de conhecimentos prévios (R), avaliação (A), investigação/reflexão para mudança de rumos (I). Lembrando que também foram acrescidas as funções: manejo de classe/regulação de tempo ou disciplina (MC), validação da solução encontrada (V), exploração conjunta professor-alunos (E). Os padrões de interação foram explicitados ao longo da trajetória.

CONFIGURAÇÃO DOCENTE 1 (Prof 1)

A professora começa o trabalho enunciando, para toda a turma, a tarefa que deveria ser desenvolvida (AT):

> Prof 1: Todo mundo agora vai pegar, por favor, essa folhinha aqui. Queria que vocês agora... Gente, tem que prestar atenção porque se não, não consegue desenvolver a atividade! (*tom de voz enfatizando que a atividade é diferente*) Essa coisinha cinza (*retângulo recortado em lona*) nós vamos fingir que é uma mesa. Coloque essa mesa no centro do papel kraft. Agora tirem de dentro do saquinho... Cada um desses pininhos ou tampinhas vai ser... [1]
>
> Prof 1: ...uma cadeira. [3]
>
> Prof 1: Então o que nós vamos descobrir... O exercício fala assim: 'Em uma determinada festa...' Gente, pegue a folhinha aí por favor. 'Em uma determinada festa de casamento, cada mesa comporta 6 pessoas'. Só que quando os convidados chegam, Valter! Sabe quando a gente chega à festa, a gente não acaba juntando cadeiras (*juntando mesas*)? [...] Na letra *a* Construa uma tabela que relaciona a quantidade de mesas com a quantidade de cadeiras. Então, assim: 1mesa, quantas cadeiras; 2 mesas, quantas cadeiras, 3 mesas... Esse papel kraft é para vocês, ao invés de fazerem pequenininho, cada um faz a sua, vocês vão pegar as canetas coloridas que eu deixei na mesa, e vão fazer a tabela no papel kraft para mim. Uma para o grupo[5].

Nessas falas, aparecem claramente as funções de manejo de classe (MC) nos trechos: "Gente, tem que prestar atenção, porque se não, não consegue desenvolver a atividade!" e

"Valter!". O nome do aluno, nesse caso, se incorpora à explicação da tarefa para assegurar a atenção do aluno e, ao mesmo tempo, indicar aos outros que o próximo pode ser um deles.

Logo em seguida, a professora explica com mais detalhes a tarefa para o grupo (AT) e incentiva (M) os alunos a decidirem quem fará o registro coletivo. O fato de nenhum aluno do grupo se dispor a fazer o registro faz com que a professora decida que Vanderlei o fará. Nesse momento, emerge a função manejo de classe (MC) [16].

> Prof 1: É assim, ó: Primeiro... vamos montar com uma. Valter, monta com uma aqui. Quem vai fazer o quadro, a tabela? [9]
>
> Paulo: É o Valter. [10]
>
> Prof 1: Faz Paulo![11]
>
> Paulo: É o Marcelo! É o Vanderlei. [12]
>
> Marcelo: É só dividir ao meio assim? (*refere-se à construção da tabela*)[13]
>
> Prof 1: É. Quem vai fazer? Faz Paulo! [14]
>
> Paulo: É o Vanderlei.[15]
>
> Prof 1: Vanderlei, faça pra mim então, por favor. Passem a régua pra ele (*tom de autoridade*). [16]

Logo em seguida, a professora faz perguntas visando levar os alunos a desenvolverem a tarefa (R). Durante esse processo, procura estimular o grupo a continuar testando conjecturas (M): "Vamos tentar!"[41].

Inicia-se um momento de exploração conjunta (E), quando a professora passa a explorar, juntamente com o grupo, um possível padrão para a sequência analisada. Seguem-se momentos em que a professora requer (R) que os alunos expliquem seu raciocínio e/ou falem novamente (numa tentativa que consigam reelaborar o que dizem) [66 e 88] e exploração conjunta (E). Há também falas de estímulo (M)[64, 117]. A fala 122 trata-se, ao mesmo tempo, de um incentivo e de uma validação da solução encontrada (M/V).

> Prof 1: Vamos lá! [64]
>
> Prof 1: Mas qual é o raciocínio? Você pensou assim: uma mesa tem 6. [66]
>
> Prof 1: Fala de novo, Valter. [88]
>
> Prof 1: Isso! [117]
>
> Prof 1: Muito bem, 14! [122]

Há verbalizações que também buscam motivar e regular o tempo gasto na atividade (M/MC): "Prof 1: Vamos fazer! Ô Vanderlei, não precisa ser tão certinho não, porque se não, não dá tempo" (refere-se à construção da tabela no registro coletivo) [96] e "Prof 1: Não, Vanderlei, não perde tempo não!" (dirigida ao aluno, quando ele pensa que outro continuará a fazer o registro) [127].

No final dessa configuração, a Prof 1 encaminha o item *b* na tarefa (AT):

> Prof 1:Vamos passar pra letra b? 'Para 15 mesas, quantas cadeiras são necessárias? ' [184]

CONFIGURAÇÃO DOCENTE 2 (Prof 2)

Essa configuração se inicia quando a professora se aproxima do grupo e pergunta (R) sobre a resposta encontrada para o item b (encaminhado na configuração docente 1). Passa, então, a incentivar o grupo a obter um termo geral, quando se trata de um número maior de cadeiras [216], explicitando um *padrão de focalização*.

> Prof 2: Não, eu quero 52 mesas. [214]
>
> Prof 2: Pois é, então, no caso, tem pensar um jeito que a gente consiga pensar lá na frente, não é? [216]
>
> Prof 2: Não, vamos pensar, Paulo. Para uma mesa eu teria 6 cadeiras. 2 mesas... 10 cadeiras. Vamos pensar numa fórmula (*tom de voz pausado e calmo*). [218]

Segue-se um momento em que o grupo trabalha sozinho. Essa configuração é retomada quando a professora novamente chama a atenção do grupo para a necessidade de se encontrar uma fórmula (R).

> Prof 2: Tem que chegar a uma fórmula... (*inaudível*)[231]
>
> Prof 2: Paulo, vai chegar uma hora que... (*inaudível*)[233]
>
> Marcelo: É 52 x 4 + 2.[234]
>
> Prof 2: Então, a gente tem que pensar de um jeito [...] Fala de novo. [235]

Inicia-se uma exploração conjunta permeada de regulação (E/R), já que a professora faz referência à necessidade de generalização [244, 249, 264, 265]. Há também uma fala de exploração que é ao mesmo tempo de incentivo (E/M) [246].

> Prof 2: Então...[240]
>
> Marcelo: Então?! É só multiplicar por 4![242]
>
> Prof 2: Mas isso vai dar certo para as outras? [244]
>
> Prof 2: Então, vamos pegar, vamos lá... [246]
>
> Marcelo: Talita (*refere-se à Prof 2*)! 3 x 4, 12 + 2, 14! [247]
>
> Prof 2: Agora, tem que ser pra todas![249]
>
> Prof 2: Será que a gente poderia escrever de um jeito geral, assim... [264]
>
> Prof 2: A gente poderia escrever uma fórmula? [265]

A professora finaliza essa configuração, incentivando o grupo e pedindo aos alunos que registrem a solução encontrada (M/AT) [280]. Pede ainda ao grupo que explique, encaminhando esse processo através de perguntas (R), explicitando um *padrão recitativo*, o que significa cada termo da expressão, terminando por validar a expressão (V)[299, 300].

> Prof 2: Então, vamos lá! Vocês já descobriram a letra c, não foi? Então respondam a letra c pra mim em algum canto desse kraft aí. [280]
>
> Vanderlei: É 15 x 4 + 2. [292]
>
> Prof 2: 15 é o quê? [293]
>
> Vanderlei: 15 é o número de mesas. [294]
>
> Prof 2: E esse 4? [295]
>
> Vanderlei: Cadeiras. [296]
>
> Prof 2: E esse 2? [297]
>
> Marcelo: Cadeiras da ponta! [298]
>
> Prof 2: Cadeiras da ponta (*repete*)[299]
>
> Prof 2: Então, 15 x 4 + 2. Essa é a letra *c* [...]. [300]

CONFIGURAÇÃO DOCENTE 3 (Prof 2)

A professora inicia essa configuração, encaminhando a subtarefa requerida no item *c*.

> Prof 2: [...] Agora, olha a letra c. Coloca a letra c aí. 'Se houver', prestem bastante atenção, '42 cadeiras (*enfatiza a palavra cadeiras*), quantas mesas serão necessárias? ' [300]

Passa-se a uma fase de três momentos de interação regulativa (R). No primeiro momento, a professora chama a atenção para a necessidade de se chegar a um consenso [312]. O segundo momento remete à necessidade de justificar a solução encontrada [326 e 327] e, no terceiro momento, ressalta a necessidade de se utilizarem parênteses na expressão que está sendo construída pelo grupo [329 e 333].

> Prof 2: Mas é isso que eu quero saber, porque cada um fala uma coisa. Eu quero saber o seguinte: eu tenho 42 cadeiras. Quantas mesas eu preciso.[312]
>
> Prof 2: Então, quanto que deu? Deram 10 mesas. Vocês vão ter que justificar aqui, ó!
>
> (*aponta para o papel kraft onde o registro escrito deveria ser feito*)[326]
>
> Prof 2: Que conta que vocês fizeram para chegar nessas 10 mesas? [327]
>
> Prof 2: Vamos voltar aqui pra expressão, rapidinho. Se a professora (*refere-se à Prof 1*) passar aqui e olhar rapidão, ela vai chegar ao mesmo resultado que vocês? [329]
>
> Paulo: Vai. [330]
>
> Prof 2: Vai?[331]
>
> Vanderlei: Peraí (*contrato didático*)[332]
>
> Prof 2: Numa expressão, o que eu faço primeiro? [333]

Seguem-se interações regulativas (R), explicitando um *padrão recitativo,* até se chegar à expressão final, que é registrada. Destacam-se dois momentos que são de validação e ao mesmo tempo de incentivo (M/V) [340 e 344].

> Prof 2: Não, gente... calma aí. (*sorri*) Vamos voltar. A expressão tá quase certa. Vocês estão falando pra mim que eu tenho que resolver isso aqui (*a divisão*) primeiro, não é? Que elementos que eu uso da expressão para resolver isso aqui primeiro. [340]
>
> Prof 2: Agora sim! [344]

CONFIGURAÇÃO DOCENTE 4 (Prof 2)

Essa configuração inicia-se por uma atribuição de tarefa [348] (AT). Passa por um momento de regulação (R), quando a professora sugere que é necessário abstrair a partir da situação real, e continua com uma interação regulativa (R) entremeada de perguntas em tom de incentivo (M) [354 e 359].

> Prof 2: É possível construir uma fileira de mesas que tenham 100 cadeiras? [348]
>
> Prof 2: Construir na imaginação. Vamos pensar na situação real. [352]
>
> Paulo: Sim [353]
>
> Prof 2: Sim? Por quê? [354]

> Prof 2: Por que não? (*parece muito interessada*)[359]

Ressalta-se uma fala da Prof 2 (seguida de outra da Prof 1) que, apesar de parecer ser de estímulo para o trabalho cooperativo, pode ser interpretada, pelo tom, como manejo de classe voltado para a disciplina (MC) [379 e 380]. Seguem-se momentos de interação regulativa (R) que terminam quando a professora utiliza a 'autoridade' da fórmula como argumento [397], explicitando um *padrão recitativo*.

> Prof 2: Presta atenção no que seu colega está falando! [379]
>
> Prof 1: Senta aí, Marcelo.[380]
>
> Prof 2: Vocês não estão usando essa regrinha aqui? Pois é, 4 x 25, 100 com mais 2, 102. Estourou! Vamos tentar agora 24! 24 x 4, segundo o Valter, deu 96 + 2, 98. Então não deu. [397]

CONFIGURAÇÃO DOCENTE 5 (Prof 1 e Prof 2)

Essa configuração inicia-se com a Prof 2 encaminhando a penúltima subtarefa (item *e*) (AT). Seguem-se momentos de interação regulativa conduzidos pela Prof 2 (R). No momento seguinte, a Prof 1 se aproxima com a intenção de avaliar o trabalho desenvolvido pelo grupo (A) [426]. A avaliação se dá a partir de perguntas (R) entremeadas/mescladas de falas de apreciação (M) [431, 433, 437].

> Prof 1: Quem que vai contar pra mim como é que o grupo pensou? [426]
>
> Paulo: A gente pensou assim... [427]
>
> Prof 2: Foi um processo loooongo. [428]
>
> Paulo: A gente pensou assim que o número de mesas podia variar. [430]
>
> Prof 1: Hã, hã (*tom de voz apreciativo*)[431]
>
> Paulo: Aí, a gente representou ele por *x*. [432]
>
> Prof 1: Ótimo. [433]
>
> Prof 1: Então, perfeito. Até o vezes 4, eu entendi, porque você perde 2 cadeirinhas, não é isso? Então, beleza! Por isso que você não multiplica por 6. E o mais 2 é o que? [437]

Em seguida, a Prof 2 pede aos alunos que testem a fórmula geral para o caso de 100 cadeiras (retoma o item e) (AT), explicitando um *padrão de focalização*. Seguem-se momentos de diálogo contextualizado e, por fim, momentos de regulação (R) em que a professora resolve a divisão 98 : 4, em uma interação de *padrão recitativo* (o Vanderlei faz os registros e também participa da resolução).

A última fala dessa configuração é da Prof 1, que se mostra satisfeita com o desenvolvimento do trabalho realizado pelo grupo (M).

> Prof 1: Então! Nó, gente, tô feliz com vocês![472]

TRAJETÓRIAS DISCENTES E COGNITIVO-AFETIVAS

As funções discentes, apresentadas por Godino, Contreras e Font (2006), adotadas neste estudo recebem as seguintes denominações: comprometimento (C), exploração (E), recordação (R), formulação de soluções (S), justificação (J), pedido de informação (I), demanda (D), fixação (F) e avaliação (A), e acrescento a denominação E*, para o momento da exploração em que ocorre uma descoberta.

CONFIGURAÇÃO COGNITIVO-AFETIVA DE MARCELO

Marcelo inicia o item *a* da tarefa explorando o material concreto e fazendo conjecturas (E), a partir da contagem, sobre o número de cadeiras necessárias em cada caso.

> Marcelo: Tinha 6 aqui. [42]
>
> Marcelo: Aí vai ficar 10, porque vai tirar menos 2. [44]

Durante toda a atividade, Marcelo se mostra bastante comprometido, acompanhando atentamente as argumentações dos colegas e buscando contribuir com o grupo.

> Marcelo: Se tiver uma mesa a mais, vai aumentar menos 2 pra você tirar... [86]
>
> Marcelo: É. Mais 2 (*enfatiza a expressão mais 2*)! [91]

Marcelo tem um rosto bastante expressivo e nos momentos de exploração da tarefa, em que intui estar no caminho certo ou ter descoberto algo, arregala os olhos e o rosto assume uma expressão de satisfação. Quando se convence de que está certo, busca, de todas as formas, comunicar seu raciocínio. Quando o interlocutor (uma das professoras ou um dos colegas do grupo) não compreende o que para ele se tornou 'óbvio', faz um gesto com a boca, retorcendo-a para um dos cantos, numa expressão que parece significar 'como assim não percebe/entende'?

No trecho adiante, Marcelo, acompanhando as anotações de Valter, descobre (E*) a regularidade do padrão, afirmando que cada termo é formado adicionando-se 4 ao termo anterior, e busca comunicar sua descoberta.

> Marcelo: Ô Valter, tá aumentando 4 de cada vez, aqui ó! (*aponta para os registros do Valter*).[159]
>
> Marcelo: Sempre aumenta 6 e diminui mais... menos 2 (*fala para a professora*).[160]
>
> Marcelo: Professora, você sempre aumenta 6 e tira 2.[163]
>
> Prof 1: Sempre aumenta 6?[164]
>
> Marcelo: Não, e tira 2. Desses 6 você tira 2.[165]
>
> Prof 1: Então, vamos tentar. Por exemplo, 18. [166]
>
> Marcelo: 18... Vai dar 34 (*equivocado*). Aí tira 2 e vai dar 32.
>
> Prof 1: Fala de novo, Marcelo. (*Marcelo faz cara de 'como assim não me entende'?*) Como é que é?
>
> Marcelo: 18 (+ 6) vai dar 24. Você tira 2, vai dar 22! 4 a mais do que a anterior!

Marcelo se dedica a cada subtarefa com a mesma disposição e pede informação (I) aos colegas do grupo sempre que não está entendendo.

> Marcelo: Como assim, não entendi nada *(fala com os colegas).* [187]

Apesar de ter descoberto a regularidade do padrão no item *c* da tarefa, quando é pedido que se calcule o número de cadeiras para 15 mesas, Marcelo efetua a contagem utilizando material concreto, demonstrando, nesse momento, não ter alcançado a generalização. No entanto, mostra confiança com o resultado encontrado e não titubeia diante da resposta diferente, também obtida através da contagem, encontrada pelo colega Paulo. Quando Paulo se convence de que a resposta dele está correta, Marcelo pede a Valter para fazer o registro da resposta.

> Paulo: 61! [202]
>
> Marcelo: 1, 2, 3, ..., 20,..., 40,..., 62! (*conta as cadeiras*)[203]
>
> Paulo: Não tem não![204

> Marcelo: é 62! [205]
>
> (*Paulo discorda e conta as cadeiras novamente uma a uma*)
>
> Paulo: 1, 2, 3, ..., 62 [206]
>
> Marcelo: Anota aí, Valter. 62! [207]

No episódio a seguir, Marcelo consegue obter uma expressão para calcular o número de cadeiras necessárias para 52 mesas (E*) a partir do número encontrado para 15 mesas. Ele começa tentando descobrir o número que vezes 15 dá 62 [224]; a seguir, considera o número 60 ao invés de 62, parecendo considerar implicitamente que 62 não é múltiplo de 15 [226]. Ao constatar que 60 é 15 x 4 [228], obtém uma expressão para o cálculo de 15 mesas [230].

> Marcelo: Pra dar 62 com 15 mesas, 15 vezes...[224]
>
> Marcelo: 15 vezes... Quanto que dá 15 vezes... Quanto que dá 60? [226]
>
> Marcelo: 15 + 15, 30... 15 x 4! [228]
>
> Marcelo: Nó, Valter! É 15 x 4 + 2![230]

Marcelo tenta comunicar sua descoberta à Prof 2, utilizando como justificativa (J) a expressão desenvolvida para 15 mesas, qual seja, 15 x 4 + 2, argumentando que o resultado (62) é o mesmo que o encontrado a partir da contagem [239].

> Prof 2: Tem que chegar a uma fórmula... (*inaudível*)[231]
>
> Marcelo: 52 x 4 + 2! [232]
>
> Prof 2: Então, a gente tem que pensar de um jeito... Aqui ó, 52 mesas seriam tantas cadeiras... Não é... (*inaudível*). Fala de novo. [235]
>
> Marcelo: 52 x 4 + 2. [236]
>
> Prof 2: Por que 52 x 4 + 2? (*repete falando pausadamente*)[237]
>
> Marcelo: Porque 15 x 4, dá 60. 60 + 2, 62 que deu o número de cadeiras... [239]

Como o aluno usa um caso particular para justificar seu raciocínio, a professora questiona-o sobre a generalidade da expressão [244 e 249]. Marcelo passa a testar a expressão encontrada (para três, quatro e cinco mesas) [247, 250 e 253], comparando os resultados encontrados com os valores já obtidos e registrados na tabela. Durante todo o tempo, Marcelo apresenta absoluta convicção de que a expressão construída por ele está correta. Apesar de a professora pedir que comprove sua expressão e Paulo [251] indicar uma expressão diferente, Marcelo continua testando os valores até conseguir convencer os colegas e a professora de que seu argumento (J) é válido.

> Prof 2: Então... [240]
>
> Marcelo: Então?! É só multiplicar por 4! [242]
>
> Prof 2: Mas isso vai dar certo para as outras? [244]
>
> Marcelo: Talita (*fala o nome da professora*)! 3 x 4, 12 + 2, 14![247]
>
> Prof 2: Agora, tem que ser pra todas![249]
>
> Marcelo: É. 4 x 4, 16. 16 + 2, 18! [250]
>
> Paulo: O número vezes ele mesmo menos... mais 2. [251]
>
> Marcelo: Não, meu filho! Ó, 4 x 4, 16, + 2, 18. [252]
>
> Marcelo: 5 x 4, 20, + 2, 22. [253]

Marcelo não generaliza a expressão encontrada, feito realizado pelo Valter [254 e 257], e apresenta dificuldade em estabelecer o que considerar como variável independente (x): se o número de mesas ou o número de cadeiras [256].

> Valter: É o número vezes 4 mais 2. [254]
>
> Prof 2: Que número é esse que vocês estão querendo vezes 4? [255]
>
> Marcelo: É o número de cadeiras![256]
>
> Valter: É x . 4 + 2. [257]
>
> Prof 2: Número de? [258]
>
> ? Mesas [259]

Apesar de aparentemente não discordar que x seria o número de mesas e confirmar a fórmula encontrada [268], para Marcelo ainda não está claro qual é a variável independente. De fato, ele afirma tanto que x representa o número de cadeiras [271], quanto representa o número de mesas [274]; afirmando, por fim, que há duas variáveis envolvidas. Quando Valter afirma, com convicção, que o número de mesas é x [278], Marcelo concorda (com um tom de voz que aparentemente não transparece dúvida), mas não é possível afirmar que compreendeu porque x, no caso, refere-se ao número de mesas.

> Prof 2: A gente poderia escrever uma fórmula? [266]
>
> Marcelo: x vezes 4 + 2. [268]
>
> Prof 2: Então, quem que é esse x? [270]

> Marcelo: x é o número de cadeiras. [271]
>
> Vanderlei: As mesas (*fala simultânea com a anterior*)[272]
>
> Marcelo: mesas.[274]
>
> Marcelo: Tem mesas e cadeiras... [276]
>
> Prof 2: Não, olha só... [277]
>
> Valter: Mesas é x. [278]
>
> Marcelo: É, mesas é x. [279]

No momento em que é feito o registro da fórmula encontrada, Marcelo assume a autoria da descoberta, mostrando-se orgulhoso de tal feito [289]. Parece feliz de ter, ao final de tanto esforço, conseguido comunicar sua ideia, ainda que ela tenha sido explicitada de forma generalizada por Valter.

> Marcelo: É, mas a ideia foi minha, no caso, né, Valter? [289]

A seguir, Marcelo se dedica ao item *d* da tarefa, buscando descobrir quantas mesas são necessárias para 42 cadeiras. No início, afirma tanto que se deve dividir 42 por 4 [306], quanto que se deve multiplicar por 2 [308]. Em seguida, parece se dar conta de que o que é pedido nessa subtarefa (o número de mesas dado o número de cadeiras) trata-se do contrário do requisitado na tarefa anterior (o número de cadeiras dado o número de mesas). Afirma, então, que se deve fazer o raciocínio contrário ao empregado anteriormente [313].

> Marcelo: 42 dividido por 4. [306]
>
> Marcelo: é vezes 2.[308]
>
> Marcelo: Você tem que fazer o contrário do que você fez anteriormente. O contrário da multiplicação é divisão. O contrário de mais... de somar é subtrair! [313]

Marcelo começa pela operação de subtração (42 - 2) e passa à operação de divisão (40:4). Como Valter divide 44 por 4 (ele parece considerar que 42 não é divisível por 4), Marcelo tenta convencer o grupo de que se deve dividir 40 por 4 e não 44 por 4, como pretendia Valter (ainda que sejam 42 cadeiras). Nessa hora, demonstra não entender por que os colegas não pensam como ele, mas fica satisfeito quando a professora valida sua resposta e o colega Vanderlei a registra. É importante ressaltar que os argumentos (J) de Marcelo são procedimentais, talvez porque entenda que já explicou suficientemente, ao afirmar que deveriam utilizar operações inversas.

> Marcelo: 42 menos...[314]
>
> Valter: Se fizer 44 vai dar 11. [316]
>
> Marcelo: Ô Valter, 40 por 4, né Valter? [318]
>
> Vanderlei: Mas são 42 cadeiras?!
>
> Prof 2: De onde você tirou 40?
>
> Marcelo: 42 - 2.
>
> Marcelo e Paulo: 42 - 2 dividido por 4 (*Vanderlei registra 42 - 2 : 4 no papel kraft*)

A discussão que se segue refere-se à necessidade de se utilizarem parênteses na expressão registrada. Marcelo logo identifica a operação que se deve fazer primeiro, na referida expressão, e observa que os parênteses devem ser usados para determinar a ordem em que a expressão deve ser resolvida (R).

> Marcelo: A divisão. [334]
>
> Marcelo: Parênteses. [341]

No item *e*, Marcelo afirma, desde o primeiro momento, ser possível construir uma fileira de mesas com 100 cadeiras. Apesar de a professora e os colegas chegarem à conclusão de que isso não era possível, Marcelo desenvolve um raciocínio paralelo ao do grupo e tenta desenvolver sua ideia interagindo primeiro com Valter [365, 366, 367], depois com Paulo [376, 377].

> Marcelo: 49 + 49, dá? [363]
>
> Marcelo: Faz aí Valter, 49 + 49... (*Valter começa a fazer a continha*)[365]
>
> Marcelo: 98, não é? [366]
>
> (*Valter faz um gesto afirmativo com a cabeça*)
>
> Marcelo: Mais 2![367]
>
> Marcelo: Olha, Paulo, porque eu tô falando que dá [376]
>
> (*levanta-se e pega a folha que o Valter fez o cálculo e mostra pra Paulo*)
>
> Marcelo: 49 + 49, 98, + 2, que é a cadeira da frente e a de trás [377]
>
> (*aponta para as duas cabeceiras da mesa construída*)
>
> Paulo: Quantas vezes você vai fazer 49? [378]

Ao final da discussão do grupo, Marcelo afirma não ter entendido, apesar de não ter participado da referida discussão, e tenta explicar à professora porque pensa ser possível serem utilizadas 100 mesas (S) [396]. A professora responde, no entanto, resumindo o resultado da discussão realizada pelo restante do grupo [397]. Marcelo não diz mais nada, mas seu silêncio não nos indica se ficou convencido com a justificativa dada pela professora ou não.

> Marcelo: se tiver 49 aqui e 49 aqui, vai dar 98 mais uma aqui e outra aqui, vai dá 100! [396]
>
> Prof 2: Vocês não estão usando essa regrinha aqui? Pois é, 4 x 25, 100 com mais 2, 102. Estourou! Vamos tentar agora 24! 24 x 4, segundo o Valter, deu 96 + 2, 98. Então, não deu. [397]

CONFIGURAÇÃO COGNITIVO-AFETIVA DE PAULO

Apesar de referir-se pejorativamente ao material concreto, quando a Prof 1 explica que serviria para simular mesas e cadeiras [4], Paulo parece bem à vontade manipulando-o. Como veremos mais adiante, o material parece trazer-lhe segurança.

> Prof 1: Uma cadeira. [3]
>
> Paulo: Nó que traia. [4]

Paulo declina o convite feito pela Prof 1 para que fizesse o registro escrito da atividade, indicando o nome dos outros colegas para tal incumbência [12], mas durante toda a oficina se comporta de maneira comprometida, sempre posicionando-se frente às discussões (C).

> Prof 1: É assim, ó: primeiro... Vamos montar com uma, Valter. Monta com uma aqui. Quem vai fazer o quadro, a tabela? [9]
>
> Paulo: É o Valter. [10]
>
> Prof 1: Faz Paulo![11]
>
> Paulo: É o Marcelo! É o Vanderlei. [12]
>
> Paulo: É o Vanderlei. [15]

Na exploração inicial, em busca de um padrão para a sequência, Paulo afirma que o número de cadeiras que se perde na junção de duas mesas é dois (E). Estabelece-se, nesse momento, um conflito semiótico, já que tal afirmação é contrária à ideia (equivocada) apresentada por Valter. O fato de utilizar o material concreto parece ter dado a Paulo a segurança para manter seu posicionamento [62, 68] e argumentar com convicção, ajudando o grupo a estabelecer uma sequência para o número de cadeiras perdidas por junção, o que termina por resolver o referido conflito.

> Prof 1: E quando tem 3 mesas? [52]
>
> Valter: A gente tira 2 cadeiras. [53]
>
> Paulo: Quando tem 2 mesas, tira 2 do mesmo jeito. [57]
>
> Prof 1: Quando tem duas mesas, quantas que a gente tem que tirar? [59]
>
> Paulo: Tira 2. [60]
>
> Prof 1: É? Vamos lá! [61]
>
> Paulo: Porque seria uma aqui e uma aqui. [62]
>
> (*separa as 2 mesinhas e aponta para a junção entre elas*)
>
> Prof 1: Mas qual é o raciocínio? Você pensou assim: uma mesa tem 6. [66]
>
> Paulo: Porque se juntar essas duas mesas, você vai perder os dois lugares que vai ter aqui, ó! [68]
>
> (*mostra o lugar na junção das mesas em que estariam 2 cadeiras*)
>
> Paulo: Se juntar 3 vai perder 4 cadeiras.[70]
>
> Prof 1: E quando tem 3 mesinhas?
>
> Paulo: 4!
>
> Prof 1: Quantas que a gente vai perder?
>
> Paulo: 4 lugares.
>
> Paulo e Valter: 2, 4. Quatro!
>
> Prof 1: Então, peraí com 2 perde 2, com 3 perde?
>
> Valter e Paulo: com 3 perde 4.
>
> Valter e Paulo ...vai perder 6!
>
> Paulo: Vai perder 8.
>
> Valter: vai ficar 2, 4, 6, 8, 10,12...

Na exploração (E) do item *a* Paulo se equivoca [111] quando é questionado pela Prof 1 e dá a resposta correta [116 e 118], quando realiza o procedimento de contagem.

> Paulo: 6. [108]
>
> Prof 1: Isso! Agora com 2 mesas. [110]
>
> Paulo: São 12. [111]
>
> Prof 1: Conta aí pra mim, Paulo! [114]
>
> Paulo: 1, 2, 3..., 10 [116]

Prof 1: Isso! Agora conta com 3 *(mesas)*, Paulo! Coloca aí pra mim, por favor. [117]

Paulo: 1, 2, 3, ..., 14 .Vai dar 14.[118]

Paulo parece apresentar certo receio [156], sempre que pressente que a tarefa aumenta de complexidade. Tal fato talvez se deva ao medo de não conseguir desenvolver a tarefa, como aconteceu em oficinas anteriores. Consegue, no entanto, determinar o padrão da sequência e obter o quinto termo da sequência, dado o quarto.

Prof 1: Isso. Vamos tentar pensar agora para 5! [155]

Paulo: Nossa Senhora![156]

Paulo: 18 você aumenta 4![167]

No item *c* da tarefa, consegue convencer o grupo de que deveriam utilizar o material concreto e realizar a contagem, ainda que o número de mesas (15) fosse grande (J). Esse fato leva Paulo a realizar várias vezes o procedimento de contagem, já que Marcelo obtém um número diferente do encontrado por ele. Paulo, ao que parece, pensa que é melhor realizar a contagem, ainda que dê mais trabalho, porque contando "não tem jeito de errar" [211].

Paulo: Não adianta somar não, tem que fazer! [186]

Paulo: Essa regra pode mudar a qualquer hora. [188]

Paulo: 2, 4, 6, ... (*conta as cadeiras*)[199]

Paulo: 61! [201]

Marcelo: 62! [202]

Paulo: Não tem não! [204]

Paulo: 1, 2, 3, ..., 62 [203]

Quando a professora propõe um número de mesas para o qual não há como utilizar o material concreto [215], Paulo demonstra insegurança e, a partir desse momento, parece responder o que lhe vem à cabeça [221, 245, 310], ou simplesmente discordar [238, 273, 275]. Em [251] não acompanha o raciocínio de Marcelo [250], não percebendo que um dos termos da multiplicação é variável. Esse fato explicita sua dificuldade em pensar abstratamente, pensamento esse indispensável para a generalização.

Prof 2: Não, eu quero 52 mesas. [214]

> Paulo: Mesas? Não tem mesas suficiente! [215]
>
> Prof 2: Pois é, então, no caso, tem de pensar um jeito que a gente consiga pensar lá na frente, não é? [216]
>
> Paulo: (*inaudível*)[217]
>
> Prof 2: Não, vamos pensar, Paulo. Para uma mesa, eu teria 6 cadeiras. 2 mesas... 10 cadeiras. Vamos pensar numa fórmula (*tom de voz pausado e calmo*). [218]
>
> Paulo: Você vai multiplicar 4 por 6 e subtrair [221].
>
> Prof 2: Por que 52 x 4 + 2? [237]
>
> Paulo: menos 2. [238]
>
> Prof 2: Mas isso vai dar certo para as outras?
>
> Paulo: Não. [245]
>
> Marcelo: É. 4 x 4, 16. 16 + 2, 18! [250]
>
> Paulo: O número vezes ele mesmo menos... mais 2. [251]
>
> Paulo: Cadeiras! [273]
>
> Marcelo: Mesas. [274]
>
> Paulo: Cadeiras! [275]
>
> Paulo: Porque tem que multiplicar por 4 e somar mais 2 (*resposta dada para o item d*)[276]
>
> Paulo: Porque tem que multiplicar por 4 e somar mais 2. [310]

Paulo parece estar sempre compenetrado e apresenta, quase sempre, uma expressão muito séria. Quando recebe um elogio ou sua resposta é validada, dá um sorriso meio tímido. Para ele parece ser muito importante participar e conseguir realizar a atividade.

Apesar das dificuldades, Paulo acompanha a discussão do grupo. No episódio a seguir, a partir do raciocínio de Marcelo, ele faz as operações indicadas pelo colega e consegue obter um resultado que é validado pela Prof 2. Quando questionado, Paulo justifica procedimentalmente, indicando as operações que realizou (J). Não há como afirmar, no entanto, se ele entende porque deve realizar tal procedimento.

> Paulo: Vai dar 10 mesas. [323]
>
> Prof 2: Como é que você chegou nesta resposta, Paulo? [324]
>
> Paulo: Você vai tirar o menos 2 ali, e vai dividir por 4. [325]
>
> Prof 2: Então, quanto que deu? Deram 10 mesas. Vocês vão ter que justificar aqui, ó! [326]
>
> (*aponta para o papel kraft onde o registro escrito deveria ser feito*)
>
> Prof 2: Que conta que vocês fizeram para chegar nessas 10 mesas? [327]

> Marcelo e Paulo: 42 - 2 dividido por 4 [328]

Vale ressaltar a expressão utilizada por Paulo [345] ao final do longo processo até chegarem à expressão correta que indica o raciocínio percorrido no item *d*.

> Prof 2: Agora sim! [344]
>
> Paulo: Nu![345]

Diante do item *e* da tarefa, Paulo oscila entre afirmar que é possível [353] e que não é possível [350 e 358] construir uma fileira de mesas com 100 cadeiras. Em sua fala [360], no entanto, parece demonstrar que não está respondendo aleatoriamente, já que, ao que parece, considera o caso em que são mantidas 50 mesas de cada lado e duas cadeiras nas cabeceiras.

> Prof 2: É possível construir uma fileira de mesas que tenham 100 cadeiras? [348]
>
> Marcelo: Sim. [349]
>
> Paulo: Não... [350]
>
> Prof 2: Construir na imaginação. Vamos pensar na situação real. [352]
>
> Paulo: Sim. [353]
>
> Prof 2: Sim? Por quê? [354]
>
> Paulo: Porque é só multiplicar... [355]
>
> Prof 2: É possível construir uma fileira de mesas que tenham 100 cadeiras? [lê novamente]. Não tô pensando no número de mesas não, tô pensando no número de cadeiras. [357]
>
> Paulo: Não. [358]
>
> Prof 2: Por que não? (*parece muito interessada*)[359]
>
> Paulo: Porque dá 102.[360]

Surpreendentemente Paulo, que não quis realizar o registro escrito, se dispõe a relatar o trabalho desenvolvido pelo grupo (A). O relato que faz comprova que participou do processo de produção de significados, realizado pelo grupo, mesmo parecendo estar, algumas vezes, à margem dele, sendo capaz de explicar a fórmula desenvolvida pelo grupo. Demonstra insegurança apenas em relação ao que de fato representa a variável independente [434].

> Prof 1: Quem que vai contar pra mim como é que o grupo pensou? [426]
>
> Paulo: A gente pensou assim que o número de mesas podia variar. [430]
>
> Prof 1: Hã, hã (*tom de voz apreciativo*)[431]

> Paulo: Aí, a gente representou ele por *x*. [432]
>
> Paulo: Que ele tinha que ser multiplicado... vezes 4 que seria o número de mesas... de cadeiras, aliás. [434]
>
> Prof 1: Sim. Agora, Paulo, vê se você consegue me explicar porque a gente multiplica por 4 e não por 6? Por que quando tem uma mesinha, tem 6 cadeiras, não tem? Você consegue falar por que vocês multiplicaram por 4?[435]
>
> Paulo: Porque quando a gente junta duas mesas, duas cadeiras não irão aparecer, então esta multiplicação não seria possível (*tom como se estivesse recitando uma fórmula*). Então teria que ser, vezes 4 mais o 2. [436]
>
> Prof 1: Então, perfeito. Até o vezes 4, eu entendi, porque você perde 2 cadeirinhas, não é isso? Então, beleza! Por isso que você não multiplica por 6. E o mais 2 é o que? [437]
>
> Paulo: Mais 2 é porque tem mais 2... tem um em cada ponta das mesas (*aponta para as cabeceiras da mesa construída*) [438]
>
> Prof 1: Da cabeceira. Ah....E vocês testaram e deu certo? [439]
>
> Paulo: Deu. Com todos. [440]

CONFIGURAÇÃO COGNITIVO-AFETIVA DE VALTER

Valter é o primeiro a encontrar uma regularidade, item *a*, ao manipular o material concreto (E). Considera o número de cadeiras que se perde por junção. No entanto, considera (equivocadamente) que é perdida apenas uma cadeira por junção (e não duas).

> Valter: 6 + 6 é 12. Que é essas duas aqui. Mais uma (*mesa*), 18. Vai ficar 16 se tirar as duas. Essas duas do meio aqui. Vai ficar 16. [47]
>
> Prof 1: Então, aqui a gente tirou quantas? [48]
>
> Valter: A gente tirou 1. Tem que tirar outra. [49]
>
> Prof 1: Não, então pera aí. Quando tem 2 mesas a gente tem que tirar 1? [50]
>
> Valter: Certo. [51]
>
> Prof 1: E quando tem 3 mesas? [52]
>
> Valter: A gente tira 2 cadeiras.[53]

Quando o colega Paulo, seguindo a exploração iniciada por Valter, argumenta que são perdidas duas cadeiras em cada junção, Valter rapidamente refaz o seu raciocínio e chega a construir uma sequência que representa o número de cadeiras por junção (E). Não chega, no entanto, a generalizá-la. Em um momento seguinte, Valter tenta relacionar o número de cadeiras perdidas com o número de cadeiras que são adicionadas (E) [150, 152, 154], mas esse raciocínio não é desenvolvido.

Paulo e Valter: 2, 4. Quatro! [80]

Prof 1: Então, peraí com 2 perde 2, com 3 perde? [81]

Valter e Paulo: com 3 perde 4. [82]

Valter: Ah, você acumula mais 2 e com 4... [83]

Valter e Paulo ...vai perder 6![84]

Valter: Aqui tinha 2 e eu vou adicionar mais uma mesa e perde 2 cadeiras. 2, 4, 6... [89]

Valter: Vai ficar 2, 4, 6 , 8, 10, 12... [92]

Valter: Ahhhh! As 4 que a gente tirou aqui, voltaram.[150]

Valter: Aqui, a gente tinha perdido 4 cadeiras. [152]

Valter: Quando a gente colocou mais uma (*mesa*), a gente ganhou... pegou as 4 de volta.[154]

Valter tem um jeito muito sério. Fala baixo e pausadamente e costuma utilizar muitos gestos para se comunicar. Parece 'pensar antes de falar', já que costuma acompanhar em silêncio toda a discussão e fazer sua intervenção no final. Depois de uma longa tentativa de Marcelo de explicitar seu raciocínio, Valter expressa-o de maneira generalizada (S) [254 e 257].

Valter: É o número vezes 4 mais 2. [254]

Prof 2: Que número é esse que vocês estão querendo vezes 4? [255]

Valter: É x . 4 + 2. [257]

Prof 2: Ah! Então, se eu quisesse falar quantas cadeiras, eu teria que pegar o número de mesas... [260]

Marcelo e Valter: Vezes 4! [261]

Prof 2: E depois? [262]

Valter: Acrescentar mais 2. [263]

Em outro momento, quando o grupo discute sobre o que, na expressão x . 4 + 2, estaria representado por *x*, Valter afirma, em um tom convicto, que é o número de mesas [278]. O colega Marcelo concorda com Valter e a Prof 1 valida a resposta. Valter parece entender (implicitamente) que *x* se comporta como variável independente, mas não é possível afirmar se de fato ele compreendeu esse conceito.

Prof 1: Então, quem é esse *x*? [270]

Marcelo: *x* é o número de cadeiras. [271]

Vanderlei: As mesas (*fala simultânea à anterior*).[272]

Paulo: Cadeiras! [273]

Marcelo: Mesas. [274]

Valter: Mesas é *x*. [278]

Quando o grupo faz o registro do item *c*, é Valter quem consegue recuperar o raciocínio desenvolvido (S), ditando-o para o colega Vanderlei [291].

Valter: É 15 x 4 + 2. [285]

Prof 2: Então, como é que você fez? [286]

Valter: É 15 x 4 + 2. [287]

Prof 2: Então, escreva o que o Valter tá falando. [288]

Valter: O número vezes 4 mais 2. [291]

Oralmente, Valter intervém pouco na resolução dos itens *d* e *e* da tarefa. Acompanha, no entanto, a discussão, faz cálculos para confirmar os resultados e, em muitos momentos (como se pode confirmar pelos trechos gravados), se posiciona ou responde apenas balançando a cabeça.

Valter: 42? cadeiras? [303]

Valter: Por isso é que eu falei 44. Aí ia dar 11. [311]

Valter: Se fizer 44 vai dar 11. [316]

Paulo: Porque dá 102. [360]

Prof 2: Não é possível, então? [374]

Valter: Não. [375]

Valter: Vai dar 98. [389]

Prof 2: Então a resposta para 'tem como construir uma fileira de mesas com 100 cadeiras', é? [391]

Valter: Não. [392]

CONFIGURAÇÃO COGNITIVO-AFETIVA DE VANDERLEI

No início da oficina, Vanderlei foi indicado pelo grupo para realizar o registro escrito, o que fez com que ele ficasse à margem das discussões iniciais, envolvido no afazer de construir a tabela requerida no item *a*. Suas intervenções, em meio à discussão, são desconexas pelo fato de se referirem, via de regra, à construção da tabela [58].

Vanderlei traça um retângulo e, depois, dedica bastante tempo em tentar descobrir qual deveria ser a largura das linhas da tabela, para que todas tivessem o mesmo tamanho [97, 105].

> Paulo: Quando tem 2 mesas, tira 2 do mesmo jeito. [57]
>
> Vanderlei: Agora divide ao meio? (*se refere à construção da tabela*)[58]
>
> Vanderlei: Tô medindo 2 cm. [97]
>
> Vanderlei: É porque deu 2,5 cada um. [105]
>
> Vanderlei: Essa régua tem mais de 30 cm... [123]
>
> Vanderlei: É do outro lado que boto cadeira? [137]

Ao preencher a tabela, copiando os dados encontrados pelo grupo (registrados por Valter em uma folha auxiliar), Vanderlei descobre a regularidade [192] que o grupo já tinha identificado. Continua, no entanto, alheio à discussão [198].

> Vanderlei: Sempre aumenta mais 4? [190]
>
> Paulo: Você só vai copiando o que está aí... [191]
>
> Vanderlei: Sempre aumenta mais 4! [192]
>
> Vanderlei: A primeira começa com 6, né? [194]
>
> Marcelo: 15 vezes 2... [197]
>
> Vanderlei: 8... 34! [198]

Após preencher a tabela, Vanderlei começa a participar das discussões e aplica a expressão encontrada pelo grupo (x . 4 + 2) sem dificuldade e com aparente entendimento (S) [265, 292] .

> Vanderlei: Multiplica 100 x 4, 400, + 2, 402! [265]
>
> Vanderlei: É 15 x 4 + 2. [292]
>
> Prof 2: 15 é o que? [293]
>
> Vanderlei: 15 é o número de mesas. [294]
>
> Prof 2: E esse 4? [295]
>
> Vanderlei: Cadeiras. [296]
>
> Prof 2: E esse 2? [297]

Vanderlei pede esclarecimentos (D) no momento em que o item *d* é encaminhado e, então, participa da exploração da tarefa [364, 369, 373].

> Vanderlei: É possível fazer o quê? [356]
>
> Vanderlei: Porque tem que acrescentar mais 2 na ponta. [362]
>
> Vanderlei: Tem que ser 40 vezes... Não... 4 vezes 25 menos 2. [364]
>
> Vanderlei: 4 vezes 25 mais 2. Só que aí daria 102. Só que aí teria que diminuir... [369]
>
> Prof 2: Por que você está fazendo 4 vezes 25? [370]
>
> Vanderlei: Porque aí vai dar...[371]
>
> Prof 2: Por que você tá fazendo 4 vezes 25? [372]
>
> Vanderlei: Porque é o número de mesas. [373]
>
> Prof 2: Não é possível, então? [374]

Vanderlei passa então a realizar a operação 4 vezes 24, em voz alta [381, 382, 388]. Quando é inquirido por Paulo, e logo em seguida por Marcelo, sobre o porquê de estar fazendo essa operação, não justifica seu procedimento [384, 387].

> Vanderlei: 24, 24, 24 24... [381]
>
> Vanderlei: 4, 6, 8... [382]
>
> Paulo: Por que você está fazendo isso? [383]
>
> Vanderlei: Eu tô fazendo a conta. [384]
>
> Marcelo: Não entendi não! [385]
>
> Vanderlei: 24 vezes 4. [386]
>
> Paulo: Tem 4 vezes o 24. [387]
>
> Vanderlei: 4 vezes 4, 16. Manda o seis pra cima, 1! Vai dar 8, 9! 90 e 6! Vai dar 96. E acrescenta mais 2... [388]
>
> Vanderlei: Vai dar 98. [390]

Com a ajuda dos colegas do grupo, Vanderlei resolve a equação $x \,.\, 4 + 2 = 100$ e faz o registro no papel kraft.

> Paulo: Aí na linha de baixo você vai colocar: 4 x = 100 + ... [458]
>
> Vanderlei: 100 - 2... [459]
>
> Vanderlei: Vai dar 24. [464]

TRAJETÓRIA MEDIACIONAL

Nessa oficina, foram utilizados retângulos de mesmo tamanho recortados em lona e rolhas (ou tampinhas). Esse material foi utilizado principalmente no início da atividade e serviu para simular, respectivamente, mesas e cadeiras.

A tarefa exploratório-investigativa 2 poderia ter sido realizada sem o uso do material concreto (tangível). Por exemplo, poderia ter sido pedido aos alunos que fizessem desenhos. No entanto, o fato de poder colocar e tirar as 'cadeiras' e agrupar as 'mesas' fez emergir padrões que provavelmente não teriam sido suscitados, se tivessem sido feitos apenas desenhos.

Para representar a sequência obtida através da manipulação do material concreto, foi construída uma tabela. O registro da tabela e, posteriormente, do desenvolvimento das subtarefas propostas (expressões, equações, cálculos) foi feito em papel kraft. O grupo dispunha também de pincéis atômicos coloridos para fazer esse registro.

No caso do grupo 3, foi construída também uma tabela auxiliar em uma folha separada.

O tempo foi suficiente para o desenvolvimento da atividade. Não houve tempo, no entanto, para a apresentação dos cartazes confeccionados pelos grupos, para toda a turma, conforme planejado. Como todos os grupos chegaram a resultados considerados satisfatórios e o encontro seguinte aconteceu depois de um mês, esse momento de comunicação geral dos resultados não foi realizado para essa oficina.

Terminada a análise das configurações e trajetórias didáticas, dedico-me à análise da trama de normas e metanormas, que não só regulam a dimensão epistêmica dos processos de ensino e aprendizagem (níveis 1 e 2), como também outras dimensões desses processos (cognitivo-afetiva, por exemplo). O quarto nível de análise estuda a referida trama.

6. IDENTIFICAÇÃO DO SISTEMA DE NORMAS E METANORMAS (NÍVEL 4)

Nesta seção, da mesma forma que no capítulo IV, as normas *epistêmicas* foram identificadas (Figura 32), utilizando-se a ferramenta *Configuração de objetos e significados,* proposta pelo EOS (GODINO, CONTRERAS e FONT, 2006).

Foi inferida também a norma *metaepistêmica* de que **as tarefas não rotineiras exigem mais atenção** [1].

> Prof 1: Todo mundo agora vai pegar, por favor, essa folhinha aqui. Queria que vocês agora... Gente, tem que prestar atenção porque se não, não consegue desenvolver a atividade! (*tom de voz enfatizando que a atividade é diferente*).Essa coisinha cinza (*retângulo recortado em lona*) nós vamos fingir que é uma mesa. Coloque essa mesa no centro do papel kraft. Agora tirem de dentro do saquinho... Cada um desses pininhos ou tampinhas vai ser...[1]

A Prof 1 introduz uma norma *epistêmica representacional* **ao convencionar que a peça retangular representa uma mesa**; posteriormente, o referido objeto poderá ser representado pela letra *m* (mesa) e, finalmente, pela letra *x*.

A norma *metainstrucional*: **devem-se propiciar situações em que os alunos se dediquem à descoberta** gerou a norma *afetiva* relacionada à **autoria da descoberta da solução**. Após a resposta ser validada por uma das professoras, os alunos, devido ao fato de estarem trabalhando em grupo, sentem necessidade de reafirmar [119,121] ou reivindicar [289] a autoria da descoberta.

> Paulo: [...]Vai dar 14.[118]
>
> Valter: É o que eu já tinha feito antes.[119]
>
> Paulo: 1, 2, 3, ...[120]
>
> Valter: Já tinha falado antes.[121]
>
> Valter: É 15 vezes 4 mais 2[285]
>
> Prof 2: Então, escreva o que o Valter tá falando.[288]
>
> Marcelo: É, mas a ideia foi minha, no caso, né Valter?[289]

Quando a autoria é reconhecida (na maioria das vezes, através de linguagem não verbal), o aluno 'contemplado' se mostra satisfeito, o que se deve em grande parte ao fato de a experiência pessoal de resolver um problema ser um dos fatores que favorece a autoestima.

Foram identificadas também outras normas que regulam as interações e que implicitamente aparecem durante a realização da tarefa, comuns a muitas práticas matemáticas, por exemplo, as professoras têm um papel determinante no início, na gestão e na finalização das intervenções; na conversação, deve-se prestar muita atenção às intervenções dos demais envolvidos e perguntar se tiver dúvidas.

A seguir, enumero outras normas *epistêmicas* e *metaepistêmicas* e indico trechos da transcrição da aula para exemplificar.

a) **Os padrões/fórmulas precisam 'funcionar' para quaisquer valores** (norma *epistêmica*) [244, 249, 407], bem como a norma *metaepistêmica* segundo a qual **é necessário testar os padrões/fórmulas** [407-423].

> Prof 2: Mas isso vai dar certo para as outras?[244]
>
> Paulo: Não.[245]
>
> Prof 2: Então, vamos pegar, vamos lá...[246]
>
> Prof 2: Agora, tem que ser pra todas![249]
>
> Prof 2: Então é o número de mesas que vai variar, não é isso? Então quer dizer que eu tenho que pegar 4 vezes o número de mesas e acrescentar mais 2? Vamos ver se vai dar certo: 4 vezes 1?[407]
>
> Todos: 4![408]
>
> Prof 1: mais 2?[409]
>
> Todos: 6![410]
>
> Prof 2: 4 vezes 2?[411]
>
> Todos: 8![412]
>
> Prof 2: mais 2?[413]
>
> Todos: 10![414]
>
> Prof 2: 4 vezes 3?[415]
>
> Todos: 12![416]
>
> Prof 2: mais 2?[417]
>
> Todos: 14![418]
>
> Prof 2: E se a gente estivesse na posição... 8! 4 vezes 8?[419]
>
> Todos: 32![420]
>
> Prof 2: mais 2?[421]
>
> Todos: 34[422]
>
> Prof 2: Ok?[423]

b) **Não basta dar uma solução, é preciso explicitar e justificar matematicamente o raciocínio** [66, 326, 327]; **Numa atividade matemática, é preciso chegar a um consenso** [312] (normas *metaepistêmicas*).

> Prof 1: Mas qual é o raciocínio? Você pensou assim: uma mesa tem 6...[66]
>
> Prof 2: Mas é isso que eu quero saber, porque cada um fala uma coisa. Eu quero saber o seguinte: eu tenho 42 cadeiras. Quantas mesas eu preciso. [312]

> Prof 2: Então, quanto que deu? Deu 10 mesas. Vocês vão ter que justificar aqui, ó![326] (*aponta para o papel kraft onde o registro escrito deveria ser feito*)
>
> Prof 2: Que conta que vocês fizeram para chegar nessas 10 mesas? [327]

c) **As fórmulas não admitem questionamentos** [397] (norma *metaepistêmica*). O Marcelo afirma, ao responder o item *d* da tarefa, que é possível utilizar 100 cadeiras, argumentando que ficariam 49 cadeiras de cada lado e 2 na cabeceira [396]. A professora, no entanto, testa a fórmula (x . 4 + 2) encontrada pelo grupo [397]:

> Marcelo: Professora, não vai dar 49?[394]
>
> Marcelo: Se tiver 49 aqui e 49 aqui, vai dar 98 mais uma aqui e outra aqui (*se refere às cadeiras da cabeceira*), vai dar 100![396]
>
> Prof 2: Vocês não estão usando essa regrinha aqui? Pois é, 4 vezes 25, 100 com mais 2, 102. Estourou! Vamos tentar agora 24! 24 vezes 4, segundo o Valter, deu 96. 96 mais 2, 98. Então não deu.[397]

d) **É necessário interpretar o sentido da solução no contexto do problema** [470] (norma *metaepistêmica*).

> Prof 1: Isso... e o zero! Então deu 24,5. [469]
>
> (*refere-se à resolução da equação 4 x + 2 = 100 que é realizada para responder ao item 'd' da tarefa*)
>
> Prof 1: Gente, por isso é que vocês responderam que não. 24 e meio... Existe meia mesa?[470]
>
> Valter e Paulo: Não. [471]

Tanto a Prof 2 [397] quanto a Prof 1[470] não aceitam a solução 24 mesas com 4 cadeiras e uma única mesa com 2 cadeiras (49 cadeiras de cada lado e uma em cada cabeceira). Tal solução pode ser possível no contexto prático, mas não no contexto matemático. Ainda que matematicamente a função direta c = 4 m + 2 exista para todo *m* pertencente ao conjunto dos números naturais, a função inversa $m = \frac{c - 2}{4}$ só existe quando c - 2 é múltiplo de 4.

Estabelece-se um conflito entre a solução de Marcelo (que considera o contexto prático/do cotidiano) e a solução aceita, em momentos distintos, pelas professoras (que consideram o contexto matemático). Infiro que a não validação da resposta de Marcelo explicita normas *epistêmicas contextuais*, evidenciadas a partir da confrontação entre as normas de uso do contexto real e as do contexto acadêmico.

A seguir, busco também identificar normas supostamente implicadas no aparecimento dos conflitos semióticos, explicitados durante a realização da tarefa (Quadro 26). Para facilitar a identificação e descrição dessas normas, utilizo o 4º nível de análise proposto por Planas e Iranzo (2009).

CONFLITO 1		
INTERAÇÕES	**PRÁTICAS**	**NORMAS METAEPISTÊMICAS**
[185] **Valter**: 22 (*se refere ao número de cadeiras para 5 mesas*), pra 10, vai ficar 44...	Procura descobrir o número de cadeiras necessário para 15 mesas.	
[186] **Paulo**: Não adianta somar não, tem que fazer!	Afirma que é preciso fazer a contagem.	
[188] **Paulo**: Essa regra pode mudar a qualquer hora.	Afirma que encontrar uma regra não 'vale a pena'.	As regras não são confiáveis (podem mudar).
[201] **Paulo**: 61! (*depois de contar as cadeiras*)	Proporciona uma solução incorreta.	
[202] **Marcelo**: 62!	Proporciona uma solução correta.	
[203] **Marcelo**: 1, 2, 3, ..., 20,..., 40,..., 62!	Refaz a contagem para confirmar a solução.	Há uma única resposta correta (ao menos nesse caso), portanto, alguém está equivocado.
[204] **Paulo**: Não tem não!	Discorda da solução.	
[205] **Marcelo**: é 62!	Reafirma a solução.	
[206] **Paulo**: 1, 2, 3, ..., 62	Afirma que concorda com a solução (tom de voz).	
[208] **Prof 2**: Como é que vocês descobriram que é 62?	Confirma a resposta e pergunta como chegaram a ela.	Não é suficiente dar uma solução. É necessário explicitar o raciocínio matemático.
[209] **Marcelo**: A gente contou.	Descreve o procedimento.	
[210] **Prof 2**: Ahhhh, tá.	Não valida o procedimento (tom de voz).	A contagem não é um procedimento válido (pelo menos não para essa tarefa).
[211] **Paulo**: Não tem jeito de errar.	Justifica a contagem.	A contagem é confiável

INTERAÇÕES	PRÁTICAS	NORMAS METAEPISTÊMICAS
[212] **Prof 2**: Mas e se eu quisesse então saber, com 52 mesas?!	Não valida a justificação e propõe uma nova situação-problema onde é mais difícil realizar a contagem.	A contagem não é um procedimento válido (pelo menos não para essa tarefa).
[213] **Paulo**: Com 52 mesas? Se aqui tem 62, vamos tirar 10! 1, 2, 3,...	Equivoca-se em relação à nova tarefa pedida. Tenta resolver a situação (como a interpreta) utilizando o procedimento de contagem.	
[214] **Prof 2**: Não, eu quero 52 mesas.	Esclarece a situação-problema.	
[215] **Paulo**: Mesas? Não tem mesas suficiente!	Afirma que não é possível fazer a contagem.	Não é possível dar uma resposta confiável sem fazer a contagem.
[216] **Prof 2**: Pois é, então, no caso, temos que pensar em um jeito que a gente consiga pensar lá na frente, não é?	Propõe que generalizem (implicitamente).	A generalização é um processo indutivo válido.
[217] **Paulo**: (*inaudível*)		
[218] **Prof 2:** Não, vamos pensar, Paulo. Para uma mesa eu teria 6 cadeiras. 2 mesas... 10 cadeiras. Vamos pensar numa fórmula (*tom de voz pausado e calmo*)	Inicia um procedimento que pode levar à generalização.	É necessário generalizar.
[219] **Valter**: Vamos chamar a quantidade de mesas de... de cadeiras de x.	Aceita desenvolver a tarefa, iniciando uma tentativa de generalização.	
[220] **Marcelo**: 52 vezes 6...	Aceita desenvolver a tarefa.	
[221] **Paulo**: Você vai multiplicar 4 por 6 e subtrair.	Parece aceitar desenvolver a tarefa.	
[231] **Prof 2**: Tem que chegar a uma fórmula... (*inaudível*)		É necessário se chegar a uma fórmula.
[232] **Marcelo**: cinquenta e dois vezes quatro mais dois! (52 x 4 + 2)	Descobre a expressão que dá a solução para a tarefa.	
[233] **Prof 2**: Paulo, vai chegar uma hora que... (*inaudível*)	Tenta convencer Paulo da necessidade de generalizar.	A contagem é um procedimento considerado pouco sofisticado em Matemática (*não é um procedimento adequado para grandes quantidades*).

QUADRO 26 - Exploração de relações em torno ao conflito 1

A análise das práticas da Prof 2 permite-me inferir normas *metaepistêmicas* baseadas em sua maneira de atuar (por exemplo, observando quais práticas valida). São elas: a contagem não é um procedimento válido (pelo menos não para essa tarefa); a generalização é um processo indutivo válido; é necessário chegar a uma fórmula; a contagem é um procedimento considerado pouco sofisticado em Matemática (não é um procedimento adequado para grandes quantidades).

7. AVALIAÇÃO DA ADEQUAÇÃO DIDÁTICA DO PROCESSO VIVIDO (NÍVEL 5)

As adequações didáticas foram agrupadas, assim como no capítulo V, nos seguintes pares: epistêmica-ecológica, cognitivo-afetiva e interacional-mediacional. Passo, a seguir, a analisar a adequação do processo vivido na oficina 8.

ADEQUAÇÃO EPISTÊMICA-ECOLÓGICA

A tarefa investigativa 2 (oficina 8) consistiu de uma situação-problema de fácil entendimento para os alunos, apresentando uma linguagem relativamente adequada para o nível educativo a que se dirigiu. As subtarefas constaram de situações desafiadoras, mas possíveis de serem resolvidas pelos alunos. A tarefa possibilitou diversas maneiras de abordagem, implicou diversos tipos de representação (através do material concreto, desenhos, tabelas), requereu que os estudantes conjecturassem, interpretassem, generalizassem e justificassem as soluções encontradas. Diante disso, pode-se dizer que a tarefa investigativa 2 apresentou uma adequação epistêmica *moderadamente alta.*

O estudo de padrões estava previsto no programa proposto para o 7º ano do Ensino Fundamental e permitiu, já que o tema foi proposto como uma atividade exploratório-investigativa, a prática investigativa e reflexiva. Não teve, no entanto, a preocupação em discutir formação de valores democráticos (crítica social) ou cidadania, indicando assim uma adequação ecológica global *mediana*.

ADEQUAÇÃO COGNITIVO-AFETIVA

Para a tarefa 2, os alunos mostram ter o conhecimento necessário para o estudo do tema, uma vez que os conteúdos apresentados se mostraram 'manejáveis' por eles, na medida em que conseguiram, em interação com os colegas e as professoras, progredir na resolução da tarefa chegando à generalização, o que dificilmente teriam feito sozinhos. Ao se compararem os conhecimentos pretendidos de serem mobilizados com a configuração epistêmica implementada (Figura 32), foi constatado que o grupo alcançou os objetivos propostos, desenvolvendo a tarefa até o final. Todos os integrantes do grupo apresentaram compreensão da situação proposta e permaneceram motivados durante toda a atividade. O grupo se dedicou predominantemente à exploração (E). Marcelo e Paulo foram os que mais participaram para justificar suas ideias (J), e Valter foi o aluno que mais formulou soluções (S). Já Vanderlei participou pouco de todo o processo porque se dedicou mais ao registro da atividade.

O grupo apresentou, gradualmente, cada vez mais confiança em suas habilidades para enfrentar os problemas, considerados difíceis inicialmente, e perseverança diante das dificuldades. Fato que se deve principalmente à forma paciente e compreensiva com que as professoras interagiram com os estudantes, buscando, sempre que possível, incentivar a participação dos alunos, tentando mostrar a eles que eram capazes de desenvolver a atividade. De fato, as professoras, ao longo de todo o trabalho, mantiveram uma interação regulativa (D), preocupando-se, predominantemente, com seu papel de atribuição de tarefas (AT), e manejo de classe (MC). A função docente mais identificada foi garantir a motivação do grupo (M). Concluindo, o processo vivido apresentou fortes evidências de uma adequação cognitivo-afetiva *moderadamente alta*.

ADEQUAÇÃO INTERACIONAL-MEDIACIONAL

As configurações didáticas foram interpretadas como predominantemente *dialógicas*, seguidas das *a-didáticas.* Em outras palavras, os alunos não assumiram um processo de busca autônomo, já que apresentaram dificuldades em progredir sozinhos. Ainda que fosse estimulada a interação entre os alunos (foi pedido a eles que 'validassem' suas respostas, explicando suas ideias aos demais componentes do grupo), o grupo solicitou bastante suporte das professoras. As interações estabelecidas entre os alunos e as professoras, no entanto, criaram a emergência de conflitos semióticos que, em sua maioria, foram resolvidos por meio da negociação de significados.

As professoras, em acordo com as normas e metanormas estabelecidas, mantiveram um formato de interação regulativa: não forneceram diretamente a resposta, mas foram estreitando o espaço de possibilidades ou ações possíveis dos alunos. Esse modo de interação limitou o grau de trabalho independente dos alunos, mas proporcionou o 'andaime' cognitivo que a progressão da aprendizagem requereu; do contrário, os alunos poderiam permanecer bloqueados. Tal fato, no entanto, me permite interpretar a adequação interacional como *moderadamente baixa*.

Os recursos materiais apresentaram-se adequados para o desenvolvimento da atividade, já que o material concreto (tangível) permitiu o surgimento de procedimentos diferentes na busca por soluções para a tarefa. O número de alunos (15) e sua distribuição em mesas hexagonais pela sala permitiram que as professoras acompanhassem de perto o trabalho dos grupos, com tempo adequado para a realização da tarefa. Não houve tempo[67] para o fechamento da atividade (momento em que todos os grupos apresentariam suas soluções para toda a classe); no entanto, como me dedico ao estudo apenas desse grupo e não da turma como um todo, interpreto a adequação mediacional como *moderadamente alta***.**

[67] O início da aula, como já aludido, foi dedicado ao fechamento da oficina 7. Como o encontro seguinte aconteceu muito tempo depois, avaliamos que não havia justificativa para fazer o fechamento posteriormente, já que todos os grupos conseguiram alcançar a generalização.

CAPÍTULO VI

ANÁLISE GLOBAL DA ADEQUAÇÃO DIDÁTICA

O presente capítulo constitui mais do que uma síntese da adequação didática discutida separadamente para as oficinas 7 e 8. Embora se faça alusão a conclusões explicitadas anteriormente, agora as adequações parciais – considerando-se as duas oficinas – são vistas como 'entrelaçadas' e a adequação do processo vivido é analisada de maneira global.

ADEQUAÇÃO EPISTÊMICA-ECOLÓGICA

A situação-problema proposta para a oficina 7 envolve sequências de padrões geométricos e pertence estritamente ao contexto matemático. Já a situação-problema da oficina 8 pode ser considerada como pertencente ao contexto da semirrealidade, já que representa uma situação matemática factível de ocorrer no dia a dia (se considerarmos os primeiros termos da sequência). Ambas situações-problemas demandam uma mudança do registro geométrico para o aritmético e deste para o algébrico.

As tarefas investigativas consistiram de situações-problemas de fácil entendimento para os alunos, apresentando uma linguagem adequada para o nível educativo a que se dirigiram, já que tratam de situações desafiadoras, possíveis de serem resolvidas por eles. As tarefas possibilitaram diversas abordagens, implicaram diversos tipos de representação (através de material concreto, desenhos, tabelas) e requereram que os estudantes conjecturassem, interpretassem, generalizassem e justificassem as soluções encontradas.

Além disso – como já discutido no capítulo III – o trabalho com sequências e padrões na Matemática é considerado importante porque constitui a base do pensamento algébrico elementar (NCTM, 2000).Vários autores (PONTE, 2005; ZAZKIS e LILJEDAHL, 2002; SOUZA e DINIZ, 2003) defendem uma abordagem com sequências e padrões para a introdução do conceito de variável, argumentando que, tradicionalmente, as variáveis são introduzidas como incógnitas em equações, nas quais elas não possuem uma natureza variável. Afirmam, ainda, que essa abordagem proporciona aos alunos a oportunidade de observar e verbalizar suas generalizações e registrá-las simbolicamente. Diante disso, pode-se dizer que as tarefas investigativas apresentaram uma adequação epistêmica global *moderadamente alta*.

O estudo de sequências e padrões é contemplado pelas diretrizes curriculares do 7º ano do Ensino Fundamental e permitiu, nas duas oficinas, dentro do possível, a prática investigativa e reflexiva. As atividades implementadas não tiveram, no entanto, o objetivo de abranger a formação de valores democráticos (crítica social) nem a preocupação em serem relacionadas com conteúdos interdisciplinares, indicando, assim, uma adequação ecológica global *mediana.*

ADEQUAÇÃO COGNITIVO-AFETIVA

Os alunos demonstraram ter o conhecimento necessário para o estudo do tema, ou seja, os conteúdos apresentados se mostraram 'manejáveis' por eles, possibilitando a emergência de ZDPs – como discutido por Frade e Meira (2012) – na medida em que conseguiram, em interação com os colegas e as professoras, progredir na resolução das atividades.

Ao comparar os conhecimentos pretendidos de serem mobilizados – configurações epistêmicas de referência – com as configurações epistêmicas implementadas (Figuras 24 e 32), foi constatado que, na oficina 8, o grupo alcançou os objetivos propostos, desenvolvendo-a até o final, e, na oficina 7, alcançou parcialmente os objetivos propostos, já que conseguiu expressar o *enésimo* termo, através de uma expressão matemática, apenas da 1ª sequência (atividade 1). Na 2ª e 3ª sequências (atividades 2 e 3), o grupo conseguiu expressar o *enésimo* termo com palavras, mas não levou em consideração que o número de bolinhas da base é um a mais que a posição que ocupam na sequência. A categoria de pensamento dos alunos, nesse momento se localizou entre o pensamento *proporcional* e *recursivo* (BISHOP, 2000) discutida no capítulo III.

Todos os integrantes do grupo apresentaram compreensão das situações-problemas propostas e permaneceram motivados e perseverantes durante toda a atividade. O grupo dedicou-se, nas duas tarefas, predominantemente à exploração. Marcelo e Paulo foram os que mais justificaram suas ideias; e Valter, o aluno que mais formulou soluções. Vanderlei – que na oficina 8 participou pouco de todo o processo, porque se dedicou ao registro da atividade desenvolvida pelo grupo – foi o aluno que, juntamente com Marcelo, fez mais descobertas a partir das explorações realizadas.

Os alunos, principalmente na oficina 7, apresentaram situações de 'atrito', seja desqualificando a resposta do outro ou revidando uma zombaria. Na maioria do tempo, no entanto, trabalharam efetivamente em grupo, dando suporte um ao outro, corroborando os argumentos dos colegas que consideravam pertinentes.

O grupo apresentou, gradualmente, cada vez mais confiança em suas habilidades para enfrentar os problemas e perseverança diante das dificuldades. Muito desse desenvolvimento se deveu à forma como as professoras interagiram com os estudantes (firme, assertiva e afetiva). A função docente mais identificada, nas duas oficinas, foi a garantia da motivação do grupo. Separadamente, poder-se-ia classificar a adequação cognitivo-afetiva da oficina 7 como mediana e a oficina 8 como moderadamente alta. Tendo, contudo, o processo vivido apresentado, globalmente, uma adequação *cognitivo-afetiva mediana*.

ADEQUAÇÃO INTERACIONAL-MEDIACIONAL

Passo, por fim, à discussão das interações, estabelecidas por alunos e professoras, delineadas pela dimensão mediacional e, principalmente, pelo cenário normativo e metanormativo em que ocorreram.

Na oficina 7, em muitos momentos, os estudantes assumem a responsabilidade do estudo. Em outros, o grupo demanda, por parte das professoras, uma interação em formato fortemente regulativo para conseguir progredir. As dezesseis subconfigurações didáticas foram interpretadas como predominantemente *a-didáticas* (50%) seguidas das *dialógicas* (31,2%) – em que os padrões de *focalização* se fizeram necessários – e *magistral interativas* (18,8%) em que, embora se estabelecesse diálogo entre as professoras e os alunos, é adotado um padrão de *recitação*. A adequação interacional da oficina 7 foi, portanto, classificada como *mediana*.

Na oficina 8, as onze subconfigurações didáticas foram interpretadas como predominantemente *dialógicas* (63,6%), seguidas das *a-didáticas* (27,3%) e *magistral interativas* (9,1%). Nessa oficina, os alunos assumem um processo de busca muito menos autônomo do que na oficina 7. Em contrapartida, os momentos de interação dialógica predominaram. A adequação interacional da oficina 8 foi, portanto, classificada como *baixa*.

A Tabela 1 permite uma visualização da trajetória didática implementada nas duas oficinas, bem como apresenta a distribuição das configurações e subconfigurações didáticas, levando-se em conta a tarefa ou subtarefa a que se referem.

Oficina 7		**Tipos de Configuração Didática**			**Oficina 8**		**Tipos de Configuração Didática**		
		a-didática	dialógica	magistral			a-didática	dialógica	magistral
CD1 Atividade 1	SCD1	x			CD1 item *a*	SCD1		x	
	SCD2		x		CD2 *item b*	SCD2	x		
	SCD3	x				SCD3		x	
	SCD4		x			SCD4	x		
	SCD5			x		SCD5		x	
CD2 Atividade 2	SCD6	x			CD3 item *c*	SCD6		x	
	SCD7		x		CD4 *item d*	SCD7		x	
	SCD8	x				SCD8	x		
	SCD9		x			SCD9		x	
	SCD10			x	CD5 itens *e* e *f*	SCD10		x	
	SCD11	x				SCD11			x
	SCD12			x					
	SCD13	x							
CD3 Atividade 3	SCD14	x							
	SCD15		x						
	SCD16	x							
TOTAL		8	5	3	TOTAL		3	7	1

TABELA 1 - Trajetórias didáticas implementadas nas oficinas 7 e 8

Nas duas oficinas, o modelo instrucional efetivamente implementado, levando-se em conta o nível de suporte dado aos alunos, localizou-se entre os níveis de *investigação estruturada* e *investigação guiada* (Quadro 2).

Uma regularidade interessante a se observar na trajetória didática estabelecida nas oficinas 7 e 8 (Tabela 1) é a forma cíclica com que os padrões de interação se 'entrelaçam'. As professoras, buscando otimizar a aprendizagem, na oficina 7, inicialmente, permitem que os alunos trabalhem sozinhos. Em seguida, intervêm de maneira dialógica e, por fim, ou novamente, permitem o trabalho independente ou tomam a decisão de agir de maneira magistral. Na oficina 8, iniciam o trabalho, predominantemente, com intervenções dialógicas e, em seguida, optam por configurações a-didáticas ou magistrais. Essas interações cíclicas, determinadas pelo gerenciamento da aprendizagem, são formatadas pela tomada de decisão das professoras frente à trajetória do pensamento matemático mobilizado pelos alunos.

Globalmente, a *adequação interacional classifica-se como mediana.*

Os recursos materiais, nas duas oficinas, se apresentaram adequados para o desenvolvimento da atividade, já que o material concreto (tangível), além de despertar nos alunos maior motivação para realizar a atividade, permitiu o surgimento de procedimentos diferenciados na busca por soluções para a tarefa. O número de alunos (15) e sua distribuição em grupos foi determinante – por permitir às professoras oferecerem um atendimento individualizado – para o nível de aprofundamento conseguido pelo grupo nas duas tarefas propostas. O tempo disponível, nas duas oficinas, foi suficiente para a realização das atividades selecionadas para análise neste trabalho. Sendo assim, a adequação mediacional pode ser interpretada como *moderadamente alta.*

DISCUSSÃO

Levando-se em consideração as oficinas 7 e 8 (Tabela 1), observa-se que as intervenções do tipo dialógicas mais que dobraram (passaram de 31,2% para 63,6%) e os momentos em que os alunos trabalham sozinhos caíram para aproximadamente metade (de 50% para 27,3%). A adequação interacional foi classificada como mediana na oficina 7 e baixa na oficina 8, considerando-se que atribuir um nível mais alto de autonomia aos estudantes é um critério de adequação interacional. A adequação cognitivo-afetiva, no entanto, passou de mediana para alta. Os alunos não só conseguiram melhorar seu desempenho como melhoraram também o relacionamento e o respeito em relação aos colegas do grupo.

A Figura 33 fornece-nos uma visão geral da adequação didática global do processo vivido nas oficinas 7 e 8. As adequações epistêmica e mediacional foram interpretadas como altas, já as adequações ecológica, cognitivo-afetiva e interacional não atingiram um nível satisfatório de adequação.

A aplicação dos critérios de adequação a um processo de ensino e aprendizagem permite-nos extrair conclusões de qual aspecto melhorar. Por exemplo, a insuficiente adequação ecológica poderia implicar, posteriormente, na escolha de atividades de cunho investigativo que levassem em consideração, além do currículo, a aplicação/utilização social do conteúdo desenvolvido (ou que levasse em conta a formação de cidadania ou crítica social). Já as insuficientes adequações cognitivo-afetiva e interacional dependeriam da continuidade do trabalho de investigação e reflexão, possibilitando aos alunos e professores cada vez mais familiaridade com as peculiaridades desse tipo de trabalho. No entanto, ainda que seja possível planejar a tarefa que será implementada, estabelecer os recursos materiais e temporais ou prever uma padrão de interação (investigação aberta, por exemplo), o que de fato ocorrerá vai depender dos múltiplos aspectos que constituirão o contexto no momento da realização da atividade.

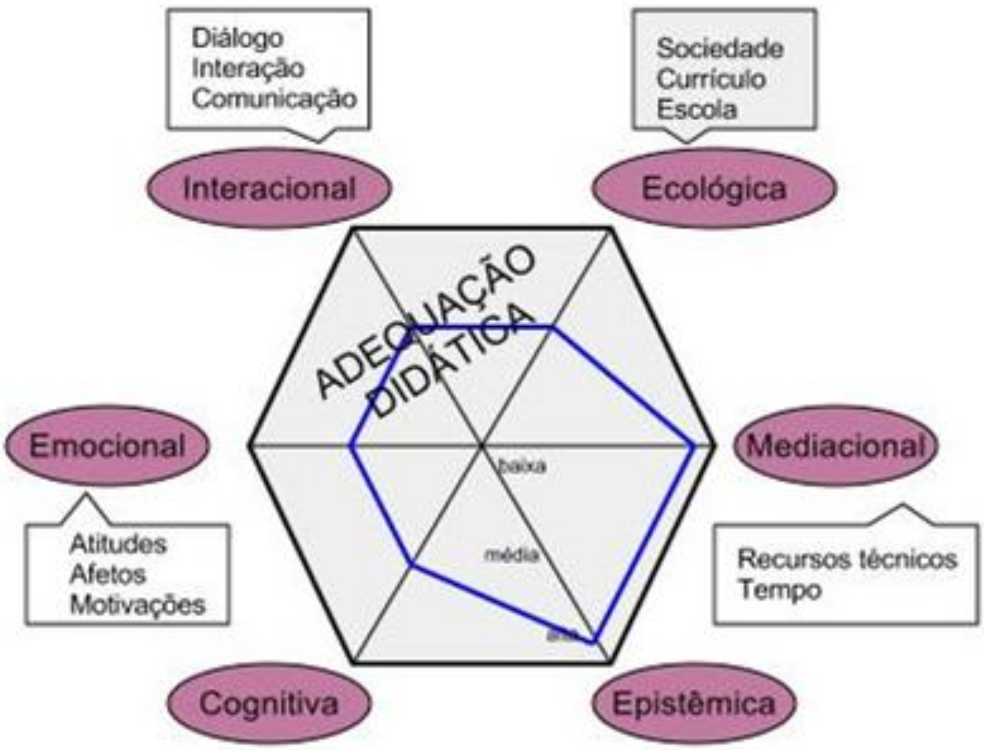


FIGURA 33 - Componentes da adequação didática global das oficinas 7 e 8

Os níveis alcançados pelas adequações parciais – adequação epistêmica alta, adequação ecológica mediana, adequação cognitivo-afetiva mediana, adequação interacional mediana, adequação mediacional alta – levam-nos a concluir que o processo de estudo analisado neste trabalho apresentou adequação didática de mediana a alta.

CAPÍTULO VII
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para finalizar esta tese, retomo o exposto nos capítulos anteriores e teço algumas considerações. Esse trabalho dedicou-se à análise de uma experiência educativa, implementada em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, situada na região urbana de Belo Horizonte (MG), e teve como objetivos: 1) identificar os aspectos constitutivos da produção de significados matemáticos no contexto de aulas exploratório-investigativas; 2) avaliar a adequação didática do processo vivido.

Partindo de uma perspectiva semiótico-cultural para a produção de significados (RADFORD, 2006, 2006a, DA ROCHA FALCÃO, 2009), e baseando-se na visão sociointeracionista de aprendizagem de Vygotsky, nessa investigação foram apreendidos os atos e processos de significação explicitados na experiência educativa aludida em termos da linguagem em suas dimensões verbal, gestual, gráfica e gráfico-simbólica.

Os dados produzidos – transcrição de gravações em áudio e vídeo, registros (textos, desenhos, etc.) gerados pelos alunos durante as atividades e anotações realizadas por mim ao final de cada oficina (diário de campo) – foram analisados, utilizando-se os cinco níveis de análise propostos pelo Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento Matemático (EOS), modelo teórico-metodológico idealizado por Godino e colaboradores (GODINO, BATANERO e FONT, 2007, 2008; FONT, PLANAS e GODINO, 2010).

O EOS foi concebido para analisar práticas matemáticas e didáticas, permitindo interpretar os dados de maneira sistêmica e profunda, a partir de cinco níveis: 1) Identificação de práticas matemáticas; 2) Elaboração das configurações de objetos e processos matemáticos; 3) Análise das trajetórias e interações didáticas; 4) Identificação do sistema de normas e metanormas; 5) Valoração da adequação didática do processo de ensino e aprendizagem.

A maioria dos trabalhos desenvolvidos sob o marco do EOS utiliza apenas um dos níveis de análise, tal o detalhamento que cada um deles pode proporcionar. De fato, trata-se de um modelo que, como uma radiografia, permite penetrar na estrutura interna da sala de aula e ressaltar aspectos e matizes, que podem parecer óbvios depois de explicitados, mas encontram-se ocultos ao primeiro olhar. É mérito deste trabalho, portanto, a aplicação de todos os níveis de análise propostos pelo EOS a uma só vez.

A descrição minuciosa da experiência vivida permitiu revelar a complexidade do trabalho realizado e as dificuldades vivenciadas não só pelos alunos, mas também pelas professoras na implementação e no gerenciamento das atividades exploratório-investigativas.

Para que uma atitude investigativa possa se desenvolver, recomenda-se que o professor centre sua aula na atividade dos alunos, em suas ideias, e em sua pesquisa, e mantenha uma postura questionadora gerenciando o grau de apoio a dar aos alunos (PONTE, FONSECA e BRUNHEIRA, 1999), de preferência o menor possível em relação a uma condução direta dos procedimentos a serem realizados. Contudo, a cultura da sala de aula não se altera de uma hora para outra, o que faz com que alunos habituados à aula clássica não se sintam imediatamente confortáveis com uma dinâmica exploratório-investigativa, demandando que seja criada uma longa fase de transição entre a dinâmica clássica e a investigativa. Nessa fase, por vezes, pode se fazer necessário que o professor ofereça mais 'suporte' do que seria desejado.

De fato, a análise e interpretação dos dados mostram que não basta dispor de 'situações ricas' ou criar um espaço em que os alunos tenham que argumentar e possam expressar o que pensam, nem é suficiente avaliar suas ideias como certas ou erradas. É preciso que o professor questione e problematize as ideias dos estudantes, para fazê-los vencer as dificuldades e progredir. Isso porque, no contexto aqui considerado (estudantes de aproximadamente 12 anos que não tinham tido, até então, contato com atividades investigativas), os alunos necessitam de grande 'suporte' por parte do professor. Tal fato nos remete à importância do trabalho do professor que deve ter um conhecimento amplo das configurações epistêmicas de referência; das configurações pessoais dos estudantes, produzidas coletivamente nas atividades, em relação aos conteúdos matemáticos pretendidos; ser capaz de identificar em momentos críticos os conflitos semióticos e tomar decisões sobre o tipo de atuação que deve adotar (GODINO, ROA, RECIO, RUIZ e PAREJA, 2006).

A partir da análise das interações estabelecidas entre alunos e professoras, foi revelado um fenômeno didático associado à gestão do ensino e aprendizagem de Matemática, em um contexto de aulas exploratório-investigativas: a necessária cooperação produtiva (sinergia) entre os distintos padrões de interação com a finalidade de possibilitar o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos. Foi possível concluir que a aprendizagem matemática pode ser otimizada, em determinadas circunstâncias, mediante uma estratégia metodológica mista em que o padrão de interação *a-didático* articula-se com outros padrões de trabalho cooperativo, *dialógico* e inclusive *magistral* (ASSIS, FRADE e GODINO, no prelo).

Há que se considerar, no entanto, que os padrões de interação são regidos/mediados por múltiplos aspectos da situação, dentre outros: a natureza da tarefa, o tipo de investigação proposta, a trama complexa de normas e metanormas envolvidas, o engajamento/envolvimento dos alunos com a tarefa, enfim, o contexto da atividade. A tomada de decisão do professor, por exemplo, em relação a como apoiar e quanto suporte proporcionar aos estudantes, dá-se momento a momento. Essa ação, por sua vez, restringe ou amplia a autonomia dos estudantes, gerando novas expectativas, o que, em um processo cíclico (Figura 34[68]) determina novo formato à trajetória didática ao longo do tempo (ASSIS, GODINO e FRADE, 2012).

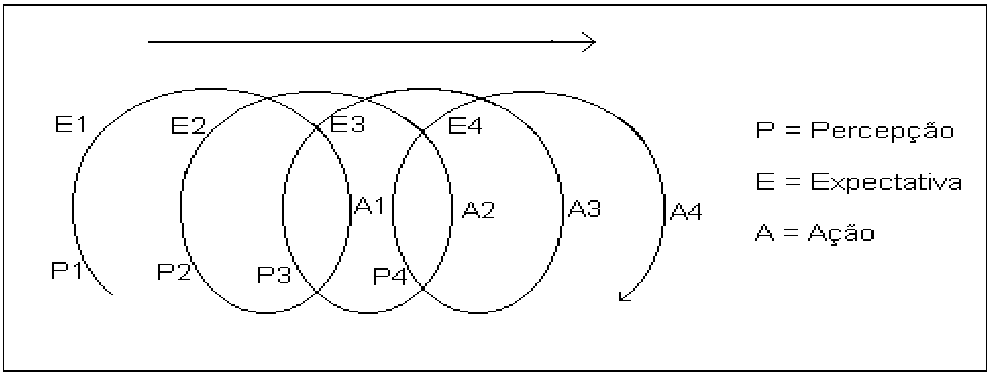


FIGURA 34 - Processo cíclico de uma trajetória didática implementada

Uma consequência que resulta dessa constatação, discutida em Assis, Godino e Frade (2012), refere-se à necessidade de se considerar um *componente essencialmente local* na otimização da aprendizagem e na importância de o professor ter consciência da trama complexa de normas e metanormas envolvidas nas práticas matemáticas e didáticas, assim como da necessidade de que as gerencie (negociando ou alterando), em cada momento da atividade, para garantir a efetiva aprendizagem dos alunos.

Cabe, ainda, destacar a contribuição teórica deste trabalho ao esclarecer a noção de *dimensão normativa* e *metanormativa* – mediante sua aplicação a interações na sala de aula de Matemática (ASSIS, GODINO e FRADE, 2012) – complementando e avançando no trabalho realizado por Godino, Font, Wilhelmi e Castro (2009), e ao desenvolver o conceito de *subconfigurações didáticas*, noção que permitiu uma análise mais pormenorizada das

[68] Adaptada do modelo estrutural de cognição situada (WELZEL e ROTH, 1998).

configurações e trajetórias didáticas, tornando perceptíveis fenômenos que poderiam não se revelar de outra maneira (ASSIS, FRADE e GODINO, no prelo).

Como síntese do primeiro objetivo de pesquisa, ressalto a necessidade de, ao recomendar atividades exploratório-investigativas como opção didática para o ensino e aprendizagem de Matemática, considerar os aspectos que constituem e, portanto, condicionam essa prática: afetividade (normas e metanormas, atitudes, emoções, motivação, etc.); materialidade (disponibilidade de tempo, meios, etc); formato da interação; tarefa proposta (representatividade matemática, possibilidade de emergência de ZDPs, adaptação ao currículo, sociedade, etc); familiaridade dos alunos (e do professor) com esse tipo de atividade, etc.

Como implicação pedagógica, destaco a potencialidade das atividades exploratório-investigativas como cenário para a produção de significados matemáticos, já que, neste estudo, o nível de adequação didática global alcançado pela prática analisada (de mediano a alto) – segundo objetivo de pesquisa – sugere que o trabalho com esse tipo de atividade pode proporcionar um contexto altamente adequado para a produção de significados. Este contexto, no entanto, é obviamente dependente dos aspectos que o constituem (ASSIS, GODINO e FRADE, submetido[69]).

Apesar de as aulas que adotam uma dinâmica clássica, comumente apresentarem um nível baixo de adequação didática global – como apontado pela análise realizada por Pochulu e Font (2011) de uma aula de Matemática 'tradicional' – as atividades investigativas não podem ser consideradas, por si só, inerentemente estimulantes nem didaticamente mais eficazes no contexto de ensino escolar de Matemática. Como comprova este estudo, a 'arquitetura' da tarefa não determina tudo. Há que se considerar os vários aspectos – aludidos no primeiro objetivo de pesquisa – que atravessam e compõem a a *mise en scène* real e efetiva da prática em sala de aula.

Esta investigação apresentou como limitações o número de sujeitos investigados – considerando que usualmente as turmas apresentam um número maior de alunos – e o fato de não ter sido possível investigar por um período maior de tempo.

Este estudo aponta para a necessidade de se realizarem mais investigações que se dediquem a compreender as especificidades da fase de transição que passam a trilhar os

[69] ASSIS, A.; GODINO, J. D.; FRADE, C. Evaluating the mathematical practice in a context of exploratory-investigative classes. *Educational Studies in Mathematics* (submetido).

alunos aos quais se propõe um trabalho didático de natureza investigativa (ou que o valha) a partir de uma dinâmica clássica.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática,* n.8, p.7-10, 1989.

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. *Dialogue and learning in Mathematics Education*: intention, reflection, critique. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

ARAÚJO, J. L.; BARBOSA, J. C. Face a face com a Modelagem Matemática: como os alunos interpretam essa atividade? *Boletim de Educação Matemática* (BOLEMA), n.23, p.79-95, 2005.

ARAÚJO, J. L.; PINTO, M. F.; LUZ, C. R.; RIBEIRO, A. R. Efemeridade dos cenários para investigação em um episódio de sala de aula de Matemática. *ZETETIKÉ*- Cempem - FE-Unicamp, v.16, n.29, 2008.

ARCAVI, A. El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *UNO:* Revista de Didáctica de las Matemáticas, p.59-75, 2007.

ASSIS, A. *Concepções de professores de matemática acerca da formulação e resolução de problemas*: processos de mudança. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

ASSIS, A.; GODINO, J. D.; FRADE, C. As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (Relime), v.15, n.2, p.171-198, 2012.

ASSIS, A.; FRADE, C.; GODINO, J. D. Influência dos padrões de interações didáticas no desenvolvimento da aprendizagem matemática: análise de uma atividade exploratório-investigativa sobre sequências. *Boletim de Educação Matemática* (Bolema), no prelo.

BAKHTIN, M. *Marxismo e filosofia da linguagem:* problemas fundamentais do método sociológico da ciência da linguagem. São Paulo, SP: Hucitec, 2002.

BANCHI, H.; BELL, R. The many levels of inquiry. *Science and Children*, v.46, n.2, p.26-29, 2008.

BARBOSA, J. C. *Modelagem na Educação Matemática*: contribuições para o debate teórico. Reunião Anual da ANPED, 2001. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_barbosa.pdf>Acesso em 21/09/2011>.

BARTOLINI BUSSI, M. G.; MARIOTTI, M. A. Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In: ENGLISH, L. D. et al (Eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*. USA: Taylor & Francis, 2008. Disponível em: <http://www.dm.unito.it/semdidattica/2010/2008_BarMarFer>. Acesso em 04/05/2010.

BAUERSFELD, H. Interaction, construction, and knowledge: alternative perspectives for mathematics education. In: COONY, T.; GROWS, D. (Eds.) Effective Mathematics Teaching

(Didactics of Mathematics). Antwerp: *Proccedings of the 2nd TME-Conference*. University of Antwerp, p.174-168, 1988.

BISHOP, J. Linear Geometric Number Patterns: middle school students' strategies. *Mathematics Education Research Journal*, v.12, n.2, p.107-126, 2000.

BLOOR, D. *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. London: The Macmillan Press, 1983.

BOALER, J. The development of disciplinary relationships: knowledge, practice, and identity in mathematics classrooms. *For The Learning of Mathematics*, p.42-47, 2002.

BOGDAN, R.C; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora, 1994.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didática da matemática. In: BRUN, J. *Didática das matemáticas*. Horizontes Pedagógicos: Instituto Piaget, Lisboa, 1999.

BROWN, J. S.; COLLINS, A.; DUGUID, P. Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher,* v.18, n.1, p.32-42, 1989.

BRUNER, J. *A Cultura da Educação*. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

_________ . *Atos de significação*. Porto Alegre: Artmed editora, 2002.

CANTORAL, R.; FARFÁN, R. M.; LEZANA, J.; MARTÍNEZ-SIERRA, G. Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación in Matemática Educativa* (Relime), número especial, p.83-102, 2006.

CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. Early algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F. K. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. R*eston, VA: National Council of Teacher of Mathematics, p.669-705, 2007.

CAVASSANE, R. P. *A crítica de Wittgenstein ao seu "tractatus" nas "investigações filosóficas"*. Disponível em: <http://www2.marilia.unesp.br/revistas/index.php/ric/article/viewFile/337/374>. Acesso em 15/09/2011.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.12, n.1, p.73-112, 1992.

CLANCEY, W. J. Situated action: a neuropsychological interpretation response to Vera and Simon. *Cognitive Science,* v.17, n.1, p.87-116, 1993.

_________ . Practice cannot be reduced to theory: knowledge, representations, and change in the workplace. In: BAGNARA, S.; ZUCCERMAGLIO, C.; STUCKY, S. (Eds.) *Organizational Learning and Technological Change.* Berlin: Springer. p.16-46, 1995. Papers from the NATO Workshop, Siena, Italy, September p.22-26, 1992.

_________ . *Situated cognition:* on human knowledge and computer representation. New York: Cambridge University Press, 1997.

COBB, P.; BAUERSFELD, H. (Ed.) *The emergence of mathematical meaning:* interaction in classroom cultures. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1995.

COLE, M. *Psicología cultural:* una disciplina del pasado y del futuro, Madrid: Morata, 1999.

CORREIA, M. F. B.; MEIRA, L. R. L. Explorações acerca da construção de significados na brincadeira infantil. *Psicologia:* Reflexão e Crítica, v.21, n.3, p.356-364, 2008.

D'AMORE, B. *Epistemologia e Didática da Matemática*. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

___________. Conclusiones y perspectivas de investigación futura. *Revista Latinoamericana de Investigación in Matemática Educativa* (Relime), número especial, p.301-306, 2006.

D'AMORE, B.; FONT, V.; GODINO, J. D. La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, v.28, n.2, p.49-77, 2007.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. O lugar teórico dos invariantes cognitivos e seu impacto na reflexão acerca do papel da linguagem no processo de conceptualização em matemática, *Anais IV Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática* (SIPEM), Brasília, 2009.

DÉCHEN, T. *Tarefas exploratório-investigativas para o ensino de Álgebra na 6ª série do Ensino Fundamental:* indícios da formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico. Dissertação. São Carlos: UFSCar, 2008. Disponível em: <http://www.bdtd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=2570>. Acesso em 05/03/2011.

DEWEY, J. *Como pensamos.*(Tradução de How we think,1933) São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

DUVAL, R. Basic issues for research in mathematics education. In: NAKAHARA, T.; KOYAMA, M. (Eds.) *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (PME), Japan, Nishiki Print Co., Ltd. I, p.55–69, 2000.

___________.Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Editora Papirus, p.11-34, 2004.

___________.A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v.61, p.103-131, 2006.

ERNEST, P. Varieties of constructivism: a framework for comparison. In: STEFFE, L.; NESHER, P.; COBB, P.; GOLDIN, G.; GREER, B. *Theories of Mathematical Learning*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1996.

___________.Introduction: semiotics, mathematics and mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, v. 10, 1997. Disponível em: <http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome10/art1.htm>. Acesso em 04/05/2010.

___________.*Social constructivism as a philosopy of mathematics*. New York: SUNY, 1998.

___________.Asemiotic perspective of mathematical activity: the case of number. *Educational Studies in Mathematics*, v.61, p.67-101, 2006.

FERNANDES, F. L. P. Letramento algébrico em um contexto de aulas exploratório-investigativas. *Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática* (EBRAPEM), 2010. Disponível em: <http://ebrapem.mat.br/inscricoes/trabalhos/GT08_Fernandes_TA.pdf>. Acesso em 24/07/2010.

FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E. M. *Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática*. Campinas: Alínea Editora, 2006.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. *Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas e na Formação de Professores*, Lisboa: FCUL, 2005 [online] Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/temporario/SEMLB/Fiorentini-Fernandes-Cristovao2.doc>. Acesso 30/07/2010.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar, In: *Pro-Posições:* Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação Unicamp. v.4, n.1, p.78-91, 1993.

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*. Online First, 2012.

FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J. D. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, v.33, n.1, p.89-105, 2010.

FRADE, C.; MEIRA, L. Interdisciplinaridade na escola: subsídios para uma zona de desenvolvimento proximal como espaço simbólico. *Educação em Revista*, Belo Horizonte, v.28, n.1, p.371-394, 2012.

FRADE, C.; TATSIS, K. Learning, participation and local school mathematics practice. *Montana math enthusiast*, v.6, p.96-112, 2009.

FRANKE, M.L.; KAZEMI, E.; BATTEY, D. Mathematics teaching and classroom practice. In: LESTER, J. F. K. (Ed.) *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics, p.226-256, 2007.

GAGATSIS, A.; ELIA, I.; MOUSOULIDES, N. Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in student's thinking? *Revista Latinoamericana de Investigación in Matemática Educativa* (Relime), número especial, p.197-224, 2006.

GEERTZ, Clifford. *A interpretação das culturas*. Rio de Janeiro: LTC, l989.

GIL-PEREZ, D.; MARTINEZ-TORREGROSA, J.; RAMIREZ, L.; DUMAS-CARRÉ, A.; GOFARD, M.; CARVALHO, A. M. P. Questionando a didática de resolução de problemas: elaboração de um modelo alternativo. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, v.9, n.1, p.7-19, 1992.

GODINO, J. D. Significado y comprensión en matemáticas. *UNO*, n.25, p.77-87, 2000. [Significato e comprensione dei concetti matematici. La matematica e la sua didattica, n.3, p.246-255. Trad. Berta Martini, 2001].

_________ **.** Competencia y comprensión matemática: ¿Qué son y cómo se consiguen? *UNO*, n.29, p.9-19, 2002.

GODINO, J.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.14, n.3, p.325-355, 1994.

GODINO, J.D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in Mathematics Education. *The International Journal on Mathematics Education* (ZDM), v.39, n.1-2, p.127-135, 2007.

___________. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v.10, n. 2, 2008.

GODINO, J. D.; BENCOMO, D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, v.27, n.2, p.221-225, 2006.

GODINO, J. D.; CONTRERAS, A.; FONT, V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, v.26, n.1, p.39-88, 2006.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (Relime), número especial, p.131-155, 2006.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R.; CASTRO, C. Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, v.27, n.1, p.59-76, 2009.

GODINO, J. D.; LLINARES, S. El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. *Revista Educación Matemática*, v. 12, n.1, p.70-92, 2000.

GODINO, J. D.; ROA, R.; RECIO, A. M.; RUIZ, F.; PAREJA, J. L. Análisis didáctico de un proceso de estudio de la ley empírica de los grandes números. *Revista Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo,v.8, n.2, 2006.

GOES, M. C. R. de. A natureza social do desenvolvimento psicológico. *Educação e Sociedade*: Revista Quadrimestral de Ciência da Educação/CEDES, n.24, p.17-24, 1991.

GREENO, J. G. On claims that answer the wrong questions. *Educational Researcher*, p.5-17, 1997.

GUZMÁN, M. Tendencias innovadoras en educación matemática. *Olimpíada Matemática*. Argentina, p.63-89, 1992.

HIEBERT, J. S.; GROUWS, D. A. The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In: LESTER, J. F. K. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics, p.371-404, 2007.

HMELO-SILVER, C. E.; DUNCAN, R. G.; CHINN, C. A. Scaffolding and achievement in Problem-Based and inquiry learning: a response to Kirschner, Sweller, and Clark (2006). *Educational Psychologist*, v.42, n.2, p.99-107, 2007.

HOFFMANN, M. H. G. What is a “semiotic perspective”, and what could it be? Some comments on the contributions to this special issue. *Educational Studies in Mathematics*, v.61, p.279–291, 2006.

JACCOUD, M.; MAYER R. A observação direta e a pesquisa qualitativa. In: POUPART, J.; DESLAURIERS, J.; GROULX, L.; LAPERRIÈRE, A.; MAYER, R.; PIRES, A.P. *A pesquisa* *qualitativa*: enfoques epistemológicos e metodológicos. Rio de Janeiro: Editora Vozes, p.254-294, 2008.

KUTSCHERA, F. V. *Filosofía del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1979.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. *Where mathematics comes from:* How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books, 2000.

LA TAILLE, Y de. *Piaget, Vygotsky, Wallon:* teorias psicogenéticas em discussão. S. P.: Summus, 1992.

LAVE, J. *Cognition in practice.* Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1988.

___________.Teaching as learning. *Practice, Mind, Culture and Activity*, v.3, n.3, p.149-164, 1996.

___________.Culture of acquisition and the practice of understanding. In: KIRSHNER, D.; WITSON, J. A. (Eds.) *Cognition:* Social, Semiotic, and Psychological Perspectives, 1997.

LAVE, J.; WENGER, E. *Situated learning:* legitimate peripheral participation. New York: Cambridge University Press, 1991.

LEONTIEV, A. N. *Activity, consciousness, and personality*. New Jersey: Prentice-Hall, 1978.

LERMAN, S. Getting used to mathematics: alternative ways of speaking about becoming mathematical. *Ways of Knowing Journal,* v.1, n.1, p.47-52, 2001.

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas.São Paulo: Editora da UNESP, p.75-94, 1999.

MACHADO, N. J. *Educação*: projetos e valores. 2. ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2000.

MARIOTTI, M. A. New artefacts and the mediation of mathematical meanings New artefacts. *Proceedings of the 17th ICMI Study, Technology Revisited*, 2006. Disponível em: <http://elib.lhu.edu.vn:8080/dspace/bitstream/123456789/4874/1/c32.pdf>. Acesso em 04/05/2010.

MARTIN, L.; TOWERS, J.; PIRIE, S. Collective mathematical understanding as improvisation. *Mathematical Thinking and Learning*, v.8, n.2, p.149-183, 2006.

MATOS, J. F. L. Aprendizagem e prática social: contributos para a construção de ferramentas de análise da aprendizagem matemática escolar. *Actas da II Escola de Verão.* Sessão de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Santarém, 1999.

MEIRA, L. R. L. *Produção de sentidos na ZDP*: teoria e método numa proposta de inspiração pragmatista. Recife, março 2007. Disponível em: <meira.luciano.googlepages.com/EditalHumanas50-2006MEIRA.pdf>. Acesso em 04/06/2009.

MEIRA, L.; LERMAN, S. The Zone of Proximal Development as a symbolic space. *Social Science Research Papers*, v.1, n.13, p.1-40, 2001. Disponível em: <http://pdf.edocr.com/56cfdca322e369aba2f663963796b0849e4debf9.pdf>. Acesso em 12/08/2010.

___________. Zones of Proximal Development as fields for communication and dialogue. In: LIGHTFOOT, C.; LYRA, M. C. D. P. (Org.) *Challenges and strategies for studying human development in cultural contexts*. Rome: Information Age Pub Inc. p.199-219, 2010.

MENEZES, L. Desenvolvimento da comunicação matemática em professores do 1º ciclo no contexto de um projecto de investigação colaborativa. *Actas do XVI SIEM*, p.349-365, Setúbal: APM, 2005.

MIRANDA, N. S. O caráter partilhado da construção da significação. *Veredas:* Revista de Estudos Linguísticos, v.5, n.1, p.57-81, 2002.

MIRANDA, G. V. de. Escola Plural. *Estudos Avançados*, v. 21, n.60, 2007.

MOLON, S. I. Subjetividade e constituição do sujeito em Vygotsky. *Anais III Conferência de pesquisa sócio-cultural*, Campinas, 2000. Disponível em<www.fae.unicamp.br/br2000/trabs/2330.doc>. Acesso em 24/06/2009.

MORGAN, C. What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics*, v.61, p.219-245, 2006.

MORSON, G. S.; EMERSON, C. *Mikhail Bakhtin*: a criação de uma prosaística. SP: Edusp, 2008.

MOYSÉS, L. *Aplicações de Vygotsky à educação matemática*. Campinas, SP: Papirus, 1997.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS MATHEMATICS – NCTM. *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA, 2000.

NORMAN, D. A. Cognition in the head and in the world: An introduction to the special issue on situated action. *Cognitive Science,* v.17, n.1, p.1-6, 1993.

NOVAES, A. *A imagem e o espetáculo.* São Paulo: Editora SENAC, 2005.

OLIVEIRA, M. K. *Lev Vygotsky*. Fortaleza, 2006. Disponível em: <www.sms.fortaleza.ce.gov.br/sms_v2/smse/textos/26_02_2006/TEXTO20LEV20VYGOTSKY.pdf>. Acesso em 12/06/2009.

OLIVEIRA, M. K. *Vygotsky, aprendizado e desenvolvimento um processo sócio-histórico*. São Paulo: Scipione, 1997.

OTTE, M. Mathematical epistemology from a peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics*, v.61, p.11-38, 2006.

___________. Proof and explanation from a semiotical point of view. *Revista Latinoamericana de Investigación in Matemática Educativa* (Relime), número especial, p.23-43, 2006a.

PIAGET, J. *O nascimento da inteligência na criança*. Delachaux & Niestlé S.A. Coleção Plural, n.10, 1971.

PIERCE, C. S. *Semiótica.* Tradução de José Teixeira Coelho Neto, 3ª edição. São Paulo: Editora Perspectiva, 2000.

PINO, A. O conceito de mediação semiótica em Vygotsky e seu papel na explicação do psiquismo humano. *Educação e Sociedade*: Revista Quadrimestral de Ciência da Educação/CEDES, n.24, p.32-43, 1991.

PLANAS, N.; IRANZO, N. Consideraciones metodológicas para el análisis de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (Relime), v.12, n.2, 2009.

POCHULU, M.; FONT, V. Análisis del funcionamiento de una clase de Matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (Relime), v.14, n.3, p.361-394, 2011.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas* (Tradução de How to solve it, 1945). Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. Lisboa: *Actas do ProfMat2003* (APM), p.25-39, 2003.

_________. Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática*, v.85, p.36-42, 2005.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Autêntica, 2006.

PONTE, J. P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. As atividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. Lisboa: *Actas do ProfMat99* (APM), p.91-101, 1999.

POZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M. P. P.; CASTILLO, J. D.; CRESPO, M. A. G.; ANGÓN, Y. P. *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

PRESMEG, N. Semiotics and the “connections” standard: significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v.61, p.163-182, 2006.

PRESTES, Z. R. *Quando não é quase a mesma coisa*. Análise de traduções de Lev Semionovitch Vigotski no Brasil. Repercussões no campo educacional. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Brasília, 2010.

RADFORD, L. The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*, v.61, p.39-65, 2006.

___________. Introducción Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación in Matemática Educativa* (Relime), número especial, p.7-21, 2006a. Disponível em:< http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33509902.pdf>. Acesso em 04/05/2010.

RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; SEEGER, F. (Eds.) *Semiotics in Mathematics Education:* Epistemology, History, Classroom, and Culture. Rotterdam: Sense Publishers, 2008.

ROCHA, C. A.; PESSOA, G.; PEREIRA, J. A. A.; SILVA FILHO, J. M. O uso do geoplano para o ensino de geometria: uma abordagem através de malhas quadriculadas. *Anais IX Encontro Nacional de Educação Matemática* (ENEM), Belo Horizonte, 2007.

ROGOFF, B. *Apprenticeship in thinking.* Oxford University Press, 1990.

ROIG, A. I.; LLINARES, S. Fases en la abstracción de patrones lineales. In: LUENGO, R.; GÓMEZ, B.; CAMACHO, M.; BLANCO, L. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XII*, Badajoz, p.195-204, 2008.

SÁENZ-LUDLOW, A. Classroom interpreting games with an illustration. *Educational Studies in Mathematics*, v.61, p.183-218, 2006.

SANTAELLA, L. *O que é semiótica.* São Paulo: Brasiliense, 2007.

SCHLÖGLMAN, W. Meta-affect and strategies in mathematics learning. Anais IV *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME), Sant Feliu de Guíxols, Spain, p.275-284, 2005.

SCHOENFELD, A. Por que toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Eds.) *Investigar para aprender Matemática*. Lisboa: APM e Projeto MPT, p.61-72, 1996.

___________. Problem solving from cradle to grave. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, v.11, p.41-73, 2006.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, v.22, p.1-36, 1991.

SIERPINSKA, A. Whither mathematics education? In: ALSINA, C. et al. (Eds.) *Acta del 8º Congreso International de Educación Matemática*, Sevilla: Sociedad Thales, p.21-46, *1996*.

SKOVSMOSE, O. *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

___________. Cenários para Investigação. *Boletim de Educação Matemática* (Bolema), n.14, p.66-91, 2000.

___________. *Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica*. Campinas, SP: Papirus, 2008.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S. V. *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. Coleção do CAEM – Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática – volume 5. IME-USP, São Paulo, 2003.

SPRADLEY, J. P. *Participant Observation.* Nova York: Holt, Rinehart and Winston, 1980.

STACEY, K. Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics*, v. 20, n.2, p.147-164, 1989.

STEINBRING, H.What makes a sign a mathematical sign? – an epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics*, v. 61, p.133-162, 2006.

TALL, D. The transition from arithmetic to algebra: number patterns, or perceptual programming. *New Directions in Algebra Education Technology.* Brisbane, p.213–231, 1992.

THRELFALL, J. Repeating patterns in the early primary years. In: ORTON, A. (Ed.) *Patterns in the teaching and learning of mathematics*, London: Cassell, p.18-30, 1999.

VAN DER VEER, R.; VALSINER, J. *Vygotsky*: uma síntese. S. P.: Loyola,1996.

VILELA, D. S. Notas sobre a matemática escolar no referencial sócio-histórico-cultural. *Horizontes*, v.24, n.1, p.43-50, 2006.

VOIGT, J. Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Roubaix, v.6, n.1, p.69-118, 1985.

___________. Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In: COBB, P.; BAUERSFELD, H. (Eds.) *The emergence of mathematical meaning:* Interaction in classroom cultures, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Pub, p.163-199, 1995.

___________. Negotiation of mathematical meaning in classroom processes: Social interaction and learning mathematics. In: STEFFE, L.; NESHER, P.; COBB, P.; GOLDIN, G.; GREER, B. (Eds.) *Theories of Mathematical Learning* . Mahwah, NJ*:* Lawrence Erlbaum Ass. Pub. p.21-50, 1996.

VYGOTSKY, L. S. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Grijalbo, 1988.

___________. *A construção do pensamento e da linguagem.*Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

WARTOFSKY, M. *Models*, D. Reidel, Dordrecht, 1973.

WELZEL, M.; ROTH, W. Do interviews really assess students'knowledge? *International Journal Science Education*, v.20, n.1, p.25-44,1998.

WENGER, E. *Communities of practice:* learning, meaning and identity. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998.

WERTSCH, J.V. *Voices of the mind*: A sociocultural approach to mediated action. Harvard University Press, 1993.

WITTGENSTEIN, L. *Tratado lógico-filosófico* e *Investigações filosóficas* (edição conjunta). Tradução de M.S.Lourenço, 2ª edição. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1995.

WOOD, T. Patterns of interaction and the culture of the mathematics classroom. In: LERMAN, S. (Ed.) *Culture Perspectives on the Mathematics Classroom*. Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publ., p.149-168, 1994.

YACKEL, E.; COBB, P. Social mathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.27, n.4, p.458-477, 1996.

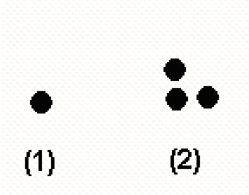
ZAZKIS, R.; LILJEDAHL, P. Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, v.49, p.379-402, 2002.

ANEXO 1

Tarefa Investigativa 1: Sequencias de Bolinhas e suas Formas

Que tal descobrir relações entre a forma como a sequência é construída, a quantidade de bolinhas em determinada posição e a sua posição nessa sequência? *Desafio vocês a investigar e descobrir as próximas posições da sequência!*

Dê uma olhada nas duas primeiras posições da sequência de bolinhas abaixo:



O grupo achou complicado? A seguir, encontram-se algumas questões para a orientação do estudo.

1. Continue a sequência, desenhando até a 10ª posição.

2. O grupo seria capaz de encontrar outras maneiras de continuar essa sequência? Quais seriam?

3. Se o grupo pensou em mais de um tipo de sequência, escolha a que mais lhe agrada para encontrar um jeito de dizer por escrito como seria a sua 100ª posição. Além disso, seria capaz de dizer quantas bolinhas terá a 100ª posição?

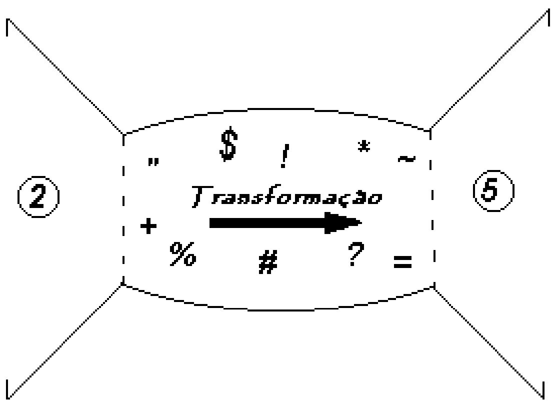
4. Vocês conseguem agora escrever uma regra que pudesse representar o número de bolinhas ou a forma de uma posição qualquer (indefinida) da sequência?

ANEXO 2

Tarefa Investigativa 3: A Máquina Mágica

Hoje, vocês conhecerão a *Máquina Mágica*. Ela faz transformações de números escolhidos por nós em outros números. O seu mecanismo é simples: ela faz a mesma mágica para qualquer número que passar por ela. Além disso, ela é uma máquina especial: ela não possui um segredo único, isto é, existem vários truques de transformação. *Vocês seriam capazes de descobrir as mágicas dessa máquina? Desafio vocês a descobri-las!*

A máquina é a seguinte:



O modo de operá-la é o seguinte: ao escolher o número 2, a máquina o transformou em 5.

1. Descubram a mágica dessa máquina e, em seguida, façam um teste para outros cinco valores. Nessa máquina, podem-se escolher números negativos para serem transformados? E o zero?

2.Como foi comentado no início, se vocês analisarem a máquina com mais atenção, encontrarão outras mágicas possíveis para ela. Anotem todas as mágicas que encontrarem. Em seguida, escolham uma dessas mágicas e testem-na para outros cinco valores.

3. Escrevam, com suas palavras, qual é a mágica feita pela máquina escolhida no item 2.

4. Com a mágica escolhida no item 2, testem para um número “x”. Como ficaria o resultado? Escreva uma expressão matemática que represente o número x transformado pela máquina.

ANEXO 3

Oficina de Álgebra

Nas tabelas a seguir, descubra qual a regra para se chegar ao número respondido. Escreva uma frase e uma expressão que representa a regra.

1) Número dito	4	6	10	15	3	
Número respondido	8	12	20	30	6	

Frase: ____

Expressão:____

2) Número dito	1	0	2	8	12	3
Número respondido	3	0	6	24	36	9

Frase: ____

Expressão:____

3) Número dito	2	3	4	7	10
Número respondido	21	31	41	71	101

Frase: ____

Expressão:____

4) Número dito	1	2	3	- 1	- 2
Número respondido	5	7	9	1	- 1

Frase: ____

Expressão:____

5) Número dito	0	1	2	3	4
Número respondido	0	1	4	9	16

Frase: ____

Expressão:____

6) Número dito	1	2	3	4	5
Número respondido	2	5	10	17	26

Frase: ____

Expressão:____

7) Número dito	0	6	10	15	100
Número respondido	0	3	5	7,5	50

Frase: ____

Expressão:____